UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Facultad de Magisterio

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Didácticas Específicas
(Especialidad de Didáctica de las Matemáticas)

Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
Clara Benedicto Baldonado

Dirigida por:
Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez
Dra. Adela Jaime Pastor

Valencia, abril de 2018

La Dra. Dña. Adela Jaime Pastor y el Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

HACEMOS CONSTAR

- Que la presente memoria, titulada *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de Enseñanza Obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas*, ha sido realizada bajo nuestra dirección por Dña. CLARA BENEDICTO BALDONADO en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y constituye su tesis para optar al Grado de Doctora.

- Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizamos su depósito y defensa en la Universitat de València.

Para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos este documento en Valencia, a 28 de marzo de 2018.

Dra. Adela Jaime Pastor Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todos aquellos que sin cuyo apoyo y aportaciones no hubiese sido posible este trabajo.

A mis directores, el Dr. Ángel Gutiérrez y la Dra. Adela Jaime. Por toda su ayuda, su plena disponibilidad, su cercanía, su constante guía, sus correcciones minuciosas y sus sabios consejos y orientaciones. Ha sido un placer trabajar con vosotros.

A los docentes Carlos García y Tomas Queralt y a todos sus alumnos que, de forma completamente desinteresada, han posibilitado el desarrollo de esta investigación. Gracias por abrirme las puertas de vuestras clases, por encontrar la manera de hacer un hueco en la planificación de vuestra programación y por facilitarme la recogida de datos.

A la asociación AVAST, por darme la oportunidad de formar parte de vosotros, por introducirme en el mundo de las altas capacidades y por acercarme a las historias de cada uno de esos alumnos. Porque, además de proporcionarme los medios para recoger los datos de esta investigación, trabajar allí me ayudó a desarrollar mi creatividad y a disfrutar como nunca enseñando matemáticas.

A todos los miembros de GEDES. Por vuestra colaboración, vuestra entrega en el diseño de materiales y vuestra hospitalidad durante el tiempo que estuve en Colombia, país que siempre recordaré con un enorme aprecio.

A mis padres, por haber estado a mi lado durante todo este largo y duro proceso, por su paciencia, su comprensión y por su constante apoyo en todas mis decisiones.

A mis amigas, por ser simplemente ellas, por hacerme desconectar y recuperar fuerzas en los momentos más duros.

Y en especial, a Albert, por su comprensión, su infinito cariño, por hacerme feliz y transmitirme día a día esa energía capaz de superar todos los momentos de flaqueza.

Por último, quiero dedicar este trabajo a mi tía, por inculcarme el amor por las matemáticas y guiarme hacia una profesión con la que disfrutar día a día.

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, como parte de las actividades del Grupo de Investigación de la UV *Grupo de investigación en didáctica de la geometría y en enseñanza a estudiantes de altas capacidades matemáticas* (GIUV2013-095).

Las investigaciones realizadas en las sucesivas etapas de desarrollo de esta Tesis Doctoral han formado parte de los proyectos de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259, MINECO), *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional* (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER) y *Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico* (EDU2017-84377-R, MINECO/FEDER)

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Introducción

La investigación que presentamos en este documento está inducida por nuestro interés en aportar respuestas a dos motivaciones. La motivación general de esta investigación tiene que ver con la necesidad de diseñar buenas prácticas docentes para atender a los estudiantes con altas capacidades matemáticas (aaccmm). Esta necesidad nos incitó a buscar una herramienta que dotara al profesorado de técnicas de intervención para la atención de los estudiantes con talento matemático[1]. Para ello, tratamos de utilizar el *modelo de demanda cognitiva* (Smith y Stein, 1998), considerado un instrumento relevante para la valoración de tareas[2] (NCTM, 2014). Las dificultades que encontramos cuando empezamos a aplicar dicho modelo en nuestras experimentaciones nos llevaron a identificar y definir la segunda motivación de esta investigación, mejorar el modelo de demanda cognitiva para convertirlo en la herramienta que mencionábamos antes, adecuada para elaborar y seleccionar tareas que atiendan las necesidades educativas de los estudiantes con aaccmm.

En este capítulo describimos las dos motivaciones, general y específica, que nos indujeron a la realización de esta investigación, detallamos los objetivos

---

[1] Pese a que en la literatura de psicología educativa podemos encontrar diferentes definiciones para los términos *estudiantes con altas capacidades matemáticas* (aaccmm) y *estudiantes con talento matemático*, en esta memoria los utilizaremos como sinónimos.

[2] En este texto, para evitar la continua repetición de un mismo término, consideraremos los términos *tareas*, *actividades* y *problemas* como equivalentes, a pesar de las diferencias de significado que diversos autores les asignan a estos términos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas.

específicos de nuestro estudio y presentamos un resumen de la organización de esta memoria de tesis doctoral.

1.1 Contextualización y motivación general de la investigación

La motivación general que nos lleva a realizar este trabajo es la dificultad que supone plantear problemas que permitan desarrollar las habilidades matemáticas de los estudiantes, dada la diversidad de capacidades existente en un aula, en particular cuando nos encontramos con estudiantes con aaccmm. En la actualidad, el sistema educativo español reconoce a estos estudiantes dentro del grupo de estudiantes con necesidades educativas especiales, considerando que requieren algún tipo de atención individualizada. Es importante resaltar que una falta de atención puede generar desinterés por el estudio de las matemáticas, dificultades de aprendizaje e incluso alteraciones en su comportamiento.

Para una adecuada atención de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes de aaccmm, en el contexto de las clases ordinarias de Educación Primaria y Secundaria, es necesario tener en cuenta diferentes factores que influyen en sus procesos de aprendizaje de las matemáticas, de manera que exista una adecuada relación entre estos y las tareas planteadas por los profesores. Para abordar este propósito es necesario responder una serie de preguntas:

1. ¿Qué habilidades caracterizan a los estudiantes con talento matemático?

   La caracterización del talento matemático como caso particular de talento permite definir unas posibles actuaciones para estimularlo y desarrollarlo. Para ayudar a mejorar el rendimiento escolar de estos estudiantes, es importante descubrir su potencial y desarrollar sus capacidades con la mejor atención educativa. Como el resto de los niños y niñas, los estudiantes con talento son un grupo heterogéneo y, por lo tanto, sus necesidades educativas no son las mismas para todos, tanto por su edad, como por el contexto educativo. Sin embargo, es posible reconocer unas características comunes que permiten diseñar unas prácticas docentes que los atiendan. De entre las habilidades propias de los estudiantes con aaccmm identificadas en la literatura (Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Miller, 1990), en este trabajo vamos a centrar la atención en la identificación de patrones, la generalización de relaciones geométricas y las habilidades de visualización. Para ello, hemos realizado tres experimentos basados en la resolución de tareas matemáticas que impliquen el desarrollo de estas tres habilidades. Esto nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta:

2. ¿Qué tareas favorecen el desarrollo de las habilidades de los estudiantes, en particular, de estudiantes con talento matemático? ¿Qué características deben cumplir esas tareas?

Uno de los principales elementos en el aprendizaje de los estudiantes son las actividades que el profesor les propone. Para poder valorar la idoneidad de las actividades es importante realizar una correcta clasificación de estas. Podemos encontrar diferentes investigaciones que aluden a las características que deben cumplir las actividades para incrementar el aprendizaje de las matemáticas. Recientemente, el NCTM (2014) ha hecho hincapié en la importancia del uso de actividades que promuevan el razonamiento matemático avanzado (también llamado razonamiento matemático de alto nivel) para mejorar la calidad del aprendizaje. Siguiendo esta premisa, en esta investigación vamos a utilizar tareas con un alto nivel de razonamiento. La identificación y selección de estas actividades nos lleva a la última pregunta:

3. ¿Qué herramienta podemos utilizar para diseñar y analizar actividades matemáticas?

En la actualidad existen diversos modelos teóricos utilizados para valorar las actividades que se proponen a los estudiantes. El NCTM (2014) reconoce la validez del modelo de la demanda cognitiva para alcanzar este propósito, ya que este modelo permite identificar las tareas con un alto nivel de exigencia cognitiva. El uso de este tipo de tareas resulta particularmente relevante para los estudiantes con aaccmm, ya que las actividades que requieren razonamientos complejos son las más adecuadas para ayudarles a desarrollar sus capacidades.

Recogiendo las respuestas a las tres preguntas anteriores, en nuestra investigación hemos utilizado el modelo de demanda cognitiva como marco de referencia y herramienta para el diseño y selección de actividades matemáticas que desarrollen habilidades propias de los estudiantes con talento matemático. No obstante, al poner en práctica el modelo de demanda cognitiva con dicho propósito, hemos encontrado diversas dificultades que han influido en la formulación de la motivación específica de esta investigación.

1.2 Contextualización y motivación específica de la investigación

Coincidimos con el NCTM (2014) en considerar que el modelo de demanda cognitiva es adecuado para valorar la idoneidad de las tareas matemáticas, ya que proporciona unos criterios teóricos que ayudan a identificar la complejidad del razonamiento necesario para resolver problemas planteados en los libros de texto o por los profesores. Evaluando la reflexión y el razonamiento requeridos, el modelo de demanda cognitiva identifica cuatro niveles según el grado de complejidad cognitiva de la resolución de las tareas.

Al igual que otros autores habían hecho previamente, procedimos a analizar el nivel de demanda cognitiva de las tareas que estábamos utilizando en nuestros experimentos mediante dicho modelo. Pero, al realizar este análisis teórico, encontramos algunas dificultades para identificar el nivel de demanda cognitiva al que pertenecían las actividades. Esto nos hizo percatarnos de que, en todas las publicaciones consultadas, los investigadores se centraban en analizar problemas muy específicos, de tipo aritmético o algebraico, por lo que los criterios teóricos de identificación de los niveles de demanda cognitiva definidos por las autoras del modelo estaban singularizados a las características de este tipo de problemas. Ello nos llevó a darnos cuenta de que, dadas las diferencias entre las tareas utilizadas por los autores consultados y las nuestras, la manera como estaban formuladas las características de los niveles de demanda cognitiva generaba una falta de claridad al aplicarlas a nuestras tareas y a las respuestas de los estudiantes de nuestros experimentos. Esto nos permitió observar ciertas debilidades del modelo de demanda cognitiva y motivó que nos planteáramos algunas preguntas específicas de esta investigación:

1. ¿Cómo podemos mejorar el modelo de demanda cognitiva para transformarlo en una herramienta útil para analizar una mayor variedad de tareas matemáticas?

Para avanzar en una respuesta a esta cuestión, exploramos detalladamente cada una de las características del modelo, identificando aquellos aspectos que diferenciaban un nivel de otro. Tras un análisis exhaustivo observamos que las características de los niveles hacían referencia a diversos aspectos concretos de las tareas y de sus procesos de resolución. Esto nos permitió organizar las características de cada nivel, proceder a modificar y completar su formulación y a añadir algunas nuevas características de los niveles de demanda cognitiva. Finalmente, comprobamos que los cuatro niveles quedaban correctamente delimitados, que todas las características eran claras y concisas y que se podían aplicar de manera fiable para evaluar los niveles de demanda cognitiva de nuestras tareas y de las respuestas de los estudiantes.

Al poner en práctica el modelo, observamos que algunas características de los niveles eran demasiado generales y poco operativas, lo que nos llevó a plantear la siguiente pregunta:

2. ¿Cómo podemos adaptar el modelo de demanda cognitiva para facilitar el análisis de tareas concretas?

Para facilitar nuestro análisis, decidimos especificar aquellas características que eran demasiado genéricas. Para ello, particularizamos las características del modelo de demanda cognitiva a cada uno de los tres contextos matemáticos de nuestra investigación (pre-álgebra, geometría plana y visualización) teniendo en cuenta, primero, las peculiaridades de cada contexto matemático y, después, las de cada tarea particular. Durante las primeras fases de nuestros experimentos, observamos que, el análisis teórico de las actividades, tal y como se hacía en la literatura que habíamos consultado, no permitía mostrar la diversidad de resoluciones que estábamos encontrando en nuestras experimentaciones.

3. ¿El análisis teórico de las tareas matemáticas es suficiente para valorar el nivel de demanda cognitiva de las tareas y de los estudiantes que las resuelvan? ¿Analizar, además, las respuestas reales, aporta información valiosa para identificar el potencial de los estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, en particular los de aaccmm?

En las publicaciones que hemos consultado, el modelo se había utilizado para determinar la demanda cognitiva que supone para los estudiantes resolver un problema analizando las respuestas típicas esperadas de estudiantes medios del curso en el que se plantea esa actividad, pero no analizando resoluciones reales de los estudiantes. Para completar el análisis teórico, decidimos plantear las tareas a diferentes colectivos de estudiantes y analizar sus respuestas, lo que nos permitió identificar diferentes estrategias de resolución correctas con distintos niveles de demanda cognitiva y comparar las respuestas de estudiantes de grupos ordinarios y estudiantes con talento matemático, observando cómo los estudiantes con talento matemático utilizaban estrategias de resolución con un nivel de demanda cognitiva superior.

1.3 Objetivos

Podemos resumir el planteamiento de las motivaciones de esta investigación mediante el siguiente esquema:

En resumen, el objetivo general de esta investigación consiste en *proporcionar una herramienta que permita al profesorado de matemáticas diseñar buenas prácticas docentes para el desarrollo de las habilidades de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas en un aula inclusiva.*

La decisión de utilizar el modelo de demanda cognitiva como instrumento para alcanzar dicho objetivo nos ha llevado a concretar el objetivo general en cuatro **objetivos específicos**:

i) Reformular y estructurar el modelo de la demanda cognitiva de Smith y Stein para adecuarlo a cualquier contexto de las matemáticas escolares.
ii) Particularizar las características del modelo reformulado a diversos tipos de actividades concretas.
iii) Evaluar el nivel de demanda cognitiva de las actividades diseñadas en nuestros experimentos mediante un doble análisis, teórico y de respuestas, que permita identificar diferentes grados de talento en los estudiantes.
iv) Valorar las actividades diseñadas para atender las necesidades educativas de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, en particular de aaccmm.

La memoria está organizada en 7 capítulos. Después de este capítulo introductorio, en el capítulo 2 presentamos una revisión de resultados de investigaciones previas relacionadas con el alumnado con talento matemático, los criterios o modelos teóricos para clasificar o evaluar actividades matemáticas, y los procesos de enseñanza y aprendizaje de pre-álgebra y visualización.

En el capítulo 3 describimos el marco teórico en el que fundamentamos la investigación. Determinamos las características del talento matemático en las que hemos centrado esta investigación y describimos las principales estrategias de intervención utilizadas para desarrollar el potencial de estos estudiantes. Por otra parte, detallamos todas las modificaciones realizadas al modelo de demanda cognitiva para elaborar el instrumento mejorado que hemos utilizado en nuestra investigación para la valoración de actividades. Con respecto a los patrones geométricos, describimos la estructura de las actividades propias de este contexto matemático e identificamos las estrategias de resolución y los grados de generalización utilizados en su resolución. Además, detallamos las características de las actividades de geometría plana en las que centraremos el experimento correspondiente. Por último, enumeramos las habilidades de visualización observadas en la resolución de las tareas propias de este contexto matemático y utilizadas en la particularización del modelo de demanda cognitiva.

En el capítulo 4 describimos la metodología utilizada en esta investigación. Primeramente, describimos los sujetos participantes, los instrumentos utilizados para la recogida de datos y las actividades propuestas en los tres experimentos de la investigación. A continuación, detallamos la particularización del modelo de demanda cognitiva a los tres contextos matemáticos. Por último, explicamos en qué consiste el doble análisis realizado para valorar la idoneidad de las tareas experimentadas.

En el capítulo 5 presentamos los tres experimentos llevados a cabo, mostrando el doble análisis realizado, teórico y de respuestas, basado en analizar las estrategias de resolución, teóricas y observadas en la experimentación, y en determinar el nivel de demanda cognitiva de cada una de ellas.

El capítulo 6 muestra los resultados relativos a la evolución del nivel de demanda cognitiva de los estudiantes a lo largo de la resolución de las actividades. Mostramos las diferentes trayectorias de resolución y analizamos las diferencias encontradas entre los estudiantes de los grupos ordinarios y los estudiantes con aaccmm.

Finalmente, en el capítulo 7 mostramos las conclusiones obtenidas que responden a los objetivos de investigación, las aportaciones del estudio, sus limitaciones y posibles perspectivas de investigación futura que pueden derivarse de esta investigación.

2. Revisión bibliográfica

Este capítulo está dividido en cuatro secciones, dedicadas, respectivamente, al alumnado con talento matemático, a los criterios de clasificación de tareas matemáticas, a los conceptos básicos referentes a pre-álgebra y problemas de patrones geométricos y a algunos aspectos de la visualización en matemáticas relevantes para nuestra investigación.

2.1 Alumnado con talento matemático

En las últimas décadas, se ha producido un aumento de la sensibilidad social por atender la diversidad en nuestras aulas y ofrecer a cada estudiante una respuesta educativa de calidad. Actualmente, la LOMCE incluye a los alumnos con altas capacidades (aacc) dentro del "alumnado con necesidad específica de apoyo educativo". En la nueva redacción del artículo 71, se afirma que:

> Corresponde a las Administraciones educativas asegurar los recursos necesarios para que los alumnos y alumnas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria, por presentar necesidades educativas especiales, por dificultades específicas de aprendizaje, TDAH, **por sus altas capacidades intelectuales**, por haberse incorporado tarde al sistema educativo, o por condiciones personales o de historia escolar, puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos establecidos con carácter general para todo el alumnado. (la negrita es nuestra)

La LOMCE propone una educación que ofrezca una respuesta diferenciada y ajustada a las necesidades de los estudiantes con altas capacidades intelectuales. No obstante, la atención educativa de este alumnado supone un reto para los docentes, por lo que las altas capacidades siguen siendo hoy en día un asunto de interés tanto en las aulas como para la investigación. En particular, la atención a los estudiantes con aaccmm es un tema de interés para los investigadores en educación matemática.

En esta sección realizamos una revisión bibliográfica de diferentes investigaciones realizadas sobre altas capacidades matemáticas. Para ello, empezamos haciendo una breve introducción de la terminología utilizada para designar a los estudiantes con capacidades superiores. A continuación, resumimos algunas publicaciones que presentan características del talento matemático, repasamos algunos trabajos que se centran en los diferentes procedimientos de identificación de estudiantes con talento matemático y presentamos algunas investigaciones sobre las alternativas de intervención educativas para dar respuesta a estos estudiantes, incluyendo entre estas el uso de actividades matemáticas ricas y desafiantes.

2.1.1 *Diferentes términos referidos a estudiantes con capacidades superiores*

Actualmente existen distintos términos que designan a los estudiantes que destacan respecto a la media, entre ellos, superdotados, altas capacidades, talentosos, prodigios o genios. Hay diversidad de definiciones para algunos de estos términos. Basándonos en las publicaciones consultadas, en este trabajo tomamos las definiciones más usadas:

- *Superdotados.* Son aquellos estudiantes que destacan en todos los ámbitos. La configuración cognitiva de la superdotación se caracteriza por la combinación de todos los recursos intelectuales, lo que posibilita un elevado nivel de eficacia en cualquier forma de procesamiento y gestión de la información (Aretxaga, 2012; Jaime y Gutiérrez, 2014).

- *Altas capacidades.* Son aquellos estudiantes que presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia (Torrego y otros, 2011).
- *Talentosos.* Son aquellos estudiantes que destacan en un área determinada. Se puede hablar de talento académico, talento matemático, talento verbal, talento motriz, talento social, talento artístico, talento musical, talento creativo… (Aretxaga, 2012; Jaime y Gutiérrez, 2014; Torrego y otros, 2011).
- *Prodigios.* Son aquellos estudiantes que realizan una actividad fuera de lo común para su edad (Torrego y otros, 2011).
- *Genios.* Son aquellos estudiantes que con capacidades excepcionales en inteligencia y creatividad han creado una obra importante y significativa para la sociedad (Torrego y otros, 2011).

Existen diversas teorías (Gardner, 1999; Renzulli, 1978; Sternberg, 1986) que describen el carácter multidimensional y multifacético de los fenómenos de superdotación y talento. Estas teorías consideran que la inteligencia está compuesta por diferentes componentes, siendo las matemáticas uno de ellos, y que por lo tanto no debe ser considerada como un atributo unidimensional. Dentro de los estudiantes con capacidades superiores, en este trabajo nos centramos en aquellos que sobresalen en matemáticas. Por esta razón, considerando únicamente la capacidad matemática y con el fin de evitar la repetición continua de un mismo término, tomaremos los términos altas capacidades matemáticas y talento matemático como equivalentes.

2.1.2 *Características de los estudiantes con talento matemático*

Krutetskii (1976, p. 77) define el talento matemático como “el conjunto único de habilidades matemáticas que abren la posibilidad de éxito en el desempeño de una actividad matemática”. La caracterización de los estudiantes con talento matemático es fundamental para su identificación y atención. Por esta razón, algunos autores como Freiman (2006), Greenes (1981), Krutetskii (1976), Miller (1990) y Tourón y otros (1998) han elaborado listas de características observadas en estudiantes con talento matemático. Estas listas sirven para identificar a estudiantes con talento matemático, determinando qué estudiantes de un centro de enseñanza ordinario poseen algunas de dichas características. Gutiérrez y Jaime (2013) consideran que las habilidades enunciadas por estos autores pueden organizarse según tres tipos:

- Afectivo (relacionadas con el gusto e interés por las matemáticas).
- De aprendizaje (relativas a sus formas de aprender diferentes contenidos matemáticos).
- De resolución de problemas (sobre sus estrategias de resolución, procesos metacognitivos de control, uso de la imaginación e intuición, etc.).

En la Tabla 1 presentamos una recopilación de las características, clasificadas en los tres tipos de habilidades mencionados.

	Afectivas	**Aprendizaje**	**Resolución de problemas**
Krutetskii (1976)		- Habilidad para formalizar material matemático. - Habilidad para generalizar material matemático. - Memoria matemática - Habilidad para conceptos espaciales.	- Habilidad para operar con números y símbolos. - Habilidad para el razonamiento lógico. - Habilidad para acortar los procesos de razonamiento. - Habilidad para invertir los procesos mentales. - Flexibilidad de pensamiento.
Greenes (1981)	- Formulación espontánea de problemas.	- Habilidad para transferir ideas. - Habilidad para generalizar.	- Flexibilidad en el manejo de datos. - Habilidad para organizar datos. - Agilidad mental para el flujo de ideas. - Originalidad de interpretación.

	Afectivas	Aprendizaje	Resolución de problemas
Miller (1990)	- Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica.	- Rapidez inusual para aprender, comprender y aplicar ideas matemáticas. - Habilidad inusual para transferir aprendizaje a nuevas situaciones matemáticas.	- Gran habilidad para pensar y trabajar de un modo abstracto y habilidad para ver patrones y relaciones matemáticas. - Habilidad inusual para pensar y trabajar con problemas matemáticos de un modo flexible y creativo.
Tourón y otros (1998)		- Rapidez de aprendizaje. - Generalización y transferencia. - Capacidad de abstracción. - Memoria matemática para las relaciones, las características, los métodos, los principios y los símbolos matemáticos. - Estructura mental matemática.	- Flexibilidad en los procesos mentales requeridos para la actividad matemática. - Reducción del proceso de razonamiento matemático. - Pensamiento lógico. - Habilidad para la inversión de los procesos mentales en el razonamiento matemático.
Freiman (2006)	- Pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean.	- Construye nexos y estructuras matemáticas. - Presta atención a los detalles. - Desarrolla estrategias eficientes. - Piensa críticamente. - Persiste en conseguir sus objetivos.	- Busca patrones y relaciones. - Busca la clave (esencial) del problema. - Produce ideas originales y valiosas. - Mantiene la situación del problema bajo control. - Cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra.

Tabla 1. Características de los estudiantes con talento matemático.

2.1.3 *Identificación de estudiantes con talento matemático*

El listado de características reflejado en la Tabla 1 permite conocer algunos detalles de las habilidades mostradas por los estudiantes con talento matemático. No obstante, la identificación de estos estudiantes continúa siendo un aspecto complejo para el cual todavía no se ha encontrado una respuesta unánime. Pitta-Pantazi y Christou (2009) justifican que esto es debido principalmente a tres causas: la ausencia de una clara definición de talento matemático, la carencia de instrumentos matemáticamente apropiados para la identificación y la naturaleza heterogénea de los estudiantes con talento matemático.

Para identificar a los estudiantes con talento se pueden utilizar procedimientos cuantitativos o cualitativos.

Los procedimientos cuantitativos se basan en pruebas o tests psicológicos. Benavides, Maz, Castro y Blanco (2004) ofrecen una lista donde nombran algunos de los principales instrumentos cuantitativos:

- Test de inteligencia general. Entre los más utilizados para la evaluación del talento están el Stanford-Binet Test of Intelligence, las escalas de Wechsler y el test de matrices progresivas de Raven.
- Test de aptitudes específicas. Un buen ejemplo de este tipo es la batería de prueba de Aptitudes Mentales Primarias (PMA) de Thurstone.
- Pruebas de rendimiento o basadas en el currículum. Pruebas para evaluar el nivel de competencia o de desempeño del alumno en las distintas áreas curriculares.
- Test de creatividad. Destaca el Test of Creative Thinking (TTCT) de Torrance.

Los procedimientos cualitativos recogen observaciones y opiniones, tanto del propio alumno como de aquellas personas que pueden proporcionar información pertinente referente a su desarrollo, intereses, expectativas, aficiones, ubicación escolar, resultados académicos, etc. Entre estos procedimientos, las técnicas más comunes son los informes de los profesores, los informes de los padres, las nominaciones de los compañeros y los autoinformes.

Miller (1990, p. 4) considera que “los tests de inteligencia a menudo dan información valiosa y proporcionan las claves de que existe talento matemático, sin embargo, no son suficientes para identificar una alta habilidad en matemáticas”. En la misma línea, Benavides (2008) y Castro (2008) consideran que, al identificar alumnos únicamente utilizando tests estandarizados, corremos el riesgo de rechazar a diversos alumnos que deberían ser identificados como talentos matemáticos. Por esta razón, varios autores han tratado de diseñar procedimientos que combinen una batería de preguntas propias de un test psicológico con la resolución de problemas.

Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández (2008) aplican una prueba compuesta por 6 problemas que requieren aptitudes matemáticas avanzadas y una batería de problemas de Aptitudes Mentales Primarias de Thurstone. Tras un análisis cuantitativo, el estudio concluye que los problemas son un instrumento eficaz para identificar talentos matemáticos y que el uso exclusivo de pruebas de evaluación de aptitudes tradicionales puede desechar sujetos que poseen muy buena capacidad matemática. En definitiva, para identificar talentos matemáticos, diversos autores consideran conveniente aplicar pruebas específicas en las que se evalúen las características que definen el talento matemático y los procesos que se desarrollan para la resolución de determinados problemas. De manera similar, Benavides (2008) construye un instrumento formando por problemas de estructura multiplicativa que desempeñen la función de test de aptitud matemática y permitan identificar los estudiantes con talento matemático. En su trabajo, Benavides compara los rendimientos obtenidos por niños con talento en el test de Raven y en la resolución de problemas con estructura multiplicativa, concluyendo que el cuestionario de problemas es un instrumento de mayor discriminación entre estudiantes con y sin talento matemático que el test de Raven.

Buscando procedimientos de investigación diferentes de los métodos cuantitativos, algunos autores se han centrado exclusivamente en la relación existente entre la resolución de problemas y el talento matemático. Leikin, Koichu y Berman (2009) sugieren que el talento matemático puede caracterizarse por los actos llevados a cabo durante la resolución de problemas. En la misma línea, Rojas, Jiménez y Mora (2009) presentan una revisión de los antecedentes de investigación relacionados con la resolución de problemas como medio para la caracterización e identificación del talento en matemáticas, y en particular la resolución de problemas de visualización. Estos autores concluyen que la revisión de los documentos confirma que la resolución de problemas es una herramienta que permite identificar características de talento matemático. No obstante, no podemos decir lo mismo del caso particular de la resolución de problemas de visualización. Los problemas relacionados con la visualización permiten identificar algunas características de talento matemático, sin embargo, no una cantidad considerable. Esto puede deberse a las pocas investigaciones enfocadas en esta línea que son consideradas en la revisión bibliográfica.

Por otra parte, hay autores (Juter y Sriraman, 2011; Pitta-Pantazi, 2017) que defienden y utilizan la relación existente entre la creatividad y el talento matemático para la identificación de estos estudiantes, entendiendo la creatividad matemática en términos de fluidez, flexibilidad y originalidad de las respuestas de los estudiantes.

2.1.4 *Estrategias de intervención educativa para estudiantes con talento matemático*

La identificación es el primer paso para atender las necesidades educativas de estos estudiantes, pero no es suficiente para dar respuesta a la diversidad existente en las aulas. Independientemente de los procedimientos utilizados en la identificación de estudiantes con talento matemático, diferentes autores (Benavides, 2008; Ramírez, 2012) coinciden en que el objetivo de la identificación no es sólo la categorización de los sujetos con talento, sino dar el primer paso para proporcionar los recursos y procedimientos de actuación para atender las necesidades de estos estudiantes.

Hoy en día existe una amplia gama de posibilidades que se deben considerar para atender las necesidades de los estudiantes con talento matemático en las aulas. Éstas incluyen, entre otras: aceleración, enriquecimiento, diferenciación, compactación del currículo, disposición de mentores y participación en competiciones (Pitta-Pantazi, 2017). Los programas para apoyar a los estudiantes con aaccmm varían en función de cada país. Singer, Sheffield, Freiman y Brandl (2016) realizan una breve descripción del estado de la educación de estos estudiantes en todo el mundo, recogiendo diferentes opiniones acerca de los grupos homogéneos y heterogéneos en función de sus capacidades, las ventajas e inconvenientes de la aceleración del estudiante y el papel de los programas extracurriculares para atender a los estudiantes con talento matemático. En España, se publicó en 1996 una Resolución que regulaba los procedimientos para atender las necesidades de los estudiantes superdotados (MEC, 1996). En ella se determina que se pueden aplicar dos procedimientos:

1. adaptación curricular de ampliación [*enriquecimiento*]
2. flexibilización del período de escolarización obligatoria [*aceleración*]

Sin embargo, como propone González (2007), algunos autores recomiendan combinar ambos modelos, dando más importancia a los aspectos metodológicos, usando una amplia variedad de recursos, proponiendo problemas de final abierto y/o con distintas alternativas para llegar a la solución, fomentando que los estudiantes expliquen lo que han aprendido, usando actividades ‘extra-curriculares’ que constituyan un reto para los estudiantes, que requieran alta demanda cognitiva, etc. Un enfoque común para apoyar a los estudiantes en la profundización de su comprensión matemática es el uso de *actividades matemáticas ricas*, entendiéndolas como actividades que tienen una gama de características que en conjunto ofrecen diferentes oportunidades para satisfacer las diversas necesidades de los estudiantes en distintos momentos y que, en particular, resultan desafiantes para los estudiantes con aaccmm (Piggott, 2011).

Varios estudios sobre la resolución de problemas han demostrado la eficacia de este enfoque en el desarrollo del talento matemático (Leikin, Koichu y Berman, 2009; Rojas, Jiménez y Mora, 2009). No obstante, es importante que los estudiantes no solo aprenden a resolver problemas, sino también a reformular y plantear nuevas preguntas que sean auténticos problemas para ellos, desafiándolos a perseverar y luchar para encontrar una solución (Singer, Sheffield, Freiman y Brandl, 2016). Leikin (2010) afirma que enseñar a los estudiantes con talento matemático no implica incluir solo la solución de tareas no convencionales o tareas de múltiple solución, la condición necesaria para el desarrollo de estos estudiantes es el desafío matemático. Leikin (2014) define *desafío matemático* como una dificultad interesante y matemáticamente motivadora que una persona puede superar. Esta autora considera que el desafío matemático puede aparecer en diferentes formas y a través de diferentes tipos de tareas y muestra una gran variedad de ejemplos de tareas desafiantes:

tareas de soluciones múltiples, tareas de demostración, tareas de definición de nuevos conceptos, tareas basadas en la investigación u otras tareas complejas que involucran a los estudiantes en nuevas exploraciones matemáticas (Leikin, 2010; 2011). Siguiendo esta premisa, Freiman (2006; 2008) afirma que no es posible desarrollar el pensamiento de los estudiantes si trabajan con tareas aritméticas rutinarias, aplicando algoritmos proporcionados por el docente que indican a los estudiantes qué hacer y cómo hacerlo. Este autor defiende el uso de *situaciones desafiantes* a partir de la resolución de problemas matemáticos abiertos, ya que un verdadero desafío solo es posible cuando la situación es nueva para el estudiante y provoca que este reflexione sobre la insuficiencia del conocimiento pasado y construya nuevos mecanismos adaptados a las nuevas condiciones, activando todo su potencial intelectual. Freiman considera que las situaciones desafiantes pueden ayudar a descubrir y apoyar a estudiantes con talento matemático y propone una guía para desarrollar el potencial de los estudiantes con aaccmm y el papel del profesor durante su desarrollo.

Considerando la importancia del uso de tareas apropiadas para el de los estudiantes con talento matemático, algunos autores se han dedicado a estudiar las características que deben cumplir los problemas para favorecerlo. Burjan (1991) hace una serie de recomendaciones sobre las características de los problemas a utilizar para desarrollar razonamientos complejos:

- Problemas de respuesta abierta.
- Problemas que permiten varios enfoques diferentes.
- Tareas no estándar.
- Tareas centradas en habilidades de alto nivel.
- Tareas complejas que requieren el uso de varias “piezas de conocimiento matemático” de diferentes tópicos.
- Tareas no centradas en un único conocimiento.

En la misma línea, Jaime y Gutiérrez (2014) señalan la escasez de materiales disponibles para ser utilizados por los maestros, y plantean la necesidad de proporcionar recursos que sirvan de apoyo en sus clases. Estos autores describen algunos productos disponibles y presentan una propuesta propia, consistente en organizar las clases de matemáticas de manera que permitan integrar a los niños de altas capacidades matemáticas en su grupo de clase, utilizando las mismas tareas para todo el alumnado. Estas tareas deben incluir actividades matemáticas ricas (Piggott, 2011) y no ser lineales, sino que presenten diferentes facetas de distintos grados de complejidad y profundidad, de manera que toda la clase trabaje en los mismos problemas, pero que permitan un avance mayor o menor en la resolución, dependiendo de la capacidad matemática de cada estudiante.

En particular, podemos encontrar diferentes materiales diseñados para atender las necesidades específicas de los estudiantes con altas capacidades en alguna área concreta de las matemáticas. Ramírez (2012) diseña un experimento de enseñanza para desarrollar la visualización de los alumnos con talento matemático. En esta misma área, Escrivà (2016) diseña y experimenta un conjunto de actividades de geometría tridimensional que permiten a los estudiantes con diferentes grados de talento desarrollar sus habilidades de visualización. En lo que respecta al pre-álgebra, Arbona (2016) diseña y experimenta una secuencia de enseñanza-aprendizaje que permita la iniciación al álgebra de estudiantes de Educación Primaria con aaccmm mediante la resolución de problemas de patrones geométricos.

No obstante, pese a las diferentes investigaciones realizadas que proporcionan algunas medidas y recursos, el diseño y uso de actividades que presten atención a las necesidades específicas de estudiantes con aaccmm en las aulas sigue siendo muy deficiente. Por esta razón, el objetivo de este trabajo no es únicamente proporcionar materiales para el desarrollo de las capacidades de estos estudiantes, sino ofrecer una herramienta que ayude a los docentes a crear sus propias actividades que cubran las necesidades educativas de la diversidad del aula.

2.2 Criterios o modelos para clasificar tareas matemáticas

Uno de los elementos más importantes en el aprendizaje de las matemáticas son las tareas que el profesor propone a sus estudiantes. Las tareas determinan lo que los estudiantes pueden llegar a aprender. Como afirman Penalva y Llinares

(2011, p. 29), “las tareas son los instrumentos que utiliza el profesor para que los estudiantes aprendan matemáticas”.

Para poder valorar la idoneidad de las actividades que planteamos a nuestros estudiantes, es importante realizar una correcta clasificación de estas. Existen diferentes criterios para hacerlo y son muchos los autores que han investigado sobre ello.

Uno de los factores importantes a tener en cuenta a la hora de seleccionar actividades es determinar qué objetivos de aprendizaje se pretende conseguir con dichas tareas. A mediados del siglo XX, un grupo de profesores consideraron la necesidad de concretar las expectativas que se tiene de los estudiantes para así poder crear y compartir actividades con los mismos objetivos. Bloom y otros (1956) presentan una herramienta, la *Taxonomía de los objetivos educativos*, más conocida como la *Taxonomía de Bloom*, para poder clasificar los objetivos curriculares y las actividades, y así poder determinar el potencial de cada una de las tareas propuestas según los objetivos que trabajen. La taxonomía original consiste en 6 categorías del dominio cognitivo (conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis y evaluación) ordenadas desde las más simples a las más complejas, y desde lo más concreto a lo más abstracto.

Más tarde, Anderson y Krathwohl (2001) realizan una revisión de la taxonomía de Bloom donde dichas categorías son convertidas en 4 categorías (conocimiento basado en hechos, conocimiento basado en conceptos, conocimiento procedimental y conocimiento metacognitivo) y añaden una nueva dimensión para organizar los objetivos principales con la ayuda de una serie de verbos clave (recordar, entender, aplicar, analizar, evaluar y crear). La taxonomía revisada proporciona una tabla de dos dimensiones con las cuatro categorías de conocimiento y los seis principales verbos, que permite clasificar los objetivos, las actividades y las evaluaciones, y que puede servir de apoyo a los profesores para mejorar el planteamiento del currículo.

La preocupación por la mejora del aprendizaje de los estudiantes a partir de un conocimiento más profundo de las expectativas que se tiene de ellos induce a otros autores a realizar algunos trabajos sobre la relación existente entre los objetivos que se pretenden y otros aspectos, como la evaluación o la instrucción del profesor. Webb (1997) considera esencial, para asegurar un correcto aprendizaje, la existencia de coherencia entre las expectativas de lo que lo estudiantes deben saber acerca de las matemáticas y la evaluación del rendimiento en matemáticas de los estudiantes, que medirá si las expectativas han sido alcanzadas. Análogamente, Webb (1999) califica como importante la cohesión entre los estándares definidos en matemáticas y ciencias y los cuestionarios utilizados para la evaluación del rendimiento de los estudiantes. Este autor analiza la cohesión entre la evaluación y los estándares definidos en cuatros estados, y desarrolla un criterio que sirve para juzgar la alineación entre dichas variables, tanto para las expectativas y la evaluación, como para los estándares y la evaluación. Este criterio consta de cinco categorías, entre ellas los niveles de profundización de conocimiento.

Webb (2002) define cuatro niveles para clasificar la profundidad del conocimiento en lectura, redacción, matemáticas y ciencias. En el área de las matemáticas, diferencia los siguientes niveles: 1) *memoria*, donde se hace uso de definiciones o algoritmos sencillos anteriormente memorizados. 2) *habilidad/concepto*, que incluye la participación de algunos procesos mentales más allá de la respuesta habitual e implica que el estudiante tome alguna decisión. 3) *pensamiento estratégico*, que requiere que el estudiante razone y planee, y donde los problemas tienen más de una solución posible, todas ellas con justificación. 4) *pensamiento extendido*, que supone un razonamiento complejo, los estudiantes deben establecer conexiones dentro del área del contenido, combinar y sintetizar las ideas en nuevos conceptos y desarrollar nuevos enfoques de cómo la situación debe resolverse. Estos niveles permiten identificar cómo interactúan los estudiantes con los conceptos y hasta qué nivel de profundidad son capaces de comprender dichos conceptos.

Unos años más tarde, la necesidad de completar estos modelos lleva a Hess (2005) a desarrollar una herramienta bidimensional que permita, al mismo tiempo, clasificar las actividades según aquello que se requiere del estudiante y el nivel de profundidad de comprensión que el estudiante posee acerca de aquello que se le pide.

Hess, Jones, Carlock y Walkup (2009) presentan la *matriz de rigor cognitivo* que permite analizar la instrucción y mejora de la planificación de las lecciones por parte del profesor. Para ello, primeramente, hacen uso de la Taxonomía de

Bloom, pero, como esta resulta insuficiente, ya que identifica los niveles haciendo uso de verbos que a menudo se pueden encontrar en varios niveles diferentes, a este modelo le añaden los niveles de profundización del conocimiento que define Webb (2002), creando una herramienta bidimensional. Mientras que la Taxonomía de Bloom categoriza las habilidades cognitivas necesarias para enfrentarse a una actividad y describe el tipo de razonamiento necesario para responder correctamente, el modelo de Webb se centra en la profundidad de comprensión que se tiene del contenido y en el aprendizaje de la actividad, el cual se manifiesta en las habilidades requeridas para completar la actividad. La unión de ambos modelos hace que la matriz de rigor abarque la complejidad del contenido y los objetivos de las actividades, permitiendo evaluar o promover la mejora de la instrucción y la evaluación.

Otro factor importante a la hora de seleccionar o diseñar tareas es la distinción entre *ejercicio* y *problema*. Butts (1980, citada en Puig, 1996, p.30) distingue entre: *ejercicios de reconocimiento*, aquellas tareas en las que “el resolutor lo único que tiene que hacer es buscar en la memoria el resultado”; *ejercicios algorítmicos*, “si ha de ejecutar un algoritmo de forma automática”; *problemas de aplicación* “cuando el resolutor conoce un procedimiento para resolver el problema y … la ejecución … tenga que ir acompañada de la argumentación de que sus pasos son adecuados”; *problemas de búsqueda*, cuando el resolutor “ha de crear un procedimiento de solución”; y por último, *situaciones problemáticas*, cuando en su “enunciado no se ha precisado qué es lo que hay que hacer y esa es la primera tarea del resolutor”.

La anterior forma de clasificar tareas nos lleva a pensar en el análisis de la dificultad que supone la resolución de la actividad y lo que esta pide de los estudiantes. Silver y Stein (1996), en su estudio denominado proyecto QUASAR, tratan de implementar una enseñanza de las matemáticas que desarrolle la capacidad de reflexión, razonamiento y resolución de problemas matemáticos. Este proyecto muestra que el aprendizaje de los estudiantes es mayor si se hace uso de actividades con un alto nivel de razonamiento, con múltiples estrategias de resolución, con conexión de ideas y que requieran explicaciones matemáticas.

Estos resultados llevan a Stein, Grover y Henningsen (1996) a plantear la necesidad de cambiar el método de enseñanza, dejando atrás las matemáticas estáticas y promoviendo unas matemáticas dinámicas que exigieran la atención e implicación del estudiante. Para conseguir esto, centran su atención en las actividades propuestas, algunas de las cuales son analizadas según una serie de características referidas al compromiso del estudiante con la tarea, el razonamiento que este utiliza y como da sentido al contenido (múltiples resoluciones, múltiples representaciones…) y a su demanda cognitiva.

En este contexto, el concepto de *demanda cognitiva* se define como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito” (Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2009, p. 1). Smith y Stein (1998) elaboran un listado de características de cada uno de los niveles de demanda cognitiva para identificar el nivel de demanda de las actividades planteadas en los libros de texto. Su clasificación identifica el nivel de demanda cognitiva de las actividades a través de una evaluación de la reflexión y el razonamiento cognitivo del estudiante necesarios para resolver la tarea. Según estos autores, para considerar una actividad como “buena”, es decir, con el potencial suficiente para involucrar a los estudiantes en un nivel alto de razonamiento, primero de todo, es necesario considerar a los estudiantes (edad, nivel educativo, conocimientos y experiencias previas, etc.), y, en segundo lugar, el nivel de demanda cognitiva al que pertenece la tarea.

Estos autores dividen las tareas en dos grados de demanda cognitiva. Un *grado bajo de demanda cognitiva*, formado por aquellas tareas que requieren un esfuerzo cognitivo limitado, no son ambiguas y se resuelven mediante la reproducción de unos datos previamente aprendidos o a partir del desarrollo de un procedimiento memorizado de manera rutinaria; y un *grado alto de demanda cognitiva*, donde las tareas presentan cierta ambigüedad sobre qué hacer y cómo resolverse, y requieren de un pensamiento complejo para su resolución. Dentro del primer grado, Smith y Stein diferencian entre las tareas de *memorización*, que no requieren del uso de un algoritmo, sino simplemente la reproducción de unos datos, definición o fórmula aprendida, y tareas de *algoritmos sin conexiones*, que se resuelven siguiendo unas instrucciones o pasos previamente memorizados. Por su parte, dentro del segundo grado, estas autoras clasifican las tareas como *algoritmos con conexiones*, aquellas que, a pesar de poder ser resueltas mediante algoritmos, requieren de la comprensión de las ideas y relaciones que subyacen en estos, y *hacer matemáticas*, que son aquellas tareas que requieren exploración por parte del estudiante y un pensamiento complejo y no algorítmico.

El análisis de la demanda cognitiva de las actividades crea dos nuevas problemáticas. La primera de ellas está reflejada en Smith y Stein (1998), donde estas autoras observan que, a menudo, los profesores tienen problemas al identificar el nivel de demanda cognitiva de las actividades. Proponen una guía de reflexión para los profesores, con el fin de ayudarles a seleccionar de manera adecuada las actividades de alto nivel de demanda. La segunda problemática surge al observar que el nivel de demanda cognitiva de las actividades puede variar, según cómo las plantee el profesor a sus estudiantes y según lo que haga el profesor durante la clase. Stein y Smith (1998) muestran una serie de orientaciones a seguir durante la implementación de actividades para mantener el nivel de demanda cognitiva de estas.

Unos años después, Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009) resumen todos los trabajos realizados hasta el momento. El libro está dividido en tres partes. En la primera parte se explica cómo realizar un análisis de la demanda cognitiva de las tareas y como desarrollar estas poco a poco durante la clase. En la segunda, se muestran algunos de los materiales utilizados durante una práctica y se incluyen preguntas y notas para los profesores. Por último, en la tercera parte, se muestra cómo puede ser utilizado este libro para la formación de los profesores.

En los últimos años, estos autores han centrado su atención en la formación de los docentes con el fin de mejorar así la calidad de la enseñanza, destacando el importante papel que juega el profesor en el aprendizaje (Garrison, 2014; Weingarden y Heyd-Metzuyanim, 2017) y haciendo hincapié en la importancia de una correcta discusión de las tareas cognitivamente exigentes por parte del profesor con el resto de la clase, reflexionando sobre las diferentes resoluciones de una misma actividad y conectando dichas resoluciones (Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008). Lynch, Hunt y Lewis (2018) señalan la doble función que desempeñan los docentes en sus clases, dominando los conocimientos y apoyando las necesidades de aprendizaje específicas de todos los estudiantes. Estos autores muestran cómo implementar las tareas matemáticas realizando una instrucción diferenciada para una amplia gama de estudiantes, evitando disminuir la riqueza matemática de las tareas al tratar aumentar la accesibilidad de todos los estudiantes.

Por su parte, Felmer, Pehkonen y Kilpatrick (2016) destacan la importancia del planteamiento de problemas de alta demanda cognitiva para proporcionar contextos intelectuales que favorezcan un desarrollo matemático rico de los estudiantes. Estos autores hacen mención a la necesidad de una correcta formación del profesorado para alcanzar el aprendizaje del alumnado a partir del planteamiento de problemas que requieran de la investigación. Para conseguir este fin consideran esencial que los profesores hagan uso de la metacognición y de tareas de alta demanda cognitiva, prestando atención a no disminuir el nivel de demanda cognitiva.

Con el fin de apoyar a los docentes en la planificación, conducción y reflexión en las observaciones de clase, Schoenfeld (2013; 2016a; 2016b) presenta una herramienta para el análisis de una instrucción efectiva en el aula: *TRU Math* (enseñanza para una sólida comprensión de las matemáticas). Esta herramienta consta de cinco dimensiones que permiten determinar si los estudiantes saldrán del aula como pensadores competentes. La herramienta incluye la *demanda cognitiva* dentro de sus cinco dimensiones, que se analiza observando el grado en que las interacciones del aula crean y mantienen un ambiente de desafío intelectual, que coincide con la comprensión cada vez más profunda del contenido, diferenciando las acciones llevadas a cabo por los estudiantes y por los docentes.

No obstante, la formación del docente no es el único problema que preocupa en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Silver (2010) afirma que una de las características matemáticas y pedagógicas esenciales para lograr una buena práctica docente es el uso de tareas de alta demanda cognitiva, y son varios los estudios de diversos países, como Ramírez, Cueto, Pain y León (2003) en Perú, Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen y Doorman (2015) en Indonesia o Pinheiro, Lu, Lei y Tso (2017) en Brasil, que muestran la preocupación por la falta de actividades cognitivamente exigentes en los libros de texto utilizados en las aulas. Algunos autores han estudiado los niveles de demanda cognitiva de las actividades planteadas en los libros de texto. Así, Cruz (2009) identifica más del 90% de las actividades analizadas como tareas propias de los niveles bajos de demanda cognitiva.

El modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein ha ido ganando relevancia como instrumento de valoración de actividades, especialmente después de que el NCTM (2014) mencionara este modelo como un recurso adecuado para identificar las tareas de alta demanda cognitiva que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas para alcanzar un aprendizaje efectivo de las matemáticas. Varios autores, como Araujo (2012), Murawska (2018), Pitta-Pantazi y otros (2015) o Schultz (2009) han utilizado el modelo para valorar la idoneidad de las tareas propuestas a los estudiantes.

En el contexto general de la resolución de problemas, Puig (1996), refiriéndose a la distinción entre ejercicio y problema, plantea la conveniencia de analizar respuestas de estudiantes reales, pues una tarea puede ser un ejercicio para un estudiante y un problema para otro. En esta línea, ya en Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) mostramos que distintos estudiantes pueden requerir diferentes niveles de demanda cognitiva para resolver la misma tarea. Sin embargo, para clasificar actividades haciendo uso del modelo de demanda cognitiva, la mayor parte de los trabajos consultados hasta el momento analizan la complejidad que supone la resolución de la tarea para el estudiante basándose en el enunciado de la actividad, en la resolución esperada por un estudiante medio y en las instrucciones dadas por el profesor. Son pocos los trabajos consultados que, para valorar el nivel de demanda cognitiva de las tareas, tienen en cuenta las resoluciones hechas por los estudiantes y ninguno de ellos plantea la posibilidad de que una misma actividad tenga diferentes niveles de demanda cognitiva en función de las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, García y Benítez (2013) hacen uso de las resoluciones de los estudiantes para comprobar que el nivel de demanda cognitiva se ha mantenido gracias a un correcto planteamiento de la actividad y una buena práctica docente, pero no analizan la diversidad de resoluciones.

Ante la ausencia en nuestra búsqueda bibliográfica de trabajos que investiguen cómo evaluar el desafío y el esfuerzo cognitivo que supone la resolución de tareas por estudiantes con talento matemático a partir de sus respuestas, en una conversación personal, Schoenfeld (2016) reconoció desconocer la existencia de trabajos sobre dicho asunto basados en estudiantes “ordinarios” y mucho menos en superdotados (las comillas son de Schoenfeld).

En definitiva, las tareas matemáticas propuestas a los estudiantes son importantes, ya que determinan las oportunidades de aprendizaje que se les ofrece. De manera resumida, podemos decir que algunos de los factores más importantes a tener en cuenta a la hora de seleccionar las actividades son las características de las tareas y los objetivos de aprendizaje que se pretenden conseguir, la manera en la que el profesor gestiona la tarea en su clase y la exigencia de la tarea (demanda cognitiva).

La primera apreciación de la revisión bibliográfica es que, hay pocos estudios que aludan a la necesidad de una correcta clasificación de actividades con el fin de atender la diversidad de capacidades entre el alumnado, en particular, a los estudiantes con alta capacidad matemática. Kim y Kim (2017) estudian las características de las tareas propuestas y el nivel de demanda cognitiva requerido para implementar una educación diferenciada con estudiantes con talento matemático. Sin embargo, hemos visto que sí hay varios estudios que se centran en la clasificación de actividades como un recurso de apoyo para el docente, de manera que le permita cubrir el currículo oficial, desarrollando todos los contenidos y habilidades. Por ejemplo, la taxonomía de Bloom, anteriormente mencionada, surge como un recurso para ayudar a los profesores a planificar y desarrollar un curso, de manera que se haga uso de actividades que trabajen diferentes habilidades, pero sin prestar atención al alumnado y a sus razonamientos. Por su parte, los niveles de profundización aportados por Webb, a pesar de centrar su objetivo en identificar el nivel de profundización del conocimiento que alcanza el estudiante, su descripción es escueta y está asociada a características propias del enunciado de la tarea, con el fin de comparar si los objetivos de la actividad se ajustan a los criterios de evaluación. Por otra parte, la *matriz de rigor cognitivo* propuesta por Hess, además de estar enfocada a la mejora de la instrucción y planificación de la lección por parte del profesor, sin tener en cuenta la diversidad de capacidades presentes en el aula, resulta poco operativa para analizar tareas, debido a que son demasiados los aspectos a tener en cuenta, muy diferentes entre ellos, y ninguno de ellos hace referencia al alumnado.

Consideramos, por tanto, que el análisis de la complejidad que supone la resolución de una actividad nos va a permitir identificar aquellas actividades que promueven el razonamiento y resultan eficaces para desarrollar las habilidades del alumnado, en especial de los estudiantes con más talento matemático. Por lo expuesto anteriormente, consideramos que el modelo de demanda cognitiva es el más apropiado para llevar a cabo nuestra investigación, ya que nos permite clasificar las actividades en función de la complejidad del razonamiento que pone en juego el estudiante para resolver las actividades.

El planteamiento de actividades de un alto nivel de demanda cognitiva a un grupo de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, especialmente si hay estudiantes con talento matemático, puede provocar la obtención de diversas estrategias de resolución asociadas a diferentes niveles de demanda cognitiva. Una correcta discusión y análisis de las respuestas de los estudiantes pueden ayudarnos a comprender y valorar su razonamiento y aprendizaje. Por este motivo, para la identificación del nivel de demanda cognitiva de las tareas realizaremos un doble análisis, un primer análisis basado en el enunciado de la actividad y un segundo análisis en función de las diferentes estrategias de resolución obtenidas por los estudiantes, apreciando así la diversidad de capacidades presente en una misma aula.

2.3 Pre-álgebra

La resolución de problemas, así como el desarrollo de habilidades que favorezcan el logro de ese desafío, son algunos de los objetivos principales de la enseñanza de matemáticas. La exploración de tareas de patrones geométricos contribuye al desarrollo de habilidades relacionadas con la resolución de problemas, debido a la necesidad de analizar casos particulares, organizar los datos de manera sistemática, conjeturar y generalizar (Barbosa, Vale, Palhares, 2012).

En esta sección realizamos una revisión bibliográfica de diferentes investigaciones realizadas sobre el uso en pre-álgebra de problemas de patrones geométricos, haciendo hincapié en el valor del uso de estos problemas para introducir a los estudiantes en álgebra. A continuación, presentamos un resumen de algunas publicaciones relacionadas con la resolución de problemas de patrones geométricos, que incluyen la generalización como parte del proceso de resolución de este tipo de problemas.

2.3.1 *Introducción del álgebra a partir de problemas de patrones*

Tradicionalmente se ha considerado que la aritmética debía preceder al álgebra, limitando la enseñanza del álgebra a la Educación Secundaria o cursos superiores. En los últimos años ha aumentado el número de investigaciones dirigidas a la enseñanza del álgebra en Educación Primaria. Este contexto es conocido como *Pre-álgebra* o *Álgebra temprana* y "propone organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas tratando de que haya una continuidad entre ambas" (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015, p. 279).

Blanton y Kaput (2004) describen el *pensamiento algebraico* como el proceso mediante el cual se llegan a generalizar relaciones matemáticas, a partir de un conjunto de instancias particulares, y a expresarlas en formas cada vez más formales. En esta línea, algunos autores (Callejo, García-Reche y Fernández, 2016; English y Warren, 1998; Radford, 2012) se han centrado en mostrar evidencias de que el pensamiento algebraico puede desarrollarse en Educación Primaria mediante la resolución de actividades de patrones geométricos. En la literatura consultada, hemos encontrado diversas investigaciones dedicadas a caracterizar el pensamiento algebraico, razonamiento algebraico, pensamiento funcional o razonamiento funcional. Por su parte, Warren (2005) y Warren y Cooper (2005) definen el *pensamiento funcional* como una pieza del pensamiento algebraico, previa al pensamiento algebraico formal, que se centra en la relación entre dos cantidades variables. Recientemente, encontramos una gran variedad de publicaciones (Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Castro, Cañadas, Molina, 2017; Warren y Cooper, 2005) dedicadas a mostrar evidencias del desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria a partir de la resolución y comprensión de tareas que requieran relaciones funcionales.

El NCTM (2003) considera que la mejor manera de aprender el álgebra es entendiendo esta como un conjunto de conceptos y técnicas vinculados a la representación de relaciones cuantitativas para formalizar patrones, funciones y generalizaciones. Por ello, el NCTM (2003) manifiesta que la comprensión de patrones y relaciones debe ser el primer objetivo en el que centrarse en la instrucción del álgebra, apoyando la introducción del razonamiento algebraico en la Educación Primaria mediante la exploración de patrones. Siguiendo esta premisa, Castro, Cañadas y Molina (2010) concluyen que es recomendable introducir la búsqueda de regularidades desde edades tempranas, para evitar las dificultades encontradas en niveles superiores a la hora de establecer generalizaciones, así como de expresarlas algebraicamente.

2.3.2 *Problemas de patrones geométricos*

La noción de patrón surge como resultado de una situación repetida con regularidad (Steen, 1988, p. 611). En la bibliografía consultada podemos ver que se utilizan diferentes tipos de patrones: patrones numéricos, patrones pictóricos o geométricos, patrones lineales o cuadráticos, patrones repetitivos, etc. Si centramos la atención en el modo en el que se presentan los datos en el contexto del pre-álgebra, podemos diferenciar entre patrones numéricos y patrones geométricos:

- Un *patrón numérico* es una secuencia de números que pueden ser calculados mediante una regla definida basada en el número anterior o en su posición en la secuencia (Ndlovu, 2011, p. 17).
- Un *patrón geométrico* es una secuencia de figuras en la que los objetos de la figura cambian de un término al siguiente, generalmente de una manera predecible (Huntzinger, 2008, p. 280).

Diferentes investigaciones (Amit y Neria, 2008; English y Warren, 1998) muestran que los problemas de patrones, tanto numéricos como geométricos, pueden resultar muy eficientes para promover el desarrollo del pensamiento algebraico. No obstante, algunos autores (Rivera, 2010; Lannin, 2005), en sus experimentaciones, observan que los estudiantes de edades tempranas presentan más dificultades al resolver problemas de patrones numéricos que de patrones geométricos.

Un patrón geométrico involucra dos variables (Huntzinger, 2008):

- La *variable dependiente* que hace referencia al conjunto de elementos cuantificables que forman la figura del patrón (valor del término).
- La *variable independiente* que hace referencia a la posición que ocupa la figura en el patrón (posición del término).

Los problemas de patrones consisten en obtener, a partir de algunos términos conocidos, nuevos términos o el término general (Merino, Cañadas y Molina, 2013). En estos problemas podemos diferenciar dos tipos de cuestiones en función de la variable que conocemos (Callejo, García-Reche y Fernández, 2016; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Rivera, 2013).

- Cuestiones de *relación directa*. Hacen referencia a las situaciones en las que se conoce la posición de un término concreto y se desconoce cuántos elementos lo forman.
- Cuestiones de *relación inversa.* Hacen referencia a las situaciones en las que se conoce el número de elementos que forman un término determinado, pero se desconoce en qué posición está dicho término.

Además, si nos centramos en las cuestiones de *relación directa*, podemos diferenciar cuatro tipos de cuestiones, cuyo grado de complejidad aumenta cuanto mayor es la distancia entre la posición de los términos dados y la del término que se pide.

- *Término inmediato* o *cuestión introductoria*, se pide el cálculo del término que sigue a los términos dados de la secuencia conocida (García-Cruz, 1999).
- *Término cercano,* se pide el cálculo de un término que puede ser resuelto mediante la representación y el conteo (Radford, 2011; Stacey, 1989).
- *Término lejano,* se pide el cálculo de un término para el cual la estrategia de representación y conteo resulta larga y costosa de llevar a cabo, por lo que es más conveniente establecer relaciones entre el valor de los términos conocidos y sus posiciones (Radford, 2011; Stacey, 1989).

- *Término general,* se pide expresar verbalmente y/o simbólicamente la regla general que permite encontrar el término enésimo de la secuencia, lo que requiere la identificación de la relación funcional implícita en el patrón geométrico (Callejo y Zapatera, 2014)

Por otra parte, Friel y Markworth (2009) identifican otros factores que pueden determinar el grado de complejidad de las tareas de patrones: el uso de uno o más colores/formas en las representaciones geométricas, el modo de crecimiento de las representaciones geométricas (figuras con piezas de diferentes formas que crecen simultáneamente, figuras con piezas de varias formas que comparten piezas al crecer, etc.), conocer o no el término inicial del patrón o el tipo de relación (lineal, afín o cuadrática).

2.3.3 *Estrategias para resolver problemas de patrones geométricos*

Para resolver los diferentes tipos de cuestiones definidas anteriormente, los estudiantes emplean distintas estrategias de resolución. Zapatera y Callejo, (2011) presentan una clasificación de estas estrategias de resolución:

- *Estrategia aditiva.* Los estudiantes observan que, el valor de un término se obtiene sumando al término anterior una cierta cantidad y la usan para calcular el valor del término requerido.
- *Estrategia funcional*. Los estudiantes utilizan una expresión aritmética, algebraica o verbal para hallar el número de elementos en cada caso.
- *Razonamiento proporcional.* Los estudiantes hallan, erróneamente, el número de elementos mediante razonamientos proporcionales como multiplicaciones o reglas de tres.

Aunque los nombres de las estrategias pueden variar de un autor a otro, una gran parte de las publicaciones sobre generalización se basan en el estudio de las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver problemas de patrones. Algunos trabajos, como Stacey (1989) y Callejo, García-Reche y Fernández (2016), analizan el tipo de estrategias utilizadas para el cálculo de un término lejano en función del nivel de escolarización de los estudiantes. Estos autores identifican que, pese a que la estrategia de recuento es la más frecuente, se produce una disminución del uso de esta conforme el curso de los estudiantes es mayor. Otros autores (Callejo y Zapatera, 2014; Zapatera y Callejo, 2011) se centran en el estudio de la flexibilidad con la que los estudiantes modifican sus estrategias de resolución cuando la demanda de la tarea aumenta (de un término cercano a uno lejano, y de este al término general).

Otro asunto de interés sobre las estrategias de resolución son las dificultades encontradas por los estudiantes al aplicar dichas estrategias para resolver problemas de patrones. Un ejemplo de ello es el trabajo realizado por Barbosa, Vale y Palhares (2012), quienes identifican en su trabajo las dificultades encontradas por estudiantes de 6º grado al calcular el término lejano, observando que ninguno de los estudiantes de su experimentación fue capaz de encontrar las reglas generales.

En lo que respecta a problemas de patrones geométricos y talento matemático, Amit y Neria (2008) realizan un estudio donde describen las estrategias utilizadas, el tipo de comunicación y la justificación de las generalizaciones realizadas por estudiantes con talento matemático al resolver problemas de patrones. Este estudio muestra que los estudiantes talentosos presentan altas habilidades matemáticas cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones. Por su parte, Arbona (2016) analiza las estrategias de resolución utilizadas por un estudiante de Educación Primaria con talento matemático al resolver problemas de patrones geométricos con cuestiones de relación directa e inversa. La experimentación se divide en tres fases donde se estudia la evolución del estudiante al resolver los problemas. Tras los resultados obtenidos, la autora concluye que los problemas de patrones geométricos son una buena herramienta para la introducción de estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el mundo del álgebra a través de la generalización.

2.3.4 *Generalización en pre-álgebra*

Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial para desarrollar la habilidad de generalizar, ya que, a partir de la observación de una regularidad, se busca un patrón que sea válido para más casos. Diferentes autores han definido el término *generalización*:

Polya (1965, p. 97) sostiene que *la generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado*. Así mismo, Dreyfus (1991, p. 35) considera que *generalizar es derivar o inducir a partir de particulares, identificar aspectos comunes, expandir dominios de validez*. Por su parte, Kaput (2000, p. 6) introduce la noción de patrón argumentando que *la generalización implica extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando y exponiendo explícitamente características comunes a través de casos, o levantar el razonamiento o la comunicación a un nivel en el que el foco ya no está en el casos o situaciones en sí, sino más bien en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones a través y entre ellos.*

Pese a la diversidad de definiciones que podemos encontrar referentes al término generalización, todos los autores coinciden en que generalizar consiste en universalizar una pauta o regularidad observada en los casos particulares, expresar en lenguaje verbal o algebraico una regla general que represente dicha pauta o regularidad y justificar por qué funciona la regla (Zapatera y Callejo, 2011, pp. 599-560).

En esta investigación nos centraremos en la generalización en pre-álgebra. En este marco, podemos encontrar diversas clasificaciones (García-Cruz,1998; Radford, 2003) de los tipos de generalización en función del grado de abstracción:

- *Generalización factual* o *actividad procedimental.* Cuando el estudiante reconoce y utiliza el carácter iterativo o recursivo de la pauta lineal.
- *Generalización contextual o local.* Cuando el estudiante identifica y utiliza una regla para cálculos específicos estableciendo una relación entre las dos variables, pero sin expresarla de manera algebraica.
- *Generalización simbólica o global.* Cuando el estudiante expresa la regla de cálculo de manera general utilizando notación algebraica (incluidas las letras) para describir la generalización.

Los distintos niveles de generalización definidos por García-Cruz (1998) y Radford (2003) han sido utilizados para analizar y clasificar las generalizaciones producidas por los estudiantes, con el objetivo de discernir si son capaces de realizar el paso desde las expresiones aritméticas a la generalización.

2.4 Visualización

Algunos autores, como Gonzato, Fernández y Godino (2011) o Baki, Kosa y Guven (2011), han destacado la visualización como un contenido necesario a tratar en la enseñanza. No obstante, a menudo el uso de la visualización en la enseñanza es escaso, lo cual puede estar condicionado por dificultades culturales, cognitivas y sociológicas (Arcavi, 2003; Eisenberg y Dreyfus, 1991). Las dificultades culturales están relacionadas con lo que la comunidad matemática considera legítimo y aceptable como demostración matemática, entre lo que no se incluye el uso de la visualización; las dificultades cognitivas dependen de la demanda cognitiva que requieren los procedimientos visuales frente a los de otro tipo; y las dificultades sociológicas hacen referencia a los impedimentos con los que se encuentra el profesor a la hora de enseñar procesos visuales. Dichas dificultades parecen motivar la poca presencia de la visualización en las clases de matemáticas.

Para contrarrestar este déficit, es necesario subrayar el papel que desempeña la visualización en la labor matemática. Makina (2010, p. 24) afirma que "la visualización fomenta el pensamiento crítico, lo que lleva a una mejor comprensión de los datos manejados". Por su parte, Hershkowitz, Parzysz, y Van Dormolen (1996, p. 163) sostienen que "las formas y las representaciones visuales mejoran la comprensión de conceptos, procedimientos y fenómenos en las diferentes áreas de las matemáticas". Es por ello que, desde hace algunos años, en la educación matemática se viene subrayando la necesidad de incrementar el uso de elementos visuales como parte de la enseñanza (Arcavi, 2003; Gutiérrez, 1996a).

Para situar nuestro trabajo relacionado con la visualización, hemos realizado una breve revisión bibliográfica dividida en dos partes. Primeramente, presentamos los conceptos que organizan el mundo de la visualización en educación matemática, donde mostramos algunas publicaciones de las décadas de 1970 a 1990, basándonos en las síntesis realizadas por Gutiérrez (1996a) y Presmeg (2006). A continuación, a partir de diferentes publicaciones, la mayoría de ellas recientes, la segunda parte de la revisión se centra en el desarrollo de la capacidad de visualización en los estudiantes.

Gutiérrez (1996a) unifica diversos desarrollos teóricos elaborados hasta el momento. Una década más tarde, Presmeg (2006) realiza una revisión donde se recogen las investigaciones realizadas en los congresos del Grupo PME sobre visualización y aprendizaje matemático.

Gutiérrez (1996a, p. 9) considera "la visualización en matemáticas como el tipo de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales, mentales o físicos, realizado para resolver problemas o demostrar propiedades" (Gutiérrez 1996a, p. 9), que está integrada por cuatro elementos principales:

1. Imágenes mentales.
2. Representaciones externas.
3. Procesos de visualización.
4. Habilidades de visualización.

Los cuatro elementos (imágenes, representaciones, procesos y habilidades) facilitan el análisis de la visualización en la resolución de una tarea. A continuación, vamos a resumir algunas de las definiciones de cada uno de dichos elementos, basándonos en diversas referencias recopiladas por Gutiérrez (1996a).

2.4.1 *Imágenes mentales*

El elemento básico central de todas las concepciones de percepción visual son las imágenes generadas y manipuladas en la mente. No obstante, cuando se hace referencia a dicho elemento, podemos encontrar diferentes denominaciones: *imagen visual*, *imagen espacial* e *imagen mental*.

Lean y Clements (1981, pp. 267-268) definen *imágenes (imagery)* como "una actividad mental correspondiente a la percepción de un objeto, cuando el objeto no está presente para los sentidos". Dentro del concepto *imágenes*, diferencian *imagen visual*, como la percepción de un objeto que, a pesar de no estar presente, se representa como una fotografía en la mente para resolver un problema.

De manera similar, pero considerando también como *imagen visual* aquellas imágenes que se apoyan en información gráfica o visual presente, Dreyfus (1995, p. 3) define *imagen visual* como “el uso de imágenes mentales con un fuerte componente visual”. En la misma línea, Presmeg (1986a, p. 42) la define como “un esquema mental que representa gráficamente información visual o espacial”. Además, en función del tipo de esquema mental utilizado, Presmeg (1986a) distingue diferentes tipos de imágenes visuales:

- *Imágenes concretas pictóricas.* Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.
- *Imágenes de fórmulas.* Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera que se las vería, por ejemplo, en el libro de texto.
- *Imágenes de patrones.* Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.
- *Imágenes cinéticas.* Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
- *Imágenes dinámicas.* Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Cuando las *imágenes visuales* se refieren a figuras tridimensionales, algunos autores las denominan *imágenes espaciales.* Yakimanskaya (1991, p. 26) considera la *imagen espacial* como “la unidad básica operativa del pensamiento espacial”, es decir, son las imágenes que se crean y transforman al establecer relaciones espaciales durante la resolución de un problema. Puesto que estas imágenes se van manipulando durante el proceso de resolución, Yakimanskaya (1991, p. 24) sostiene que las *imágenes espaciales* deben ser “dinámicas, flexibles y operativas”.

Gutiérrez (1996a) indica que las definiciones de *imagen visual*, *imagen espacial* e *imagen mental* utilizadas por los autores mencionados son equivalentes, definiendo el término *imagen mental* como "cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemáticos por medio de elementos visuales o espaciales" (Gutiérrez, 1996a, p. 9), que integra las definiciones anteriores, independientemente del tipo de imágenes (bidimensionales o tridimensionales) o si se apoyan o no en información gráfica o visual presente.

2.4.2 *Representaciones externas*

Las *representaciones externas* son todos aquellos textos, signos, dibujos, etc. que representan objetos, conceptos o propiedades o que proporcionan información sobre ellos. Las *imágenes mentales* o *representaciones internas* son producidas a partir de las *representaciones externas*, y viceversa. Fernández, Godino y Cajaraville (2012, p. 39) sostienen que "la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje".

Para Mesquita (1998), las *representaciones externas* son aquellas que se pueden plasmar en papel, pizarra, pantalla de proyección, etc. Por otra parte, para completar su definición, Mesquita (1998) describe algunos tópicos relacionados con las representaciones externas y sus implicaciones:

- La autora sugiere la existencia de un doble estatus de las representaciones, abstracto o particular, de manera que una misma figura puede representar un objeto geométrico abstracto o bien una concreción particular del mismo.
- La tipicidad de una representación externa, que se refiere al hecho de que algunos individuos asocian más fácilmente a un problema dado unas representaciones que otras.
- El doble papel de las representaciones externas: descriptivo, donde la representación externa ilustra relaciones y propiedades implicadas en el problema, o heurístico, donde la representación externa actúa como soporte para la intuición, sugiriendo transformaciones que pueden conducir a la solución.

- La naturaleza de las representaciones externas, que pueden aparecer como objetos, cuando las relaciones geométricas utilizadas en la construcción son reutilizadas, o como ilustraciones, cuando aparecen como un tipo de esquema desde el cual no es posible extraer propiedades directamente.

Las representaciones externas pueden ser analizadas desde diferentes puntos de vista. Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012), en el marco del enfoque ontosemiótico, clasifican las representaciones externas como personales o colectivas, ostensivas o no ostensivas, unitarias o sistémicas, extensivas o intensivas y si se refieren a la expresión o al contenido.

De un modo general, Gutiérrez (1996a, p. 9) define las *representaciones externas* como “cualquier tipo de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades que contienen dibujos, esbozos, diagramas, etc. que ayuda a crear o transformar imágenes mentales y a realizar un razonamiento visual”.

2.4.3 *Procesos de visualización*

Un *proceso de visualización* consiste en una actividad física o mental que se realiza con el fin de crear, analizar o trasformar imágenes. De un modo general, Gutiérrez (1996a, p. 10) define un *proceso de visualización* como “una acción mental o física en la que están involucradas las imágenes mentales”.

Por su parte, Bishop (1983), en una revisión sobre aprendizajes geométricos, distingue dos tipos de actividad mental según el modo en el que se manipulan las imágenes visuales y las representaciones externas durante la actividad de visualización. Aunque Bishop no diferencia claramente entre procesos y habilidades, Gutiérrez (1992, p. 45) reinterpreta estos dos constructos como procesos de visualización:

- *Procesamiento visual* (VP). Es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.
- *Interpretación de información figurativa* (IFI). Es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer

la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

Por otra parte, Yakimanskaya (1991, p. 101) identifica dos niveles de actividad de pensamiento espacial: *la creación* de imágenes, que está enfocada a la formación de imágenes de manera similar al procesamiento visual, y su *manipulación o uso*, que tiene como objetivo reelaborar las imágenes ajustándolas a un problema particular con el objetivo de comprender e interpretar las imágenes para resolver el problema, que está relacionado con la interpretación de información figurativa.

También Kosslyn (1980, citado en Gutiérrez, 1996a, p. 8) identifica cuatro procesos aplicables a la visualización e imágenes mentales:

- Generar una imagen mental a partir de alguna información.
- Inspeccionar una imagen mental para observar su posición o la presencia de partes o elementos.
- Transformar una imagen mental por rotación, translación, escala o descomposición.
- Usar una imagen mental para contestar preguntas.

Estos cuatro procesos están relacionados con los descritos por Bishop y Yakimanskaya: el primero de los procesos hace referencia a la creación de imágenes o procesamiento visual, mientras que los tres restantes están enfocados a la manipulación y uso de imágenes o interpretación de la información figurativa. Gutiérrez (1996a) unifica los procesos anteriores en dos procesos:

- *Interpretación visual de información* (correspondiente a VP) para crear imágenes mentales a partir de cualquier tipo de información, incluso de otras imágenes mentales.
- *Interpretación de imágenes mentales* (correspondiente a IFI) para generar información, subdividido en los subprocesos señalados por Kosslyn:
    - Observación y análisis de imágenes mentales.
    - Transformación de imágenes mentales en otras imágenes mentales.
    - Transformación de imágenes mentales en otro tipo de información.

2.4.4 *Habilidades de visualización*

Otro componente en la actividad de visualización son las *habilidades de visualización*. La habilidad de visualización es la capacidad o destreza para ejecutar, física o mentalmente, los procesos de creación, trasformación o manipulación de imágenes. Gutiérrez (1992, p. 45) define las *habilidades de visualización* como "las habilidades utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales".

Gutiérrez (1992, p. 46) ofrece una interpretación de las habilidades sugeridas por diferentes autores y recopiladas por Del Grande (1990):

- *Coordinación motriz de los ojos.* Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
- *Identificación visual*. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto complejo.
- *Conservación de la percepción.* Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma, aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo, porque haya sido girado o se haya ocultado.
- *Reconocimiento de posiciones en el espacio.* Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia (por ejemplo, estar más cerca, a la derecha, arriba, etc.).
- *Reconocimiento de las relaciones espaciales.* Es la habilidad que permite identificar las características o relaciones internas entre diversos objetos situados en el espacio sin usar ningún sistema de referencia externo (por ejemplo, estar girados, ser perpendiculares, ser simétricos, etc.).
- *Discriminación visual.* Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
- *Memoria visual*. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Podemos encontrar otras definiciones de habilidades, pero la mayoría de ellas pueden interpretarse como una combinación de las habilidades indicadas anteriormente. Por ejemplo, Ryu, Chong y Song (2007, p. 141) definen cuatro habilidades, entre ellas, la “habilidad de visualizar la rotación de un objeto representado”. Esta habilidad es el resultado de reconocer un objeto cuando se le somete a un movimiento e identificar su nueva posición, es decir, se trata de una combinación de las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de conservación de la percepción.

2.4.5 *La enseñanza de la visualización*

Una vez identificados los aspectos teóricos de la visualización en la bibliografía consultada, el principal problema es encontrar metodologías de enseñanza eficaces para desarrollar la capacidad visualizadora en los estudiantes de matemáticas. En la segunda parte de esta revisión bibliográfica sobre visualización, nos vamos a centrar en la revisión de literatura más actual basada en la enseñanza y el desarrollo de la capacidad visualizadora. Presmeg (2006) afirma que quizás el asunto más apremiante de investigación en esta área es encontrar una enseñanza eficaz para aumentar el uso y poder de la visualización en la educación matemática.

El incremento del uso de la visualización en la enseñanza depende de varios factores, entre los que podemos destacar una adecuada formación de los profesores y el diseño de actividades que favorezcan su uso.

En lo que respecta al profesorado, varios trabajos han detectado una falta de formación de los profesores en visualización. Por ejemplo, Malara (1999) muestra las dificultades encontradas por profesores de secundaria al resolver actividades de geometría tridimensional, destacando la importancia de formar al profesorado. Más recientemente, Godino, Gonzato, Contreras, Estepa y Díaz-Batanero (2016) desvelan importantes carencias en los conocimientos didáctico-matemáticos sobre visualización por parte de futuros profesores de educación primaria, lo que les lleva a señalar la necesidad de diseñar acciones formativas específicas sobre estos contenidos.

Por otra parte, el diseño de tareas que favorezcan el uso de la visualización implica un análisis de las habilidades de visualización que se pueden poner en juego al resolver dichas actividades, así como de las dificultades encontradas o errores cometidos. Son varios los trabajos dedicados al análisis de la enseñanza, aprendizaje y utilización de las habilidades de visualización (Escrivà, 2016; Gómez, 2013; Ramírez, 2012; Saads y Davis, 1997), en los que se observa cómo el análisis de las estrategias visuales utilizadas en la resolución de una tarea permite conocer el papel que ocupa la visualización en el rendimiento al resolverla. De manera análoga, otros autores se han centrado en el análisis de los errores cometidos o dificultades encontradas al resolver actividades de visualización, concluyendo que algunas de las dificultades encontradas, como la interpretación del enunciado, la comunicación de la respuesta o el proceso de resolución, pueden ser solventadas tras un proceso de formación o mediante el incremento del uso de este tipo de tareas (Gorgorió, 1994; Malara, 1999).

En particular, si centramos la atención en tareas que requieran el uso de representaciones planas, podemos destacar el proyecto llevado a cabo durante siete años en Estados Unidos por Sack (2013) y Sack y Vazquez (2016). En este estudio participaron aproximadamente cuatrocientos estudiantes de Educación Primaria y consisitió en la implementación de una serie de actividades con el objetivo de desarrollar la habilidad de coordinar modelos 3D con imágenes 2D y mejorar así la enseñanza de geometría en primaria. De manera similar, podemos hallar estudios sobre las dificultades encontradas al utilizar representaciones planas, como el realizado por Ben-Haim, Lappan y Houang (1985), que muestra las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de relacionar las vistas isométricas de un objeto con el sólido que representan y cómo una correcta instrucción por parte del profesor puede tener efectos positivos en el estudiante al resolver este tipo de problemas.

Además de estas líneas de investigación, Presmeg (2006), aparte de la enseñanza de visualización, menciona algunas de las líneas de investigación más recientes relativas a visualización: las diferencias de género, la relación entre visualización y resolución de problemas, el uso de ordenadores para potenciar la visualización, el análisis de habilidades de visualización, los aspectos semióticos de la visualización, la importancia de los dibujos y otras representaciones en la resolución de problemas, la relación entre el uso de gestos tanto por parte del docente como del estudiante y el pensamiento visual, la relación entre el talento matemático y la visualización, etc. Entre estas líneas de investigación, destacamos, por su relación con nuestro trabajo, la referente al talento matemático y visualización.

Una de las investigaciones pioneras sobre talento y visualización es la de Krutetskii (1976), el cual elaboró tests con problemas matemáticos variados de diferentes contenidos (aritméticos, algebraicos, geométricos y otros). Estos problemas fueron administrados a 192 estudiantes con diferentes grados de destreza matemática y con edades comprendidas entre los 8 y 16 años. A partir de un análisis de las soluciones de ciertos problemas, Krutetskii clasificó a los estudiantes en geométricos, analíticos o armónicos, según el procedimiento utilizado en la resolución de las tareas:

- Los estudiantes de *tipo geométrico* se caracterizan por el predominio de un componente pictórico-visual muy bien desarrollado, frente a un componente lógico-verbal bien desarrollado, pero menos que la anterior. Estos estudiantes sienten la necesidad de interpretar visualmente una expresión o relación matemática abstracta y, cuando no lo logran, tienen dificultades para operar con esquemas abstractos.
- Los estudiantes de *tipo analítico* se caracterizan por el predominio de un componente lógico-verbal muy bien desarrollado, frente a un componente pictórico-visual débil. Estos estudiantes operan fácilmente con esquemas abstractos y no necesitan el apoyo visual para interpretar y usar objetos o patrones durante la resolución de problemas.
- Los estudiantes de *tipo armónico* se caracterizan por un equilibrio entre los componentes lógico-verbal y pictórico-visual, ambos bien desarrollados, pero siendo el primer componente dominante.

Dicho de otro modo, hay estudiantes que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las matemáticas, otros que se sienten fuertemente atraídos por el uso e interpretación de expresiones analíticas, y otros en los que estos dos se equilibran, utilizando uno u otro según el problema que estén resolviendo.

Dentro de las investigaciones referentes a visualización y talento matemático se pueden identificar dos enfoques principales: las dificultades que manifiestan los estudiantes talentosos al resolver tareas de visualización, y las relaciones existentes entre la visualización y el rendimiento o habilidad matemática que poseen los estudiantes con talento.

Respecto al primer enfoque, el estudio realizado por Lee, Ko y Song (2007) analiza las habilidades espaciales de visualización utilizadas por estudiantes talentosos al resolver tareas de poliedros regulares. Los resutados de este trabajo indican que parte de los estudiantes de su muestra tuvieron dificultades en las tareas de visualización relativas a generalizar y definir, debido a que se basaron demasiado en características visuales, que no fueron capaces de generalizar adecuadamente, lo que les impidió identificar otras características importantes. Además, al realizar un estudio comparativo planteando las mismas tareas a estudiantes ordinarios pero con buenos resultados en algebra y otras áreas de las matemáticas diferentes a la geometría, los estudiantes encontraron muchas dificultades en el proceso de visualización espacial, por lo que podrían usarse este tipo de tareas para detectar el talento.

Respecto al segundo punto de estudio, encontramos discrepancias en los resultados obtenidos sobre la relación existente entre talento matemático y visualización, posiblemente causadas por la diversidad de criterios de medición. Así puede comprenderse que haya estudios que no detectan conexión entre talento y visualización junto con otros que si la establecen.

Entre los estudios que no detectan conexión entre talento matemático y visualización se encuentra Krutetskii (1976, p. 351), el cual concluye que “la visualización no constituye un componente necesario de las habilidades matemáticas de los estudiantes con talento”, ya que casi todos los estudiantes considerados más brillantes no eran visualizadores. Por su parte, Lean y Clements (1981) realizan una revisión bibliográfica en la que observan que, a pesar de haber muchas investigaciones sobre la relación entre la habilidad espacial, el uso de imágenes visuales (visual imagery) y el rendimiento matemático, muy pocas investigaciones dan resultados definitivos, por lo no se puede afirmar la existencia de dicha relación. También Presmeg (1986b, pp. 300-301) explica que “la mayoría de los estudiantes con talento no suelen utilizar métodos visuales en la resolución de problemas debido a una serie de factores internos o externos como: la economía del tiempo, preferencias por una forma particular de pensamiento reforzada en el currículo, en la actuación de sus profesores y en los exámenes, etc.”

Entre los estudios que sí relacionan positivamente la visualización y el talento matemático, Rivera (2011) considera que hay evidencias que muestran que existe relación entre la habilidad de percepción visual y la habilidad matemática, entre la percepción visual y el rendimiento matemático y entre usar representaciones visuales y el éxito en la resolución de problemas matemáticos. En esta línea, Gruessing (2011), examinando las relaciones entre rendimiento matemático y habilidades espaciales en estudiantes de cuarto curso de Educación Primaria, encuentra que los estudiantes con alta habilidad espacial tienen mayores habilidades matemáticas que los de baja habilidad espacial. Por otra parte, Ramírez (2012), en un trabajo realizado con el objetivo de diseñar nuevas formas de intervención para el alumnado talentoso, realiza un experimento con tareas de visualización para un grupo heterogéneo de estudiantes, donde concluye que los estudiantes con talento matemático muestran una capacidad visual significativamente superior al resto de estudiantes. También Escrivà (2016) observa que los estudiantes con buenos resultados académicos no necesariamente son buenos visualizadores, pero aquellos que sí lo son, obtienen buenos resultados académicos y además tienen rasgos propios de estudiantes con talento. Por su parte, Paz-Baruch, Leikin y Leikin (2016) exploran las habilidades de visualización asociadas tanto estudiantes superdotados como estudiantes con talento matemático. En su estudio muestran que los procesos de visualización son un factor importante en el talento matemático e identifican las diferencias entre los estudiantes superdotados y aquellos con talento matemático, observando que cada grupo destaca en un tipo diferente de habilidades de visualización. En el hilo de esta polémica, Ramírez y Flores (2017) destacan la importancia de matizar los aspectos de visualización y talento que se consideran en cada investigación para determinar la existencia de una relación significativa. Estos autores, en su estudio, observaron cómo los estudiantes con talento matemático obtuvieron puntuaciones en los test visuales superiores que la media estandarizada.

Las discrepancias obtenidas en las investigaciones mencionadas sobre la existencia de relación entre el talento matemático y la visualización son causadas por la dificultad que supone tanto la medición de las habilidades de visualización como la del talento matemático. Sin embargo, en gran parte de los estudios mencionados previamente, la finalidad de los trabajos no era conocer de la existencia de dicha relación, sino que su objetivo principal era medir y desarrollar la capacidad de visualización de los estudiantes, por las implicaciones educativas y vocacionales que puede tener en los estudiantes.

Otra de las líneas de investigación sobre visualización, que ha tenido gran acogida durante las últimas décadas, es la referente a visualización y nuevas tecnologías. Según Gutiérrez (1996b), los softwares que permiten la representación y transformación de sólidos geométricos en la pantalla favorecen la creación y manipulación de imágenes mentales. Un ejemplo de ello es el trabajo realizado por Pittalis, Mousoulides y Antreou (2009), que consistió en el análisis del proceso de visualización llevado a cabo por estudiantes de 6º de Educación Primaria al construir figuras 3D utilizado aplicaciones de geometría dinámica tridimensional. Los resultados de este estudio muestran evidencias de que la interacción de los estudiantes con aplicaciones dinámicas de geometría les permite construir figuras 3D, componiendo y uniendo las imágenes mentales. Además, la posibilidad de rotación les permite observar diferentes perspectivas de los objetos construidos para desarrollar habilidades especiales necesarias. No obstante, a pesar de los beneficios del uso de las herramientas tecnológicas, varios autores han hecho hincapié en la importancia de un uso adecuado de las aplicaciones dinámicas para alcanzar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos (Ortega, Pecharromán, 2015; Pratt y Davison, 2003).

Por último, cabe destacar, que el estándar de geometría de NCTM (2003) señala que "la visualización espacial, esto es, construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde perspectivas diferentes, es un aspecto importante del pensamiento geométrico" (NCTM, 2003, p. 43) y que los programas de enseñanza de todos los niveles educativos deberían capacitar a todos los estudiantes a utilizar la visualización para resolver problemas.

3. Marco Teórico

Comenzamos este capítulo describiendo los aspectos básicos referidos a los estudiantes con talento matemático en los que centraremos nuestra atención, sus características y habilidades. Más adelante utilizaremos algunas de estas características para el diseño y selección de nuestras actividades, mostrando una forma de ayudar a desarrollar el potencial de estos estudiantes mediante ejemplos de una metodología de enseñanza que atiende sus necesidades específicas. A continuación, presentamos el modelo de demanda cognitiva original y las modificaciones realizadas para facilitar su uso, obteniendo una nueva versión del modelo de demanda cognitiva, con la que fijaremos nuestro marco teórico y que utilizaremos en esta investigación para la valoración de actividades. En las tres últimas secciones, presentamos las principales características de los problemas de patrones geométricos y una clasificación de las estrategias más habituales para su resolución, describimos las habilidades de visualización utilizadas en la resolución de problemas de proyecciones ortogonales y definimos las principales características de los problemas de geometría plana en los que hemos centrado nuestro análisis.

3.1 Estudiantes con talento matemático

De entre los estudiantes que destacan respecto a la media, nos centraremos en aquellos que sobresalen en matemáticas, y que, en este texto, denominaremos estudiantes con aaccmm o talento matemático, entendidos como los estudiantes que tienen una habilidad o capacidad matemática superior a la media, la cual les permite resolver de manera exitosa los problemas o actividades matemáticas.

La atención educativa de los estudiantes con aaccmm requiere potenciar sus capacidades superiores. En esta investigación nos centramos en el desarrollo de algunas de las características de los estudiantes con talento matemático descritas en la Tabla 1 (sección 2.1.2):

1. Habilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas (Freiman, 2006; Miller, 1990).
2. Habilidad para organizar datos (Greenes, 1981).
3. Habilidad para acortar los procesos de razonamiento, flexibilidad en los procesos mentales requeridos para la actividad matemática (Freiman, 2006; Greenes, 1981; Kurtetskii,1976; Tourón y otros, 1998).
4. Habilidad para construir nexos y estructuras matemáticas (Freiman, 2006).
5. Habilidad para formalizar o generalizar relaciones matemáticas (Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Tourón y otros, 1998).
6. Habilidad para conceptos espaciales (Krutetskii, 1976).

En este trabajo hemos utilizado un conjunto de *actividades matemáticas ricas* centradas en tres contextos matemáticos diferentes (pre-álgebra, geometría plana y visualización) que favorecen el desarrollo de dichas habilidades. Para la selección y diseño de estas tareas nos hemos basado en el concepto de *actividad matemática rica* presentada por Piggott (2011), considerando aquellas actividades caracterizadas por ofrecer diferentes oportunidades para satisfacer las diversas necesidades de los estudiantes en distintos momentos. Piggott enumera algunas características propias de las *actividades matemáticas ricas*, entre ellas:

- Son accesibles para una amplia gama de estudiantes y ofrecen oportunidades para el éxito.
- Desafían a los estudiantes a pensar por sí mismos.
- Ofrecen diferentes niveles de desafío, pero a cualquier nivel de aprendizaje hay un verdadero desafío involucrado y, por lo tanto, también existe la posibilidad de ampliar aquellos que necesitan diferente demanda.
- Permiten diferentes métodos y diferentes respuestas.
- Tienen el potencial de ampliar las habilidades de los estudiantes y/o profundizar y ampliar el conocimiento del contenido.

- Tienen el potencial de revelar patrones o conducir a generalizaciones inesperadas.
- Tienen el potencial de revelar principios subyacentes.
- Alientan a los estudiantes a desarrollar confianza e independencia, así como a convertirse en pensadores críticos.

En esta investigación analizamos tres actividades donde se estudian contenidos propios, respectivamente, de pre-álgebra, geometría plana y visualización. En las dos primeras actividades los estudiantes tienen que generalizar relaciones aritméticas y geométricas. Para alcanzar este propósito los estudiantes deben organizar los datos, establecer relaciones entre los contenidos implícitos y hacer uso de dichas relaciones para acortar los procesos matemáticos. En la tercera actividad los estudiantes deben utilizar conceptos espaciales haciendo uso de determinadas habilidades de visualización. Todas las actividades están compuestas por varias cuestiones con diferentes grados de complejidad, apropiadas para ser implementadas en una clase ordinaria y que atienden las necesidades educativas de los estudiantes con talento matemático. Para el diseño y selección de estas actividades, hemos utilizado algunas de las características de los estudiantes con talento matemático mencionadas anteriormente, mostrando una forma de ayudar a desarrollar el potencial de estos estudiantes mediante ejemplos de una metodología de enseñanza que atiende sus necesidades específicas.

3.2 El modelo de demanda cognitiva

Como ya hemos visto anteriormente, el modelo de demanda cognitiva es un instrumento que permite valorar el esfuerzo cognitivo que deben realizar los estudiantes al resolver problemas de matemáticas. Su objetivo principal es analizar las tareas propuestas para clasificarlas según el grado de complejidad o reto que suponga su resolución para los estudiantes. Este modelo ofrece una serie de criterios que permiten clasificar las actividades según dos grados de complejidad, grado bajo y grado alto.

Dentro del *grado bajo*, considera dos niveles:

1. *Memorización*, que corresponde a aquellas actividades que se resuelven a partir de la repetición de una serie de datos, fórmulas o definiciones tomados directamente del enunciado o previamente memorizados.

2. *Algoritmos sin conexiones*, que corresponde a aquellas actividades que se resuelven aplicando un algoritmo anteriormente estudiado o siguiendo unas instrucciones conocidas. Son tareas que pueden ser resueltas sin necesidad de comprender los contenidos y relaciones que subyacen a la actividad, es suficiente seguir unos pasos previamente memorizados de manera rutinaria.

De igual manera, dentro del *grado alto***,** distingue otros dos niveles:

3. *Algoritmos con conexiones,* que corresponde a aquellas actividades que, a pesar de ser resueltas haciendo uso de un algoritmo, requieren de la comprensión de las relaciones que subyacen a los conceptos trabajados. Son tareas sin un camino de resolución claro o evidente, es decir, existe cierta ambigüedad en cómo deben resolverse, los estudiantes deben prestar atención a los conceptos con los que está trabajando y las relaciones que subyacen para decidir qué procedimiento utilizar para la resolución.

4. *Hacer matemáticas,* que corresponde a aquellas actividades para cuya resolución los estudiantes deben hacer uso de un razonamiento complejo. No pueden ser resueltas mediante un algoritmo y requieren de un pensamiento abstracto. Son tareas en las que, para ser resueltas, los estudiantes deben comprender las relaciones que subyacen a los conceptos trabajados y hacer un correcto uso de dichas relaciones a través de la búsqueda de diferentes estrategias de resolución que implican un razonamiento creativo.

En la Tabla 2 presentamos las características definitorias de los cuatro niveles de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), las cuales hemos numerado con el objetivo de facilitar su identificación cuando nos refiramos a ellas más adelante.

Nivel de D. C.	Características
Memorización	1.1 Suponen la reproducción de elementos previamente aprendidos, datos, reglas, fórmulas o definiciones, o el aprendizaje memorístico de datos, reglas, fórmulas o definiciones.
	1.2 No pueden ser resueltas usando algoritmos, porque no existe un algoritmo o porque el tiempo disponible para resolver la tarea es demasiado corto para usar un algoritmo.
	1.3 No son ambiguas. Estas tareas suponen la reproducción exacta de un material visto previamente, y expresan clara y directamente cómo representarlo.
	1.4 No tienen conexión con los conceptos o el significado subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo
Algoritmos Sin Conexiones	2.1 Son algorítmicas. Se utiliza un algoritmo específicamente señalado o que es evidente por la instrucción previa, experiencia o ubicación de la actividad.
	2.2 Su resolución con éxito requiere una demanda cognitiva limitada. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
	2.3 No hay conexión con los conceptos o el significado subyacentes al algoritmo usado.
	2.4 Están enfocadas a producir respuestas correctas en vez de al desarrollo de la comprensión matemática.
	2.5 No requiere explicaciones, o explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

Nivel de D. C.	Características
Algoritmos Con Conexiones	3.1 Dirigen la atención de los estudiantes al uso de algoritmos con el objetivo de que profundicen en los niveles de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas. 3.2 Sugieren explícita o implícitamente vías a seguir, que son algoritmos generales que tienen conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes, al contrario que algoritmos específicos que son opacos respecto a los conceptos subyacentes. 3.3 Generalmente se representan de varias formas, como diagramas visuales, manipulativos, símbolos y situaciones problemáticas. Establecer conexiones entre diferentes representaciones ayuda a desarrollar un significado. 3.4 Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, no se pueden seguir sin estar atentos. Los estudiantes necesitan considerar ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos necesarios para resolver con éxito la tarea y que desarrollan la comprensión.
Hacer Matemáticas	4.1 Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. La tarea, sus instrucciones o un ejemplo práctico no sugieren explícitamente un enfoque predecible o una vía ensayada. 4.2 Requieren que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de conceptos, procesos o relaciones matemáticas. 4.3 Necesitan autocontrol o autorregulación de los propios procesos cognitivos. 4.4 Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y que hagan uso adecuado de ellos durante la resolución de la tarea. 4.5 Requieren que los estudiantes analicen la tarea y examinen activamente las restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones. 4.6 Requieren un considerable esfuerzo cognitivo y pueden implicar cierto grado de ansiedad para el estudiante debido a la naturaleza impredecible del proceso de resolución.

Tabla 2. Características del modelo de demanda cognitiva según Smith y Stein (1998).

Esta tabla proporciona un listado de las características propias de cada uno de los niveles de demanda cognitiva, y ha sido utilizada en numerosos estudios para analizar la demanda cognitiva de tareas, la mayor parte de estas de tipo aritmético o algebraico.

Durante nuestra investigación empezamos haciendo uso del modelo de demanda cognitiva propuesto por Smith y Stein (1998) para el análisis de tareas. Comenzamos utilizando las características de los niveles de demanda cognitiva presentadas en la Tabla 2 para identificar el nivel de demanda cognitiva de cada actividad. Sin embargo, al poner en práctica el modelo de demanda cognitiva, observamos que algunas de las características no eran claras y había una falta de coherencia entre los niveles, lo cual dificultaba al análisis. Esto nos llevó a realizar algunas modificaciones de redacción y organización de las características con el fin de facilitar su uso. Además, una vez organizadas las características del modelo y mejorada su redacción, observamos que éstas no se adaptaban a nuestras actividades debido a que estaban adecuadas a unos tipos de problemas aritméticos o algebraicos concretos. Para solucionar este problema, particularizamos las características del modelo a diversos contextos matemáticos concretos que utilizamos durante nuestra investigación, particularizando y concretando cada una de las características de manera que se adecuen a las necesidades de las actividades. Una parte importante de la investigación realizada, y de los resultados novedosos que aporta esta tesis doctoral, ha consistido en modificar y particularizar las características de los niveles del modelo de demanda cognitiva como consecuencia de la experiencia adquirida cuando empezamos a utilizarlo. En las siguientes secciones de este capítulo, presentamos y justificamos las modificaciones realizadas en el modelo de demanda cognitiva original para transformarlo en la formulación mejorada que hemos incorporado al marco teórico de este estudio y que utilizaremos en los capítulos siguientes. Posteriormente, en el capítulo 4, presentaremos, como parte de nuestra metodología de investigación, la particularización de esta nueva formulación general del modelo de demanda cognitiva a cada uno los contextos matemáticos específicos en los que lo hemos utilizado.

3.3 Modificación del modelo de demanda cognitiva

Uno de los focos de atención de nuestra investigación ha sido analizar problemas de matemáticas para identificar su nivel de demanda cognitiva. Cuando empezamos a llevar a cabo este análisis para determinar el potencial de las actividades propuestas a nuestros estudiantes e identificar su nivel de complejidad, nos encontramos con varios obstáculos:

a) Las características de los niveles no son claras. Los conjuntos de las características de cada nivel carecen de una estructura u orden.

b) Las características de los niveles han sido derivadas del análisis de ciertos problemas aritméticos y algebraicos particulares. Las características se ajustan a un tipo particular de problemas, lo que dificulta el análisis de problemas de otro tipo.

c) La resolución de un problema puede requerir diferentes niveles de demanda cognitiva, dependiendo de las estrategias de resolución utilizada por los estudiantes.

Estos obstáculos nos han llevado a la necesidad de transformar las características teóricas originales del modelo para facilitar el análisis de otros tipos de problemas de matemáticas. El proceso de modificación se ha llevado a cabo en dos fases:

- Fase 1, teórica: Reestructurar, redefinir y completar las características teóricas de los niveles de demanda cognitiva.
- Fase 2, metodológica: Particularizar la caracterización teórica del modelo realizada en la fase 1 a diferentes contenidos matemáticos concretos.

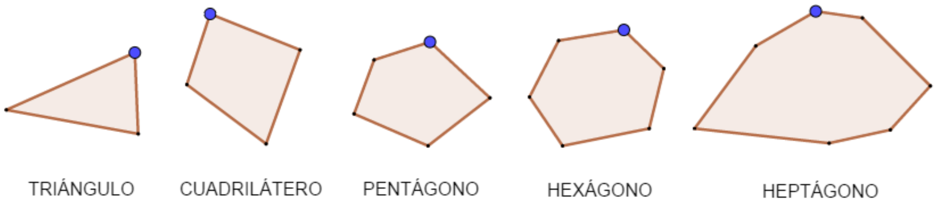
Para agilizar la lectura y uniformizar el lenguaje de las descripciones de las características de los niveles, durante todo el trabajo vamos a utilizar el término *contenidos matemáticos* como sinónimo de conceptos, propiedades, ideas o relaciones matemáticas.

A continuación, en las secciones 3.3.1-3.3.6, explicamos paso a paso en qué ha consistido la fase 1 del proceso de modificación del modelo. Primeramente, describimos las debilidades que encontramos en el modelo al empezar a ponerlo en práctica, las cuales nos incitaron a reorganizar las características del modelo original. Para ello, comenzamos identificando seis categorías a las que pertenecen las diferentes características de cada nivel de demanda cognitiva, que nos permitieron estructurar dichas características. A raíz de esa clasificación, observamos que, en algunos niveles, había categorías que quedaban incompletas, lo cual nos llevó a identificar y completar las características que estaban ausentes en la descripción original del modelo. De esa manera conseguimos describir cada nivel a través de las seis categorías. Para terminar, reformulamos algunas características del modelo original que resultaban confusas y comparamos el análisis de las tareas tras las modificaciones con el análisis inicial. Todas estas modificaciones quedan reflejadas en el modelo general modificado, donde cada uno de los cuatro niveles está organizado mediante las seis categorías definidas. La segunda fase del proceso de modificación del modelo de demanda cognitiva la veremos con detalle en la sección 3.4.

3.3.1 *Descripción de las debilidades de algunas características del modelo original*

En primer lugar, al identificar el nivel correspondiente de cada una de las actividades, observamos que las características de los niveles no son claras, lo cual provoca una falta de coherencia entre los niveles y dificulta la clasificación de actividades. Este inconveniente ha quedado visible en el análisis de varias actividades, una de las cuales la presentamos a continuación (actividad completa en la sección 4.1.1.1). La actividad (Figura 1) comienza recordando la definición de diagonal y, a continuación, plantea tres cuestiones. En la primera cuestión se pide dibujar y calcular el número de diagonales de un cuadrilátero, un pentágono y un triángulo. La segunda cuestión se centra en el cálculo del número de diagonales desde un vértice de algunos polígonos concretos.

2. (Applet 7.2) Observa los polígonos. Responde a las siguientes preguntas.



a) En cada uno de polígonos, traza **todas** las diagonales desde el vértice señalado. Modifica la forma de los polígonos manejando el vértice y comprueba la cantidad de diagonales. Rellena la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULO		
CUADRILÁTERO		
PENTÁGONO		
HEXÁGONO		
HEPTÁGONO		

b) ¿Qué relación existe entre el número de lados y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?

Figura 1. Segunda parte de un problema enfocado al descubrimiento del número de diagonales de un polígono.

En la tercera cuestión, se pide a los estudiantes dibujar y calcular el número total de diagonales de los mismos polígonos rellenando una nueva tabla, el número de diagonales de un polígono de 20 lados, la generalización para el cálculo de un polígono cualquiera en función de su número de lados y la justificación de dicha relación.

Si realizamos el análisis de la pregunta 2a (Figura 1), considerando la resolución que cabe esperar de un estudiante medio que se limita a contestar aquello que la pregunta pide, observamos que a la actividad le podemos asignar dos niveles de demanda cognitiva diferentes.

Considerando el nivel de *algoritmos sin conexiones,* la pregunta 2a se resuelve mediante un algoritmo sugerido por el enunciado, que consiste en el trazado de las diagonales desde el vértice señalado de cada polígono y en el conteo del número de estas para completar la tabla, lo cual encaja con la característica 2.1 de este nivel de demanda cognitiva (Tabla 2). Además, el texto del enunciado, las figuras de los polígonos y la tabla sugieren dibujar las diagonales para contarlas y escribir los resultados en la tabla, por lo que existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad (encaja con 2.2) y esta no pide explicaciones (encaja con 2.5). Sin embargo, aunque la actividad está enfocada a obtener un resultado correcto y no a la comprensión de la relación existente entre el número de lados y de diagonales desde un vértice (encaja con 2.4), en el procedimiento usado existe conexión entre los contenidos matemáticos subyacentes ya que de manera implícita está presente la relación subyacente que hay entre el número de lados y diagonales por vértice de un polígono, por lo que no encaja con la característica 2.3.

Por otra parte, considerando el nivel de *algoritmos con conexiones,* la pregunta 2a no encaja con la característica 3.1, ya que la pregunta no está enfocada a comprender la relación existente entre el número de lados y diagonales por vértice. Sin embargo, sí que encaja con la característica 3.3, ya que, para contestar la actividad 2a, los estudiantes utilizan la representación geométrica y la aritmética de la información: la representación aritmética muestra la relación entre el número de lados y el número de diagonales, mientras que la representación geométrica facilita la comprensión de por qué dicha relación es verdadera. Por lo tanto, la actividad tiene potencial para permitir a los estudiantes conectar ambas representaciones, lo cual les ayuda a comprender la relación implícita existente entre lados y diagonales por vértice. La actividad también encaja con la característica 3.2, ya que sugiere explícitamente el uso de un algoritmo en el que existe conexión entre los contenidos matemáticos subyacentes. No obstante, no encaja con la característica 3.4, ya que el procedimiento utilizado sólo requiere un pequeño esfuerzo cognitivo, la actividad puede ser resuelta de manera correcta sin necesidad de comprender la relación implícita existente entre el número de lados y número de diagonales por vértice.

Por tanto, nos encontramos con que las características de los niveles *algoritmos sin conexiones* y *algoritmos con conexiones* no son suficientemente precisas, ya que la actividad 2a cumple características de ambos niveles, lo cual puede llevar a confusión a la hora de determinar el nivel de demanda cognitiva de las actividades que analicemos. La imprecisión o contradicción más evidente se encuentra en las características 2.1 y 3.2.

3.3.2 *Identificación de las categorías*

Para solucionar las confusiones causadas por algunas características de los niveles, realizamos un análisis detallado de las características de cada nivel presentadas por Smith y Stein (1998), con el fin de comprender las diferencias existentes entre los niveles e identificar las ambigüedades presentes en sus caracterizaciones. Al hacer esto, observamos que, en cada nivel, hay características que describen los mismos aspectos de los problemas o de la actividad cognitiva de los estudiantes durante su resolución, relevantes para caracterizar los niveles de demanda cognitiva. Esto nos llevó a tratar de ordenar y organizar los descriptores de cada nivel atendiendo a los aspectos de los enunciados de los problemas o de sus resoluciones a los que se refieren, identificando seis categorías diferentes.

De esta manera, tomando como punto de partida los descriptores formulados en el modelo original (Smith y Stein, 1998), identificamos y caracterizamos seis categorías que se centran en diferentes aspectos del proceso de resolución de una actividad matemática. Estas categorías permiten estructurar los niveles de demanda cognitiva. Las seis categorías son:

- El *procedimiento de resolución* (P) de la tarea, donde se especifica el método esperado o utilizado para resolver la tarea, que puede consistir en:
    - reproducir unos datos aprendidos,
    - seguir unos pasos o instrucciones previamente memorizados,
    - utilizar un algoritmo que requiera del establecimiento de ciertas relaciones entre los contenidos matemáticos subyacentes a la actividad,
    - aplicar una estrategia de resolución que haga uso de un razonamiento complejo.
- La *finalidad* (F) con la que se propone o resuelve una tarea, que puede variar entre:
    - reproducir unos elementos memorizados,
    - obtener un resultado correcto,

  - comprender las relaciones entre varios conceptos y/o propiedades de estos,
  - realizar un análisis profundo de la estructura matemática de la actividad.

- El *esfuerzo cognitivo* (E) necesario (esperado o real) para resolver una tarea, que dependerá de la complejidad que suponga saber qué hacer o cómo hacerlo para resolver con éxito la tarea. Los diferentes calificativos usados para diferenciar los niveles (*apenas*, *limitado*, *cierto* y *considerable*) son algo sutiles y su significado resulta muy subjetivo, ya que no existe una métrica para evaluar el esfuerzo cognitivo. Para clasificar los distintos grados de esfuerzo cognitivo que requiere la resolución con éxito de una tarea matemática, mantendremos los términos usados por Smith y Stein, diferenciando entre:
  - *apenas* requiere esfuerzo cognitivo: los estudiantes no necesitan tomar decisiones, sino sólo recordar y reproducir datos que tienen memorizados o están expuestos en el enunciado. No son tareas ambiguas, suponen la reproducción exacta de un material visto previamente, y expresan clara y directamente cómo representarlo.
  - requiere un esfuerzo cognitivo *limitado*: los estudiantes necesitan conocer y aplicar un algoritmo de resolución que viene indicado expresamente o es evidente por el contexto. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
  - requiere *cierto* esfuerzo cognitivo: los estudiantes necesitan deducir y aplicar un algoritmo general considerando las relaciones implícitas entre los contenidos matemáticos subyacentes. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, al aplicarlos no se pueden seguir sin prestar atención a los contenidos matemáticos subyacentes.
  - requiere un *considerable* esfuerzo cognitivo: los estudiantes necesitan crear su propia estrategia de resolución. Las formas de resolución no son fácilmente predecibles, requieren tomar decisiones sobre los elementos a utilizar y cómo emplearlos.

- Los *contenidos implícitos* (C) o *subyacentes* en su resolución (esperada o realizada), que hacen referencia a los contenidos matemáticos (definiciones, propiedades o teoremas, fórmulas, algoritmos, etc.) y a las relaciones entre dichos contenidos que están implicados en una resolución correcta de la tarea. Podemos distinguir diferentes casos:
    - no existe conexión entre el procedimiento de resolución y los contenidos matemáticos subyacentes,
    - existe esa conexión, pero no es necesario comprenderla para resolver con éxito la tarea,
    - existe esa conexión y debe ser considerada para resolver con éxito la tarea,
    - existe esa conexión y es necesario utilizarla para la deducción de nuevos resultados.
- El *tipo de explicaciones* (X) requeridas o aportadas, dependiendo de si:
    - la actividad no pide justificar los resultados obtenidos,
    - la justificación consiste en una descripción del procedimiento utilizado,
    - la justificación debe mostrar que los estudiantes comprenden los contenidos involucrados,
    - se trata de una justificación basada en la demostración del resultado obtenido.
- La *representación de la solución* (R), esperada o utilizada, que puede ser de varios tipos (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.), y puede variar desde usar una única representación sencilla hasta el uso combinado de diversas representaciones relacionadas entre sí.

Estas categorías nos han permitido:

- Organizar homogéneamente los descriptores de los niveles de demanda cognitiva, como mostramos en la sección 3.3.3.
- Localizar lagunas en las descripciones de los niveles, que hemos subsanado para completar la caracterización de cada nivel, como mostramos en la sección 3.3.4.

- Identificar y analizar las diferencias entre los niveles, lo que nos ha llevado a reformular aquellas características que no resultaban claras, proponiendo descripciones más precisas (sección 3.3.5).

3.3.3 *Asignación de las categorías a las características originales*

La identificación de las seis categorías definidas en la sección anterior nos ha permitido organizar de manera homogénea las características del modelo original (Smith y Stein, 1998), asignando categorías a las características de los cuatro niveles. En la Tabla 3 mostramos, como ejemplo, la asignación de categorías a cada una de las características del nivel *algoritmos con conexiones*.

	Características	**Categorías**
Algoritmos con conexiones	3.1 Dirigen la atención de los estudiantes al uso de algoritmos con el objetivo de que profundicen en los niveles de comprensión de los contenidos e ideas matemáticas.	*Finalidad*
	3.2 Sugieren explícita o implícitamente vías a seguir, que son algoritmos generales que tienen conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes, al contrario que algoritmos específicos que son opacos respecto a los contenidos matemáticos subyacentes.	*Procedimiento de resolución*
	3.3 Generalmente se representan de varias formas, como diagramas visuales, manipulativos, símbolos y situaciones problemáticas. Establecer conexiones entre diferentes representaciones ayuda a desarrollar un significado.	*Representación de la solución*
	3.4 Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, no se pueden seguir sin estar atentos. Los estudiantes necesitan considerar ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos necesarios para resolver con éxito la tarea y que desarrollan la comprensión.	*Esfuerzo cognitivo* y *Contenidos implícitos*

Tabla 3. Asignación de las nuevas categorías a las características originales para el nivel *algoritmos con conexiones.*

En la Tabla 3 podemos observar que la característica 3.1 aclara el objetivo o *finalidad* con el que se propone la actividad. La característica 3.2 indica que la actividad se puede resolver utilizando un tipo de algoritmos, es decir, que indica el *procedimiento de resolución.* Por su parte, la característica 3.3 hace referencia al modo de *representación de la solución*. La característica 3.4 se puede dividir en dos partes, que corresponden a dos categorías diferentes. Primero explica la complejidad que supone la resolución de la actividad para los estudiantes, y cómo deben de actuar estos para resolverla con éxito, por lo que está relacionada con el *esfuerzo cognitivo* de los estudiantes. Después se refiere a la necesidad de considerar la conexión existente entre las ideas y contenidos matemáticos para desarrollar la comprensión y resolver con éxito este tipo de problemas, por lo que está relacionada con los *contenidos implícitos.* Al terminar este emparejamiento entre las características del nivel de demanda cognitiva de *algoritmos con conexiones* y las categorías, observamos que no existe ninguna característica que corresponda a la categoría de *explicaciones*.

Este análisis lo hemos realizado con las características de los cuatro niveles de demanda cognitiva propuestas en la formulación original del modelo en Smith y Stein (1998). El resultado es la Tabla 4, donde mostramos la asignación de las categorías identificadas a las características de cada nivel.

Niveles de D.C. / **Categorías**	**Memorización**	**Algoritmos sin conexiones**	**Algoritmos con conexiones**	**Hacer matemáticas**
Procedimiento de resolución	1.2	2.1	3.2	4.1, 4.5
Finalidad	1.1	2.4	3.1	4.2
Esfuerzo cognitivo	1.3	2.2	3.4	4.6
Contenidos implícitos	1.4	2.3	3.4	4.4
Explicaciones	--	2.5	--	--
Representación de la solución	--	--	3.3	--

Tabla 4. Asignación de las nuevas categorías a las características originales de los niveles de demanda cognitiva.

Observando la Tabla 4 podemos detectar que, en el nivel *algoritmos con conexiones,* la característica 3.4 se encuentra en dos categorías diferentes, mientras que en el nivel *hacer matemáticas* se utilizan varias características (4.1 y 4.5) para definir la categoría de *procedimiento de resolución*. Además, podemos observar que hemos eliminado la característica 4.3 del nivel *hacer matemáticas*, la cual hacía referencia al “autocontrol o autorregulación de los propios procesos cognitivos” (Tabla 2). Hemos considerado apropiado prescindir de esta característica debido a la dificultad que supone evaluar el nivel de autocontrol o autorregulación de los estudiantes haciendo uso de los datos que disponemos.

Por otra parte, esta nueva organización nos ha permitido localizar varias lagunas en las categorías de *explicaciones* y *representación de la solución*, ya que ninguna de ellas está contemplada en las características de todos los niveles enunciadas por Smith y Stein (1998).

3.3.4 *Redacción de nuevas características para aquellas categorías incompletas*

Tras la identificación de ciertas lagunas en las características de los niveles, el siguiente paso para mejorar la utilidad del modelo de demanda cognitiva fue completar las características, incluyendo características correspondientes a aquellas categorías que no estaban contempladas. Esto lo hemos hecho prestando atención a que las nuevas características sean coherentes con las características de otros niveles. La Tabla 5 muestra las nuevas características que hemos añadido a la Tabla 2. De esta forma logramos una mejora original y significativa del modelo de demanda cognitiva, ya que las nuevas características permiten hacer una aplicación más fiable del modelo.

Memorización
1.5 (*Explicaciones*). No requieren explicaciones. 1.6 (*Representación de la solución*). Se usan las representaciones que resultan más simples e intuitivas en el contexto del problema.
Algoritmos sin conexiones
2.6 (*Representación de la solución*). Se pueden usar una o varias formas de representación (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Cuando se usan varias, se hace de manera independiente, es decir, sin establecer relaciones entre ellas ni con los contenidos matemáticos subyacentes.
Algoritmos con conexiones
3.5 (*Explicaciones*). Requieren explicaciones que hagan referencia a los contenidos matemáticos subyacentes utilizando casos concretos.
Hacer matemáticas
4.7 (*Explicaciones*). Requieren explicaciones basadas en la demostración del resultado obtenido. 4.8 (*Representación de la solución*). Se utiliza la forma de representación más eficaz, que facilite la resolución y sintetice la información de manera abstracta.

Tabla 5. Nuevas características incorporadas a los niveles de demanda cognitiva.

Una vez completadas las características de los niveles a partir de la unión de las Tablas 4 y 5, el paso siguiente fue reformular aquellas características que inducían a error a la hora de identificar el nivel de demanda cognitiva correspondiente de una actividad, como el problema analizado en la sección 3.3.1 (Figura 1).

3.3.5 *Comparación y reformulación de aquellas características que resultan conflictivas*

Para facilitar la clasificación de actividades o de respuestas de estudiantes, es necesario que las características precisen el límite entre dos niveles adyacentes. No obstante, como hemos comentado en la sección 3.3.1, esto no ocurre con algunas características del modelo de demanda cognitiva. Para solucionar este problema, hemos realizado una comparación sistemática de las características de los niveles adyacentes que pertenecen a cada categoría y hemos realizado algunas modificaciones, reformulando aquellas características que resultaban conflictivas y haciendo más explícitas y claras las particularidades de cada nivel.

A continuación, las Tablas 6, 7 y 8 muestran la comparación de las características de cada par de niveles adyacentes por categorías. En las tablas podemos observar en cursiva los añadidos o cambios significativos realizados a las características, tanto para las nuevas como para las del modelo original (Smith y Stein, 1998) que han sido reformuladas. La reformulación de las características a partir de la comparación sistemática entre los niveles es una de las mejoras aportadas por esta tesis doctoral al modelo de demanda cognitiva, que nos permite identificar fácilmente el límite existente entre cada par de niveles.

La Tabla 6 muestra las diferencias existentes entre los niveles *memorización* y *algoritmos sin conexiones.* Una tarea del primer nivel no se resuelve haciendo uso de un algoritmo, sino mediante la reproducción de unos datos previamente memorizados o extraídos directamente del enunciado, donde no existe conexión con los contenidos matemáticos subyacentes. Por el contrario, una tarea del segundo nivel se resuelve haciendo uso de un algoritmo conocido en el que, a pesar de existir conexión con los contenidos matemáticos subyacentes, no es necesario hacer uso de esta relación para resolver correctamente la actividad.

Nivel / Categoría	Memorización	Algoritmos sin conexiones
Procedimiento de resolución	1.2. No se resuelven usando algoritmos, *sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.*	2.1 Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente *por el contexto. Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin necesidad de considerar los contenidos matemáticos subyacentes.*
Finalidad	1.1. Reproducir elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.	2.4. *Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática. Los estudiantes pueden resolverlas correctamente sin necesidad de comprender los contenidos matemáticos subyacentes.*
Esfuerzo cognitivo	1.3. *Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo*: no son ambiguas, suponen la reproducción exacta de un material visto previamente, y expresan clara y directamente cómo representarlo.	2.2. Su resolución con éxito requiere un *esfuerzo cognitivo* limitado: existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
Contenidos implícitos	1.4. No tienen conexión con los contenidos matemáticos subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.	2.3. *Puede existir conexión implícita entre los contenidos matemáticos y los algoritmos usados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de ella para resolver correctamente el problema.*
Explicaciones	*1.5. No requieren explicaciones.*	2.5. *Requiere explicaciones* que se enfocan únicamente a describir el algoritmo empleado.
Representación de la solución	*1.6. Se usan las representaciones que resultan más simples e intuitivas en el contexto del problema.*	*2.6. Se pueden usar una o varias formas de representación (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Cuando se usan varias, se hace de manera independiente, es decir sin establecer relaciones entre ellas ni con los contenidos matemáticos subyacentes.*

Tabla 6. Comparación de las características de los niveles de *memorización* y *algoritmos sin conexiones*.

La Tabla 7 muestra las diferencias existentes entre los niveles *algoritmos sin conexiones* y *algoritmos con conexiones*. Aunque las actividades de ambos niveles se resuelven haciendo uso de algoritmos que tienen conexión con los contenidos matemáticos subyacentes, únicamente en el segundo de dichos niveles es necesario ser consciente y comprender dicha conexión para poder resolver con éxito la tarea.

Nivel. / Categoría	**Algoritmos sin conexiones**	**Algoritmos con conexiones**
Procedimiento de resolución	2.1 Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente *por el contexto. Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin necesidad de considerar los contenidos matemáticos subyacentes.*	3.2. *Son algorítmicas.* Sugieren explícita o implícitamente *una vía* a seguir, *ya sea a partir de cuestiones resueltas antes o en el propio enunciado.* Se trata de un algoritmo general *que los estudiantes pueden seguir solo si establecen conexiones estrechas con los contenidos matemáticos subyacentes.*
Finalidad	2.4. *Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática. Los estudiantes pueden resolverlas correcta-mente sin necesidad de comprender los contenidos matemáticos subyacentes.*	3.1. Usar algoritmos con el objetivo de que adquiera una comprensión más profunda de los contenidos matemáticos subyacentes.
Esfuerzo cognitivo	2.2. Su resolución con éxito requiere un *esfuerzo cogniti-vo* limitado: existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.	3.4a. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo: aunque se pueden utilizar algoritmos generales, *no se pueden aplicar sin prestar atención a los contenidos matemáticos subyacentes.*
Contenidos implícitos	2.3. *Puede existir conexión implícita entre los contenidos matemáticos y los algoritmos usados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de ella para resolver correctamente el problema.*	3.4b. Para resolver con éxito la cuestión, los estudiantes necesitan considerar *conscientemente* los contenidos matemáticos que subyacen a los algoritmos.
Explica-Ciones	2.5. *Requieren explicaciones* que se enfocan únicamente a describir el algoritmo emplea-do.	3.5. *Requieren explicaciones que hagan referencia a los contenidos matemáticos subyacentes utilizando casos concretos.*

Nivel. Categoría	Algoritmos sin conexiones	Algoritmos con conexiones
Representación de la solución	*2.6. Se pueden usar una o varias formas de representación (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Cuando se usan varias, se hace de manera independiente, es decir sin establecer relaciones entre ellas ni con los contenidos matemáticos subyacentes.*	3.3. Se suelen utilizar varias representaciones (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). *Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre diferentes representaciones usando los contenidos matemáticos subyacentes,* lo cual favorece el desarrollo de la comprensión.

Tabla 7. Comparación de las características de los niveles de *algoritmos sin conexiones* y *algoritmos con conexiones*.

La Tabla 8 muestra las diferencias entre los niveles *algoritmos con conexiones* y *hacer matemáticas*. En ambos casos es necesario comprender los contenidos matemáticos subyacentes para resolver con éxito las actividades, pero las del nivel *algoritmos con conexiones* pueden resolverse mediante un algoritmo sugerido de manera implícita o explícita por el enunciado, mientras que las del nivel *hacer matemáticas* no pueden resolverse sólo con un algoritmo, sino que los estudiantes necesitan hacer uso de un pensamiento complejo.

. Nivel Categoría	Algoritmos con conexiones	Hacer matemáticas
Procedimiento de resolución	3.2. *Son algorítmicas.* Sugieren explícita o implícitamente *una vía* a seguir, *ya sea a partir de cuestiones resueltas antes o en el propio enunciado.* Se trata de un algoritmo general *que los estudiantes pueden seguir solo si establecen conexiones estrechas con los contenidos matemáticos subyacentes.*	4.1. y 4.5. *No son algorítmicas.* Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. La tarea, sus instrucciones o un ejemplo práctico no sugieren explícitamente un enfoque predecible o una vía ensayada de resolución. Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen condiciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.

Nivel / Categoría	Algoritmos con conexiones	Hacer matemáticas
Finalidad	3.1. Usar algoritmos con el objetivo de que adquiera una comprensión más profunda de los contenidos matemáticos subyacentes.	4.2. Explorar y comprender los contenidos matemáticos *subyacentes.*
Esfuerzo cognitivo	3.4a. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo: aunque se pueden utilizar algoritmos generales, al aplicarlos *no se pueden seguir sin prestar atención a los contenidos matemáticos subyacentes.*	4.6. *Su resolución con éxito* requiere un considerable esfuerzo cognitivo: Las formas de resolución no son fácilmente predecibles, requieren tomar decisiones sobre los elementos a utilizar y cómo emplearlos.
Contenidos implícitos	3.4b. Para resolver con éxito la cuestión los estudiantes necesitan considerar *conscientemente* los contenidos matemáticos que subyacen a los algoritmos.	4.4. Los estudiantes tienen que acceder a conocimientos y experiencias relevantes y usarlos adecuadamente durante la resolución de la actividad.
Explica-Ciones	3.5*. Requieren explicaciones que hagan referencia a los contenidos matemáticos subyacentes utilizando casos concretos.*	4.7. *Requieren explicaciones basadas en la demostración del resultado obtenido.*
Representación de la solución	3.3. Se suelen utilizar varias representaciones (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.)*. Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre diferentes representaciones usando los contenidos matemáticos subyacentes,* lo cual favorece el desarrollo de la comprensión.	4.8. Se utiliza la forma de representación más eficaz, que facilite la resolución y sintetice la información de manera abstracta.

Tabla 8. Comparación de las características de los niveles de algoritmos con conexiones y hacer matemáticas.

Como hemos comentado anteriormente, la organización de las características de los niveles de demanda cognitiva en categorías no solo nos ha permitido estructurar los niveles, sino también discriminar mejor los niveles al reformular aquellas características que no resultaban claras mediante definiciones más precisas que faciliten la identificación del nivel de demanda cognitiva al que corresponde cada actividad o respuesta.

Si repetimos ahora el análisis del problema con el que mostrábamos la debilidad de la formulación inicial de algunas características de los niveles de demanda cognitiva (Figura 1, sección 3.3.1), observamos que la pregunta 2a encaja con las nuevas características 2.1, 2.3 y 2.4, ya que orienta a los estudiantes a dibujar, para cada polígono, las diagonales desde un vértice y a contar el número de diagonales dibujadas, por lo que la actividad puede ser resuelta de manera correcta sin necesidad de ser consciente de la relación implícita existente entre el número de lados de un polígono y el de diagonales que tiene desde un vértice. También encaja con las nuevas características 2.2 (porque existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad) y 2.6 (los estudiantes usarán representaciones geométrica y aritmética, pero sin necesidad de conectar ambas). Sin embargo, la pregunta 2a no se ajusta a la característica 2.5, ya que la pregunta no pide ninguna justificación. Por otra parte, la pregunta 2a tampoco se ajusta a las nuevas características 3.1, 3.2, 3.3, 3.4a, 3.4b y 3.5. Por lo tanto, exceptuando la categoría correspondiente a las *explicaciones*, la actividad cumple todas las características del nivel *algoritmos sin conexiones.* Así pues, ahora queda claro que la resolución de la pregunta 2a requiere el nivel de demanda cognitiva de *algoritmos sin conexiones*. El análisis teórico de una actividad permite determinar el nivel de demanda cognitiva al que pertenece y detectar posibles debilidades en el diseño de esta. Un ejemplo de ello es la pregunta 2a, en la que, tras el análisis teórico, podemos detectar cómo la actividad podría ser mejorada incluyendo la petición de explicaciones por parte del estudiante.

3.3.6 *Modelo general modificado*

Como síntesis del desarrollo del modelo de demanda cognitiva que hemos realizado en las secciones anteriores, en las que hemos organizado las características mediante las categorías, completado las lagunas y reformulado aquellas características que no resultaban claras, en esta sección presentamos la nueva definición de los niveles de demanda cognitiva resultante de dicho desarrollo. La Tabla 9, que sintetiza las Tablas 5 a 8, presenta nuestra modificación del modelo de demanda cognitiva y es el marco teórico con el que hemos trabajado en la parte experimental de nuestra investigación. En dicha tabla, definimos los cuatro niveles de demanda cognitiva mediante las seis categorías y sus correspondientes características. Delante de cada característica se muestra un nuevo código que indica el nivel al que pertenece dicha característica y la categoría a la que hace referencia. De ahora en adelante utilizaremos para nuestros análisis los códigos de la siguiente tabla.

Nivel de D. C.	Categorías	Características
1. Memorización	Procedimiento de resolución	(1.P) No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
	Finalidad	(1.F) Reproducir elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
	Esfuerzo cognitivo	(1.E) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo. No son ambiguas, suponen la reproducción exacta de un material visto previamente, y expresan clara y directamente cómo representarlo.
	Contenidos implícitos	(1.C) No tienen conexión con los contenidos matemáticos subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
	Explicaciones	(1.X) No requieren explicaciones.
	Representación de la solución	(1.R) Se usan las representaciones que resultan más simples e intuitivas en el contexto del problema.
2. Algoritmos Sin Conexiones	Procedimiento de resolución	(2.P) Se resuelven aplicando un algoritmo que viene indicado expresamente o es evidente por el contexto. Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin necesidad de considerar los contenidos matemáticos subyacentes.
	Finalidad	(2.F) Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática. Los estudiantes pueden resolverlas correctamente sin necesidad de comprender los contenidos matemáticos subyacentes.
	Esfuerzo cognitivo	(2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
	Contenidos implícitos	(2.C) Puede existir conexión implícita entre los contenidos matemáticos y los algoritmos usados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
	Explicaciones	(2.X) Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo empleado.
	Representación de la solución	(2.R) Se pueden usar una o varias formas de representación (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Cuando se usan varias, se hace de manera independiente, es decir sin establecer relaciones entre ellas ni con los contenidos matemáticos subyacentes.

Nivel de D. C.	Categorías	Características
3. Algoritmos Con Conexiones	Procedimiento de resolución	(3.P) Se resuelven aplicando un algoritmo general que los estudiantes pueden seguir solo si establecen conexiones estrechas con los contenidos matemáticos subyacentes. Se sugieren explícita o implícitamente una vía a seguir, ya sea a partir de cuestiones resueltas antes o en el propio enunciado.
	Finalidad	(3.F) Usar algoritmos con el objetivo de que los estudiantes adquieran una comprensión más profunda de los contenidos matemáticos subyacentes.
	Esfuerzo cognitivo	(3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, al aplicarlos no se pueden seguir sin prestar atención a los contenidos matemáticos subyacentes.
	Contenidos implícitos	(3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente los contenidos matemáticos que subyacen a los algoritmos.
	Explicaciones	(3.X) Requieren explicaciones que hagan referencia a los contenidos matemáticos subyacentes utilizando casos concretos.
	Representación de la solución	(3.R) Se suelen utilizar varias representaciones (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre diferentes representaciones usando los contenidos matemáticos subyacentes, lo cual favorece el desarrollo de la comprensión.
4. Hacer Matemáticas	Procedimiento de resolución	(4.P) Se resuelven aplicando un pensamiento complejo y no algorítmico. La tarea, sus instrucciones o un ejemplo práctico no sugieren explícitamente un enfoque predecible o una vía ensayada de resolución. Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen condiciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
	Finalidad	(4.F) Explorar y comprender los contenidos matemáticos subyacentes.
	Esfuerzo cognitivo	(4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo. Las formas de resolución no son fácilmente predecibles, requieren tomar decisiones sobre los elementos a utilizar y cómo emplearlos.
	Contenidos implícitos	(4.C) Los estudiantes tienen que acceder a conocimientos y experiencias relevantes y usarlos adecuadamente durante la resolución de la actividad.
	Explicaciones	(4.X) Requieren explicaciones basadas en la demostración del resultado obtenido.
	Representación de la solución	(4.R) Se utiliza la forma de representación más eficaz, que facilite la resolución y sintetice la información de manera abstracta.

Tabla 9. Características del modelo de demanda cognitiva modificado.

3.4 Características de los problemas de patrones geométricos

En la sección 2.3 hemos mostrado que, en la literatura, podemos encontrar una variedad de tipos de problemas de patrones geométricos, según la forma de presentar los datos y las preguntas que incluyen. Además, también hemos comprobado que diferentes autores usan distintos criterios para el análisis de las respuestas, en función del grado de abstracción y de las estrategias utilizadas para resolver el problema. En esta sección, vamos a concretar la parte del marco teórico relativa al contexto del pre-álgebra, enumerando y definiendo los términos utilizados en nuestra investigación. Para facilitar la lectura de esta sección, repetiremos algunas definiciones que ya aparecieron previamente en la revisión bibliográfica (sección 2.3).

Los problemas de patrones geométricos utilizados en nuestra experimentación (mostradas en el anexo 1), presentan representaciones visuales de los primeros términos de una secuencia y piden calcular varios términos desconocidos:

- El *término inmediato,* de alguna de las posiciones que siguen a los términos dados.
- Un *término próximo*, de manera que se pueda utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de su valor.
- Un *término lejano,* tal que, aunque se trata del término de una posición concreta, su representación gráfica es costosa de llevar a cabo y es más conveniente identificar la relación matemática entre las dos variables (posición del término y su valor).
- El *término general* de la secuencia, que requiere formular una expresión general, que se espera que sea algebraica.

Además de estas cuatro cuestiones, algunos autores (Ayalon, Watson y Lerman, 2015; Lin y Yang, 2004) plantean una cuestión inicial que pide obtener el número de elementos que forman una de las figuras dadas en el propio enunciado. Esta cuestión corresponde al nivel de demanda cognitiva de *memorización* y nosotros no la hemos incluido en los problemas de nuestras experimentaciones. En la bibliografía consultada no hemos encontrado una definición o nombre para hacer referencia a este tipo de cuestión, por lo que la llamaremos *recuento directo,* ya que los estudiantes únicamente necesitan contar el número de elementos que forman la figura del enunciado.

Para analizar las respuestas de los estudiantes, utilizaremos el siguiente criterio de clasificación, considerando las estrategias de resolución y el grado de abstracción de la respuesta de manera simultánea (García-Cruz,1998; Radford, 2003; Zapatera y Callejo, 2011):

- *Estrategia aditiva.* Los estudiantes observan que, el valor de un término se obtiene sumando al término anterior una cierta cantidad y la usan para calcular el valor del término requerido. Se distinguen dos tipos:
    - *Recuento*. Dibujan o construyen el término requerido y cuentan los elementos que lo forman.
    - *Proceso recursivo*. Calculan el valor del término requerido sumando la cantidad necesaria al término anterior.
- *Estrategia funcional*. Los estudiantes utilizan una expresión aritmética para calcular el número de elementos de un término determinado, identificando la relación matemática existente entre el valor de un término y su posición. Se distinguen dos tipos:
    - *Relación matemática*. Se utiliza una expresión aritmética o verbal para hallar el número de elementos de un término determinado.
    - *Relación funcional*. Se utiliza una expresión aritmética que representa la regla general para el cálculo de un término cualquiera, pero expresada con valores numéricos.
    - *Generalización verbal.* Los estudiantes expresan verbalmente la relación matemática entre el valor de un término y su posición, pero no obtienen una expresión algebraica que permita obtener el valor de cualquier término de la secuencia.
- *Generalización algebraica.* Los estudiantes expresan, utilizando notación algebraica, la regla de cálculo que permita calcular cualquier término de la secuencia a partir de su posición.

En la sección 5.1.2, presentamos las estrategias de resolución adaptadas al problema de los números triangulares, particularizando los nombres y definiciones a dicho problema.

3.5 Características de los problemas de geometría plana

En nuestra experimentación planteamos una serie de actividades de geometría plana, más específicamente de polígonos. El diseño y la selección de estas tareas no se fundamenta en una teoría específica de enseñanza de la geometría. Las actividades utilizadas se basan en el desarrollo del razonamiento inductivo, entendiendo este como el tipo de razonamiento en el que se parte de la manipulación de casos o ejemplos particulares y se busca formular una propiedad general a partir de lo observado en dichos casos. Hemos diseñado estas actividades con la estructura de las actividades matemáticas ricas, de manera que están compuestas por una secuencia de cuestiones cuya resolución supone una serie de pasos que guían al estudiante hacia la generalización:

- *Paso 1. Observación de casos concretos*. Consiste en examinar una propiedad geométrica en polígonos particulares.
- *Paso 2. Organización de los casos concretos trabajados.* Consiste en sintetizar la información obtenida de los casos mediante unas tablas dadas por la actividad. Estas tablas tienen como finalidad ayudar a identificar regularidades.
- *Paso 3. Formulación de conjeturas y aplicación a nuevos casos concretos.* Consiste en identificar una regla o propiedad matemática válida para todos los casos examinados y en aplicarla a nuevos polígonos concretos. La aplicación a nuevos ejemplos tiene como objetivo que los estudiantes comprueben si su conjetura está bien formulada.
- *Paso 4. Generalización de argumentaciones.* Consiste en expresar verbal o algebraicamente una regla general, resultante de generalizar la conjetura identificada en el paso anterior, válida para toda la familia de polígonos analizada.

Para evaluar el grado de abstracción de la generalización propuesta por los estudiantes utilizaremos el mismo criterio de clasificación que en el contexto de pre-álgebra (García-Cruz,1998; Radford, 2003):

- *Relación funcional*. Se utiliza una expresión aritmética que representa la regla matemática general, pero expresada con valores numéricos.
- *Generalización verbal.* Los estudiantes expresan verbalmente la relación matemática general.
- *Generalización algebraica.* Los estudiantes expresan, utilizando notación algebraica, la regla matemática general.

Ramírez y Cañadas (2018, p. 29) afirman que “se detecta el talento midiendo si el alumno tiene habilidad para trabajar de forma abstracta”. En los experimentos de pre-álgebra y geometría plana utilizaremos esta premisa para identificar posibles estudiantes con talento dentro de los grupos ordinarios de estudiantes.

3.6 Características de los problemas de proyecciones ortogonales

En la revisión bibliográfica que hemos realizado, hemos observado diversidad de posturas sobre la relación entre visualización y talento matemático. Algunos estudios consideran que hay evidencias de que existe relación entre la habilidad de percepción visual y la habilidad matemática. Así mismo, entre las características que definen a los estudiantes con talento matemático (sección 2.1.4), Krutetskii (1976, p. 88) considera la *habilidad para conceptos espaciales* como una de las características referentes al aprendizaje de estos estudiantes, especialmente relacionada con la geometría espacial. Teniendo en cuenta estos resultados, en nuestra experimentación planteamos una serie de actividades de geometría espacial basadas en la realización e interpretación de representaciones planas de cuerpos tridimensionales. En esta sección, vamos a concretar la parte del marco teórico relativa al contexto de visualización, describiendo los fundamentos didácticos en los que se basan las actividades planteadas.

Existen varias formas de representación plana de cuerpos tridimensionales: proyecciones en perspectiva, isométrica, paralela, ortogonales, etc. En esta investigación nos centraremos en las representaciones planas de un *módulo multicubo*, un sólido formado por varios cubos iguales unidos unos a otros de manera que cada cubo comparte una cara con al menos otro cubo. Utilizaremos los siguientes tipos de proyecciones ortogonales:

- *Proyecciones ortogonales ordinarias.* Es la representación formada por las proyecciones de un sólido sobre los tres planos ortogonales superior, frontal y derecha.
- *Proyecciones ortogonales codificadas.* Son proyecciones ortogonales ordinarias a las que se les añaden números que indican la cantidad de cubos que hay en cada fila de cubos ortogonal al plano de proyección.

Además, para el análisis de las destrezas de los estudiantes al realizar e interpretar las representaciones planas, consideraremos la doble dirección entre el plano y el espacio, distinguiendo dos tipos de actividades:

- Dibujo de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de sólidos.
- Construcción de sólidos en el espacio a partir de proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas).

De las habilidades de visualización (Del Grande, 1990; Gutiérrez, 1996) descritas en la sección 2.4.4, nos centraremos en aquellas que los estudiantes utilizan en la resolución de nuestras actividades. Para facilitar la lectura de esta sección, repetimos algunas definiciones que ya aparecieron en la revisión bibliográfica (sección 2.4.4):

- *Conservación de la percepción.* Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma y propiedades geométricas, aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo, porque haya sido girado o se haya ocultado. Tras mover y examinar el sólido, los estudiantes pueden dibujar sus proyecciones ortogonales manteniéndolo en una posición fija con algunos cubos ocultos, recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven.

- *Reconocimiento de posiciones en el espacio.* Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia. Tanto al construir módulos como al dibujar proyecciones, los estudiantes necesitan identificar y usar las relaciones de posición (delante, detrás, encima, debajo, etc.) de los cubos del módulo y de los cuadrados de las proyecciones. Las relaciones entre los cubos del módulo dependerán de la posición desde la que los observa el estudiante.
- *Reconocimiento de las relaciones espaciales.* Es la habilidad necesaria para establecer relaciones internas entre dos objetos, que se mantienen, aunque el observador cambie de posición respecto a los objetos. Términos como perpendiculares o paralelas, referidos a dos filas de cubos de un módulo o de cuadrados de una proyección, indican que el estudiante está teniendo en cuenta la posición relativa de dos líneas. Esta posición no cambia, aunque el estudiante gire el módulo.
- *Discriminación visual*. Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. La discriminación visual es un recurso importante a la hora de revisar la validez de la respuesta ofrecida. Para comprobar que el dibujo de las proyecciones ortogonales o la construcción del sólido en Cubos y Cubos son correctos, los estudiantes pueden mover los sólidos en la pantalla hasta posicionarlos en las posiciones de las tres proyecciones ortogonales, identificando las semejanzas y diferencias entre las proyecciones ortogonales dibujadas y las de dicho sólido.
- *Memoria visual*. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición. La memoria visual facilita el dibujo de las proyecciones ortogonales de los sólidos. Los estudiantes pueden mantener el sólido en una posición fija y dibujar las proyecciones ortogonales recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven.

4. Metodología de la investigación

En este capítulo describimos la metodología de investigación utilizada para dar respuesta a las preguntas y objetivos planteados, concretando las características de cada uno de los tres experimentos llevados a cabo, en pre-álgebra, en geometría plana y en visualización.

En la sección 4.1 detallamos los sujetos que han participado en cada uno de los experimentos del estudio, las actividades utilizadas y los instrumentos de recogida de datos.

La sección 4.2 está dedicada a la particularización de las características del modelo de demanda cognitiva en estos tres contextos matemáticos. Para comenzar, con el fin de comprender las dificultades encontradas al tratar de analizar estos problemas haciendo uso de la caracterización general de los niveles de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998) (Tabla 9), presentamos un ejemplo de cada uno de los tres contextos matemáticos en los que podemos apreciar la necesidad de particularizar algunas características del modelo de demanda cognitiva general. Una vez conocidas dichas dificultades, proporcionamos nuevas tablas con las características de los niveles de demanda cognitiva particularizadas a cada uno de los tres contextos matemáticos.

Por último, en la sección 4.3 describimos los dos modos diferentes de análisis de los datos: el análisis teórico de la demanda cognitiva de las tareas seleccionadas y el análisis de las respuestas a esas tareas producidas por los estudiantes.

La particularización de las características de los niveles de demanda cognitiva, así como el segundo modo de análisis, a partir de las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes, son dos de las aportaciones originales y novedosas que presenta esta tesis, ya que, hasta el momento, en todas las investigaciones que hemos consultado, se utilizaba el modelo de demanda cognitiva original para la realización de análisis teóricos de enunciados de actividades o problemas.

4.1 Diseño y realización de los experimentos

En esta sección detallamos las características de los tres experimentos llevados a cabo (pre-álgebra, geometría plana y visualización), en los cuales analizamos los niveles de demanda cognitiva de las tareas propuestas y de las resoluciones obtenidas por estudiantes con diferentes capacidades matemáticas.

La descripción de cada experimento esta desglosada en dos partes. Primero, concretamos la muestra de estudiantes participantes y sus características, el tiempo de duración de la experimentación y los métodos de recogida de datos. Después, presentamos las actividades que fueron resueltas por los estudiantes.

Los tres experimentos fueron planteados a grupos de estudiantes con aaccmm durante los talleres extraescolares de matemáticas organizados por la *Asociación Valenciana de Apoyo al Superdotado y Talentoso* (AVAST). A pesar de que los estudiantes de AVAST son identificados con superdotación, no todos se caracterizan por tener altas capacidades matemáticas.

4.1.1 *Experimentación en pre-álgebra*

En la sección 2.3, hemos mostrado como algunos autores consideran que una forma de introducir a los estudiantes en el álgebra elemental es mediante problemas de patrones geométricos. Ello hace que hayamos considerado este contexto interesante para aplicar el modelo de demanda cognitiva. Para desarrollar los niveles del modelo de demanda cognitiva con este tipo de problemas, hemos implementado diversas actividades propias de este contexto matemático y presentamos en esta memoria el análisis de una de ellas. A continuación detallamos las características de esta experimentación y mostramos la actividad seleccionada para su análisis.

4.1.1.1 Descripción de la experimentación

La experimentación de pre-álgebra está basada en dos experimentos distintos, con sujetos y circunstancias diferentes, que forman una muestra de conveniencia.

- Un experimento se llevó a cabo con un grupo reducido de estudiantes talentosos, dos estudiantes de 6º de Educación Primaria y cinco de 1º de ESO, pertenecientes a la asociación AVAST. Realizamos tres sesiones de 90 minutos cada una durante los talleres extraescolares que la asociación ofrecía. Los estudiantes resolvieron un conjunto de actividades de este contexto matemático (mostradas en el anexo 1) que fueron planteadas con el objetivo de desarrollar su capacidad de generalizar.
- El otro experimento se realizó en una clase ordinaria con un grupo de estudiantes de 1º de ESO de un instituto público de Valencia. Realizamos una sesión de 50 minutos durante la hora de matemáticas. Debido a las limitaciones que supone experimentar con estudiantes dentro del horario lectivo de clases, este grupo de estudiantes únicamente resolvió la primera tarea planteada al grupo de estudiantes talentosos (mostrada en la sección 4.1.1.2). Por este motivo, nos centraremos únicamente en el análisis de esta tarea.

Ambos experimentos se realizaron a finales del primer trimestre del curso escolar, cuando ninguno de los estudiantes tenía conocimientos de álgebra elemental. El número total de estudiantes participantes en el experimento se puede ver en la Tabla 10.

Experimentos	Grupos de estudiantes	Curso escolar	Número de estudiantes	Edades de los estudiantes
1	AVAST	6º de Educación Primaria y 1º de ESO	7	Entre 11 y 13 años
2	IES	1º de ESO	27	Entre 12 y 13 años
	Total		34	

Tabla 10. Resumen de los sujetos participantes en la experimentación de pre-álgebra.

Para hacer referencia durante el análisis de respuestas (sección 5.1.2) a los grupos de estudiantes que han participado en el experimento de pre-álgebra, utilizaremos las abreviaturas mostradas en la Tabla 10.

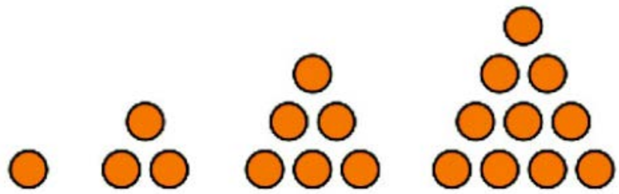
El propósito de realizar un doble experimento, en un grupo estándar y en un grupo de estudiantes talentosos, es poder identificar la relación entre la alta capacidad y la demanda cognitiva de las resoluciones de los problemas.

En ambos experimentos, los estudiantes fueron agrupados por parejas y, en caso de ser impares, se incluyó un trío. A cada grupo le entregamos, junto a la actividad, un bolígrafo electrónico que permite grabar las conversaciones mantenidas por los estudiantes y lo escrito/dibujado durante la resolución del problema. Los datos recogidos consisten en las respuestas en papel y los vídeos generados por los bolígrafos electrónicos. Los datos fueron analizados haciendo uso del modelo de demanda cognitiva, con el fin de identificar el nivel de las respuestas de los estudiantes, análisis que presentamos en la sección 5.1.2.

4.1.1.2 Actividad: Números triangulares

Se trata de una actividad que tiene como objetivo que los estudiantes comprendan la secuencia de los números triangulares y descubran la relación general que permite calcular cualquier término de la secuencia en función de su posición. La actividad (Figura 2) consta de cuatro apartados que van incrementado la complejidad, siguiendo la estructura propia de los problemas de patrones geométricos (sección 3.4), pudiendo alcanzar un nivel alto de demanda cognitiva en el último apartado. En las secciones 5.1.1 y 5.1.2 mostramos los análisis teórico y de respuestas de esta actividad, donde examinamos la evolución del nivel de demanda cognitiva.

Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...



1. **1.** ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas?
2. **2.** ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?
3. **3.** ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.
4. **4.** ¿Y si fuera la figura que ocupa la posición *n*?

Figura 2. Actividad de patrones geométricos.

4.1.2 *Experimentación en geometría plana*

Tras la revisión bibliográfica realizada en la sección 2.2, hemos comprobado que, en la mayor parte de las publicaciones consultadas donde se hace uso del modelo de demanda cognitiva para analizar actividades, sus autores utilizan tareas que tratan contenidos aritméticos o algebraicos. Esto hace que hayamos considerado interesante aplicar el modelo de demanda cognitiva en el contexto de geometría plana. Para desarrollar el modelo de demanda cognitiva con este tipo de problemas, hemos implementado diversas actividades propias de este contexto matemático y en esta memoria presentamos el análisis de una de ellas. A continuación detallamos las características de esta experimentación y mostramos la actividad seleccionada para su análisis.

4.1.2.1 Descripción de la experimentación

Para la experimentación de geometría plana, implementamos una tarea de este contexto matemático que presentamos en la sección 4.1.2.2. Esta actividad forma parte de una secuencia de actividades (mostradas en el anexo 2) que fueron diseñadas durante el trabajo de fin de máster (Benedicto, 2013). Dicha secuencia está compuesta por nueve actividades encaminadas a la comprensión profunda de algunas propiedades geométricas. En Benedicto (2013) realizamos un análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de las nueve actividades, lo cual nos permitió identificar la evolución del nivel de demanda cognitiva de cada una.

La experimentación de geometría plana está basada en tres experimentos distintos. En todos ellos, implementamos la secuencia completa de actividades de geometría plana. No obstante, en esta memoria vamos a analizar una única actividad, ya que, basándonos en los resultados del análisis comentado en el párrafo anterior, hemos considerado que esta actividad puede mostrar resultados más interesantes a la hora de analizar el nivel de demanda cognitiva de las respuestas de estudiantes con diferentes capacidades. Los tres experimentos se llevaron a cabo con sujetos y circunstancias diferentes:

- Una clase ordinaria de 5º de Educación Primaria de un colegio público situado en un pueblo próximo a Valencia. Se realizaron cinco sesiones de 45 minutos en las clases de matemáticas.
- Un grupo reducido de estudiantes talentosos pertenecientes a la asociación AVAST. Realizamos dos sesiones de 90 minutos durante los talleres extraescolares que la asociación ofrecía.
- Dos clases ordinarias de 1º de ESO de un instituto público situado en un pueblo próximo a Valencia. En cada clase realizamos cuatro sesiones de 50 minutos.

El número total de estudiantes participantes en el experimento se puede ver en la Tabla 11.

Experimentos	Grupo de estudiantes	Curso escolar	Número de estudiantes	Edades de los estudiantes
1	5EP	5º de Educación Primaria	15	Entre 10 y 11 años
2	AVAST	6º de Educación Primaria y 1º de ESO	7	Entre 11 y 13 años
3	IES	1º de ESO	55	Entre 12 y 13 años
	Total		77	

Tabla 11. Resumen de los sujetos participantes en la experimentación de geometría plana.

Para hacer referencia durante el análisis de respuestas (sección 5.2.2) a los grupos de estudiantes que han participado en el experimento de geometría, utilizaremos las abreviaturas mostradas en la Tabla 11.

El propósito de analizar los datos de estos tres experimentos es poder identificar las diferencias del nivel demanda cognitiva de las respuestas de los estudiantes. Para ello:

- Hemos experimentado con estudiantes de distintos cursos para identificar aquellas diferencias asociadas a una mayor formación matemática, tomando estudiantes de 5º de Educación Primaria y de 1º de ESO. La razón de elegir 5º en vez de 6º de E. Primaria, es que el currículo oficial de 6º curso vigente cuando hicimos las experimentaciones no incluía el estudio de los conceptos relacionados con polígonos que forman parte de la secuencia de actividades.
- En 1º de ESO, hemos experimentado con estudiantes talentosos (AVAST) y con estudiantes ordinarios, con el fin de identificar la relación entre la alta capacidad y la demanda cognitiva de las resoluciones de los problemas.

Las tareas se resolvieron haciendo uso de lápiz y papel y de applets diseñados con *Geogebra*. Desde la primera sesión, los estudiantes tuvieron las nueve actividades y trabajaron de manera autónoma siguiendo su propio ritmo. Mientras en experimento realizado con el grupo de AVAST algunos estudiantes resolvieron la actividad de manera individual, en los otros dos experimentos los estudiantes estaban agrupados por parejas y, en caso de ser impares, se incluía un trío. A cada estudiante o grupo de estudiantes les entregamos:

- Un dosier en papel con las nueve actividades, donde debían contestar y justificar sus respuestas.
- Un ordenador con los applets correspondientes a las actividades del dosier. Estos ordenadores llevaban incorporado un programa de captura de pantalla, que permite grabar en forma de vídeo la pantalla del ordenador durante toda la sesión.
- Un bolígrafo electrónico (descrito en la sección 4.1.1.1).

Por lo tanto, a la hora de recoger los datos para ser analizados, contamos con tres soportes diferentes:

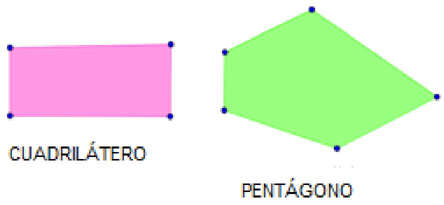
- Las respuestas en papel.
- El vídeo que muestra la actividad realizada en la pantalla al utilizar los applets de Geogebra.
- El vídeo generado por el bolígrafo electrónico, que muestra las conversaciones de los estudiantes y lo escrito o dibujado con el bolígrafo electrónico.

4.1.2.2 Actividad: Diagonales de un polígono

Esta actividad que tiene como objetivo que los estudiantes descubran la relación implícita existente entre el número de lados de un polígono y el número de diagonales, para deducir la fórmula que permite calcular el número de diagonales de cualquier polígono. La actividad (Figura 3) consta de tres apartados que van incrementado la complejidad, pudiendo alcanzar un alto nivel de demanda cognitiva en el último apartado. En las secciones 5.2.1 y 5.2.2 mostramos los análisis teórico y de respuestas de esta actividad, donde examinamos la evolución del nivel de demanda cognitiva.

La **diagonal** de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

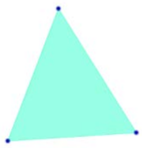
1. Dibuja una diagonal en cada uno de los polígonos siguientes:



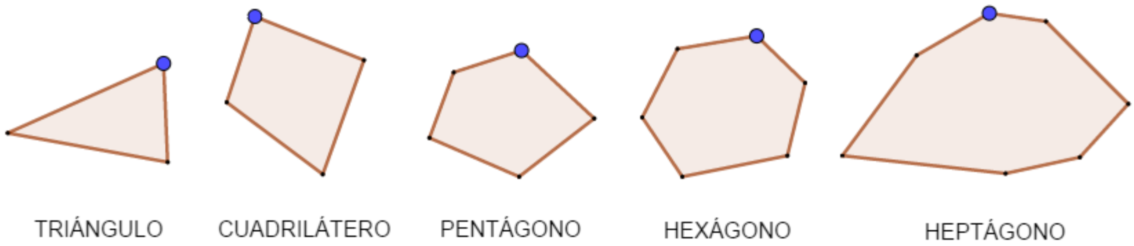
a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del cuadrilátero? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

b) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del pentágono? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del triángulo? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales? ¿Por qué?



2. (Applet 7.2) Observa los polígonos. Responde a las siguientes preguntas.



a) En cada uno de polígonos, traza **todas** las diagonales desde el vértice señalado. Modifica la forma de los polígonos manejando el vértice y comprueba la cantidad de diagonales. Rellena la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULO		
CUADRILÁTERO		
PENTÁGONO		
HEXÁGONO		
HEPTÁGONO		

b) ¿Qué relación existe entre el número de lados y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?

3. (Applet 7.2) Dibuja y calcula el número total de diagonales de cada polígono:

a) Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO	**N.º DE LADOS**	**N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE**	**N.º TOTAL DE DIAGONALES**
TRIÁNGULO			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
OCTÓGONO			

b) Calcula el número total de diagonales de un polígono de 20 lados.

c) ¿Cómo podrías, sin dibujar, calcular el número total de diagonales de cualquier polígono teniendo en cuenta su número de lados?

Figura 3. Actividad de geometría plana.

4.1.3 *Experimentación en visualización*

En la sección 2.4, hemos mostrado cómo algunos autores concluyen que el uso de la visualización en la enseñanza favorece la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos y desarrolla el pensamiento crítico. Ello hace que hayamos considerado este contexto interesante para aplicar el modelo de demanda cognitiva. Para desarrollar el modelo de demanda cognitiva con este tipo de problemas, hemos implementado diversas actividades de cuatro tipos diferentes y hemos analizado una de cada tipo. A continuación detallamos las características de esta experimentación y describimos los cuatro tipos diferentes de actividades que plantemos.

4.1.3.1 **Descripción de la experimentación**

Para la experimentación de visualización, implementamos cuatro tipos diferentes de actividades, que veremos en la sección 4.1.3.2. La resolución de todas ellas requería del uso de un ordenador y el software educativo *Cubos y Cubos* (Hoyos, Aristizábal y Acosta, 2015). Este software ha sido diseñado por el grupo GEDES

(Grupo de Estudio y Desarrollo de Software) con el objetivo de mejorar las habilidades de visualización espacial de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria.

El software *Cubos y Cubos* favorece el desarrollo de habilidades de visualización espacial manejando un módulo multicubo (Figura 4), que se puede girar en el espacio tridimensionalmente de manera continua para visualizar el sólido desde cualquier posición, arrastrando el ratón o pulsando las teclas de flechas.

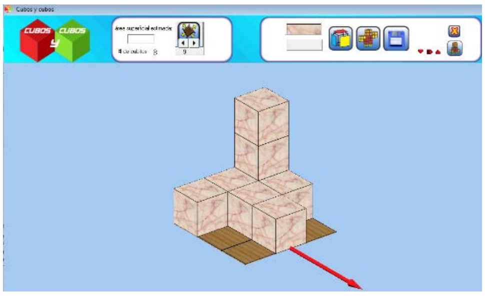


Figura 4. Ejemplo de sólido construido en Cubos y Cubos.

También tiene herramientas que permiten observar automáticamente las proyecciones ortogonales superior, frontal y derecha del sólido, como se muestra en la Figura 5, donde la flecha roja identifica el lado derecho del sólido.

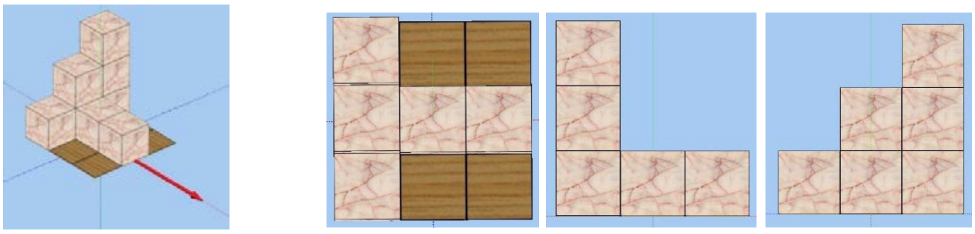


Figura 5. Ejemplo de un sólido y sus proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha) en Cubos y Cubos.

Cubos y Cubos ofrece varios tipos de actividades, basadas en archivos con la descripción de un sólido, que pueden ser diseñados y cargados en el software por el profesor. Esas actividades están específicamente diseñadas para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos importantes relacionados con la visualización espacial, como las proyecciones ortogonales y la orientación en el espacio. Para resolver estas actividades, los usuarios pueden girar los sólidos, lo cual les ayuda a desarrollar sus habilidades de visualización, mientras aprenden a relacionar sólidos con sus proyecciones ortogonales.

Durante nuestra experimentación nos hemos centrado en cuatro tipos de actividades, diferentes pero relacionadas:

- El primer tipo de actividad consiste en dibujar en la pantalla las proyecciones ortogonales ordinarias (Figura 6a) de un sólido dado. Para ello, los estudiantes deben colorear las cuadrículas que proporciona el software representando las proyecciones ortogonales superior, frontal y derecha del sólido.
- El segundo tipo de actividad consiste en dibujar las proyecciones ortogonales codificadas (Figura 6b) de un sólido dado. Para ello los estudiantes deben colorear las cuadrículas que proporciona el software indicando en cada celda el número de cubos que tiene el sólido en la fila representada por esa celda en particular.

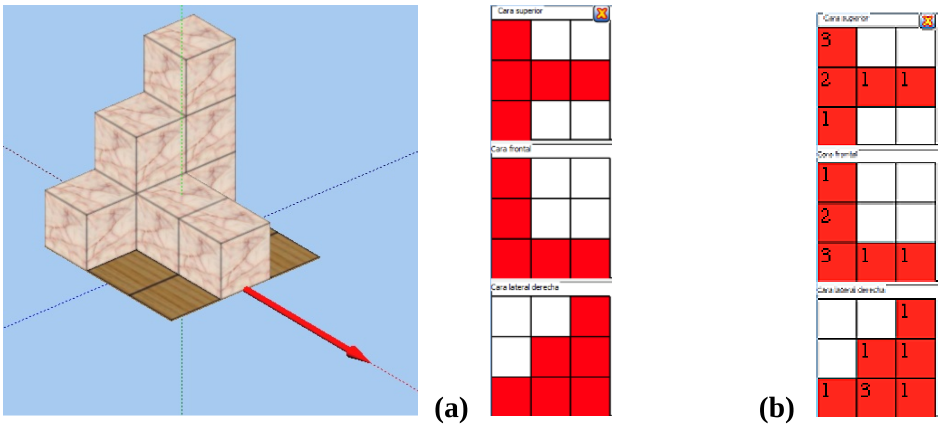
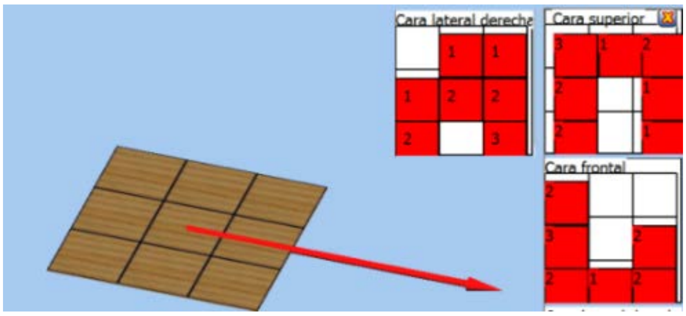


Figura 6. Dibujo de (a) proyecciones ortogonales y (b) proyecciones ortogonales codificadas de un sólido en Cubos y Cubos.

- El tercer tipo de actividad consiste en construir un sólido basado en sus proyecciones ortogonales codificadas (Figura 7a).
- El cuarto tipo de actividad consiste en construir un sólido basado en sus proyecciones ortogonales ordinarias (Figura 7b). Como la solución puede no ser única en este tipo de actividades, esto le da al docente la posibilidad de abrir una discusión en el aula, ya que distintos estudiantes pueden haber construido diferentes sólidos a partir de las mismas proyecciones ortogonales ordinarias.

a)



b)

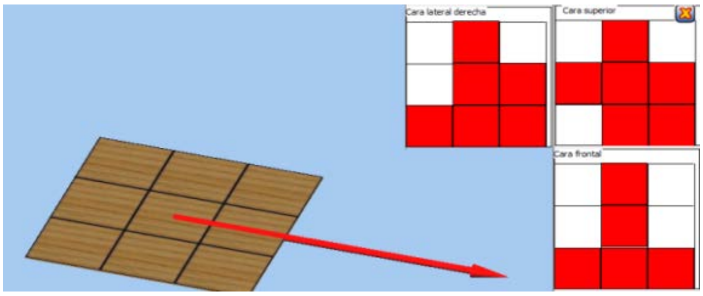


Figura 7. Construcción de un sólido en Cubos y Cubos dadas (a) proyecciones ortogonales y (b) proyecciones ortogonales codificadas.

La experimentación de visualización está basada en los resultados obtenidos al implementar el conjunto de actividades de visualización con 40 estudiantes talentosos pertenecientes a AVAST de los cursos 5º y 6º de Educación Primaria y 1º de ESO. Realizamos una única sesión de 90 minutos durante los talleres extraescolares que la asociación ofrecía.

El número total de estudiantes participantes en el experimento se puede ver en la Tabla 12.

Experimento	**Grupos de estudiantes**	**Curso escolar**	**Número de estudiantes**	**Edades de los estudiantes**
1	AVAST	5º y 6º de Educación Primaria y 1º de ESO	40	Entre 10 y 13 años
	Total		40	

Tabla 12. Resumen de los sujetos participantes en la experimentación de visualización.

Los estudiantes se organizaron en parejas con un ordenador por cada una. La introducción de las actividades a la clase se limitó a mostrar el funcionamiento del software utilizado y a presentar las tareas, resolviendo un ejemplo conjuntamente. Nunca fue la intención del profesor revelar a los estudiantes un procedimiento para completar las actividades o explicar cómo hacerlo, únicamente pretendió mostrar las posibilidades que el software ofrecía.

Para la recogida de datos utilizamos un software de captura de pantalla que proporcionaba un vídeo en el que se podían ver todas las acciones realizadas por los estudiantes en la pantalla y escuchar sus conversaciones. Estos datos nos han permitido identificar el razonamiento utilizado y las decisiones de los estudiantes al elegir estrategias para resolver las tareas. En la sección 5.3.2 mostramos los datos que hemos analizado haciendo uso del modelo de demanda cognitiva y los resultados obtenidos.

4.1.3.2 Actividad: Proyecciones ortogonales

Se trata de cuatro tipos de actividades diferentes que tienen como objetivo que los estudiantes desarrollen sus habilidades espaciales utilizando correctamente las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de sólidos. En cada tipo, se plantearon cuatro sólidos diferentes. A continuación, describimos los tipos de actividades y mostramos un ejemplo de cada uno.

- El primer tipo (Figura 8) consiste en dibujar las proyecciones ortogonales ordinarias de un sólido dado.
- El segundo tipo (Figura 9) consiste en dibujar las proyecciones ortogonales codificadas de un sólido dado.
- El tercer tipo (Figura 10) consiste en construir un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas.
- El cuarto tipo (Figura 11) consiste construir un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.

Los cuatro tipos de actividades tienen una complejidad creciente, que conlleva un mayor nivel de demanda cognitiva, pudiendo alcanzar un nivel alto de demanda cognitiva en el último tipo. En las secciones 5.3.1 y 5.3.2 mostramos los análisis, teórico y de respuestas, de estas actividades y examinamos la evolución del nivel de demanda cognitiva.

1. Dibuja en la pantalla las proyecciones ortogonales ordinarias del sólido:

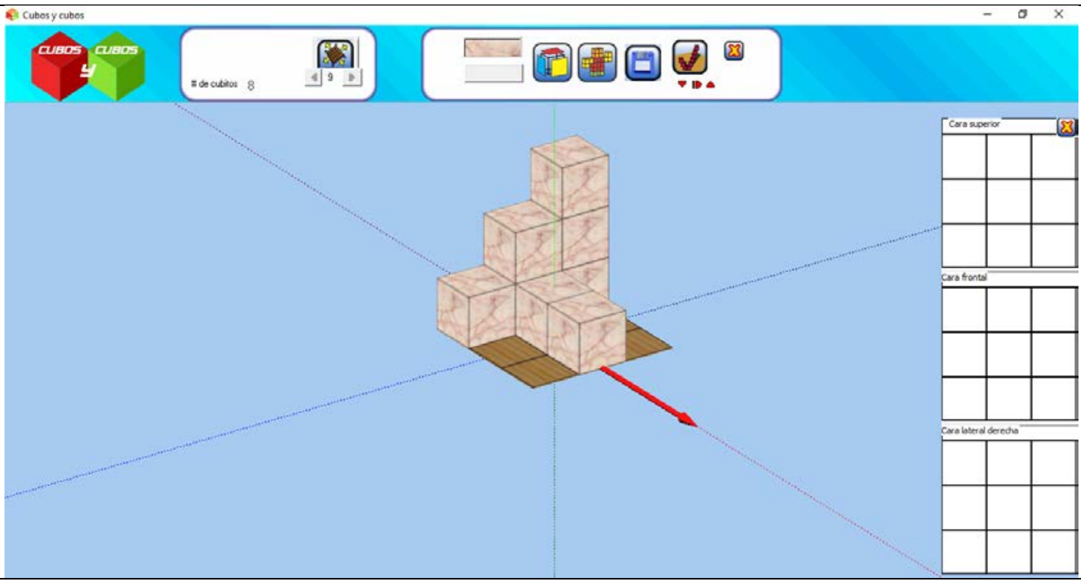


Figura 8. Ejemplo de una de las actividades de proyecciones ortogonales del primer tipo: dibujo de las proyecciones ortogonales ordinarias de un sólido.

2. Dibuja en la pantalla las proyecciones ortogonales codificadas del sólido:

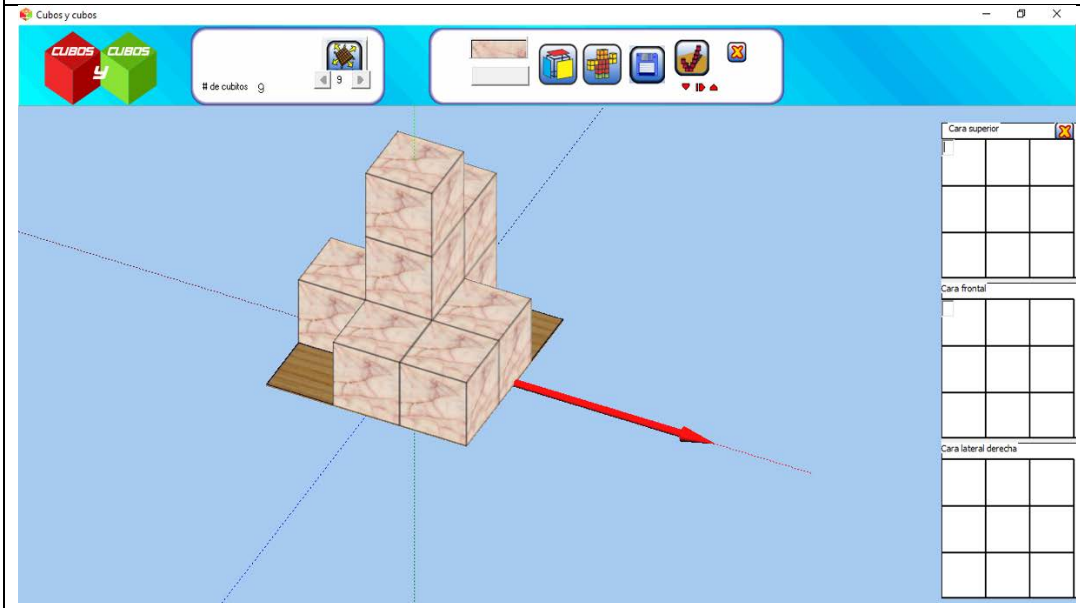


Figura 9. Ejemplo de una de las actividades de proyecciones ortogonales del segundo tipo: dibujo de las proyecciones ortogonales codificadas de un sólido.

3. Construye un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas.

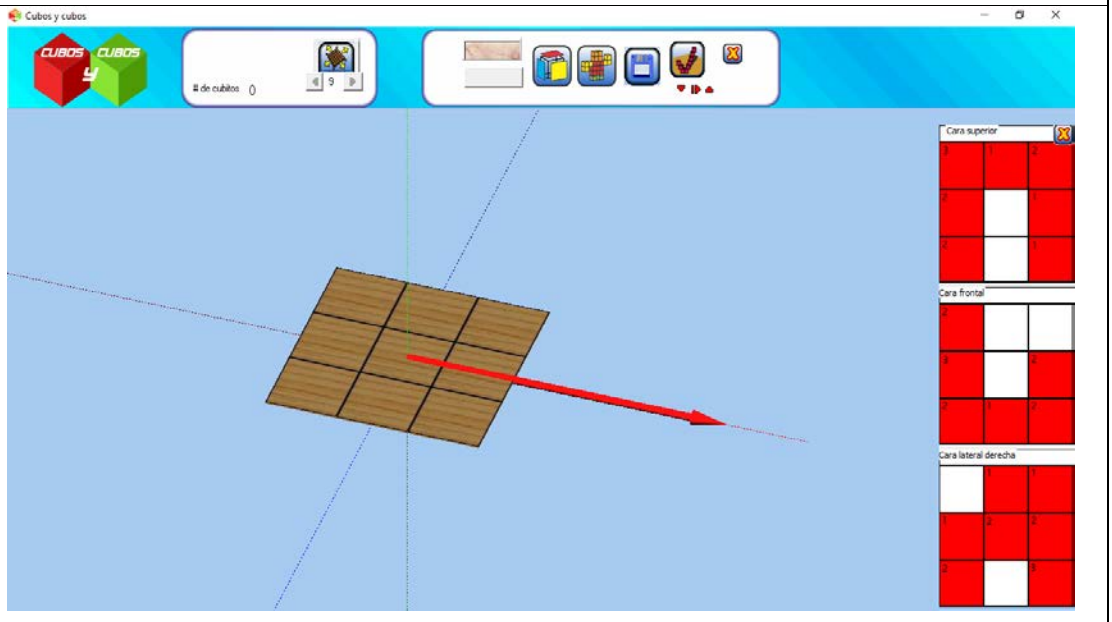


Figura 10. Ejemplo de una de las actividades de proyecciones ortogonales del tercer tipo: construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas.

4. Construye un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.

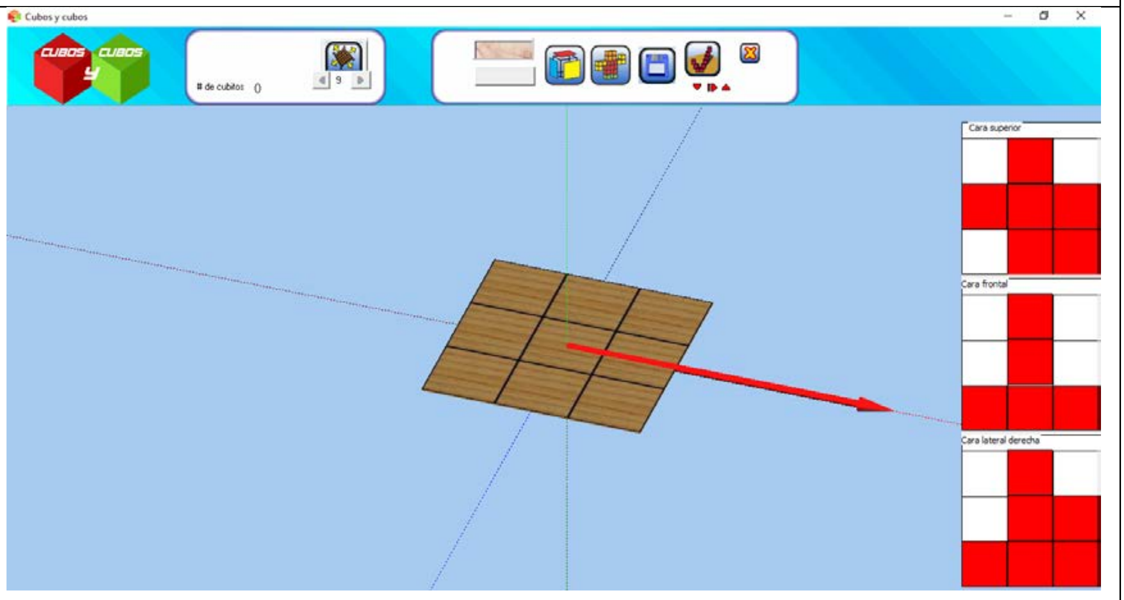


Figura 11. Ejemplo de una de las actividades de proyecciones ortogonales del cuarto tipo: construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.

4.2 Particularización del modelo de demanda cognitiva a contextos matemáticos concretos

Como hemos comentado al comienzo de la sección 3.3, el proceso de modificación del modelo de demanda cognitiva que hemos llevado a cabo se desarrolló en dos fases. En dicha sección, hemos detallado la primera fase, que consistió en la modificación del modelo original de demanda cognitiva. En la presente sección, vamos a describir la segunda fase, basada en la particularización del modelo teórico mejorado para algunos contextos matemáticos concretos.

Hasta el momento, en la literatura que hemos consultado, el modelo de demanda cognitiva había sido utilizado con éxito para analizar un buen número de actividades, pero la mayor parte de estas era de tipo aritmético o algebraico. Durante nuestras experimentaciones hemos trabajado con tareas de contextos matemáticos diferentes a los usados hasta ahora por otros autores: tareas de pre-álgebra, geometría plana y visualización. La reformulación de las características del modelo de demanda cognitiva realizada en la sección 3.3.6 facilita el análisis de estas tareas. Sin embargo, muchas de las características de los niveles de demanda cognitiva presentadas en la Tabla 9 necesitan una adaptación a las particularidades de los diferentes contextos matemáticos, e incluso de tareas específicas. Esta adaptación facilitará y hará más fiable el análisis de las actividades y de las respuestas de los estudiantes. Por ello, hemos particularizado el modelo de demanda cognitiva para cada uno de dichos tipos de actividades, concretando las características de los diferentes niveles, de manera que hagan referencia explícita a elementos particulares de cada contexto.

En la sección 4.2.1 empezaremos mostrando cómo la formulación general del modelo de demanda cognitiva (Tabla 9) resulta ambigua para ciertos contextos matemáticos. Para ello, comenzaremos presentando algunos ejemplos de los utilizados hasta el momento por otros autores, observando cómo el modelo de demanda cognitiva modificado (Tabla 9) puede aplicarse sin dificultades. A continuación, mostraremos un ejemplo de cada uno de los tres contextos matemáticos utilizados en nuestra investigación (pre-álgebra, geometría plana y visualización), para comprobar la necesidad de particularizar algunas características del modelo de demanda cognitiva a dichos contextos.

Una vez mostrado el problema, en las secciones 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4 presentaremos las particularizaciones que hemos hecho de las características del modelo para cada uno de dichos contextos, con el fin de resolver los problemas mostrados en la sección 4.2.1.

4.2.1 *Necesidad de particularizar las características de los niveles de demanda cognitiva a contextos específicos*

Las características presentadas en el modelo original de demanda cognitiva (sección 3.2) han sido definidas en base al análisis de tareas aritméticas o algebraicas (Cruz, 2009; Smith y Stein, 1998), por lo que dicho modelo puede aplicarse para analizar este tipo de tareas. De ahora en adelante, las llamaremos *tareas clásicas*. En esta sección vamos a comenzar mostrando algunos ejemplos de tareas clásicas, observando que el modelo de demanda cognitiva, tanto su versión original (Tabla 2) como la modificación que hemos elaborado (Tabla 9), se puede aplicar bien en el análisis de estas tareas. Sin embargo, a la hora de aplicar el modelo al análisis de actividades matemáticas de otra naturaleza, hemos encontrado ciertas dificultades.

En segundo lugar, mostraremos tres ejemplos de tareas utilizadas durante nuestra investigación, cada una de ellas perteneciente a uno de los tres contextos matemáticos en los que hemos trabajado (pre-álgebra, geometría plana y visualización), comprobando cómo algunas características del modelo de demanda cognitiva modificado (Tabla 9) requieren cierta particularización para facilitar el análisis de estas tareas. Con el fin de mostrar la necesidad de particularizar las características de cada nivel de demanda cognitiva a las tareas de dichos contextos matemáticos, presentamos tres ejemplos, cada uno de ellos de un contexto matemático y nivel de demanda cognitiva diferente (*algoritmos sin conexiones, algoritmos con conexiones* y *hacer matemáticas*). No presentamos ningún ejemplo del nivel *memorización* debido a que en nuestras experimentaciones no plantemos ninguna tarea de dicho nivel.

4.2.1.1 Ejemplos de tareas clásicas

En esta sección mostramos varios ejemplos de tareas clásicas. Al analizar su nivel de demanda cognitiva, no encontramos ninguna dificultad, observando que el modelo, tanto su versión original (Tabla 2), como la modificación que hemos elaborado (Tabla 9), se puede aplicar bien para el análisis de estas tareas:

Ejemplo 1 (Smith, Stein, 1998, p. 349): ¿Cuál es la regla para multiplicar fracciones?	Ejemplo 2 (Cruz, 2009, p. 17): ¿Qué es un número primo?

Figura 12. Ejemplos de tareas clásicas del nivel *memorización.*

Las resoluciones de las tareas de los ejemplos 1 y 2 son propias del nivel *memorización:*

- El ejemplo 1 se resuelve recitando la regla, previamente aprendida, del cálculo del producto de fracciones. Supone la reproducción exacta de una información memorizada anteriormente, utilizando la representación aritmética y sin necesidad de explicaciones.
- El ejemplo 2 se resuelve recurriendo a la definición de número primo. Supone la reproducción exacta de una definición memorizada previamente, utilizando una representación verbal sencilla y sin necesidad de explicaciones.

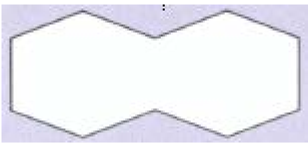
Ejemplo 3 (Smith, Stein, 1998, p. 349): Multiplica: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}$ $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}$	Ejemplo 4 (Cruz, 2009, p. 19): Efectúa: $(2x-3y)^2$

Figura 13. Ejemplos de tareas clásicas del nivel *algoritmos sin conexiones.*

Las resoluciones de las tareas de los ejemplos 3 y 4 son propias del nivel *algoritmos sin conexiones*:

- El ejemplo 3 se resuelve aplicando el algoritmo del producto de fracciones. Su finalidad es obtener el resultado correcto de las multiplicaciones de fracciones, para lo cual no es necesario comprender los contenidos matemáticos que subyacen al algoritmo empleado. El problema no requiere explicaciones y se pueden utilizar una o varias formas de representación de manera independiente.
- El ejemplo 4 se resuelve empleando un algoritmo algebraico de las identidades notables. La finalidad es obtener el resultado correcto aplicando las identidades notables sin la necesidad de comprender los contenidos que subyacen al algoritmo empleado. El problema no requiere explicaciones y se pueden utilizar una o varias formas de representación de manera independiente.

Ejemplo 5 (Smith, Stein, 1998, p. 349):
Calcula 1/6 de 1/2. Dibuja tu respuesta y explica tu solución. Utiliza la plantilla.



Ejemplo 6 (Cruz, 2009, p. 25):
Pinta de rojo los números según la secuencia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

¿Qué observas? ¿Hay alguna regularidad en los números pintados?
¿Qué números han sido pintados?

Figura 14. Ejemplos de tareas clásicas del nivel *algoritmos con conexiones.*

Las resoluciones de las tareas de los ejemplos 5 y 6 son propias del nivel *algoritmos con conexiones*:

- El ejemplo 5 se resuelve aplicando un algoritmo general sugerido por el propio enunciado, que especifica que debe resolverse dibujando. No obstante, para dibujar la fracción de una fracción es necesario comprender su significado, por lo que no puede resolverse sin prestar atención a los contenidos que subyacen al algoritmo. La finalidad de este problema es comprender el significado del algoritmo del producto de fracciones y el problema requiere una explicación que haga referencia a ello.
- El ejemplo 6 se resuelve siguiendo las instrucciones sugeridas por las cuestiones que sirven de guía para identificar la relación existente entre los números coloreados. El problema no puede ser resuelto sin identificar y comprender la relación existente entre los números coloreados. La finalidad es comprender los contenidos subyacentes al concepto de múltiplo y el problema requiere una explicación que haga referencia a ello.

<table>
<tr>
<td>Ejemplo 7 (Smith, Stein, 1998, p. 349):

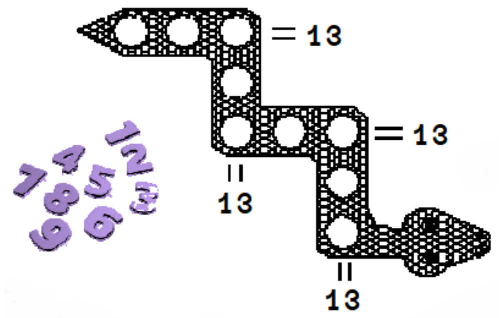
Crea una situación real para el siguiente problema:
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$$
Resuelve el problema que tú has creado sin usar la regla [regla de multiplicación de fracciones] y explica tu solución.</td>
<td>Ejemplo 8 (Cruz, 2009, p. 28):
Coloca los números mostrados en la serpiente de manera que cada tres sumen 13:

</td>
</tr>
</table>

Figura 15. Ejemplos de tareas clásicas del nivel *hacer matemáticas.*

Las resoluciones de las tareas de los ejemplos 7 y 8 son propias del nivel *hacer matemáticas*:

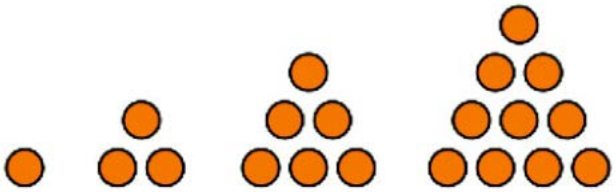
- El ejemplo 7 no se resuelve mediante un algoritmo, requiere que los estudiantes analicen la actividad y comprendan el significado subyacente al producto de fracciones (una fracción de una fracción) para crear una situación real en la que esté presente dicha operación. En la segunda parte, los estudiantes deben resolver el problema sin utilizar el algoritmo del producto de fracciones, lo cual requiere examinar los datos (multiplicación de fracciones) y establecer relaciones. Además, la actividad pide una explicación del resultado obtenido.
- El ejemplo 8 requiere que los estudiantes analicen la actividad observando las diferentes maneras de sumar 13 con tres números. Los estudiantes deben examinar algunas propiedades de los números (paridad, tamaño, etc.) para limitar posibles estrategias de resolución. La finalidad es examinar las propiedades de los números y explorar las posibles descomposiciones del número 13 en tres sumandos. Su resolución con éxito requiere tomar decisiones sobre los números a utilizar en cada suma y en qué posición deben colocarse.

4.2.1.2 Ejemplo de una actividad de patrones geométricos en el nivel de algoritmos sin conexiones

En la sección anterior (4.2.1.1) hemos comprobado que las características del modelo de demanda cognitiva se ajustan a las tareas clásicas. A continuación, en las secciones 4.2.1.2, 4.2.1.3 y 4.2.1.4, vamos a mostrar tres ejemplos de actividades, cada uno de ellos de un contexto matemático y nivel de demanda cognitiva diferente, donde podemos observar que las características del modelo requieren una particularización para las tareas de dichos contextos.

En esta sección presentamos el análisis de una cuestión de patrones geométricos propia del nivel *algoritmos sin conexiones*. Se trata de la primera cuestión de la actividad de los números triangulares, utilizada durante nuestra investigación (ver la actividad completa en 4.1.1.2). Esta actividad pide a los estudiantes que calculen el número de elementos que forman el término que ocupa la quinta posición de la secuencia de los números triangulares (Figura 16).

Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...



1. **1.** ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas?

Figura 16. Cuestión 1 de la actividad de los números triangulares.

Al analizar el nivel de demanda cognitiva de esta cuestión (Figura 16), observamos la necesidad de particularizar algunos detalles de las características del modelo demanda cognitiva (Tabla 9) para facilitar el análisis. Por ejemplo, en la Tabla 9 se indica que, para las actividades del nivel de *algoritmos sin conexiones*, el procedimiento de resolución se basa en aplicar un algoritmo que viene indicado expresamente o es evidente por el contexto y que los estudiantes pueden seguir sin necesidad de considerar los conocimientos matemáticos subyacentes. En relación con la cuestión 1, se plantean dos preguntas que es necesario contestar para poder analizar de manera fiable la cuestión y las respuestas de los estudiantes:

- ¿Cuál es ese algoritmo? Consiste en comprender la relación visual o geométrica entre los términos conocidos y sus posiciones para dibujar el término 5º y contar el número de elementos que lo forman.
- ¿Cuáles son los contenidos matemáticos subyacentes? Hacen referencia a la relación matemática general entre el valor de un término triangular y su posición ($a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$).

Una vez concretados estos detalles, hemos redactado de nuevo las características del modelo con dichas particularidades, con el fin de facilitar el análisis de cualquier actividad correspondiente al contexto matemático de patrones geométricos del nivel *algoritmos sin conexiones*.

En la Tabla 13 mostramos un análisis completo de esta cuestión. En la primera columna, describimos el procedimiento de resolución, la finalidad, el esfuerzo cognitivo requerido, los contenidos implícitos, las explicaciones exigidas y las formas de representación de la solución de la cuestión 1 (Figura 16). Esta descripción permite identificar que se trata de una actividad propia del nivel *algoritmos sin conexiones.* En la segunda columna, mostramos las características de dicho nivel del modelo general modificado (Tabla 9). En la tercera columna, presentamos las características del modelo de demanda cognitiva del nivel de *algoritmos sin conexiones* particularizadas a las actividades de patrones geométricos.

En la Tabla 13, al igual que ocurre con los siguientes ejemplos (Tablas 14 y 15) podemos observar cómo la descripción general de las características (2ª columna) es poco concreta, lo cual puede provocar que varios investigadores lleguen a conclusiones distintas al analizar las mismas actividades. Por ejemplo, es necesario especificar en qué consiste el algoritmo empleado para resolver la cuestión si se quiere determinar cuál será el procedimiento de resolución y las explicaciones requeridas. El algoritmo empleado ayudará a conocer el grado de ambigüedad o esfuerzo cognitivo al que tienen que enfrentarse los estudiantes para decidir qué procedimiento utilizar y cómo representarán su solución. Además, para identificar la finalidad de la cuestión y los contenidos implícitos, es importante detallar los contenidos matemáticos implicados y las relaciones existentes entre estos, identificado si es necesaria la comprensión de dicha relación para resolver la cuestión con éxito. Para solucionar ese inconveniente hemos proporcionado una descripción particularizada para las actividades correspondientes (3ª columna), facilitando así el análisis de las actividades.

	Descripción específica de la cuestión 1 de la actividad de patrones geométricos	**Características del modelo general modificado (**Tabla 9**)**	**Particularización de las características para actividades de patrones geométricos**
Procedimiento de resolución	*Se trata de dibujar el término 5º, utilizando como referencia las figuras de las posiciones anteriores, dadas en el enunciado, y realizar el conteo del número de elementos que la forman.*	(2.P) Se resuelven aplicando un algoritmo que viene indicado expresamente o es evidente por el contexto. Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin necesidad de considerar los contenidos matemáticos subyacentes.	Se resuelven aplicando una *estrategia aditiva* que es evidente por el contexto del enunciado, *basado en continuar la secuencia dibujando hasta el término requerido y contando el número de elementos que lo forman.* Es un algoritmo simple, que los estudiantes pueden aplicar sin necesidad de considerar la *relación matemática general entre el valor de un término y su posición*.
Finalidad	*Se pretende que los estudiantes obtengan el número de elementos que forman la 5ª figura mediante la representación del término y el conteo del número de elementos, sin necesidad de comprender la relación general.*	(2.F) Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática. Los estudiantes pueden resolverlas correctamente sin necesidad de comprender los contenidos matemáticos subyacentes.	Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de comprender *la relación matemática subyacente en la secuencia*. Los estudiantes pueden *obtener el número correcto de elementos de un término inmediato o próximo basándose en la estructura gráfica de la secuencia, pero sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor de un término y su posición.*
Esfuerzo cognitivo	*Las figuras del enunciado guían para dibujar la quinta figura y realizar el conteo de su número de elementos.*	(2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado: existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.	Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad, ya que, *al tratarse de un término inmediato o próximo, la representación resulta sencilla y los datos del enunciado muestran con claridad cómo debe continuarse la secuencia.*

	Descripción específica de la cuestión 1 de la actividad de patrones geométricos	**Características del modelo general modificado (**Tabla 9**)**	**Particularización de las características para actividades de patrones geométricos**
Contenidos implícitos	*Los estudiantes resuelven correctamente, mediante el dibujo y conteo, identificando la estructura visual de la representación gráfica de la secuencia (añaden una fila con un elemento más que en la anterior). No obstante, pueden dibujar correctamente la figura sin percatarse de la relación matemática subyacente entre la posición de la figura y el número de elementos que la forman*.	(2.C) Puede existir conexión implícita entre los contenidos matemáticos y los algoritmos usados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de ella para contestar correctamente la cuestión.	Existe conexión implícita entre *la estructura de la secuencia, basada en la relación visual o geométrica y el algoritmo de resolución.* Los estudiantes *pueden dibujar el término requerido y contar el número de elementos que lo forman, sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor de un término y su posición.*
Explicaciones	*Los estudiantes deben explicar en qué se han fijado para obtener dicho resultado, que puede ser únicamente en el número de puntos de la figura dibujada.*	(2.X) Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo empleado.	Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir la estrategia empleada.
Representación de la solución	*Se utiliza la representación geométrica para dibujar la 5ª figura, se realiza el conteo y se da el resultado numérico utilizando la representación aritmética.*	(2.R) Se pueden usar una o varias formas de representación (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Cuando se usan varias, se hace de manera independiente, es decir, sin establecer relaciones entre ellas ni con los contenidos matemáticos subyacentes.	*Se suelen utilizar la representación geométrica para obtener el resultado y la aritmética para dar la respuesta final.* Se pueden usar una o ambas formas de representación. Cuando se usan las dos, se hace de manera independiente, es decir, sin establecer relaciones entre ellas *ni con la relación matemática subyacente a la secuencia.*

Tabla 13. Ejemplo de la necesidad de particularizar el modelo de demanda cognitiva a los problemas de patrones geométricos en el nivel *algoritmos sin conexiones*.

En la Tabla 13 observamos que todas las categorías, excepto la correspondiente a *explicaciones,* son propias del nivel *algoritmos sin conexiones*. Como veremos en la sección 4.3.1, asignaremos el nivel de demanda cognitiva al que se ajusten más características, considerando la actividad propia del nivel *algoritmos sin conexiones.*

4.2.1.3 Ejemplo de una actividad de geometría plana en el nivel de algoritmos con conexiones

En esta sección presentamos el análisis de una actividad propia del nivel *algoritmos con conexiones*. Se trata del apartado 3b (Figura 17) de una de las actividades de nuestra experimentación en geometría plana (actividad completa en la sección 4.1.2.2). En este apartado, después de calcular el número de diagonales de polígonos sencillos (del triángulo al octógono), los estudiantes tienen que calcular el número de diagonales de un polígono de 20 lados.

3. (Applet 7.2) Dibuja y calcula el número total de diagonales de cada polígono:

a) Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE	N.º TOTAL DE DIAGONALES
TRIÁNGULO			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
OCTÓGONO			

b) Calcula el número total de diagonales de un polígono de 20 lados.

Figura 17. Apartado 3b de la actividad enfocada al descubrimiento de la fórmula de cálculo del número de diagonales de un polígono.

Al analizar el nivel de demanda cognitiva de esta cuestión (Figura 17), observamos la conveniencia de particularizar algunos detalles de las características del modelo demanda cognitiva (Tabla 9) para facilitar dicho análisis. Por ejemplo, si tomamos las mismas categorías que en el ejemplo de la sección 4.2.1.2, *procedimiento de resolución* y *contenidos* implícitos, podemos observar las diferencias en las descripciones para ambos contextos. En definitiva, al igual que en el caso anterior, para poder analizar de manera fiable la cuestión y las respuestas de los estudiantes, es necesario contestar a las preguntas referentes al algoritmo empleado para resolver el problema y los contenidos implicados:

- ¿Cuál es ese algoritmo? Consiste en deducir la relación funcional entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono, ya que el dibujo y conteo del número de diagonales de un polígono de 20 lados resulta muy costoso.

  ($número\ de\ diagonales\ de\ un\ polígono\ de\ 20\ lados = \frac{20 \cdot 17}{2}$)

- ¿Cuáles son los contenidos matemáticos subyacentes? Hacen referencia a la relación matemática general entre el número de lados y el número de diagonales de cualquier polígono.

  ($número\ de\ diagonales\ de\ un\ polígono\ de\ n\ lados = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$)

A diferencia de las actividades de patrones geométricos, las actividades de geometría plana pueden ser muy variadas. Por esta razón, a la hora de particularizar las características del modelo de demanda cognitiva para este contexto, nos hemos centrado en un tipo de tareas concretas. Todas estas actividades tienen una estructura similar, se componen de varias cuestiones y parten de la observación de casos particulares para alcanzar la generalización de una regla general o propiedad geométrica.

En la Tabla 14 mostramos un análisis completo de la cuestión 3b (Figura 17) y la particularización de las características del modelo de demanda cognitiva del nivel de *algoritmos con conexiones* al contexto de este tipo de actividades de geometría plana. Al igual que en el ejemplo de la sección 4.2.1.2, la tabla está dividida en tres columnas, con los mismos contenidos y significados que la tabla de la sección anterior.

	Descripción específica de la cuestión 3b de la actividad de geometría plana	Características del modelo general modificado (Tabla 9)	Particularización de las características para actividades concretas de geometría plana
Procedimiento de resolución	*Los estudiantes deben calcular el número de diagonales de un polígono de 20 lados realizando la operación:* $\frac{20 \cdot 17}{2}$ *No obstante, para saber qué operación debe aplicar es necesario que previamente hayan comprendido la relación implícita existente entre el número de lados de un polígono y su número total de diagonales.*	(3.P) Se resuelven aplicando un algoritmo general que los estudiantes pueden seguir solo si establecen conexiones estrechas con los contenidos matemáticos subyacentes. Se sugieren explícita o implícitamente una vía a seguir, ya sea a partir de cuestiones resueltas antes o en el propio enunciado.	Se resuelve aplicando un algoritmo *que el estudiante solo puede descubrir cuando es consciente de la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados del polígono.* Las cuestiones resueltas antes a la 3b sugieren una vía para deducir *para deducir qué operaciones deben realizarse.*
Finalidad	*Se pretende que los estudiantes identifiquen la relación numérica existente entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono, para así deducir qué operaciones debe realizar.*	(3.F) Usar algoritmos con el objetivo de que los estudiantes adquieran una comprensión más profunda de los contenidos matemáticos subyacentes.	*Deducir y aplicar el algoritmo apropiado* para adquirir una comprensión más profunda de *la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*
Esfuerzo cognitivo	*Para aplicar correctamente el algoritmo de resolución, antes es necesario comprender la relación entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono y deducir qué algoritmo hay que emplear.*	(3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar algoritmos generales, al aplicarlos no se pueden seguir sin prestar atención a los contenidos matemáticos subyacentes.	Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. *Es necesario comprender la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono para resolver correctamente la tarea.*

	Descripción específica de la cuestión 3b de la actividad de geometría plana	Características del modelo general modificado (Tabla 9)	Particularización de las características para actividades concretas de geometría plana
Contenidos implícitos	*Para resolver la cuestión es necesario comprender la relación entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono*.	(3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente los contenidos matemáticos que subyacen a los algoritmos.	Los estudiantes necesitan considerar conscientemente *la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*
Explicaciones	*La actividad no pide que los estudiantes expliquen el resultado obtenido.*	(3.X) Requieren explicaciones que hagan referencia a los contenidos matemáticos subyacentes utilizando casos concretos.	Requieren explicaciones que hagan referencia a *la relación entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono concreto.*
Representación de la solución	*Se utiliza la relación funcional entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono para obtener el resultado, y la representación aritmética para expresar la solución final. Para deducir la relación funcional y obtener un resultado correcto, los estudiantes deben establecer conexiones entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono.*	(3.R) Se suelen utilizar varias representaciones (aritmética, algebraica, verbal, geométrica, diagramática, manipulativa, etc.). Para contestar correctamente la cuestión, los estudiantes deben establecer conexiones entre diferentes representaciones usando los contenidos matemáticos subyacentes, lo cual favorece el desarrollo de la comprensión.	*Se utiliza la representación aritmética para expresar la solución final. Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica y los datos de las tablas, con el fin de deducir la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*

Tabla 14. Ejemplo de la necesidad de particularizar el modelo de demanda cognitiva a los problemas de geometría plana en el nivel *algoritmos con conexiones*.

En la Tabla 14 observamos que todas las categorías, excepto la correspondiente a *explicaciones,* son propias del nivel *algoritmos con conexiones*. Esto nos muestra que el diseño de la actividad puede ser mejorado, algo que veremos en el análisis teórico de esta actividad (sección 5.2.1.3).

4.2.1.4 Ejemplo de una actividad de proyecciones ortogonales en el nivel de hacer matemáticas

En esta sección presentamos una actividad de proyecciones ortogonales propia del nivel *hacer matemáticas*. Se trata de un ejemplo del cuarto tipo de actividad de proyecciones ortogonales (Figura 18) de las actividades utilizadas durante nuestra investigación (actividad completa en la sección 4.1.3.2). En esta actividad (Figura 18), los estudiantes deben construir un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias, empleando el programa de ordenador Cubos y Cubos.

4. Construye un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.

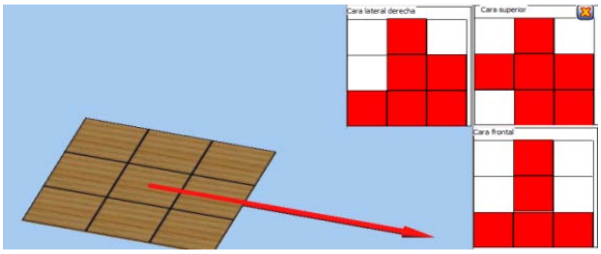


Figura 18: Ejemplo de una de las actividades de proyecciones ortogonales del cuarto tipo: construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.

Al analizar el nivel de demanda cognitiva de esta actividad (Figura 18), observamos la necesidad de particularizar algunos detalles de las características del modelo de demanda cognitiva (Tabla 9) para facilitar el análisis. Por ejemplo, en la Tabla 9 se indica que, para las actividades del nivel de *hacer matemáticas*, el procedimiento de resolución se basa en aplicar un pensamiento complejo y no algorítmico que requiere que los estudiantes analicen la actividad y examinen condiciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones. Para poder analizar de manera fiable la actividad y las respuestas de los estudiantes, al igual que en los casos anteriores, vamos a contestar a las dos siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el procedimiento de resolución no algorítmico? No existe un único procedimiento de resolución (p. ej., construcción del sólido por capas, filas o columnas), pero todos ellos requieren que los estudiantes exploren y utilicen relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), utilizando las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea y empleando las habilidades de *reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio*.

- ¿A qué se refiere con contenidos matemáticos subyacentes? Hacen referencia a las relaciones de coordinación entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos).

En lo que respecta a las explicaciones, pese a que el enunciado de las actividades de proyecciones ortogonales de este tipo no las exigía, deberían consistir en una explicación del proceso de construcción del sólido.

Al igual que ocurre en geometría plana (sección 4.2.1.3), las actividades de proyecciones ortogonales pueden resultar muy variadas. En este caso, a la hora de particularizar las características del modelo de demanda cognitiva, nos vamos a centrar en dos tipos de tareas concretas utilizadas en nuestra investigación (sección 4.1.3.2):

1. Dibujo de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de un sólido dado.
2. Construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas).

En la Tabla 15 presentamos un análisis completo del cuarto tipo de actividad de proyecciones ortogonales y la particularización de las características del modelo de demanda cognitiva del nivel de *hacer matemáticas* al contexto de este tipo de actividades de proyecciones ortogonales. Al igual que en los ejemplos de las secciones 4.2.1.2 y 4.2.1.3, la tabla está dividida en tres columnas, con los mismos contenidos y significados que las tablas anteriores.

	Descripción específica de la actividad de tipo 4 de proyecciones ortogonales	Características del modelo general modificado (Tabla 9)	Particularización de las características para actividades de proyecciones ortogonales
Procedimiento de resolución	*Los estudiantes construyen el sólido considerando la información de las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea (p. ej., los estudiantes construyen el sólido por capas, examinando las tres proyecciones para situar los cubos de cada fila). Los estudiantes relacionan diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción.*	(4.P) Se resuelven aplicando un pensamiento complejo y no algorítmico. La tarea, sus instrucciones o un ejemplo práctico no sugieren explícitamente un enfoque predecible o una vía ensayada de resolución. Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen condiciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.	Se resuelven aplicando una *estrategia de resolución compleja y no algorítmica. Los estudiantes construyen el sólido explorando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, utilizando las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea (p. ej., los estudiantes construyen el sólido por filas, considerando simultáneamente las tres proyecciones ortogonales dadas). Requiere que los estudiantes analicen la actividad y hagan uso de las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*
Finalidad	*Se pretende que los estudiantes exploren, comprendan y establezcan relaciones entre las diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), considerando la información de las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea.*	(4.F) Explorar y comprender los contenidos matemáticos subyacentes.	Explorar y comprender *las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), aplicando la información de las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea.*

	Descripción específica de la actividad de tipo 4 de proyecciones ortogonales	**Características del modelo general modificado (Tabla 9)**	**Particularización de las características para actividades de proyecciones ortogonales**
Esfuerzo cognitivo	*No existe una única estrategia de resolución, los estudiantes deben examinar la actividad y diseñar su propio método de resolución (p. ej., construir el sólido por filas). La estrategia de resolución requiere examinar las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, utilizando dicha información de manera correcta para la construcción del sólido.*	(4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo: Las formas de resolución no son fácilmente predecibles, requieren tomar decisiones sobre los elementos a utilizar y cómo emplearlos.	Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo: *No existe un único método de resolución.* Las formas de resolución no son fácilmente predecibles. Requieren *examinar y utilizar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, aplicando dicha información de manera correcta para la construcción del sólido.*
Contenidos implícitos	*Los estudiantes deben comprender y coordinar las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), utilizando las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea y empleando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*	(4.C) Los estudiantes tienen que acceder a conocimientos y experiencias relevantes y usarlos adecuadamente durante la resolución de la actividad.	Los estudiantes tienen que *comprender y coordinar las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), empleando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio para la construcción del sólido.*

	Descripción específica de la actividad de tipo 4 de proyecciones ortogonales	**Características del modelo general modificado (Tabla 9)**	**Particularización de las características para actividades de proyecciones ortogonales**
Explicaciones	*La actividad no pide que los estudiantes expliquen el resultado obtenido.*	(4.X) Requieren explicaciones basadas en la demostración del resultado obtenido.	Requieren explicaciones basadas *en la descripción del proceso de construcción del sólido.*
Representación de la solución	*Se utiliza la representación geométrica del sólido construido.*	(4.R) Se utiliza la forma de representación más eficaz, que facilite la resolución y sintetice la información de manera abstracta.	Se utiliza la *representación geométrica del sólido construido.*

Tabla 15. Ejemplo de la necesidad de particularizar el modelo de demanda cognitiva a los problemas de proyecciones ortogonales en el nivel *hacer matemáticas*.

4.2.2 *Características de los niveles de demanda cognitiva en tareas de patrones geométricos*

Las tareas de pre-álgebra, geometría plana y visualización tienen estructuras distintas y se basan en unos contenidos diferentes de los de las tareas clásicas. Estas diferencias hacen que algunas características del modelo de demanda cognitiva requieran particularizaciones (sección 4.2.1) para adaptarlas a cada tipo de actividades. En las secciones, 4.2.2, 4.2.3 y 4.2.4, presentamos el modelo de demanda cognitiva con las características de los cuatro niveles particularizadas para estos tres contextos.

Como hemos comentado en la sección 3.4, para el análisis de los problemas de patrones geométricos diferenciaremos cinco tipos de cuestiones:

- *Recuento directo*. Se pregunta el número de elementos que forman una de las figuras dadas en el propio enunciado. Los estudiantes únicamente deben contar el número de elementos que forman la figura del enunciado (nivel de *memorización).*
- *Término inmediato*. Se pregunta el número de elementos que forman un término inmediato, fácil de dibujar y contar (nivel *algoritmos sin conexiones*).

- *Término próximo*. Se pregunta el número de elementos que forman un término próximo que, aunque con mayor complejidad, puede ser también dibujado. En este caso los estudiantes pueden utilizar dos estrategias de resolución: dibujar y contar (nivel *algoritmos sin conexiones*) o identificar la relación matemática general para calcular el valor de dicho término (*algoritmos con conexiones*).
- *Término lejano*. Se pregunta el número de elementos que forman un término lejano, lo cual no puede responderse dibujando el término y contando. Los estudiantes deben identificar la relación matemática general para calcular el valor de dicho término (*algoritmos con conexiones*).
- *Término general*. Se pregunta por la generalización que permite calcular cualquier término de la secuencia. Los estudiantes deben utilizar el lenguaje algebraico para expresar el término general (nivel *hacer matemáticas*).

El objetivo de estas cuestiones es guiar a los estudiantes hacia la generalización, incrementando progresivamente el grado de abstracción y, en consecuencia, el nivel de demanda cognitiva necesario para su resolución correcta. Analizando estas cuestiones, podemos asignar un nivel de demanda cognitiva diferente a cada una de ellas en función de la complejidad que requiere. No obstante, podemos observar cómo en el caso del *término próximo* dependerá de la estrategia de resolución utilizada por los estudiantes.

En la Tabla 16 mostramos el modelo de demanda cognitiva particularizado para tareas de patrones geométricos. En esta tabla, además de los niveles, las categorías y las características particularizadas, hemos añadido una columna que hace referencia a los tipos de cuestiones de las tareas de patrones geométricos típicos de cada nivel de demanda cognitiva. En la Tabla 16 podemos observar en cursiva las particularizaciones incorporadas a la caracterización general del modelo de demanda cognitiva (Tabla 9).

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
1. Memorización	*Recuento directo*	Procedimiento de resolución	(1.P) *Se resuelven contando el número de elementos de un término de la secuencia,* tomando los datos directamente del enunciado.
		Finalidad	(1.F) *Observar el patrón dado, contar el número de los elementos de un término de la secuencia y* reproducir los datos tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo cognitivo	(1.E) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo. No son ambiguas. *Indican claramente que se debe contar la cantidad de elementos de un término de la secuencia representado en el enunciado.*
		Contenidos implícitos	(1.C) No tienen conexión con *la estructura de la secuencia numérica que se está analizando*.
		Explicaciones	(1.X) No requieren explicaciones sobre *cómo se ha obtenido la cantidad de elementos del término de la secuencia*.
		Representación de la solución	(1.R) *El enunciado utiliza la representación geométrica y su solución (una cantidad de elementos) utiliza la aritmética.*
2. Algoritmos Sin Conexiones	*Término inmediato* *Término próximo*	Procedimiento de resolución	(2.P) Se resuelven aplicando una *estrategia aditiva* que es evidente por el contexto *del enunciado*. *Los estudiantes calculan el valor del término requerido dibujando dicho término y contando el número de elementos que lo forman o sumando al término anterior la cantidad necesaria. En ambos casos*, es un algoritmo simple, que los estudiantes pueden *aplicar* sin necesidad de *considerar la relación matemática general entre el valor de un término y su posición*.
		Finalidad	(2.F) Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de comprender *la relación matemática subyacente en la secuencia.* Los estudiantes pueden *obtener el número correcto de elementos de un término inmediato o próximo aplicando una estrategia aditiva, pero sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor de un término y su posición.*
		Esfuerzo cognitivo	(2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad, ya que, *al tratarse de un término inmediato o próximo, su representación resulta sencilla y los datos del enunciado muestran con claridad cómo debe continuarse la secuencia*.
		Contenidos implícitos	(2.C) Existe conexión implícita entre *la estructura de la secuencia, basada en la relación visual o geométrica, y el algoritmo de resolución*. Los estudiantes *pueden calcular correctamente el valor del término sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor del término y su posición.*

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
		Explicaciones	(2.X) Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir la estrategia empleada.
		Representación de la solución	(2.R) *Se suelen utilizar la representación geométrica para obtener el resultado y la aritmética para dar la respuesta final.* Se pueden usar una o ambas formas de representación. Cuando se usan las dos, se hace de manera independiente, es decir, sin establecer relaciones entre ellas *ni con la relación matemática subyacente a la secuencia.*
3. Algoritmos Con Conexiones	*Término próximo* *Término lejano*	Procedimiento de resolución	(3.P) Se resuelven aplicando una *estrategia funcional, utilizando una expresión aritmética para calcular el valor del término.* Los estudiantes *únicamente pueden deducir y utilizar* dicha expresión si *comprenden la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor. Los términos obtenidos anteriormente en la actividad sirven como sugerencia para deducir la relación matemática implícita.*
		Finalidad	(3.F) *Comprender la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor, para aprender a generalizar*.
		Esfuerzo cognitivo	(3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. *Los estudiantes utilizan una expresión aritmética para calcular el valor del término requerido*, *pero, para identificar dicha expresión es necesario comprender la estructura matemática de la secuencia.*
		Contenidos implícitos	(3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente *la relación entre la posición del término y su valor.*
		Explicaciones	(3.X) Requieren explicaciones que hagan referencia a *la relación entre el valor de un término concreto y su posición en la secuencia (posiciones particulares de la secuencia).*
		Representación de la solución	(3.R) Se suelen utilizar varias representaciones (geométrica, aritmética y verbal). Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre ambas representaciones, con *el fin de deducir la relación matemática subyacente a la secuencia.*
4. Hacer Matemáticas	*Término general*	Procedimiento de resolución	(4.P) Se resuelven aplicando un pensamiento complejo y no algorítmico. *El enunciado no sugiere ninguna forma de obtener el término general.* Requiere que los estudiantes *analicen los casos concretos y examinen posibles restricciones para obtener una fórmula general para el cálculo de cualquier término de la secuencia.*
		Finalidad	(4.F) Explorar y comprender *la relación entre la posición de un término y su valor, con el fin de obtener la expresión del término general.*

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
		Esfuerzo cognitivo	(4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo. *Se requiere un razonamiento abstracto mediante el que* los estudiantes deben tomar decisiones *sobre qué elementos deben representarse en el término general y qué papel desempeñan, para obtener una relación algebraica que permita calcular el término general.*
		Contenidos implícitos	(4.C) Los estudiantes tienen que acceder a *conocimientos de álgebra y a la experiencia obtenida con los casos concretos (inmediato, próximo y lejano)* y usarlos adecuadamente durante la *construcción de la expresión algebraica del término general.*
		Explicaciones	(4.X) Requieren explicaciones basadas en *la formulación y justificación de una expresión del término general que haga referencia a la relación implícita existente entre la posición de un término cualquiera y su número de elementos.*
		Representación de la solución	(4.R) Se utiliza *una expresión algebraica que represente el término general y sintetice la relación entre la posición de un término y su número de elementos.*

Tabla 16. Particularización del modelo de demanda cognitiva para tareas de patrones geométricos.

4.2.3 *Características de los niveles de demanda cognitiva en tareas de geometría plana*

A diferencia de las tareas de patrones geométricos, podemos encontrar una amplia variedad de tareas de geometría plana con diferentes estructuras, distintos objetivos y estrategias de resolución muy dispares. Esta diversidad de tareas hace inviable particularizar los niveles para toda la geometría plana. Por esta razón, al tratar de particularizar el modelo de demanda cognitiva para este contexto, nos hemos centrado en un grupo de tareas utilizadas durante nuestra investigación, ya que todas tienen una estructura común (actividades 3, 7, 8 y 9; ver el anexo 2):

- Actividad 3. Calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera.
- Actividad 7. Calcular el número de diagonales de un polígono cualquiera.
- Actividad 8. Calcular el ángulo central de un polígono regular cualquiera.

- Actividad 9. Calcular el número de ejes de simetría de un polígono regular cualquiera.

Todas estas actividades comparten la misma estructura y tienen por objetivo que los estudiantes comprendan algunas propiedades geométricas de los polígonos mediante la generalización de relaciones entre diferentes elementos de los polígonos. Cada actividad está formada por una secuencia de cuestiones, cuya resolución supone una serie de pasos que guían al estudiante hacia la generalización, de manera que, conforme la actividad avanza, el grado de complejidad se incrementa:

- Paso 1. Los estudiantes observan la propiedad geométrica en la que se centra la actividad (suma de sus ángulos interiores, número de diagonales, valor del ángulo central o número de ejes de simetría) en polígonos sencillos concretos, que pueden dibujar o manipular en el ordenador (nivel algoritmos sin conexiones).
- Paso 2. Los estudiantes organizan los datos mediante el uso de tablas, con el fin de facilitar la identificación de regularidades (nivel algoritmos sin conexiones).
- Paso 3. Los estudiantes deben examinar dicha propiedad geométrica en un polígono mayor, que resulta difícil de dibujar. Los estudiantes deben deducir una relación funcional que permita determinar dicha propiedad para el nuevo polígono (nivel algoritmos con conexiones).
- Paso 4. Los estudiantes deben generalizar la relación matemática entre dicha propiedad geométrica y el número de lados de un polígono, expresando dicha generalización de manera verbal o algebraica (nivel hacer matemáticas).

En esta sección vamos a mostrar el modelo de demanda cognitiva con sus características particularizadas para dichas tareas. Somos conscientes de la limitación que eso supone, ya que no es aplicable a otros tipos de actividades de geometría plana. En la Tabla 17, mostramos el modelo de demanda cognitiva particularizado a las cuatro tareas de geometría plana mencionadas anteriormente. Como en la Tabla 16, hemos escrito en cursiva las particularizaciones incorporadas a la caracterización general del modelo de demanda cognitiva (Tabla 9).

Nivel de D. C.	Categorías	Características
1. Memorización	Procedimiento de resolución	(1.P) No se resuelven usando algoritmos, sino *repitiendo definiciones o propiedades geométricas previamente aprendidas o* tomando los datos directamente del enunciado.
	Finalidad	(1.F) Reproducir elementos *(definiciones o propiedades geométricas)* previamente aprendidas u *observar los elementos geométricos del enunciado y contestar tomando los datos* directamente del enunciado.
	Esfuerzo cognitivo	(1.E) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo. No son ambiguas, suponen la reproducción exacta de *ciertas propiedades geométricas aprendidas previamente o presentes en el enunciado*.
	Contenidos implícitos	(1.C) No tiene conexión con *la relación entre la propiedad geométrica subyacente* que se está aprendiendo *y el número de lados de un polígono*.
	Explicaciones	(1.X) No requieren explicaciones.
	Representación de la solución	(1.R) Se usan las representaciones que resultan más simples e intuitivas en el contexto del problema *(representación geométrica, aritmética o verbal)*.
2. Algoritmos Sin Conexiones	Procedimiento de resolución	(2.P) Se resuelven *siguiendo una serie de pasos o instrucciones* indicados expresamente en el enunciado o evidentes por el contexto. *Los estudiantes completan las tablas de datos a partir del dibujo de los elementos geométricos,* sin necesidad de considerar *la relación entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*
	Finalidad	(2.F) Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de comprender *la relación general que expresa la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo*. Los estudiantes pueden resolver las cuestiones correctamente sin necesidad de percatarse de *la relación implícita existente entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*
	Esfuerzo cognitivo	(2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo, *ya que el propio enunciado guía al estudiante en los pasos que debe seguir mediante las tablas de datos dadas por la actividad, que los estudiantes deben completar*.
	Contenidos implícitos	(2.C) Puede existir conexión entre *la relación matemática general de la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el procedimiento de resolución utilizado.* Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de ella para contestar correctamente la cuestión.

Nivel de D. C.	Categorías	Características
	Explicaciones	(2.X) Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir el *procedimiento* empleado, *basado en completar la tabla de datos a partir del dibujo de los elementos geométricos*.
	Representación de la solución	(2.R) Se pueden usar una o varias representaciones. Se suelen *utilizar la representación geométrica, para obtener el resultado y la aritmética para dar la respuesta completando las tablas.* Cuando se usan varias, se hace de manera independiente, es decir, sin establecer relaciones entre ellas *ni con la relación matemática general de la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo.*
3. Algoritmos Con Conexiones	Procedimiento de resolución	(3.P) Se resuelve aplicando un algoritmo *que el estudiante solo puede descubrir cuando es consciente de la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono*. Las cuestiones resueltas antes sugieren una vía *para deducir qué operaciones deben realizarse*.
	Finalidad	(3.F) *Deducir y aplicar el algoritmo* apropiado para adquirir una comprensión más profunda de *la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono*.
	Esfuerzo cognitivo	(3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. *Es necesario comprender la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono para resolver correctamente la tarea.*
	Contenidos implícitos	(3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente *la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*
	Explicaciones	(3.X) Requieren explicaciones que hagan referencia a *la relación entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono concreto.*
	Representación de la solución	(3.R) Se utiliza *la representación aritmética para expresar la solución final.* Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre *la representación geométrica y los datos de las tablas*, con *el fin de deducir la relación funcional entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*

Nivel de D. C.	Categorías	Características
4. Hacer Matemáticas	Procedimiento de resolución	(4.P) Se resuelven aplicando un pensamiento complejo y no algorítmico. *El enunciado no sugiere ninguna forma de obtener la relación matemática de la propiedad geométrica subyacente.* Requieren que los estudiantes analicen *los resultados obtenidos en las cuestiones resueltas antes para obtener la relación general entre la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo y el número de lados de un polígono.*
	Finalidad	(4.F) Explorar y comprender *de manera global la propiedad geométrica subyacente de los polígonos que se está aprendiendo.*
	Esfuerzo cognitivo	(4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo. Las formas de resolución no son fácilmente predecibles, *requiere que los estudiantes tengan una comprensión global de la propiedad geométrica subyacente y* tomen decisiones sobre *cómo afecta el número de lados de un polígono a esta propiedad.*
	Contenidos implícitos	(4.C) Los estudiantes *deben alcanzar una comprensión global de la propiedad geométrica subyacente que se está aprendiendo* y usarla adecuadamente durante la resolución de la actividad.
	Explicaciones	(4.X) Requieren explicaciones *basadas en la generalización de la propiedad geométrica subyacente.*
	Representación de la solución	(4.R) Por *lo general, se utiliza la representación algebraica o su verbalización*, pues facilita la resolución y sintetiza la información de manera abstracta.

Tabla 17. Particularización del modelo de demanda cognitiva para tareas de geometría plana.

4.2.4 *Características de los niveles de demanda cognitiva en tareas de proyecciones ortogonales*

Al igual que ocurría con las actividades de geometría plana, las tareas de visualización pueden ser muy variadas, por lo que hemos realizado la particularización para los cuatro tipos de actividades de proyecciones ortogonales que hemos utilizado durante nuestra experimentación (sección 4.1.3.2). Estas actividades requieren la comprensión y uso de proyecciones ortogonales (superior, frontal y lateral derecha) y están diseñadas para ser resueltas haciendo uso del software *Cubos y Cubos*, descrito en la sección 4.1.3.1. La particularización del modelo de demanda cognitiva que presentamos no es específica para este software, sino que se ajusta también a tareas similares que hagan uso de otras aplicaciones informáticas y/o de materiales manipulativos. Al analizar los cuatro tipos de actividades, podemos identificar distintas estrategias de resolución, con diferente nivel de demanda cognitiva y que requieren distintas habilidades de visualización:

Tipo DibOrd. Dibujo de las proyecciones ortogonales ordinarias de un sólido.

- Los estudiantes dibujan las proyecciones ortogonales ordinarias del sólido copiándolas directamente de la imagen que la propia actividad les proporciona, bien sea en papel o a través del software (*memorización*). Los estudiantes no hacen un uso significativo de ninguna habilidad de visualización.
- Los estudiantes dibujan las proyecciones ortogonales ordinarias moviendo el sólido, manipulativo o virtual, para colocarlo de manera que puedan observar de frente, “una a una”, cada proyección ortogonal y copian la imagen (*algoritmos sin conexiones*). Los estudiantes pueden dibujarlas correctamente sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización.
- Los estudiantes dibujan las proyecciones ortogonales ordinarias manteniendo el sólido, manipulativo o virtual, en una posición fija, es decir, no mueven el sólido para hacer los sucesivos dibujos de las proyecciones (*algoritmos con conexiones*). Los estudiantes emplean las habilidades de *reconocimiento de posiciones en el espacio* y de *relaciones espaciales* identificando relaciones entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos. Los estudiantes utilizan las habilidades de *conservación de la percepción* y *memoria visual* recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven desde la posición fija en la que se encuentra el sólido. Además, los estudiantes pueden usar la habilidad de *discriminación visual* para comprobar que el dibujo de las proyecciones ortogonales ordinarias es correcto, moviendo el sólido hasta posicionarlo en las tres proyecciones ortogonales, identificando las semejanzas y

diferencias entre las proyecciones ortogonales dibujadas y las de dicho sólido.

Tipo DibCod. Dibujo de las proyecciones ortogonales codificadas de un sólido.

- Los estudiantes dibujan las proyecciones ortogonales codificadas moviendo el sólido y contando la cantidad de cubos que hay en cada fila (*algoritmos sin conexiones*). Los estudiantes pueden dibujarlas correctamente sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización.
- Los estudiantes dibujan las proyecciones ortogonales codificadas manteniendo el sólido, manipulativo o virtual, en varias posiciones fijas, es decir, no hacen movimientos continuamente, sino que dejan el cubo parado en posiciones concretas que les resultan favorables y sólo lo mueven cuando lo necesitan para ver otras filas de cubos (*algoritmos con conexiones*). Los estudiantes emplean las habilidades de *reconocimiento de relaciones espaciales* y *posiciones en el espacio* identificando relaciones entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos. Los estudiantes utilizan las habilidades de *conservación de la percepción* y *memoria visual* recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven desde la posición en la que se encuentra el sólido.

Tipo Construc. Construcción de sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales (codificadas u ordinarias).

- Los estudiantes aplican un procedimiento general basado en un uso secuencial de las proyecciones ortogonales. Construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan, así sucesivamente hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones (*algoritmos con conexiones*). Los estudiantes emplean las habilidades de *relaciones espaciales* y *reconocimiento de posiciones en el espacio* identificando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados).

- Los estudiantes construyen el sólido utilizando las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea (*hacer matemáticas*). Los estudiantes emplean las habilidades de *relaciones espaciales* y *reconocimiento de posiciones en el espacio* identificando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados). Además, en el caso de las proyecciones ortogonales ordinarias, los estudiantes pueden usar la habilidad de *discriminación visual* para comprobar que la construcción del sólido es correcta, moviendo el sólido hasta situarlo en las tres proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha) e identificando las semejanzas y diferencias entre las proyecciones ortogonales dibujadas y las de dicho sólido.

En la Tabla 18, mostramos el modelo de demanda cognitiva particularizado a las tareas de proyecciones ortogonales utilizadas durante nuestra investigación, identificando mediante la cursiva las particularizaciones incorporadas a la caracterización general del modelo de demanda cognitiva (Tabla 9). En esta tabla hemos diferenciado las características en función del tipo de actividad (DibOrd, DibCod, Construc) al que hacen referencia.

Nivel de D. C.	**Categorías**	**Características**
1. Memorización	Procedimiento de resolución	*Tipo DibOrd.* (1.P) Se resuelven *repitiendo o copiando las imágenes* tomadas directamente del enunciado *(p. ej., copiando la imagen de las proyecciones ortogonales ordinarias que proporciona el software sin necesidad de manipular el sólido).*
	Finalidad	*Tipo DibOrd.* (1.F) Reproducir *o copiar imágenes* tomadas directamente del enunciado *o de la pantalla*.
	Esfuerzo cognitivo	*Tipo DibOrd.* (1.E) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo. No son ambiguas, suponen la reproducción exacta de *las imágenes proporcionadas por el enunciado o la pantalla.*
	Contenidos implícitos	*Tipo DibOrd.* (1.C) *No requiere hacer un uso significativo de ninguna habilidad de visualización.*
	Explicaciones	*Tipo DibOrd.* (1.X) No requieren explicaciones.
	Representación de la solución	*Tipo DibOrd.* (1.R) Se usa *la representación geométrica de las proyecciones ortogonales ordinarias*.

Nivel de D. C.	Categorías	Características
2. Algoritmos Sin Conexiones	Procedimiento de resolución	*Tipos DibOrd* y *DibCod.* (2.P) Se resuelven *siguiendo una serie de pasos sencillos e intuitivos, basados en el movimiento y observación del sólido. Los estudiantes sitúan el sólido en diferentes posiciones que facilitan la identificación de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas).* Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin *hacer un uso significativo de las habilidades de visualización.*
	Finalidad	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (2.F) Obtener respuestas correctas *sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización (p. ej., los estudiantes mueven el sólido para colocarlo de manera que puedan observar de frente, "una a una", cada proyección ortogonal y copiar la imagen o contar el número de cubos que hay en cada fila).*
	Esfuerzo cognitivo	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo, ya que *los estudiantes se limitan a mover el sólido, situándolo en una posición adecuada, para determinar cada proyección*.
	Contenidos implícitos	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (2.C) *Se emplean las habilidades de visualización para mover el sólido a posiciones específicas, utilizando la definición de las tres proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha).*
	Explicaciones	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (2.X) Requieren explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo empleado.
	Representación de la solución	*Tipo DibOrd.* (2.R) *Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales ordinarias.* *Tipo DibCod.* (2.R) *Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales combinada con la representación aritmética de las cantidades de cubos.*

Nivel de D. C.	Categorías	Características
3. Algoritmos Con Conexiones	Procedimiento de resolución	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (3.P) Se resuelven *dibujando las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) manteniendo el sólido en una o varias posiciones fijas. No se trata de una posición cualquiera, los estudiantes deben decidir qué posición les permite visualizar las tres proyecciones ortogonales. Los estudiantes necesitan utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual).* *Tipo Construc.* (3.P) Se resuelven aplicando un algoritmo general *basado en un uso secuencial de las proyecciones ortogonales. No se trata de una secuencia única de pasos, los estudiantes deben decidir cómo seguir (p. ej., deben decidir a qué proyección prestar atención en cada momento). Los estudiantes construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan, así sucesivamente hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones. Los estudiantes necesitan utilizar las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*
	Finalidad	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (3.F) *Identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos, recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición.* *Tipo Construc.* (3.F) Usar *relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), utilizando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*
	Esfuerzo cognitivo	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. *Es necesario utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual).* *Tipo Construc.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. *Es necesario utilizar las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*

Nivel de D. C.	Categorías	Características
	Contenidos implícitos	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (3.C) Los estudiantes necesitan *identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos* (*reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio), a la vez que recuerdan aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición (conservación de la percepción* y *memoria visual*). *Tipo Construc.* (3.C) Los estudiantes necesitan considerar *relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos).*
	Explicaciones	*Tipo DibOrd* y *DibCod.* (3.X) Requieren explicaciones que hagan referencia a *las relaciones entre los cubos que forman el sólido.* *Tipo Construc.* (3.X) Requieren explicaciones que hagan referencia a *las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos).*
	Representación de la solución	*Tipo DibOrd.* (3.R) *Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales ordinarias.* Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre *la representación geométrica del sólido conocido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales.* *Tipo DibCod.* (3.R) *Se utiliza la representación geométrica combinada con la representación aritmética propia de las proyecciones ortogonales codificadas.* Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre *la representación geométrica del sólido conocido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales.* *Tipo Construc.* (3.R) Se utiliza la *representación geométrica del sólido construido.* Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre *la representación geométrica del sólido construido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales.*

Nivel de D. C.	Categorías	Características
4. Hacer Matemáticas	Procedimiento de resolución	*Tipo Construc.* (4.P) Se resuelven aplicando una *estrategia de resolución compleja y* no algorítmica*. Los estudiantes construyen el sólido explorando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, (p. ej., los estudiantes construyen el sólido por filas, considerando simultáneamente las tres proyecciones ortogonales dadas).* Requiere que los estudiantes analicen la actividad *y hagan uso de las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*
	Finalidad	*Tipo Construc.* (4.F) Explorar y comprender las *relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), aplicando la información de las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea.*
	Esfuerzo cognitivo	*Tipo Construc.* (4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo: *No existe un único método de resolución.* Las formas de resolución no son fácilmente predecibles. Requieren *examinar y utilizar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, aplicando dicha información de manera correcta para la construcción del sólido.*
	Contenidos implícitos	*Tipo Construc.* (4.C) Los estudiantes tienen que *comprender y coordinar las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), empleando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.*
	Explicaciones	*Tipo Construc.* (4.X) Requieren explicaciones basadas *en la descripción del proceso de construcción del sólido.*
	Representación de la solución	*Tipo Construc.* (4.R) Se utiliza la *representación geométrica del sólido construido.*

Tabla 18. Particularización del modelo de demanda cognitiva para tareas de proyecciones ortogonales.

4.3 Formas de análisis de datos

Para estudiar el potencial de una actividad y la complejidad que supone la resolución de esta para los estudiantes, vamos a utilizar el modelo de demanda cognitiva. Para identificar el nivel de demanda cognitiva que requiere una actividad, en la literatura que hemos consultado, sus autores realizaban un análisis teórico haciendo uso del enunciado de la actividad. No obstante, al analizar la información proporcionada por nuestros experimentos, hemos observado que el nivel de demanda cognitiva de una tarea puede variar en función de las estrategias de resolución escogidas por los estudiantes. Por esta razón, en nuestro trabajo realizamos un doble análisis para identificar el nivel de demanda cognitiva de las tareas:

1. Un análisis teórico del nivel de demanda cognitiva requerido por las actividades, a partir de su enunciado y de la resolución típica esperada de un estudiante medio. Esto permite valorar el diseño de la actividad e identificar la evolución del nivel de demanda cognitiva teórico, comprobando si se trata de una tarea apropiada para atender las necesidades de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas.
2. Un análisis del nivel de demanda cognitiva de las respuestas de los estudiantes en nuestros experimentos. Esto permite identificar el nivel de demanda cognitiva en función de la estrategia de resolución utilizada por estudiantes con diferentes capacidades, facilitando la identificación de respuestas de un nivel alto de complejidad, propias de estudiantes de aaccmm.

Analizar las respuestas de los estudiantes, haciendo uso del modelo de demanda cognitiva, es otra de las aportaciones novedosas de esta tesis doctoral. La finalidad es mejorar el modelo de demanda cognitiva, incrementando su utilidad y aplicándolo al análisis de respuestas reales de estudiantes de manera sistemática, para identificar características de la actividad cognitiva de estudiantes concretos, en vez de sólo identificar características teóricas de los problemas resueltos por resolutores ideales.

En esta sección comenzaremos explicando en qué consiste y cómo realizamos el análisis teórico de las tareas, seguidamente justificaremos la necesidad de un segundo análisis basado en las respuestas de los estudiantes y, por último, detallaremos en qué consiste el análisis de las respuestas de los estudiantes.

4.3.1 *Análisis teórico de las actividades*

Actualmente se está tratando de potenciar el *pensamiento matemático de alto nivel*, debido a que ayuda a desarrollar la capacidad de resolución de problemas y el pensamiento crítico, aumentando el rendimiento escolar de los estudiantes, en particular de aquéllos con aaccmm (Boaler y Staples, 2008; Murray, 2011). Una forma de evaluar la calidad de las tareas es analizar si son cognitivamente exigentes, lo cual se puede hacer utilizando los niveles del modelo de demanda cognitiva.

Para identificar a qué nivel de demanda cognitiva pertenece una actividad, contestaremos las siguientes preguntas, cada una de las cuales hace referencia a una de las seis categorías definidas (sección 3.3.2), que se centran en diferentes aspectos del proceso de resolución de una actividad matemática.

1. ¿Qué *método o procedimiento* se utiliza para *resolver* la actividad?
2. ¿Cuál es la *finalidad* de la actividad?
3. ¿Cuánto *esfuerzo cognitivo* supone saber qué hacer o cómo resolver la tarea?
4. ¿Qué *contenidos matemáticos* subyacentes deben ser considerados para resolver con éxito la actividad?
5. ¿Qué *explicaciones* requiere la actividad?
6. ¿Cómo se representa la solución?

A partir del nivel al que corresponden las características utilizadas para responder las preguntas, asignamos a la actividad el nivel mayoritario, es decir el nivel al que se ajustan más características. Este análisis permite identificar posibles deficiencias o debilidades de los enunciados, observando si todas las características utilizadas para responder a las preguntas pertenecen al mismo nivel. De esta forma, en el caso de encontrar alguna característica con un nivel diferente al resto, podemos identificar la razón por la que no tiene el mismo nivel y tratar de variar el enunciado de la tarea para modificar el nivel de dicha característica.

A continuación, en la Tabla 19, mostramos un ejemplo del análisis teórico de la cuestión 2 de una de las actividades planteadas (Figura 19). En este ejemplo podemos encontrar dos posibles estrategias de resolución correctas por un estudiante medio. Por lo tanto, al responder a las preguntas con una característica, vamos a diferenciar las dos posibles estrategias, pues puede ocurrir que el nivel de demanda cognitiva de la actividad sea diferente para cada estrategia de resolución utilizada, como ocurre en la actividad que analizamos. Asignar dos niveles de demanda cognitiva teóricos diferentes a una actividad, como consecuencia de tener en cuenta que los estudiantes ordinarios pueden seguir diferentes estrategias correctas de resolución, no lo hemos visto hasta ahora en la bibliografía consultada, por lo que es una de las novedades aportadas por esta tesis.

Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...

1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición?

2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?

Figura 19. Cuestión 2 de la actividad de patrones geométricos.

ANÁLISIS TEÓRICO
1. ¿Qué **método** o **procedimiento** se utiliza para resolver la actividad? Estrategia 1*. Se resuelve dibujando el término de la posición 20ª (dibujando o no algunos términos intermedios) y contando el número de puntos que lo forman.* (2.P) Estrategia 2*. Se resuelve observando que se trata de la suma de los 20 primeros números naturales. Una vez comprendida la relación, se realiza la suma de los 20 primeros números naturales para obtener el resultado.* (3.P) 2. ¿Cuál es la **finalidad** de la actividad? Estrategia 1. *Obtener un resultado correcto dibujando el triángulo y contando la cantidad de puntos que tiene, sin identificar la relación implícita existente entre el número triangular y su posición.* (2.F) Estrategia 2. *Comprender la relación implícita existente entre el valor del número triangular y su posición para calcular el término 20º y deducir que se trata de sumar los 20 primeros números naturales.* (3.F)

ANÁLISIS TEÓRICO
3. ¿Cuánto **esfuerzo cognitivo** supone saber qué hacer o cómo resolver la actividad? Estrategia 1. *Supone un esfuerzo cognitivo limitado. Las figuras del enunciado sirven de guía para dibujar la figura 20ª y, a partir de este dibujo, contar el número de elementos que la forman.* (2.E) Estrategia 2. *Supone cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben deducir que se trata de sumar los 20 primeros números naturales, comprendiendo la relación implícita existente entre el valor del número triangular y su posición.* (3.E) 4. ¿Qué **contenidos matemáticos** subyacentes deben ser considerados para resolver con éxito la actividad? Estrategia 1*. Al dibujar la figura 20ª, los estudiantes deben tener en cuenta la estructura geométrica del patrón, pero no necesitan percatarse de la relación implícita existente entre el valor del número triangular (suma de los 20 primeros números) y su posición para llegar a la respuesta correcta*. (2.C) Estrategia 2. *Para calcular el valor del 20º término de la secuencia, los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre la cantidad de sumandos y la posición del término.* (3.C) 5. ¿Qué **explicaciones** requiere la actividad? Estrategia 1. *Requiere explicaciones que hacen referencia únicamente a describir el procedimiento empleado para resolver la actividad. No se pretende que los estudiantes identifiquen la relación entre el resultado obtenido al contar el número de elementos que forman la figura 20ª y la posición del término.* (2.X) Estrategia 2. *Requiere explicaciones que hacen referencia a la relación aritmética entre el valor de un número triangular y su posición.* (3.X) 6. ¿Cómo se **representa la solución**? Estrategia 1*. Se utiliza la representación geométrica para obtener el resultado (dibujo de la figura 20ª) y la representación aritmética para dar la respuesta (resultado de contar el número de puntos).* (2.R) Estrategia 2. *Se utilizan las representaciones geométrica y aritmética. Se establecen conexiones entre ellas para identificar la relación implícita existente entre el valor del número triangular y su posición, observando la representación geométrica de los casos anteriores y teniendo en cuenta la posición de cada término y su número de elementos.* (3.R)

Tabla 19. Ejemplo del análisis teórico de una actividad.

La Figura 20 sintetiza las asignaciones de nivel de demanda cognitiva de las seis categorías a la estrategia 1, como resultado de responder las seis preguntas. Observamos que todas las categorías corresponden al nivel *algoritmos sin* *conexiones*. Por otra parte, en la Figura 21 vemos que, para la estrategia 2, todas las categorías corresponden al nivel *algoritmos con conexiones.*

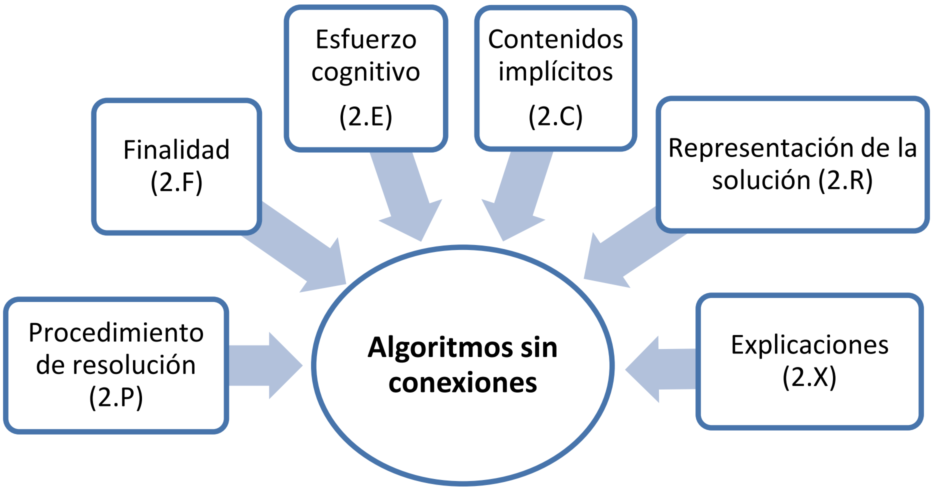


Figura 20. Identificación del nivel de la estrategia 1 de resolución mediante el análisis teórico.

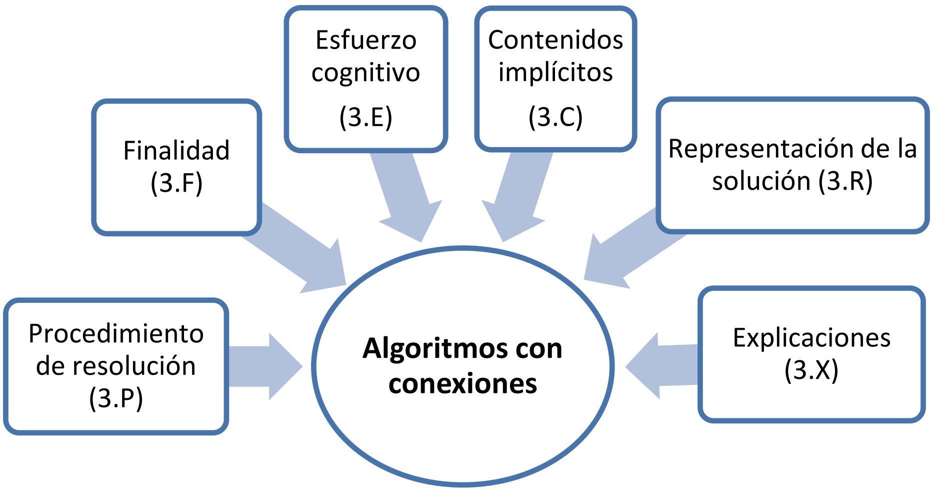


Figura 21. Identificación del nivel de la estrategia 2 de resolución mediante el análisis teórico.

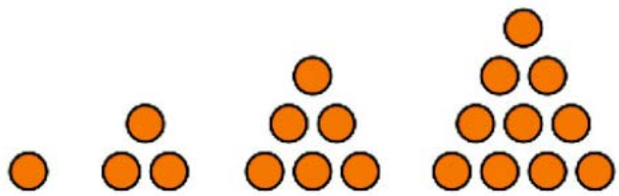
El análisis teórico de una tarea permite realizar una valoración de su diseño, observando si todas las características utilizadas para responder a las preguntas planteadas durante el análisis se ajustan al mismo nivel de demanda cognitiva. Además, este análisis permite realizar una estimación previa de la experimentación, identificando algunas estrategias de resolución que probablemente serán utilizadas por los estudiantes y los posibles niveles de demanda cognitiva de sus respuestas en función de la estrategia de resolución utilizada.

El análisis teórico realizado en nuestras experimentaciones nos ha permitido observar la gran variedad de estrategias de resolución que pueden utilizarse para resolver una misma tarea, lo que nos ha confirmado la importancia de realizar el análisis de respuestas para conocer la actividad de cada estudiante. En el apartado 4.3.2 justificamos la necesidad del análisis de respuestas para identificar el nivel de demanda cognitiva de una actividad.

4.3.2 *Necesidad de analizar las respuestas de los estudiantes*

En nuestras primeras experimentaciones, observamos que, al plantear actividades a grupos de estudiantes con diferentes capacidades, especialmente si entre ellos hay estudiantes con talento matemático, solíamos obtener respuestas muy variadas, con características propias de diferentes niveles de demanda cognitiva, dependiendo de la estrategia de resolución utilizada. Esto nos llevó a pensar en la posible existencia de varios niveles para las respuestas a una misma actividad y, por tanto, en la importancia de analizar las respuestas de los estudiantes para describir e identificar su diversidad de formas de actividad cognitiva. A continuación, mostramos un ejemplo de la diversidad de respuestas obtenidas en la actividad cuyo análisis teórico hemos hecho en la sección anterior, anticipando los resultados del análisis de respuestas detallado que mostraremos en la sección 4.3.3.

Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...



1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas?
2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?

Figura 22. Cuestiones 1 y 2 de la actividad de los números triangulares.

La Figura 22 muestra las dos primeras cuestiones de la actividad de los números triangulares (actividad completa en la sección 4.1.1.2). Estas dos cuestiones piden a los estudiantes calcular el número de puntos del término inmediato (n=5) y de un término próximo (n=20). Observando las respuestas obtenidas a la segunda cuestión, encontramos tres estrategias de resolución diferentes, con dos niveles distintos de demanda cognitiva.

Algunos estudiantes optaron por dibujar la figura de la posición pedida y contar sus puntos, tanto de la 5ª como de la 20ª posición (Figura 23), basándose en la secuencia dada por las representaciones gráficas mostradas en el enunciado. Una parte de estos estudiantes, para la cuestión 2, empezaron dibujando algunas figuras intermedias. Se trata de una resolución propia del nivel *algoritmos sin conexiones*, ya que los estudiantes fueron capaces de dar un resultado correcto observando que en cada fila hay que dibujar un punto más, pero no identificaron la estructura matemática subyacente (suma de los números 1 a 5 o 1 a 20, respectivamente).

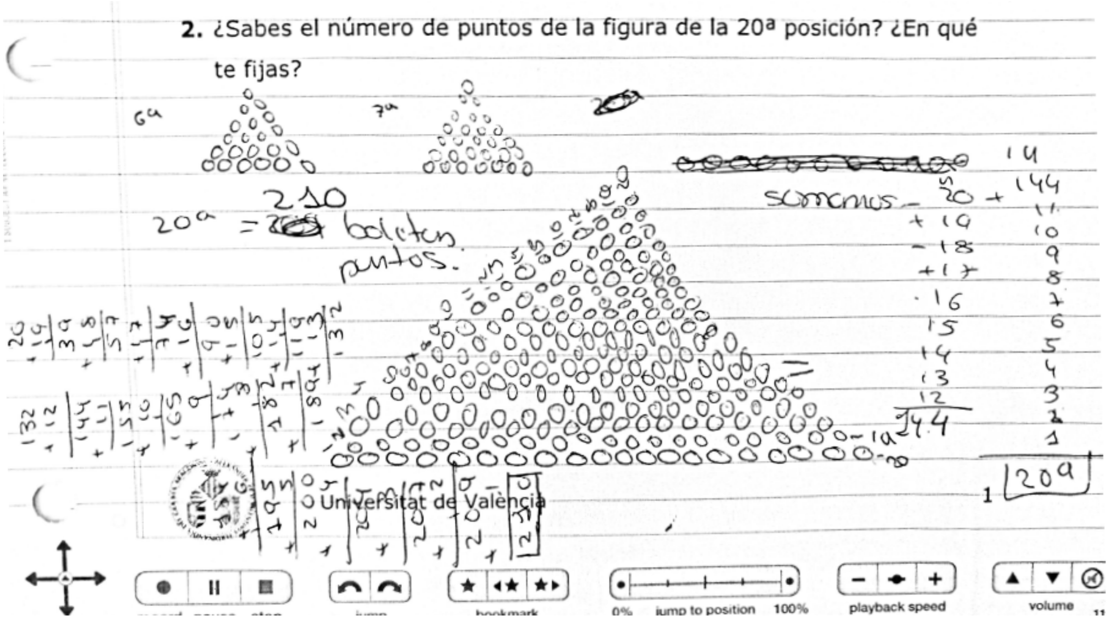


Figura 23. Ejemplo de respuesta de la estrategia 1: representación de la figura 20ª y conteo de su número de elementos.

Otros estudiantes sí identificaron el patrón numérico, pues observaron que había que sumar desde el 1 hasta el número de la posición del término buscado y calcularon el término 20º sumando los números del 1 al 20 sin necesidad de dibujar los puntos (Figura 24). No fueron capaces de encontrar una expresión general que les permitiera calcular el término general, pero identificaron la relación entre cada número triangular y su posición, lo que les llevó a resolver el problema sumando los 20 primeros números naturales. Esta resolución es propia del nivel *algoritmos con conexiones.*

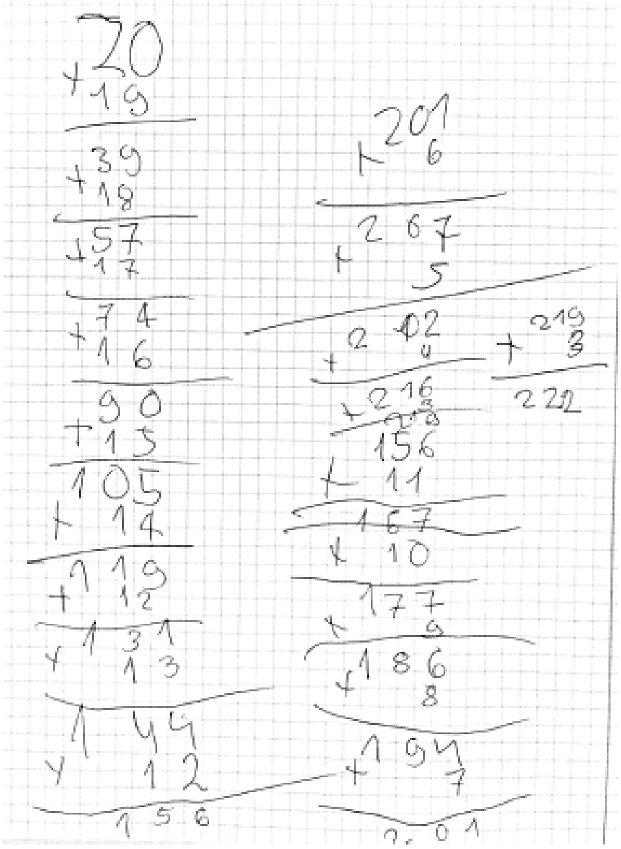
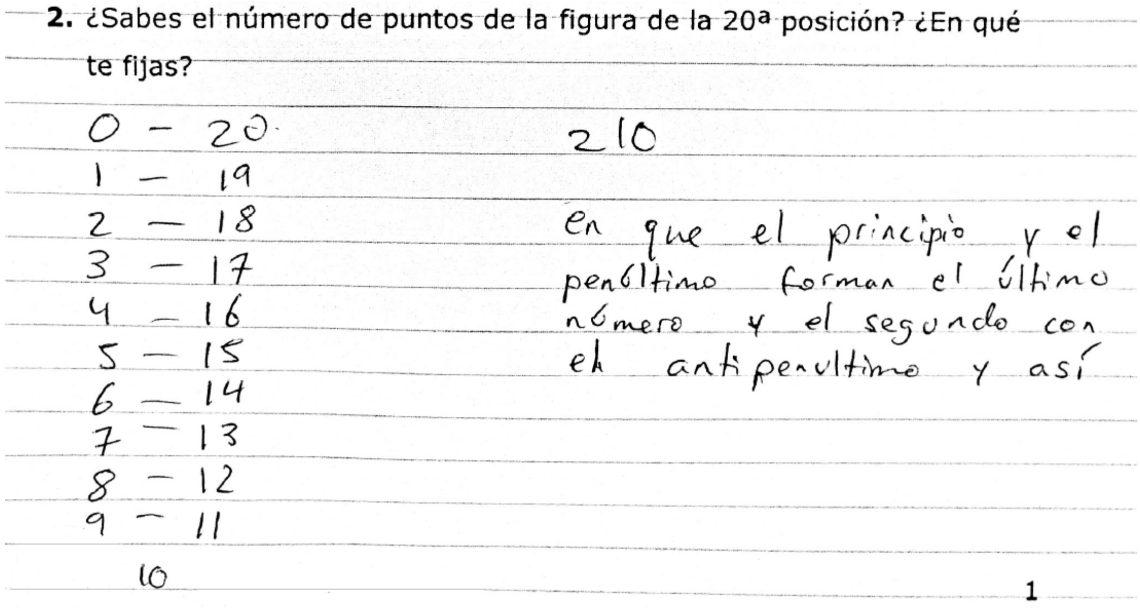


Figura 24. Ejemplo de respuesta de la estrategia 2: suma de los 20 primeros números.

También encontramos una pareja de estudiantes que, después de hallar el 5º término mediante el dibujo de la figura 5ª y el conteo de elementos que la formaban, encontraron una relación aritmética que les permitía calcular el 20º término sin realizar la operación consistente en sumar los números del 1 al 20 (Figura 25). Esta resolución (similar al método de Gauss) supuso para los estudiantes un nivel de demanda cognitiva mayor del esperado, pues resolvieron la actividad estableciendo relaciones muy estrechas entre los contenidos implícitos, aproximándose a la fórmula estándar para calcular cualquier término de la secuencia. Esta resolución es propia del nivel *algoritmos con conexiones*, ya que, pese a no expresar la operación de manera algebraica, los estudiantes obtuvieron una relación matemática no recursiva que les permitió obtener el resultado de la suma de los 20 primeros números sin realizar dicha operación y que, por tanto, es generalizable para calcular el valor de cualquier otro término.


2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?

0 – 20
1 – 19
2 – 18
3 – 17
4 – 16
5 – 15
6 – 14
7 – 13
8 – 12
9 – 11
10

210

en que el principio y el penúltimo forman el último número y el segundo con el antipenultimo y así

1

Figura 25. Ejemplo de respuesta de la estrategia 3: obtención del resultado de la suma de los 20 primeros números sin efectuar la suma básica.

Al obtener respuestas tan diferentes de una misma cuestión, parte de las cuales no habían consideradas en el análisis teórico (sección 4.3.1), creemos que lo más razonable para mejorar la metodología de las investigaciones que utilicen el modelo de demanda cognitiva es realizar un doble análisis de la demanda cognitiva de las actividades, que incluya el análisis teórico de las actividades y el análisis de las resoluciones de estudiantes. En el apartado 4.3.3. describimos nuestra metodología de análisis de las respuestas de los estudiantes.

4.3.3 *Análisis de respuestas*

Para analizar las respuestas de los estudiantes, examinaremos las seis categorías que organizan las características de los niveles de demanda cognitiva, contestando a las preguntas planteadas en la sección 4.3.1. A continuación presentamos el análisis detallado de las tres respuestas mostradas en la sección 4.3.2. Todas ellas corresponden a la cuestión 2 de la actividad de los números triangulares (Figura 22), que pide calcular el número de elementos del término 20º de dicha secuencia.

En la Tabla 20 mostramos el análisis de respuesta de la Figura 23.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA
1. ¿Qué **método** o **procedimiento** se utiliza para resolver la actividad? *Se resuelve dibujando el término de la posición 20ª (dibujando o no algunos términos intermedios) y contando el número de puntos que lo forman.* (2.P) 2. ¿Cuál es la **finalidad** de la actividad? *Obtener un resultado correcto dibujando el triángulo y contando la cantidad de puntos que tiene, sin identificar la relación implícita existente entre el número triangular y su posición.* (2.F) 3. ¿Cuánto **esfuerzo cognitivo** supone saber qué hacer o cómo resolver la actividad? *Supone un esfuerzo cognitivo limitado. Las figuras del enunciado sirven de guía para dibujar la figura 20ª y, a partir de este dibujo, contar el número de elementos que la forman.* (2.E) 4. ¿Qué **contenidos matemáticos** subyacentes deben ser considerados para resolver con éxito la actividad? *Al dibujar la figura 20ª, los estudiantes deben tener en cuenta la estructura geométrica del patrón, pero no necesitan percatarse de la relación implícita existente entre el valor del número triangular (suma de los 20 primeros números) y su posición para llegar a la respuesta correcta.* (2.C) 5. ¿Qué **explicaciones** requiere la actividad? *A pesar de que la pregunta pide una justificación, los estudiantes no dan explicaciones.* (1.X) 6. ¿Cómo se **representa la solución**? *Se utiliza la representación geométrica para obtener el resultado (dibujo de la figura 20ª) y la representación aritmética para dar la respuesta (resultado de contar el número de puntos).* (2.R)

Tabla 20. Análisis del nivel de demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 23.

En la Tabla 20 podemos observar que los estudiantes utilizan la estrategia 1 considerada en el análisis teórico (Tabla 19), basada en el dibujo de la figura 20ª y el conteo del número de elementos que la forman. Todas las categorías, exceptuando la de *explicaciones,* corresponden al nivel *algoritmos sin conexiones* (Figura 26). Ello nos lleva a concluir que esta resolución ha requerido el nivel de demanda cognitiva de *algoritmos sin conexiones*, ya que es el nivel al que se ajustan más características.

En lo que respecta a la categoría de *explicaciones*, su clasificación en el nivel de algoritmos sin conexiones no se debe a un problema de diseño de la actividad, puesto que esta sí pide una explicación. Los estudiantes dan un resultado numérico correcto, pero no explican en qué se han fijado para obtener dicho resultado, disminuyendo ligeramente la complejidad de su respuesta.

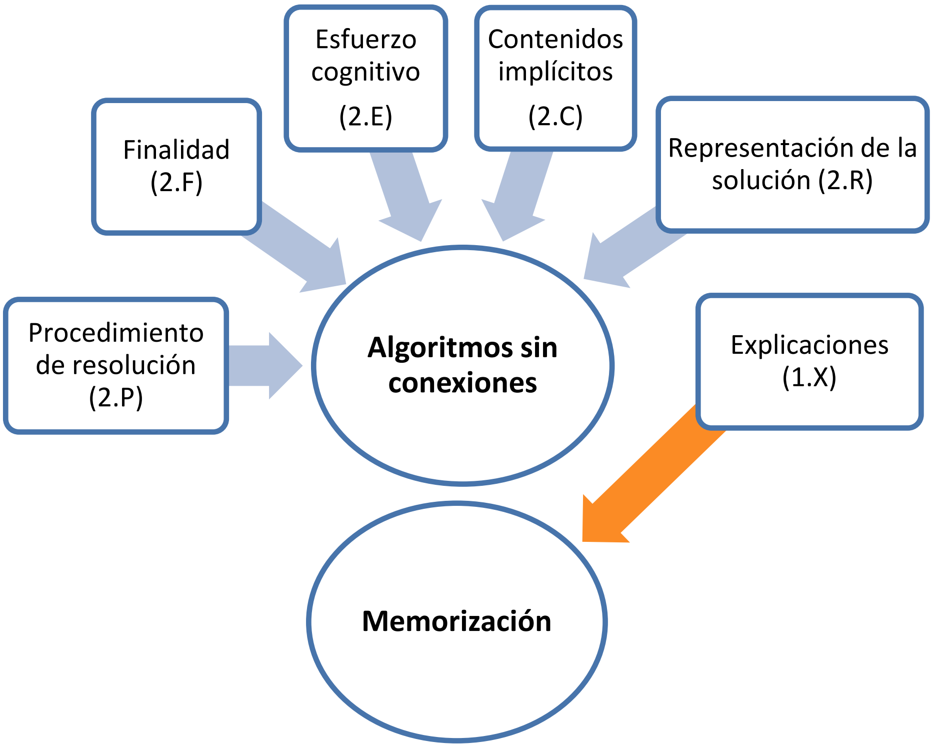


Figura 26. Identificación del nivel de demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 23 (Tabla 20).

A continuación, en la Tabla 21, presentamos el análisis de la respuesta mostrada en la Figura 24.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA
1. ¿Qué **método** o **procedimiento** se utiliza para resolver la actividad? *Se resuelve observando que se trata de la suma de los 20 primeros números naturales. Una vez comprendida la relación, se realiza la suma de los 20 primeros números naturales para obtener el resultado.* (3.P) 2. ¿Cuál es la **finalidad** de la actividad? *Comprender la relación implícita existente entre el valor del número triangular y su posición para calcular el término 20º y deducir que se trata de sumar los 20 primeros números naturales.* (3.F) 3. ¿Cuánto **esfuerzo cognitivo** supone saber qué hacer o cómo resolver la actividad? *Supone cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben deducir que se trata de sumar los 20 primeros números naturales, comprendiendo la relación implícita existente entre el valor del número triangular y su posición.* (3.E) 4. ¿Qué **contenidos matemáticos** subyacentes deben ser considerados para resolver con éxito la actividad? *Para calcular el valor del 20º término de la secuencia, los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre la cantidad de sumandos y la posición del término.* (3.C) 5. ¿Qué **explicaciones** requiere la actividad? *A pesar de que la pregunta pide una justificación, los estudiantes no dan explicaciones.* (1.X) 6. ¿Cómo se **representa la solución**? *Se utilizan las representaciones geométrica y aritmética. Se establecen conexiones entre ellas para identificar la relación implícita existente entre el valor del número triangular y su posición, observando la representación geométrica de los casos anteriores y teniendo en cuenta la posición de cada término y su número de elementos.* (3.R)

Tabla 21. Análisis del nivel de demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 24.

En la Tabla 21 podemos observar que los estudiantes utilizaron la estrategia 2 identificada en el análisis teórico (Tabla 19). Todas las categorías, exceptuando la de *explicaciones,* corresponden al nivel *algoritmos con conexiones* (Figura 27). Ello nos lleva a concluir que esta resolución ha requerido el nivel de demanda cognitiva de *algoritmos con conexiones*, ya que es el nivel al que se ajustan más características.

En lo que respecta a la categoría de *explicaciones*, al igual que ocurría en el ejemplo anterior, los estudiantes se limitaron a dar un resultado correcto sin justificar su respuesta, disminuyendo el grado de complejidad.

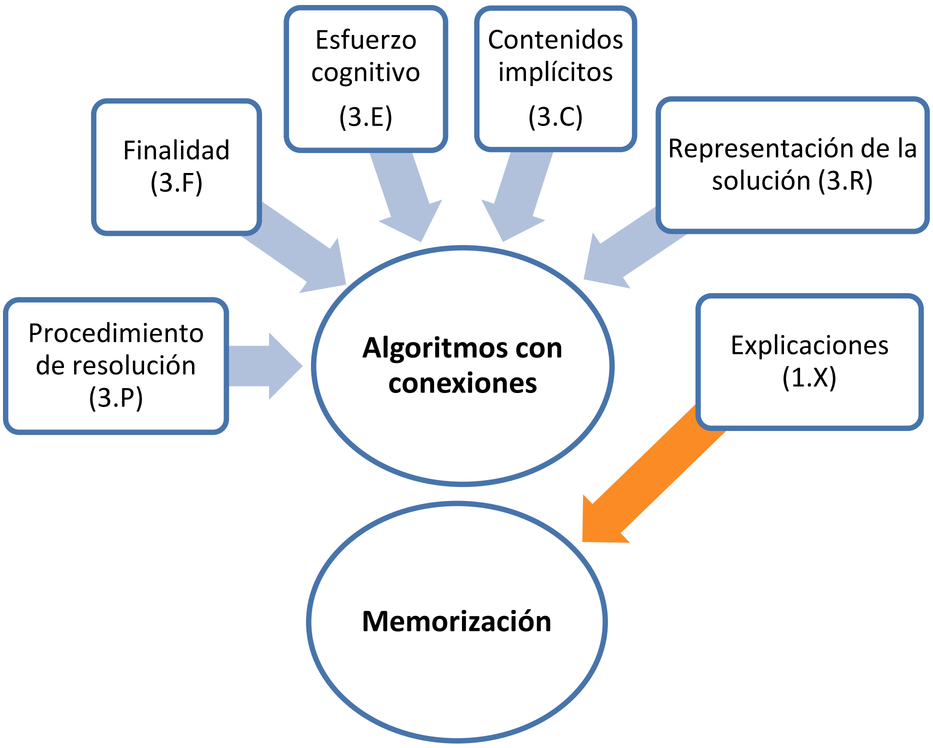


Figura 27. Identificación del nivel de demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 24 (Tabla 21).

Por último, en la Tabla 22, presentamos el análisis de la respuesta mostrada en la Figura 25.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA
1. ¿Qué **método** o **procedimiento** se utiliza para resolver la actividad? *Se resuelve aplicando la relación matemática implícita (similar al método de Gauss). Los estudiantes identifican que, al emparejar los números de la forma 0-20, 1-19, 2-18, etc., exceptuando el 10 que queda desparejado, el resultado de cada suma es 20, obteniendo 10 veces el mismo resultado. En definitiva, 10 veces 20 más el 10 que queda desparejado suman 210.* (3.P) 2. ¿Cuál es la **finalidad** de la actividad? *Deducir y aplicar la relación matemática que permite calcular el valor de cualquier número triangular a partir de su posición.* (3.F) 3. ¿Cuánto **esfuerzo cognitivo** supone saber qué hacer o cómo resolver la actividad? *Supone cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben deducir la relación matemática explorando y combinando los datos, prestando atención a si el número de sumandos es par o impar.* (3.E) 4. ¿Qué **contenidos matemáticos** subyacentes deben ser considerados para resolver con éxito la actividad? *Los estudiantes tienen que explorar los datos para deducir una relación matemática que permita calcular el valor del número triangular a partir de su posición.* (3.C) 5. ¿Qué **explicaciones** requiere la actividad? La explicación hace referencia al procedimiento utilizado para obtener el resultado. A pesar de que se usa de forma implícita la relación entre el valor del término y su posición, no se hace uso de ella para justificar el resultado. (2.X) 6. ¿Cómo se **representa la solución**? *Se utiliza la representación aritmética para dar la respuesta. Se establecen conexiones entre la representación geométrica y la aritmética para deducir la relación matemática implícita.* (3.R)

Tabla 22. Análisis del nivel de demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 25.

En este caso, podemos observar que los estudiantes utilizaron una estrategia diferente a las consideradas en el análisis teórico (Tabla 19). Los estudiantes obtuvieron el valor del término 20º haciendo uso de una relación matemática no recursiva, sin dibujar la figura 20ª ni realizar directamente la suma de los 20 primeros números.

Al igual que en los dos ejemplos anteriores, todas las categorías, exceptuando la de *explicaciones,* corresponden al mismo nivel, en este caso al nivel *algoritmos con conexiones*. Ello nos lleva a concluir que esta resolución ha requerido el nivel de demanda cognitiva de *algoritmos con conexiones*, ya que es el nivel al que se ajustan más características.

En lo que respecta a la categoría de *explicaciones*, a pesar de que los estudiantes establecen relaciones entre los contenidos implícitos y obtienen una relación aritmética que les permite calcular el término 20º sin realizar la suma de los 20 primeros números naturales, no utilizan dichas relaciones para justificar su resultado, sino que se limitaron a explicar el procedimiento seguido.

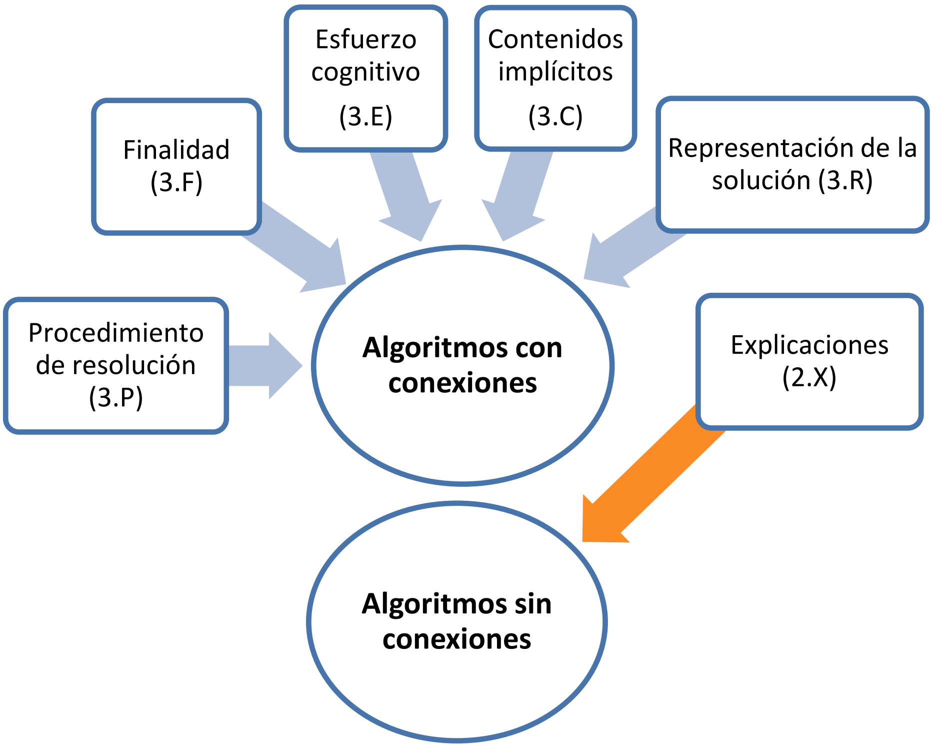


Figura 28. Identificación del nivel de demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 25 (Tabla 22).

Tras el análisis de estas respuestas, podemos comprobar que las respuestas de los estudiantes pueden resultar incompletas, dejando alguna categoría fuera del nivel esperado, a pesar de que, en el análisis teórico, todas las categorías corresponden a un mismo nivel de demanda cognitiva.

Por otra parte, como hemos mencionado anteriormente, el análisis teórico se basa en respuestas correctas de estudiantes medios, por lo que no considera la posibilidad de que los estudiantes resuelvan la actividad haciendo uso de estrategias de resolución que suponen una demanda cognitiva superior, como la mostrada en la tercera respuesta (Tabla 22). Es por ello que el análisis de respuestas facilita la identificación de estrategias de resolución no consideradas en el análisis teórico y, por tanto, es más completo y fiable que este. Además, el análisis de las respuestas de los estudiantes permite comparar sus niveles de demanda cognitiva y relacionarlos con sus capacidades matemáticas, detectando sus limitaciones y su evolución y proporcionando un instrumento para identificar las respuestas de mayor complejidad, propias de estudiantes con aaccmm.

Hasta el momento, de acuerdo con la literatura que hemos consultado y comentado en la sección 2.2, los investigadores sólo habían utilizado el modelo de demanda cognitiva para analizar los enunciados de las actividades identificando un único nivel para cada actividad. En esta tesis doctoral, aportamos la propuesta metodológica del doble análisis del nivel de demanda cognitiva de las actividades, teórico y de respuestas de estudiantes, que aplicaremos en los capítulos siguientes.

5. Experimentación

En este capítulo describimos los detalles de las experimentaciones llevadas a cabo durante nuestra investigación. Hemos realizado tres experimentos diferentes, con sus características propias, centrados en tres contextos matemáticos distintos (pre-álgebra, geometría plana y visualización). Por esta razón, vamos a dividir este capítulo en tres secciones, dedicadas a cada uno de dichos contextos matemáticos. En cada sección, hemos seleccionado una actividad de entre las que han integrado su experimentación.

Con el objetivo de valorar si las actividades utilizadas facilitan la atención de las necesidades educativas de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, en particular de altas capacidades, los experimentos de pre-álgebra y geometría plana se han implementado con estudiantes ordinarios y estudiantes talentosos. Además, para verificar si las actividades son adecuadas para todo el alumnado de un grupo ordinario, al mismo tiempo que desarrollan las habilidades de aquellos estudiantes con mayor capacidad, hemos realizado un doble análisis de cada actividad:

- Un *análisis teórico del nivel de demanda cognitiva*, basándonos en el enunciado de la actividad y las respuestas esperadas por un estudiante medio, capaz de responder correctamente a todas las cuestiones. Este análisis permite valorar el diseño de la actividad e identificar la evolución del nivel de demanda cognitiva teórico, comprobando si se trata de una tarea apropiada para atender las necesidades de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas.
- Un *análisis del nivel de demanda cognitiva de las respuestas de los estudiantes,* basándonos en las respuestas recogidas en los tres experimentos por estudiantes ordinarios y talentosos. Este análisis

permite identificar el nivel de demanda cognitiva a partir de la estrategia de resolución utilizada por estudiantes con diferentes capacidades, facilitando la identificación de respuestas de un nivel alto de complejidad, propias de estudiantes de aaccmm.

A continuación, presentamos un análisis completo (teórico y de respuestas) de las tres actividades seleccionadas. En el análisis de respuestas, para representar el número de estudiantes de cada grupo que hizo uso de las diferentes estrategias de resolución, redondearemos los porcentajes a las décimas.

5.1 Pre-álgebra

En esta sección vamos analizar una de las actividades de patrones geométricos que planteamos durante la experimentación. Se trata de una actividad sobre la secuencia de los números triangulares (actividad completa en la sección 4.1.1.2).

A continuación, presentamos el doble análisis de la actividad. Primeramente, un análisis teórico, donde determinamos el nivel de demanda cognitiva de cada cuestión a partir de su enunciado y la respuesta esperada por un estudiante medio, seguidamente, un análisis del nivel de demanda cognitiva de las respuestas dadas por los estudiantes.

5.1.1 *Análisis teórico de la actividad*

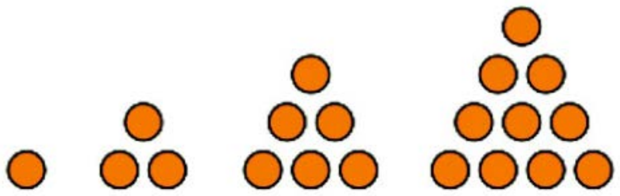
La actividad de los números triangulares se divide en cuatro cuestiones, aumentado progresivamente el nivel de abstracción requerido y, por lo tanto, el nivel de demanda cognitiva.

Para identificar el nivel de demanda cognitiva de cada cuestión, le hemos asignado seis características, una por cada categoría (procedimiento de resolución, finalidad, esfuerzo cognitivo, contenidos implícitos, explicaciones y representación de la solución), haciendo uso de las descripciones del modelo de demanda cognitiva particularizado para tareas de patrones geométricos (Tabla 16).

5.1.1.1 Cuestión 1. Cálculo del término inmediato

La actividad muestra la representación geométrica de los cuatro primeros términos de la secuencia de los números triangulares. La primera cuestión (Figura 29) pide calcular el valor del quinto término (*término* inmediato), y especificar cómo se ha obtenido el resultado.

Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...



1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas?

Figura 29. Cuestión 1 de la actividad de patrones geométricos.

Esta primera cuestión tiene un nivel de demanda cognitiva de *algoritmos sin conexiones,* ya que la estrategia de resolución esperada para resolver esta cuestión consiste en dibujar el triángulo correspondiente y contar el número de puntos que lo forman (*recuento*). Se trata de un procedimiento algorítmico que se puede aplicar sin necesidad de comprender los conocimientos matemáticos implícitos en la representación gráfica y subyacentes a la estructura de la sucesión. Los estudiantes observan el patrón visual recursivo, para pasar de un término de la secuencia al siguiente, y lo aplican directamente. En la Tabla 23 mostramos el análisis detallado de esta cuestión.

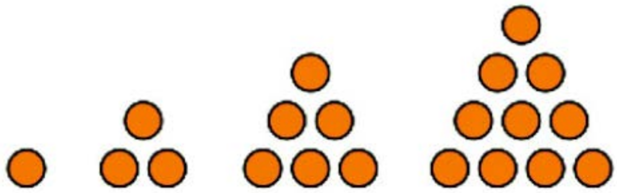
Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
1. Algoritmos Sin Conexiones	*Término inmediato (n = 5)*	Procedimiento de resolución	(2.P) Se resuelve aplicando una estrategia aditiva que es evidente por el contexto del enunciado. Los estudiantes calculan el valor del término 5º dibujando dicho término y contando el número de elementos que lo forman o sumando 5 unidades al término anterior. Es un algoritmo simple, que los estudiantes pueden aplicar sin necesidad de considerar que el valor de un término se obtiene sumando los números naturales 1 a 5 (relación matemática entre la posición de un término y su número de elementos).
		Finalidad	(2.F) Obtener una respuesta correcta, pero sin necesidad de comprender la relación matemática subyacente en la secuencia. Los estudiantes pueden obtener el número correcto de elementos del término inmediato aplicando una estrategia aditiva, pero sin necesidad de comprender la relación entre el valor de un término y su posición.
		Esfuerzo cognitivo	(2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad, ya que al tratarse del término 5º, su representación resulta sencilla y los datos del enunciado muestran con claridad cómo debe continuarse la secuencia.
		Contenidos implícitos	(2.C) Existe una conexión implícita entre la estructura de la secuencia, basada en la relación visual o geométrica y el algoritmo de resolución. Los estudiantes pueden dibujar el término 5º y contar el número de elementos que lo forman, sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor de un término y su posición.
		Explicaciones	(2.X) Las explicaciones dadas se enfocan únicamente a describir la estrategia empleada.
		Representación de la solución	(2.R) Se suelen utilizar la representación geométrica para obtener el resultado (dibujando el término 5º) y la aritmética para dar la respuesta final (el número de elementos que lo forman). Se pueden usar una o ambas formas de representación. Cuando se usan las dos, se hace de manera independiente, es decir, sin establecer relaciones entre ellas ni con la relación matemática subyacente a la secuencia.

Tabla 23. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 1 de la actividad de patrones geométricos.

5.1.1.2 Cuestión 2. Cálculo de un término próximo

La cuestión 2 (Figura 30) pide calcular el número de puntos que formarán la figura que ocupa la posición 20ª, un *término próximo* de la secuencia, y la justificación de cómo han obtenido dicho resultado.

Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...



1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas?
2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?

Figura 30. Cuestiones 1-2 de la actividad de patrones geométricos.

La demanda cognitiva de esta cuestión varía en función de la estrategia de resolución esperada. Consideramos dos estrategias de resolución diferentes:

- *Estrategia 1. Recuento.* Los estudiantes dibujan el 20º término y cuentan el número de elementos que lo forman. Se trata de la misma estrategia de resolución que hemos analizado en la cuestión 1, propia del nivel de *algoritmos sin conexiones*.
- *Estrategia 2. Relación matemática.* Los estudiantes identifican la relación matemática entre el valor del término y su posición y obtienen el valor del 20º término sumando los números del 1 al 20. Esta estrategia de resolución es propia del nivel de *algoritmos con conexiones*.

A continuación, en la Tabla 24, mostramos el análisis detallado de la estrategia 2 de resolución. Para evitar repeticiones y simplificar la lectura, no especificamos el análisis de la estrategia 1, ya que se trata de la misma estrategia analizada en la Tabla 23, excepto algunos detalles debidos al cambio de posición de la figura, pasando de la 5ª posición a la 20ª.

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
2/3. Algoritmos Sin / Con Conexiones	*Término próximo (n = 20)*	Procedimiento de resolución	*Estrategia 2.* (3.P) Se resuelven aplicando una estrategia funcional, utilizando una expresión aritmética para calcular el valor del término (sumar los 20 primeros números naturales). Los estudiantes únicamente pueden deducir y utilizar dicha expresión si comprenden la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor. Los términos obtenidos anteriormente en la actividad sirven como sugerencia para deducir qué algoritmo seguir.
		Finalidad	*Estrategia 2.* (3.F) Comprender y descubrir la relación matemática implícita entre la posición de los números triangulares y su valor, y aplicar el algoritmo aritmético de cálculo de los números triangulares, todo ello con el objetivo de profundizar en la comprensión del algoritmo general.
		Esfuerzo cognitivo	*Estrategia 2.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes utilizan una expresión aritmética para calcular el valor del término requerido, pero, para identificar dicha expresión, es necesario comprender la estructura matemática de la secuencia.
		Contenidos implícitos	*Estrategia 2.* (3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre el número triangular y su posición para deducir qué operación aritmética utilizar en la resolución (sumar los 20 primeros números naturales).
		Explicaciones	*Estrategia 2.* (3.X) Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación entre el valor del término 20º y su posición en la secuencia (posición 20ª).
		Representación de la solución	*Estrategia 2.* (3.X) Se suelen utilizar las representaciones geométrica y aritmética. Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre ambas representaciones, con el fin de deducir la relación matemática subyacente a la secuencia.

Tabla 24. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 2 de la actividad de patrones geométricos.

5.1.1.3 Cuestión 3. Cálculo de un término lejano

La cuestión 3 (Figura 31) pregunta por la existencia de una fórmula que permita calcular el número de puntos que forman la figura 100ª, un *término lejano* de la secuencia.

3. ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.

Figura 31. Cuestión 3 de la actividad de patrones geométricos.

La necesidad de establecer relaciones matemáticas generales para encontrar la respuesta correcta sitúa la actividad cognitiva de los estudiantes en el nivel de *algoritmos con conexiones*. Para resolver correctamente esta cuestión, los estudiantes deben descubrir y aplicar la relación funcional, pudiendo llegar a expresar la regla de cálculo de manera aritmética, pero no algebraica. Encontramos dos estrategias esperadas, ambas funcionales*:*

- *Estrategia 1. Generalización verbal.* Los estudiantes identifican que se resuelve sumando los 100 primeros números naturales, expresan verbalmente dicha relación matemática, subyacente a la secuencia, pero no son capaces de encontrar una estrategia de cálculo para obtener el valor del término 100º.
- *Estrategia 2. Relación funcional.* Los estudiantes identifican la relación matemática existente entre el valor de un término y su posición, expresan con valores numéricos dicha relación, subyacente a la secuencia, y utilizan un procedimiento aritmético para calcular el valor del término 100º sin sumar los 100 primeros números.

A continuación, en la Tabla 25, mostramos el análisis detallado de esta cuestión, diferenciando las dos estrategias de resolución.

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
3. Algoritmos Con Conexiones	*Término lejano (n = 100)*	Procedimiento de resolución	*Estrategia 1.* (3.P) Los términos obtenidos anteriormente sirven como sugerencia para identificar que la respuesta se obtiene sumando los 100 primeros números naturales. Los estudiantes únicamente pueden deducir esto si comprenden la relación matemática implícita entre el valor de un término y su posición. A pesar de comprender dicha relación, su verbalización no les permite calcular el resultado para el caso de la figura 100ª. *Estrategia 2.* (3.P) Los términos obtenidos anteriormente sirven como sugerencia para identificar el procedimiento aritmético que permite calcular el valor del término 100º sin sumar los 100 primeros números. Los estudiantes únicamente pueden deducir esto si comprenden la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor. La expresión aritmética utilizada representa la regla general para el cálculo de un término cualquiera, pero expresada con valores numéricos.
		Finalidad	*Estrategia 1.* (3.F) Comprender la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor y generalizar verbalmente dicha relación. *Estrategia 2.* (3.F) Comprender la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor, e identificar la relación funcional para aprender a generalizar.
		Esfuerzo cognitivo	*Estrategia 1.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes necesitan comprender la estructura matemática de la secuencia para deducir la expresión verbal que indica que el valor del término 100º se obtiene sumando los 100 primeros números. *Estrategia* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes necesitan comprender la estructura matemática de la secuencia para deducir y aplicar la expresión aritmética que permite calcular el valor del término 100º sin sumar los 100 primeros números.
		Contenidos implícitos	*Estrategia 1.* (3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre el número triangular y su posición para deducir la generalización verbal. *Estrategia 2.* (3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre el número triangular y su posición para deducir la relación funcional.
		Explicaciones	*Estrategia 1-2.* (1.X) El enunciado no pide dar explicaciones.

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
		Representación de la solución	*Estrategia 1.* (3.R) Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre las representaciones aritméticas y geométricas de los términos anteriores, con el fin de deducir la relación matemática subyacente a la secuencia. Se suelen utilizar las representaciones aritmética o verbal indicando mediante texto que se trata de suma los 100 primeros números (sin llegar a obtener un resultado ni una fórmula algebraica). *Estrategia 2.* (3.R) Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre las representaciones aritméticas y geométricas de los términos anteriores, con el fin de deducir la relación matemática subyacente a la secuencia. Se utiliza la representación aritmética para expresar la relación funcional y el valor del término 100º.

Tabla 25. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 3 de la actividad de patrones geométricos.

A diferencia de las cuestiones anteriores, observamos que esta cuestión no pide que los estudiantes justifiquen su resultado, por lo que la característica de la categoría de *explicaciones* no se corresponde al nivel *algoritmos con conexiones*. El análisis teórico del nivel de demanda cognitiva no sólo permite detectar el nivel de complejidad, sino que sirve como apoyo para mejorar el diseño de las actividades, indicando aquellas características que no coinciden con el nivel de demanda cognitiva de la cuestión.

5.1.1.4 Cuestión 4. Cálculo del término general

Por último, la cuarta cuestión (Figura 32) pide expresar de forma algebraica (para *n*) la fórmula de cálculo de los números triangulares, obteniéndose así el *término general*. Esto requiere explorar las relaciones matemáticas implícitas en la secuencia, y utilizar una *generalización algebraica* para expresar un procedimiento que permita calcular cualquier término de la secuencia a partir de su posición.

4. ¿Y si fuera la figura que ocupa la posición *n*?

Figura 32. Cuestión 4 de la actividad de patrones geométricos.

El análisis detallado de esta cuestión está reflejado en la Tabla 26, donde presentamos las seis categorías con sus características.

Nivel de D. C.	Tipo	Categorías	Características
4. Hacer matemáticas	*Término general (n-ésima posición)*	Procedimiento de resolución	(4.P) Se resuelve obteniendo la generalización para el término n-ésimo, lo cual requiere un pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de obtener el término general. Requiere que los estudiantes analicen los casos concretos y examinen posibles restricciones para obtener una fórmula general para el cálculo de cualquier número triangular.
		Finalidad	(4.F) Explorar, comprender y enunciar la relación general entre la posición de un término y su valor, con el fin de obtener una expresión algebraica del número triangular general.
		Esfuerzo cognitivo	(4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo. Se requiere un razonamiento abstracto mediante el que los estudiantes deben tomar decisiones sobre qué elementos componen la descripción general de los números triangulares y qué papel desempeñan, para obtener una relación algebraica que los represente.
		Contenidos implícitos	(4.C) Los estudiantes tienen que acceder a conocimientos de álgebra y a la experiencia obtenida con los casos concretos (inmediato, próximo y lejano) y usarlos adecuadamente durante la construcción de la expresión algebraica del número triangular general.
		Explicaciones	(4.X) Las explicaciones dadas se basan en la formulación y justificación de una expresión algebraica del término general que haga referencia a la relación implícita existente entre la posición de un número triangular cualquiera y su valor.
		Representación de la solución	(4.R) Se utiliza una expresión algebraica que represente un número triangular cualquiera y sintetice la relación entre la posición un número triangular y su valor.

Tabla 26. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 4 de la actividad de patrones geométricos.

5.1.1.5 Análisis teórico completo de la actividad

Para analizar la evolución del nivel teórico de demanda cognitiva de la actividad de patrones geométricos, hemos tomado las respuestas de un estudiante medio, capaz de contestar correctamente todas las cuestiones. Podemos identificar dos trayectorias distintas, que muestran la evolución del nivel de demanda cognitiva de la actividad y que se diferencian en la estrategia de resolución escogida para resolver la cuestión 2, ya que, a pesar de que en la cuestión 3 encontramos dos estrategias de resolución diferentes, ambas tienen el mismo nivel de demanda cognitiva, por lo que no influirán en la trayectoria. En la Tabla 27 mostramos las dos trayectorias teóricas. El eje vertical representa los cuatro niveles de demanda cognitiva (*memorización*, *algoritmos sin conexiones*, *algoritmos con conexiones* y *hacer matemáticas*) y el eje horizontal hace referencia a las cuatro cuestiones de la actividad de patrones geométricos.

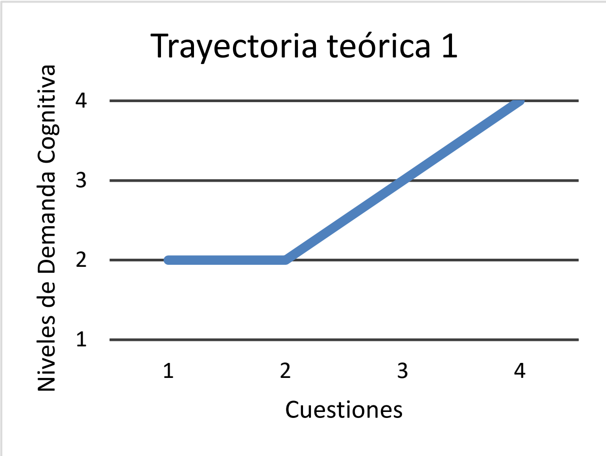
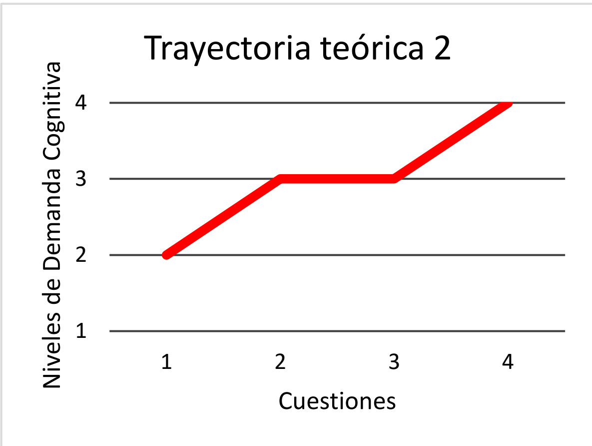
En la Figura 33 observamos la trayectoria de resolución de aquellos estudiantes que resuelven la cuestión 2 dibujando el 20º número triangular y contando el número de elementos que lo forman (*algoritmos sin conexiones).* Para resolver las siguientes cuestiones correctamente, los estudiantes tienen que aumentar el nivel de demanda cognitiva.	 Figura 33. Trayectoria teórica 1 de la actividad de patrones geométricos.
En la Figura 34 observamos la trayectoria de resolución de aquellos estudiantes que resuelven la cuestión 2 identificando la relación matemática y sumando los 20 primeros números (*algoritmos con conexiones).*	 Figura 34. Trayectoria teórica 2 de la actividad de patrones geométricos.

Tabla 27. Análisis teórico completo de la actividad de patrones geométricos.

Podemos observar que, en ambas trayectorias, se produce un incremento del nivel de demanda cognitiva. Esta evolución del nivel de demanda cognitiva muestra que la actividad es adecuada para atender las necesidades de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, permitiendo implementarla en un aula ordinaria, ya que los primeros apartados pueden ser resueltos con un nivel medio de demanda cognitiva, y dándoles la oportunidad a los estudiantes talentosos de emplear un nivel alto de demanda cognitiva.

5.1.2 *Análisis de respuestas de los estudiantes*

Tras el análisis teórico de la actividad, en esta sección vamos a mostrar un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, donde encontramos algunas estrategias de respuesta diferentes de las consideradas en el análisis teórico. Además, este análisis permite comprobar las diferentes estrategias de resolución utilizadas entre los grupos de estudiantes (ordinarios y talentosos).

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes, hemos comenzado identificando los diferentes tipos de estrategias de resolución surgidos en nuestra experimentación, haciendo uso de las descripciones del modelo de demanda cognitiva particularizado para tareas de patrones geométricos (Tabla 16). Una vez identificadas las diferentes estrategias utilizadas, hemos analizado su nivel de demanda cognitiva.

En la Tabla 28 describimos las estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes para resolver la actividad de patrones geométricos analizada, especificando de qué tipo son según la clasificación propuesta en el marco teórico (sección 3.4) y la abreviatura que utilizaremos para hacer referencia a dicha estrategia de manera abreviada a lo largo del análisis de respuestas. En esta tabla no incluimos un ejemplo de cada tipo de estrategia de resolución, ya que todos ellos aparecerán a lo largo del análisis de respuestas que mostramos seguidamente.

ABREVIATURA	DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN
DibujoyConteo (Recuento)	*Dibujo y Conteo.* Los estudiantes dibujan la figura correspondiente al número triangular pedido y cuentan la cantidad de elementos que lo forman.
DibujoyConteoIncorrect (Recuento)	*Dibujo y Conteo Incorrecto.* Los estudiantes dibujan la figura correspondiente al número triangular pedido y cuentan la cantidad de elementos que lo forman, pero cometen errores al dibujar la figura o al contar el número de puntos que la forman.
RelAritRecursiva (Proceso recursivo)	*Relación Aritmética Recursiva.* Los estudiantes identifican la relación aritmética recursiva que les permite calcular un término a partir del término anterior, sumando al anterior la posición del término desconocido.
SumaNumNa (Relación matemática)	*Suma Números Naturales.* Los estudiantes identifican que se trata de sumar los números naturales desde 1 hasta la posición del término pedido y obtienen un resultado correcto realizando las operaciones aritméticas.
SumaNumNatIncorrect (Relación matemática)	*Suma Números Naturales Incorrecta.* Los estudiantes identifican que se trata de sumar los números naturales desde 1 hasta la posición del término pedido, pero cometen errores realizando las operaciones aritméticas.
SumaParejasNum (Relación funcional)	*Suma Parejas Números.* Los estudiantes encuentran una estrategia que permite obtener el resultado de la suma de los números naturales sin realizar dicha operación aritmética. Observan que, al emparejar los números de la forma 0-20, 1-19, 2-18, etc., exceptuando el 10 que queda desparejado, el resultado de cada suma es 20, obteniendo 10 veces el mismo resultado. En definitiva, 10 veces 20 más el 10 que queda desparejado suman 210.
AproxReglaGeneral (Relación funcional)	*Aproximación Regla General.* Los estudiantes encuentran una estrategia que permite obtener el resultado de la suma de los números naturales sin realizar dicha operación aritmética. Observan que, se trata de multiplicar la posición del término por un número que va incrementando 0.5 y comprueban el resultado realizando las sumas. A pesar de que no identifican que dicho factor corresponde a la posición del término más una unidad dividido entre dos, los estudiantes se aproximan a la regla general.
RelVerb (Generalización verbal)	*Relación Verbal.* Los estudiantes expresan verbalmente que se trata de sumar los *n* primeros números naturales, pero no son capaces de obtener una fórmula general.
ReglaGeneral (Generalización algebraica)	*Regla General.* Los estudiantes obtienen una regla general que permite calcular cualquier término dada su posición.
RepitReglaGeneral (Generalización algebraica)	*Repiten Regla General.* Los estudiantes obtienen la expresión algebraica antes de lo previsto y se limitan a repetir la regla general expresada en la cuestión anterior.
Aleat	*Aleatoria.* Los estudiantes dan respuestas aleatorias incorrectas no justificadas.
NC	*No Contestan.* Los estudiantes dejan la actividad en blanco.

Tabla 28. Estrategias de resolución de la actividad de patrones geométricos.

Este análisis permite observar la riqueza de respuestas reales, ya que no todas estas estrategias de resolución fueron contempladas en el análisis teórico. El análisis teórico considera las resoluciones típicas de un estudiante medio que avanza en la comprensión de la relación matemática implícita a medida que va resolviendo las sucesivas cuestiones de la actividad. Por esta razón, en el análisis teórico no se consideran estrategias erróneas (*DibujoyConteoIncorrect, SumaNumNatIncorrect, Aleat* o *NC*), infrecuentes (RelAritRecursiva, *SumaParejasNum* o *AproxReglaGeneral)* o que suponen un avance en la comprensión de la relación matemática implícita más rápido o lento de lo normal (*RepitReglaGeneral*).

5.1.2.1 Cuestión 1

En la primera cuestión, los estudiantes deben calcular el término quinto de la secuencia de los números triangulares. El enunciado de la actividad proporciona las figuras de los cuatro primeros términos, y lo estudiantes deben obtener el número de puntos que forman el término siguiente.

Para resolver esta cuestión identificamos dos estrategias diferentes ambas propias del nivel *algoritmos sin conexiones*:

- *Dibujo y* conteo. (Recuento). Los estudiantes dibujaron la figura quinta y contaron el número de puntos que la forman. Mientras que el 77,8% de los estudiantes del grupo ordinario optó por esta estrategia, únicamente el 28,6% de los estudiantes talentosos hizo uso de ella.
- *Relación aritmética recursiva.* (Proceso recursivo). Los estudiantes sumaron 5 unidades al número de puntos de la cuarta figura para obtener el quinto término. Mientras que el 71,4% de los estudiantes talentosos optó por esta estrategia, únicamente el 22,2% de los estudiantes del grupo ordinario hizo uso de ella.

En la Tabla 29 podemos ver el análisis de las dos estrategias correctas utilizadas para resolver la cuestión 1.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

DibujoyConteo
Los estudiantes dibujan el término quinto de la secuencia de los números triangulares y cuentan el número de elementos que lo forman.

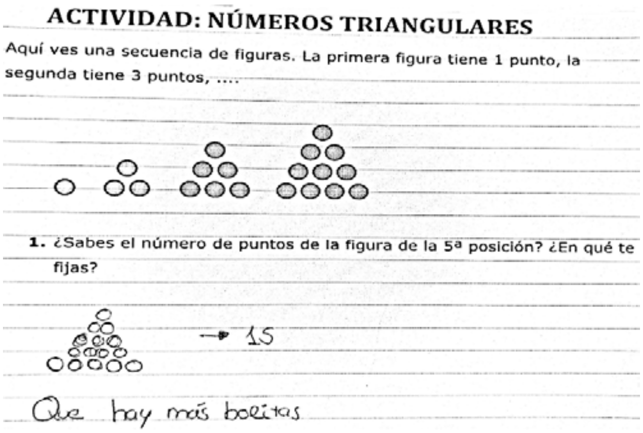
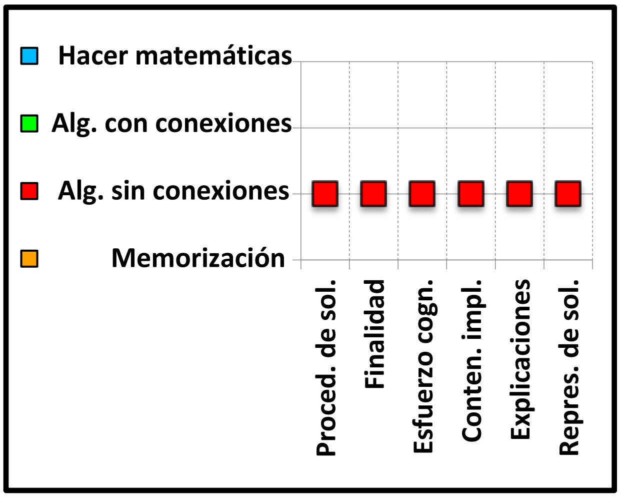
IES4:


Figura 35. Cuestión 1. Ejemplo de respuesta *DibujoyConteo.*

</td><td rowspan="2">

2.P. Se resuelve aplicando una estrategia aditiva que es evidente por el contexto del enunciado: los estudiantes calculan el valor del término 5º dibujando dicho término y contando el número de elementos que lo forman. Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para construir el siguiente triángulo y contar su cantidad de puntos.
2.F. Obtener respuestas correctas, pero sin necesidad de comprender la relación matemática subyacente en la secuencia. Los estudiantes pueden obtener el número correcto de elementos del término 5º dibujando, sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor del término y su posición (suma de los 5 primeros números naturales).
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad, ya que al tratarse del término 5º la representación resulta sencilla y los datos del enunciado muestran con claridad cómo debe continuarse la secuencia.
2.C. Existe una conexión implícita entre la estructura de la secuencia, basada en la relación visual o geométrica y el algoritmo de resolución. Los estudiantes pueden dibujar el término 5º y contar el número de elementos que los forman sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor del término y su posición.
2.X. Las explicaciones dadas se enfocan únicamente a describir la estrategia empleada.
2.R. Se utiliza la representación geométrica para obtener el resultado y la aritmética para dar la respuesta final.

</td></tr>
<tr><td>

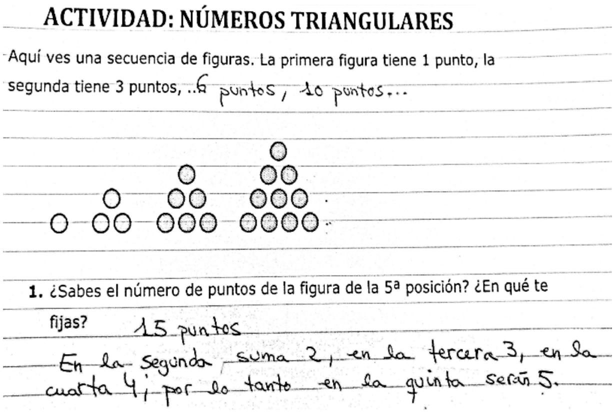


Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

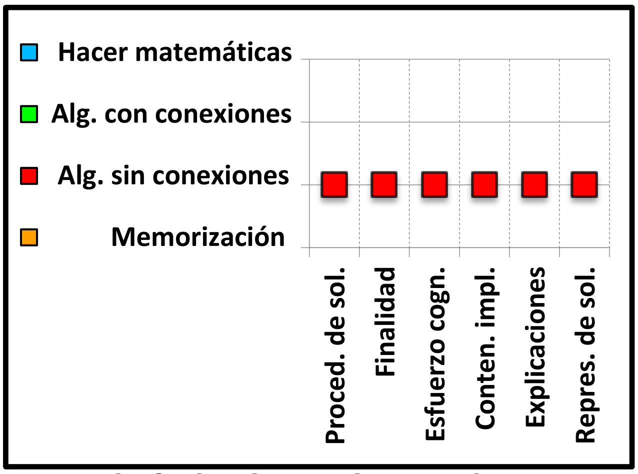
RelAritRecursiva
Los estudiantes identifican la relación aritmética recursiva que les permite calcular el quinto término sumando 5 unidades al término anterior.

IES11:

ACTIVIDAD: NÚMEROS TRIANGULARES
Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ..6 puntos, 10 puntos...
1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas? 15 puntos
En la segunda suma 2, en la tercera 3, en la cuarta 4, por lo tanto en la quinta serán 5.
Figura 36. Cuestión 1. Ejemplo de respuesta *RelAritRecursiva.*

</td><td rowspan="2">

2.P. Se resuelve aplicando una estrategia aditiva que es evidente por el contexto del enunciado: los estudiantes calculan el término 5º a partir del término anterior (le suman 5 unidades). Las figuras del enunciado sirven como datos para deducir la diferencia entre dos términos consecutivos.
2.F. Obtener una respuesta correcta, pero sin necesidad de comprender la relación matemática subyacente en la secuencia. Los estudiantes pueden obtener el número de elementos del término 5º sumando 5 unidades al término anterior, sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor de un término y su posición (suma de los 5 primeros números naturales).
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad, ya que al tratarse del término 5º, su cálculo resulta sencillo a partir del término anterior.
2.C. Existe una conexión implícita entre la estructura de la secuencia, basada en la relación visual o geométrica, y el algoritmo de resolución. Los estudiantes pueden calcular el término 5º sumando 5 unidades al término anterior sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor de un término y su posición.
2.X. Las explicaciones dadas se enfocan únicamente a describir la estrategia empleada.
2.R. Se utiliza la representación aritmética tanto para el cálculo como para dar la respuesta final.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

Tabla 29. Análisis de las respuestas correctas a la cuestión 1 de la actividad de patrones geométricos.

Tras realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes a la primera cuestión podemos concluir:

- Todos los estudiantes respondieron correctamente la primera cuestión.
- Utilizaron dos estrategias diferentes (*recuento* y *proceso iterativo*) para resolver la primera cuestión, ambas propias del nivel *algoritmos sin conexiones.*
- Podemos identificar diferencias en las estrategias escogidas por los estudiantes de la clase ordinaria y los estudiantes del grupo talentoso. Mientras que la mayoría de los estudiantes de la clase ordinaria (77,8%) optaron por dibujar la figura quinta y contar el número de puntos (*recuento*), estrategia considerada en el análisis teórico (Tabla 23), la mayoría de los estudiantes talentosos (71,4%) optó calcular el resultado utilizando el término anterior sin hacer uso de la representación geométrica (*proceso iterativo*).

5.1.2.2 **Cuestión 2**

A diferencia de la primera cuestión, no todos los estudiantes fueron capaces de obtener un resultado correcto al calcular el número de puntos que forman la figura 20ª. Podemos identificar cuatro estrategias correctas, con diferente nivel de demanda cognitiva:

- *Dibujo y* conteo. (Recuento). Los estudiantes dibujaron el término 20º de la secuencia de los números triangulares y contaron sus elementos, estrategia propia del nivel *algoritmos sin conexiones.* Mientras el 29,6% de los estudiantes de la clase ordinaria optó por utilizar esta estrategia, ninguno de los estudiantes talentosos hizo uso de ella para resolver la cuestión 2. No obstante, únicamente la mitad de los estudiantes del grupo ordinario que aplicaron esta estrategia obtuvieron un resultado correcto.
- *Suma de los 20 primeros números naturales.* (Relación matemática). Los estudiantes identificaron la relación aritmética consistente en sumar los 20 primeros números, sin necesidad de realizar el dibujo, haciendo uso del nivel *algoritmos con conexiones.* El 71% de los estudiantes talentosos y el 29,6% del grupo ordinario hicieron uso de esta estrategia para resolver la cuestión 2. No obstante, la mitad de los estudiantes del grupo

ordinario que llevaron a cabo esta estrategia, cometieron errores al realizar la suma.

- *Suma de parejas números.* (Relación funcional). Una de las parejas del grupo ordinario encontró una estrategia para obtener el resultado de la suma de los 20 primeros números sin realizar operación aritmética. Observaron que, al emparejar los números de la forma 0-20, 1-19, 2-18, etc., exceptuando el 10 que queda desparejado, el resultado de cada suma es 20, obteniendo 10 veces el mismo resultado. En definitiva, 10 veces 20 más el 10 que queda desparejado suman 210. Los estudiantes fueron capaces de establecer relaciones para hallar un algoritmo que les permitiera obtener el resultado de una manera óptima, utilizando el nivel de *algoritmos con conexiones*.
- *Aproximación a la regla* general. (Relación funcional). Por último, una de las parejas de los estudiantes talentosos encontró una aproximación aritmética de la regla general. Los estudiantes observaron que se puede multiplicar la posición del término por un número que se incrementa en 0.5 al aplicarlo al siguiente término. Para obtener esta aproximación los estudiantes establecieron relaciones para encontrar una estrategia óptima haciendo uso del nivel *algoritmos con conexiones.*

En la Tabla 30 podemos ver el análisis de estas cuatro estrategias correctas utilizadas para resolver la cuestión 2. Para evitar repeticiones, cuando la descripción de alguna característica sea la misma que la de una estrategia de resolución analizada anteriormente, no redactaremos de nuevo dicha característica, indicando la estrategia de resolución anterior y la tabla en la que se encuentra su descripción. Por ejemplo, la estrategia consistente en dibujar el término 20º de la secuencia de los números triangulares y contar su número de elementos (*DibujoyConteo)* es la misma que la utilizada para el término 5º, con las variaciones causadas por el cambio de posición del término requerido, por ello, algunas características, como las correspondientes a *explicaciones* y *representación de la solución* (2.X y 2.R) son las mismas en el análisis de la estrategia anterior.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

DibujoyConteo
Los estudiantes dibujan el término 20º de la secuencia de los números triangulares y cuentan sus elementos.

IES10:

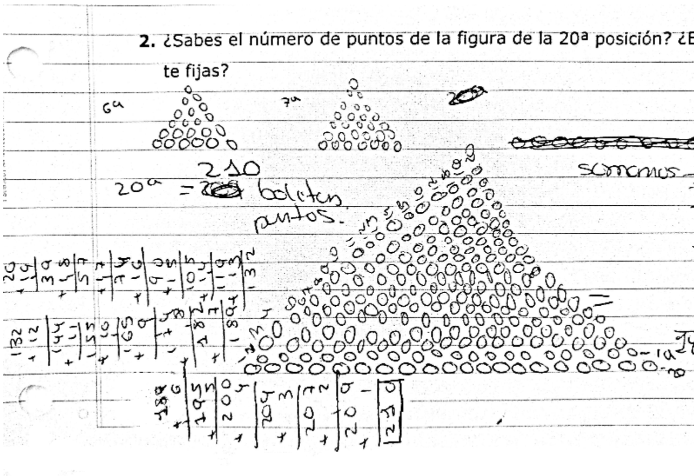
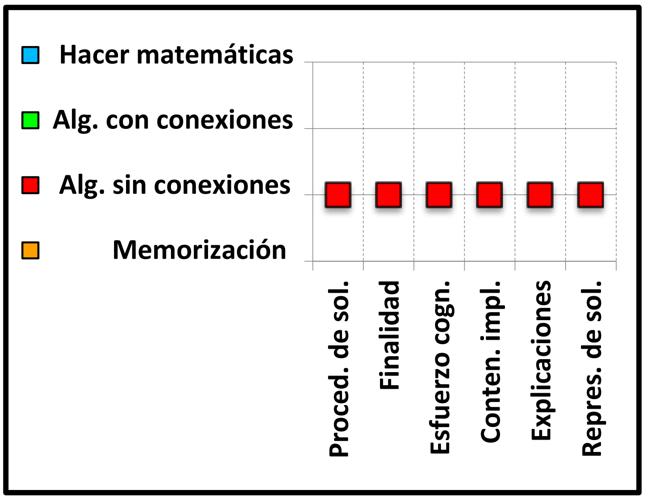


Figura 37. Cuestión 2. Ejemplo de respuesta *DibujoyConteo.*

</td><td rowspan="2">

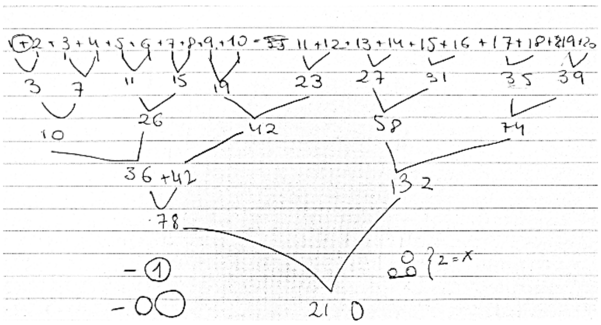
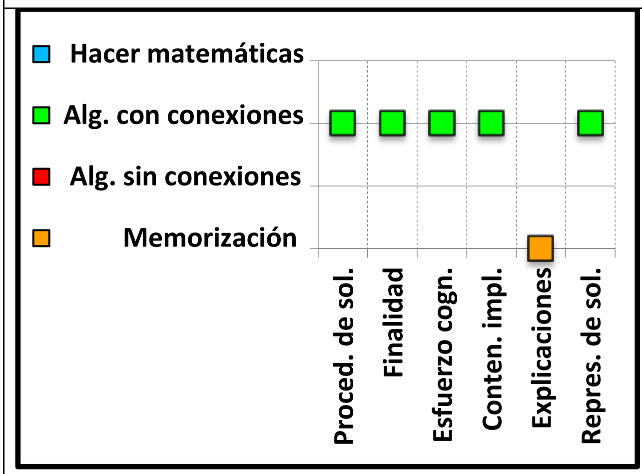
2.P. Se resuelve aplicando una estrategia aditiva que es evidente por el contexto del enunciado. Los estudiantes calculan el valor del término 20º dibujando dicho término y contando sus elementos.
2.F. Obtener una respuesta correcta, dibujando el término 20º y contando el número de elementos que lo forman, pero sin necesidad de comprender la relación entre el valor del término y su posición (suma de los 20 primeros números naturales).
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo resolver la actividad, ya que se utiliza la misma estrategia que en la cuestión anterior (término inmediato).
2.C. Existe una conexión implícita entre la estructura aditiva de la secuencia, basada en la relación visual o geométrica y el algoritmo de resolución. Los estudiantes pueden dibujar el término 20º y contar el número de elementos que lo forman sin necesidad de comprender la relación matemática entre el valor del término y su posición.
2.X. *DibujoyConteo,* Tabla 29.
2.R. *DibujoyConteo,* Tabla 29.

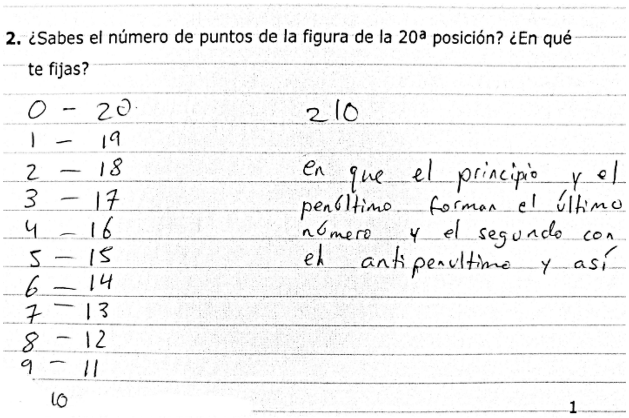
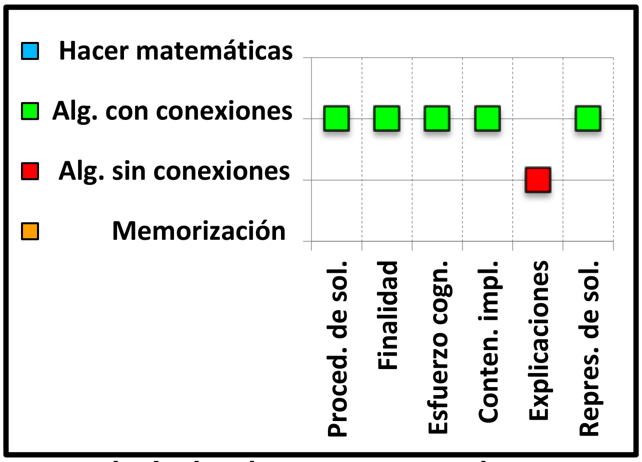
</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

Descripción	**Características**
SumaNumNat Los estudiantes identifican que se trata de sumar los 20 primeros números naturales y obtienen un resultado correcto realizando las operaciones aritméticas. AVAST3:  Figura 38. Cuestión 2. Ejemplo de respuesta *SumaNumNat.*  **Nivel *Algoritmos con conexiones***	**3.P.** Se resuelve aplicando una estrategia funcional, utilizando una expresión aritmética para calcular el valor del término (suma de los 20 primeros números naturales). Los estudiantes únicamente pueden deducir y utilizar dicha expresión si comprenden la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor. Los términos obtenidos anteriormente en la actividad sirven como sugerencia para deducir la relación matemática implícita. **3.F.** Comprender la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor, para aprender a generalizar. **3.E.** Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes utilizan una expresión aritmética para calcular el valor del término requerido, pero, para identificar dicha expresión, es necesario comprender la estructura matemática de la secuencia. **3.C.** Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre el número triangular y su posición para deducir qué operación aritmética utilizar en la resolución (sumar los 20 primeros números naturales). **1.X.** No dan explicaciones sobre cómo se ha obtenido el resultado, a pesar de que el enunciado lo pide. **3.R.** Se suelen utilizar las representaciones geométrica y aritmética. Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre ambas representaciones, con el fin de deducir la relación matemática subyacente a la secuencia.

Descripción	Características
SumaParejasNum Los estudiantes observan que, al emparejar los números de la forma 0-20, 1-19, 2-18, etc., exceptuando el 10 que queda desparejado, el resultado de cada suma es 20, obteniendo 10 veces el mismo resultado. En definitiva, 10 veces 20 más el 10 que queda desparejado suman 210. IES6:  **2.** ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas? 0 - 20 210 1 - 19 2 - 18 en que el principio y el 3 - 17 penúltimo forman el último 4 - 16 número y el segundo con 5 - 15 el antipenúltimo y así 6 - 14 7 - 13 8 - 12 9 - 11 10 1 Figura 39. Cuestión 2. Ejemplo de respuesta *SumaParejasNum.*	**3.P.** Se resuelve aplicando una estrategia funcional consistente en emparejar los números de la forma 0-20, 1-19, 2-18, etc., exceptuando el 10 que queda desparejado, y observando que el resultado de cada suma es 20, obteniendo 10 veces el mismo resultado. En definitiva, 10 veces 20 más el 10 que queda desparejado suman 210. Los estudiantes únicamente pueden deducir y utilizar dicho algoritmo explorando los datos obtenidos y comprendiendo las relaciones entre ellos. **3.F.** Comprender la relación matemática implícita entre la posición de un término y su valor, e identificar la relación funcional para aprender a generalizar. **3.E.** Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes utilizan una expresión aritmética para calcular el valor del término requerido, pero, para identificar la relación funcional es necesario explorar los datos obtenidos y comprender las relaciones entre ellos. **3.C.** Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación implícita existente entre el número triangular y su posición para deducir la relación funcional. **2.X.** Dan explicaciones que se enfocan a describir el algoritmo empleado. **3.R.** *SumaNumNat*, Tabla 30.
 Nivel ***Algoritmos con conexiones***	

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

AproxReglaGeneral
Los estudiantes encuentran una estrategia que permite obtener el resultado de la suma de los 20 primeros números naturales sin realizar dicha operación aritmética. Observan que se trata de multiplicar la posición del término por un número que va incrementando 0.5 y comprueban el resultado realizando las sumas.

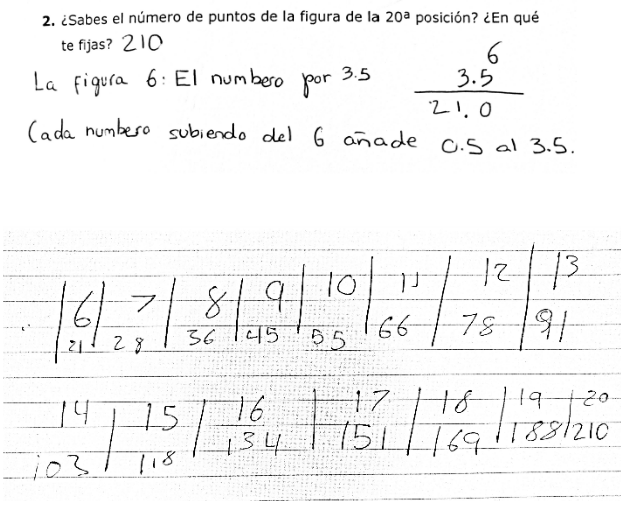
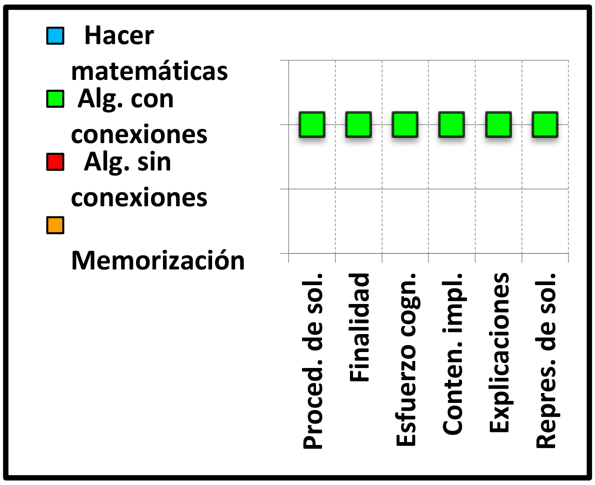
AVAST1:


Figura 40. Cuestión 2. Ejemplo de respuesta *AproxReglaGeneral.*
</td><td rowspan="2">

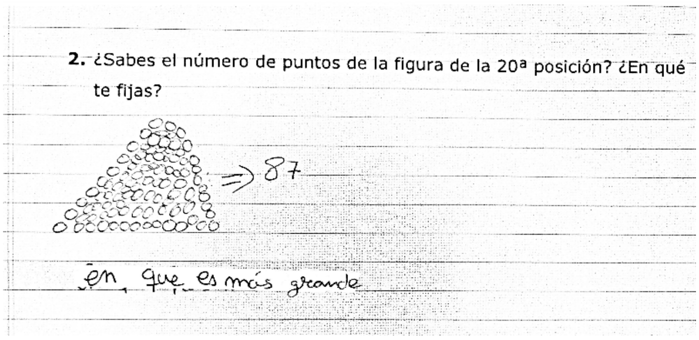
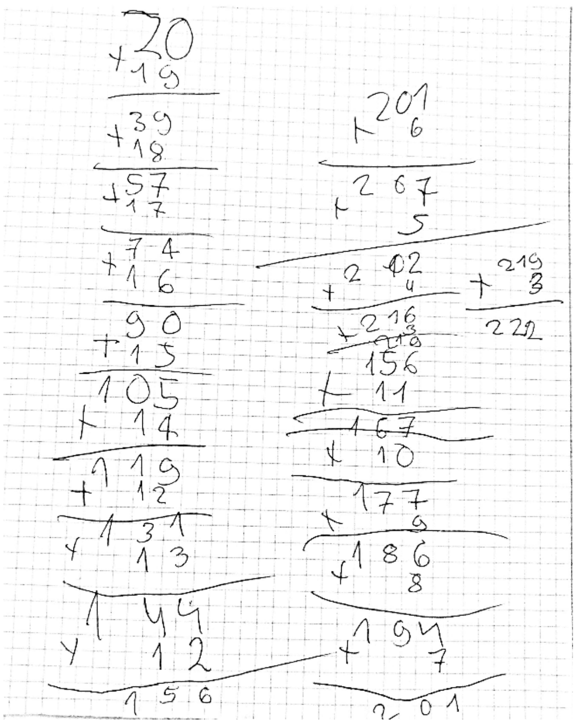
3.P. Se resuelve aplicando una estrategia funcional consistente en multiplicar la posición del término, 20, por 10.5 (número que obtienen sabiendo que en el caso de 6 es 3.5 e incrementan 0.5 por cada término). Los estudiantes únicamente pueden deducir y utilizar dicho algoritmo si establecen relaciones entre los resultados obtenidos en los términos anteriores para encontrar una estrategia óptima que evite realizar la suma de los 20 primeros números.
3.F. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
3.E. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
3.C. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
3.X. Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación entre el valor del término 20º y su posición en la secuencia.
3.R. *SumaNumNat*, Tabla 30.
</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos con conexiones*
</td></tr>
</table>

Tabla 30. Análisis de las respuestas correctas a la cuestión 2 de la actividad de patrones geométricos.

Cabe destacar que el 18,5% de los estudiantes de la clase ordinaria no contestó a esta pregunta. Además, el 44,4% de estos estudiantes obtuvo un resultado erróneo por problemas en los cálculos aritméticos, a pesar de utilizar estrategias correctas. El concepto de *demanda cognitiva* hace referencia al nivel de pensamiento requerido por los estudiantes para resolver con éxito una tarea matemática, por esta razón, en el análisis de respuestas no asignamos ningún nivel de demanda cognitiva a las estrategias de resolución incorrectas. En la Tabla 31 mostramos las respuestas incorrectas a la cuestión 2:

Descripción	
DibujoyConteoIncorrect Cometen errores al dibujar la figura 20ª o al contar el número de puntos que la forman. Los estudiantes no identifican la estructura matemática implícita ni la estructura geométrica explícita.	IES4:  Figura 41. Cuestión 2. Ejemplo de respuesta *DibujoyConteoIncorrect.*
SumaNumNatIncorrect Cometen errores al sumar los 20 primeros números naturales. el estudiante Los estudiantes comprenden relación funcional subyacente, pero cometen errores operatorios.	IES1:  Figura 42. Cuestión 2. Ejemplo de respuesta *SumaNumNatIncorrect.*

Descripción
Aleatoria Algunos estudiantes dan respuestas aleatorias incorrectas no justificadas.
NC. No contestan.

Tabla 31. Análisis de las respuestas incorrectas a la cuestión 2 de la actividad de patrones geométricos.

En conclusión, al analizar las respuestas de los estudiantes al responder la segunda cuestión nos encontramos ante las siguientes situaciones:

- Al incrementar la complejidad de la cuestión, las diferencias entre el grupo ordinario y los estudiantes talentosos son más notorias. Mientras todos los estudiantes talentosos fueron capaces de responder correctamente la segunda cuestión, únicamente el 37% del grupo ordinario dio un resultado correcto, utilizando estrategias aditivas (14,8%) y funcionales (22,2%).
- Además, todos los estudiantes talentosos identificaron la relación entre el término y su número de elementos (suma de los 20 primeros números naturales). Sin embargo, únicamente el 37% de los estudiantes del grupo ordinario identificó dicha relación, y algunos de ellos (14,8%) cometieron errores al obtener el resultado. El 29,6% de este grupo continuó utilizando la estrategia basada en la representación gráfica de la figura 20ª, el 18,5% se limitó a no contestar y el 14,8% respondió de manera aleatoria.
- Por otra parte, al realizar el análisis de respuestas, hemos encontrado dos estrategias de un nivel de demanda cognitiva superior al esperado, cada una de ellas procedente de uno de los grupos que participaron en la experimentación (de Avast y del IES). Esto confirma la importancia de tener en cuenta el análisis de respuestas a la hora de evaluar el nivel de demanda cognitiva de una tarea. Además, este hecho nos hace plantearnos la posibilidad de utilizar problemas de patrones geométricos para identificar estudiantes con mayores capacidades dentro de un grupo ordinario.

5.1.2.3 <u>**Cuestión 3**</u>

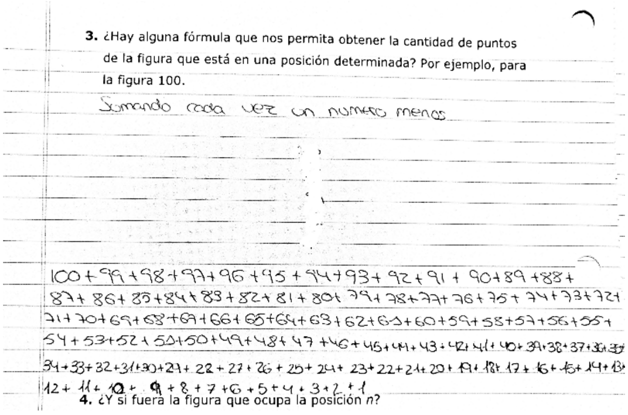
En la tercera cuestión, los estudiantes deben calcular el número de puntos que forman la figura 100ª, un término lejano. El porcentaje de estudiantes que no contestaron crece de forma notable en esta cuestión (42,8% de los estudiantes talentosos y 77,8% del grupo ordinario). Además, distinguimos tres estrategias correctas utilizadas por los estudiantes para resolver la cuestión.

- *Relación verbal.* (Generalización verbal). Los estudiantes indicaron que se trata de sumar los 100 primeros números sin realizar la operación correspondiente u operando con errores (28,6% de los estudiantes talentosos y 14,8% del grupo ordinario). Esta estrategia corresponde al nivel *algoritmos con conexiones*.
- *Suma de parejas números.* (Relación funcional). La pareja de estudiantes del grupo ordinario (IES6) que había resuelto la cuestión anterior emparejando los números, utilizó esta misma estrategia para obtener la suma de los 100 primeros números naturales, usando de nuevo el nivel de *algoritmos con conexiones.*
- *Regla general* (Generalización algebraica). La pareja de estudiantes talentosos que había obtenido una aproximación aritmética de la regla general (AVAST1), identificó la regla general, la expresó algebraicamente y la aplicó para resolver el caso concreto de 100, utilizando un nivel superior de lo esperado, *hacer matemáticas.*

En la Tabla 32 podemos ver el análisis de las estrategias correctas utilizadas para resolver la cuestión 3.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

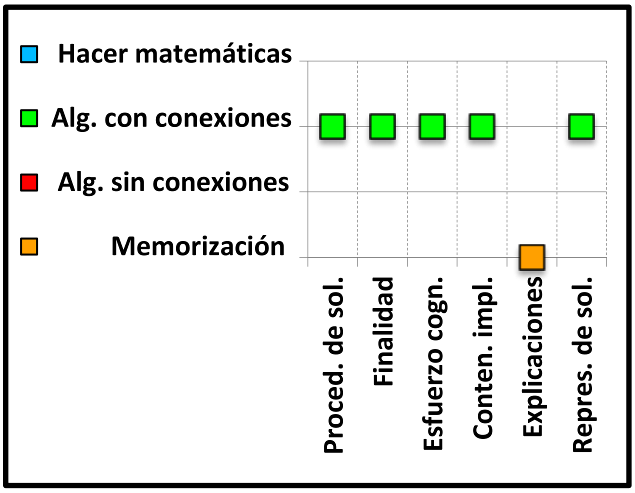
SumaNumNat
Los estudiantes identifican que se trata de sumar los 100 primeros números naturales e indican la suma, pero sin realizar dicha operación.

IES10:

3. ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.
Sumando cada vez un numero menos
100+99+98+97+96+95+94+93+92+91+90+89+88+
87+86+85+84+83+82+81+80+79+78+77+76+75+74+73+72+
71+70+69+68+67+66+65+64+63+62+61+60+59+58+57+56+55+
54+53+52+51+50+49+48+47+46+45+44+43+42+41+40+39+38+37+36+35+
34+33+32+31+30+29+28+27+26+25+24+23+22+21+20+19+18+17+16+15+14+13+
12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1
4. ¿Y si fuera la figura que ocupa la posición *n*?
Figura 43. Cuestión 3. Ejemplo de respuesta *SumaNumNat.*

</td><td rowspan="2">

3.P. *SumaNumNat*, Tabla 30.
3.F. *SumaNumNat*, Tabla 30.
3.E. *SumaNumNat*, Tabla 30.
3.C. *SumaNumNat*, Tabla 30.
1.X. No dan explicaciones sobre cómo se ha obtenido el resultado, ya que el enunciado no lo pide.
3.R. *SumaNumNat*, Tabla 30.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos con conexiones*

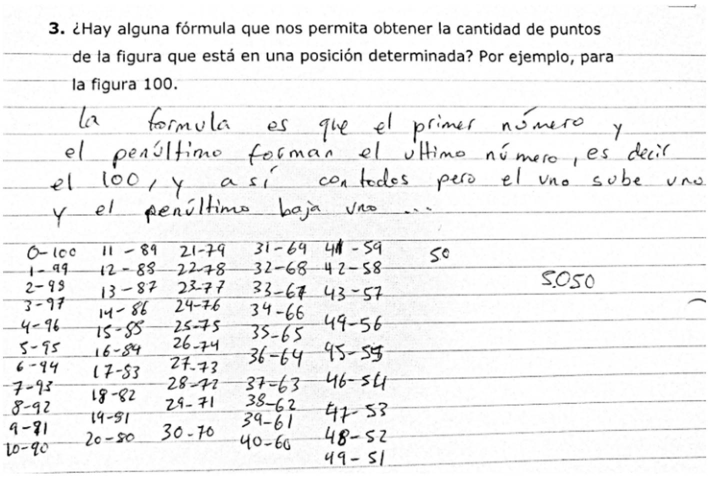
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

SumaParejasNum

Los estudiantes utilizan la estrategia consistente en obtener el resultado de la suma de los 100 primeros números naturales sin realizar dicha operación aritmética. Observan que, al emparejar los números de la forma 0-100, 1-99, 2-98, etc., exceptuando el 50 que queda desparejado, el resultado de cada suma es 100, obteniendo 50 veces el mismo resultado. En definitiva, 50 veces 100 más el 50 que queda desparejado suman 5050. Los estudiantes no alcanzan un razonamiento complejo (*hacer matemáticas*), ya que no son capaces de abstraer y generalizar la relación entre los números de la pareja, probablemente porque no son capaces de usar lenguaje algebraico.

IES6:



3. ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.

la formula es que el primer número y el penúltimo forman el ultimo número, es decir el 100, y así con todos pero el uno sube uno y el penúltimo baja uno ...

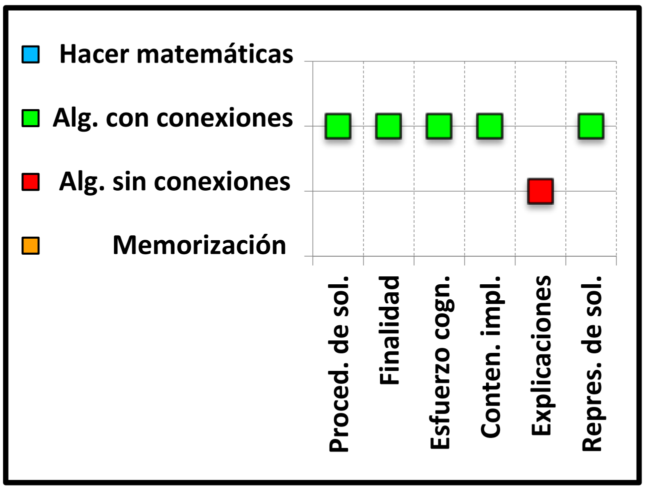
0-100 1-99 2-98 3-97 4-96 5-95 6-94 7-93 8-92 9-81 10-90
11-89 12-88 13-87 14-86 15-85 16-84 17-83 18-82 19-81 20-80
21-79 22-78 23-77 24-76 25-75 26-74 27-73 28-72 29-71 30-70
31-69 32-68 33-67 34-66 35-65 36-64 37-63 38-62 39-61 40-60
41-59 42-58 43-57 44-56 45-55 46-54 47-53 48-52 49-51
50
5050

Figura 44. Cuestión 3. Ejemplo de respuesta *SumaParejasNum.*

</td><td rowspan="2">

3.P. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
3.F. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
3.E. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
3.C. *SumaParejasNum*, Tabla 30.
2.X. A pesar de que el enunciado no lo pide, dan explicaciones que se enfocan a describir el algoritmo empleado.
3.R. *SumaNumNat*, Tabla 30.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos con conexiones*

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

ReglaGeneral
Los estudiantes observan que multiplicar por 0.5 equivale a dividir entre dos y que siempre multiplican el número de la figura por su siguiente. Utilizando el lenguaje algebraico, formalizan dicho resultado y obtienen la regla general que permite calcular cualquier término dada su posición. Por último, aplican la regla general para calcular el término 100º.

AVAST1:

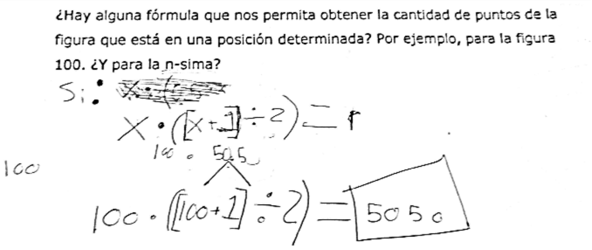



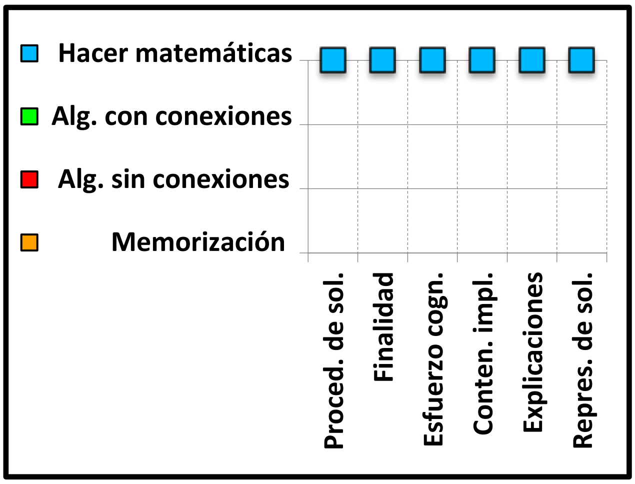
Figura 45. Cuestión 3. Ejemplo de respuesta *ReglaGeneral*.</td>
<td rowspan="2">**4.P.** Se resuelve obteniendo la generalización para el término n-ésimo, que requiere un pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de obtener el término general. Los estudiantes deben analizar los casos concretos y examinar posibles restricciones para obtener una fórmula general para el cálculo de cualquier término de la secuencia.
4.F. Explorar, comprender y enunciar la relación general entre la posición de un término y su valor, con el fin de obtener la expresión del término general.
4.E. Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo. Se requiere un razonamiento abstracto mediante el que los estudiantes deben tomar decisiones sobre qué elementos deben representarse en el término general y qué papel desempeñan, para obtener una relación algebraica que permita calcular el término general.
4.C. Los estudiantes tienen que acceder a conocimientos de álgebra y a la experiencia obtenida en las cuestiones resueltas antes y usarlos adecuadamente durante la construcción de la expresión algebraica del número triangular general.
4.X. A pesar de que el enunciado no lo pide, los estudiantes dan explicaciones orales basadas en la formulación de la expresión del término general que hace referencia a la relación implícita existente entre la posición de un término cualquiera y su valor.
4.R. Se utiliza la representación algebraica para expresar una relación capaz de calcular el valor del término general.</td></tr>
<tr><td>
Nivel *Hacer matemáticas*</td></tr>
</table>

Tabla 32. Análisis de las respuestas correctas a la cuestión 3 de la actividad de patrones geométricos.

Como hemos comentado anteriormente, un alto porcentaje de los estudiantes de ambos grupos no contestaron la cuestión 3. Además, encontramos algunos estudiantes que trataron de calcular la suma de los 100 primeros números, pero cometieron errores realizando las operaciones aritméticas. Al igual que en la cuestión 2, algunos estudiantes contestaron de manera aleatoria dando un resultado no justificado. En la Tabla 33 mostramos algunos ejemplos de las respuestas incorrectas a la cuestión 3:

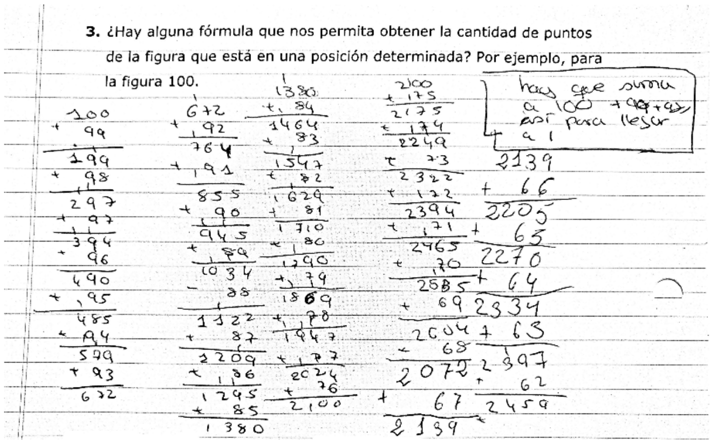
Descripción	
SumaNumNatIncorrect Cometen errores al sumar los 100 primeros números naturales.	IES12:  Figura 46. Cuestión 3. Ejemplo de respuesta *SumaNumNatIncorrect.*
Aleatoria Algunos estudiantes dan respuestas aleatorias incorrectas no justificadas.	
NC. No contestan.	

Tabla 33. Análisis de las respuestas incorrectas a la cuestión 3 de la actividad de patrones geométricos.

En definitiva, al analizar las respuestas correctas de los estudiantes al responder la cuestión 3 encontramos los siguientes casos:

- Estudiantes (28,6% de los estudiantes talentosos y 14,8% del grupo ordinario) que utilizan estrategias funcionales basadas en expresar o tratar de calcular la suma de los 100 primeros números (*generalización verbal* o *relación matemática*).
- Una pareja de estudiantes (7,4% del grupo ordinario) que utilizan estrategias funcionales basadas en la obtención de un método algorítmico para calcular el resultado de la suma de los 100 números sin realizar dicha operación (*relación funcional*).

- Una pareja de estudiantes (28,6% de los estudiantes talentosos) que obtienen una expresión algebraica de la regla general, estrategia de un nivel superior al esperado (*generalización algebraica*). Esta respuesta muestra cómo, dentro del grupo de estudiantes talentosos, podemos encontrar algunos con mayores capacidades.

5.1.2.4 **Cuestión 4**

Por último, la cuarta cuestión pide a los estudiantes que obtengan una fórmula general que permita calcular el número de puntos que forman la figura n-ésima. Esta cuestión fue resuelta por un porcentaje pequeño de estudiantes (57,2% del grupo talentoso y 7,4% del grupo ordinario). Entre las resoluciones obtenidas, analizadas en la Tabla 34, podemos diferenciar tres maneras distintas de actuar:

- *Relación* verbal. (Generalización verbal). Los estudiantes expresaron de manera general que se trata de sumar los *n* primeros números naturales, haciendo uso del nivel de *algoritmos con conexiones.* El 28,6% de los estudiantes talentosos identificó la relación entre el valor de un término y su posición, pero no fue capaz de encontrar la fórmula general que permitiera obtener cualquier término.
- *Regla general* (Generalización algebraica). La pareja de estudiantes (IES6) del grupo ordinario que había encontrado un método para calcular la suma de los números naturales sin realizar dicha operación fue capaz de generalizar dicho método y expresarlo en forma de regla general algebraica, haciendo uso del nivel *hacer matemáticas.*
- *Repetición de la regla* general. (Generalización algebraica). Los estudiantes talentosos (AVAST1) que habían obtenido en la cuestión 2 la fórmula algebraica haciendo uso del nivel *hacer matemáticas*, se limitaron a repetirla escribiendo, como variable independiente, la letra "n" en vez de la "x". En este caso, su respuesta ya no requiere un nivel alto de complejidad, ya que se trata de repetir el resultado dado previamente, por lo que la complejidad de la cuestión disminuye al nivel de *memorización.* No obstante, el uso del lenguaje algebraico para dar la respuesta provoca que las características correspondientes a *explicaciones* y *representación de la solución* sean propias del nivel *hacer matemáticas*.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RelVerb
Los estudiantes expresan verbalmente que se trata de sumar los *n* primeros números naturales, pero no son capaces de obtener una fórmula general.

AVAST3:

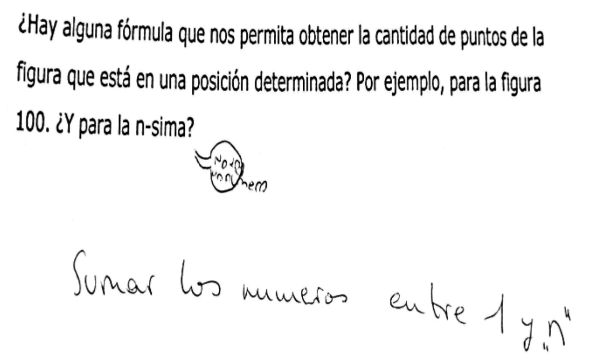
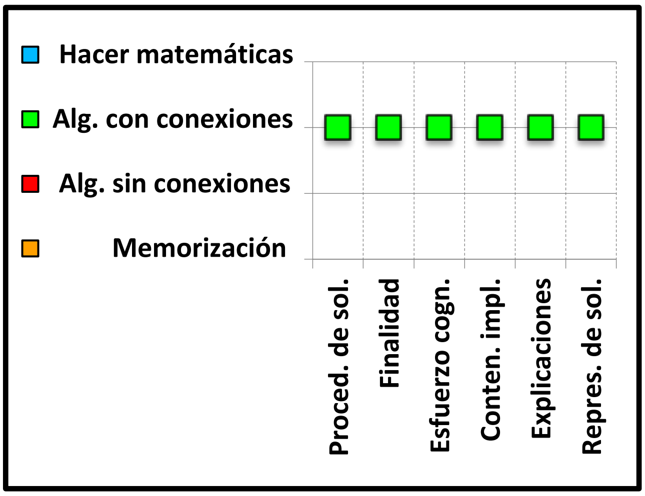


Figura 47. Cuestión 4. Ejemplo de respuesta RelVerb.

</td><td rowspan="2">

3.P. Se resuelve expresando verbalmente el algoritmo general consistente en sumar los *n* primeros números naturales. Para poder aplicar este algoritmo, es necesario que los estudiantes establezcan relaciones entre los resultados obtenidos, para identificar la relación entre el término y su posición.
3.F. Expresar verbalmente el algoritmo general con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de la relación implícita existente entre la posición de un término y su número de elementos.
3.E. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes expresan de manera verbal la relación general, para identificar dicha expresión, es necesario comprender la estructura matemática de la secuencia.
3.C. Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación entre la posición del término y su valor.
3.X. El enunciado no pide explícitamente explicaciones. Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación entre las representaciones geométrica y aritmética, utilizando casos concretos (posiciones particulares de la secuencia).
3.R. Se utiliza la representación verbal. Para resolver el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica y aritmética utilizando la relación entre la posición de un término y su número de elementos.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos con conexiones*

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

ReglaGeneral

Los estudiantes observan que se trata de multiplicar el resultado de las sumas que equivale al número de términos, por la cantidad de parejas (la mitad del número de términos) y sumar a este resultado el término de en medio que queda desparejado. Utilizando el lenguaje algebraico, formalizan dicho resultado y obtienen la regla general que permite calcular cualquier término dada su posición y la expresan algebraicamente.

IES6:

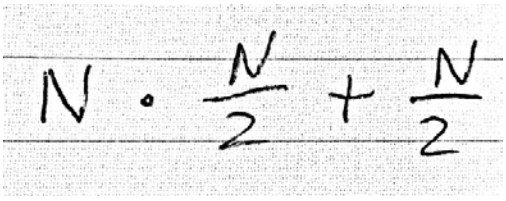
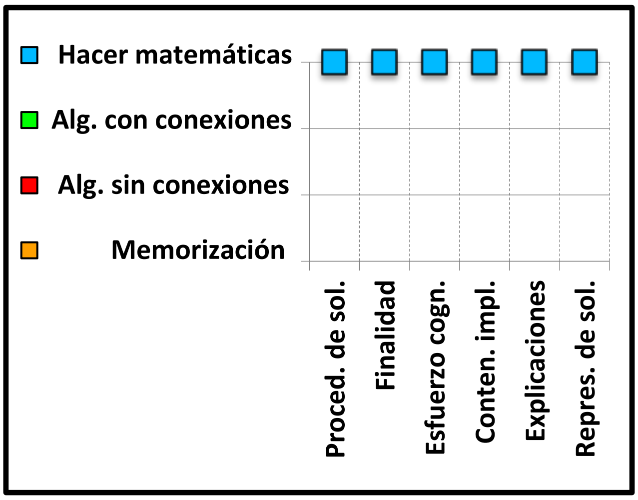


Figura 48. Cuestión 4. Ejemplo de respuesta *ReglaGeneral.*

</td><td rowspan="2">

4.P. *ReglaGeneral*, Tabla 32.
4.F. *ReglaGeneral*, Tabla 32.
4.E. *ReglaGeneral*, Tabla 32.
4.C. *ReglaGeneral*, Tabla 32.
4.X. *ReglaGeneral*, Tabla 32.
4.R. *ReglaGeneral*, Tabla 32.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Hacer matemáticas*

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RepitReglaGeneral
Los estudiantes observan que la variable “x” representa el número de términos y se limitan a repetir la fórmula obtenida en la cuestión 3 escribiendo, como variable independiente, la letra "n" en vez de la "x".

AVAST1:

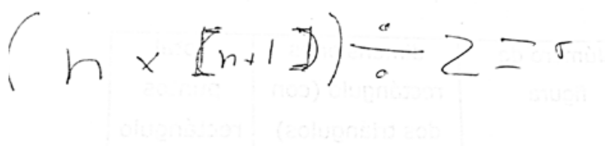
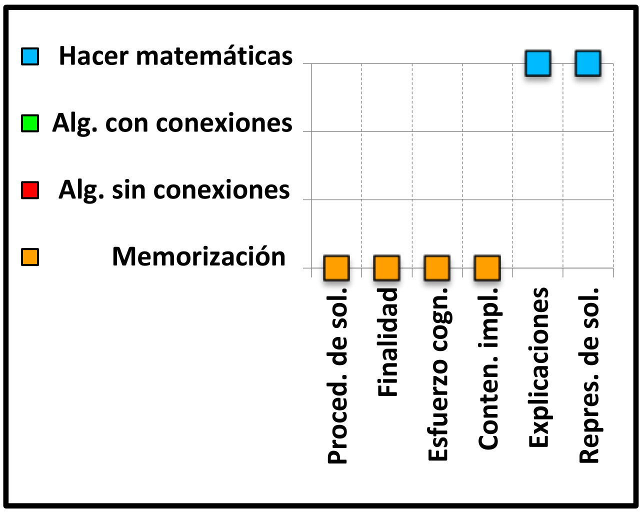



Figura 49. Cuestión 4. Ejemplo de respuesta Repit*RelGeneral.*

</td><td rowspan="2">

1.P. Se resuelve repitiendo la fórmula obtenida en la cuestión 3 escribiendo, como variable independiente, la letra "n" en vez de la "x".
1.F. Reproducir la fórmula previamente encontrada.
1.E. Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo. Suponen la reproducción prácticamente exacta de una expresión algebraica utilizada previamente.
1.C. No establecen nuevas conexiones.
4.X. *ReglaGeneral*, Tabla 32.
4.R. *ReglaGeneral*, Tabla 32.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Memorización*

</td></tr>
</table>

Tabla 34. Análisis de las respuestas correctas a la cuestión 4 de la actividad de patrones geométricos.

En definitiva, al analizar las respuestas correctas de los estudiantes al responder la cuarta cuestión nos encontramos con los siguientes resultados:

- Mientras el 57,2% de los estudiantes talentosos fue capaz de dar una respuesta correcta a la cuestión 4, únicamente una pareja del grupo ordinario (7,4% del grupo ordinario) dio un resultado correcto.
- El 28,6% de los estudiantes talentosos expresó de manera general la relación consistente en sumar los *n* primeros números naturales, aunque no obtuvo la fórmula algebraica para calcular cualquier término de la secuencia (*generalización verbal*). A pesar de que algunos de los estudiantes del grupo ordinario (14,8% del grupo ordinario) habían identificado dicha relación en la cuestión 3, no fueron capaces de dar una respuesta verbal generalizada.
- Una pareja del grupo ordinario (7,4% del grupo ordinario) obtuvo la fórmula general algebraica, evidenciando la diversidad de capacidades dentro de un aula ordinaria.
- Una pareja de los estudiantes talentosos (28,6% de los estudiantes talentosos) halló la fórmula algebraica en la cuestión anterior, por lo que esta vez se limitaron a repetir la respuesta utilizada previamente, disminuyendo el nivel de demanda cognitiva necesario para responder y dando valor al análisis de respuestas de los estudiantes como metodología para identificar diferentes grados de talento matemático.

5.2 Geometría plana

La actividad propuesta de geometría plana se compone de tres cuestiones, en las cuales el nivel de complejidad va incrementando conforme los estudiantes avanzan, con el objetivo de que lleguen a deducir y comprender la fórmula que permite calcular el número de diagonales de cualquier polígono. Para alcanzar dicho objetivo, los estudiantes comenzarán utilizando de manera directa el concepto de diagonal en polígonos sencillos (del triángulo al pentágono). Una vez realizado el primer contacto, la segunda cuestión pretende que los estudiantes identifiquen la relación entre el número de lados y el número de diagonales desde un único vértice, observando y organizando los datos de polígonos concretos (del triángulo al octógono). En la tercera cuestión, los estudiantes deben repetir el proceso de la cuestión anterior, pero esta vez deben identificar la relación entre el número de lados y el número total de diagonales de un polígono, y aplicarla para calcular el número de diagonales de un polígono de 20 lados. Por último, los estudiantes deberán deducir una fórmula que permita calcular el número total de diagonales del polígono.

A continuación mostramos el análisis teórico de dicha actividad y el análisis obtenido a partir de las respuestas de los estudiantes.

5.2.1 *Análisis teórico de la actividad*

Para realizar un análisis teórico de la actividad, como hemos explicado en la sección de metodología (sección 4.3.1), a cada cuestión de la actividad le hemos asignado una característica de cada una de las seis categorías (procedimiento de resolución, finalidad, esfuerzo cognitivo, contenidos implícitos, explicaciones y representación de la solución) que conforman cada nivel de demanda cognitiva, haciendo uso de las descripciones del modelo de demanda cognitiva particularizado para tareas de geometría plana (Tabla 17). Estas características nos han permitido identificar a qué nivel de demanda cognitiva pertenece cada cuestión de la actividad.

A continuación mostramos las tablas donde se refleja el análisis del nivel de demanda cognitiva de cada cuestión de la actividad. Presentamos cada categoría con la característica asociada y el nivel de demanda cognitiva al que pertenece la cuestión.

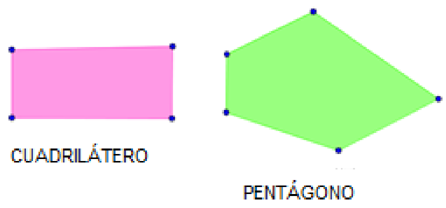
5.2.1.1 **Cuestión 1. Número de diagonales de casos concretos sencillos**

La primera cuestión (Figura 50) pide calcular el número de diagonales desde un vértice de polígonos sencillos (cuadrilátero, pentágono y triángulo). La actividad recuerda la definición de “diagonal” e incorpora las figuras de los tres polígonos. La estrategia de resolución esperada para resolver esta cuestión consiste en dibujar las diagonales sobre las figuras, utilizando el nivel *algoritmos sin conexiones.* Existe una diferencia en el aparatado 1c frente a los dos anteriores

(1a, 1b), ya que, a diferencia de los dos primeros, en el 1c la actividad pide alguna justificación. Esta diferencia se puede apreciar en el análisis teórico de la cuestión (Tabla 35), donde podemos comprobar cómo, en la categoría de *explicaciones,* es necesario diferenciar los apartados 1a y 1b del 1c, pues alcanzan niveles de demanda cognitiva diferentes.

La **diagonal** de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

1. Dibuja una diagonal en cada uno de los polígonos siguientes:



a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del cuadrilátero? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

b) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del pentágono? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del triángulo? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales? ¿Por qué?

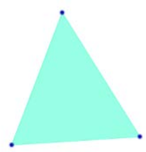


Figura 50. Cuestión 1 de la actividad de geometría plana.

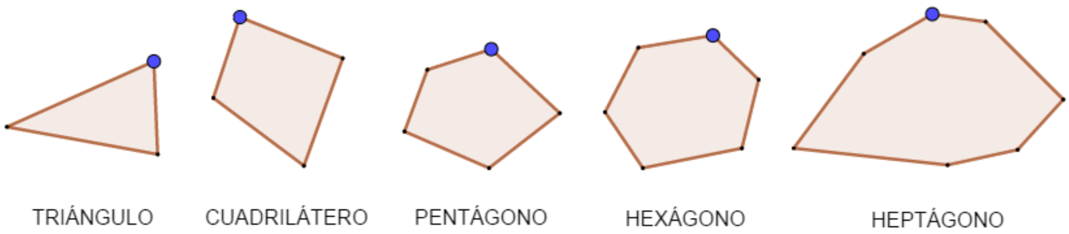
Nivel de D. C.	Categoría	Características *Apartados 1a, 1b, 1c*
2. Algoritmos Sin Conexiones	Procedimiento de resolución	(2.P) Se resuelven siguiendo una serie de pasos o instrucciones indicadas expresamente en el enunciado (incluida la definición de diagonal). Los estudiantes dibujan las diagonales tal como pide el enunciado, siguiendo las instrucciones de la definición.
	Finalidad	(2.F) Obtener un resultado correcto para unos casos concretos, pero sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática del concepto de diagonal ni de la relación entre el número de lados y de diagonales de los polígonos. Los estudiantes pueden resolverla correctamente sin necesidad de comprender la relación entre el número de diagonales por vértice y el número de lados.
	Esfuerzo cognitivo	(2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que el propio enunciado guía al estudiante a dibujar las diagonales y contar el número de diagonales.
	Contenidos implícitos	(2.C) Existe conexión implícita entre el número de diagonales por vértice y el número de lados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de esa relación para resolver correctamente la cuestión.
	Explicaciones	Apartados 1a, 1b. (1.X) El enunciado no pide dar explicaciones. Apartado 1c. (2.X) Las explicaciones dadas hacen referencia a la imposibilidad de trazar las diagonales desde un vértice debido a la falta de vértices no consecutivos. Se trata de una explicación que hace referencia al procedimiento de resolución utilizado, sin verbalizar conscientemente la relación que existe entre el número de diagonales y el número de vértices de un polígono.
	Representación de la solución	(2.R) Durante su resolución, se utiliza la representación geométrica, ya que resulta más sencilla para resolver el problema. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética a partir del conteo.

Tabla 35. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 1 de la actividad de geometría plana.

5.2.1.2 Cuestión 2. Número de diagonales de casos concretos intermedios

La cuestión 2 (Figura 51) se divide en dos apartados, 2a y 2b, cada uno de ellos con diferente nivel de demanda cognitiva. Por esta razón, la Tabla 36 está formada por dos columnas, donde mostramos de manera diferenciada el análisis teórico de los dos apartados. El apartado 2a pide calcular el número de diagonales desde un vértice de algunos polígonos concretos (del triángulo al octógono) de los cuales, se aporta una figura como ejemplo. El apartado 2b pregunta por la relación existente entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono.

2. (Applet 7.2) Observa los polígonos. Responde a las siguientes preguntas.



a) En cada uno de polígonos, traza **todas** las diagonales desde el vértice señalado. Modifica la forma de los polígonos manejando el vértice y comprueba la cantidad de diagonales. Rellena la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULO		
CUADRILÁTERO		
PENTÁGONO		
HEXÁGONO		
HEPTÁGONO		

b) ¿Qué relación existe entre el número de lados y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?

Figura 51. Cuestión 2 de la actividad de geometría plana.

Al analizar la cuestión 2 observamos que, el nivel de demanda cognitiva del apartado 2a será diferente dependiendo de la estrategia de resolución esperada. Consideramos dos estrategias de resolución diferentes:

- *Estrategia 1.* Los estudiantes dibujan las diagonales desde el vértice señalado en las figuras y realizando un conteo. Esta estrategia puede emplearse sin que los estudiantes identifiquen la relación general entre el número de lados y el número de diagonales por vértice (*algoritmos sin conexiones*).

- *Estrategia 2.* Los estudiantes identifican la relación implícita existente entre el número de diagonales por vértice y el número de lados del polígono en los primeros casos y la usan para calcular los demás valores de la tabla sin recurrir a las representaciones geométricas (*algoritmos con conexiones*).

No obstante, independientemente de la estrategia escogida por los estudiantes, el apartado 2a no pide ninguna justificación, por lo que la categoría de *explicaciones* es del nivel de demanda cognitiva inferior. El análisis teórico no solo nos permite determinar el nivel de demanda cognitiva de las actividades sino también identificar aquellas debilidades que tienen los enunciados de las actividades para poder corregirlas y mejorarlas.

A diferencia del apartado 2a, en el que encontramos dos estrategias de resolución con diferente nivel de demanda cognitiva, el apartado 2b requiere que el estudiante comprenda la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono, y la verbalice. Este último requisito no había sido necesario hasta el momento, por lo que, independientemente de si los estudiantes han calculado el apartado anterior haciendo uso de la relación implícita existente, es necesaria una estrategia de resolución propia del nivel *algoritmos con conexiones* para describir en qué consiste dicha relación. La Tabla 36 muestra el análisis completo de ambos apartados.

Nivel de D. C.		Características: Apartado 2a	Características: Apartado 2b
2-3. Algoritmos Sin / Con Conexiones	Procedimiento de resolución	*Estrategia 1*. (2.P) Se resuelve dibujando las diagonales en las figuras y contando el número de diagonales de cada caso. El enunciado indica explícitamente el algoritmo que se debe usar. La resolución es algorítmica (dibujar y cortar). *Estrategia 2.* (3.P) Se resuelve completando la tabla sin necesidad de dibujar las diagonales de todos los polígonos. Los estudiantes identifican y comprenden la relación entre el número de diagonales y el número de lados y completan la tabla haciendo uso de la relación aritmética existente.	(3.P) Se resuelve identificando y expresando la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono a partir de la tabla completada en el apartado anterior. A pesar de que aquellos estudiantes que hayan resuelto el apartado 2a haciendo uso de la *estrategia 2* ya se han percatado de dicha relación, ahora deben ser capaces de verbalizarla.
	Finalidad	*Estrategia 1.* (2.F) Completar la tabla de manera correcta mediante el dibujo y conteo de las diagonales, sin necesidad de identificar la relación implícita existente, con el único objetivo de encontrar un resultado correcto. *Estrategia 2.* (3.F) Completar la tabla sin necesidad de hacer uso de la representación geométrica e iniciar la comprensión de la relación entre el número de lados y el número de diagonales desde cada vértice. Los estudiantes observan que se debe restar tres unidades, que corresponden a los tres vértices a los que no se puede unir la diagonal al trazarla desde un vértice concreto.	(3.F) Descubrir, expresar y justificar la relación general entre el número de lados y el número de diagonales por cada vértice observando casos concretos, con el objetivo de profundizar en la comprensión del algoritmo general para el cálculo del número total de diagonales. Los estudiantes observan que se debe restar tres unidades, que corresponden a los tres vértices a los que no se puede unir la diagonal al trazarla desde un vértice concreto.

Nivel de D. C.	Características	
	Apartado 2a	*Apartado 2b*
Esfuerzo cognitivo	*Estrategia 1.* (2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo (dibujar las diagonales que salen de un vértice y contarlas). *Estrategia 2.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben comprender y deducir la relación entre el número de lados y el de diagonales de un polígono, y aplicar dicha relación en la tabla.	(3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo, ya que no existe un algoritmo que seguir para responderla. Los estudiantes deben prestar atención a los datos de la tabla para encontrar la relación general, aplicarla, verbalizarla y justificarla.
Contenidos implícitos	*Estrategia 1.* (2.C) Los estudiantes no necesitan percatarse de la propiedad geométrica implícita (la relación entre número de lados y diagonales por vértice) para llegar a la respuesta correcta. *Estrategia 2.* (3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación entre el número de lados y las diagonales por vértice.	(3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación entre el número de lados y el de diagonales por vértice.
Explicaciones	*Estrategia 1 y 2.* (1.X) El enunciado no pide dar explicaciones.	(3.X) Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación entre el número de lados y el de diagonales y a los valores de la tabla.
Representación de la solución	*Estrategia 1.* (2.R) Durante su resolución, se utiliza la representación geométrica, ya que resulta más sencilla para resolver el problema. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética a partir del conteo. *Estrategia 2.* (3.R) Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética, obtenida a partir de la conexión entre los resultados de la representación geométrica y la representación tabular.	(3.R) Para expresar el resultado se utiliza la representación verbal, pero al justificar el resultado se establecen relaciones entre la representación geométrica y la aritmética (observando que se trata de restar tres unidades).

Tabla 36. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 2 de la actividad de geometría plana.

5.2.1.3 Cuestión 3. Número de diagonales de casos concretos lejanos o casos generales

La cuestión 3 (Figura 52) está dividida en tres apartados. La cuestión 3a pide calcular el el número total de diagonales de los polígonos vistos en el apartado anterior (del triángulo al octógono), la cuestión 3b el número de diagonales totales de un polígono de 20 lados y, por último, la cuestión 3c, el número de diagonales totales de un polígono general.

3. (Applet 7.2) Dibuja y calcula el número total de diagonales de cada polígono:

a) Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE	N.º TOTAL DE DIAGONALES
TRIÁNGULO			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
OCTÓGONO			

b) Calcula el número total de diagonales de un polígono de 20 lados.

c) ¿Cómo podrías, sin dibujar, calcular el número total de diagonales de cualquier polígono teniendo en cuenta su número de lados?

Figura 52. Cuestión 3 de la actividad de geometría plana.

Como ocurría en el caso anterior, el apartado 3a puede ser completado con diferente nivel de demanda cognitiva dependiendo de la estrategia esperada:

- *Estrategia 1.* Los estudiantes dibujan las diagonales sobre los polígonos y cuentan el número de diagonales dibujadas para dar su respuesta, sin necesidad de comprender la relación implícita existente entre el número total de diagonales y el número de lados. Estrategia propia del nivel *algoritmos sin conexiones.*

- *Estrategia 2.* Los estudiantes emplean la relación aritmética para completar la tabla, haciendo uso de una estrategia de nivel *algoritmos con conexiones*.

El análisis completo de este primer apartado se encuentra reflejado en la Tabla 37.

Nivel de D.C.	Categoría	Características *Apartado 3a*
2-3. Algoritmos Sin / Con Conexiones	Procedimiento de resolución	*Estrategia 1.* (2.P) Se resuelve representando las diagonales en las figuras y contando el número de diagonales de cada caso. El enunciado indica explícitamente el algoritmo que se debe usar. La resolución es algorítmica (dibujar y contar). *Estrategia 2.* (3.P) Se resuelve identificando en los primeros casos de la tabla la relación aritmética existente entre el número de diagonales y el número de lados y completando los restantes casos de la tabla sin necesidad de representar las diagonales del resto de figuras, aplicando dicha relación.
	Finalidad	*Estrategia 1.* (2.F) Completar la tabla de manera correcta mediante el dibujo y conteo de las diagonales, sin necesidad de identificar la relación implícita existente, con el único objetivo de encontrar un resultado correcto. *Estrategia 2.* (3.F) Completar la tabla haciendo uso de la relación aritmética existente entre ambas columnas. De esta manera los estudiantes inician la comprensión de la relación entre el número de lados y el número total de diagonales.
	Esfuerzo cognitivo	*Estrategia 1.* (2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo dibujar las diagonales y calcular el número total de diagonales de cada polígono a través del conteo. *Estrategia 2.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo, ya que no existe un algoritmo que seguir para responderla. Los estudiantes deben prestar atención a los datos de la tabla para encontrar la relación general, aplicarla, verbalizarla y justificarla.
	Contenidos implícitos	*Estrategia 1.* (2.C) Los estudiantes no necesitan percatarse de la propiedad geométrica implícita (la relación entre número de lados y el número total de diagonales) para llegar a la respuesta correcta. *Estrategia 2.* (3.C) Los estudiantes necesita considerar conscientemente la relación entre el número de lados y el número total de diagonales para encontrar la relación aritmética y completar la tabla.
	Explica ciones	*Estrategia 1 y 2.* (1.X) El enunciado no pide dar explicaciones.

Nivel de D.C.	Categoría	Características
		Apartado 3a
	Representación de la solución	*Estrategia 1.* (2.R) Durante su resolución, se utiliza la representación geométrica, ya que resulta más sencilla para resolver el problema. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética a partir del conteo. Estrategia 2. (3.R) Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética, obtenida a partir de la conexión entre los resultados de la representación geométrica y la representación tabular.

Tabla 37. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de la cuestión 3a de la actividad de geometría plana.

Para el polígono de 20 lados (apartado 3b), de manera análoga, podríamos pensar que los estudiantes pueden dibujar un polígono de 20 lados y todas sus diagonales. No obstante, dicha representación resulta muy costosa, por lo que, para resolver el apartado, los estudiantes deberán descubrir y comprender la relación aritmética existente entre el número de lados de un polígono y su número de diagonales, utilizando una estrategia de resolución propia del nivel *algoritmos con conexiones*. Por último, en 3c, la obtención de una fórmula general requiere pensamiento abstracto y complejo propio del nivel *hacer matemáticas*. El análisis teórico de estos dos apartados, 3b y 3c, está reflejado en la Tabla 38.

Nivel de D. C.	Categorías	Características	
		Apartado 3b	*Apartado 3c*
4. Hacer matemáticas	Procedimiento de resolución	(3.P) Se resuelve identificando en los primeros casos de la tabla la relación aritmética existente entre el número total de diagonales y el número de lados y aplicando dicha relación para obtener un resultado para el polígono de 20 lados.	(4.P) Se resuelve obteniendo la generalización para cualquier polígono, lo cual requiere un pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. No es algorítmica. Los estudiantes deben analizar las relaciones obtenidas hasta el momento y los datos recogidos para poder obtener una fórmula general.

Nivel de D. C	Categorías	Características	
		Apartado 3b	*Apartado 3c*
	Finalidad	(3.F) Utilizar las relaciones aritméticas para calcular el número total de diagonales de un caso concreto, de manera que los estudiantes descubran la relación implícita existente entre el número total de diagonales y el número de lados.	(4.F) Analizar, comprender y enunciar la relación general entre el número de lados y el número total de diagonales, de manera que lleguen a obtener la fórmula general para el cálculo del número total de diagonales.
	Esfuerzo cognitivo	(3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo y atención, ya que los estudiantes deben ser capaces de encontrar la solución generalizando las relaciones implícitas en los datos de la tabla.	(4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo, ya que los estudiantes no solo deben ser capaces de comprender la relación implícita existente, sino que deben saber verbalizarla de manera general y abstracta.
	Contenidos implícitos	(3.C) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación entre el número de lados y el número total de diagonales.	(4.C) Los estudiantes deben recurrir a su experiencia en la cuestión 3b para expresar en lenguaje verbal una fórmula general.
	Explicaciones	(1.X) No se dan explicaciones.	(4.X) Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación general que permite obtener el número total de diagonales a partir del número de lados de cualquier polígono.
	Representación de la solución	(3.R) Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética, obtenida a partir de la conexión entre los resultados de la representación geométrica y la representación tabular. A pesar de que algunos estudiantes tratan de hacer uso de la representación geométrica, esta no les lleva a una solución correcta, ya que la representación del número total de diagonales de un polígono de 20 lados y su conteo les resulta costoso.	(4.R) La resolución se basa en la representación verbal y/o en la algebraica de la fórmula de cálculo del número de diagonales de un polígono cualquiera.

Tabla 38. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de las cuestiones 3b y 3c de la actividad de geometría plana.

5.2.1.4 **Análisis teórico completo de la actividad**

Una vez realizado un análisis detallado de cada una de las cuestiones, podemos observar la variación del nivel de demanda cognitiva de la actividad conforme esta avanza. Para analizar la evolución teórica del nivel de demanda cognitiva, tomaremos las respuestas de un estudiante medio, capaz de contestar correctamente todas las cuestiones. En la Tabla 39 mostramos las cuatro trayectorias posibles en función de las estrategias escogidas en las cuestiones 2a y 3a.

Podemos observar que, a pesar de existir diferentes trayectorias según las estrategias escogidas, en todas ellas se produce una tendencia creciente del nivel de demanda cognitiva. Esta evolución del nivel de demanda cognitiva facilita la atención de las necesidades de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, permitiendo implementar la actividad en un aula ordinaria, ya que los primeros apartados pueden ser resueltos con diferente nivel de demanda cognitiva, sin embargo, los estudiantes deben terminar resolviendo el apartado 3c con un nivel alto de demanda cognitiva (*hacer matemáticas*).

En la Figura 53 observamos la trayectoria de resolución de aquellos estudiantes que resuelven la cuestión 2a dibujando las diagonales desde un vértice y realizando un conteo, procedimiento que repiten en la cuestión 3a, dibujando el número total de diagonales y resolviendo ambas cuestiones con el nivel de *algoritmos sin conexiones.*
En este caso observamos que, a pesar de que los estudiantes alcanzan el nivel de *algoritmos con conexiones* en la cuestión 2b, su nivel de demanda cognitiva disminuye en la cuestión 3a.

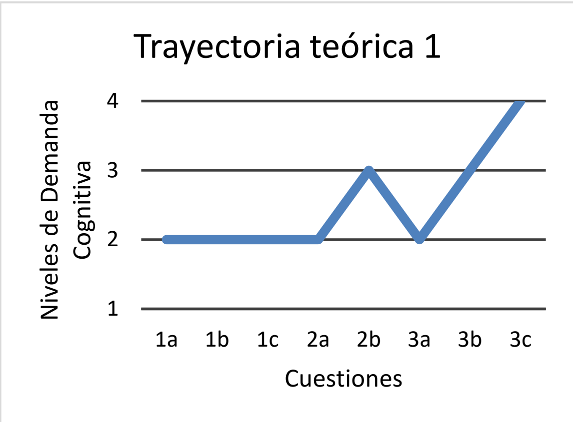


Figura 53. Evolución del nivel de demanda cognitiva de la trayectoria teórica 1.

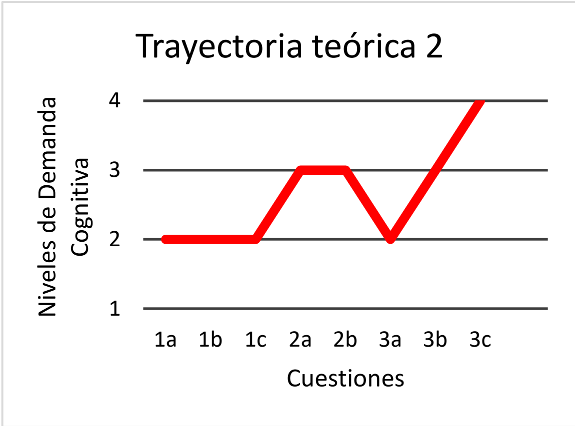
<table>
<tr>
<td>En la Figura 54 observamos la trayectoria de resolución de aquellos estudiantes que identifican relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales desde un vértice, y resuelven la cuestión 2a haciendo uso del nivel de algoritmos con conexiones.
Sin embargo, no identifican la relación entre el número de lados y el número total de diagonales, por lo que utilizan la representación geométrica en la cuestión 3a, disminuyendo el nivel de demanda cognitiva al nivel de algoritmos sin conexiones.</td>
<td>


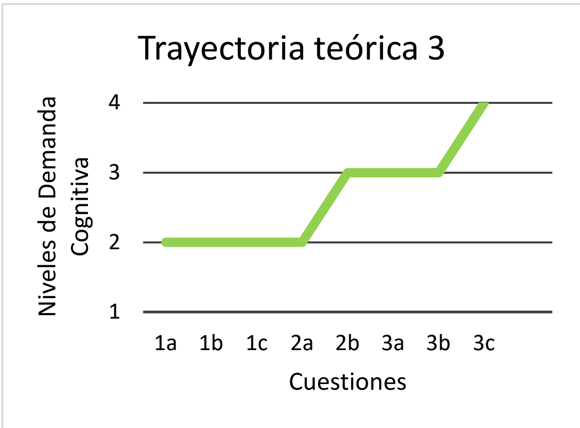
Figura 54. Evolución del nivel de demanda cognitiva de la trayectoria teórica 2.</td>
</tr>
<tr>
<td>En la Figura 55 observamos la trayectoria de resolución de aquellos estudiantes que resuelven la cuestión 2a dibujando las diagonales desde un vértice (algoritmos sin conexiones), pero resuelven las cuestiones 2b y 3a estableciendo relaciones entre el número de lados de un polígono y el número de diagonales (desde un vértice y totales), resolviendo estas cuestiones con el nivel algoritmos con conexiones. En este caso, el nivel de demanda cognitiva experimenta un crecimiento a lo largo de toda la actividad.</td>
<td>


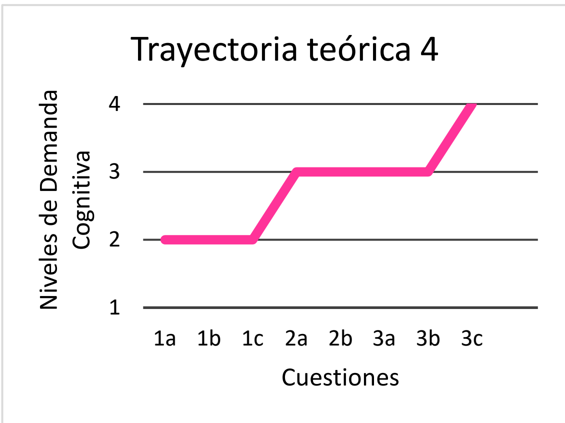
Figura 55. Evolución del nivel de demanda cognitiva de la trayectoria teórica 3.</td>
</tr>
<tr>
<td>En la Figura 56 observamos la trayectoria de resolución de aquellos estudiantes que resuelven las cuestiones 2a y 3a identificando las relaciones directamente, sin hacer uso de la representación de las diagonales, resolviendo las dos cuestiones con el nivel de algoritmos con conexiones.
Al igual que en el caso anterior, en este caso el nivel de demanda cognitiva experimenta un crecimiento a lo largo de toda la actividad.</td>
<td>


Figura 56. Evolución del nivel de demanda cognitiva de la trayectoria teórica 4.</td>
</tr>
</table>

Tabla 39. Análisis teórico completo de la actividad de geometría plana.

5.2.2 *Análisis de respuestas de los estudiantes*

A pesar de que el análisis teórico nos permite describir la complejidad de la actividad, al observar las respuestas de los estudiantes hemos podido comprobar que la misma actividad puede ser resuelta correctamente haciendo uso de diferentes niveles de demanda cognitiva.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes, hemos comenzado identificando los diferentes tipos de estrategias de resolución utilizados en nuestra experimentación y les hemos asignado un código (Tabla 40), con el fin de facilitar una visión global de los resultados obtenidos. Una vez conocidas las diferentes estrategias utilizadas, hemos analizado el nivel de demanda cognitiva de estas, asignándoles una característica de cada una de las seis categorías que conforman los niveles de demanda cognitiva (procedimiento de resolución, finalidad, esfuerzo cognitivo, contenidos implícitos, explicaciones y representación de la solución), haciendo uso de las descripciones del modelo de demanda cognitiva particularizado para tareas de geometría plana (Tabla 17).

En la Tabla 40 describimos las estrategias de resolución utilizadas durante nuestra experimentación, organizadas en cuatro bloques en función de la acción que desempeñan (representan las diagonales, justifican la respuesta, identifican la relación implícita o responden de manera incorrecta) y ordenadas de mejor a peor en relación a la calidad de la respuesta. Además, la tabla presenta las abreviaturas que utilizamos para hacer referencia a cada estrategia de manera abreviada. En esta tabla no incluimos un ejemplo de cada tipo de estrategia de resolución, ya que todos ellos aparecerán a lo largo del análisis de respuestas que mostramos seguidamente.

ABREVIATURA	DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN
RepresentCorrect	*Representación Correcta.* Utilizan la representación geométrica para contestar a la pregunta. Dibujan correctamente las diagonales sobre el polígono, haciendo un uso correcto de la definición de diagonal.
NoRepr	*No Representación.* No utilizan la representación geométrica para contestar la pregunta. No dibujan las diagonales sobre los polígonos, bien porque no es posible (caso del triángulo) o bien porque utilizan una relación para obtener el resultado (relación aritmética o general).
RepresentIncorrect	*Representación Incorrecta*. Utilizan la representación geométrica para contestar a la pregunta. Cometen errores al dibujar, bien por no comprender la definición o por no seguir un orden, lo cual les lleva a realizar un conteo erróneo.
JustificSuf	*Justificación Suficiente.* Justifican la respuesta relacionando el número de lados y el número de diagonales de un polígono.
JustificInsuf	*Justificación Insuficiente.* Los estudiantes tratan de responder a la pregunta de "porqué", pero su justificación no muestra la relación entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono.
NoJustific	*No Justificación.* Los estudiantes responden correctamente, pero, a pesar de que la cuestión lo pide de manera explícita, no justifican su respuesta.
NoRel	*No Relación.* No identifican la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales. Respuesta no evaluable.
RelArit	*Relación Aritmética.* Identifican la relación aritmética que permite calcular el número de diagonales (desde un único vértice o totales) a partir del número de lados, pero no son capaces de llegar a la abstracción de la relación general.
RelVerb	*Relación Verbal.* Identifican y expresan la relación verbal entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono.
RelAlg	*Relación Algebraica.* Identifican y expresan la relación algebraica entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono.
Incorrect	*Incorrecta.* Dan un resultado incorrecto. No comprenden el enunciado y contestan de manera aleatoria. Respuesta no evaluable.
NC	*No Contestan.* Los estudiantes dejan la actividad en blanco.

Tabla 40. Código de estrategias de resolución de la actividad geometría plana.

Al analizar las respuestas de los estudiantes, estas estrategias a menudo aparecen combinadas de diferentes maneras. Por ejemplo, un par de estudiantes pueden comenzar utilizando la representación geométrica correctamente, dibujando el número de diagonales de un polígono y realizando el conteo (*RepresentCorrect*) y, a partir de estos datos, identificar la relación aritmética (*RelArit*). En estos casos representaremos la estrategia de resolución como *RepresentCorrect- RelArit.*

A continuación mostramos un análisis detallado de las respuestas dadas por los estudiantes y del nivel de demanda cognitiva necesario para lograrlas. Hemos analizado una a una cada cuestión de la actividad de geometría plana, describiendo todas las respuestas diferentes obtenidas para cada una.

En las siguientes tablas (Tablas 41-52), presentamos las diferentes estrategias de resolución obtenidas en cada cuestión (su abreviatura y descripción), un ejemplo de respuesta y el análisis del nivel de demanda cognitiva, especificando las características asignadas de cada una las seis categorías.

5.2.2.1 **Cuestión 1**

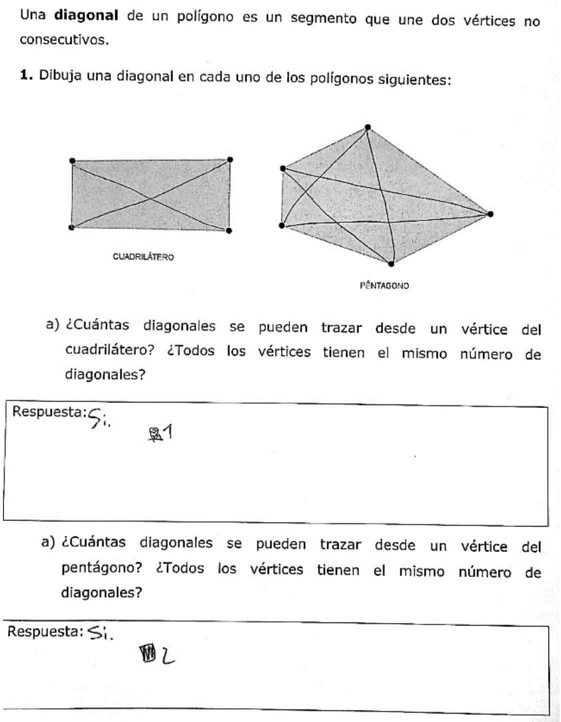
En la primera cuestión observamos que, aunque han utilizado diferentes estrategias de resolución, todas las que permiten obtener una respuesta correcta están consideraras del nivel *algoritmos sin conexiones*. Para analizar las respuestas de esta cuestión vamos a diferenciar las estrategias de resolución utilizadas para los apartados 1a y 1b, con las llevadas a cabo para resolver el apartado 1c, ya que como vimos en el análisis teórico (Tabla 35) existen algunas ligeras diferencias entre estos apartados.

En la Tabla 41 podemos ver el análisis de los apartados 1a y 1b, los casos del cuadrilátero y el pentágono. Todos los estudiantes que respondieron correctamente utilizaron la misma estrategia de resolución, haciendo uso de la representación gráfica.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RepresentCorrect
Los estudiantes utilizan la representación geométrica correcta. Dibujan las diagonales desde cada vértice para comprobar que desde todos se pueden trazar el mismo número de diagonales y realizan el conteo para obtener el resultado correcto.

AVAST1:


Una **diagonal** de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

1. Dibuja una diagonal en cada uno de los polígonos siguientes:

CUADRILÁTERO

PENTÁGONO

a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del cuadrilátero? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

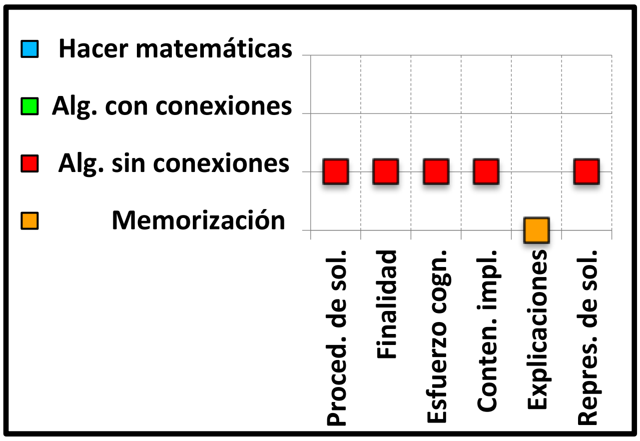
Respuesta: Si. 1

a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del pentágono? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

Respuesta: Si. 2

Figura 57. Cuestiones 1a-1b. Ejemplo de respuesta *RepresentCorrect*.
</td>
<td rowspan="2">

2.P. Se resuelven siguiendo una serie de pasos o instrucciones indicadas expresamente en el enunciado (incluida la definición de diagonal). Los estudiantes dibujan las diagonales tal como pide el enunciado, siguiendo las instrucciones de la definición.
2.F. Obtener un resultado correcto para unos casos concretos, sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática del concepto de diagonal ni de la relación entre el número de lados y de diagonales de los polígonos. Los estudiantes pueden resolverla correctamente sin necesidad de comprender la relación entre el número de diagonales por vértice y el número de lados.
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que los estudiantes únicamente dibujan las diagonales siguiendo las instrucciones dadas y cuentan el número de diagonales.
2.C. Existe conexión implícita entre el número de diagonales por vértice y el número de lados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de esa relación para resolver correctamente la cuestión.
1.X. El enunciado no pide dar explicaciones.
2.R. Durante su resolución, se utiliza la representación geométrica, ya que resulta más sencilla para resolver el problema. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética a partir del conteo.
</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos sin conexiones*
</td></tr>
</table>

Tabla 41. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a las cuestiones 1a y 1b de la actividad de geometría plana.

El apartado 1c, el caso del triángulo, pide una justificación de la respuesta, lo cual ha inducido a tres estrategias de resolución distintas en función de la justificación que aportan (ninguna justificación, una justificación insuficiente o la justificación requerida por enunciado). Estas diferencias varían el nivel de demanda cognitiva de la categoría de *explicaciones*.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

NoRepr-NoJust
No se utiliza la representación geométrica debido a que el triángulo no tiene ninguna diagonal, por lo que resulta imposible dibujarlas. Los estudiantes responden correctamente a la pregunta, pero no justifican su resultado.

5EP1: *Cero.*

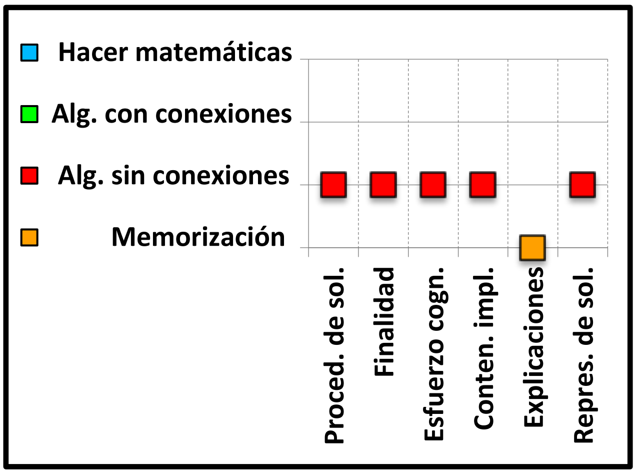
AVAST3: *Ninguna*

Figura 58. Cuestión 1c. Ejemplos de respuestas *NoRepr-NoJust.*

</td><td rowspan="2">

2.P. Se resuelve siguiendo una serie de pasos o instrucciones indicadas expresamente en el enunciado (incluida la definición de diagonal). Los estudiantes tratan de dibujar las diagonales desde un vértice del triángulo siguiendo las instrucciones de la definición, pero comprueban que no se puede trazar ninguna.
2.F. Obtener un resultado correcto para el caso concreto del triángulo, sin necesidad de desarrollar la comprensión matemática del concepto de diagonal ni de la relación entre el número de lados y de diagonales de los polígonos. Los estudiantes pueden resolverla correctamente sin necesidad de comprender la relación entre el número de diagonales por vértice y el número de lados.
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que los estudiantes únicamente tratan de dibujar las diagonales siguiendo las instrucciones dadas y observan que no se puede trazar ninguna.
2.C. Existe conexión implícita entre el número de diagonales por vértice y el número de lados. Sin embargo, los estudiantes no necesitan percatarse de esa relación para resolver correctamente la cuestión.
1.X. No dan explicaciones, a pesar de que el enunciado sí las pide.
2.R. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética o verbal.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

NoRepr-JustInsuf.
No se utiliza la representación geométrica debido a que el triángulo no tiene ninguna diagonal, por lo que resulta imposible dibujarlas. Los estudiantes responden correctamente a la pregunta, pero justifican su respuesta de manera insuficiente, no establecen relaciones entre los lados y las diagonales del polígono, se limitan a explicar que en este caso no es posible trazar diagonales.

5EP4: *Ninguna porque para hacer diagonales tenemos que tener 4 lados.*

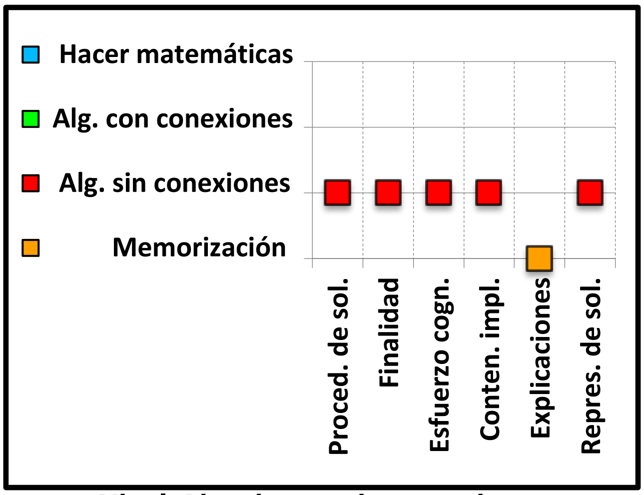
5EP6: *Ninguna diagonal. Sí, para todos los vértices igual, pero para tener una diagonal o más tiene que tener más de tres lados*

Figura 59. Cuestión 1c. Ejemplos de respuestas *NoRepr-JustInsuf.*

</td><td rowspan="2">

2.P. *NoRepr-NoJust*, Tabla 42.
2.F. *NoRepr-NoJust*, Tabla 42.
2.E. *NoRepr-NoJust,* Tabla 42.
2.C. *NoRepr-NoJust,* Tabla 42.
1.X. Los estudiantes dan una justificación que no aporta información relevante. No hacen referencia a la imposibilidad de trazar las diagonales desde un vértice debido a la falta de vértices no consecutivos.
2.R. *NoRepr-NoJust*, Tabla 42.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

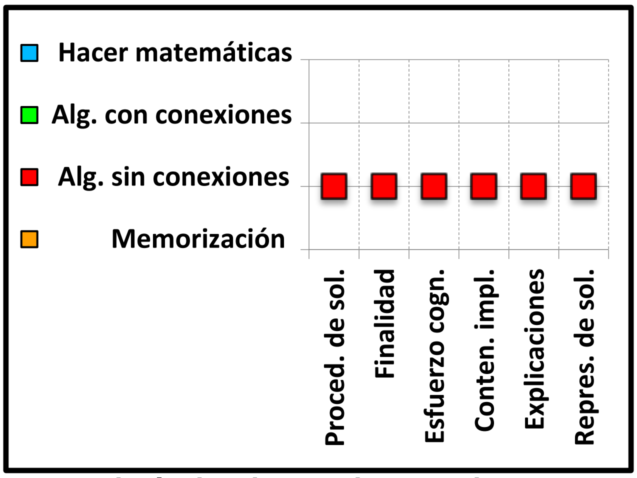
Descripción	Características
NoRepr-JustSuf. No se utiliza la representación geométrica debido a que el triángulo no tiene ninguna diagonal, por lo que resulta imposible dibujarlas. Los estudiantes responden correctamente a la pregunta y justifican su respuesta estableciendo relaciones geométricas entre los lados y las diagonales del polígono. AVAST1: *0, porque si unes los puntos, obtienes los lados.* IES13: *Ninguna. Todos los vértices se tocan y no tienen espacio para trazar una diagonal.* IES14: *Ninguna. Desde todos los vértices no se puede trazar ninguna diagonal porque al tener solo tres vértices no pueden atravesar por en medio para ir a otro vértice*. Figura 60. Cuestión 1c. Ejemplos de respuestas *NoRepr-JustSuf.*	**2.P.** *NoRepr-NoJust*, Tabla 42. **2.F.** *NoRepr-NoJust*, Tabla 42. **2.E.** *NoRepr-NoJust*, Tabla 42. **2.C.** *NoRepr-NoJust*, Tabla 42. **2.X.** Las explicaciones dadas hacen referencia a la imposibilidad de trazar las diagonales desde un vértice debido a la falta de vértices no consecutivos. Se trata de una explicación que hace referencia al procedimiento de resolución utilizado, sin verbalizar conscientemente la relación que existe entre el número de diagonales y el número de vértices de un polígono. **2.R.** *NoRepr-NoJust*, Tabla 42.
 Nivel ***Algoritmos sin conexiones***	

Tabla 42. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la cuestión 1c de la actividad de geometría plana.

Además de estas resoluciones encontramos otras resoluciones que dan respuestas incorrectas a la actividad, así como estudiantes que no dan ninguna respuesta. A estas respuestas no les asignaremos ningún nivel de demanda cognitiva.

<table>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td>Incorrect
Dan un resultado incorrecto. No comprenden el enunciado y contestan de manera aleatoria. Respuesta no evaluable.</td><td>5EP2: Cuadrilátero, 2 diagonales. Pentágono, 2 diagonales.

Figura 61. Cuestiones 1a-1b. Ejemplo de respuesta Incorrect.</td></tr>
<tr><td colspan="2">NC. No contestan.</td></tr>
</table>

Tabla 43. Análisis de las respuestas incorrectas obtenidas a la cuestión 1 de la actividad de geometría plana.

En resumen, tras realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes a la primera cuestión, podemos concluir:

- A pesar de que el nivel de demanda cognitiva de los apartados 1a y 1b es de *algoritmos sin conexiones,* los porcentajes de estudiantes que resolvieron correctamente estos apartados en cada grupo permiten intuir las diferencias existentes entre estos grupos. Mientras el grupo completo de estudiantes talentosos (estudiantes de 6º de Educación Primaria y 1º de ESO) resolvieron correctamente estos apartados, únicamente el 53,3% del grupo de 5º de Educación Primaria y el 54,5% del grupo de 1º ESO obtuvieron una respuesta correcta.
- Todos los estudiantes que resolvieron correctamente los apartados 1a y 1b utilizaron la misma estrategia, la descrita en el análisis teórico (Tabla 35), correspondiente al nivel *algoritmos sin conexiones*. Los estudiantes optaron por dibujar las diagonales sobre los polígonos y realizar el conteo del número de diagonales por vértice.
- Todos los estudiantes del grupo talentoso y de 5º de Educación Primaria resolvieron el apartado 1c. Sin embargo, el 27,3% de los estudiantes de 1º de ESO no dio ninguna solución.
- A pesar de que todos los estudiantes que resolvieron el apartado 1c hicieron uso del nivel *algoritmos sin conexiones*, podemos diferenciar tres estrategias de resolución en función del nivel de razonamiento utilizado para justificar su resultado: aquellos que no lo justifican (53% del grupo de 5º de Educación Primaria, 46,7% del grupo de 1º ESO y 42,9% del grupo talentoso), los que dan una justificación insuficiente (46,7% del

grupo de 5º de Educación Primaria y 14,2% del grupo talentoso) y los que se basan en la imposibilidad de trazar las diagonales desde un vértice debido a la falta de vértices no consecutivos (25,4% del grupo de 1º de ESO y 42,9% del grupo talentoso). El tipo de razonamiento utilizado por los estudiantes nos permite identificar diferencias en el nivel de las respuestas de los estudiantes de los diferentes grupos. Podemos observar que, cuando aumenta el nivel de demanda cognitiva requerido por la respuesta, disminuye el porcentaje de estudiantes que responde correctamente. Mientras ninguno de los estudiantes de Educación Primaria es capaz de dar una respuesta justificada, en el grupo talentoso casi la mitad de los estudiantes razonan el resultado obtenido.

5.2.2.2 Cuestión 2

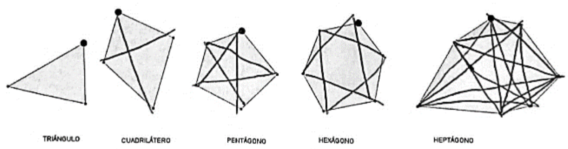
En contraste con la cuestión anterior, en esta encontramos estrategias de resolución con diferente nivel de demanda cognitiva. La elección de una estrategia u otra influirá a la hora de alcanzar la solución de la tercera cuestión. Además, al igual que ocurría antes, al analizar las respuestas hemos descubierto algunas estrategias que no fueron consideradas en el análisis teórico (sección 5.2.1). Esto demuestra de nuevo la importancia del análisis de respuestas para determinar el nivel de demanda cognitiva de los estudiantes.

Para realizar el análisis de respuestas, distinguiremos entre los apartados 2a y 2b, tal y como ocurría en el análisis teórico. En lo que respecta al apartado 2a, podemos diferenciar tres procedimientos de resolución diferentes. Además, a pesar de que la actividad no requería explicaciones, las grabaciones de audio nos han aportado información sobre los razonamientos que se utilizaron para completar los datos y justificar su procedimiento, lo cual nos ha ayudado a detectar con mayor precisión el nivel de demanda cognitiva de las categorías de *explicaciones* y *representación de la solución*. A continuación, mostramos las tres estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes para resolver el apartado 2a.

Descripción	Características
RepresentCorrect Los estudiantes utilizan la representación geométrica correcta. Dibujan las diagonales desde cada vértice para comprobar que desde todos se pueden trazar el mismo número de diagonales y realizan el conteo para obtener el resultado correcto.	**2.P.** *RepresentCorrect*, Tabla 41. **2.F.** *RepresentCorrect*, Tabla 41. **2.E.** *RepresentCorrect*, Tabla 41. **2.C.** *RepresentCorrect*, Tabla 41. **1.X.** *RepresentCorrect*, Tabla 41. **2.R.** *RepresentCorrect*, Tabla 41.

AVAST5:

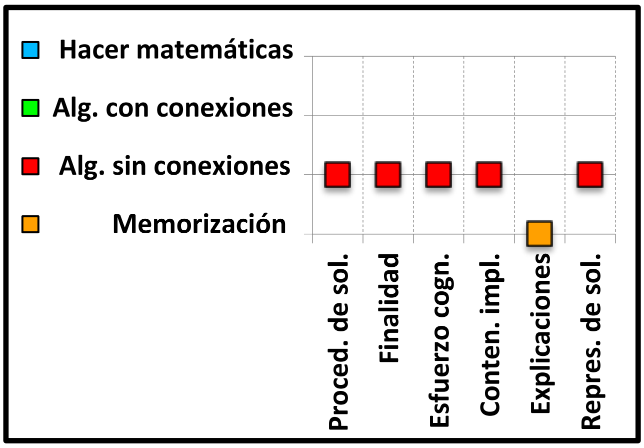
2. (Applet 7.2) Observa los polígonos. Responde a las siguientes preguntas.



a) En cada uno de polígonos, traza **todas** las diagonales desde el vértice señalado. Modifica la forma de los polígonos manejando el vértice y comprueba la cantidad de diagonales. Rellena la siguiente tabla:

POLÍGONO	Nº DE LADOS	Nº DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULO	3	0
QUADRILATERO	4	1
PENTÁGONO	5	2
HEXÁGONO	6	3
HEPTÁGONO	7	4

Figura 62. Cuestión 2a. Ejemplo de respuesta *RepresentCorrect*.



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

NoRepr-RelArit
No utilizan la representación geométrica.
Haciendo uso de los resultados obtenidos en la primera cuestión, rellenan los primeros apartados de la tabla y, sin recurrir a la representación del resto de polígonos, completan la tabla, observando que se trata de ir añadiendo una diagonal cada vez. A pesar de que observan la relación aritmética entre los datos, no identifican la relación subyacente entre los elementos utilizados.

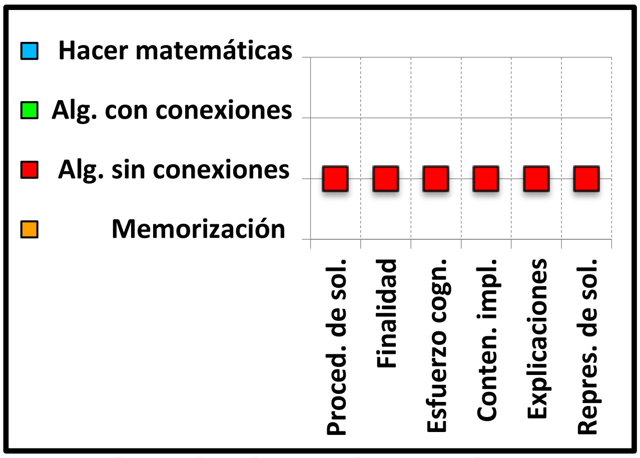
5EP1: [grabación de audio] *Hexágono 3, heptágono 4... A cada uno le pones uno más.*

Figura 63. Cuestión 2a. Ejemplo de respuesta *NoRepr-RelArit.*

</td><td rowspan="2">

2.P. Se resuelve siguiendo una serie de pasos o instrucciones indicadas implícitamente por los datos de los primeros casos introducidos en la tabla. Los estudiantes identifican la relación aritmética, observando que se trata de añadir una unidad por cada fila, pero no identifican la relación entre el número de lados y el de diagonales de un polígono.
2.F. *RepresentCorrect*, Tabla 41.
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que los estudiantes únicamente completan la tabla añadiendo una unidad en cada fila, pero sin necesidad de comprender la relación entre el número de lados y el número de diagonales del polígono.
2.C. *NoRepr-NoJust*, Tabla 42.
2.X. Los estudiantes proporcionan de manera oral explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo empleado, consistente en sumar una unidad conforme el número de lados aumenta. A pesar de que el enunciado no pide explicaciones, las grabaciones de audio proporcionan esta información. No se pide que identifiquen ni expliquen la relación entre el número de lados y el número de diagonales.
2.R. Se utiliza la representación aritmética tanto para resolver la cuestión como para expresar el resultado. Se establecen relaciones entre los datos numéricos presentes en la tabla, pero no se conecta con la representación geométrica.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

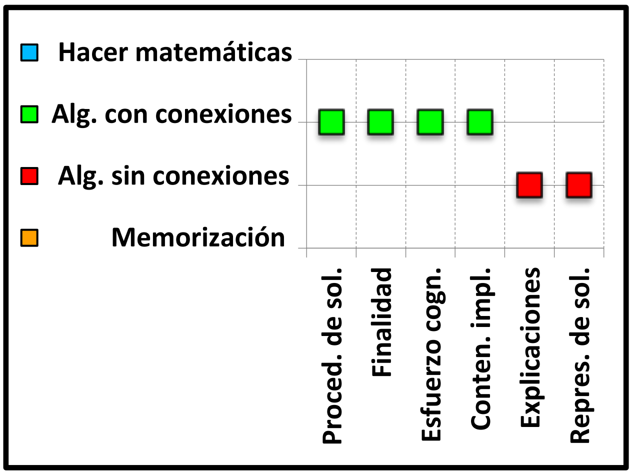
<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

NoRepr-RelVerb

No utilizan la representación geométrica. Haciendo uso de los resultados obtenidos en la primera cuestión y con los primeros datos introducidos en la tabla, identifican y expresan verbalmente, la relación entre el número de lados y el número de diagonales por vértice y completan la tabla haciendo uso de esta relación.

5EP3: [grabación de audio] *Hay una diferencia de tres, porque siempre hay dos que no se pueden hacer.*

Figura 64. Cuestión 2a. Ejemplo de respuesta *NoRepr-RelVerb.*



Nivel *Algoritmos con conexiones*

</td><td>

3.P. Se resuelve completando la tabla sin necesidad de dibujar las diagonales de todos los polígonos. Los estudiantes identifican y comprenden la relación entre el número de diagonales y el número de lados y completan la tabla haciendo uso de la relación aritmética existente.

3.F. Completar la tabla sin necesidad de hacer uso de la representación geométrica e iniciar la comprensión de la relación entre el número de lados y el número de diagonales desde cada vértice. Los estudiantes observan que se debe restar tres unidades, que corresponden a los tres vértices a los que no se puede unir la diagonal al trazarla desde un vértice concreto.

3.E. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben comprender y deducir la relación aritmética entre el número de lados y el de diagonales de un polígono, y aplicar dicha relación en la tabla.

3.C. Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación entre el número de lados y las diagonales por vértice.

2.X. Los estudiantes proporcionan de manera oral explicaciones basadas en la descripción el algoritmo empleado, consistente en restar tres unidades. El enunciado no pide explicaciones, pero las grabaciones de audio proporcionan esta información. Los estudiantes muestran indicios de comprender la relación implícita, pero su justificación es insuficiente.

2.R. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética. No se establecen relaciones entre la representación geométrica y la aritmética al justificar el resultado. No explican que las tres unidades corresponden a los tres vértices consecutivos.

</td></tr>
</table>

Tabla 44. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la cuestión 2a de la actividad de geometría plana.

Al analizar el apartado 2b, observamos tres estrategias diferentes, que se distinguen entre ellas por el grado de comprensión que tienen los estudiantes sobre la relación entre el número de lados y el número de diagonales.

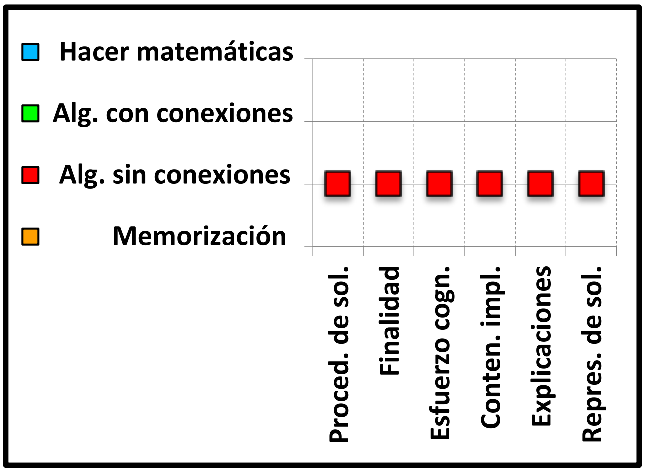
<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RelArit-NoJust
Identifican la relación aritmética entre el número de lados y el número de diagonales desde un vértice, pero no justifican el porqué de dicha relación a pesar de que el enunciado lo especifique. Esto no nos permite afirmar que los estudiantes comprendan la relación implícita, lo que nos hace pensar que su respuesta está basada únicamente en los datos numéricos.

5EP1: *La diferencia entre el número de lados y diagonales siempre es 3.*

AVAST3: *Son el número de lados menos 3.*

Figura 65. Cuestión 2b. Ejemplos de respuestas *RelArit-NoJust.*



Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td><td>

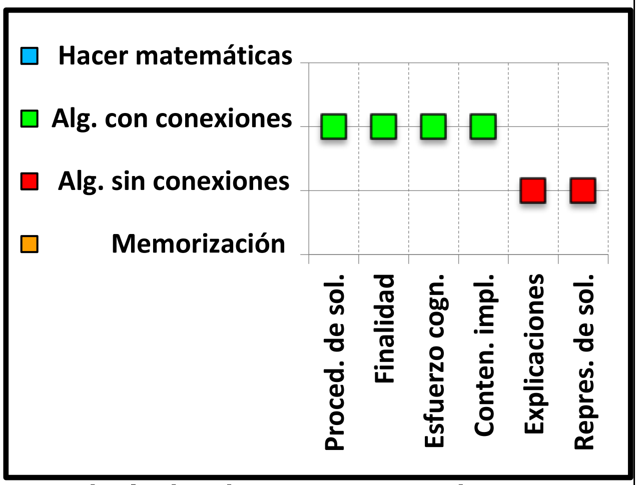
2.P. Se resuelve siguiendo una serie de pasos o instrucciones indicadas implícitamente por los datos de los casos introducidos en la tabla. Los estudiantes identifican la relación aritmética entre las columnas correspondientes a el número de lados y el de diagonales, observando que se trata de restar tres unidades, pero no comprenden dicha relación.
2.F. Completar la tabla de manera correcta mediante la relación aritmética consistente en restar tres unidades, sin necesidad de comprender dicha relación, con el único objetivo de encontrar un resultado correcto.
2.E. Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que los estudiantes únicamente observan los datos numéricos de la tabla e identifican la relación aritmética sencilla basada en restar tres unidades.
2.C. *NoRepr-NoJust*, Tabla 42.
2.X. Los estudiantes proporcionan de manera oral explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo empleado consistente en restar unidades entre las columnas correspondientes al número de lados y al número de diagonales. El enunciado no pide explicaciones, pero las grabaciones de audio proporcionan esta información.
2.R. Se utiliza la representación aritmética tanto para resolver la cuestión como para expresar el resultado. Se establecen relaciones entre los datos numéricos presentes en la tabla, pero no se conecta con la representación geométrica.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>RelVerb-JustInsuf
Los estudiantes identifican y expresan verbalmente la relación entre el número de lados y el de diagonales, pero no dan una justificación suficiente. Tratan de responder a la pregunta de "por qué" pero su justificación no muestra relaciones entre la propiedad geométrica que se está aprendiendo (número de diagonales desde un vértice) y el número de lados del polígono.

5EP3: Hay una diferencia de tres, porque siempre hay dos que no se pueden hacer.

IES8: El número de diagonales desde un vértice es el mismo número de lados menos tres. Porque de todos los vértices que tiene la figura hay tres que no los puedes hacer.

Figura 66. Cuestión 2b. Ejemplos de respuestas RelVerb-JustInsuf.</td>
<td rowspan="2">3.P. Se resuelve identificando y expresando verbalmente la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales de un polígono a partir de la tabla completada en el apartado anterior.
3.F. Descubrir, expresar y justificar la relación general entre el número de lados y el número de diagonales por cada vértice observando casos concretos, con el objetivo de profundizar en la comprensión del algoritmo general para el cálculo del número total de diagonales. Los estudiantes observan que se debe restar tres unidades, que corresponden a los tres vértices a los que no se puede unir la diagonal al trazarla desde un vértice concreto.
3.E. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo, ya que no existe un algoritmo que seguir para responderla. Los estudiantes deben prestar atención a los datos de la tabla para encontrar la relación general, aplicarla, verbalizarla y justificarla.
3.C. NoRepr-RelVerb, Tabla 44.
2.X. NoRepr-RelVerb, Tabla 44.
2.R. Para expresar el resultado se utiliza la representación verbal. No se establecen relaciones entre la representación geométrica y la aritmética al justificar el resultado. Los estudiantes no hacen mención a que las tres unidades que se restan corresponden a los tres vértices a los que no puede trazarse diagonales.</td></tr>
<tr><td>

Nivel Algoritmos con conexiones</td></tr>
</table>

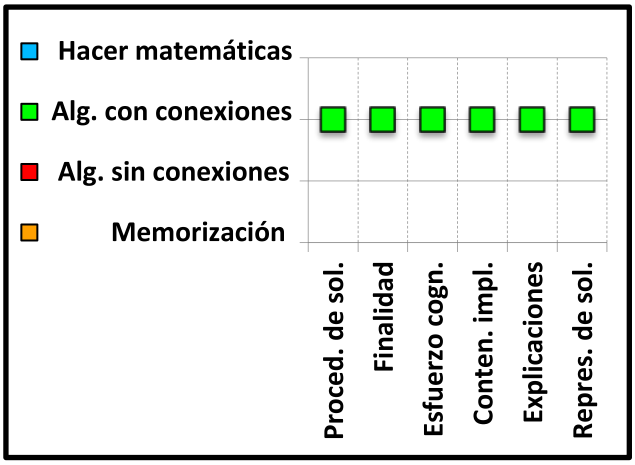
Descripción	**Características**
RelVerb-JustSuf Identifican y expresan verbalmente la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales por vértice y justifican su respuesta conectado la representación aritmética y geométrica considerando los elementos que subyacen a los algoritmos. AVAST1: *El número de lados menos tres, porque dos de los vértices están unidos y forman la raya de fuera* [lado] *y el propio vértice tampoco cuenta.* 5EP4: *Se le resta 3 lados, porque no se pueden hacer diagonales desde dos de los lados* [vértices] *ni desde el mismo.* Figura 67. Cuestión 2b. Ejemplos de respuestas *RelVerb-JustSuf.*	**3.P.** *RelVerb-JustInsuf,* Tabla 45. **3.F.** *RelVerb-JustInsuf,* Tabla 45. **3.E.** *RelVerb-JustInsuf,* Tabla 45. **3.C.** *NoRepr-RelVerb,* Tabla 44. **3.X.** Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación entre el número de lados y el de diagonales y a los valores de la tabla. **3.R.** Para expresar el resultado se utiliza la representación verbal, pero al justificar el resultado se establecen relaciones entre la representación geométrica y la aritmética (observando que se trata de restar tres unidades).
 **Nivel *Algoritmos con conexiones***	

Tabla 45. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la cuestión 2b de la actividad de geometría plana.

Además de estas resoluciones, encontramos algunos estudiantes que no contestan a esta pregunta o dan una respuesta incorrecta, como es el caso de aquellos que no identifican correctamente la relación entre el número de lados y el número de diagonales de un vértice.

Descripción	
NoRel No identifican la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales desde cada vértice.	AVAST5: *3=0, 4=1, 5=2, 6=3, 7=4, 8=5.* IES10: *Ninguna porque no son iguales.* IES13: *Una, porque aumenta.* Figura 68. Cuestión 2b. Ejemplos de respuestas *NoRel.*
NC No contestan.	

Tabla 46. Análisis de las respuestas incorrectas obtenidas a la cuestión 2b de la actividad de geometría plana.

En conclusión, al analizar las respuestas correctas de los estudiantes al responder la segunda cuestión nos encontramos ante las siguientes situaciones:

- Todos los estudiantes del grupo talentoso y de 5º de Educación Primaria resolvieron el apartado 2a. Sin embargo, el 27,3% de los estudiantes de 1º de ESO no dio ninguna solución.
- En el apartado 2a, encontramos tres estrategias diferentes, aunque únicamente dos de ellas fueron consideradas en el análisis teórico (Tabla 36). Las dos primeras estrategias corresponden al nivel *algoritmos sin conexiones*, bien sea cuando los estudiantes completan la tabla dibujando las diagonales y realizando el conteo, o cuando identifican la relación aritmética entre las filas de la tabla, observando que cada fila aumenta una unidad. Por su parte, la tercera estrategia es propia del nivel *algoritmos con conexiones,* ya que en este caso los estudiantes identifican y comprenden la relación entre el número de lados y el de diagonales. No obstante, son incapaces de justificar correctamente dicha relación.
- Un resultado sorprendente que nos llama la atención es que todos los estudiantes del grupo de 1º de ESO y del grupo talentoso resolvieron el apartado 2a haciendo uso de la representación de las diagonales desde un vértice. Es en el grupo de Educación Primaria donde encontramos estudiantes que no hacen uso del dibujo para completar la tabla (26,6% del grupo de 5º de Educación Primaria).

- No todos los estudiantes fueron capaces de resolver correctamente el apartado 2b. El 14,2% del grupo talentoso, el 13,3% del grupo de 5º de Educación Primaria y 41,8% del grupo de 1º de ESO no contestaron o dieron una respuesta incorrecta.
- En el apartado 2b hemos observado tres estrategias distintas. La primera de ellas corresponde al nivel *algoritmos sin conexiones* y hace referencia a aquellos casos en la que los estudiantes identifican la relación aritmética entre las columnas, pero no comprenden la relación entre el número de diagonales y el número de lados (46,7% del grupo de 5º de Educación Primaria, 32,7% del grupo de 1º de ESO, 42,9% del grupo talentoso). Las otras dos estrategias son de un nivel superior, *algoritmos con conexiones*, ya que esta vez los estudiantes sí que comprenden dicha relación, pero diferenciaremos entre aquellos que la justifican de manera insuficiente (26,7% del grupo de 5º de Educación Primaria y 18,2% del grupo de 1º de ESO) y los que son capaces de relacionar los elementos matemáticos implicados para argumentar su resultado (13,3% grupo de 5º de Educación Primaria, 7,3% del grupo de 1º de ESO y 42,9% del grupo talentoso). Esta última estrategia es la que está plasmada en el análisis teórico (Tabla 36).
- Al igual que ocurría con la primera cuestión, observamos que, a pesar de la disparidad de resultados obtenidos en el grupo talentoso, es en este grupo donde encontramos un porcentaje mayor de respuestas en las que se hace uso de un nivel de razonamiento superior. No obstante, cabe señalar que las diferencias encontradas en el grupo talentoso son causadas debido a que no todos los estudiantes de este grupo destacaban en matemáticas.

5.2.2.3 **Cuestión 3**

En esta última cuestión, podemos identificar distintas estrategias de resolución con diferente nivel de demanda cognitiva, algunas de ellas influenciadas por las estrategias escogidas en la cuestión 2. El análisis de respuestas de la tercera cuestión está dividido en tres partes que corresponden a sus apartados (3a, 3b y 3c).

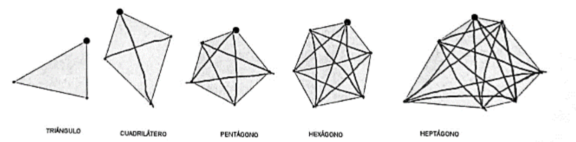
En el apartado 3a, al completar la tabla, como ocurría en los casos anteriores, podremos diferenciar entre aquellos que hacen uso de la representación geométrica y los que son capaces de deducir los resultados a partir de los primeros casos.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RepresentCorrect
Los estudiantes utilizan la representación geométrica correcta. Dibujan todas las diagonales sobre cada uno de los polígonos de la cuestión 2 y, a partir de estos realizan el conteo y completan la tabla.

AVAST5:

2. (Applet 7.2) Observa los polígonos. Responde a las siguientes preguntas.



3. (applet 7.2) Dibuja y calcula el número de **diagonales totales** de cada polígono:

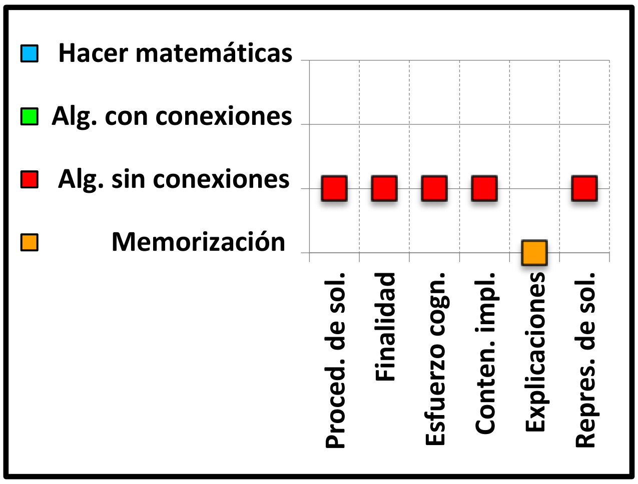
<table>
<tr><th>POLÍGONO</th><th>Nº DE LADOS</th><th>Nº DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE</th><th>Nº TOTAL DE DIAGONALES</th></tr>
<tr><td>TRIÁNGULO</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>QUADRILATERO</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>PENTÁGONO</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>HEXÁGONO</td><td>6</td><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>HEPTÁGONO</td><td>7</td><td>4</td><td>14</td></tr>
<tr><td>OCTÓGONO</td><td>8</td><td>5</td><td>20</td></tr>
</table>

Figura 69. Cuestión 3a. Ejemplo de respuesta RepresentCorrect.

</td><td rowspan="2">

2.P. *RepresentCorrect*, Tabla 44.
2.F. *RepresentCorrect*, Tabla 44.
2.E. *RepresentCorrect*, Tabla 44.
2.C. *RepresentCorrect*, Tabla 44.
1.X. *RepresentCorrect*, Tabla 44.
2.R. *RepresentCorrect*, Tabla 44.

</td></tr>
<tr><td>



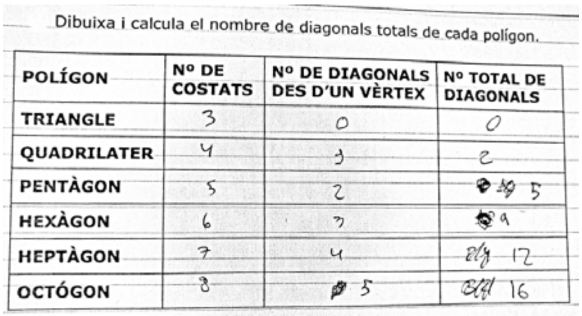
Nivel *Algoritmos sin conexiones*

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RelArit
Identifican la relación aritmética existente entre el número de lados y el número total de diagonales. Utilizan las operaciones aritméticas correspondientes para calcular el número total de diagonales y completar la tabla.

5EP1: [grabación de audio] *Cuadrado 2, pentágono 10, hexágono 18, heptágono 24, octágono 32…*
[comienza multiplicando el número de diagonales por cada vértice por el número de lados, pero se da cuenta de su error]
Hay algunas diagonales que ya son las mismas, el pentágono no tiene 10 diagonales totales sino 5. Hay que escribir la mitad, porque hay dos diagonales que son la misma.



Dibuixa i calcula el nombre de diagonals totals de cada polígon.

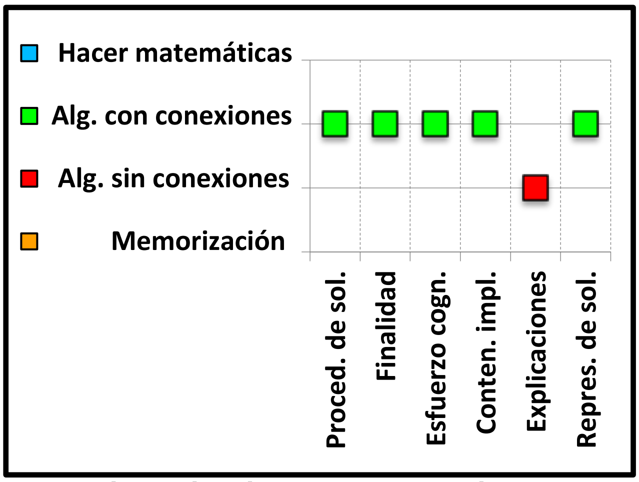
POLÍGON	Nº DE COSTATS	Nº DE DIAGONALS DES D'UN VÈRTEX	Nº TOTAL DE DIAGONALS
TRIANGLE	3	0	0
QUADRILATER	4	1	2
PENTÀGON	5	2	5
HEXÀGON	6	3	9
HEPTÀGON	7	4	12
OCTÓGON	8	5	16

Figura 70. Cuestión 3a. Ejemplo de respuesta *RelArit.*

</td><td rowspan="2">

3.P. *NoRepr-RelVerb*, Tabla 44.
3.F. Completar la tabla sin necesidad de hacer uso de la representación geométrica e iniciar la comprensión de la relación entre el número de lados y el número de diagonales desde cada vértice. Los estudiantes observan que se debe multiplicar el número de diagonales por cada vértice por el número lados y luego dividir dicho resultado entre dos para no contar dos veces cada diagonal.
3.E. *NoRepr-RelVerb*, Tabla 44.
3.C. Los estudiantes necesitan considerar conscientemente la relación entre el número de lados y el número total diagonales.
2.X. Los estudiantes proporcionan de manera oral explicaciones basadas en la descripción del algoritmo empleado, consistente en multiplicar el número de diagonales de cada vértice por el número lados y luego dividir dicho resultado entre 2 para no contar dos veces cada diagonal. El enunciado no pide explicaciones, pero las grabaciones de audio proporcionan esta información. Los estudiantes muestran indicios de comprender la relación, pero implícita su justificación es insuficiente.
3.R. Para expresar el resultado se utiliza la representación aritmética, obtenida a partir de la conexión entre los resultados de la representación geométrica y la representación tabular.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel ***Algoritmos con conexiones***

</td></tr>
</table>

Tabla 47. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la cuestión 3a de la actividad de geometría plana.

Además, podemos encontrar algunos estudiantes que no han utilizado dichas estrategias de manera correcta (46,7% del grupo de Educación Primaria y 25,4% del grupo de 1º de ESO), ya sea por falta de comprensión de la definición de diagonal o por carencias en la capacidad de explorar resultados y obtener relaciones generales, por lo que han obtenido resultados erróneos.

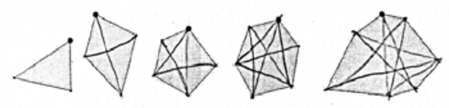
<table>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td>RepresentIncorret
Utilizan la representación geométrica para calcular el número total de diagonales de manera incorrecta. Comente errores, al dibujar debido a que no comprenden la definición de diagonal y completan la tabla de manera incorrecta.</td>
<td>IES13:
2. (applet 7.2) Observa els polígons. Respon a les següents preguntes.

c) Dibuixa i calcula el nombre de diagonals totals de cada polígon.
<table>
<tr><th>POLÍGON</th><th>Nº DE COSTATS</th><th>Nº DE DIAGONALS DES D'UN VÈRTEX</th><th>Nº TOTAL DE DIAGONALS</th></tr>
<tr><td>TRIANGLE</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>QUADRILATER</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>PENTÀGON</td><td>5</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>HEXÀGON</td><td>6</td><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td>HEPTÀGON</td><td>7</td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>OCTÓGON</td><td>8</td><td>5</td><td>14</td></tr>
</table>
Figura 71. Cuestiones 3a. Ejemplo de respuesta RepresentIncorrect.</td></tr>
<tr><td>NoRel.
No identifican la relación implícita existente entre el número de lados y el número total de diagonales. Completan la tabla sin hacer uso de la representación de las diagonales, haciendo uso de una relación incorrecta. A partir del número total de diagonales del cuadrado van añadiendo uno como ocurría con el número de diagonales por vértice.</td>
<td>IES20:
c) Dibuixa i calcula el nombre de diagonals totals de cada polígon.
<table>
<tr><th>POLÍGON</th><th>Nº DE COSTATS</th><th>Nº DE DIAGONALS DES D'UN VÈRTEX</th><th>Nº TOTAL DE DIAGONALS</th></tr>
<tr><td>TRIANGLE</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>QUADRILATER</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>PENTÀGON</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>HEXÀGON</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>HEPTÀGON</td><td>7</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>OCTÓGON</td><td>8</td><td>6</td><td>6</td></tr>
</table>
Figura 72. Cuestiones 3a. Ejemplo de respuesta NoRel.</td></tr>
</table>

Tabla 48. Análisis de las respuestas incorrectas obtenidas a la cuestión 3a de la actividad de geometría plana.

En lo que respecta al apartado 3b, este únicamente fue planteado a los estudiantes de 5º de Educación Primaria, por lo que sólo podemos clasificar las respuestas de estos estudiantes. De este grupo, el 40% de los estudiantes identificó la relación correcta en el apartado 2a y la aplicó para resolver este apartado.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RelArit
Identifican la relación aritmética entre el número de lados y el número total de diagonales. Utilizan dicha relación para obtener las diagonales del polígono de 20 lados

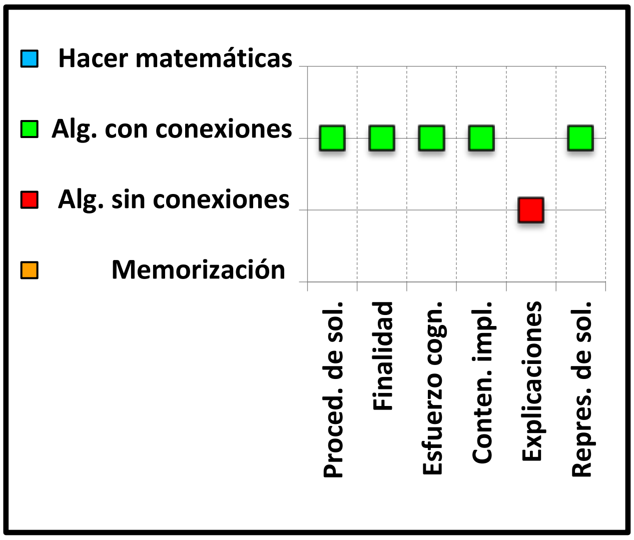
5EP1: [grabación de audio] *Multiplicamos el número de lados por las diagonales desde un vértice, 17·20=340 y después lo dividimos entre 2, 170 diagonales totales.*

Figura 73. Cuestión 3b. Ejemplos de respuestas *RelArit.*

</td><td rowspan="2">

3.P. Se resuelve identificando en los primeros casos de la tabla la relación aritmética existente entre el número total de diagonales y el número de lados y aplicando dicha relación para obtener un resultado para el polígono de 20 lados.
3.F. Utilizar las relaciones aritméticas para calcular el número total de diagonales de un caso concreto, de manera que los estudiantes descubran la relación implícita existente entre el número total de diagonales y el número de lados.
3.E. *NoRepr-RelVerb*, Tabla 44.
3.C. *RelArit,* Tabla 47.
2.X. *RelArit,* Tabla 47.
3.R. *RelArit,* Tabla 47.

</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Algoritmos con conexiones*

</td></tr>
</table>

Tabla 49. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la cuestión 3b de la actividad de geometría plana.

Sin embargo, no todos fueron capaces de identificar una relación correcta que les permitiera obtener el resultado, algunos estudiantes o no contestaron a la pregunta (26,7% de los estudiantes) o lo hicieron de manera incorrecta (33,3% de los estudiantes).

Descripción	
NoRel-Incorret No identifican la relación implícita existente entre el número de lados y el número de diagonales. Utilizan una relación incorrecta y dan un resultado erróneo.	5EP2: *17* [En vez de responder al número total de diagonales contestan al número de diagonales por vértice]. Figura 74. Cuestiones 3b. Ejemplo de respuesta *NoRel-Incorrect.*
NC No contestan.	

Tabla 50. Análisis de las respuestas incorrectas obtenidas a la cuestión 3b de la actividad de geometría plana.

En el apartado 3c, a la hora de identificar la relación entre el número de lados y el número total de diagonales, podemos diferenciar distintas estrategias en función de si identifican correctamente la relación, si justifican su origen y si la expresan de manera algebraica o haciendo uso del lenguaje verbal. El tipo de razonamiento utilizado para justificar la respuesta es uno de los aspectos que permiten discriminar las respuestas según el grupo de estudiantes al que pertenece. Mientras el 86,7% del grupo de estudiantes de Educación Primaria no dio ninguna justificación, el 47,2% de los estudiantes del 1º de ESO utilizó una justificación verbal y el 85,7% del grupo talentoso optó por utilizar una expresión algebraica que simbolizara la regla general.

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

RelVerb-NoJust
Identifican la relación entre el número de lados y el número de diagonales y la expresan mediante el lenguaje verbal pero no justifican dicha relación.

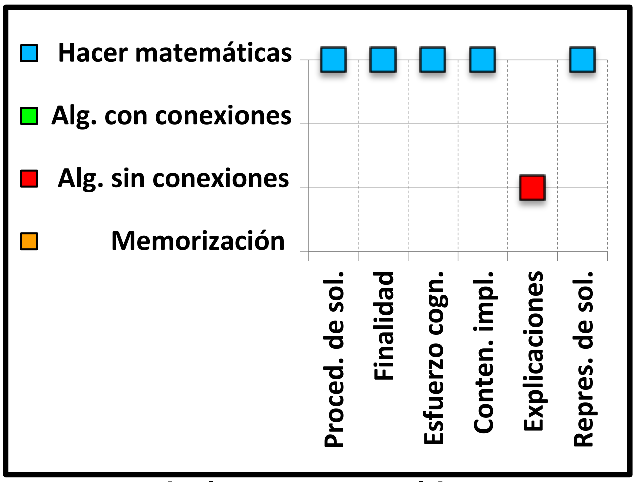
5EP1: *Se multiplica el número de lados por las diagonales desde un vértice y después se divide entre dos.*

Figura 75. Cuestión 3c. Ejemplos de respuestas *RelVerb-NoJust.*

</td><td rowspan="2">

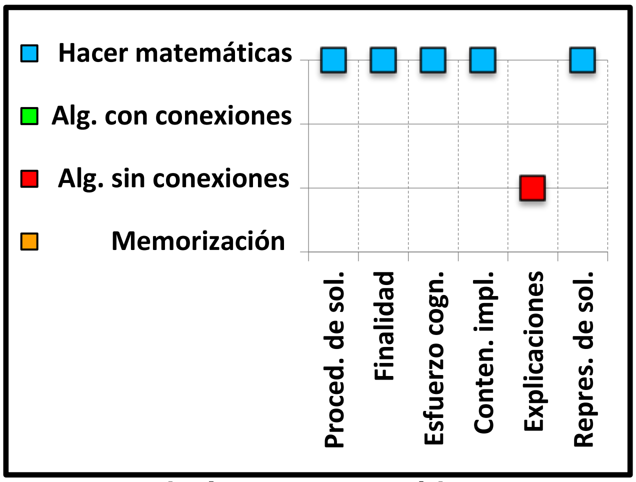
4.P. No es algorítmica. Los estudiantes deben analizar las relaciones obtenidas hasta el momento y los datos recogidos para poder obtener una fórmula general.
4.F. Analizar, comprender y enunciar la relación general entre el número de lados y el número total de diagonales, de manera que lleguen a obtener la fórmula general para el cálculo del número total de diagonales. Los estudiantes observan que se debe restar tres unidades, que corresponden a los tres vértices a los que no se puede unir la diagonal al trazarla desde un vértice concreto.
4.E. Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo, ya que los estudiantes no solo deben ser capaces de comprender la relación implícita existente, sino que deben saber verbalizarla de manera general.
4.C. Los estudiantes deben recurrir a su experiencia en las cuestiones 3a y 3b para expresar en lenguaje verbal una fórmula general.
2.X. Dan explicaciones basadas en la propia relación general que describe el algoritmo utilizado para calcular el número total de diagonales.
4.R. La resolución se basa en la representación verbal de la fórmula de cálculo del número de diagonales de un polígono cualquiera.

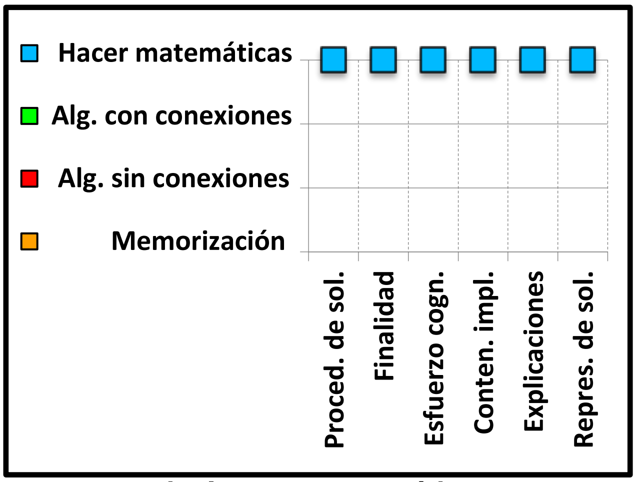
</td></tr>
<tr><td>



Nivel *Hacer matemáticas*

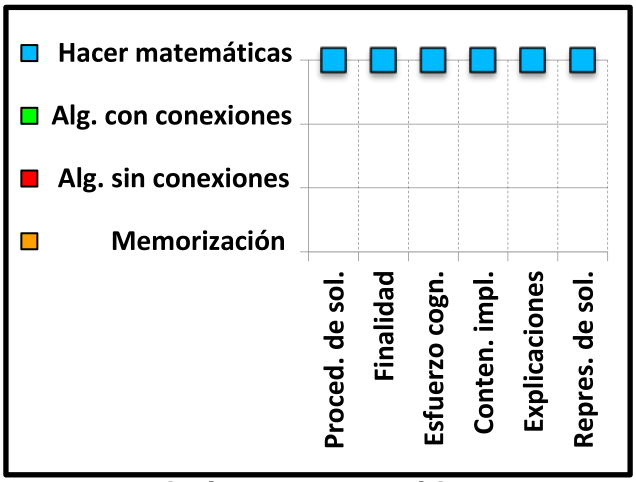
</td></tr>
</table>

Descripción	Características
RelAlg-NoJust Identifican la relación algebraica entre el número de lados y el número de diagonales y la expresan mediante el lenguaje algebraico, pero no justifican dicha relación. AVAST2: *n*(n-3)/2* AVAST3: *nº lados *(nº lados – 3)/2* Figura 76. Cuestión 3c. Ejemplos de respuestas *RelAlg-NoJust.*	**4.P.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.F.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.E.** Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo, ya que los estudiantes no solo deben ser capaces de comprender la relación implícita existente, sino que deben saber expresarla de manera general con lenguaje algebraico. **4.C.** Los estudiantes deben recurrir a su experiencia en las cuestiones 3a y 3b para expresar en lenguaje algebraico una fórmula general. **2.X.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.R.** La resolución se basa en la representación algebraica de la fórmula de cálculo del número de diagonales de un polígono cualquiera.
 **Nivel *Hacer matemáticas***	

Descripción	**Características**
RelVerb-JustSuf Además de identificar la relación y expresarla mediante lenguaje verbal, justifican la fórmula obtenida a partir de la propiedad geométrica subyacente. IES4: *Tienes que multiplicar el número de lados por el número de diagonales que salen de un vértice y dividirlo entre dos. El número de diagonales totales no se corresponde con el número de lados de un polígono multiplicado por el número de diagonales desde cada vértice porque si lo hiciésemos así estaríamos calculando el doble de diagonales, ya que, si hacemos una diagonal desde un vértice al otro, del otro* Figura 77. Cuestión 3c. Ejemplo de respuesta *RelVerb-Just.*	**4.P.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.F.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.E.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.C.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51. **4.X.** Las explicaciones dadas hacen referencia a la relación general que permite obtener el número total de diagonales a partir del número de lados de cualquier polígono. **4.R.** *RelVerb-NoJust,* Tabla 51.
 **Nivel *Hacer matemáticas***	

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>RelAlg-JustSuf
Además de identificar la relación y expresarla mediante lenguaje algebraico justifican la fórmula obtenida a partir de la propiedad geométrica subyacente.

AVAST1: Dividimos Lados·(lados -3)/2, porque de arriba sale uno hacia abajo y de abajo sale uno hacia arriba, así que esta repetido, es el mismo. Entonces la fórmula es n*(n-3)/2.

Figura 78. Cuestión 3c. Ejemplo de respuesta RelAlg-Just.</td><td rowspan="2">4.P. RelVerb-NoJust, Tabla 51.
4.F. RelVerb-NoJust, Tabla 51.
4.E. RelAlg-NoJust, Tabla 51.
4.C. RelAlg-NoJust, Tabla 51.
4.X. RelVerb-Jus, Tabla 51.
4.R. RelAlg-NoJust, Tabla 51.</td></tr>
<tr><td>

Nivel Hacer matemáticas</td></tr>
</table>

Tabla 51. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la cuestión 3c de la actividad de geometría plana.

También encontramos estudiantes que identifican una relación errónea, dando un resultado incorrecto.

<table>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td>NoRel-Incorret
Utilizan una relación incorrecta, no comprueban que no es cierta y dan un resultado erróneo.</td><td>IES9: Multiplicando el número de lados por el número de diagonales que sale de cada vértice.
Figura 79. Cuestiones 3c. Ejemplo de respuesta NoRel-Incorrect.</td></tr>
</table>

Tabla 52. Análisis de las respuestas incorrectas obtenidas a la cuestión 3c de la actividad de geometría plana.

Al analizar las respuestas correctas de los estudiantes al responder la tercera cuestión, nos encontramos ante las siguientes posibilidades:

- Mientras todos los estudiantes del grupo talentos resolvieron correctamente el apartado 3a, el 46,7% del grupo de 5º de Educación Primaria y 52,7% del grupo de 1º de ESO no contestaron o dieron una respuesta incorrecta. Al resolver el apartado 3a encontramos dos estrategias diferentes. La primera de ellas, correspondiente al nivel *algoritmos sin conexiones*, consiste en dibujar el número total de diagonales de cada polígono y realizar el conteo para completar la tabla. La segunda es de un nivel superior, *algoritmos con conexiones,* y requiere que los estudiantes identifiquen la relación aritmética entre el número de lados y el número total de diagonales y complete la tabla sin hacer uso de la representación geométrica de las diagonales. Ambas estrategias de resolución, con alguna variación, corresponden a las vistas en el análisis teórico (Tabla 37). Además, cabe añadir que todos los estudiantes que resolvieron correctamente el apartado 3a de los grupos ordinarios (53,3% del grupo de 5º de Educación Primaria y 47,3% del grupo de 1º de ESO) optaron por la representación de las diagonales y el conteo, mientras que la mayoría de los estudiantes del grupo talentoso (85,7% de los estudiantes) optaron por la segunda opción.
- El apartado 3b únicamente fue propuesto a los estudiantes de 5º de Educación Primaria. Entre sus resoluciones únicamente hemos encontrado una estrategia de resolución correcta, propia del nivel *algoritmos con conexiones,* que requiere la identificación de la relación

aritmética entre el número de lados y el número total de diagonales y el uso de esta relación para obtener el resultado correcto para el polígono de 20 lados, y que fue llevada a cabo por el 40% de los estudiantes de este grupo.

- Para el apartado 3c obtenemos cuatro estrategias diferentes, pero todas ellas del nivel *hacer matemáticas*. Estas cuatro estrategias se diferencian entre ellas en dos aspectos: la forma de expresar la relación general (lenguaje verbal o algebraico) y la forma de justificar dicha relación (sin utilizar ninguna justificación o explicando el papel de los términos que intervienen). El uso de una estrategia u otra varía mucho en función del grupo al que pertenecen los estudiantes. El 86,7% de los estudiantes de Educación Primaria no dio una respuesta a este apartado, y los pocos que lo hicieron expresaron la relación verbal sin aportar una justificación de su origen. El 47,2% de los estudiantes de 1º de la ESO dio una respuesta correcta a este apartado, haciendo todos ellos uso de la relación verbal (18,1% sin justificar dicha relación y 29,1% razonando el origen de dicha expresión). El 85,7% de los estudiantes talentosos resolvió correctamente el apartado haciendo uso de una expresión algebraica, aunque únicamente el 14,3% justificó dicha expresión.

5.3 Visualización

Para la experimentación de visualización, implementamos cuatro tipos de actividades, todas resueltas utilizando el software *Cubos y Cubos* (Hoyos, Aristizábal y Acosta, 2015), dibujando o interpretando las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de un módulo multicubo (el software y las actividades están descritos en las secciones 4.1.3.1 y 4.1.3.2). El objetivo de estas actividades es que los estudiantes desarrollen algunas habilidades de visualización, comprendiendo la definición de las proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha) y estableciendo conexiones entre la información conocida y el objetivo de la actividad.

A continuación, presentamos el doble análisis de las actividades. Primeramente, un análisis teórico, donde determinamos el nivel de demanda cognitiva de cada uno de los cuatro tipos de actividad según su enunciado y, seguidamente, un análisis del nivel de demanda cognitiva de las respuestas dadas por los estudiantes.

5.3.1 *Análisis teórico de las actividades*

En esta sección presentamos un análisis teórico de los cuatro tipos de actividades, diferenciando entre:

- *Actividades de tipos 1 y 2.* Consisten en el dibujo de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de un sólido.
- *Actividades de tipos 3 y 4.* Consisten en la construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas).

Al igual que en los dos contextos matemáticos vistos anteriormente, hemos asignado a cada tipo de actividad seis características, una por cada categoría (procedimiento de resolución, finalidad, esfuerzo cognitivo, contenidos implícitos, explicaciones y representación de la solución), haciendo uso de las descripciones particularizadas para tareas de proyecciones ortogonales (Tabla 18).

5.3.1.1 **Actividades de tipos 1 y 2. Dibujo de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de un sólido**

En las actividades de tipos 1 y 2, el software proporciona un sólido (Figura 80) y los estudiantes deben dibujar sus proyecciones ortogonales ordinarias (tipo 1) o codificadas (tipo 2) en una cuadrícula.

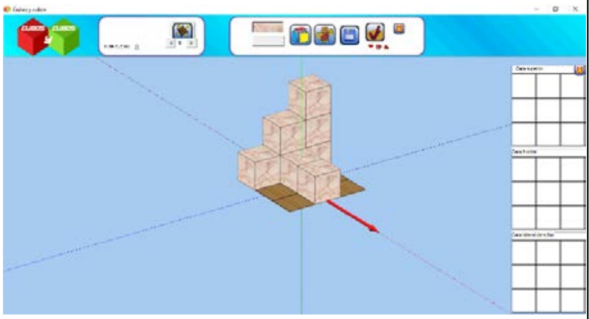
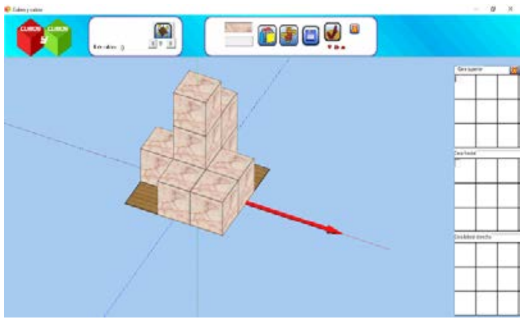
Tipo 1. Dibuja en la pantalla las proyecciones ortogonales ordinarias del sólido:	**Tipo 2.** Dibuja en la pantalla las proyecciones ortogonales codificadas del sólido:
	

Figura 80. Actividades de tipos 1 y 2 de proyecciones ortogonales. Dibujo de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de un sólido.

El nivel de demanda cognitiva de estas actividades puede variar en función de la estrategia de resolución esperada por un estudiante medio. A la hora de resolver estas actividades, podemos encontrar dos estrategias de resolución diferentes:

- *Estrategia 1.* Los estudiantes mueven el sólido para colocarlo de manera que puedan observar de frente, “una a una”, cada proyección ortogonal y copiar la imagen o contar el número de cubos que hay en cada fila. Esta estrategia de resolución es propia del nivel *algoritmos sin conexiones,* ya que se basa en seguir unos pasos o instrucciones sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización.
- *Estrategia 2.* Los estudiantes mantienen el sólido en una o varias posiciones fijas, es decir, no mueven el sólido para hacer los sucesivos dibujos de las proyecciones. Esta estrategia de resolución es propia del nivel *algoritmos con conexiones.* Los estudiantes emplean las habilidades de *reconocimiento de relaciones espaciales* y *posiciones en el espacio* identificando relaciones entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos. Además, utilizan las habilidades de *conservación de la percepción* y *memoria visual* recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven desde la posición fija en la que se encuentra el sólido.

A continuación, en la Tabla 53, mostramos el análisis detallado de estos dos tipos de actividades, diferenciando las dos estrategias de resolución y su nivel de demanda cognitiva.

Nivel de D. C.	Categoría	Características
2/3. Algoritmos Sin / Con conexiones	Procedimiento de resolución	*Estrategia 1.* (2.P) Se resuelve siguiendo una serie de pasos sencillos e intuitivos, basados en el movimiento y observación del sólido. Los estudiantes sitúan el sólido en diferentes posiciones que facilitan la identificación de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas). Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin hacer un uso significativo de las habilidades de visualización. *Estrategia 2.* (3.P) Se resuelve dibujando las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) manteniendo el sólido en una o varias posiciones fijas. No se trata de una posición cualquiera, los estudiantes deben decidir qué posición les permite visualizar las tres proyecciones ortogonales. Los estudiantes necesitan utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual).
	Finalidad	*Estrategia 1.* (2.F) Obtener respuestas correctas sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización (p. ej., estudiantes mueven el sólido para colocarlo de manera que puedan observar de frente, "una a una", cada proyección ortogonal y copiar la imagen o contar el número de cubos que hay en cada fila). *Estrategia 2.* (3.F) Identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos, recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición.
	Esfuerzo cognitivo	*Estrategia 1.* (2.E) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo, ya que los estudiantes se limitan a mover el sólido, situándolo en una posición adecuada, para determinar cada proyección. *Estrategia 2.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Es necesario utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual).

Nivel de D. C.	Categoría	Características
	Contenidos implícitos	*Estrategia 1.* (2.C) Se emplean las habilidades de visualización para mover el sólido a posiciones específicas, utilizando la definición de las tres proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha). *Estrategia 2.* (3.C) Los estudiantes necesitan identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio), a la vez que recuerdan aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición (conservación de la percepción y memoria visual).
	Explicaciones	*Estrategia 1 y 2.* (1.X) El enunciado no pide dar explicaciones.
	Representación de la solución	*Estrategia 1.* (2.R) Para dibujar las proyecciones ortogonales ordinarias, se utiliza la representación geométrica de las proyecciones. Para las proyecciones ortogonales codificadas, se utiliza la representación geométrica de las proyecciones combinada con la representación aritmética de las cantidades de cubos. *Estrategia 2.* (3.R) Para dibujar las proyecciones ortogonales ordinarias, se utiliza la representación geométrica de las proyecciones. Para las proyecciones ortogonales codificadas, se utiliza la representación geométrica de las proyecciones combinada con la representación aritmética de las cantidades de cubos. Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica del sólido conocido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales.

Tabla 53. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de las actividades de los tipos 1 y 2 de proyecciones ortogonales.

5.3.1.2 Actividades de tipos 3 y 4. Construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas)

En las actividades de los tipos 3 y 4 (Figura 81), el software proporciona las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de un sólido y los estudiantes deben construir dicho sólido.

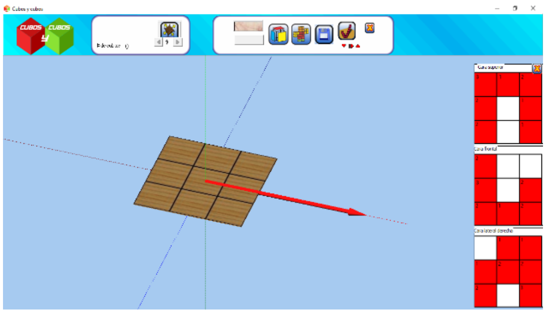
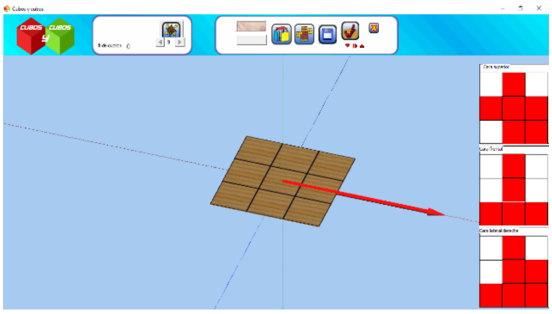
Tipo 3. Construye un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas.	**Tipo 4.** Construye un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.
	

Figura 81. Actividades de tipos 3 y 4 de proyecciones ortogonales. Construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas).

Estas actividades suponen un incremento del nivel de demanda cognitiva respecto de los anteriores, ya que ninguna de ellas puede ser resuelta mediante un procedimiento sencillo. Para resolver correctamente estas actividades, es necesario que los estudiantes utilicen habilidades de visualización. No obstante, las actividades pueden ser resueltas haciendo uso de diferente nivel de demanda cognitiva dependiendo de la estrategia escogida. A la hora de resolver estas actividades, podemos esperar dos estrategias de resolución diferentes de resolutor medio:

- *Estrategia 1.* Los estudiantes aplican un algoritmo general basado en un uso secuencial de las proyecciones ortogonales. Construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan, así sucesivamente hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones*.* Esta estrategia de resolución es propia del nivel *algoritmos con conexiones.* Los estudiantes emplean las habilidades de *reconocimiento de relaciones espaciales* y *posiciones en el espacio* identificando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados).
- *Estrategia 2.* Los estudiantes construyen el sólido utilizando las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea*.* Esta estrategia de resolución es propia del nivel *hacer matemáticas.* Los estudiantes

emplean las habilidades de *relaciones espaciales* y *reconocimiento de posiciones en el espacio* identificando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados).

En la Tabla 54, mostramos el análisis detallado de estos dos tipos de actividades, diferenciando las dos estrategias de resolución y su nivel de demanda cognitiva.

Nivel de D. C.	**Categoría**	**Características**
3/4. Algoritmos Con conexiones/ Hacer matemáticas	Procedimiento de resolución	*Estrategia 1.* (3.P) Se resuelve aplicando un algoritmo general basado en un uso secuencial de las proyecciones ortogonales. No se trata de una secuencia única de pasos, los estudiantes deben decidir cómo seguir (p. ej., deben decidir a qué proyección prestar atención en cada momento). Los estudiantes construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan, así sucesivamente hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones. Los estudiantes necesitan utilizar las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio. *Estrategia 2.* (4.P) Se resuelve aplicando una estrategia de resolución compleja y no algorítmica. Los estudiantes construyen el sólido explorando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, (p. ej., los estudiantes construyen el sólido por filas, considerando simultáneamente las tres proyecciones ortogonales dadas). Requiere que los estudiantes analicen la actividad y hagan uso de las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.
	Finalidad	*Estrategia 1.* (3.F) Usar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), utilizando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y de posiciones en el espacio. *Estrategia 2.* (4.F) Explorar y comprender las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), aplicando la información de las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea.

Nivel de D. C.	Categoría	Características
	Esfuerzo cognitivo	*Estrategia 1.* (3.E) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Es necesario utilizar las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio. *Estrategia 2.* (4.E) Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo: No existe un único método de resolución. Las formas de resolución no son fácilmente predecibles. Requieren examinar y utilizar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, aplicando dicha información de manera correcta para la construcción del sólido.
	Contenidos implícitos	*Estrategia 1.* (3.C) Los estudiantes necesitan considerar relaciones entre diferentes partes de las tres proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos). *Estrategia 2.* (4.C) Los estudiantes tienen que comprender y coordinar las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), empleando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.
	Explicaciones	*Estrategia 1 y 2.* (1.X) El enunciado no pide dar explicaciones.
	Representación de la solución	*Estrategia 1.* (3.R) Se utiliza la representación geométrica del sólido construido. Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica del sólido construido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales. *Estrategia 2.* (4.R) Se utiliza la representación geométrica del sólido construido.

Tabla 54. Análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de las actividades de tipos 3 y 4 de proyecciones ortogonales.

5.3.1.3 Análisis teórico del conjunto de actividades

Una vez conocido el nivel teórico de demanda cognitiva de los cuatro tipos de actividades de visualización, podemos analizar la evolución del nivel de demanda cognitiva del tipo 1 al tipo 4. Podemos observar que, partiendo del análisis de respuestas de un estudiante medio, capaz de resolver correctamente todas las actividades, la resolución de cada tipo de actividad es independiente del resto, por lo que el uso de una estrategia en cierto momento no va a determinar qué estrategia de resolución se utilizará más adelante. Este hecho provoca que existan tantas trayectorias posibles como el número combinaciones de las estrategias de resolución explicadas en las secciones anteriores. No obstante, cabe destacar que, a pesar de existir diferentes trayectorias según las estrategias escogidas, en todas ellas se produce un crecimiento del nivel de demanda cognitiva. Esta evolución creciente del nivel de demanda cognitiva define esta actividad como una actividad apropiada para ser implementada en una clase ordinaria y satisfacer las necesidades de aprendizaje de los estudiantes talentosos.

5.3.2 *Análisis de respuestas de los estudiantes*

En esta sección vamos a mostrar un análisis de las respuestas obtenidas por los estudiantes. Para ello, hemos identificado los diferentes tipos de respuestas que hemos obtenido en nuestra experimentación y hemos analizado su nivel de demanda cognitiva haciendo uso de las descripciones particularizadas para tareas de proyecciones ortogonales (Tabla 18). En la Tabla 55 describimos las estrategias de resolución observadas durante nuestra experimentación y las abreviaturas que utilizaremos a lo largo del análisis de respuestas para hacer referencia a dichas estrategias de manera abreviada. En esta tabla no incluimos un ejemplo de cada tipo de estrategia de resolución, ya que todos ellos aparecerán a lo largo del análisis de respuestas que mostramos seguidamente.

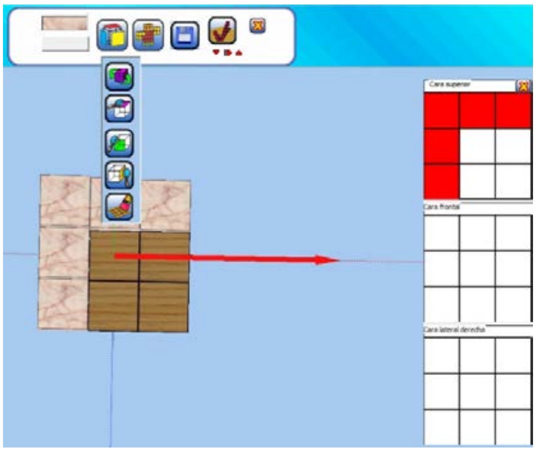
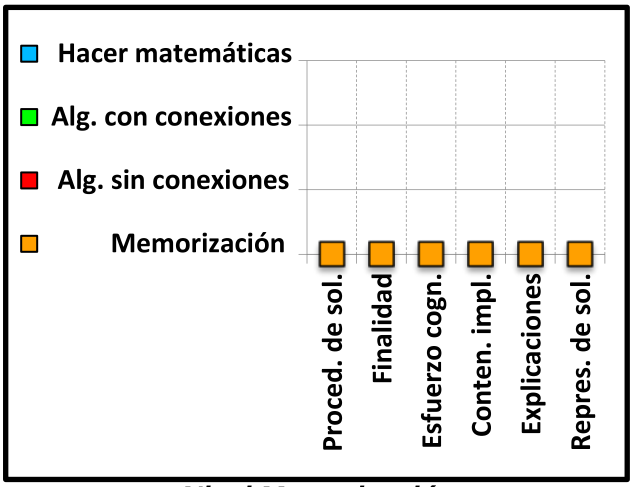
ABREVIATURA	DESCRIPCIÓN RESPUESTA
Copia	*Copia.* Los estudiantes copian las imágenes de las proyecciones ortogonales ordinarias dadas por el software. No utilizan las definiciones de las proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha).
Mov	*Movimiento del sólido.* Los estudiantes mueven el sólido para colocarlo de manera que puedan observar de frente, “una a una”, cada proyección ortogonal y copiar la imagen de la pantalla. Utilizan las habilidades de visualización para mover el sólido a posiciones específicas, usando la definición de las tres proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha).
PosFija	*Posición fija del sólido*. Los estudiantes mantienen el sólido en una posición fija para dibujar sus proyecciones ortogonales ordinarias. Necesitan identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio), a la vez que recuerdan aquellos cubos que estaban

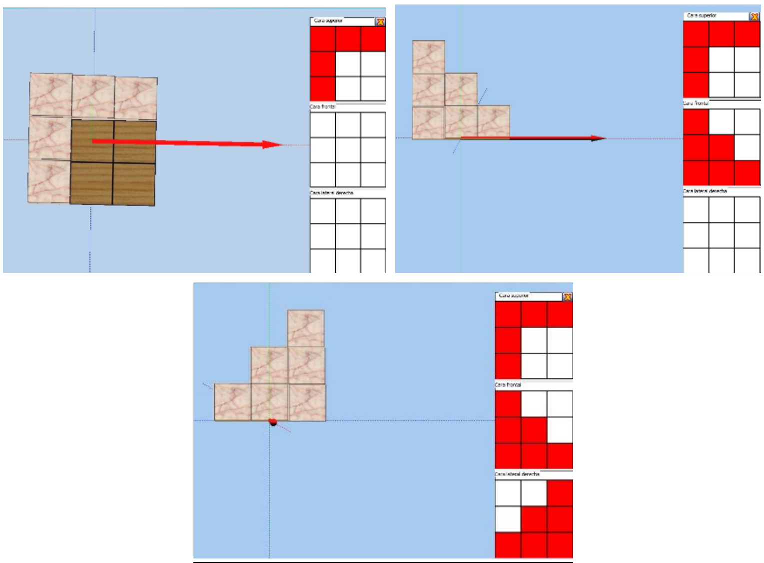
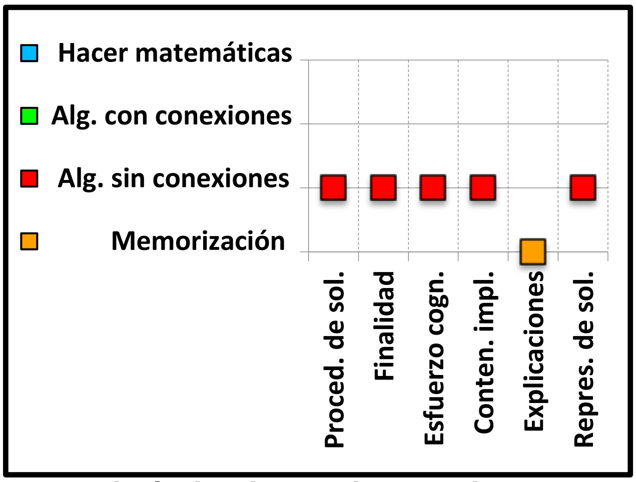
ABREVIATURA	DESCRIPCIÓN RESPUESTA
	a la vista pero que ya no se ven en dicha posición (conservación de la percepción y memoria visual).
MovCont	*Movimiento del sólido y conteo del número de cubos que lo forman.* Los estudiantes mueven el sólido todas las veces que se consideren necesarias para contar el número de cubos por fila en cada proyección ortogonal. Utilizan las habilidades de visualización para mover el sólido a posiciones específicas, usando la definición de las tres proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha).
PosFijaCont	*Posición fija del sólido y conteo del número de cubos que lo forman.* Los estudiantes mantienen el sólido en varias posiciones fijas para dibujar sus proyecciones ortogonales codificadas. Necesitan identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio), a la vez que recuerdan aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición (conservación de la percepción y memoria visual).
CompProyecc	*Construcción del sólido comparando las proyecciones.* Los estudiantes construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan, así sucesivamente hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones. Necesitan identificar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), utilizando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.
AnaProyecc	*Análisis de las tres proyecciones para construir el sólido.* Los estudiantes construyen el sólido explorando las tres proyecciones ortogonales (superior, frontal y derecha) simultáneamente. Necesitan identificar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), utilizando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.

Tabla 55. Código de respuestas de los cuatros tipos de actividades de proyecciones ortogonales.

5.3.2.1 Actividad de tipo 1 (dibujo de las proyecciones ortogonales ordinarias)

El 90% de los estudiantes resolvió correctamente la actividad de tipo 1. Podemos diferenciar tres estrategias de resolución correctas: el 15% de los estudiantes copió la imagen de las proyecciones ortogonales que ofrecía el software (*memorización*), el 32,5% de los estudiantes dibujó las proyecciones ortogonales ordinarias moviendo el sólido para observar de frente, “una a una”, cada proyección ortogonal, copiando la imagen (*algoritmos sin conexiones*) y el 42,5% de los estudiantes dibujó las proyecciones ortogonales ordinarias manteniendo el sólido en una posición fija (*algoritmos con conexiones*).

Descripción	Características
Copia. Los estudiantes investigan las posibilidades que oferta el software, descubriendo una opción en la que el este proporciona automáticamente las proyecciones ortogonales ordinarias del sólido (superior, frontal y derecha). Estos estudiantes se limitan colorear la cuadrícula copiando la imagen de las proyecciones ortogonales. Esta estrategia no está considerada dentro del análisis teórico, puesto que no se esperaba que los estudiantes hicieran uso de dicha función. AVAST6:  Figura 82. Estrategia de resolución Copia.	**1.P.** Se resuelve copiando las imágenes tomadas directamente de la pantalla. **1.F.** Reproducir o copiar imágenes tomadas directamente de la pantalla. **1.E.** Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo cognitivo. No son ambiguas, suponen la reproducción exacta de las imágenes proporcionadas por el software. **1.C.** No requiere hacer un uso significativo de ninguna habilidad de visualización. **1.X.** No se dan explicaciones. **1.R.** Se usa la representación geométrica de las proyecciones ortogonales ordinarias.
 ***Nivel Memorización***	

Descripción	Características
Mov Los estudiantes aprovechan las ventajas del software 3-dimensional y mueven los sólidos, colocando estos en una posición adecuada para visualizar las proyecciones ortogonales ordinarias. Una vez colocadas en la posición correcta, haciendo uso de la definición correcta de las proyecciones (superior, frontal y lateral derecha), se limitan a copiar estas y a colorear la cuadrícula. AVAST10:  Figura 83. Estrategia de resolución *Mov*  Nivel *Algoritmos sin conexiones*	**2.P.** Se resuelve siguiendo una serie de pasos sencillos e intuitivos, basados en el movimiento y observación del sólido. Los estudiantes sitúan el sólido en diferentes posiciones que facilitan la identificación de las proyecciones ortogonales ordinarias. Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin hacer un uso significativo de las habilidades de visualización. **2.F.** Obtener respuestas correctas sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización. Los estudiantes mueven el sólido para colocarlo de manera que puedan observar de frente, “una a una”, cada proyección ortogonal y copian la imagen. **2.E.** Su resolución con éxito requiere un esfuerzo cognitivo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo, ya que los estudiantes se limitan a mover el sólido, situándolo en una posición adecuada, para determinar cada proyección. **2.C.** Los estudiantes emplean las habilidades de visualización para mover el sólido a posiciones específicas, utilizando la definición de las tres proyecciones ortogonales ordinarias. **1.X.** No se dan explicaciones. **2.R.** Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales ordinarias.

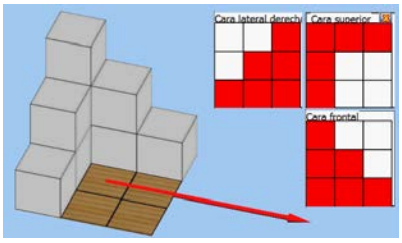
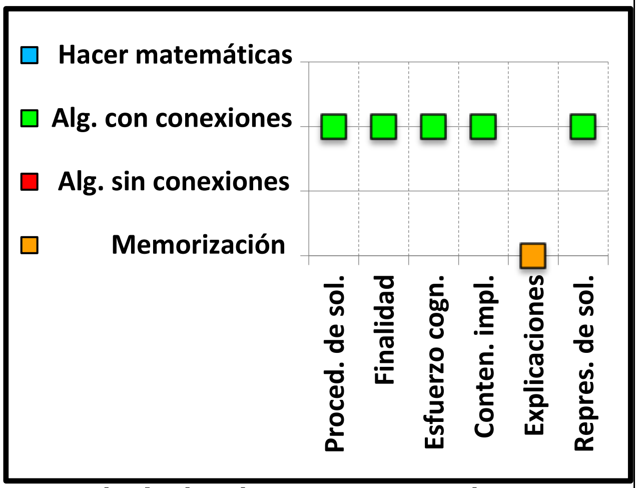
Descripción	Características
PosFija Los estudiantes son capaces de visualizar las tres proyecciones ortogonales manteniendo el sólido en una posición fija. Sitúan el sólido en una posición que les permita visualizar todas las proyecciones y no mueven el sólido para hacer los sucesivos dibujos de las proyecciones. AVAST1:  Figura 84. Estrategia de resolución *PosFija*.  **Nivel *Algoritmos con conexiones***	**3.P.** Se resuelve dibujando las proyecciones ortogonales manteniendo el sólido en una posición fija. No se trata de una posición cualquiera, los estudiantes deben decidir qué posición les permite visualizar las tres proyecciones ortogonales. Los estudiantes necesitan utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual). **3.F.** Identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos, recordando aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición. **3.E.** Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Es necesario utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual). **3.C.** Los estudiantes necesitan identificar y utilizar las relaciones espaciales y de posición entre cubos o entre filas de cubos (delante, detrás, encima, etc. o paralelas, perpendiculares, etc.), ya sea estableciendo relaciones con ellos mismos (observadores) o con otros cubos, a la vez que recuerdan aquellos cubos que estaban a la vista pero que ya no se ven en dicha posición. **1.X.** No se dan explicaciones. **3.R.** Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales ordinarias. Los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica del sólido conocido y la de sus proyecciones ortogonales.

Tabla 56. Análisis de las respuestas correctas obtenidas a la actividad de tipo 1 de la tarea de proyecciones ortogonales.

Además de estas resoluciones correctas, el 10% de los estudiantes dio una respuesta incorrecta. Los estudiantes movieron el sólido, pero utilizaron de manera errónea la definición de las proyecciones, situando mal el sólido y obteniendo una respuesta incorrecta. Podemos distinguir dos tipos de error:

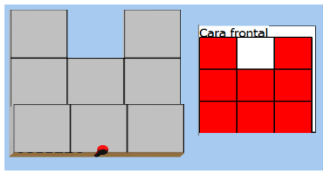
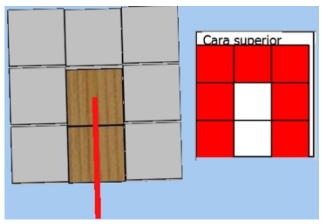
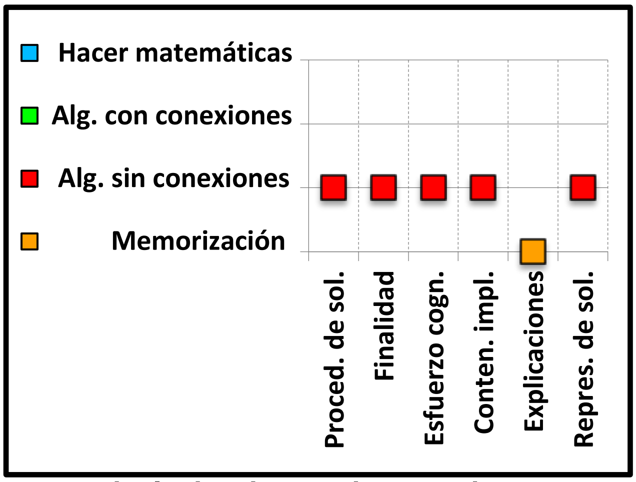
Descripción	
ConfProyecc Los estudiantes cometen errores al identificar la cara del módulo que tienen que representar, dibujando una proyección ortogonal diferente a la pedida.	AVAST11:  Figura 85. Estrategia incorrecta. Confusión proyección frontal y lateral.
PosInc Los estudiantes cometen errores al dibujar la proyección ortogonal superior, ya que utilizan una posición incorrecta del sólido para copiar la imagen. No sitúan la flecha hacia la derecha.	AVAST20:  Figura 86. Estrategia de resolución incorrecta. Posición incorrecta del sólido.

Tabla 57. Análisis de las respuestas incorrectas obtenidas en la actividad de tipo 1 de proyecciones ortogonales.

5.3.2.2 Actividad de tipo 2 (dibujo de las proyecciones ortogonales codificadas)

El 90% de los estudiantes resolvió correctamente las actividades de tipo 2 utilizando estrategias de resolución similares a las actividades de tipo 1. No obstante, los estudiantes no utilizaron la estrategia de *Copia*, ya que cuando el software sitúa automáticamente el módulo para mostrar una proyección ortogonal, no es posible ver cuántos cubos hay en cada línea de la proyección. Podemos diferenciar dos estrategias de resolución correctas: el 47,5% de los estudiantes dibujó las proyecciones ortogonales codificadas moviendo el sólido y contando la cantidad de cubos que había en cada fila (*algoritmos sin conexiones*) y el 42,5% de los estudiantes dibujó las proyecciones ortogonales codificadas manteniendo el sólido en unas pocas posiciones fijas (*algoritmos con conexiones*).

Descripción	Características
MovCont Los estudiantes mueven el sólido todas las veces que consideran necesarias para contar el número de cubos por fila en cada proyección ortogonal. En este caso, el sólido no se sitúa en una única posición a partir de la cual se copia la representación, sino que es necesario moverlo varias veces para realizar todos los recuentos de cubos.  Nivel *Algoritmos sin conexiones*	**2.P.** Se resuelve siguiendo una serie de pasos sencillos e intuitivos, basados en el movimiento y observación del sólido. Los estudiantes sitúan el sólido en diferentes posiciones que facilitan la identificación de las proyecciones ortogonales codificadas. Es un algoritmo simple que los estudiantes pueden seguir sin hacer un uso significativo de las habilidades de visualización. **2.F.** Obtener respuestas correctas sin necesidad de hacer un uso significativo de las habilidades de visualización. Los estudiantes mueven el sólido para colocarlo de manera que puedan observar y contar el número de cubos que hay en cada fila. **2.E.** Mov, Tabla 56. **2.C.** Mov, Tabla 56. **1.X.** Mov, Tabla 56. **2.R.** Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales combinada con la representación aritmética de las cantidades de cubos.

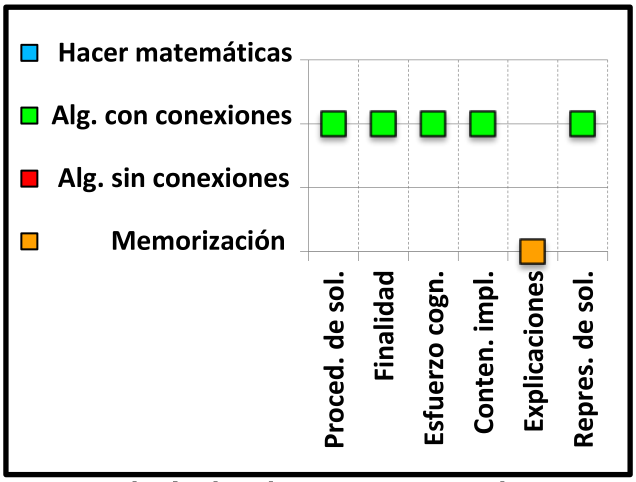
<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>PosFijaCont
Los estudiantes mantienen el sólido en unas pocas posiciones fijas para dibujar sus proyecciones ortogonales codificadas.

Nivel Algoritmos con conexiones</td><td>3.P. Se resuelve dibujando las proyecciones ortogonales manteniendo el sólido en varias posiciones fijas. No se trata de posiciones cualesquiera, los estudiantes deben decidir qué posiciones les permiten visualizar las proyecciones ortogonales y contar el número de cubos. Los estudiantes necesitan utilizar algunas habilidades de visualización (reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio, conservación de la percepción y memoria visual).
3.F. PosFija, Tabla 56.
3.E. PosFija, Tabla 56.
3.C. PosFija, Tabla 56.
1.X. PosFija, Tabla 56.
3.R. Se utiliza la representación geométrica de las proyecciones ortogonales combinada con la representación aritmética de las cantidades de cubos. Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica del sólido conocido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales.</td></tr>
</table>

Tabla 58. Análisis de las respuestas correctas en la actividad de tipo 2 de la tarea de proyecciones ortogonales.

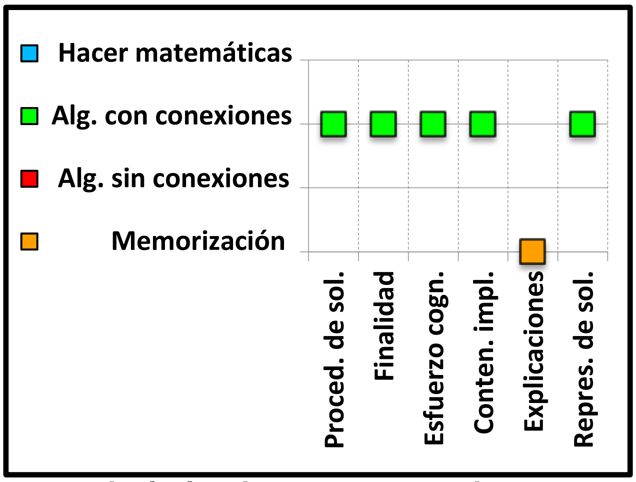
5.3.2.3 Actividad de tipo 3 (construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas)

El 60% de los estudiantes resolvió correctamente la actividad de tipo 3. Además, únicamente uno de ellos utilizó una estrategia diferente al resto, para la que empleó un nivel de demanda cognitiva superior a sus compañeros. Este estudiante construyó el sólido por filas, considerando las tres proyecciones ortogonales de manera simultánea (*hacer matemáticas*). Los demás estudiantes construyeron el sólido a partir de una determinada proyección y fueron modificándolo hasta verificar las tres proyecciones (*algoritmos con conexiones*).

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>

CompProyecc

Los estudiantes comienzan construyendo el sólido a partir de los datos de una determinada proyección, y a partir de este sólido, comprueban el resto de proyecciones, realizando las modificaciones oportunas teniendo en cuenta que no deje de cumplir las proyecciones ortogonales revisadas anteriormente.



Nivel Algoritmos con conexiones

</td><td>

3.P. Se resuelve aplicando un algoritmo general basado en un uso secuencial de las proyecciones ortogonales. No se trata de una secuencia única de pasos, los estudiantes deben decidir cómo seguir (p. ej., deben decidir a qué proyección prestar atención en cada momento). Los estudiantes construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan, así sucesivamente hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones. Los estudiantes necesitan utilizar las habilidades de relaciones espaciales y reconocimiento de posiciones en el espacio.

3.F. Usar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción (filas, columnas o cubos/cuadrados), utilizando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y de posiciones en el espacio.

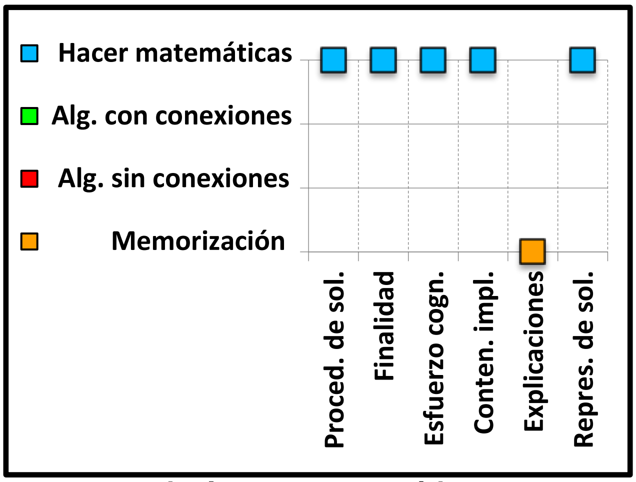
3.E. Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Es necesario utilizar las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio.

3.C. Los estudiantes necesitan considerar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos).

1.X. No se dan explicaciones.

3.R. Se utiliza la representación geométrica del sólido construido. Para resolver correctamente el problema, los estudiantes deben establecer conexiones entre la representación geométrica del sólido construido y la representación geométrica de sus proyecciones ortogonales.

</td></tr>
</table>

Descripción	Características
AnaProyecc Los estudiantes construyen el sólido por filas, considerando simultáneamente las tres proyecciones ortogonales dadas En las Figuras 87, 88, 89 y 90 se muestra un ejemplo de esta estrategia de resolución.  Nivel *Hacer matemáticas*	**4.P.** Se resuelve aplicando una estrategia de resolución compleja y no algorítmica. Los estudiantes construyen el sólido explorando relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción. Requiere que los estudiantes analicen la actividad y hagan uso de las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio. **4.F.** Explorar y comprender las relaciones entre las partes (filas, columnas o cuadrados) de las tres proyecciones ortogonales conocidas, utilizando las tres de manera simultánea. **4.E.** Su resolución con éxito requiere un considerable esfuerzo cognitivo: No existe un único método de resolución. Las formas de resolución no son fácilmente predecibles. Requieren examinar y utilizar relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas o del módulo en construcción, aplicando dicha información de manera correcta para la construcción del sólido. **4.C.** Los estudiantes tienen que comprender y coordinar las relaciones entre diferentes partes de las proyecciones ortogonales conocidas (filas, columnas o cuadrados) y del módulo en construcción (líneas de cubos), empleando las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y posiciones en el espacio para la construcción del sólido. **1.X.** No se dan explicaciones. **4.R.** Se utiliza la representación geométrica del sólido construido.

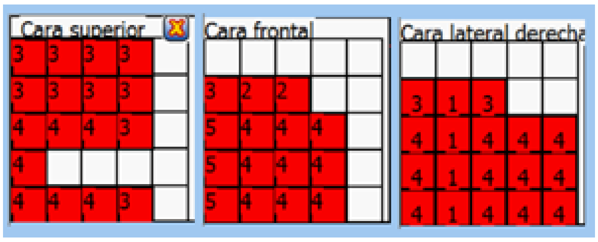
<table>
<tr><td colspan="2">AVAST4:


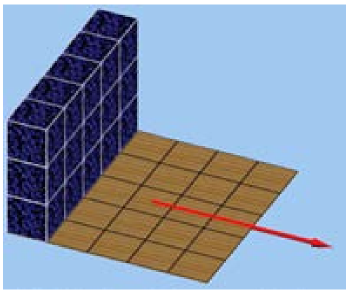
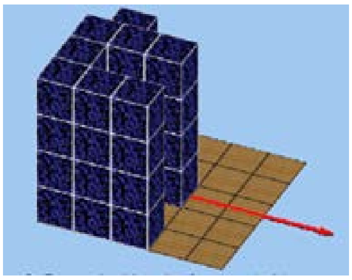
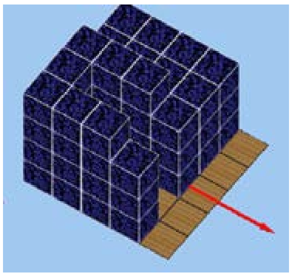
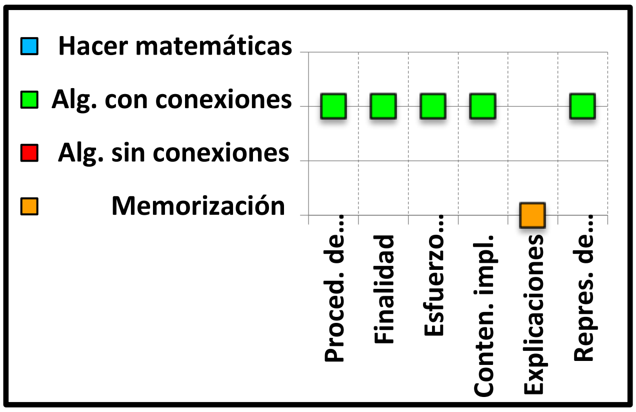
Figura 87. Actividad de tipo 3: Construir un sólido correspondiente a estas proyecciones ortogonales codificadas.</td></tr>
<tr><td>1º Observando la proyección frontal, construye todas las filas completas, las filas con 5 cubos.</td><td>
Figura 88. Estrategia de resolución CompProyecc. Paso 1.</td></tr>
<tr><td>2º Observando las proyecciones frontal y lateral derecha, detecta que la altura máxima del sólido es de 4 cubos. Utilizando la proyección superior completa el sólido con las filas de 4 cubos.</td><td>
Figura 89. Estrategia de resolución CompProyecc. Paso 2.</td></tr>
<tr><td>3º Comprueba, mirando las proyecciones superior y lateral derecha, que todas las filas con 4 cubos de altura ya están completas y construye las filas con 3 cubos observando la proyección superior.</td><td>
Figura 90. Estrategia de resolución CompProyecc. Paso 3.</td></tr>
</table>

Tabla 59. Análisis de las respuestas correctas obtenidas en la actividad de tipo 3 de la tarea de proyecciones ortogonales.

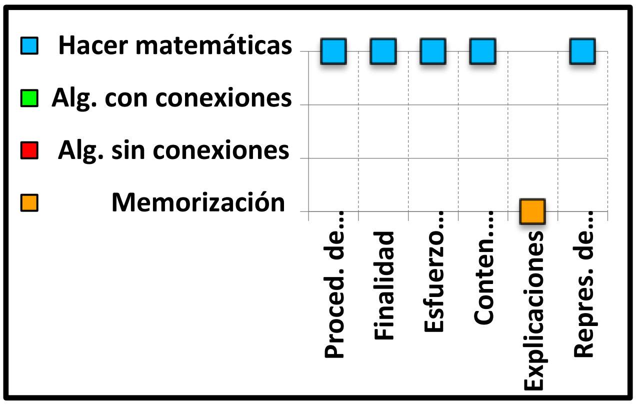
Además de estas resoluciones correctas, algunos estudiantes comenzaron construyendo el sólido observando una de las proyecciones ortogonales. Siguieron la construcción observando las otras proyecciones, pero olvidaron volver a comprobar la primera proyección, por lo que no tuvieron en cuenta que deben verificarse las tres proyecciones simultáneamente y obtuvieron un módulo incorrecto.

5.3.2.4 Actividad de tipo 4 (construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias)

Por último, la actividad de tipo 4 únicamente fue resuelta correctamente por el 37,5% de los estudiantes. La mayoría de los estudiantes iniciaron la construcción del sólido observando una única proyección y, a partir de este sólido, fueron modificándolo, quitando o añadiendo cubos para que se cumplieran las tres proyecciones simultáneamente (*algoritmos con conexiones*). Un estudiante construyó el sólido considerando desde el principio las tres proyecciones simultáneamente (*hacer matemáticas*).

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>CompProyecc
Los estudiantes construyen el sólido a partir de una determinada proyección, lo modifican para ajustarlo a otra proyección, vuelven a mirar la primera proyección utilizada, verificando que sigue correcto y, si es necesario, lo arreglan. Así, siguen hasta que comprueban que el sólido se ajusta a las tres proyecciones.</td><td rowspan="2">3.P. PosFija, Tabla 56.
3.F. PosFija, Tabla 56.
3.E. PosFija, Tabla 56.
3.C. PosFija, Tabla 56.
1.X. PosFija, Tabla 56.
3.R. PosFija, Tabla 56.</td></tr>
<tr><td>

Nivel Algoritmos con conexiones</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Descripción</th><th>Características</th></tr>
<tr><td>AnaProyecc
Los estudiantes analizan todas las proyecciones al mismo tiempo. Los estudiantes comienzan construyendo las filas completas de cubos y utilizan las tres proyecciones ortogonales al mismo tiempo para ir eliminando los cubos sobrantes.
En las Figuras 91, 92, 93 y 94 se muestra un ejemplo de esta estrategia de resolución.</td><td rowspan="2">4.P. AnaProyecc, Tabla 59.
4.F. AnaProyecc, Tabla 59.
4.E. AnaProyecc, Tabla 59.
4.C. AnaProyecc, Tabla 59.
1.X. AnaProyecc, Tabla 59.
4.R. AnaProyecc, Tabla 59.</td></tr>
<tr><td>

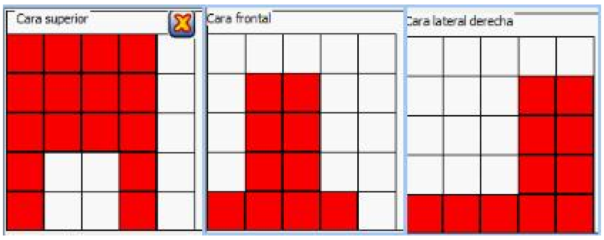
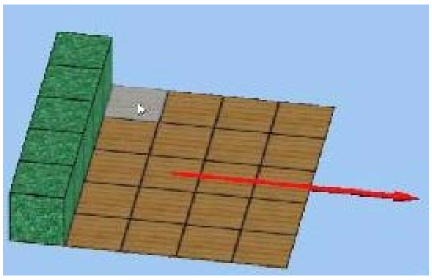
Nivel Hacer matemáticas</td></tr>
<tr><td colspan="2">AVAST4:


Figura 91. Actividad tipo 4 de proyecciones ortogonales: Construir un sólido correspondiente a estas proyecciones ortogonales ordinarias.</td></tr>
<tr><td>1º Comprueba las tres proyecciones ortogonales e identifica que las tres proyecciones aceptan la primera fila completa.</td><td>
Figura 92. Estrategia de resolución CompProyecc. Paso 1.</td></tr>
</table>

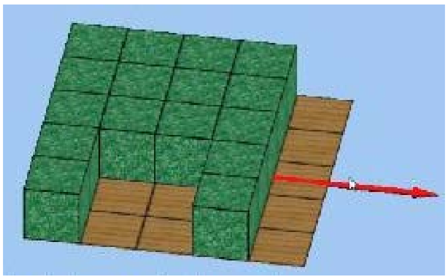
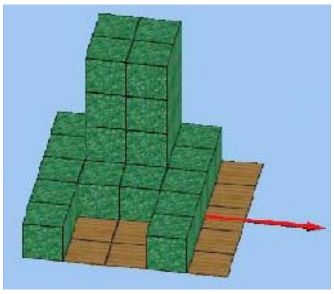
2º Observando las tres proyecciones al mismo tiempo, construye la primera capa, comprobando qué cubos encajan en las tres proyecciones.	 Figura 93. Estrategia de resolución CompProyecc. Paso 2.
3º Repite el mismo procedimiento para las capas 2ª, 3ª y 4ª. Una vez construido, observa que existe más de una solución posible, ya que se pueden construir varios sólidos con dichas proyecciones.	 Figura 94. Estrategia de resolución CompProyecc. Paso 3.

Tabla 60. Análisis de las respuestas correctas obtenidas en la actividad de tipo 4 de la tarea de proyecciones ortogonales.

Además de estas dos estrategias correctas, algunos estudiantes olvidaron que el sólido debe cumplir todas las proyecciones simultáneamente, sin alcanzar una respuesta correcta.

El doble análisis que hemos realizado de las actividades de visualización (teórico y de respuesta de estudiantes) demuestra la importancia de considerar las respuestas de los estudiantes para determinar el nivel de demanda cognitiva de una actividad, ya que en cada tipo de actividad hemos encontrado varias estrategias correctas con diferente nivel de demanda cognitiva. Las diferentes resoluciones encontradas nos han permitido identificar varias trayectorias de resolución en función del nivel de demanda cognitiva con el que se ha resuelto la secuencia de actividades, que presentaremos en la sección 6.3.

6. Resultados de la experimentación

En el análisis de respuestas presentado en el capítulo 5, hemos podido comprobar las diferentes estrategias de resolución utilizadas por los estudiantes para resolver cada cuestión, y el nivel de demanda cognitiva de cada una de ellas. En el presente capítulo, nos centraremos en observar la evolución del nivel de demanda cognitiva de los estudiantes a lo largo de la resolución de las actividades completas, ofreciendo una visión global de los resultados obtenidos en cada uno de los experimentos. Para ello, distinguiremos las diferentes trayectorias de resolución de los estudiantes según el nivel de las estrategias escogidas en cada cuestión, prestando atención a las diferencias observadas entre los distintos grupos de estudiantes.

En las secciones 6.1, 6.2 y 6.3, describimos las diferentes trayectorias de resolución encontradas para cada uno de los contextos (pre-álgebra, geometría plana y visualización). Las gráficas de las trayectorias muestran en el eje vertical el nivel de demanda cognitiva (*memorización*, *algoritmos sin* conexiones, *algoritmos con conexiones* y *hacer matemáticas*) utilizado para resolver cada cuestión (eje horizontal). No es posible asignar ningún nivel de demanda cognitiva a las estrategias de resolución incorrectas o a los estudiantes que no responden a las cuestiones. Para representar estos casos, hemos añadido el código 0 en el eje vertical de las gráficas. Debajo de cada gráfica, hemos incluido una tabla que informa de la cantidad de estudiantes (absoluta y porcentual) de la muestra que resolvió la tarea siguiendo esa trayectoria. El análisis de la evolución del nivel de demanda cognitiva de los estudiantes a lo largo de la resolución completa de las actividades permite comprobar las diferencias entre los grupos de estudiantes cuando el nivel de complejidad de la actividad aumenta.

6.1 Pre-álgebra

Al realizar un análisis de la evolución del nivel de demanda cognitiva de los estudiantes al resolver la actividad completa de patrones geométricos, hemos encontrado siete trayectorias diferentes, cada una de ella exclusiva de un grupo de estudiantes (ordinario o talentosos):

- La primera trayectoria, y la de menor nivel, se observa únicamente en el grupo ordinario (63% de los estudiantes de este grupo). Estos estudiantes se limitan a contestar la primera cuestión utilizando una estrategia aditiva (*recuento* o *proceso iterativo*), por lo que en su gráfica se puede apreciar cómo comienzan utilizando el nivel de *algoritmos sin conexiones*, pero a partir de la segunda cuestión no tienen ningún nivel de demanda cognitiva asignado.
- La segunda y tercera trayectorias se caracterizan porque, en ambas, únicamente se contestan las dos primeras cuestiones, descendiendo el nivel de demanda cognitiva a cero en las cuestiones 3 y 4. La segunda trayectoria corresponde a los estudiantes (14,8% del grupo ordinario) que contestan correctamente las dos primeras cuestiones, utilizando para ambas una estrategia aditiva (*recuento*), propia del nivel de *algoritmos sin conexiones*. Sin embargo, los estudiantes que siguen la tercera trayectoria (42,8% del grupo talentoso), utilizan una estrategia funcional para resolver la segunda cuestión (*relación matemática*), propia del nivel *algoritmos con conexiones.*
- En la cuarta trayectoria, los estudiantes (14,8% del grupo ordinario) son capaces de responder las tres primeras cuestiones, utilizando una estrategia funcional del nivel de *algoritmos con conexiones* para contestar las cuestiones 2 y 3. No obstante, estos estudiantes no obtienen el término general, por lo que la última cuestión no tiene ningún nivel de demanda cognitiva.
- Por último, las tres últimas trayectorias corresponden a aquéllos estudiantes que completan la actividad. Sin embargo, las diferencias entre estas tres son significativas: en la quinta trayectoria, los estudiantes (28,6% del grupo talentoso) aumentan el nivel de demanda cognitiva

progresivamente, utilizando una estrategia funcional (*generalización verbal*) en la última cuestión, con el nivel de *algoritmos con conexiones;* en la sexta trayectoria, los estudiantes (7,4% del grupo ordinario), van aumentando poco a poco el nivel de demanda cognitiva hasta alcanzar el nivel *hacer matemáticas* utilizando una *generalización algebraica* en la última cuestión; por último, en la séptima estrategia, los estudiantes (28,6% del grupo talentoso), alcanzan el nivel *hacer matemáticas* antes de lo previsto, terminando con el nivel de *memorización.*

6.1.1 *Trayectoria 1*

Los estudiantes sólo resolvieron correctamente la primera cuestión. Para obtener el término 5º, hicieron uso tanto de la estrategia de dibujo de la figura 5ª y conteo del número de elementos que la forman (48,1% de los estudiantes), como del cálculo del término a partir del término anterior (14,8% de los estudiantes). Ambas son *estrategias aditivas* propias del nivel *algoritmos sin conexiones.*

Sin embargo, estos estudiantes no fueron capaces de obtener un resultado correcto para el término 20: el 18% no contestó a la cuestión 2, el 15% cometió errores en el dibujo y conteo de la figura 20ª, el 15% cometió errores en la suma aritmética de los 20 primeros números y el 15% aplicó una relación aleatoria incorrecta.

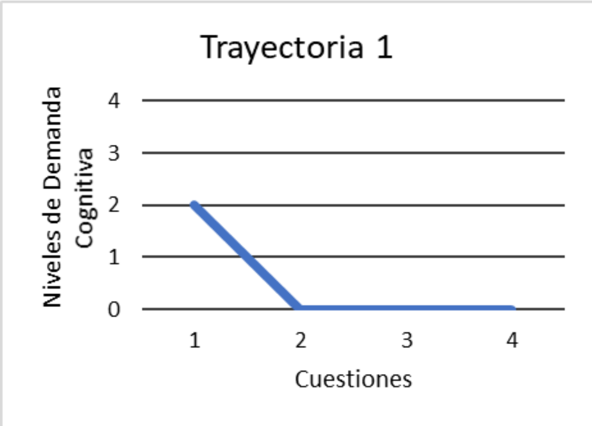


Figura 95. Trayectoria 1 de patrones geométricos.

AVAST	0	0%
IES	17	63%

Esta primera estrategia muestra cómo todos los estudiantes fueron capaces de obtener el término inmediato, pero al incrementar la complejidad, los resultados empeoran notoriamente en el grupo ordinario.

6.1.2 *Trayectoria 2*

Los estudiantes respondieron correctamente las dos primeras cuestiones. Utilizaron una estrategia aditiva para ambas cuestiones, pues dibujaron las figuras 5ª y 20ª y contaron su número de elementos (*algoritmos sin conexiones).* Sin embargo, estos estudiantes no contestaron las cuestiones 3 y 4.

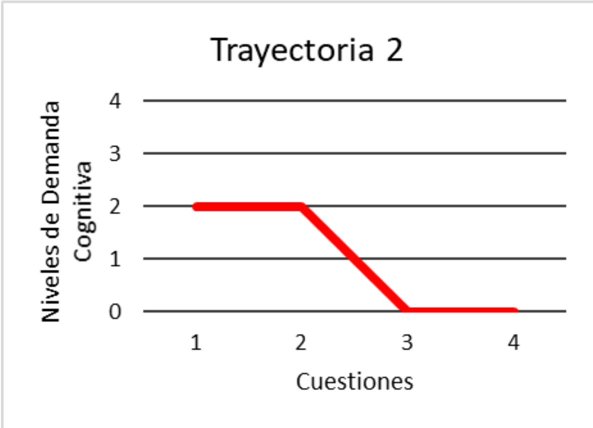


Figura 96. Trayectoria 2 de patrones geométricos.

AVAST	0	0%
IES	4	14,8%

6.1.3 *Trayectoria 3*

Los estudiantes resolvieron la cuestión 2 calculando la suma de los 20 primeros números naturales, identificando la relación aritmética existente entre el valor del término 20º y su posición (*algoritmos con conexiones*). Sin embargo, estos estudiantes no contestaron las cuestiones 3 y 4.

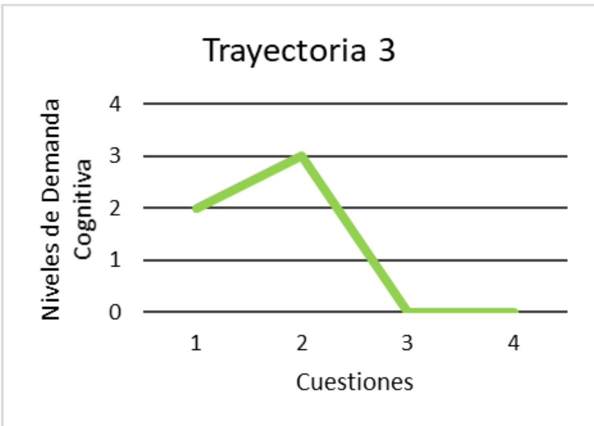


Figura 97. Trayectoria 3 de patrones geométricos.

AVAST	3	42,8%
IES	0	0%

6.1.4 *Trayectoria 4*

Los estudiantes contestaron las tres primeras cuestiones. Para resolver la cuestión 3, identificaron la relación matemática entre el término 100º y su posición, indicando o realizando con errores, la suma de los 100 primeros números (*algoritmos con conexiones*). Sin embargo, no contestaron la cuestión 4.

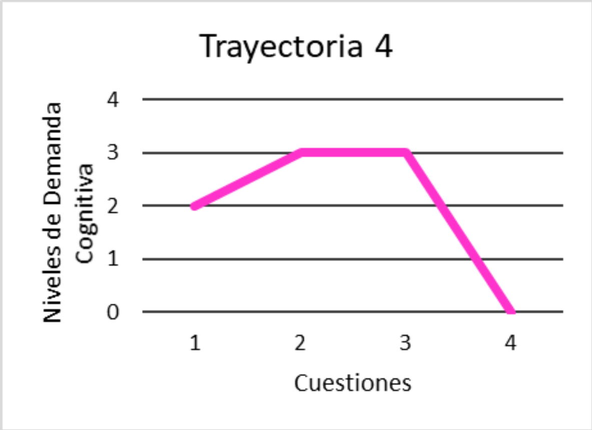


Figura 98. Trayectoria 4 de patrones geométricos.

AVAST	0	0%
IES	4	14,8%

6.1.5 *Trayectoria 5*

Los estudiantes resolvieron correctamente las cuatro cuestiones. Para resolver las cuestiones 3 y 4, identificaron la relación entre el valor del término y su posición, observando que se trata de sumar los primeros números hasta la posición del término, y expresaron verbalmente esta relación (*algoritmos con conexiones*). Sin embargo, no fueron capaces de obtener una fórmula algebraica que permita calcular dicho resultado.

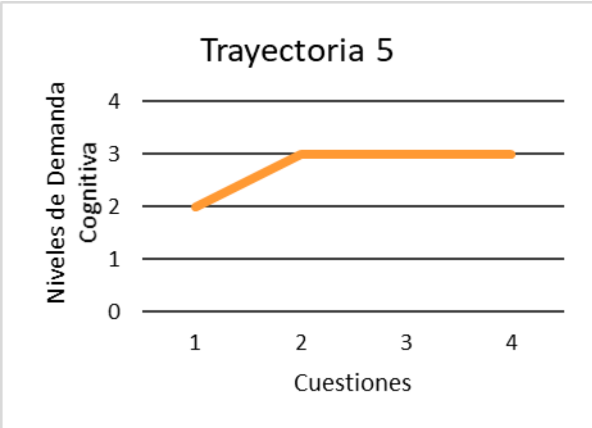


Figura 99. Trayectoria 5 de patrones geométricos.

AVAST	2	28,6%
IES	0	0%

6.1.6 *Trayectoria 6*

Los estudiantes resolvieron correctamente las cuatro cuestiones. Para resolver la cuestión 4 obtuvieron la fórmula algebraica que permite calcular cualquier término dada su posición. Los estudiantes fueron aumentando el nivel de demanda cognitiva progresivamente, alcanzando el nivel de *hacer matemáticas* en la última cuestión.

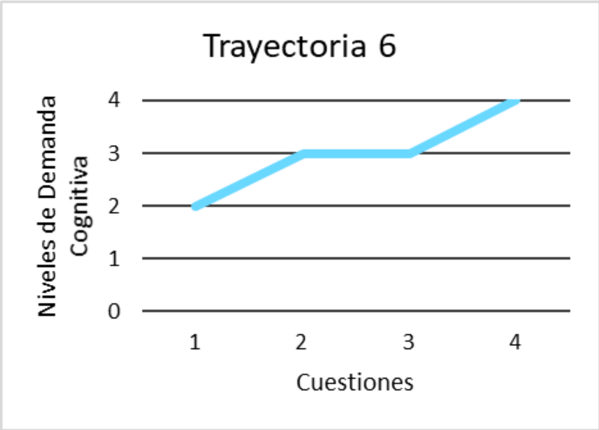


Figura 100. Trayectoria 6 de patrones geométricos.

AVAST	0	0%
IES	2	7,4%

6.1.7 *Trayectoria 7*

Los estudiantes obtuvieron la fórmula algebraica antes de lo pedido, pues expresaron algebraicamente el término general para contestar la tercera cuestión, alcanzando el nivel de *hacer matemáticas* antes de lo previsto. Esto provocó, que el nivel de demanda cognitiva disminuyera en la última cuestión hasta el nivel de *memorización,* ya que los estudiantes se limitaron a utilizar la respuesta de la cuestión anterior.

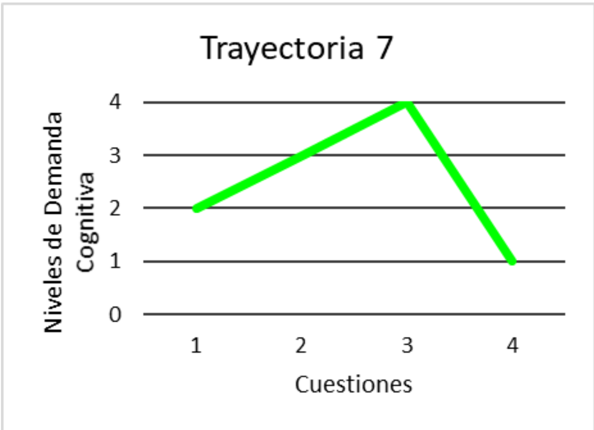


Figura 101. Trayectoria 7 de patrones geométricos.

AVAST	2	28,6%
IES	0	0%

Tras el análisis completo de la actividad de patrones geométricos y las trayectorias de resolución de los estudiantes, podemos observar:

- La primera cuestión es apta para todos los estudiantes, pero, conforme la actividad avanza, el nivel de demanda cognitiva aumenta y el número de estudiantes capaces de resolver correctamente las cuestiones disminuye.
- Podemos observar diferencias entre los primeros apartados (concretos) y los últimos (abstractos) y entre los resultados de los estudiantes ordinarios y talentosos en estos dos bloques. Mientras más de la mitad de los estudiantes talentosos respondió correctamente a todas las cuestiones, únicamente un pequeño porcentaje de estudiantes del grupo ordinario fueron capaces de contestar correctamente a las preguntas referentes a los términos lejano (14,8%) y general (7,4%).
- Encontramos diferencias notorias entre los estudiantes del grupo talentoso. Una de las causas principales de este resultado es que no todos ellos destacaban en matemáticas, a pesar de que todos habían sido identificados como superdotados por haber superado los tests oficiales de identificación.
- Uno de los miembros de la pareja de estudiantes del grupo ordinario que alcanzó el nivel de *hacer matemáticas*, obtuvo una alta puntuación en el test de inteligencia realizado en el centro. Estos resultados muestran la presencia de estudiantes con altas capacidades en las aulas ordinarias y la importancia de identificarlos y atender sus necesidades.
- Los estudiantes del grupo talentoso que alcanzaron el nivel de *hacer matemáticas* fueron posteriormente seleccionados para participar en el proyecto Estalmat[3] (Estímulo de Talento Matemático). La selección de estos estudiantes en este programa confirma su talento matemático y la validez del análisis de respuestas mediante los niveles de demanda cognitiva.

[3] Estalmat es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que trata de detectar, orientar y estimular de manera continuada, a lo largo de dos cursos, el talento matemático excepcional de estudiantes de 12-13 años. Consisten en talleres de 3 horas de duración que se realizan los sábados por la mañana.

6.2 Geometría plana

En esta sección, presentamos las gráficas de las trayectorias de resolución de la actividad de geometría plana, representando en el eje vertical el nivel de demanda cognitiva y en el eje horizontal el apartado de cada cuestión. Además, como ya hemos comentado al comienzo del capítulo, hemos añadido el código 0 en el eje vertical de las gráficas para hacer referencia a las estrategias de resolución incorrectas o a los estudiantes que no respondieron a las cuestiones. Debajo de cada gráfica, hemos incluido una tabla que informa de la cantidad de estudiantes (absoluta y porcentual) de la muestra que resolvió la tarea siguiendo esa trayectoria.

Al analizar el proceso de resolución de la actividad completa de geometría plana, hemos encontrado una gran variedad de trayectorias. Para facilitar la comprensión de los resultados obtenidos, hemos dividido las trayectorias en función de los apartados resueltos correctamente, especificando en cada uno de estos casos las diferentes trayectorias según las estrategias escogidas y su nivel de demanda cognitiva. Hay que señalar que el apartado 3b únicamente fue planteado a los estudiantes de 5º de Educación Primaria, por lo que, en algunas gráficas, este apartado no toma ningún valor de los niveles de demanda cognitiva.

- El 26% del total de estudiantes, todos ellos procedentes de los grupos ordinarios no respondió correctamente ningún apartado.
- El 9% del total de estudiantes únicamente resolvió correctamente las preguntas que se apoyaban en la representación gráfica (1a, 1b,1c, 2a y 3a), dibujando las diagonales y realizando el conteo. Estos estudiantes no establecieron relaciones entre los diferentes elementos geométricos que intervenían en las cuestiones.
- El 15,6% del total de estudiantes contestó únicamente las dos primeras cuestiones. Estos estudiantes no resolvieron las cuestiones correspondientes al número total de diagonales.
- El 5,2% del total de estudiantes, todos ellos procedentes del grupo 5º de Educación de Primaria, identificó la relación aritmética existente entre el número de lados y el número total de diagonales, y resolvió correctamente

los casos concretos aplicando dicha relación. Sin embargo, estos estudiantes no fueron capaces de expresar la relación verbal o algebraica.

- El 44,2% de todos los estudiantes fue capaz de resolver correctamente la actividad completa.

6.2.1 *Trayectoria 1*

Los estudiantes no respondieron correctamente ningún apartado.
El apartado 3b únicamente se planteó a los estudiantes de 5º de Educación Primaria.

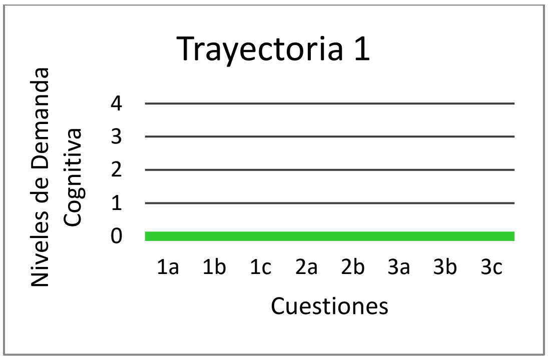


Figura 102. Trayectoria 1 de geometría plana.

5EP	5	33,5%
AVAST	0	0%
IES	15	27,1%

6.2.2 *Trayectoria 2*

Los estudiantes únicamente resolvieron aquellos apartados que podían ser resueltos mediante el dibujo de las diagonales y el conteo del número de estas (1a, 1b, 1c, 2a y 3a). Podemos distinguir dos situaciones diferentes dependiendo de si contestan correctamente el apartado 3a, obteniendo el número correcto de diagonales totales de un polígono o cometiendo errores al dibujarlas o contarlas.

6.2.2.1 Trayectoria 2.1

Los estudiantes contestaron las cuestiones 1a, 1b, 1c y 2a dibujando las diagonales desde un vértice y contando su número (*algoritmos sin conexiones*) pero cometieron errores al dibujar el número total de diagonales de algunos polígonos, y no fueron capaces de responder correctamente al apartado 3a. Además, no dieron una justificación para el caso del triángulo, o dieron una justificación insuficiente.

El apartado 3b únicamente se planteó a los estudiantes de 5º de Educación Primaria.

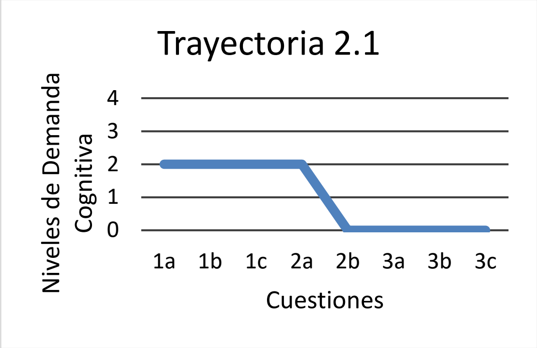


Figura 103. Trayectoria 2.1 de geometría plana.

5EP	2	13,3%
AVAST	0	0%
IES	4	7,3%

6.2.2.2 Trayectoria 2.2

Los estudiantes se limitaron a resolver los apartados que se apoyaban en dibujos (1a, 1b, 1c, 2a y 3a), pero, a diferencia del grupo anterior, representaron las diagonales totales de los polígonos y completaron la tabla correctamente (*algoritmos sin conexiones*). Los estudiantes no contestaron el apartado 2b, referente a la relación implícita existente entre el número de diagonales por vértice y el número de lados.

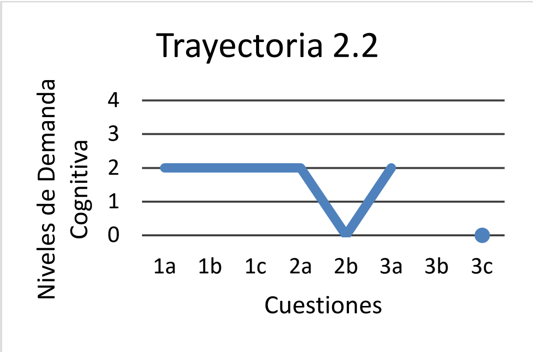


Figura 104. Trayectoria 2.2 de geometría plana.

5EP	0	0%
AVAST	1	14,2%
IES	0	0%

6.2.3 *Trayectoria 3*

Los estudiantes solo resolvieron correctamente las cuestiones 1 y 2. Podemos distinguir dos trayectorias, dependiendo de si identificaron la relación numérica entre los datos de la tabla o si comprendieron y expresaron verbalmente la relación entre el número de lados y el de diagonales por vértice.

6.2.3.1 **Trayectoria 3.1**

Los estudiantes identificaron, observando los datos de la tabla, la relación numérica entre las columnas referentes al número de lados y el número de diagonales por vértice, (*algoritmos sin conexiones*). Esto estudiantes no comprendieron la relación geométrica existente entre el número de diagonales por vértice y el número de lados de un polígono.

El apartado 3b únicamente se planteó a los estudiantes de 5º de Educación Primaria.

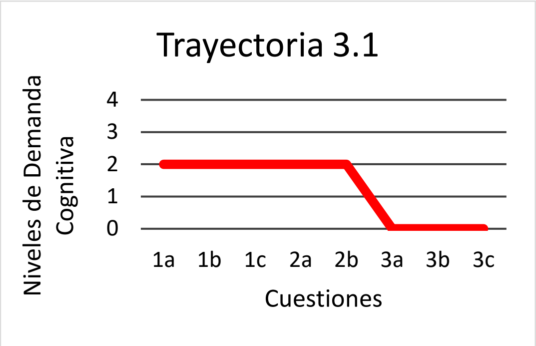


Figura 105. Trayectoria 3.1 de geometría plana.

5EP	2	13,3%
AVAST	0	0%
IES	8	14,6%

6.2.3.2 **Trayectoria 3.2**

Los estudiantes comprendieron y expresaron verbalmente la relación implícita existente entre el número de lados y número de diagonales por vértice para resolver el apartado 2b (*algoritmos con conexiones*), pero no representaron correctamente el número total de diagonales y no resolvieron correctamente la cuestión 3.

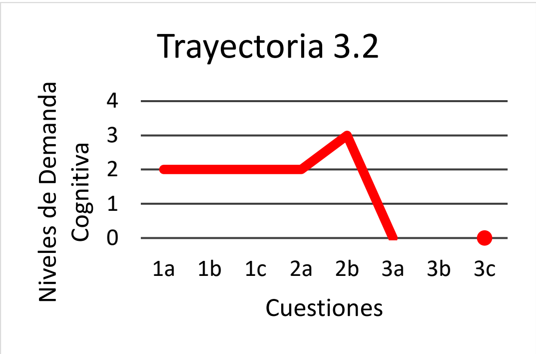


Figura 106. Trayectoria 3.2 de geometría plana.

5EP	0	0%
AVAST	0	0%
IES	2	3,6%

6.2.4 *Trayectoria 4*

Los estudiantes identificaron y aplicaron la relación aritmética existente entre el número de lados y el número total de diagonales para resolver los apartados 3a y 3b. Sin embargo, no fueron capaces de expresar, verbal o algebraicamente, dicha relación (apartado 3c). Podemos distinguir dos trayectorias según la estrategia utilizada para resolver el apartado 2b.

6.2.4.1 **Trayectoria 4.1**

Los estudiantes resolvieron el apartado 2b identificando la relación aritmética entre el número de lados y el número de diagonales por vértice observando los datos de la tabla (*algoritmos sin conexiones*).

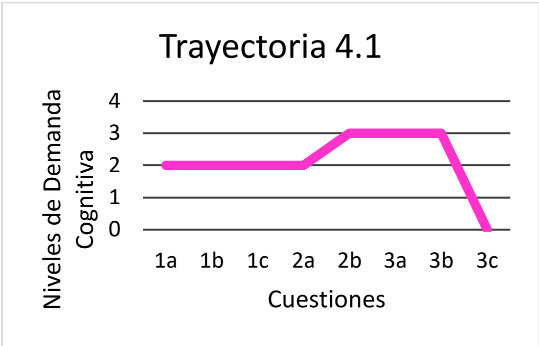


Figura 107. Trayectoria 4.1 de geometría plana.

5EP	2	13,3%
AVAST	0	0%
IES	0	0%

6.2.4.2 **Trayectoria 4.2**

Los estudiantes resolvieron el apartado 2b comprendiendo y expresando verbalmente la relación geométrica existente entre el número de lados y el número de diagonales por vértice (*algoritmos con conexiones*).

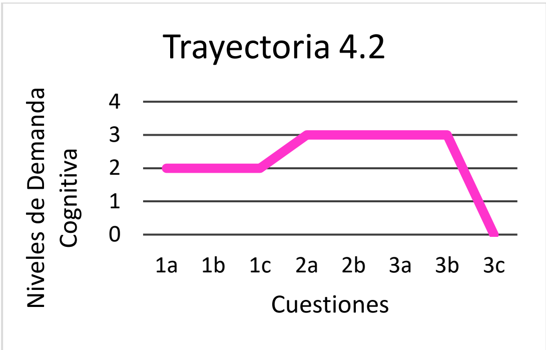


Figura 108. Trayectoria 4.2 de geometría plana.

5EP	2	13,3%
AVAST	0	0%
IES	0	0%

6.2.5 *Trayectoria 5*

Los estudiantes resolvieron correctamente la actividad completa. Podemos diferenciar distintas trayectorias:

6.2.5.1 **Trayectoria 5.1**

Los estudiantes utilizaron la representación gráfica para calcular todos los casos concretos (diagonales por vértice y total de diagonales), utilizando el nivel de *algoritmos sin conexiones.* Además, en el apartado 2b, estos estudiantes obtuvieron la relación numérica entre el número de lados y el número de diagonales por vértice observando los datos de la tabla (*algoritmos sin conexiones)*. Finalmente, identificaron y expresaron de manera verbal la relación general entre el número de lados y el número total de diagonales, alcanzando el nivel de *hacer matemáticas* en el apartado 3c.

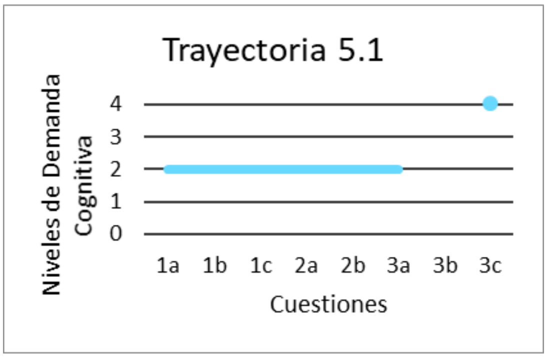


Figura 109. Trayectoria 5.1 de geometría plana.

5EP	0	0%
AVAST	0	0%
IES	14	25,5%

6.2.5.2 Trayectoria 5.2

Los estudiantes utilizaron la representación gráfica para resolver todos los casos concretos (diagonales por vértice y total de diagonales), con el nivel de *algoritmos sin conexiones.* Sin embargo, estos estudiantes fueron capaces de verbalizar y justificar la relación implícita existente entre número de lados y número de diagonales por vértice, resolviendo el apartado 2b con el nivel de *algoritmos con conexiones*. Finalmente alcanzaron el nivel *hacer matemáticas,* expresando verbalmente la relación general.

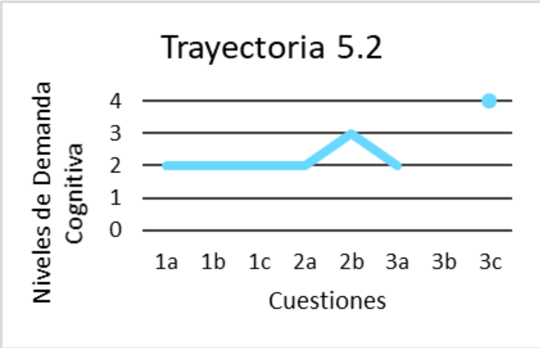


Figura 110. Trayectoria 5.2 de geometría plana.

5EP	0	0%
AVAST	0	0%
IES	12	21,9%

6.2.5.3 Trayectoria 5.3

Los estudiantes utilizaron la representación gráfica para completar los casos concretos referentes al número de diagonales por vértice (*algoritmos sin conexiones)*. En el apartado 2b, estos estudiantes identificaron la relación numérica entre el número de diagonales por vértice y el número de lados observando los datos de la tabla (*algoritmos sin* conexiones). Sin embargo, para calcular el número total de diagonales de polígonos concretos (apartados 3a y 3b), los estudiantes identificaron y aplicaron la relación aritmética sin necesidad de dibujar todas las diagonales de cada polígono (*algoritmos con conexiones*). Finalmente, expresaron dicha relación de manera verbal (sin justificación), alcanzando el nivel de *hacer matemáticas*.

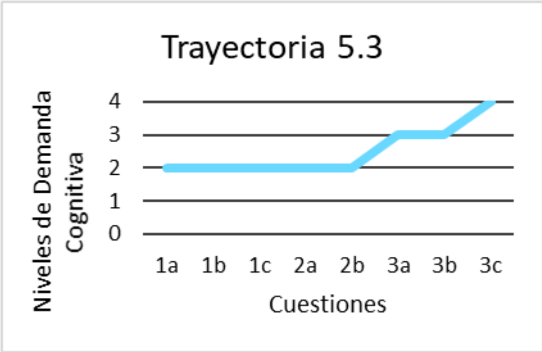


Figura 111. Trayectoria 5.3 de geometría plana.

5EP	2	13,3%
AVAST	0	0%
IES	0	0%

6.2.5.4 **Trayectoria 5.4**

Los estudiantes utilizaron las mismas estrategias que las mencionadas en la trayectoria 5.3, con la excepción de que a estos estudiantes no se les planteó la cuestión 3b.

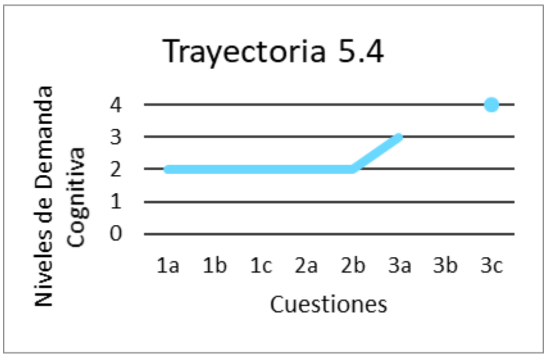


Figura 112. Trayectoria 5.4 de geometría plana.

5EP	0	0%
AVAST	3	42,9%
IES	0	0%

6.2.5.5 **Trayectoria 5.5**

Los estudiantes resolvieron las cuestiones 1a, 1b, 1c y 2a, referentes al número de diagonales por vértice, representado las diagonales. Identificaron la relación verbal entre el número de lados y el número de diagonales por vértice para resolver el apartado 2b. Además, completaron la tabla del apartado 3a calculando el número total de diagonales sin utilizar la representación (*algoritmos con conexiones*). Finalmente, expresaron de maneral algebraica la regla general para el cálculo del número total de diagonales, alcanzando el nivel *hacer matemáticas.* Además, uno de los estudiantes justificó de manera razonada la expresión algebraica obtenida.

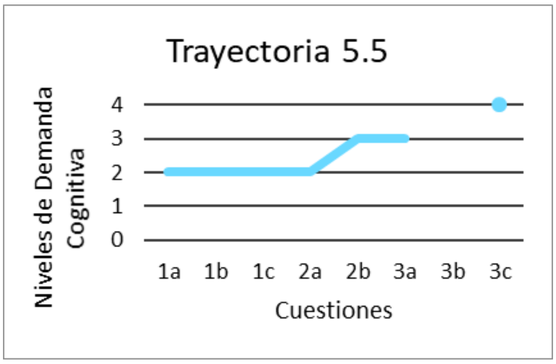


Figura 113. Trayectoria 5.4 de geometría plana.

5EP	0	0%
AVAST	3	42,9%
IES	0	0%

Tras el análisis completo de la actividad de geometría plana y las trayectorias de resolución de los estudiantes podemos observar:

- El 26% de los estudiantes (todos ellos procedentes del grupo ordinario) no fue capaz de resolver correctamente ninguna cuestión. Este resultado nos llama la atención, especialmente en esta actividad, dado que trata contenidos incluidos en el currículo y los primeros apartados se asemejan a las actividades presentadas en el libro de texto. Esto muestra el bajo nivel que tienen los estudiantes de las clases ordinarias en el área de la geometría.
- Mientras la mayoría de los estudiantes talentoso completaron correctamente la actividad (85,8% de los estudiantes), de los grupos ordinarios únicamente lo consiguió el 21,9% del grupo de 1º de ESO y el 13,3% del grupo de 5º de Educación Primaria.
- Podemos identificar diferencias notorias entre los estudiantes del grupo talentoso. Una de las causas principales de este resultado es que no todos ellos destacaban en matemáticas, a pesar de que todos habían sido identificados como superdotados por haber superado los tests oficiales de identificación.
- Los estudiantes del grupo talentoso que siguieron la trayectoria 5.5, demostrando mayor nivel durante la resolución de la actividad, fueron posteriormente seleccionados para participar en el proyecto Estalmat (Estímulo de Talento Matemático). La selección de estos estudiantes en este programa confirma su talento matemático y la validez del análisis de respuestas mediante los niveles de demanda cognitiva.

6.3 Visualización

En esta sección, presentamos las gráficas de las trayectorias de resolución del conjunto de actividades de visualización, representando en el eje vertical el nivel de demanda cognitiva y en el eje horizontal el tipo de actividad. Al igual que en los contextos anteriores, hemos añadido el código 0 en el eje vertical de las gráficas para hacer referencia a las estrategias de resolución incorrectas o a los estudiantes que no respondieron a las cuestiones. También hemos incluido una tabla que informa de la cantidad de estudiantes (absoluta y porcentual) de la muestra que resolvió la tarea siguiendo esa trayectoria.

A diferencia de los dos contextos anteriores, el experimento de visualización únicamente se llevó a cabo con estudiantes talentosos. Por esta razón, en este caso no podemos realizar comparaciones entre los estudiantes procedentes de un grupo ordinario y los del grupo talentoso. Sin embargo, los resultados obtenidos nos permiten observar que también existen diferencias en el nivel de demanda cognitiva empleado por diferentes estudiantes talentosos al resolver los mismos problemas.

Al analizar la evolución del nivel de demanda cognitiva de los estudiantes al resolver la secuencia de las cuatro actividades de proyecciones ortogonales, hemos identificado las siguientes trayectorias:

- El 10% de los estudiantes no resolvió correctamente ninguna de las actividades.
- El 30% de los estudiantes únicamente resolvió correctamente las actividades consistentes en el dibujo de las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas). Entre estos, podemos diferenciar dos trayectorias en función de la estrategia utilizada para resolver la actividad de tipo 1 (dibujo de las proyecciones ordinarias).
- El 22,5% de los estudiantes resolvió correctamente las actividades de tipos 1, 2 y 3. Todos ellos utilizaron la misma estrategia para resolver la actividad de tipo 3, pero podemos diferenciar dos tipos de trayectorias en función de la estrategia utilizada para resolver las actividades de tipos 1 y 2.

- Por último, el 37,5% de los estudiantes resolvió correctamente la secuencia completa de actividades, pudiendo observar dos trayectorias diferentes.

6.3.1 *Trayectoria 1*

Los estudiantes no resolvieron correctamente ninguna de las actividades. Estos estudiantes cometieron errores al identificar la cara del módulo que tenían que representar, dibujando una proyección ortogonal diferente a la pedida e interpretaron de manera incorrecta la información de las proyecciones al construir los sólidos.

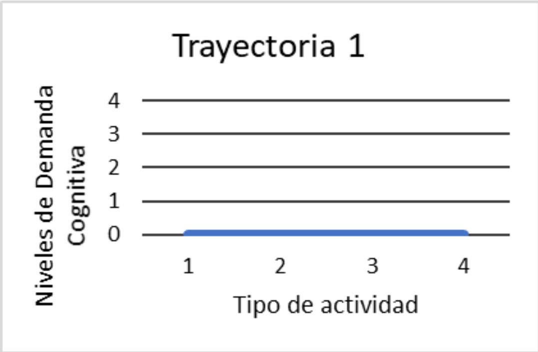


Figura 114. Trayectoria 1 de proyecciones ortogonales.

AVAST 4 10%

6.3.2 *Trayectoria 2*

El 30% de los estudiantes resolvió correctamente las actividades de tipos 1 y 2, pero fueron incapaces de construir correctamente los sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas), ya que, al construir un sólido, verificaron únicamente la información de una proyección, sin asegurarse de que el sólido construido cumpliera las tres proyecciones simultáneamente. Podemos distinguir dos trayectorias de resolución dependiendo de la estrategia utilizada para resolver la actividad de tipo 1.

6.3.2.1 **Trayectoria 2.1**

Los estudiantes dibujaron las proyecciones ortogonales ordinarias (actividad tipo 1) copiando directamente las imágenes de las proyecciones que el software ofrecía (*memorización*). Puesto que dicha estrategia no es válida para dibujar las proyecciones ortogonales codificadas (actividad tipo 2), los estudiantes utilizaron la rotación del sólido para la observación y conteo del número de cubos (*algoritmos sin conexiones).*

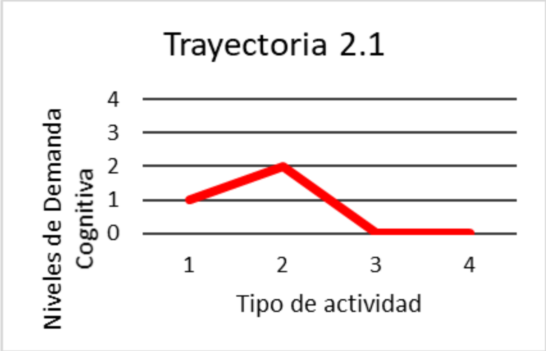


Figura 115. Trayectoria 2.1. de proyecciones ortogonales.

AVAST 6 15%

6.3.2.2 **Trayectoria 2.2**

Los estudiantes resolvieron las actividades de tipo 1 y 2 moviendo los sólidos y situándolos en posiciones apropiadas para poder obtener las proyecciones ortogonales (*algoritmos sin conexiones*).

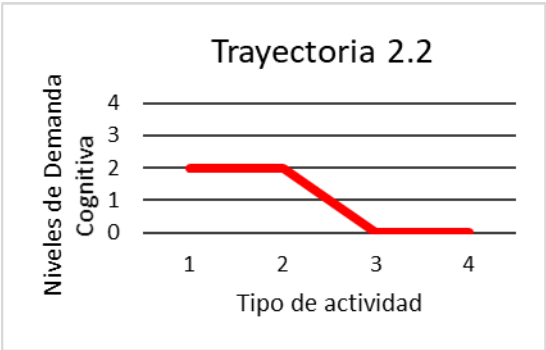


Figura 116. Trayectoria 2.2 de proyecciones ortogonales.

AVAST 6 15%

6.3.3 *Trayectoria 3*

El 22,5% de los estudiantes resolvió correctamente las actividades de tipos 1, 2 y 3, pero fueron incapaces de resolver la actividad de tipo 4. En la actividad de tipo 3, los estudiantes construyeron el sólido a partir de una determinada proyección, y fueron modificándolo hasta comprobar que el sólido se ajustaba a las tres proyecciones.

Podemos distinguir dos trayectorias de resolución dependiendo de la estrategia utilizada para resolver la actividad de tipo 2.

6.3.3.1 **Trayectoria 3.1**

Los estudiantes resolvieron las actividades de tipo 1 y 2 moviendo el sólido y situándolo en la posición apropiada para poder obtener las proyecciones ortogonales (*algoritmos sin conexiones*). Para la actividad de tipo 3, construyeron el sólido a partir una proyección y modificaron dicho sólido hasta verificar las tres proyecciones (*algoritmos con conexiones*).

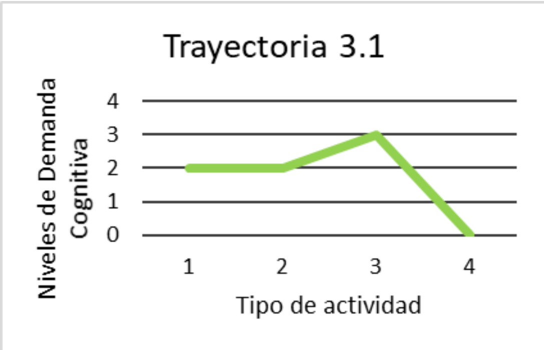


Figura 117. Trayectoria 3.1 de proyecciones ortogonales.

AVAST 7 17,5%

6.3.3.2 **Trayectoria 3.2**

Los estudiantes dibujaron las proyecciones del sólido (ordinarias o codificadas) manteniendo el sólido en una o varias posiciones fijas (*algoritmos con conexiones*). En la actividad de tipo 3, construyeron el sólido a partir una proyección y modificaron dicho sólido hasta verificar las tres proyecciones (*algoritmos con conexiones*).

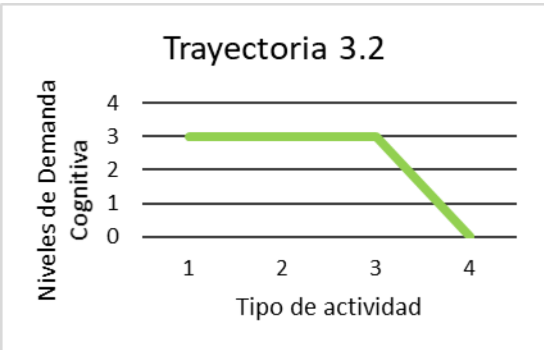


Figura 118. Trayectoria 3.2 de proyecciones ortogonales.

AVAST 2 5%

6.3.4 *Trayectoria 4*

El 37,5% de los estudiantes resolvió correctamente la actividad completa. De entre estos estudiantes, cabe destacar que un estudiante siguió una trayectoria diferente al resto (Trayectoria 4.2), alcanzando el nivel de *hacer matemáticas.*

6.3.4.1 Trayectoria 4.1

Los estudiantes dibujaron las proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) manteniendo el sólido en una o varias posiciones fijas (*algoritmos con conexiones*). Estos estudiantes construyeron el sólido a partir de una determinada proyección y fueron modificándolo hasta comprobar que el sólido se ajustaba a las tres proyecciones (*algoritmos con conexiones*).

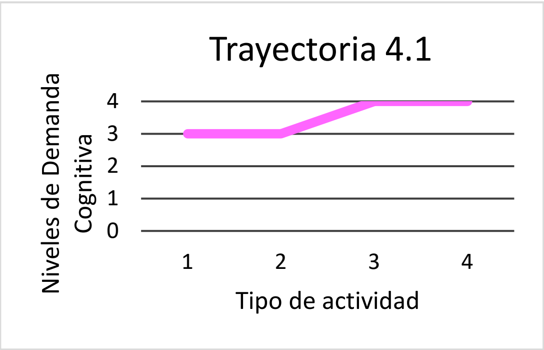


Figura 119. Trayectoria 4.1 de proyecciones ortogonales.

AVAST 14 35%

6.3.4.2 Trayectoria 4.2

Un estudiante dibujó las proyecciones ortogonales ordinarias o codificadas manteniendo el sólido en una posición fija (*algoritmos con conexiones*). Además, construyó el sólido utilizando las tres proyecciones ortogonales (ordinarias o codificadas) de manera simultánea (*hacer matemáticas).*

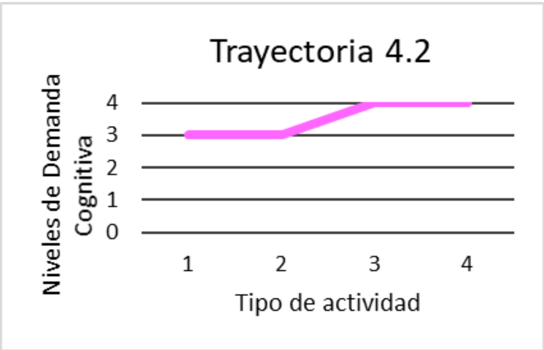


Figura 120. Trayectoria 4.2 de proyecciones ortogonales.

AVAST 1 2,5%

Tras el análisis completo del conjunto de actividades de proyecciones ortogonales y las trayectorias de resolución de los estudiantes, podemos observar:

- Únicamente el 10% de los estudiantes no fue capaz de resolver ningún tipo de actividad.
- El 37,5% de los estudiantes resolvió correctamente la secuencia completa de actividades, pese a que trata contenidos que no se exigen en el currículo oficial.
- Para la construcción de sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales (codificadas u ordinarias), encontramos dos estrategias de resolución. No obstante, exceptuando de un estudiante que hizo uso del nivel *hacer matemáticas*, el resto de estudiantes utilizaron una estrategia del nivel *algoritmos con conexiones*.
- Podemos identificar diferencias notorias entre los estudiantes del grupo talentoso. Una de las causas principales de este resultado es que no todos ellos destacaban en matemáticas, a pesar de que todos ellos habían superado los tests de identificación de superdotación.
- El estudiante que llevó a cabo una trayectoria de nivel superior (Trayectoria 4.2), alcanzado el nivel de *hacer matemáticas*, fue posteriormente seleccionado para participar en el proyecto Estalmat, lo cual confirma su talento matemático y da validez al análisis de respuestas mediante los niveles de demanda cognitiva.
- Consideramos que sería interesante repetir este experimento con estudiantes de un grupo ordinario para poder identificar las diferencias entre ambos grupos. Esta parte de la investigación queda pendiente para un futuro.

7. Conclusiones

La investigación presentada en esta memoria pretende profundizar en el diseño de tareas matemáticas adecuadas para la atención de la diversidad de estudiantes talentosos. Las tareas diseñadas se han basado en los ámbitos de pre-álgebra, geometría plana y visualización.

Para llevar a cabo esta investigación, comenzamos reformulando el modelo de demanda cognitiva propuesto por Smith y Stein (1998) con el fin de facilitar su uso al analizar tareas matemáticas de diferentes tipos (sección 3.3). A continuación, particularizamos las características de dicho modelo para el análisis de tareas de tres contextos matemáticos concretos: pre-álgebra, geometría plana y visualización (sección 4.2). Esto nos permitió evaluar el nivel de demanda cognitiva teórico de las tareas propuestas para cada experimento, señalando el grado de complejidad requerido para su resolución (secciones 5.1.1, 5.2.1, 5.3.1). Las respuestas obtenidas tras implementar las tareas en grupos ordinarios y con estudiantes con talento matemático, nos permitieron analizar el nivel de demanda cognitiva de las respuestas, contrastando las estrategias de resolución utilizadas por los diferentes grupos de estudiantes en función de sus capacidades (secciones 5.1.2, 5.2.2, 5.3.2). En el capítulo 6, resumimos los resultados obtenidos en los tres experimentos de la investigación.

Por último, en este capítulo vamos a formular las conclusiones principales que se derivan de los resultados del análisis de los tres experimentos, que dan respuesta a los objetivos específicos de investigación planteados en el capítulo 1. También presentamos las aportaciones realizadas por este estudio, señalamos las limitaciones de este trabajo y planteamos algunas de las perspectivas futuras de la investigación.

El objetivo general que motivó esta investigación era *proporcionar una herramienta que permita al profesorado de matemáticas diseñar buenas prácticas docentes para el desarrollo de las habilidades de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas en un aula inclusiva.*

Este objetivo general se ha concretado en cuatro objetivos específicos. En las secciones siguientes recordamos cada uno de ellos y detallamos el grado y el modo en el que se han satisfecho.

7.1 Reformulación del modelo de demanda cognitiva

El primer objetivo específico de esta investigación es *reformular y estructurar el modelo de la demanda cognitiva de Smith y Stein para adecuarlo a cualquier contexto de las matemáticas escolares*.

La reformulación del modelo de demanda cognitiva fue un proceso cíclico que consistió en varias fases, detalladas en la sección 3.3. Inicialmente, comenzamos utilizando el modelo original de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998), para realizar un análisis teórico de nuestras tareas. Pero, dados las particularidades de nuestras tareas, encontramos algunas dificultades al clasificarlas. Con el objetivo de solucionar dichas dificultades, exploramos detalladamente cada una de las características definitorias de los niveles de demanda cognitiva, determinando aquellos aspectos que diferenciaban un nivel de otro. Esto nos permitió organizar las características de cada nivel en seis categorías (procedimiento de resolución, finalidad, esfuerzo cognitivo, contenidos matemáticos, explicaciones y representación de la solución) y redactar nuevas características, necesarias para completar las definiciones de los niveles.

La organización de las características de los niveles de demanda cognitiva en categorías ha sido una de las principales aportaciones de esta investigación en lo que respecta a la aplicabilidad del modelo, ya que facilita su uso para el diseño y análisis de una amplia variedad de tareas matemáticas y ofrece a profesores e investigadores una herramienta útil para la selección de tareas en función de su grado de complejidad y para la evaluación de las respuestas de los estudiantes, en especial de los de aaccmm.

7.2 Particularización de las características de los niveles de demanda cognitiva

El segundo objetivo específico de esta investigación es *particularizar las características del modelo reformulado a diversos tipos de actividades concretas.*

La particularización del modelo de demanda cognitiva a los tres contextos matemáticos de nuestra investigación (pre-álgebra, geometría plana y visualización) también fue un proceso cíclico, detallado en la sección 4.2. Al empezar a aplicar el modelo general modificado de demanda cognitiva al análisis de nuestras actividades, observamos que algunas características resultaban demasiado generales. Para facilitar nuestro análisis, decidimos especificar aquellas características que eran demasiado genéricas. Pese a que ha sido necesario hacer particularizaciones de todas las descripciones de las categorías, las referentes al *procedimiento de resolución,* los *contenidos matemáticos* implícitos y la *representación de la solución* son las que han requerido un mayor esfuerzo de adaptación.

La particularización del modelo a los tres contextos matemáticos (pre-álgebra, geometría plana y visualización) facilita el uso del modelo para este tipo de tareas concretas. No obstante, cabe señalar las diferencias existentes entre las tres particularizaciones. Debido a que las actividades de patrones geométricos suelen seguir siempre la misma estructura, la particularización del modelo a este contexto resulta muy provechosa. Sin embargo, las actividades de visualización y, especialmente, de geometría pueden ser muy variadas, por lo que hemos particularizado el modelo a un tipo de tareas muy concretas, siendo conscientes de la necesidad de hacerlo así a pesar de la limitación que ello supone. Por esta razón, consideramos que la particularización del modelo al contexto de patrones geométricos es la mayor aportación en lo que corresponde a este objetivo. No obstante, la particularización a los problemas de proyecciones ortogonales también resulta interesante, ya que se trata de un contexto bastante utilizado por los profesores que quieren ayudar a desarrollar las habilidades de visualización de sus alumnos. Además, la particularización a los problemas de geometría se basa en contenidos curriculares que a menudo se enseñan de una manera memorística, por lo que el uso del modelo de demanda cognitiva en este contexto muestra la riqueza que estos problemas pueden ofrecer en una clase con estudiantes de aaccmm.

Podemos concluir que la particularización del modelo de demanda cognitiva es de ayuda para el análisis de tareas concretas, pero resulta complejo adaptarlo a ciertos contextos matemáticos generales. Por esta razón, consideramos más apropiado, en algunos casos, la particularización del modelo a actividades concretas. Dado que el modelo de demanda cognitiva modificado es una herramienta eficaz para el análisis de tareas matemáticas, creemos que la particularización del modelo a actividades concretas puede realizarla el docente, con el fin de explorar con detalle las características de las actividades propuestas y conocer mejor el grado de complejidad de estas.

7.3 Evaluación del nivel de demanda cognitiva de actividades

El tercer objetivo específico de esta investigación es *evaluar el nivel de demanda cognitiva de las actividades diseñadas en nuestros experimentos mediante un doble análisis, teórico y de respuestas, que permita identificar diferentes grados de talento en los estudiantes*.

Hasta el momento, de acuerdo con la literatura consultada, los investigadores sólo habían utilizado el modelo de demanda cognitiva para analizar los enunciados de las actividades, identificando un único nivel para cada actividad, basándose en el análisis de las respuestas típicas esperadas por un estudiante medio del curso en el que se plantea esa actividad. En esta tesis doctoral, aportamos una nueva propuesta metodológica para el análisis de tareas, consistente en la realización de un doble análisis del nivel de demanda cognitiva, teórico y de respuestas reales de estudiantes.

Primeramente, realizamos un análisis teórico del nivel de demanda cognitiva de las tareas propuestas, basándonos en las respuestas esperadas por un resolutor medio (secciones 5.1.1, 5.2.1, 5.3.1). Esto nos permitió valorar el grado de complejidad que requería la resolución de las tres actividades propuestas para dicho resolutor. Este análisis permite tener una valoración inicial de la evolución del nivel de demanda cognitiva de las actividades, valorando si las tareas propuestas son apropiadas para ser implementadas. Además, el modelo de demanda cognitiva modificado nos ha permitido observar cómo, en algunos casos, el diseño de las actividades podía ser mejorado.

Al analizar las respuestas de los estudiantes a las actividades de los tres contextos en los que hemos experimentado, encontramos diferentes estrategias de resolución con distintos niveles de demanda cognitiva para una misma actividad (secciones 5.1.2, 5.2.2, 5.3.2). De esta manera, el análisis de respuestas de los estudiantes completa el análisis teórico, aportando nueva información rica y valiosa para mejorar la identificación del nivel de demanda cognitiva de la actividad. Además, el análisis de respuestas de los estudiantes nos ha permitido detectar estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, en función del nivel de demanda cognitiva de sus estrategias de resolución.

El doble análisis del nivel de demanda cognitiva es una de las aportaciones importantes de esta tesis. Esta incorporación proporciona una herramienta más completa para el diseño de actividades que desarrollen las habilidades de estudiantes con diferentes capacidades. Por una parte, el análisis teórico permite valorar el diseño de la tarea, mejorando los detalles, comprobando si se trata de una actividad apropiada para atender la diversidad de capacidades existente en un aula, especialmente si hay estudiantes con altas capacidades. Por otra parte, el análisis de respuestas de los estudiantes permite complementar la información obtenida tras el análisis teórico e identificar el potencial de los estudiantes en función del nivel de demanda cognitiva de sus respuestas, distinguiendo estudiantes con diferentes capacidades, en particular con aaccmm.

7.4 Valoración de las actividades diseñadas para atender las necesidades educativas de estudiantes con diferentes capacidades, en particular de altas capacidades

El cuarto objetivo específico de esta investigación es *valorar las actividades diseñadas para atender las necesidades educativas de estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, en particular de aaccmm*.

Además de la intención investigadora, el procedimiento que hemos desarrollado para diseñar y analizar actividades matemáticas ha constituido una metodología que podemos considerar adecuada para la atención educativa de los estudiantes con talento matemático. Para valorar las actividades utilizadas, la experimentación se llevó a cabo con estudiantes ordinarios y estudiantes talentosos, pertenecientes a AVAST. Observando los resultados obtenidos al analizar las respuestas de estos estudiantes en los tres experimentos (capítulo 6), podemos concluir:

- Hemos podido observar diferencias en la evolución del nivel de demanda cognitiva entre ambos grupos de estudiantes. Pese a que la mayoría de estudiantes de ambos grupos fueron capaces de resolver las cuestiones iniciales, que requerían un nivel de demanda cognitiva inferior (*algoritmos sin conexiones*), únicamente una pequeña parte del grupo ordinario y la mayor parte del grupo talentoso fueron capaces de completar las actividades alcanzando los niveles superiores (*algoritmos con conexiones* o *hacer matemáticas*). Esto manifiesta la posibilidad de plantear dichas actividades en grupos ordinarios, donde una parte de los estudiantes pueda alcanzar los contenidos mínimos, al mismo tiempo que se les proporciona recursos enriquecedores a los estudiantes con mayores capacidades.
- En ambos grupos (ordinario y talentoso), podemos apreciar cómo una pequeña parte de los estudiantes utilizó estrategias complejas de un nivel de demanda cognitiva superior al esperado. Cabe señalar que los estudiantes del grupo ordinario que destacaron en nuestras actividades obtuvieron una alta puntuación en el test de inteligencia realizado en el

centro. Por su parte, los estudiantes del grupo talentoso que mostraron mayor nivel durante la resolución de la actividad fueron posteriormente seleccionados para participar en el proyecto Estalmat (Estímulo de Talento Matemático). Esto muestra la utilidad de estas actividades para identificar a los estudiantes talentosos.

- Hemos detectado cómo una pequeña parte del grupo talentoso tuvo dificultades cuando el nivel de demanda cognitiva de las actividades incrementó. Estos resultados se han repetido en los tres experimentos, lo cual consideramos es debido a que, a pesar de que todos los estudiantes del grupo talentoso habían pasado unas pruebas de selección de superdotación, no todos ellos destacaban en matemáticas.
- Hemos obtenido respuestas de algunos estudiantes del grupo talentoso que alcanzaron el nivel *hacer matemáticas* antes de lo esperado. Esto provocó que el nivel de demanda cognitiva de su trayectoria de resolución disminuyera al final del proceso, debido a que los estudiantes obtuvieron la respuesta antes de lo previsto y en las últimas cuestiones se limitaron a repetir los resultados obtenidos previamente. Esto indica las diferencias existentes entre los estudiantes del grupo talentoso, ya que, entre los que alcanzaron el nivel de *hacer matemáticas,* no todos siguieron el mismo procedimiento de resolución.

Podemos concluir que, pese a la complejidad que suponía la resolución completa de las tareas, requiriendo en todos los casos del uso de un nivel alto de demanda cognitiva, un porcentaje importante de estudiantes talentosos fue capaz de resolver correctamente las tareas completas. Esto muestra el potencial de las actividades que hemos diseñado y experimentado para desarrollar las habilidades de estudiantes con talento matemático, creando situaciones complejas, que suponen un reto para los estudiantes y que favorecen el desarrollo de los estudiantes talentosos. El modelo de demanda cognitiva no solo es una interesante herramienta de investigación, sino también una herramienta que permite diseñar buenas prácticas docentes, identificando el potencial de las actividades para atender las necesidades educativas de los estudiantes con talento matemático.

7.5 Aportaciones de este estudio

El modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein ya era considerado como instrumento de relevancia para valoración de actividades. Así, el NCTM (2014) afirma que este modelo es un recurso adecuado para identificar tareas de alta demanda cognitiva que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas para alcanzar un aprendizaje efectivo de las matemáticas.

En este estudio hemos presentado una interpretación original e innovadora del modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998). Hemos desarrollado sus características teóricas y lo hemos particularizado a varios contextos de las matemáticas escolares de Educación Primaria y ESO. De esta manera, proporcionamos a profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática, una herramienta útil para elaborar tareas matemáticas en un aula inclusiva, donde se atiendan las necesidades educativas de estudiantes talentosos. Esta herramienta permite diseñar actividades que incrementen poco a poco el grado de complejidad, comenzando con el trabajo de los contenidos mínimos y progresando hasta alcanzar un nivel alto de demanda cognitiva. De esta manera, las tareas pueden ser implementadas en un aula ordinaria, a la vez que crean situaciones problemáticas que permitan a los estudiantes con altas capacidades desarrollar sus habilidades.

En este estudio también hemos presentado ejemplos en los que mostramos cómo aplicar el modelo de demanda cognitiva modificado al análisis de respuestas de estudiantes. Hasta donde conocemos, se trata de una aplicación original de los niveles de demanda cognitiva. Los resultados obtenidos tras implementar las tareas diseñadas con diferentes grupos de estudiantes muestran claras diferencias en las respuestas obtenidas por los estudiantes identificados con talento. Las cuestiones de un alto nivel de demanda cognitiva proporcionaron a estos estudiantes una oportunidad para desarrollar su razonamiento matemático y enriquecer sus conocimientos. Además, el análisis de las respuestas a nuestras tareas nos ha permitido detectar estudiantes dentro del grupo ordinario con mayores capacidades matemáticas.

7.6 Limitaciones

La principal limitación de este trabajo es el tamaño de la muestra, en particular del grupo de estudiantes con aaccmm, y el hecho de tratarse de una muestra de conveniencia. Los resultados expuestos en la investigación se refieren a un grupo reducido concreto de estudiantes con los se trabajó en el experimento. Los sujetos fueron elegidos por su pertenencia a los talleres de matemáticas que organizaba la asociación AVAST, lo cual garantiza su condición de sobredotación, pero no necesariamente de alta capacidad matemática.

Por otra parte, dado las dificultades encontradas al tratar de implementar varias sesiones basadas en contenidos que no forman parte del currículo escolar oficial durante el horario lectivo, así como la posibilidad de contar en los centros de enseñanza a los que teníamos acceso con ordenadores capacitados para llevar a cabo la experimentación de visualización, este experimento únicamente pudo realizarse con estudiantes talentosos. La falta de respuestas a las tareas de proyecciones ortogonales de estudiantes ordinarios supone una limitación para el estudio comparativo de las respuestas de estudiantes según sus capacidades.

Por último, cabe señalar, que los resultados obtenidos a partir del experimento están condicionados por el tipo de actividades propuestas y el diseño de las sesiones. Somos conscientes de que el experimento puede haberse visto condicionado por otras variables ajenas al mismo. Algunos ejemplos de estas son: los contenidos que los estudiantes pudiesen conocer, pese a no estar incluidos en el currículo oficial, la actitud de estudiantes con poca predisposición a manifestar sus argumentaciones, el efecto de estar condicionados por estar siendo observados, la influencia de los investigadores en las respuestas de los estudiantes, etc.

7.7 Perspectivas futuras

Tras finalizar la investigación y realizar un análisis retrospectivo de la misma, consideramos algunos aspectos que podemos mejorar y ampliar.

Por una parte, para corroborar que el modelo de demanda cognitiva permite al profesorado diseñar buenas prácticas docentes, sería interesante realizar un estudio con profesores, donde estos tuvieran que utilizar el modelo de demanda cognitiva modificado para el diseño y análisis de sus tareas y la evaluación de las respuestas de sus alumnos.

Por otra parte, consideramos necesario completar la investigación con nuevos ciclos de diseño, experimentación y análisis, utilizando otro tipo de actividades que desarrollen otras habilidades consideradas propias de los estudiantes con talento matemático. Además, nuestra investigación ha estado centrada en estudiantes de edades entre 10 y 13 años, pero sería importante realizar una investigación con estudiantes de otras edades comprobando cómo afecta esto al modelo de demanda cognitiva. Con estas nuevas experimentaciones se pretende completar y mejorar la investigación realizada, aprendiendo de los errores cometidos, mejorando el diseño de tareas y tratando de ampliar la muestra de estudiantes con talento matemático.

8. Bibliografía

Amit, M., y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*, 111-129.

Anderson, L. W., y Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom’s Taxonomy of educational objectives.* Nueva York: Longman.

Araujo, Z. (2012). *Transferring demand: secondary teachers’ selection and enactment of mathematics tasks for english language learners.* (tesis doctoral). Athens, GA: The University of Georgia.

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas.* (trabajo final de máster). Valencia: Universitat de València. Obtenido de http://roderic.uv.es/handle/10550/56731

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Aretxaga, L. (Coord.). (2012). *Orientaciones Educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.* Vitoria: Universidades e Investigación del Gobierno Vasco.

Ayalon, M., Watson, A., y Lerman, S. (2015). Functions represented as linear sequential data: relationships between presentation and student responses. *Educational Studies in Mathematics, 90*, 321-339.

Baki, A., Kosa, T., y Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology, 42*(2), 291-310.

Barbosa, A., Vale, I., y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: thinking process used by 6th grade students. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 273-293.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa.* (tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E., y Blanco, R. (2004). *La educación de niños con talento en iberoamérica.* Santiago, Chile: UNESCO.

Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas.* (trabajo final de máster). Valencia: Universitat de València. Obtenido de http://roderic.uv.es/handle/10550/32580

Benedicto, C., Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Ben-Haim, D., Lappan, G., y Houang, R. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 16*(4), 389-409.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh, y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). Nueva York: Academic Press.

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines, y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: PME.

Bloom, B., Engelhart, M., Furst, E., y Hill, W. (1956). *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals. Handbook 1: Cognitive domain.* Nueva York: David McKay.

Boaler, J., y Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: the case of Railside school. *Teachers College Record, 110*(3), 608-645.

Burjan, V. (1991). Mathematical giftedness- some questions to be answered. En F. J. Mönks, M. W. Katzko, y H. W. van Boxtel (Eds.), *Education of the gifted in Europe: theoretical and research issues* (pp. 165-170). Amsterdam: Swetz y Zeitlingen.

Butts, T. (1980). Posing problemas properly. En S. Krulik, y R. Reyes (Eds.), *Problem solving school mathematics* (pp. 23-33). Reston, VA: NCTM.

Callejo, M. L., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5-25.

Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema, 28*(48), 64-88.

Cañadas, M., Brizuela, B., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco, *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M., y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Castro, E., Cañadas, M., y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 2-9.

Cruz, G. (2009). *La demanda cognitiva como oportunidad de aprendizaje en el área de matemática.* Obtenido de https://es.slideshare.net/martiaccal/la-demanda-cognitiva-como-oportunidad-de-aprendizaje-en-el-rea-de-matemtica-gustavo-cruz-48967375

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37*(6), 14-20.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faísca: Revista de Altas Capacidades, 13*(15), 1-11.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. En R. Sutherland, y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 3-19). Berlín: Springer Verlag.

Eisenberg, T., y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann, y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-38). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

English, L., y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Escrivà, M. T. (2016). *Habilitats de visualització manifestades pels alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la relació d'aquestes amb el talent matemàtic.* (trabajo final de máster). Valencia: Universitat de València. Obtenido de http://roderic.uv.es/handle/10550/56732

Felmer, P., Pehkonen, E., y Kilpatrick, J. (2016). *Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives.* Nueva York: Springer.

Fernández, T., Godino, J., y Cajaraville, J. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema, 26*(42A), 39-63.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Freiman, V. (2008). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades. A challenging situations approach. En B. Sriraman (Ed.), *Creativity, giftedness, and talent development in mathematics* (pp. 155-184). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Friel, S., y Markworth, K. (2009). A framework for analysing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 24-33.

García, M., y Benítez, A. (2013). Desempeño de los estudiantes en tareas matemáticas que hacen uso de diferentes representaciones. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 907-915). Mexico, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García-Cruz, J. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal.* (tesis doctoral). La Laguna: Universidad de La Laguna.

García-Cruz, J. (1999). La generalización en un tipo particular de sucesiones aritméticas: los problemas de generalización lineal. *Números, 38*, 3-20.

García-Reche, A., Callejo, M., y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Gardner, H. (1999). *Inteligencias múltiples: la teoría en la práctica.* Barcelona: Paidós.

Garrison, A. (2014). Mathematics teachers' enactment of cognitively demanding tasks: investigating links to teachers' knowledge and conceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(5), 636-674.

Godino, J., Gonzato, M., Cajaraville, J., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñaza de las Ciencias, 30*, 109-130.

Godino, J., Gonzato, M., Contreras, A., Estepa, A., y Díaz-Batanero, C. (2016). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre visualización de objetos tridimensionales en futuros profesores de educación primaria. *REDIMAT, 5*(3), 235-262.

Gómez, R. (2013). *Exploración de las características del razonamiento visual en alumnos con talento matemático.* (trabajo final de máster). Valencia: Universitat de València. Obtenido de http://roderic.uv.es/handle/10550/52715

González, M. (2007). *Detección y Estímulo de Talento Matemático. Un proyecto para Cantabria.* Obtenido de https://www.estalmat.unican.es/documentos/Curso_Verano_2007/Presentacion_Estalmat_MJ.pdf

Gonzato, M., Fernández, M., y Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números, 77*, 99-117.

Gorgorió, N. (1994). *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials.* (tesis doctoral). Bellaterra, Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona. Obtenido de http://ddd.uab.cat/record/55049

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Gruessing, M. (2011). Spatial abilities and mathematics achievement among elementary school children. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 306). Ankara: PME.

Gutiérrez, A. (1992). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría* (pp. 44-59). México D.F.: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: PME.

Gutiérrez, A. (1996b). The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. En A. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 23-32). Brisbane: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Hess, K. K. (2005). *Applying Webb's depth-of-knowledge (DOK) levels in social studies.* Dover, NH: NCIEA. Obtenido de http://www.nciea.org/publication_PDFs/DOKsocialstudies_KH08.pdf

Hess, K., Jones, B., Carlock, D., y Walkup, J. (2009). *Cognitive rigor: blending the strengths of Bloom's Taxonomy and Webb's depth of knowledge to enhance classroom-level processes.* Washington, D.C.: ERIC. Obtenido de ERIC: http://eric.ed.gov/?id=ED517804

Hoyos, E., Aristizábal, J., y Acosta, C. (2015). Cubos y Cubos. [software]. Armenia, Colombia: Grupo GEDES, Universidad del Quindío.

Huntzinger, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. En C. Greenes, y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: NCTM.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Juter, K., y Sriraman, B. (2011). Does high achieving in mathematics =gifted and/or creative in mathematics. En B. Sriraman, y K. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 45-65). Rotterdam, Holanda: Sense.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Washington, D.C.: ERIC. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED441662

Kim, E., y Kim, R. (2017). A comparative analysis of mathematical tasks for gifted students in Korea and the United States. En B. Kaur, W. Ho, T. Toh, y B. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 41). Singapur: PME.

Kosslyn, S. M. (1980). *Image and mind.* Londres: Harvard U. P.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lean, G., y Clements, M. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 267-299.

Lee, K., Ko, E., y Song, S. (2007). The analysis of activity that gifted students construct definition of regular polyhedra. En J. Wo, H. Lew, K. Park, y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 153-160). Seúl: PME.

Leikin, R. (2010). Teaching the mathematically gifted. *Gifted Education International, 27*, 161-175.

Leikin, R. (2011). The education of mathematically gifted students: Some complexities and questions. *The Mathematics Enthusiast, 8*(9), 167-188.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. En Y. Li, E. Silver, y S. Li, *Transforming mathematics instruction: multiple approaches and practices* (pp. 59-80). Cham, Suiza: Springer.

Leikin, R., Koichu, B., y Berman, A. (2009). Mathematical giftedness as a quality. En R. Leikin, A. Berman, y B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 115-127). Rotterdam, Holanda: Sense.

Lin, F., y Yang, K. (2004). Differentiation of students' reasoning on linear and quadratic geometric number patterns. En M. Hoines, y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457-464). Bergen, Noruega: PME.

Lynch, S., Hunt, J., y Lewis, K. (2018). Productive struggle for all: differentiated instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(4), 195-201.

Makina, A. (2010). The role of visualisation in developing critical thinking in mathematics. *Perspectives in Education, 28*(1), 24-33.

Malara, N. (1999). Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales. *Educación Matemática, 11*(3), 54-68.

Merino, E., Cañadas, M., y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climents (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Miller, R. (1990). *Discovering mathematical talent.* Washington, D.C.: ERIC. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED321487

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC). (1996). Resolución de 29 de abril de 1996, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se determinan los procedimientos a seguir para orientar la respuesta educativa a los alumnos con necesidades educativas especiales asociadas a condiciones personales. *Boletín Oficial del Estado, 119*(16 de mayo), 16873-16875.

Murawska., J. (2018). Seven billion people: fostering productive struggle. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(4), 208-214.

Murray, E. (2011). *Implementing higher-order thinking in middle school mathematics.* (tesis doctoral). Athens, GA: University of Georgia.

N.C.T.M. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Thales (original en inglés 2000).

N.C.T.M. (2014). *Principles to actions. Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: NCTM.

Ndlovu, W. (2011). *Learners' mathematical reasoning when generalizing from number patterns in the general education and training phase.* (tesis de maestría). Johannesburgo, Sudáfrica: University of the Witwatersrand.

Ortega, T., y Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 95-117.

Paz-Baruch, N., Leikin, R., y Leikin, M. (2016). Visual processing in generally gifted and mathematically excelling adolescents. *Journal for the Education of the Gifted, 39*(3), 237-258.

Penalva, M., y Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la educación matemática. En J. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 27-51). Barcelona: Graó.

Piggott, J. (2011). *Rich tasks and contexts.* (documento electrónico sin publicar). Cambridge, G.B.: NRICH. Obtenido de https://nrich.maths.org/5662

Pinheiro, W., Lu, F., Lei, K., y Tso, T. (2017). The cognitive demand levels of tasks between brazilian, taiwanese, and singaporean mathematics textbooks: a case study of the pythagorean theorem. En B. Kaur, W. Ho, T. Toh, y B. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 258). Singapur: PME.

Pittalis, M., Mousoulides, N., y Andreou, A. (2009). Construction of dynamic visual images of 3d geometry shapes. En C. Bardini, P. Fortin, A. Oldknow, y D. Vagost (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching.* Obtenido de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.543.96yrep=rep1ytype=pdf

Pitta-Pantazi, D. (2017). What have we learned about giftedness and creativity? An overview of a five years journey. En R. Leikin, y B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness.* Cham, Suiza: Springer.

Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2009). Psychological aspect: identification of giftedness in earlier ages. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 191-194). Tesalónica, Grecia: PME.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kattou, M., Sophocleous, P., y Pittalis, M. (2015). Assessing mathematically challenging problems. En K. Krainer, y N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1052-1058). Praga: ERME.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Méjico: Trillas.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Pratt, D., y Davison, I. (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the kite. En N. Pateman, B. Dougherty, y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 31-38). Honolulu, HI: PME.

Presmeg, N. (1986a). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Presmeg, N. (1986b). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and simbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara: PME.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

Ramírez, C., Cueto, S., Pain, O., y León, J. (2003). *Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemáticas en una muestra de estudiantes del sexto grado de primaria de Lima.* Lima: GRADE.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.* (tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Ramírez, R., y Cañadas, M. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO, 79*, 23-30.

Ramírez, R., y Flores, P. (2017). Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(2), 179-196.

Renzulli, J. (1978). What makes giftedness? Re-examing the definition. *Phi Delta Kappa, 60*, 180-184.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M. Pinto, y T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Rivera, F. D. (2011). *Towards a visually-oriented school mathematics curriculum.* Melbourne, Australia: Springer.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: psychological and pedagogical considerations.* Dordrecht, Holanda: Springer.

Rojas, S., Jiménez, W., y Mora, L. (2009). El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Pasto, Colombia: ASOCOLME.

Ryu, H., Chong, Y., y Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J. Woo, H. Lew, K. Park, y D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 137-144). Seúl: PME.

Saads, S., y Davis, G. (1997). *Visual perception and image formation in three dimensional geometry.* (manuscrito no publicado). Southampton, G.B.: University of Southampton.

Sack, J. (2013). Development of a top-view numeric coding teaching-learning trajectory within an elementary grades 3-D visualization design research project. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 183-196.

Sack, J., y Vazquez, I. (2016). *A 3d visualization teaching-learning trajectory for elementary grades children.* Dordrecht: Springer.

Schoenfeld, A. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education, 45*, 607-621.

Schoenfeld, A. (2016). *Comunicación personal.* (16 de septiembre del 2016).

Schoenfeld, A., y TRU Project. (2016a). *An introduction to the teaching for robust understanding (TRU) framework.* Berkeley, CA: University of California.

Schoenfeld, A., y TRU Project. (2016b). *The teaching for robust understanding (TRU) observation guide: a tool for teachers, coaches, administrators, and professional learning communities.* Berkeley, CA: University of California.

Schultz, K. (2009). *Cognitive demand and technology use in high school.* (tesis doctoral). Athens, GA: The University of Georgia.

Silver, E. (2010). Examining what teachers do when they display their best practice: teaching mathematics for understanding. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 1*(1), 1-6.

Silver, E. A., y Stein, M. K. (1996). The QUASAR project: the "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education, 30*, 476-521.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V., y Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students.* Cham, Suiza: Springer.

Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Steen, L. (1988). The science of patterns. *Science*, 611-616.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-276.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* Nueva York: Teachers College Press.

Sternberg, R. (1986). *Las capacidades humanas.* Barcelona: Labor.

Torrego, J. C. (Coord.). (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM.

Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J., Fernández, R., Ramos, J., y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático:

descripción de un proyecto de validación. En A. Sipán (Coord.), *Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos* (pp. 281-292). Zaragoza: Mira.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick, y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Warren, E., y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.

Webb, N. L. (1997). *Criteria for alignment of expectations and assessments in mathematics and science education.* (Research monograph nº 6). Washington, D.C.: Council of Chief State School Officers.

Webb, N. L. (1999). *Alignment of science and mathematics standards and assessment in four states.* (Research monograph nº 18). Washington, D.C.: Council of Chief State School Officers.

Webb, N. L. (2002). *Depth-of-knowledge levels for four content areas.* (manuscrito no publicado). Obtenido de http://facstaff.wcer.wisc.edu/normw/All%20content%20areas%20%20DOK%20levels%2032802.doc

Weingarden, M., y Heyd-Metzuyanim, E. (2017). Zooming in and out - assessing explorative instruction through three lenses. En B. Kaur, W. Ho, T. Toh, y B. Choy, *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 321-328). Singapur: PME.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41-65.

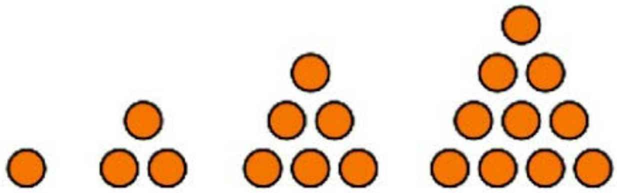
Yakimanskaya, I. S. (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren.* (Soviet Studies in Mathematics Education, vol. 3). Reston, VA: NCTM.

Zapatera, A., y Callejo, M. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 599-610). Ciudad Real: SEIEM.

ANEXO 1. Actividades de patrones geométricos

1.1 Actividad 1. Números triangulares

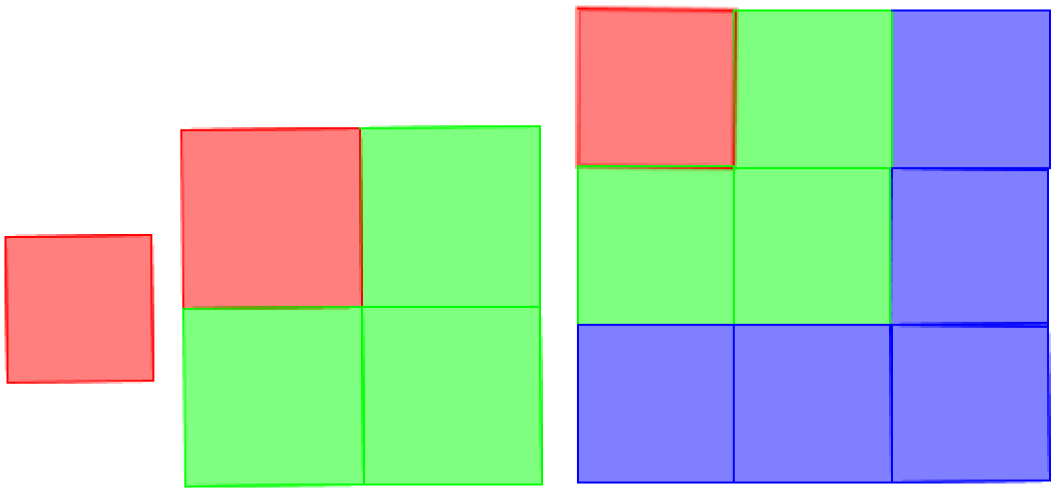
Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos, ...



1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición? ¿En qué te fijas?
2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?
3. ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.
4. ¿Y si fuera la figura que ocupa la posición *n*?

1.2 Actividad 2. Suma de los números impares

La abuela de Marta está tejiendo una manta de patchwork con cuadrados de colores para su cumpleaños. Ha decidido utilizar diferentes colores formando L con los cuadrados del mismo color.



Cuando la manta esté formada por 5 cuadrados pequeños en cada lado:

1. ¿Cuántos cuadrados hay en total en la manta?
2. ¿Cuántos colores diferentes habrá utilizado?
3. ¿Cuántos cuadrados habrá de cada color?
4. ¿Qué relación podemos observar entre los números de cuadrados de cada color?

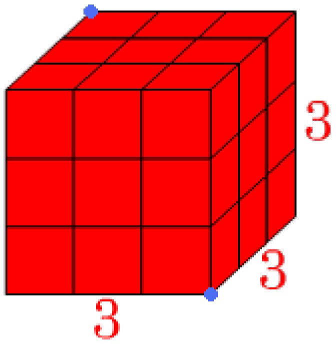
Recordando lo visto anteriormente,

5. ¿Serías capaz de calcular la suma de los primeros 20 números impares?
6. ¿Y de los n primeros números impares?
7. ¿Sabrías calcular la suma de los 100 primeros números pares?
8. ¿Y de los n primeros números pares?

1.3 Actividad 3. Super cubo

Actividad basada en S.E.M.C.V. AL-KHWARIZMI *Revista de problemes de Matemàtiques* Num.75 Junio 2014-11-05 con modificaciones.

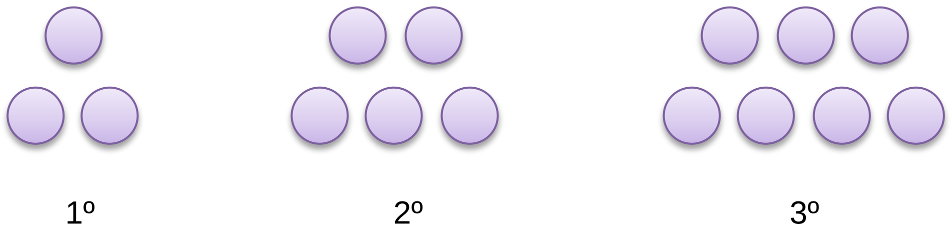
Consideramos un cubo formado por cubos pequeños de manera que cada arista está formada por 3 cubos.



1. ¿Cuántos cubos pequeños hay en total?
2. Vamos a utilizar diagonales en este cubo que unen vértices opuestos del cubo, por lo que no están en una misma cara. Por ejemplo, la diagonal que une los vértices destacados en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños hay en una diagonal que va de un vértice a otro?
3. ¿Sabrías calcular el número de cubos pequeños que forman el cubo grande al quitarle los que se encuentran en las cuatro diagonales? Explica como lo calculas.
4. ¿Y si en vez de 3 cubos en cada arista hubiera 5 cubos? ¿Y 7?
5. ¿Y si en vez de 3 cubos en cada arista hubiera 2?
6. ¿Sabrías calcular cuántos cubos habría en un cubo con n cubos pequeños en cada arista (n impar) si le quitamos los que se encuentran en las cuatro diagonales?

1.4 Actividad 4. ¡Jugamos a los bolos!

Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Pero como nos cuesta tirar al suelo varios bolos de una sola tirada, queremos que estos vayan aumentando poco a poco. Hemos decidido que aumenten del siguiente modo:



a) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 5º vez que tiremos? ¿Qué haces para saberlo?

b) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 12º vez que tiremos? ¿Cómo lo sabes?

c) Como estamos aburridos, vamos a pasar mucho tiempo jugando. ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos bolos tendremos colocados cuando hagamos la tirada 65? ¿Cómo lo sabes?

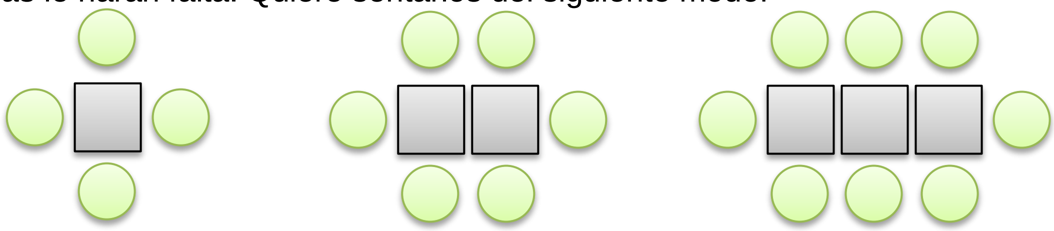
d) ¿Y si en la tirada n?

e) Si hay 31 bolos preparados ¿de qué número de tirada se trata? ¿Cómo lo sabes?

f) Si hay 44 bolos preparados, ¿de qué número de tirada se trata? ¿Cómo lo sabes?

1.5 Actividad 5. ¡Cumpleaños feliz!

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



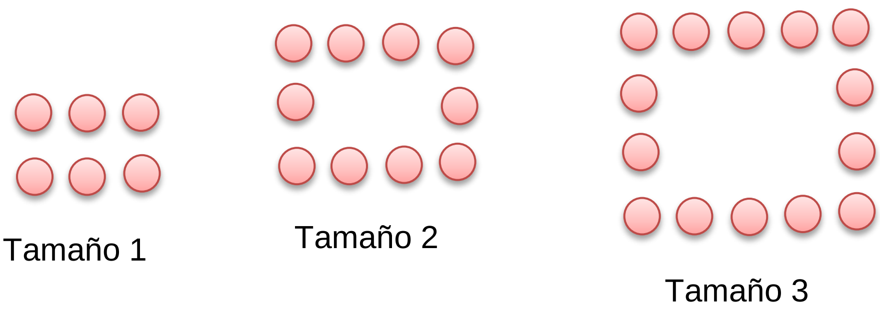
1 mesa 2 mesas 3 mesas

Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Y en n mesas?
e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?
f) Si hay 35 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

1.6 Actividad 6. Piscina

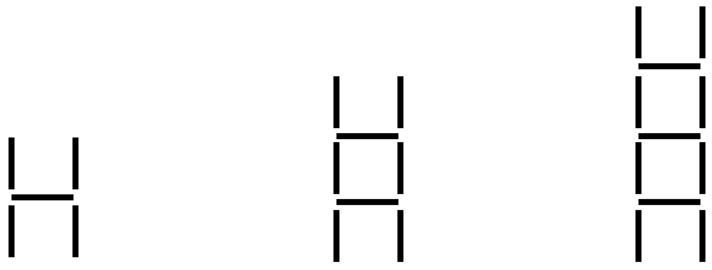
Queremos construir una piscina en el huerto de la abuela, pero no nos ponemos de acuerdo con sus medidas. Así pues, hemos realizado un esquema para contar cuántas baldosas necesitaremos en función del tamaño escogido:



a) ¿Cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 12? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántas baldosas necesitaremos para el tamaño 60? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cuántas baldosas habría para el tamaño de n?
e) Si hay 31 baldosas, ¿qué tamaño será? ¿Cómo lo sabes?
f) Si hay 42 baldosas, ¿qué tamaño será? ¿Cómo lo sabes?

1.7 Actividad 7. Escalera

Un grupo de amigos estaba jugando al baloncesto, cuando, sin querer, han lanzado el balón demasiado alto y ha ido a parar al tejado. Para bajarlo, van a construir una escalera con madera, pero desconocen cuántos escalones necesitarán.

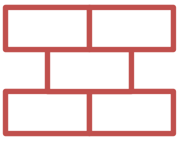


1 2 3

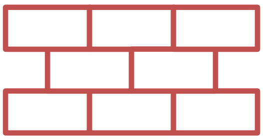
a) ¿Cuántos trozos madera necesitarán para 4 escalones? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos trozos madera necesitarán para 10 escalones? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos trozos madera necesitarán para 45 escalones? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Sabrías calcular cuántos trozos de madera se necesitará para n escalones?
e) Si hay 26trozos de madera, ¿cuántos escalones tendrá? ¿Cómo lo sabes?
f) Si hay 39trozos de madera, ¿cuántos escalones tendrá? ¿Cómo lo sabes?

1.8 Actividad 8. Pared

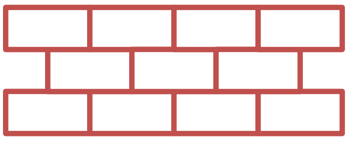
María y Marta están construyendo una pequeña pared alrededor de su jardín:



Tamaño 1



Tamaño 2

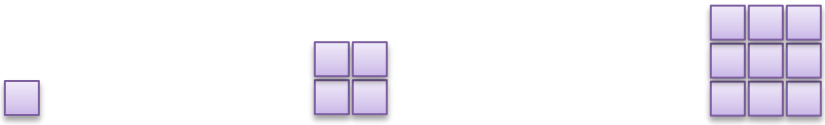


Tamaño 3

a) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 11? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño 50? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Sabría algún modo de calcular cuántos ladrillos necesitarán para construir una pared de tamaño n?
e) Si hay 38 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?
f) Si hay 45 ladrillos, ¿qué tamaño habrán construido? ¿Cómo lo sabes?

1.9 Actividad 9. Cuadrados

Ana está jugando con sus piezas de construcción a formar todos los cuadrados posibles con los cuadraditos que dispone.

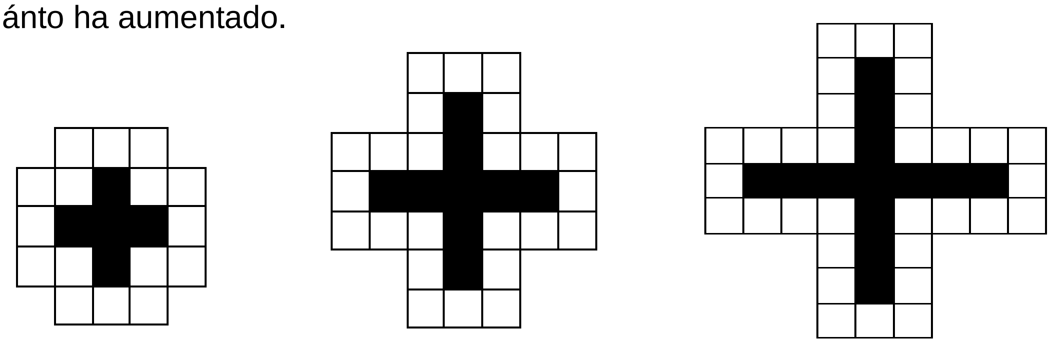


Cuadrado 1 Cuadrado 2 Cuadrado 3

a) ¿Cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado 10? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado 35? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadraditos necesitará para el cuadrado n?
e) Si tiene 30 cuadraditos, ¿qué cuadrado podrá hacer? ¿Cómo lo sabes?
f) Si tiene 49 cuadraditos, ¿qué cuadrado podrá hacer? ¿Cómo lo sabes?

1.10 Actividad 10. Grieta

En el patio de nuestro colegio se ha formado una grieta que crece poco a poco. A su alrededor dibujamos cuadrados de la misma medida para poder saber cuánto ha aumentado.

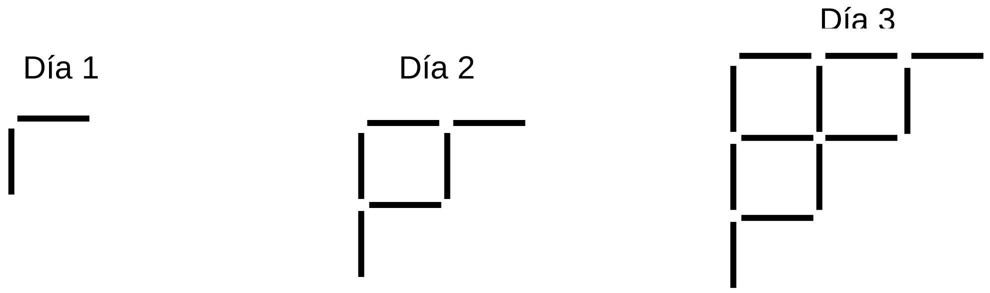


Día 1 Día 2 Día 3

a) ¿Cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día 11? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día 25? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos cuadrados necesitaremos para medir el tamaño de la grieta el día n?
e) Si hemos necesitado 70 cuadrados, ¿cuántos días tiene la grieta? ¿Cómo lo sabes?
f) Si hemos necesitado 128 cuadrados, ¿cuántos días tiene la grieta? ¿Cómo lo sabes?

1.11 Actividad 11. Araña

En clase tenemos una araña como mascota. En la esquina superior de su terrario está construyendo una telaraña. Cada día construye un fragmento siguiendo el siguiente patrón:



Cada una de las rayas representa un hilo diferente.

a) ¿Cuántos hilos habrá colocado en la telaraña el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos hilos habrá colocado en la telaraña el día 10? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos hilos habrá colocado en la telaraña el día 30? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos hilos habrá colocado en la teleraña el día n?
e) Si la telaraña está formada por 50 hilos, ¿cuántos días ha necesitado para hacerla? ¿Cómo lo sabes?
f) Si la telaraña está formada por 90 hilos, ¿cuántos días ha necesitado para hacerla? ¿Cómo lo sabes?

ANEXO 2. Actividades de geometría plana

2.1 Actividad 1. Desigualdad triangular

OBJETIVOS	1.- Conociendo la medida de los lados, trazar los triángulos que sean posibles utilizando material escolar (regla y lápiz). 2.- Comprobar cómo deben ser las medidas de los lados de un triángulo para que sea posible dibujarlo. (Desigualdad triangular)

1.- Utilizando regla y papel, trata de dibujar triángulos con las siguientes medidas de sus lados:

a=2cm, b=4cm y c=7cm;

a=3cm, b=4cm, y c=7cm;

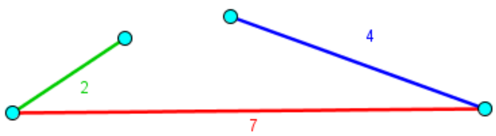
a=5cm, b=6cm y c=7cm;

¿Se pueden dibujar todos? ¿Por qué?

2.- (Applet 1.1) Moviendo los puntos y variando la longitud de los lados, trata de representar los triángulos del ejercicio anterior.

Observando la suma de los lados b y c (lado verde y azul), ¿Qué condición deben cumplir la suma de los dos lados del triángulo para que se pueda construir?

LADO a + LADO b	TERCER LADO	SE PUEDE/ NO SE PUEDE CONSTRUIR



3.- (Applet 1.2) Moviendo los puntos y variando la longitud de los lados trata de representar los siguientes triángulos.

- 3cm, 4cm, 8cm; 5cm, 2cm, 2cm; 1cm, 6cm, 3cm;

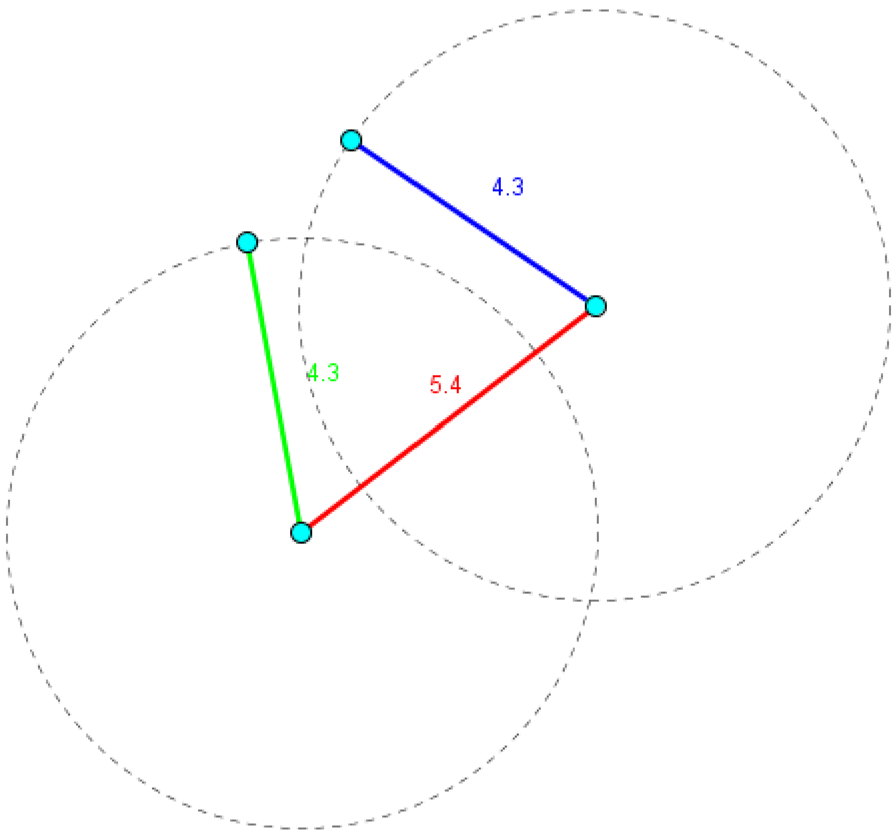
1. ¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

- 2cm, 3cm, 5cm; 6cm, 4cm, 2cm; 3cm, 7cm, 4cm;

2. ¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?

- 4cm, 5cm, 8cm; 5cm, 3cm, 4 cm; 6cm, 7cm, 3cm;

3. ¿Se pueden construir estos triángulos? ¿Por qué?



2.2 Actividad 2. Construcción de triángulos

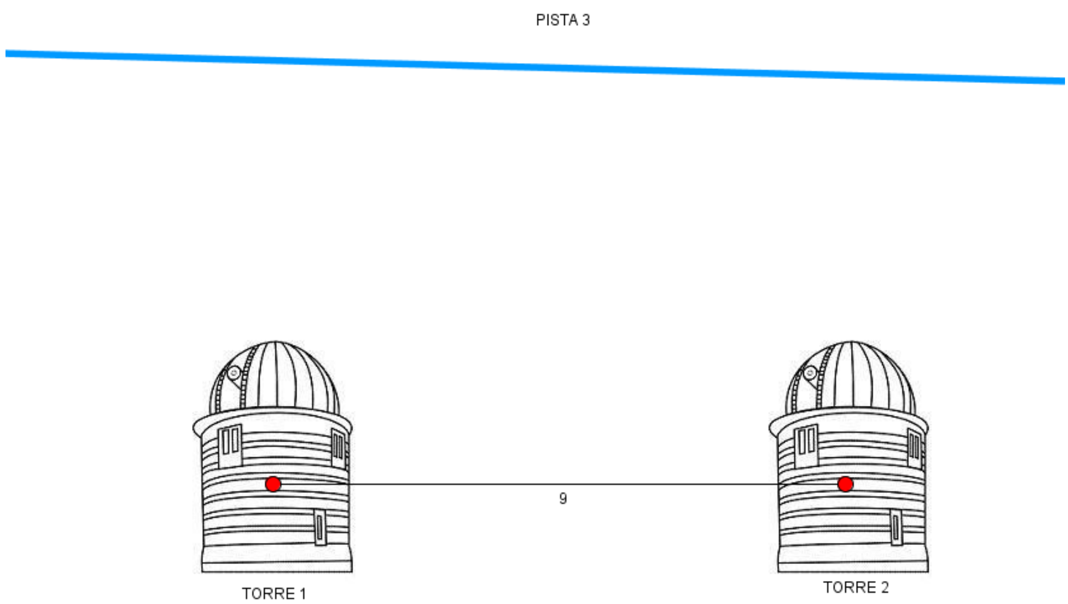
OBJETIVOS	1.-Trazar un triángulo isósceles conociendo uno de los lados iguales. 2.- Trazar un triángulo isósceles conociendo el lado desigual. 3.- Trazar un triángulo rectángulo conociendo uno de sus catetos.

**1.-** (Applet 2) Un avión debe realizar un aterrizaje forzoso en el aeropuerto más cercano. El piloto sabe que debe aterrizar en la PISTA 3, pero desconoce en qué punto exacto, únicamente sabe que el punto de aterrizaje forma un triángulo isósceles con las dos torres de control. Encuentra el punto o los puntos donde debe aterrizar el avión si:

a) El segmento que une las dos torres es uno de los lados iguales del triángulo isósceles.

b) El segmento que une las dos torres es el lado diferente del triángulo isósceles.

2.- Encuentra el punto de aterrizaje si el triángulo fuese rectángulo. ¿Existe un único punto? Tomando el lado dado como uno de los lados que forman 90º.



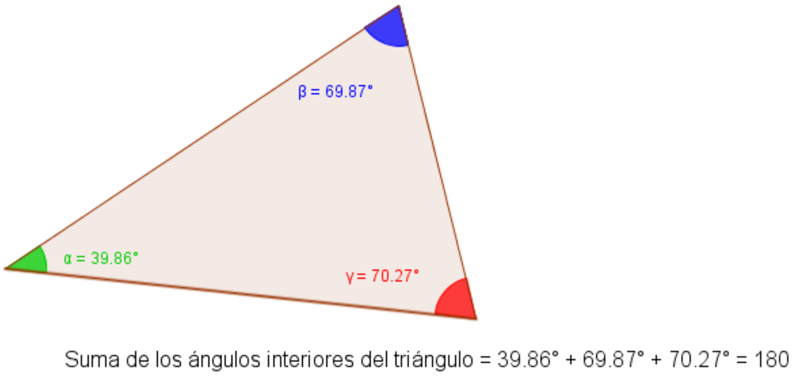
2.3 Actividad 3. Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo

OBJETIVOS	1.-Trazar triángulos, medir sus ángulos y obtener la suma de sus ángulos. 2.-Obtener la suma de los ángulos de un triángulo dada la medida de cada uno de los ángulos de varios triángulos. 3.- Comprobar la suma de los ángulos de un triángulo observando tres copias de un mismo triángulo unidas por los vértices, de manera que los tres ángulos del triángulo estén unidos. 4.- Comprobar la suma de los ángulos de un triángulo colocando los tres ángulos consecutivos. 5.- Comprobar la suma de los ángulos interiores de un triángulo trazando una recta paralela a uno de sus lados. 6.- Demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º trazando una recta paralela a uno de sus lados. 7.- Calcular la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero, dividiendo el polígono en triángulos mediante el trazado de la diagonal desde un solo vértice. 8.- Calcular la suma de los ángulos interiores de un pentágono, dividiendo el polígono en triángulos mediante el trazado de las diagonales desde un solo vértice. 9.- Calcular la suma de los ángulos interiores para polígonos de 3, 4,5, 6 y 7 lados ayudándose de dibujos. 10.- Deducir la suma de los ángulos interiores para un polígono de 20 lados. 11.- Encontrar una fórmula general para el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

A pesar de no expresarse explícitamente, tomaremos en todos los siguientes apartados polígonos convexos.

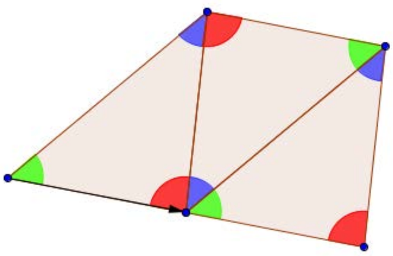
1.- ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo? ¿Se cumple para todos los triángulos? Justifica tu respuesta.

2.- (Applet 3.1) Mide los tres ángulos de un triángulo utilizando el applet de Geogebra. ¿Cuánto vale su suma? ¿Se cumple para todos los triángulos? Prueba con diversos triángulos

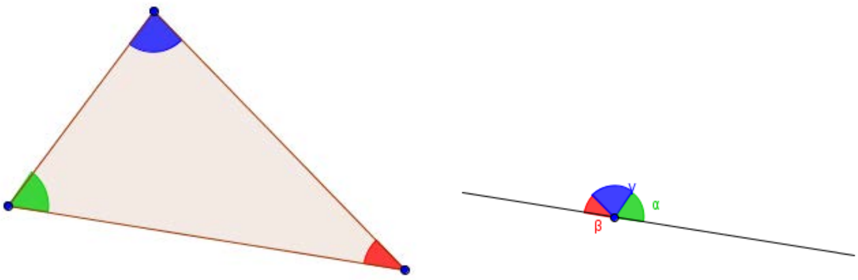


3.- (Applet 3.2) Tenemos un triángulo, hacemos copias y las colocamos como ves en el dibujo. Observa los puntos donde puedes ver los tres ángulos del triángulo, uno al lado de otro (son consecutivos). Se puede ver cuánto mide la suma de los tres ángulos interiores del triángulo. ¿Cuánto mide?

Modifica el triángulo y mira lo que sucede con otros triángulos. ¿Qué resultado sale?



4.- (Applet 3.3) Copiamos los tres ángulos del triángulo, de manera que sean consecutivos (ver dibujo). ¿Cuánto mide su suma? Prueba con distintos triángulos.

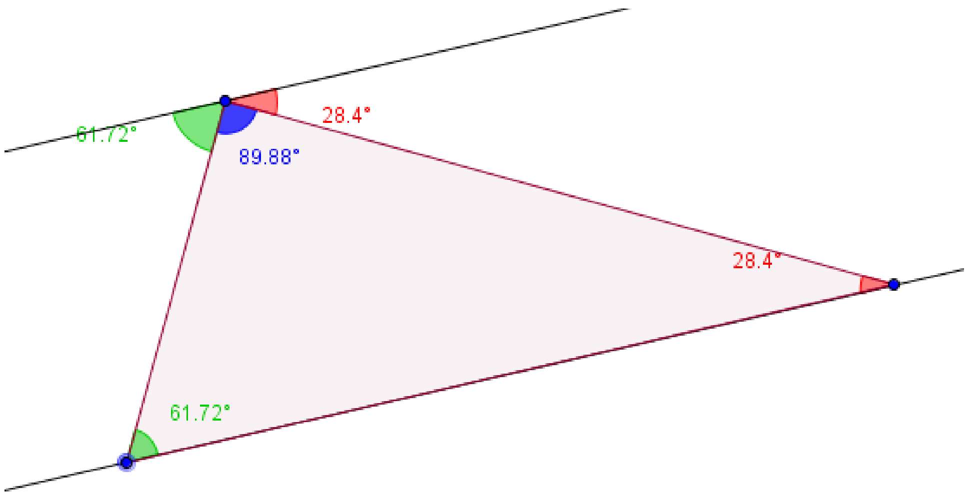


5.- (Applet 3.4) Otra forma de ver cuánto mide la suma de los tres ángulos de un triángulo es trazando una recta paralela a uno de los lados del triángulo (ver dibujo).

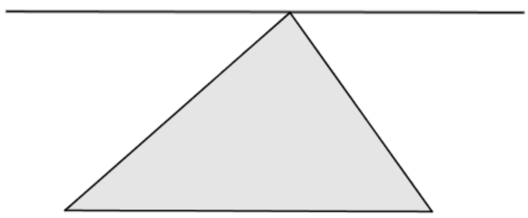
a) ¿Qué puedes observar en los dos ángulos rojos y los dos ángulos verdes?

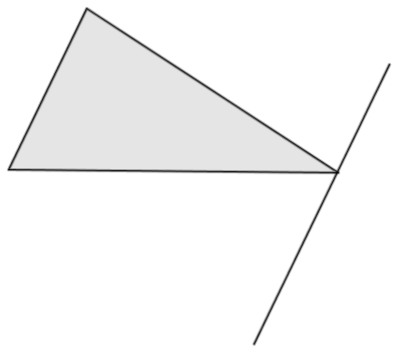
b) ¿Cuánto mide la suma de los tres ángulos coloreados que tienen un vértice común? Prueba con distintos triángulos.

c) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo?



6.- Por lo que has estado viendo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Sin usar el transportador, explica por qué sucede eso con la ayuda de estas figuras, utilizando el método visto anteriormente que se basaba en el trazado de una línea paralela a un lado.





7.- Responde a las siguientes preguntas:

a) Traza una diagonal en un cuadrilátero ¿En cuántos triángulos queda dividido?

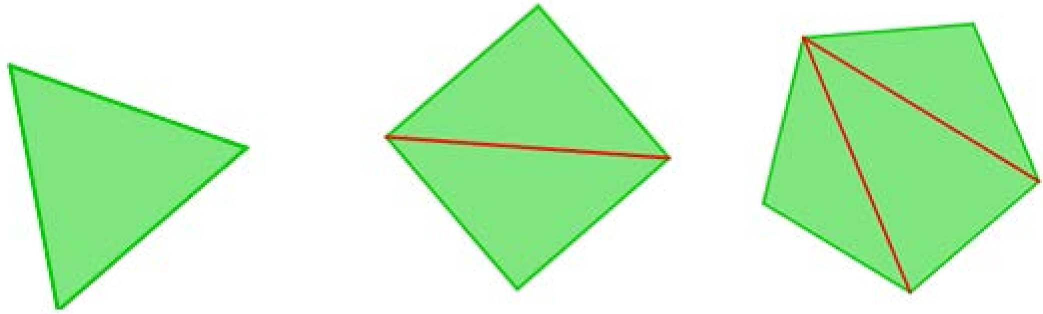
b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero?

8.- Responde a las siguientes preguntas:

a) Traza las diagonales desde un solo vértice de un pentágono. Prueba con diferentes pentágonos. ¿En cuántos triángulos quedan divididos?

b) Recordando el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto medirá la suma de los ángulos interiores de un pentágono?

9.- (Applet 3.5) Observando las figuras, completa la tabla donde consideres el número de triángulos en el que se divide cada polígono al trazar las diagonales desde un vértice y el número de lados del polígono.



a) Una vez conocido el número de triángulos, completa la tabla calculando la suma de los ángulos interiores de cada uno de estos polígonos.

POLÍGONO	NÚMERO LADOS	NÚMERO TRIÁNGULOS	SUMA ÁNGULOS INTERIORES
TRIÁNGULO			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
P. DE 20 LADOS			
P. DE N LADOS			

b) Observando la tabla, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos interiores? Justifica tu respuesta.

c) Si se tratara de un polígono general de n lados, ¿podrías decir en cuántos triángulos se puede dividir el polígono trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto medirá la suma de sus ángulos? Justifica tu respuesta.

2.4 Actividad 4. Triángulos equiláteros

OBJETIVOS	1.-Tratar de representar triángulos equiláteros rectángulos, obtusángulos y acutángulos. 2.-Caracterizar los ángulos de un triángulo equilátero. 3.-Partiendo de un triángulo con todos sus lados iguales, comprobar que sus ángulos también son iguales. 4.-Partiendo de un triángulo con todos sus ángulos iguales, comprobar que sus tres lados también son iguales. 5.- Calcular la medida de los ángulos de un triángulo con todos sus lados iguales y justificar haciendo uso del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. 6.- Clasificar los triángulos equiláteros atendiendo al valor de sus ángulos (rectángulo, acutángulo u obtusángulo) y justificar haciendo uso del valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

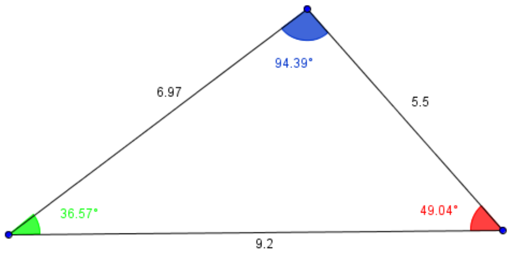
1. (Applet 4.1) Moviendo los vértices forma diferentes triángulos.

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo?

b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo?

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo?

d) ¿Qué puedes decir del triángulo equilátero respecto a sus ángulos?



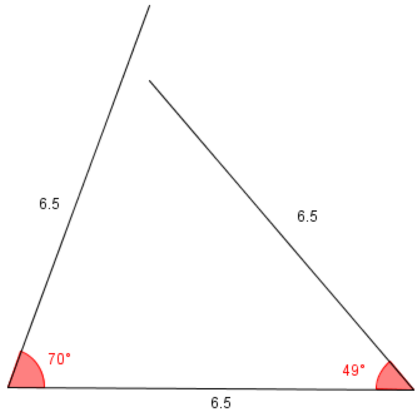
2. (Applet 4.2) Dado un triángulo equilátero (recuerda que tiene sus tres lados iguales), varía la medida de sus ángulos y responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo? Justifica tu respuesta.

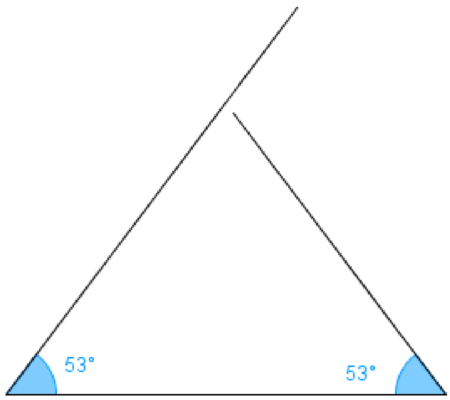
b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo? Justifica tu respuesta.

d) ¿Qué puedes decir de los ángulos de un triángulo equilátero?



 **3.** (Applet 4.3) Tenemos un triángulo con dos ángulos iguales, trata de formar un triángulo con los tres ángulos iguales variando la longitud de los lados.



a) ¿Cuántos triángulos diferentes puedes crear con los tres ángulos iguales? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuánto mide cada ángulo de esos triángulos? ¿Siempre miden lo mismo? Justifica tu respuesta.

Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

c) ¿Qué tienen en particular los lados de esos triángulos?

d) ¿Qué puedes decir de ese triángulo?

4. Recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. Responde justificadamente las siguientes preguntas.

a) ¿Se puede formar un triángulo equilátero rectángulo? Justifica tu respuesta.

b) ¿Se puede formar un triángulo equilátero obtusángulo? Justifica tu respuesta.

c) ¿Se puede formar un triángulo equilátero acutángulo? Justifica tu respuesta.

d) Completa la tabla indicando SI en el caso de que haya triángulos equiláteros de ese tipo, y NO si no los hay.

	ACUTÁNGULO	**RECTÁNGULO**	**OBTUSÁNGULO**
EQUILÁTERO			

e) Completa:

*Todos los **triángulos equiláteros** son ……………………………………………,*

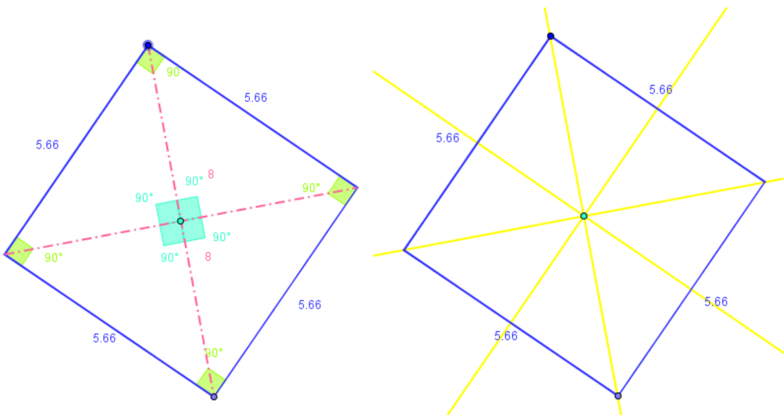
Sus ángulos miden………………………….

(Escribe el nombre de un tipo de triángulo atendiendo al valor de sus ángulos: acutángulo, rectángulo u obtusángulo)

2.5 Actividad 5. Propiedades de paralelogramos

OBJETIVOS	1.-Describir todas las propiedades comunes de la familia de los cuadrados. 2.- Describir todas las propiedades comunes de la familia de los rectángulos. 3.- Describir todas las propiedades comunes de la familia de los rombos. 4.- Describir todas las propiedades comunes al cuadrado y al rectángulo. 5.- Describir todas las propiedades comunes a los cuadrados, pero NO a los rectángulos. 6.- Describir todas las propiedades comunes a los rectángulos, pero NO a los cuadrados. 7.- Establecer una relación de inclusión entre el cuadrado y el rectángulo. 8.- Describir todas las propiedades comunes al cuadrado y al rombo. 9.- Describir todas las propiedades comunes a los cuadrados, pero NO a los rombos. 10.- Describir todas las propiedades comunes a los rombos, pero NO a los cuadrados. 11.- Establecer una relación de inclusión entre el cuadrado y el rombo.

1.- (Applet 5.1) Observando el cuadrado escribe las propiedades que cumplen todos los cuadrados. Prueba con diferentes cuadrados variando la longitud de sus lados.



a) Medida de sus lados.

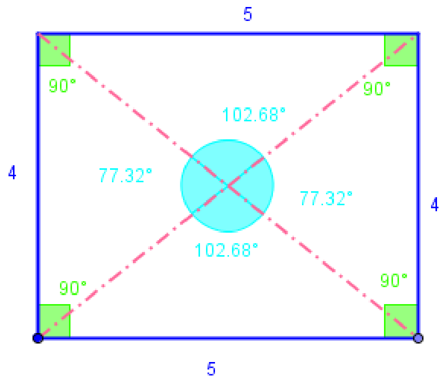
b) Medida de sus ángulos.

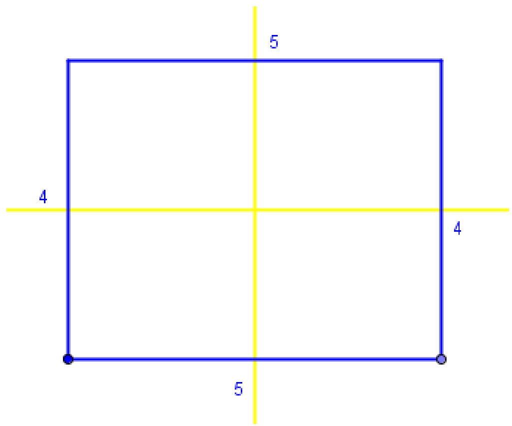
c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

2.- (Applet 5.2) Observando el rectángulo escribe las propiedades que cumplen todos los rectángulos. Prueba con diferentes rectángulos variando la longitud de sus lados.





a) Medida de sus lados.

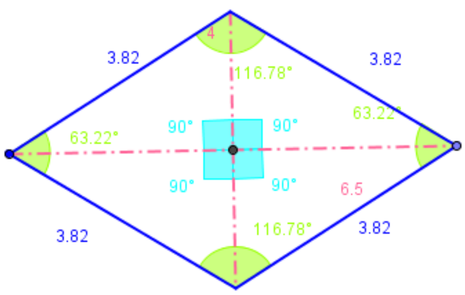
b) Medida de sus ángulos.

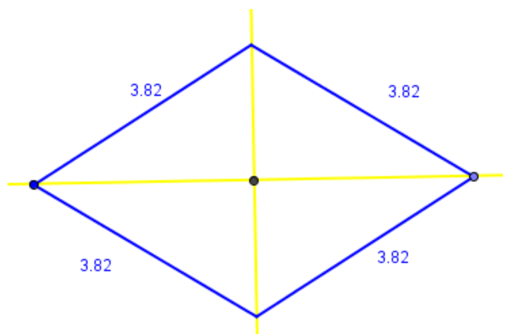
c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

3.- (Applet 5.3) Observando el rombo escribe las propiedades que cumplen todos los rombos. Prueba con diferentes rombos variando la longitud de sus diagonales.





a) Medida de sus lados.

b) Medida de sus ángulos.

c) Medida de sus diagonales.

d) Ángulos de sus diagonales.

e) Número de ejes de simetría y tipo de ángulo que forman.

4.- Recordando los ejercicios anteriores:

a) Escribe todas las propiedades comunes al cuadrado y al rectángulo.

b) Escribe las propiedades que conozcas que tienen todos los cuadrados, pero NO todos los rectángulos. (O sea, puede que algunos rectángulos si las tengan, pero no todos)

c) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los rectángulos, pero NO las tienen todos los cuadrados. (O sea, puede que algunos cuadrados si las tengan, pero no todos)

d) ¿Todos los cuadrados cumplen las condiciones que hace falta para ser rectángulo? ¿Todos los rectángulos cumplen las condiciones que hace falta para ser cuadrado? Justifica tus respuestas.

5.- Recordando los ejercicios anteriores:

a) Escribe todas las propiedades comunes al cuadrado y al rombo.

b) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los cuadrados, pero NO las tienen todos rombos. (O sea, puede que algunos rombos si las tengan, pero no todos)

c) Escribe todas las propiedades que conozcas que tienen todos los rombos, pero NO las tienen todos los cuadrados. (O sea, puede que algunos cuadrados si las tengan, pero no todos)

d) ¿Todos los cuadrados cumplen las condiciones que hace falta para ser rombo? ¿Todos los rombos cumplen las condiciones que hace falta para ser cuadrado? Justifica tus respuestas.

2.6 Actividad 6. Propiedades del rombo

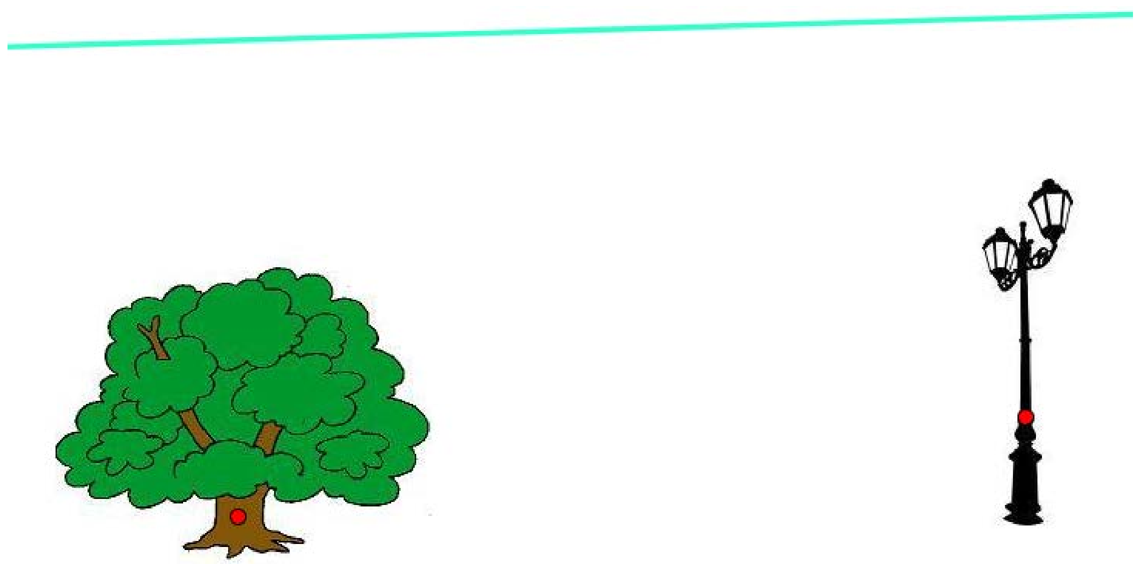
OBJETIVOS	1.- Recordar en el punto donde se cortan las diagonales de un rombo. 2.- Recordar el ángulo que forman las diagonales del rombo. 3.- Dibujar un rombo conociendo dos de sus vértices y la recta donde se encuentra otro de ellos.

 (Applet 6) En un pequeño pueblo entre las montañas, un legendario aventurero cansado y al borde de la muerte ha enterrado un tesoro. En el plano que ha dejado, solamente está señalado un árbol y una farola. También ha anotado que el árbol, la farola y el punto donde está enterrado el tesoro, son tres vértices de un rombo. Sabemos que uno de los vértices esta sobre la pista rectilínea azul celeste.

a) Si el tesoro se encuentra sobre la pista rectilínea, ¿Dónde habría que cavar para encontrar el tesoro?
b) ¿Y si el tesoro se encuentra en el otro vértice del rombo?

Recuerda las propiedades del rombo para resolver el problema.

c) ¿En qué punto se cortan las diagonales del rombo?
d) ¿Qué ángulo forman las diagonales del rombo?

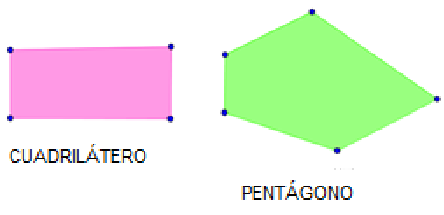


2.7 Actividad 7. Diagonales de un polígono

OBJETIVOS	1.- Dibujar una diagonal en un cuadrilátero y en un pentágono. 2.- Calcular el número de diagonales desde un vértice en un cuadrilátero y un pentágono. 3.- Comprobar que el número de diagonales desde cada vértice es el mismo. 4.- Calcular el número de diagonales desde un vértice de un triángulo. 5.- Trazar las diagonales desde un vértice de diferentes polígonos ayudándose de un dibujo. 6.- Deducir en número de diagonales desde un vértice de un polígono de 20 lados (sin ayuda de un dibujo) 7.- Deducir la relación existente entre en número de lados del polígono y el número de diagonales desde uno de sus vértices. 8.- Calcular el número de diagonales totales de diferentes polígonos (se pueden ayudar de dibujos). 9.- Relacionar el número de diagonales totales con el número de vértices y el número de diagonales desde cada vértice. 10.- Deducir el número de diagonales totales de un polígono de 20 lados (sin ayuda de un dibujo). 11.- Establecer una regla general para el cálculo del número de diagonales de cualquier polígono convexo.

La **diagonal** de un polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos.

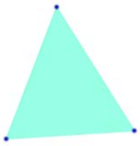
1. Dibuja una diagonal en cada uno de los polígonos siguientes:



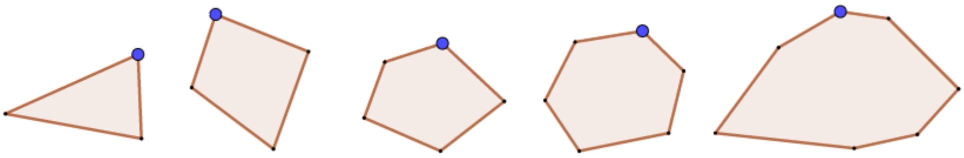
a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del cuadrilátero? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

b) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del pentágono? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales?

c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice del triángulo? ¿Todos los vértices tienen el mismo número de diagonales? ¿Por qué?



2. (Applet 7.2) Observa los polígonos. Responde a las siguientes preguntas.



a) En cada uno de polígonos, traza **todas** las diagonales desde el vértice señalado. Modifica la forma de los polígonos manejando el vértice y comprueba la cantidad de diagonales. Rellena la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE
TRIÁNGULO		
CUADRILÁTERO		
PENTÁGONO		
HEXÁGONO		
HEPTÁGONO		

b) ¿Qué relación existe entre el número de lados y el número de diagonales desde un vértice? ¿Por qué?

3. (Applet 7.2) Dibuja y calcula el número total de diagonales de cada polígono:

a) Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO	N.º DE LADOS	N.º DIAGONALES DESDE UN VÉRTICE	N.º TOTAL DE DIAGONALES
TRIÁNGULO			
CUADRILÁTERO			
PENTÁGONO			
HEXÁGONO			
HEPTÁGONO			
OCTÓGONO			

b) Calcula el número total de diagonales de un polígono de 20 lados.

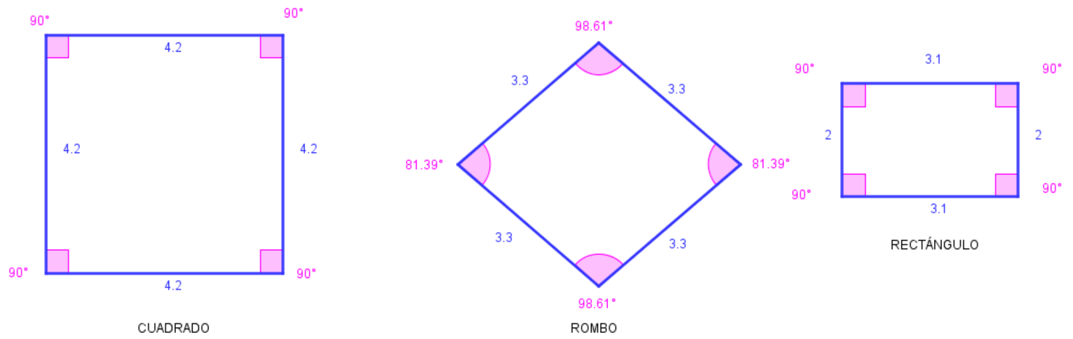
c) ¿Cómo podrías, sin dibujar, calcular el número total de diagonales de cualquier polígono teniendo en cuenta su número de lados?

2.8 Actividad 8. Polígonos regulares (ángulo central)

OBJETIVOS	1.- Recordar la necesidad de que tanto los lados como los ángulos de un polígono regular han de ser iguales. 2.- Calcular el ángulo central de polígonos regulares ayudándose de dibujos. 3.- Deducir el ángulo central de un polígono regular de 20 lados sin la ayuda de dibujos. 4.- Deducir la relación existente entre el número de lados de un polígono regular y su ángulo central. 5.- Comprobar si ocurre lo mismo en polígonos no regulares y justificar.

Un **polígono regular** es un polígono con todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

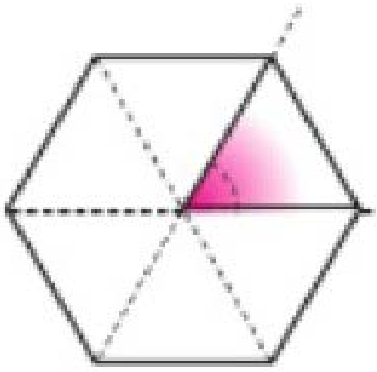

1.- (Applet 8.1) Observa las figuras del cuadrado, rombo y rectángulo y contesta a las siguientes preguntas:



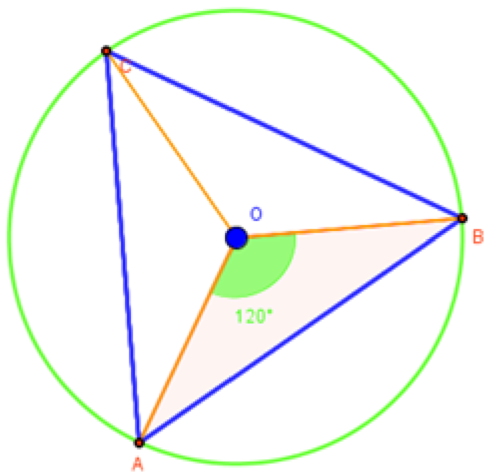
a) ¿Cómo tienen los lados el cuadrado y el rombo? ¿Son los dos polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

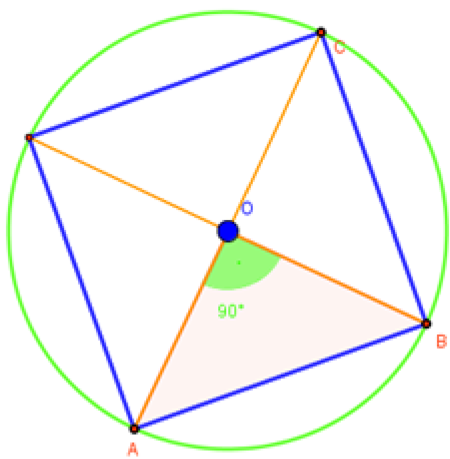
b) ¿Cómo tienen los ángulos el cuadrado y el rectángulo? ¿Son los dos polígonos regulares? Justifica tu respuesta.

El **ángulo central** de un polígono regular tiene el vértice en el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos.



 **2.-** (Applet 8.2)[4] El polígono de centro O es un polígono regular, mueve el valor del deslizador para modificar el valor de los lados y observa como varia el valor del ángulo central.





[4]Miranda, R. (2013) http://www.geometriadinamica.cl

a) Rellena la siguiente tabla.

NÚMERO DE LADOS	ÁNGULO CENTRAL
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

b) Recuerda que una circunferencia completa mide 360º, ¿cómo podemos calcular el ángulo central de un polígono regular si tiene 20 lados?

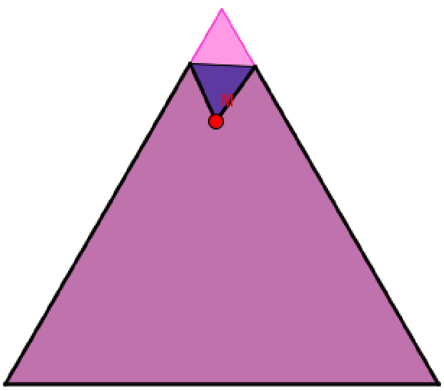
c) ¿Cómo calcularemos el ángulo central de un polígono regular de n lados? Justifica tu respuesta.

d) ¿Se cumple también para polígonos no regulares? Justifica tu respuesta.

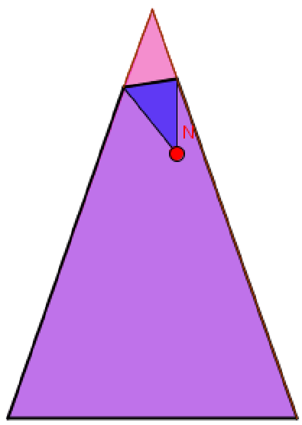
2.9 Actividad 9. Simetrías

OBJETIVOS	1.- Calcular el número de ejes de simetría de un triángulo equilátero y un triángulo isósceles. 2.- Calcular el número de ejes de simetría de un cuadrado y de un paralelogramo no rectángulo. 3.-Calcular el número de ejes de simetría de diferentes polígonos regulares dependiendo de su número de lados. 4.-Comprobar por donde cortan los ejes de simetría de los polígonos regular al polígono dependiendo de su número de lados (con la ayuda de dibujos). 5.-Deducir el número de ejes de simetría y su posición de polígonos regulares de 20 y 21 lados (sin la ayuda de dibujos). 6.- Deducir la una regla general para el cálculo del número de ejes de simetría de un polígono regular. 7.- Deducir por dónde cortarán los ejes de simetría al polígono regular dependiendo si el número de lados es par o impar.

**1.-** (Applet 9.1) Moviendo el punto rojo, calcula los ejes de simetría de un triángulo isósceles y de un triángulo equilátero.

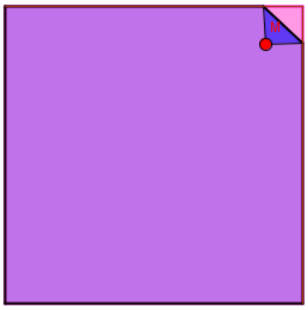


TRIÁNGULO EQUILÁTERO

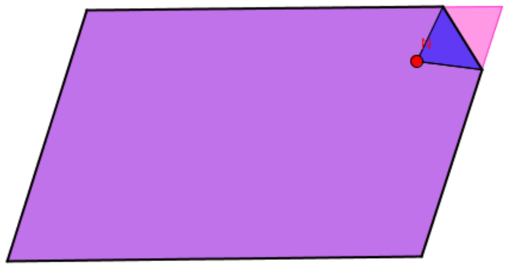


TRIÁNGULO ISÓSCELES

2.- (Applet 9.2)[5] Moviendo el punto rojo, calcula los ejes de simetría de un cuadrado y un paralelogramo cualquiera.

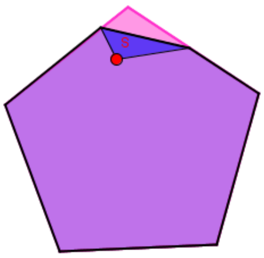


CUADRADO

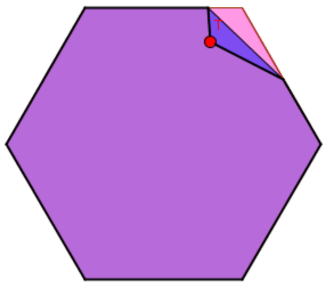


PARALELOGRAMO

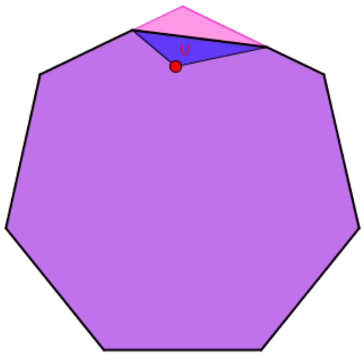
3.- (Applet 9.3) Moviendo el punto rojo, calcula los ejes de simetría de un pentágono regular, de un hexágono regular y de un heptágono regular.



PENTÁGONO REGULAR



HEXÁGONO REGULAR



HEPTÁGONO REGULAR

[5] Mentrard, D. (2013) http://dmentrard.free.fr

a) Rellena la siguiente tabla.

POLIGONOS REGULARES	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE EJES DE SIMETRÍA	¿POR DÓNDE CORTAN LOS EJES AL POLÍGONO?
TRIÁNGULO EQUILÁTERO			
CUADRADO			
PENTÁGONO REGULAR			
HEXÁGONO REGULAR			
HEPTÁGONO REGULAR			

b) ¿Podrías deducir cuantos ejes de simetría tendrá un polígono regular de 20 lados? ¿Y de 21? Justifica tu respuesta.

c) ¿Por dónde cortarán los ejes de simetría del polígono regular de 20 lados al polígono? ¿Y los de 21?

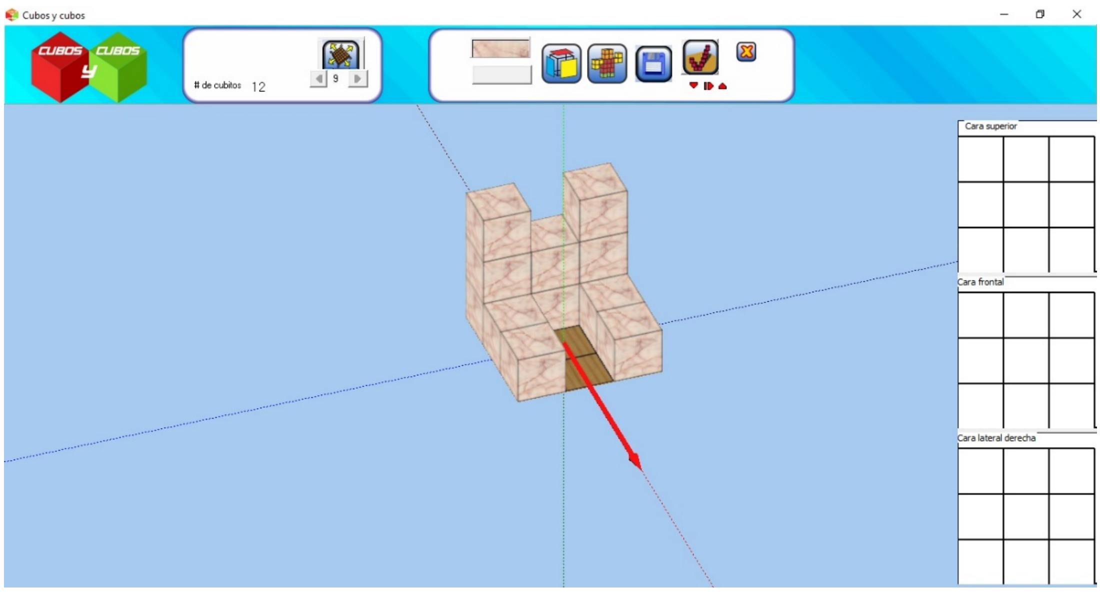
d) ¿Cuántos ejes de simetría tendrá un polígono de n lados? Justifica tu respuesta.

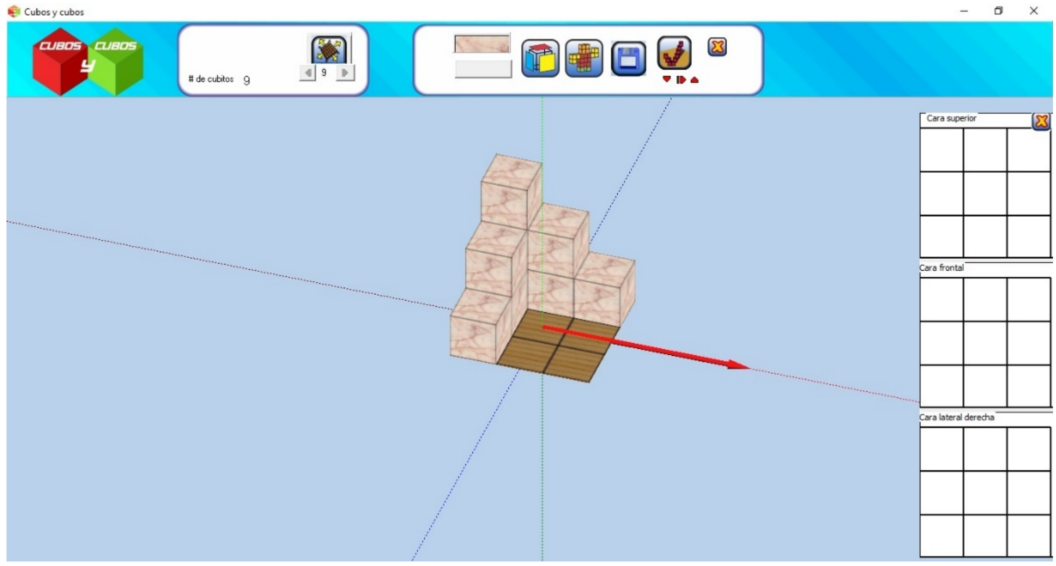
e) Si el número de lados es par, ¿por dónde cortarán los ejes de simetría al polígono? ¿Y si es impar?

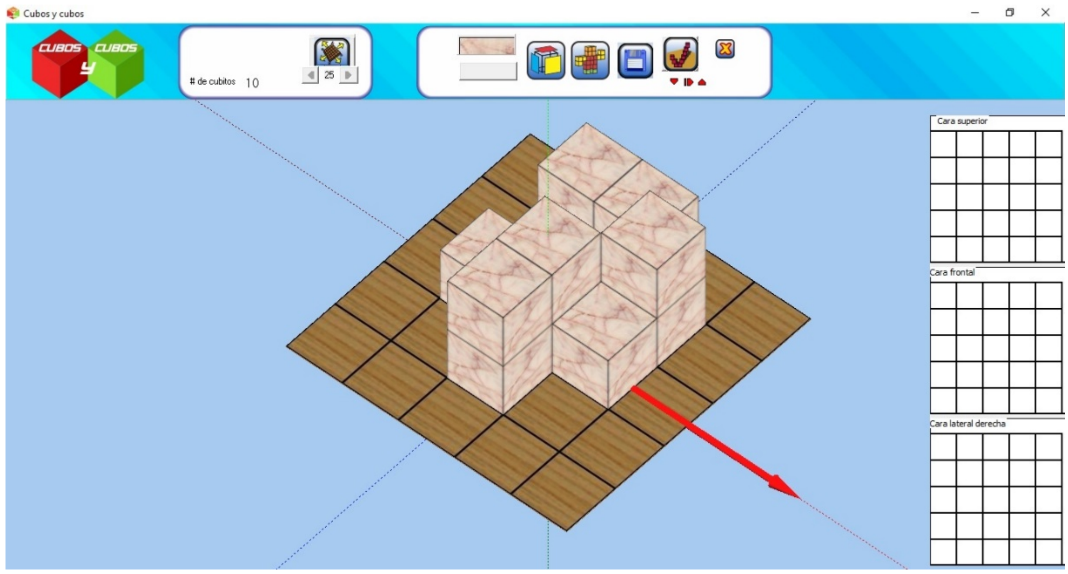
ANEXO 3. Actividades de proyecciones ortogonales

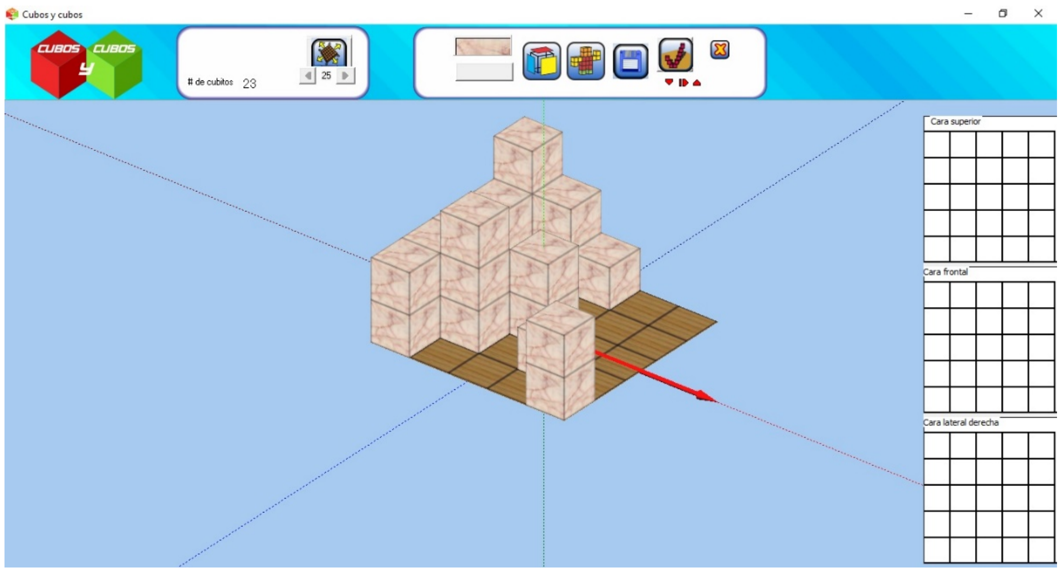
3.1 Actividad 1. Dibujo de las proyecciones ortogonales ordinarias de un sólido

Dibuja en la pantalla las proyecciones ortogonales ordinarias de los sólidos:



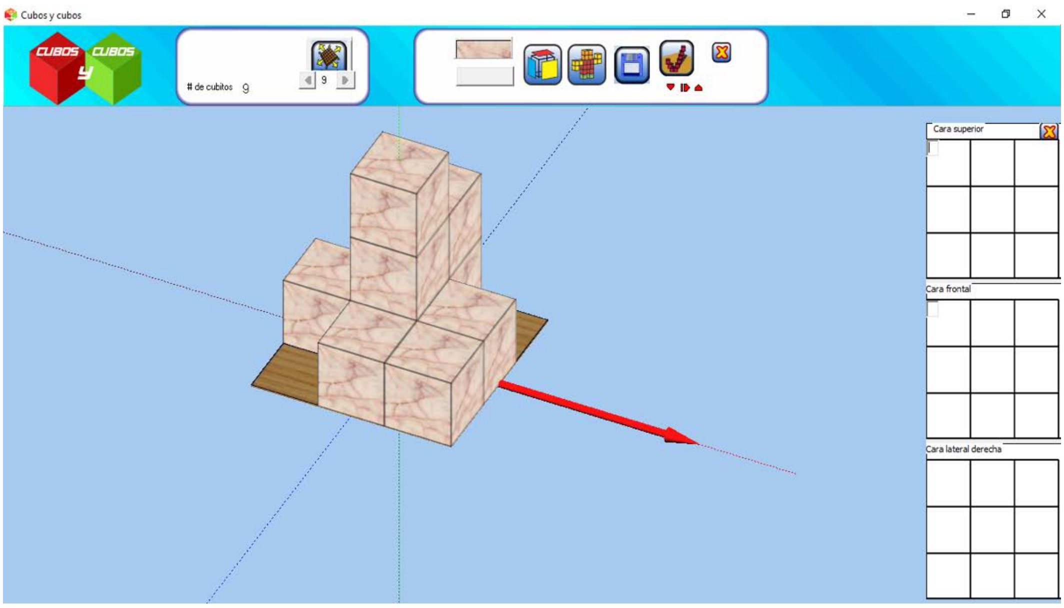

Cubos y cubos
de cubitos 9
9
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

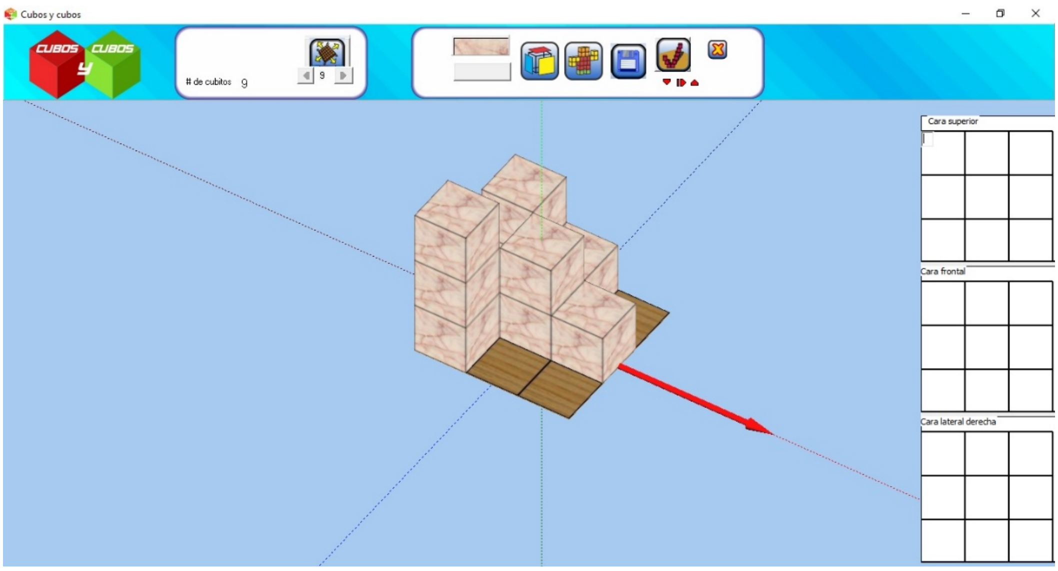

Cubos y cubos
de cubitos 10
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

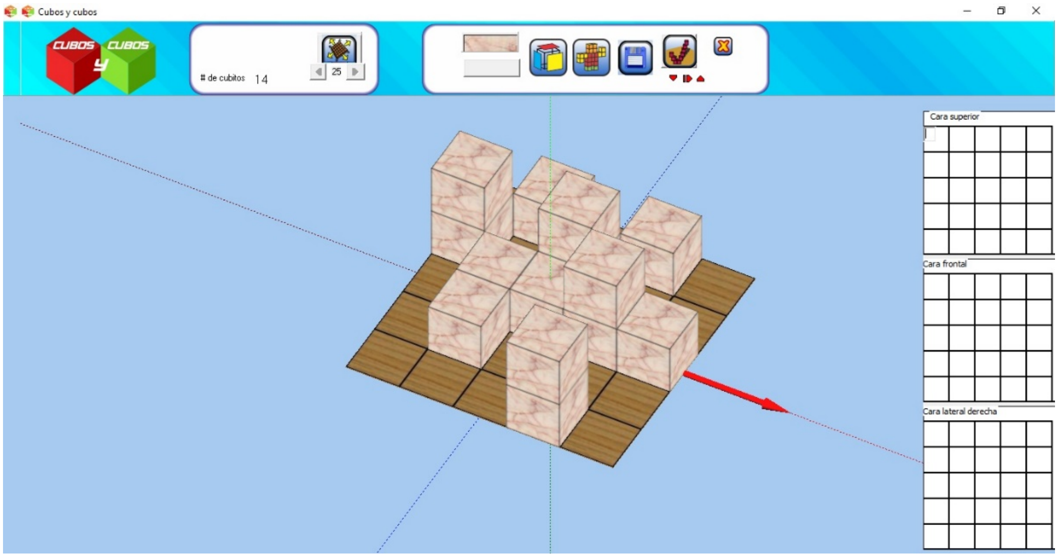

Cubos y cubos
de cubitos 23
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

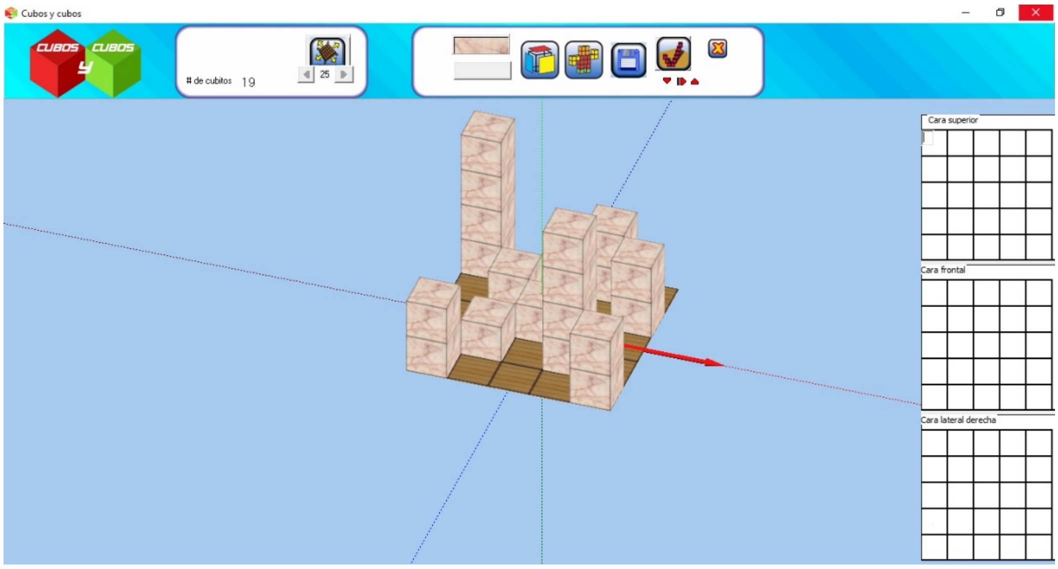
3.2 Actividad 2. Dibujo de las proyecciones ortogonales codificadas de un sólido

Dibuja en la pantalla las proyecciones ortogonales codificadas de los sólidos:



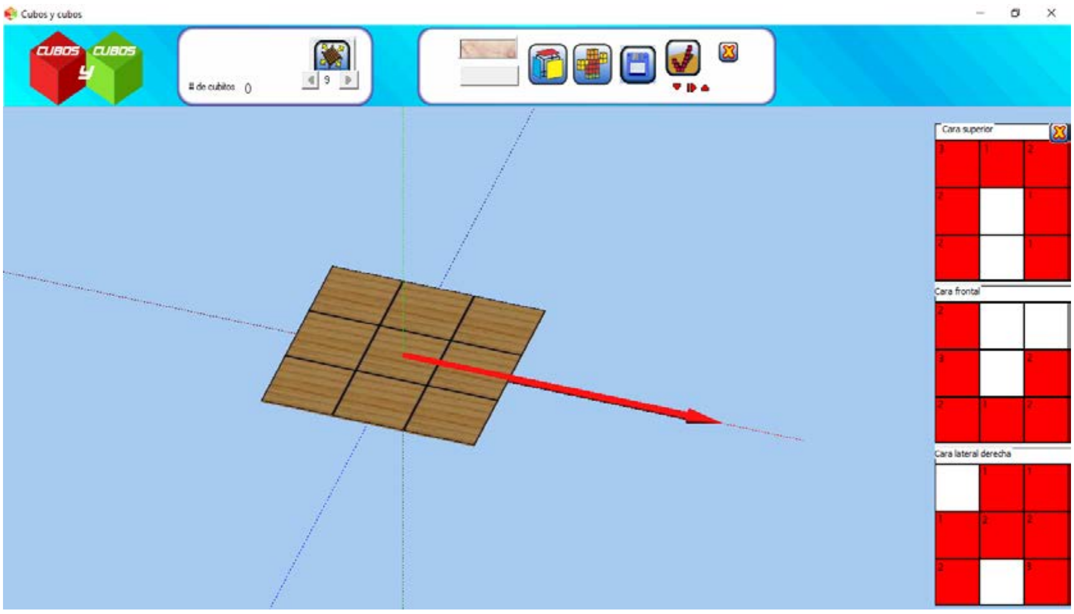


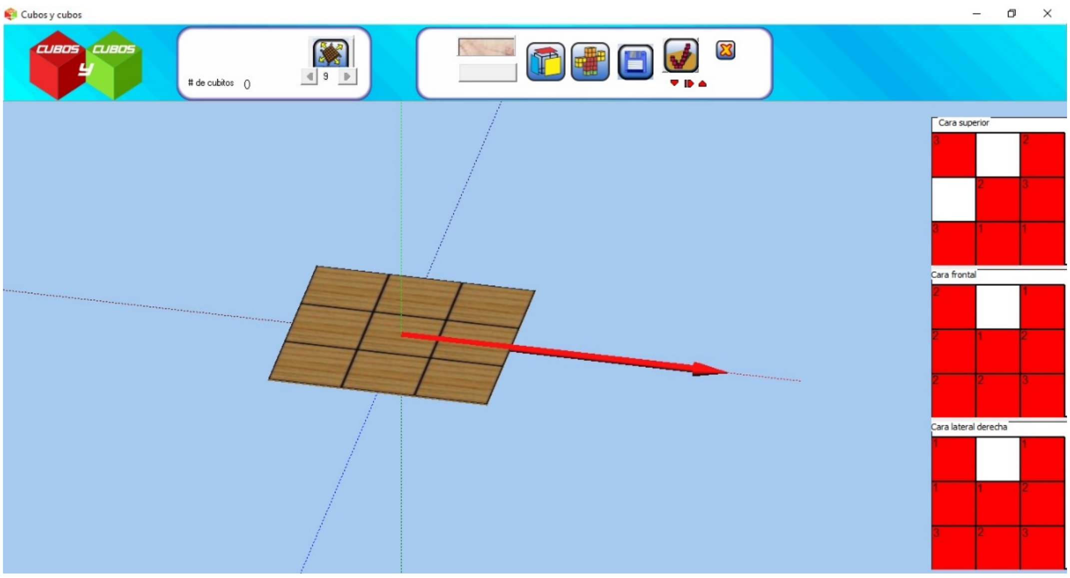

Cubos y cubos
CUBOS
y
CUBOS
de cubitos 14
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

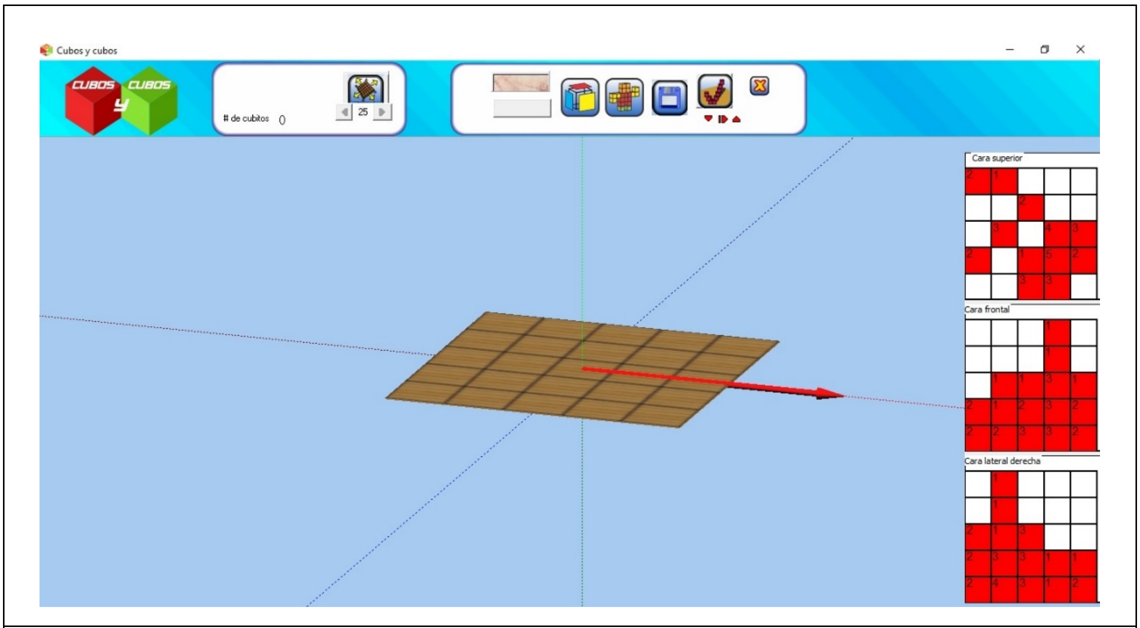

Cubos y cubos
CUBOS
y
CUBOS
de cubitos 19
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

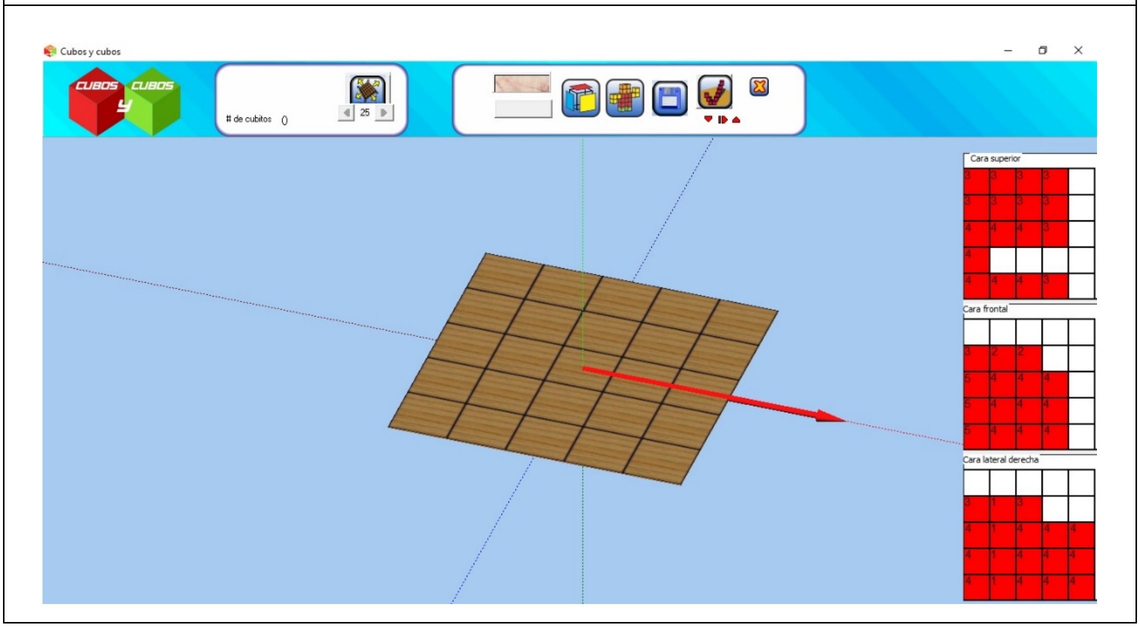
3.3 Actividad 3. Construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas

Construye los sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales codificadas.



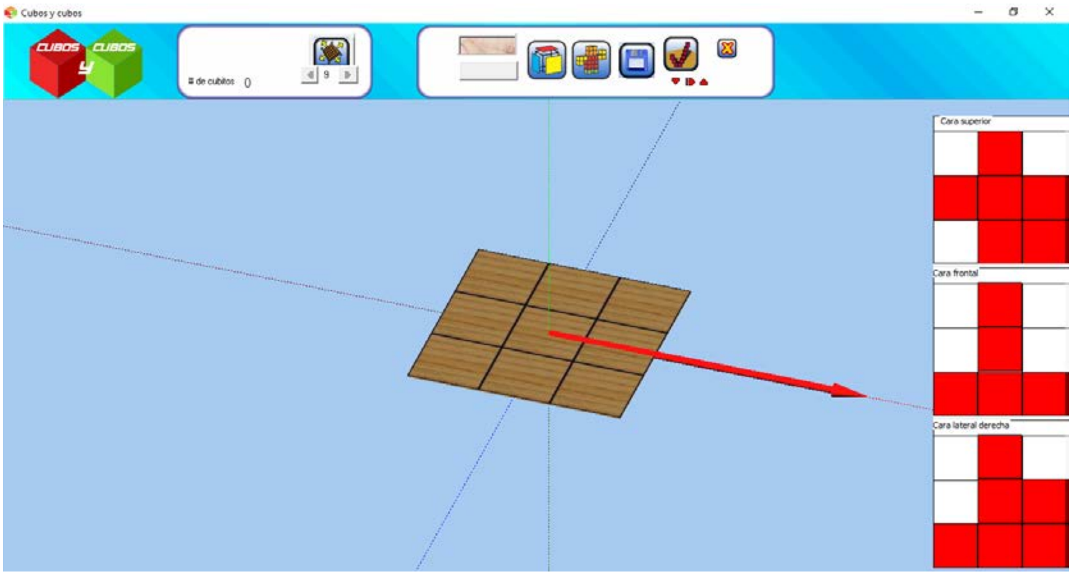


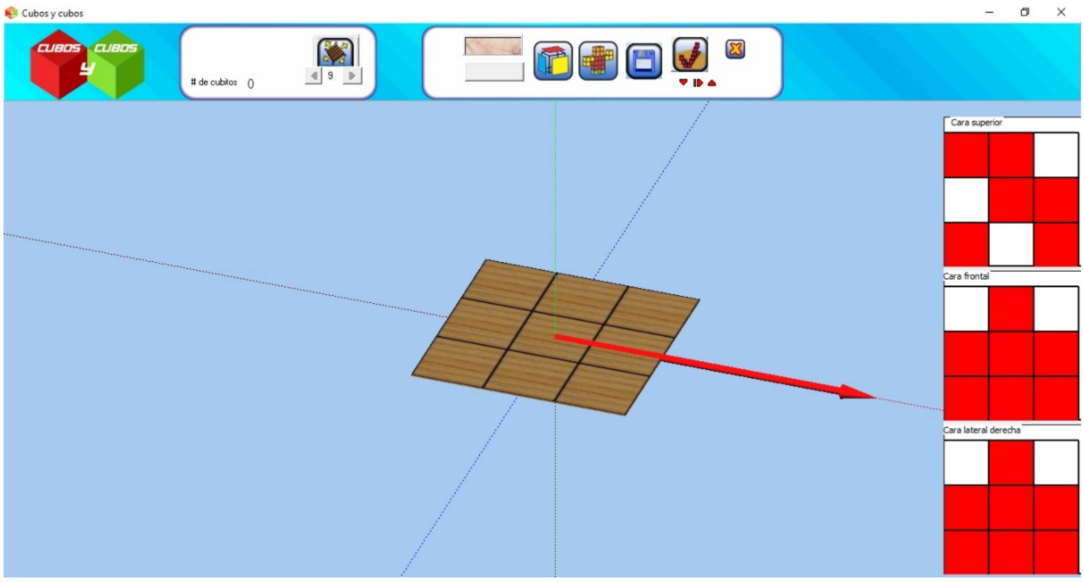

Cubos y cubos
CUBOS y CUBOS
de cubitos 0
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

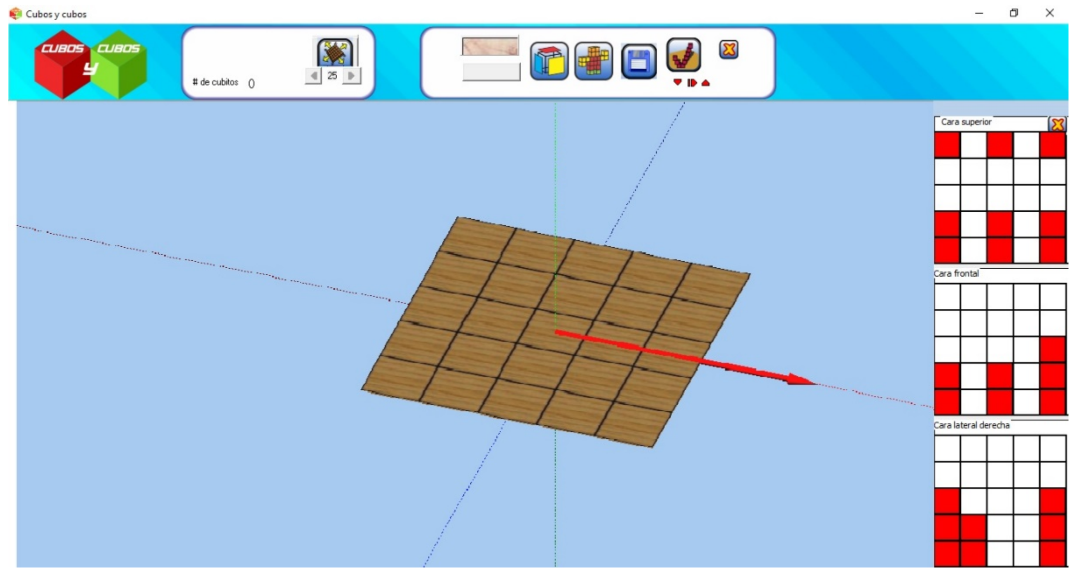

Cubos y cubos
CUBOS y CUBOS
de cubitos 0
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha

3.4 Actividad 4. Construcción de un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias

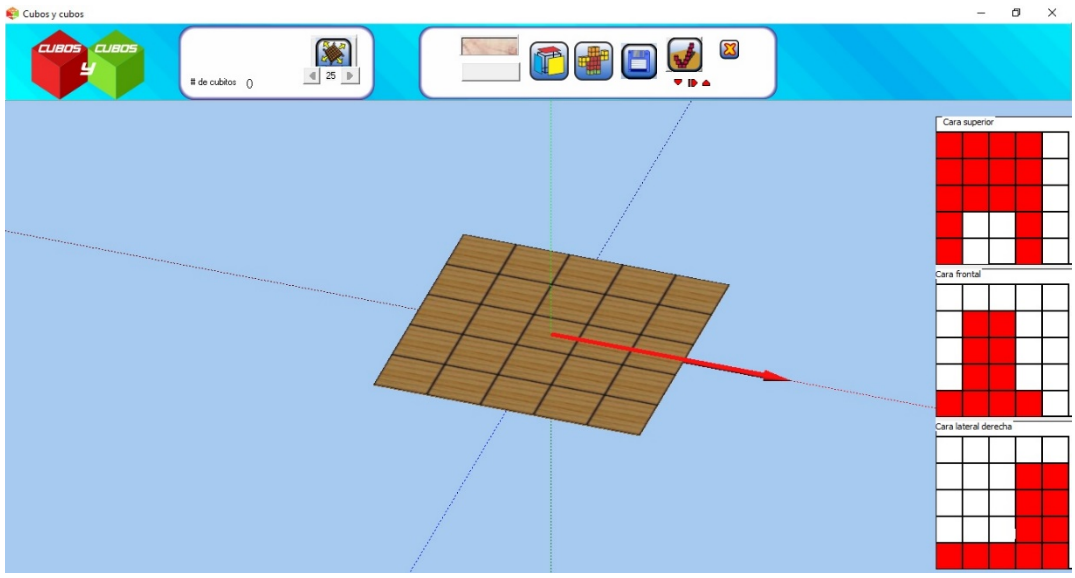
Construye los sólidos a partir de sus proyecciones ortogonales ordinarias.







Cubos y cubos
CUBOS y CUBOS
de cubitos 0
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha



Cubos y cubos
CUBOS y CUBOS
de cubitos 0
25
Cara superior
Cara frontal
Cara lateral derecha