Factótum 18, 2017, pp. 64-84
ISSN 1989-9092
http://www.revistafactotum.com

FACTÓTUM Revista de FILOSOFÍA

La epistemología y la metodología naturalistas de la matemática de Ph. Kitcher

Ph. Kitcher's naturalistic epistemology and methodology of mathematics

Jesús Alcolea Banegas

Universitat de València (España)
E-mail: jesus.alcolea@uv.es

Resumen: Con su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*, Ph. Kitcher, que había estado llevando a cabo una extensa investigación sobre la historia del tema y sobre los debates contemporáneos en torno a la epistemología, vio claramente la necesidad de un cambio en filosofía de la matemática. Su objetivo era reemplazar la predominante filosofía apriorista de la matemática por una filosofía empirista. Las filosofías actuales de la matemática aparecieron todas, de acuerdo con su análisis, para no encajar de modo adecuado con la forma en que los matemáticos hacen realmente matemáticas. Un cambio de orientación debería invocar la reflexión más general de que los factores genéticos causales son tan importantes para la epistemología como la estructura lógica. Como simpatizo en gran medida con la propuesta de Kitcher, mis objetivos aquí serán simples: primero comienzo presentando el argumento de Kitcher, y luego trato de plantear algunas dudas sobre su contribución. Estas dudas surgen probablemente de mi falta de habilidad para seguir el flujo torrencial de las ideas de Kitcher.
Palabras clave: Kitcher, naturalismo, realismo, práctica matemática, demostraciones asistidas por ordenador.

Abstract: With his book *The Nature of Mathematical Knowledge*, Ph. Kitcher, who had been doing extensive research in the history of the subject and in the contemporary debates on epistemology, saw clearly the need for a change in philosophy of mathematics. His goal was to replace the dominant, apriorist philosophy of mathematics with an empiricist philosophy. The current philosophies of mathematics all appeared, according to his analysis, not to fit well with how mathematicians actually do mathematics. A shift in orientation should invoke the more general reflection that causal, genetic factors are as significant for epistemology as logical structure. As I am to a large extent sympathetic with Kitcher's proposal, my aims here will be simple: first I start presenting Kitcher's argument, and then I try to raise some doubts about his contribution. These doubts come probably from my unskilfulness to follow the torrential flow of Kitcher's ideas.
Keywords: Kitcher, naturalism, realism, mathematical practice, computer-assisted proofs.

1. Introducción

En 1983, cuando Philip Kitcher publicó su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*, los filósofos de la matemática habían empezado a darse cuenta de que la reforma de la filosofía de la ciencia promovida por *La Estructura de las Revoluciones Científicas* de Thomas Kuhn era relevante para su propia disciplina. Kuhn y otros filósofos habían argumentado que la racionalidad científica no es sólo cuestión de relaciones inferenciales entre las proposiciones de una teoría científica formalizada, sino que también incluye prácticas y modelos de razonamiento que extienden, revisan y conforman los dominios científicos. Este cambio de orientación apela a la idea de que los

RECIBIDO: 04-12-2017 ACEPTADO: 27-12-2017

factores causales, genéticos, son tan importantes para la epistemología como la estructura lógica.

Pero la filosofía de la matemática ha sido lenta a la hora de asimilar estas ideas. Kitcher, que había estado investigando extensamente en la historia del tema y en los debates contemporáneos sobre epistemología[1], vio claramente la necesidad de un cambio en filosofía de la matemática. Su objetivo era reemplazar la filosofía apriorista dominante de la matemática con una filosofía empirista. De acuerdo con su análisis, todas las filosofías habituales de la matemática parecían no cuadrar bien con la forma que los matemáticos tienen de hacer matemáticas. A lo largo de la historia la filosofía más prominente de la matemática ha sido el platonismo: la creencia de que la matemática se interesa por objetos abstractos independientes de la percepción y de la mente humana, es decir, que la matemática es una ciencia *a priori*. Tal y como Kitcher lo formuló, estaba refutando a Descartes, Kant, Frege, Hilbert y, de hecho, a la mayoría de los que son conocidos por sus ideas sobre el tema. Sus argumentos tenían que ver no sólo con la filosofía sino con la historia de la matemática y la misma matemática, y creemos que lo que dijo todavía es interesante y muy importante.

Kitcher desarrolló además una epistemología naturalista para la matemática argumentando en defensa de dos tesis: (i) la matemática es una teoría "idealizadora" que tiene su base original en la experiencia humana con los objetos ordinarios (matemática rudimentaria), y (ii) la matemática del presente ha evolucionado desde esta base a través de una sucesión de transiciones interprácticas racionales[2]. Solía pensarse que el conocimiento matemático era muy diferente del conocimiento obtenido en las ciencias naturales: el primero era cierto y no se veía afectado por las vaguedades de la experiencia sensible, mientras que el último era hipotético y derivaba su confirmación provisional de los experimentos. Kitcher destruyó esta supuesta división entre las ciencias matemáticas y las naturales, y rechazó el apriorismo matemático, adoptando en consecuencia una forma de empirismo matemático o una versión liberalizada de constructivismo, la visión de que la matemática es el estudio de las habilidades constructivas de un matemático ideal[3].

The Nature of Mathematical Knowledge de Kitcher se divide en tres partes. La primera es un ataque a las diferentes versiones de apriorismo matemático, mostrando que no pueden demostrar que el conocimiento matemático es a priori en el sentido de Kitcher. La segunda parte presenta la realidad matemática constructivista de Kitcher y discute la naturaleza de nuestra teorización sobre ella; y la tercera describe y compara los cambios de teoría en el caso de la matemática y la ciencia, y entra en su desarrollo histórico. A nuestro modo de ver, esta división corresponde naturalmente a los tres subargumentos que integran el argumento global de Kitcher. Pero lo que unifica su contribución sobre todo es su ataque a las filosofías a priori[4], una negativa sensata a mantener separada la matemática del resto de la ciencia, y una convicción de que la historia y la filosofía de la matemática pueden informarse mutuamente.

1. Véanse, por ejemplo, los artículos: Kitcher, Ph., "Fluxions, Limits and Infinite Littlenesse", *Isis*, v. 64, (1973), pp. 33-49; Kitcher, Ph., "Kant and the Foundations of Mathematics", *The Philosophical Review*, v. 84, (1975), pp. 23-50; Kitcher, Ph., "Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis", *Studies in the History and Philosophy of Science*, v. 6, (1975), pp. 229-271; Kitcher, Ph., "Hilbert's Epistemology", *Philosophy of Science*, v. 43, (1976), pp. 99-115; Kitcher, Ph., "The Plight of the Platonist", *Noûs*, v. 12, (1978), pp. 119-136; Kitcher, Ph., "Frege's Epistemology", *The Philosophical Review*, v. 88, (1979), pp. 235-262; Kitcher, Ph., "A Priori Knowledge", *The Philosophical Review*, v. 89, (1980), pp. 3-23; Kitcher, Ph., "Apriority and Necessity", *Australasian Journal of Philosophy*, v. 58, (1980), pp. 89-101; Kitcher, Ph., "Arithmetic for the Millian", *Philosophical Studies*, v. 37, (1980), pp. 215-236; Kitcher, Ph., "Mathematical Rigor–Who Needs It?", *Noûs*, v. 15, (1981), pp. 469-493.

2. En Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, 1983, pp. 225-228 , el autor presentó una sinopsis muy clara de su concepción y de las relaciones entre (i) y (ii). De hecho, estaba defendiendo una marca de *empirismo* que refinó posteriormente y denominó *naturalismo* siguiendo una sugerencia de F. Browder. Cfr. Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism", en Aspray, W. y Kitcher, Ph. (eds), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Mineápolis, MN, 1988, p. 321, nota 2. Como movimiento filosófico, el naturalismo afirma que todo lo que existe o sucede en el mundo es susceptible de explicación siguiendo los métodos científicos naturales. Está firmemente arraigado en la tradición filosófica, sobre todo en el empirismo. El filósofo responsable del actual renacimiento del naturalismo es W. V. O. Quine, un autor cuya obra "fue una de las cosas más liberadoras que" Kitcher "jamás leyó". *The Nature of Mathematical Knowledge* apuntó hacia el proyecto en el que Kitcher ha estado y está "comprometido, a saber, el de dar una explicación naturalista del desarrollo del conocimiento científico en general" (Conversaciones con W. Callebaut, en Callebaut, W., *Taking the Naturalistic Turn or How Real Philosophy of Science is Done*, organizadas y moderadas por W. Callebaut, The University of Chicago Press, Chicago, 1993, pp. 94 y 96).

3. Kitcher considera su posición "como *constructivismo pragmático*, en el que las matemáticas se conciben, *no* como sobre cualesquiera tipos especiales de objetos, sino *sobre los tipos de formas en que las personas pueden interactuar con y operar sobre su mundo*, ya sea físicamente o estructurándolo mentalmente" (Conversaciones con W. Callebaut, en Callebaut, W., *Taking the Naturalistic Turn or How Real Philosophy of Science is Done*, p. 96).

4. De hecho, el ataque comenzó con el artículo Kitcher, Ph., "A Priori Knowledge", *The Philosophical Review*, v. 89, (1980), pp. 3-23, y aún se explora en Kitcher, Ph., "A Priori Knowledge Revisited", en Boghossian, P., Peacocke, C. (eds), *New Essays on the A Priori*, Clarendon Press, Oxford, 2000, p. 65, con "una mezcla de penitencia e intransigencia".

Puesto que en gran medida simpatizamos con la propuesta de Kitcher, nuestros objetivos aquí serán simples: primero comenzaremos presentando el argumento de Kitcher, y después intentaremos plantear algunas dudas sobre su contribución. Estas dudas se deben quizás a nuestra falta de pericia para seguir el flujo torrencial de las ideas de Kitcher.

2. La estructura principal del argumento de Kitcher

Kitcher construye su perspectiva original y comprensiva sobre la base de una amplia familiaridad con la historia de la matemática, y un perspicaz sentido para los más importantes debates contemporáneos de la epistemología y de la filosofía de la ciencia. Su argumento se divide en tres partes. La primera despeja la maleza filosófica, y prepara el terreno para la tarea constructiva que lleva a cabo en la segunda, mientras que la tercera se dedica a un cuidadoso estudio del desarrollo del análisis como rama de la matemática, socavando el tradicional contraste entre la matemática pura y la aplicada. En esta parte, resulta interesante constatar que las únicas distinciones son de grado: basadas en las distancias comparativas de los diferentes conceptos y teoremas matemáticos desde las experiencias y los contextos prácticos a partir de los cuales comenzaron a formarse.

2.1 La primera parte del argumento

Kitcher plantea provocativas cuestiones sobre la naturaleza del conocimiento matemático, sus orígenes, desarrollo y estatuto epistemológico. Su idea básica es que este conocimiento es fundamentalmente empírico, es decir, que las verdades y demostraciones de la matemática se basan en último término en la experiencia real, no en objetos abstractos. Kitcher mantiene que los habituales supuestos aprioristas de muchos matemáticos son impedimentos para una adecuada explicación de lo que sea la matemática y de cómo se desarrolla. Por consiguiente, la primera parte del argumento se dedica a mostrar los errores del apriorismo bajo diferentes formas, etiquetadas en un sentido amplio bajo las rúbricas de "intuición matemática", sea realista o constructivista, y "conceptualismo".

Para motivar su ataque, Kitcher traza una distinción iluminadora entre teorías psicologistas y apsicologistas del conocimiento. Se inclina por el enfoque psicologista que ocupa un lugar central en las tendencias epistemológicas actuales, tal y como son representadas por Goldman, Harman y Kripke, y la filosofía de la ciencia, tal y como es representada por Kuhn, Feyerabend, Toulmin, Lakatos y Laudan. El epistemólogo psicologista sostiene que para que el estado de creencia verdadera de una persona cuente como conocimiento debe depender de una explicación apropiada de la presencia del estado de creencia verdadera. La diferencia entre conocimiento y creencia verdadera gira en torno a los factores que producen la creencia, y así del modo de generar un estado mental particular. A veces la explicación describe un proceso que incluye eventos externos a la persona, pero siempre debe contener eventos psicológicos. Finalmente, la pretensión de conocimiento queda garantizada si el proceso tiene lugar "de la manera correcta"[5].

El apsicologismo deja bastantes cuestiones sin examinar. ¿Cómo se justifican las mismas reglas de inferencia que la lógica proporciona? ¿Es la lógica la única proveedora de los cánones de argumento? Si es así, ¿por cuál de las lógicas disponibles deberíamos optar? También le resulta difícil explicar el punto de partida de las proposiciones que se conectan 'de la manera correcta'. Los epistemólogos apsicologistas o ignoran el problema o sostienen que se debe dar un estatus especial a algunas proposiciones, garantizadas sin referencia a la historia, la comunidad de conocedores, o la psicología individual.

Kitcher ofrece la definición de que el conocimiento de una persona es a priori, independiente de la experiencia, sólo en el caso de que pudiera haber tenido ese conocimiento no importa qué mínima, pero suficientemente rica, experiencia hubiera tenido. Combinando esto con la tesis psicologista, Kitcher ofrece la siguiente explicación. Una persona con una creencia verdadera de que *p* tiene conocimiento *a priori* de que *p*, si esa creencia fue producida por una garantía a priori. Parece que los procesos de formación de la creencia se dividen en tipos de acuerdo con el contenido de las creencias, las conexiones inferenciales o causales, los mecanismos perceptivos, etc. Entonces una *garantía* de *p* es *a priori* si, dada cualquier otra experiencia suficientemente rica, el sujeto cognoscente dispondría de un proceso del mismo tipo, que garantizaría la creencia de que *p* y produciría la creencia verdadera de que *p*. Dicho de otro modo, una garantía *a priori* es un proceso que produce una creencia que es de un tipo que 1) puede producir la creencia que X tiene de que *p* con independencia de las experiencias particulares que X haya tenido (en la medida en que X ha tenido experiencia suficiente para entender *p*), y 2) produce sólo creencias verdaderas y garantizadas, sin que importen las experiencias que X ha tenido o pudo tener.

Tomando en consideración que los matemáticos han aprendido de sus maestros y de documentos

5. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, 1983, p. 17.

escritos, y de que quien descubre una demostración se percata de que su confianza en su corrección depende de que otros la comprueben y de que los expertos la acepten, se sigue de ello que casi todo el conocimiento matemático depende causalmente de la experiencia, y es muy difícil sostener que sea a priori. La carga de la prueba recae, por ello, en el apriorista, el cual debe exhibir la indispensable garantía *a priori*: "Si alguien desea sostener que una creencia particular es un ítem de conocimiento a priori, entonces debe especificar un segmento del linaje causal de la creencia, que conste de los estados y eventos internos al creyente, y las condiciones de alguna identidad de tipo (*type-identity conditions*) que se conforman a algún principio (o conjunto de principios) de clasificación que se emplean de forma estándar en nuestras divisiones de los procesos de formación de la creencia"[6].

Kitcher pasa a examinar varias estrategias aprioristas empleadas por los filósofos de la matemática que explican los rasgos especiales del conocimiento matemático, y muestra en cada caso que no se dispone de una garantía *a priori*, ni para los conceptualistas, como Locke o Frege,[7] los constructivistas como Kant o los realistas como Gödel.

El proceso de la intuición pura de Kant "no satisface los cánones exigidos por una garantía a priori no porque sea sensible, sino porque es *falible*"[8]. La 'intuición' de Gödel resulta indeterminada de forma decisiva. Bajo su forma más defendible, como el tipo de cosa acerca de la cual los matemáticos piensan cuando discuten sobre la resolución de problemas, la intuición no garantiza por sí misma la creencia, aunque "puede jugar un importante papel heurístico y también sirve como parte de un proceso de garantía"[9]. En cuanto a los conceptualistas, después de elaborar y hacer un excelente uso de los argumentos anticonceptualistas de Quine, Kitcher concluye sosteniendo que el ejercicio de las habilidades lingüísticas para garantizar la creencia en un enunciado matemático podría ser socavado por una posible experiencia suficientemente rica que cuestionara la racionalidad de usar los conceptos implicados. Procesos que parecen ser garantías *a priori* pueden ser desposeídos de su habilidad para garantizar cuando se frustran las creencias del trasfondo, punto este que Kitcher ilustrará con algunos ejemplos de la matemática.

Como último paso, Kitcher considera que los aprioristas sostienen que la vía más importante que lleva al conocimiento matemático pasa por las demostraciones. Desde su punto de vista, las demostraciones escritas codifican procesos que producen conocimiento del teorema demostrado. De acuerdo con el apriorista, se basan en axiomas —enunciados conocidos por medio de garantías básicas a priori (es decir, que no envuelven creencias previas)— y proceden de acuerdo con reglas de inferencia que preservan el conocimiento a priori. Kitcher organiza su primer ataque en esta explicación argumentando que los teoremas conocidos por medio de demostraciones largas no se pueden conocer a priori. Nuestra creencia en un teorema que se ha obtenido por medio de una demostración larga puede no sobrevivir a experiencias que indican que la demostración contiene un error. Kitcher afirma que ocurriría lo mismo con las demostraciones asistidas por ordenador. Ante estas experiencias la garantía proporcionada por la demostración quedaría socavada, aun cuando la demostración fuera en realidad totalmente correcta. La razonable incertidumbre sobre la conclusión no torna imposible el conocimiento, pero aleja de cualquier consideración el conocimiento a priori. Así, el conocimiento generado por la demostración no puede contar como a priori y el tipo de proceso implicado no es un proceso que garantice la creencia no importa ante qué experiencia nos encontremos.

2.2 La segunda parte del argumento

El antídoto de Kitcher contra el apriorismo es una variedad nada convencional de empirismo, que defiende en la segunda parte de su argumento. Básicamente, argumenta que al principio el conocimiento matemático era "obtenido a través de las observaciones y las manipulaciones de las cosas ordinarias"[10]. Fueron los griegos los que empezaron a sistematizar el conocimiento práctico de los egipcios y los babilonios. Algunos griegos mostraron cómo ese conocimiento podría transformarse y fundamentarse dando lugar a la matemática pura. El conocimiento establecido por los matemáticos individuales fue transmitido a través de una sucesión de maestros y escuelas, llevando finalmente a la comunidad matemática contemporánea. La comunidad es de relevancia *epistemológica*, sobre todo en la medida en que garantiza y transmite las creencias de una generación a otra. Kitcher reconoce en ello a su *teoría evolutiva* del conocimiento matemático, evolutiva porque su interrogante más significativo es "¿Cómo evoluciona el conocimiento matemático?".

6. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 26.

7. Kitcher señala que los conceptualistas recientes, como los positivistas, defienden que nuestra posesión de conceptos nos permite tener un conocimiento a priori básico de los axiomas matemáticos. Pero los conceptualistas más antiguos dieron su apoyo a la variante apsicologista del conceptualismo. Los últimos incluyen a Locke y, según la interpretación de Kitcher, al filósofo de Jena, en Kitcher, Ph., "Frege's Epistemology", *The Philosophical Review*, v. 88, (1979), pp. 235-262. Véase Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 65.

8. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 53.

9. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 61.

10. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 92.

Puede observarse que, como en el caso de la mayoría de las teorías empiristas del conocimiento, la frontera entre la psicología y la epistemología se torna a veces vaga en la explicación de Kitcher, y ello de modo intencional. Su crítica de la epistemología apsicologista se centra más en los filósofos que en los historiadores, pero a veces considera que la psicología también es relevante para la historia. En principio, ello incluiría la forma de enseñar y aprender la matemática como elemento clave de su historia, concediendo a la autoridad un papel prominente. En cuanto a los orígenes del conocimiento matemático, Kitcher sugiere que "podemos ver que las actividades de los niños de hoy apuntan a la forma en que nuestros antepasados, sin la ayuda de autoridades, iniciaron la tradición matemática"[11].

Para esta alternativa empirista, Kitcher se sirve de la conocida idea de que la matemática describe "la estructura de realidad", la estructura "reflejada en las propiedades de las cosas ordinarias". En particular, la aritmética es el resultado de nuestra actividad constructiva y sus enunciados son "verdaderos en virtud, no de lo que *podemos hacer* al mundo, sino de lo que *el mundo* nos permitirá hacerle *a él*". Por supuesto, no tenemos aritmética si sólo consideramos las operaciones que son físicamente posibles de ejecutar por nosotros como agentes humanos. Por ello, debemos ser reemplazados por un *agente* o *sujeto ideal*[12].

Ahora bien, la percepción puede darnos conocimiento de lo que podemos hacer, pero ¿cómo descubrimos lo que el sujeto ideal puede hacer? La respuesta es que se estipulan las habilidades del sujeto ideal cuando idealizamos, al tiempo que suprimimos esa restricción accidental de nuestras propias capacidades, del mismo modo que la naturaleza de los gases ideales queda estipulada en la teoría sobre ellos. La verdad se obtiene sólo si las estipulaciones se encuentran "adecuadamente fundadas", es decir, si los gases reales se aproximan a la conducta de los ideales, si al ejecutar nuestras operaciones nos aproximamos a las capacidades del agente ideal. La relación entre verdad estipulativa y verdad referencial es posible porque la construcción de estipulaciones fija los referentes de los enunciados "de manera que se obtienen las relaciones referenciales correctas"[13]. Así, en la explicación kitcheriana de la realidad matemática las estipulaciones que fijan las capacidades del sujeto ideal sistematizan nuestras actividades para conseguir conocimiento empírico.

Tenemos, entonces, una versión de constructivismo que difiere de la de otras formas limitativas de constructivismo en el sentido en que esta versión es "más generosa para el sujeto creador". De hecho, el sujeto ideal de Kitcher ha sido diseñado de una forma tan "extremadamente liberal" que puede operar en una "sucesión de estadios … altamente supernumerable", comprobar enunciados universalmente cuantificados, formar colecciones de entidades matemáticas disponibles en una etapa, usar referencias a futuras colecciones sobre entidades, desempeñar la actividad iterativa consistente en formar colecciones a través de una sucesión infinita de estadios (para sistematizar el análisis matemático), adoptar axiomas sobre los cardinales inaccesibles, tratar con las definiciones iterativas y la lógica clásica,[14] etc. Esto es, lo importante es que debería considerarse que los poderes del sujeto ideal "están determinados y, en la medida de lo posible, son plenos", y ello de una manera que la visión que tenemos de él como idealización de los agentes humanos "no sufre menoscabo cuando liberamos el sujeto de los constreñimientos de nuestro tiempo" y le concedemos un "super-tiempo"[15]. De hecho, el sujeto ideal posee tanto talento que resulta difícil distinguir la posición de Kitcher de la de los "platonistas sofisticados" (como Steiner, Resnik o Maddy) que renuncian al apriorismo y aceptan gustosos las explicaciones perceptivas de las verdades matemáticas elementales[16].

Kitcher desarrolla una imagen de realidad matemática, cuyo punto de partida es la tesis de que "el conocimiento proto-matemático puede obtenerse manipulando el mundo y observando las manipulaciones"[17]. La matemática empieza en la prehistoria con el conocimiento perceptivo elemental. Es decir, conocimiento perceptivo de las "operaciones físicas de segregación, reorganización espacial, etc."[18]. El desarrollo del conocimiento matemático se ve como un proceso en el que un conjunto de creencias perceptivamente fundadas, pero desperdigadas, sobre las manipulaciones de objetos físicos dan lugar *por medio de transiciones racionales* a una sucesión de prácticas matemáticas, que llevan en último término

11. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 108, nota 9.

12. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 106-109.

13. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 116, 140.

14. Kitcher dice que "sobre la base de la simplicidad que aporta, la idealización clásica parece preferible" al intuicionismo, otra práctica constructiva legítima de la matemática. En Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 145.

15. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 144-147.

16. Cfr. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 148, nota 49.

17. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 148.

18. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 117.

a la matemática contemporánea. Un conjunto de creencias matemáticas queda entonces garantizado si sus miembros son perceptivamente garantizados o si pertenecen al conjunto de enunciados aceptados de lo se llama práctica *fundada*, es decir, una práctica matemática que resulta de un conjunto perceptivamente garantizado de creencias "por medio de una sucesión de transiciones interprácticas racionales"[19].

Como clarificación final, podemos observar que Kitcher reemplaza "las nociones de objetos matemáticos abstractos, nociones como la de *colección*, por la noción de un tipo de actividad matemática, *coleccionar*"[20]. Así, la matemática no es sobre objetos en absoluto, sino, como se ha indicado, sobre la estructura de la realidad física. Kitcher completa esta visión con la tesis de que los conceptos matemáticos son en realidad idealizaciones de operaciones llevadas a cabo por un agente ideal. Coleccionar y correlacionar forman las actividades matemáticas elementales y tienen interpretaciones físicas y abstractas. Ambas se encuentran detrás de las nociones primitivas de un sistema lógico para una aritmética aditiva de primer orden que Kitcher desarrolla y llama *Aritmética de Mill*, en reconocimiento de la visión empírica que John Stuart Mill posee de la matemática[21].

Esta Aritmética de Mill es una teoría de operaciones (ideales) cuyas variables toman valores de operaciones mediante las cuales segregamos grupos de objetos de su medio. Las nociones de operación-uno, operación sucesor, operación adición y operaciones emparejables son fijadas por axiomas como "Dos operaciones-uno son emparejables", "Operaciones sucesor de operaciones emparejables son emparejables", "Ninguna operación-uno es un sucesor", una versión del conocido principio de inducción completa, etc. que proporcionan un fundamento para la teoría de números en el marco de esa teoría de operaciones. Obsérvese que podemos coleccionar operaciones ya efectuadas dando lugar a colecciones de orden superior, una ejecución necesaria en aritmética (y teoría de conjuntos). Como no podemos llevar a cabo operaciones sucesor *ad infinitum*, esta tarea se deja para el sujeto ideal, que está dotado de la capacidad de ejecutar la operación sucesor para cualquier operación que ya ha llevado antes a cabo.

2.3 La tercera parte del argumento

Kitcher está resuelto a explicar no sólo qué sea la matemática desde un punto de vista epistemológico, sino también cómo cambia. Con el fin de presentar patrones racionales de cambio y desarrollo del conocimiento matemático, elabora lo que llama *práctica matemática*, que nos recuerda la noción kuhniana de *matriz disciplinar*[22]. El autor de la teoría de los paradigmas argumentó que la iencia y el cambio científico son algo más que un conjunto de enunciados con sus correspondientes transformaciones. De una manera apropiada, Kitcher sugiere centrarse en cinco componentes diferentes, pero interrelacionados por su idea de práctica matemática, <L, M, Q, R, S>, donde L es el lenguaje de la práctica, M el conjunto de concepciones metamatemáticas, y Q, R y S el conjunto de cuestiones, razonamientos y enunciados aceptados. Así, explicar el desarrollo del conocimiento matemático gira en torno a comprender la racionalidad de la transición de una práctica matemática a su sucesora. Kitcher afirma que el cambio de una antigua práctica cuyos componentes no están en equilibrio a una nueva es la norma en matemáticas. La búsqueda de la perfecta armonía genera, pues, cambio matemático. Pero este cambio es acumulativo porque, cuando fijamos las estipulaciones satisfactorias sobre las capacidades del sujeto ideal, "nos comprometimos en esta tarea siguiendo una política inclusiva de atribución de poderes, articulando nuestra explicación del tema de manera que permita avanzar nuestra comprensión de las atribuciones ya efectuadas"[23].

La discusión de Kitcher del componente del lenguaje gira en torno al modo en que la referencia de los términos matemáticos puede cambiar. Este componente está integrado por una sintaxis y una semántica con un conjunto de potenciales de la referencia, porque inicialmente puede ser algo más que una forma de fijar la referencia. En la explicación del cambio de algunos conceptos (grupo, función,

19. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 125.

20. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 110.

21. En términos similares, Kitcher también ofrece una reformulación de la teoría de conjuntos con las operaciones de coleccionar, ordenar y correlacionar. Curiosamente, ha reforzado su simpatía por Mill en su Kitcher, Ph., "Mill, Mathematics, and the Naturalist Tradition", en Skorupski, J. (ed), *The Cambridge Companion to Mill*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, pp. 57-111.

22. Cfr. Kuhn, Th., *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, Chicago, IL, 3ª edición, 1996. p. 182. Tan valiosa ha sido esta noción multidimensional de práctica para Kitcher que ha sido adaptada en su discusión sobre la estructura de la sociobiología, y en su generalización de la trayectoria del darwinismo. Véanse, Kitcher, Ph., *Vaulting Ambition. Sociobiology and the Quest for Human Nature*, MIT Press, Cambridge, MA, 1985; Kitcher, Ph., *The Advancement of Science. Science Without Legend, Objectivity Without Illusions*, Oxford University Press, Oxford, 1993. [Versión española de Islas, H. y Manríquez, L. *El avance de la ciencia: la ciencia sin leyenda, objetividad sin ilusiones*, UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas, México, 2001].

23. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 164-165.

integración, etc.), Kitcher afirma que la referencia de sus términos fue fijada inicialmente por medio de paradigmas, una acción que vino seguida de los intentos por obtener una descripción de las correspondientes entidades. Así, en manos de Leibniz la referencia de 'función' fue fijada por medio de determinados paradigmas. La evolución del concepto en los sucesores de Leibniz muestra una interacción entre la adición de nuevos paradigmas y el rechazo de descripciones supuestamente apropiadas. Parece que en la época de la disputa de Euler y d'Alembert sobre las ecuaciones diferenciales la referencia se fijó descriptivamente. El referente del símbolo 'ω' de Cantor también sufrió alguna evolución. Pero la revolucionaria idea de Cantor fue producir un análogo de la aritmética ordinaria, extendiendo las operaciones aritméticas a sus números transfinitos, demostrando de este modo que eran entidades.

Los cambios en el conjunto de las oraciones aceptadas pueden incluir la adición o supresión y a veces se entretejen con los cambios en el lenguaje. Así, aunque en un principio se creyó firmemente que la declaración de Cauchy de que la suma de una serie convergente de funciones continuas es continua, más tarde fue descartada. Ahora también se representa en nuestro propio lenguaje parte del contenido de muchas de las proposiciones que Hamilton escribió en su teoría de cuaterniones.

El conjunto de razonamientos aceptables contiene como parte destacada el conjunto de demostraciones aceptables, aunque también incluye argumentos inductivos, argumentos por analogía y razonamientos no rigurosos. Se aceptaron los últimos porque resultaban útiles en la resolución de problemas y las alternativas (aún) no habían sido desarrolladas o reconstruidas como argumentos sin lagunas a partir de premisas aceptables. Pero cuando esto se logra, el cambio puede mostrar una vía para aceptar nuevo lenguaje y nuevos principios matemáticos. Así, el movimiento hacia los cánones modernos de rigor empezó a producirse con Cauchy porque podía ser motivado por problemas reales.

El conjunto de cuestiones disminuye si han sido contestadas o se han vuelto irrelevantes con motivo de algún cambio en las condiciones anteriores. Y aumenta con cuestiones de diverso grado de urgencia. La idea que Hamilton tenía de los cuaterniones como números le llevaron a hacerse preguntas similares a las que se habían hecho sobre otros números. Pero el desarrollo moderno de los sistemas algebraicos las tornó irrelevantes. La delineación que Fermat hiciera de ciertas cuestiones facilitó el camino de los que dedicaron sus esfuerzos a la teoría de números, y la famosa lista que Hilbert redactara de 23 problemas ha sido, y todavía es, material de trabajo para muchos matemáticos.

El conjunto de concepciones metamatemáticas contiene propuestas sobre los cánones de demostración, el alcance de la matemática, el orden de las disciplinas y el valor relativo de los tipos de indagación. Así, resulta natural esperar que los cambios en este conjunto se encuentren entrelazados con cambios a gran escala en el resto de los componentes de la práctica. Además, esas concepciones "representan la comprensión reflexiva de la comunidad sobre cómo deben alcanzarse sus metas últimas"[24], aunque los matemáticos no pueden expresarlas explícitamente, excepto cuando hacen frente a la crítica. Kitcher reconoce un acuerdo general, que contrasta con las ideas de las generaciones anteriores, entre los matemáticos contemporáneos que fijan los cánones de demostración en la formalización (mecánica), y la teoría de conjuntos como disciplina fundamental y lenguaje de la matemática. Esto podría ser consecuencia de la revolución de Cantor que produjo cambios en los cinco componentes de la práctica.

Estas finas distinciones en los componentes de la práctica dan lugar a una exhibición de cinco importantes patrones de cambio matemático, que incluyen ajustes mutuos en más de uno de los componentes y cuyas actividades, como métodos de cambio racional, producen transiciones interprácticas racionales. Así, *responder cuestiones* tiene lugar como una transición en la que las nuevas técnicas para dar respuesta a cuestiones que la comunidad reconoció antes que eran importantes, tiene como consecuencia la posibilidad de extender la matemática. Estas extensiones pueden dar lugar a la generación de cuestiones y las respuestas a las cuestiones generadas dejan espacio para otras extensiones, y así sucesivamente. Algunas cuestiones tienen relevancia práctica para las ciencias naturales o la ingeniería, y algunas otras son cuestiones "no prácticas" que están relacionadas con "el proyecto general de comprender las entidades que los matemáticos han discutido hasta ahora". En la concepción que Kitcher profesa de la realidad matemática, ello significa que esas cuestiones "surgen a medida que la explicación del sujeto ideal se mejora, a medida que se añade nuevo lenguaje y se aceptan nuevos enunciados"[25].

El lenguaje matemático suele extenderse con las *generalizaciones*. Algunas son explicativas, y pueden permitirnos ver cómo una antigua teoría es miembro de una familia de teorías relacionadas. Además, con la generalización propuesta intentamos exponer las conexiones entre las propiedades de las entidades y atribuimos al sujeto ideal un conjunto más grande

24. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 189.

25. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp. 201-202.

de poderes con el objetivo de mejorar nuestra comprensión de las capacidades ya atribuidas. Una propuesta de *rigorización* consigue apoyo racional cuando proporciona sustitutos rigurosos para partes no rigurosas de la práctica que refuerzan al mismo tiempo nuestra comprensión. La propuesta puede cambiar el lenguaje, con nuevas expresiones o redefiniciones, y el conjunto de razonamientos y enunciados aceptados, con nuevos primeros principios.

Finalmente, se justifica la *sistematización* como una transición interpráctica racional porque proporciona una perspectiva unificada sobre resultados previos completamente diferentes, y puede estimular revisiones de las concepciones metamatemáticas. Puede adoptar dos formas. La *axiomatización* que confiere unificaciones que permiten que un gran número de los enunciados se derive de un pequeño conjunto de primeros principios, que muestran el camino hacia las demostraciones, y que reducen el número de tipos de entidades, problemas y técnicas. Y la nueva *conceptualización* que permite que cuestiones, enunciados o razonamientos aislados queden subsumidos bajo una sola formulación.

Kitcher lleva el argumento a su culminación con un tratamiento global de la evolución del análisis matemático desde la época de Newton y Leibniz a la de Weierstrass y Dedekind, mostrando cómo los cinco patrones de cambio funcionaron y dieron lugar a la matemática moderna, e ilustrando las principales ideas filosóficas de nuestro autor.

3. Algunas dudas sobre la contribución de Kitcher

Ahora vamos a presentar algunas dudas sobre la contribución de Kitcher. Estas dudas deben entenderse más como clarificaciones personales que como objeciones reales. Nos centraremos sobre todo en cuestiones relacionadas con el realismo y las demostraciones asistidas por ordenador. De esta manera, hablaremos sobre todo de dos problemas que prevalecen: el primero en la filosofía académica de la matemática, y el segundo en la práctica matemática contemporánea. Pero, al mismo tiempo, diremos algo sobre la necesidad de postular una infinidad de objetos matemáticos, sobre la verdad y la práctica matemática, sobre algunos problemas con la traducción que Kitcher hace de la teoría de conjuntos y el compromiso con alguna ontología, sobre razonamientos matemáticos no rigurosos, el semirrigor y la imperfección de instrumentos 'matemáticos', sobre la comprensión matemática, sobre el progreso y la práctica (matemática) límite.

3.1 Realismo y sujeto ideal

3.1.1 Una teoría próxima al realismo matemático

En su consideración de la realidad matemática, Kitcher critica el platonismo como la tesis de que los enunciados aritméticos son verdaderos o falsos sólo porque los numerales son términos singulares que refieren a objetos matemáticos abstractos, y presenta su propia interpretación del lenguaje de la matemática. Kitcher vacila entre interpretar el platonismo como si no equivaliera a otra cosa que a tomar el lenguaje de la matemática como si envolviera la referencia a objetos como números, conjuntos y figuras geométricas, y atribuir al platonista posiciones filosóficas más contenciosas que los verdaderos platonistas, como Gödel, podrían negar. Un ejemplo es su suposición de que si el platonista usa una construcción de los sistemas numéricos dentro de la teoría de conjuntos, está con ello adoptando la concepción presumiblemente metafísica de que los números son conjuntos y sostendrá incluso que en tiempos pasados, antes de que las construcciones conjuntistas se conocieran, al hablar de números los matemáticos estuvieran refiriéndose a conjuntos[26].

Por otro lado, anunciando en uno de sus artículos la difícil situación del platonista, Kitcher defiende "la concepción ontológica de que la matemática es la ciencia de las operaciones ideales"[27] de un sujeto ideal. Pero no explica en qué sentido son ideales. No desea verlas como si se tomaran de un mundo platónico de operaciones. Es posible que se construyan a partir de la realidad, como él indica. Sin embargo, la operación de abstracción no puede a su vez ser abstraída si hay que evitar un círculo vicioso. Además, para que estas operaciones se consideren como "ideales", este concepto se debería diseñar de alguna manera. Por tanto, no parece que se pueda evitar un recurso tácito al platonismo.

---

26. Cfr. Kitcher *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 125. Volveré más tarde a este punto.

27. Kitcher, Ph., "The Plight of the Platonist", *Noûs*, v. 12, (1978), p. 133. "Al considerar la matemática como una teoría idealizadora de nuestras operaciones reales, a veces hablaré de las operaciones ideales de un sujeto ideal. Lo que no significa que haya que suponer que *hay* un ser misterioso con poderes sobrehumanos. Más bien (...) las verdades matemáticas son verdaderas en virtud de las estipulaciones que establecimos, especificando condiciones sobre las extensiones de predicados *que en realidad no son satisfechas por nada en absoluto, pero que son satisfechas de forma aproximada por las operaciones que realizamos (incluidas las operaciones físicas)*"; véase Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 110. Obsérvese que "las estipulaciones no son arbitrarias, sino que caracterizan de forma aproximada a las entidades reales, y que las entidades relevantes son operaciones humanas"; véase Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 110, nota 14.

En esta línea, nos quedamos perplejos por el tratamiento a que Kitcher somete la actividad iterada de coleccionar. Sería natural interpretar el acto iterado de coleccionar como una operación en la que primero formamos colecciones y luego las coleccionamos. Pero en una teoría lo bastante rica para la matemática esa suerte de coleccionar iterado introduce las colecciones como entidades abstractas. Para evitarlo, Kitcher propone construir la actividad de coleccionar de orden superior como una operación que llevamos a cabo sobre nuestras operaciones de coleccionar: "En general, coleccionar algunos objetos es representarlos reunidos. (...) El acto de coleccionar de nivel superior usa las representaciones generadas en anteriores actos de coleccionar como punto de partida para un ulterior acto de coleccionar"[28]. Podríamos entender esto si pudiéramos interpretar las representaciones de Kitcher como entidades abstractas, pero no pretende tal interpretación. Más bien, pretende idealizar nuestra actividad de *representación*. Sin embargo, no estamos seguros de que esto tenga sentido, pues cada vez que intentamos imaginarnos un ser ideal que lleva a cabo un acto iterado de coleccionar hasta un grado no contable, nos encontramos a nosotros mismos dependiendo del uso de entidades abstractas, o colecciones o representaciones abstractas de ellas.

Estamos seguros de que Kitcher insistiría y contestaría que sólo necesitamos idealizar nuestras propias actividades de representación. Esto nos lleva de nuevo a su intento de evitar las entidades abstractas interpretando la matemática como la teoría de un sujeto constructivo ideal. Es una teoría de los seres no reales, pero posibles, que seríamos si estuviéramos libres de las limitaciones debidas a la muerte o a ciertos rasgos contingentes de nuestro mundo, como la estructura de su tiempo, etc. Nuestro conocimiento se genera al deducir las consecuencias de las estipulaciones que definen al agente ideal. Sin embargo, los matemáticos no son libres para adherirse a idealizaciones que son abstracciones irrazonables, estériles o infundadas de nosotros mismos. Así, se requiere de una práctica anterior. En particular, al apoyar la concepción de Kitcher comparándola con la teoría ideal de gases no debemos olvidar que esta teoría está apoyada por alguna teoría matemática.

Además, la teoría ideal de Kitcher acerca de los actos de coleccionar se funda sobre una teoría de estadios, momentos "en la vida del sujeto constructivo"[29], la cual puede ser a su vez una reformulación de la teoría de números ordinales[30]. Así, la analogía entre su teoría y la teoría ideal de gases no consigue mostrar que ninguna de las dos teorías prescinde de las entidades abstractas. De hecho, la mayor parte de la teoría física describe fenómenos muy remotos de nuestra percepción cotidiana de los cuerpos ordinarios. Pero si consideramos la teoría de Kitcher como una ficción, entonces sólo necesitamos saber que las entidades abstractas que presupone son posibles, y no reales. De esta manera, no necesitamos suponer misteriosas interacciones causales entre nosotros y las entidades.

Con todo, la teoría plantea nuevas y difíciles cuestiones: (i) ¿Cómo se aplica la teoría ideal a nuestro mundo real? (ii) Como conjunto de conocimientos, ¿de qué es conocimiento, entonces, la matemática? Obsérvese que la sugerencia de Kitcher de "que la aritmética debe su verdad a la estructura del mundo y que la aritmética es verdadera en virtud de nuestra actividad constructiva"[31] no puede responder estas cuestiones, porque en la teoría ideal y en el conocimiento matemático hay más de lo que se necesita en la estructura del mundo y en nuestra actividad constructiva. Así, de alguna manera, Kitcher ha elaborado una teoría que le ha dejado cerca del realismo matemático. La cuestión (i) exige algún tipo de conexión entre lo "ideal" y lo "real" y la correspondiente justificación. Parece que esto no se puede hacer sin usar algunas entidades matemáticas. A propósito, en relación con esta idea podemos recordar la demostración de consistencia que Hilbert juzgó necesaria para garantizar que ninguna demostración del sistema formal que representa la Aritmética de Peano acababa en enunciados como 0=1.

3.1.2 Postulación de una infinidad de objetos

Por otro lado, se supone que los axiomas de la Aritmética de Mill estipulan las operaciones que un agente ideal lleva a cabo. Pero considérese el siguiente axioma:

(x) (Ey) Syx.

Nos dice que para cada operación segregativa *x* que un agente ideal lleva a cabo, ejecuta otra que es sucesora de *x*. Este axioma es de hecho un *axioma de*

28. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 129.

29. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 146.

30. Kitcher sugiere esto después de reconocer que la sistematización del análisis matemático requiere atribuir al sujeto constructivo la capacidad de realizar "actividad colectiva iterativa a través de una sucesión infinita de estadios", capacidad que puede traducirse en la introducción de "*dos* principios que rigen la sucesión de estadios: uno que afirma que cada estadio va seguido por otro, y otro que permite la existencia de estadios"; véase Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 147. Pero esto parece ser una postulación encubierta de los números ordinales.

31. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 108.

infinito. Para Kitcher, si tomamos este axioma como una aserción sobre las operaciones que agentes reales llevan a cabo, es falso, porque no podemos llevar a cabo un número infinito de operaciones segregativas. Esa es la razón de que se deba entender como una estipulación sobre las operaciones que son ejecutadas por un agente ideal. Así, Kitcher declara que nuestra justificación para introducir las estipulaciones que para él constituyen la Aritmética de Mill se basa en que idealizan *nuestra* actividad colectiva real. Pero eso significa que hay un límite finito en las operaciones segregativas que un agente ideal ha de llevar a cabo. La razón es simple: un agente ideal no puede ejecutar una operación que sea sucesora de una operación segregativa *x*, si no hay objetos que ya no fueran segregados por *x*, y éste es el caso si sólo hay un número finito de objetos en el universo. De este modo, si Kitcher desea que se sepa que los axiomas (por lo menos el axioma de infinito) de la Aritmética de Mill son verdaderos, debe postular un universo con un número infinito de objetos para ser segregados (porque no sabemos esto con seguridad), o debe postular un reino con un número infinito de objetos abstractos.

Pero es cierto que este segundo paso es un paso que Kitcher no desea, porque lleva al platonismo. En este contexto, y después de reconocer que los matemáticos discuten sobre un sinnúmero de entidades y que la investigación en teoría de conjuntos muestra que estas entidades pueden ser identificadas como conjuntos, Kitcher nos invita a considerar los números naturales y dice que, al parecer, "nuestros antepasados los discutieron durante generaciones, y, en la concepción que ahora se discute, hablaban de conjuntos. Pero, ¿*qué* conjuntos?"[32]. Puesto que resulta difícil decir qué conjuntos son los números y hay más de una posibilidad[33], se tiene que hacer una elección arbitraria, y ello plantea, según Kitcher, un serio problema al platonismo. Pero Chihara cree que hay un problema análogo para la concepción de Kitcher, que sugiere un *ad hominem* que, en nuestra opinión, es un *ad hominem* relevante: al preguntar por la verdadera forma lógica del teorema aritmético

> "Para todo número natural *x* e *y*, hay un número natural *z* que es la suma de *x* e *y*".

Chihara dice que hay diferentes opciones. Así tenemos que hacer una elección arbitraria, y por ello no podemos elegir exactamente qué hecho sobre las operaciones de un agente ideal expresa ese teorema. Pero entonces, ¿expresa el teorema un enunciado sobre las operaciones de un agente ideal? Esta pregunta no depende de las traducciones del teorema a un lenguaje formal o de sus expresiones en un lenguaje natural. De ahí que Chihara concluya que se supone que el teorema expresa un hecho sobre las operaciones de un agente ideal. "¿Pero qué hecho?"[34], pregunta. Como Kitcher no ha proporcionado un método general para traducir proposiciones aritméticas[35] a proposiciones de la Aritmética de Mill, el *ad hominem* parece ser inevitable. Indica que la aritmética de primer orden se puede traducir a la Aritmética de Mill "usando algunos principios intuitivos"[36]. De nuevo éste es un concepto de "intuitivo" que se debe explicar de alguna manera. ¿Es necesario apelar a alguna suerte de facultad, es decir, la facultad de la intuición que nos daría esos principios, y que Gödel consideraba tan fructífera? ¿O deben añadirse a las ideas primitivas de coleccionar y correlacionar?

Además, puesto que Kitcher es consciente del problema asociado con los supuestos existenciales, sostiene que "la aritmética puede o no ser verdadera de las manipulaciones físicas que realmente ejecutamos. Sin embargo, hay mundos posibles en los que la aritmética es verdadera de nuestro coleccionar físico, y podemos considerar legítimamente nuestro propio mundo como una aproximación a tales mundos ideales"[37]. Pero, una vez más podemos preguntarnos, ¿qué son estos mundos posibles? ¿Son mundos en los que existe una reserva de operaciones que es lo bastante rica como para satisfacer los principios de la Aritmética de Mill? Kitcher también propone provisionalmente un análisis modal de la noción de *teoría idealizadora* como si tratara sobre un *mundo posible próximo*[38], similar al real pero más simple en el sentido de que quedan eliminadas diversas complicaciones accidentales del real.

---

32. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 104.

33. En un famoso ensayo "What Numbers Could Not Be", Benacerraf argumentó que no hay una buena razón para afirmar que los números naturales son los conjuntos en el dominio del modelo de Zermelo para la axiomatización de la teoría de conjuntos, en lugar de los conjuntos del modelo de von Neumann, y que por lo tanto los números no son conjuntos. Benacerraf, P., "What Numbers Could Not Be", *The Philosophical Review*, v. 74, (1965), pp. 47-73, reimpreso en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds), *The Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 272-294. [Versión española de Rodríguez-Consuegra, F., "Qué no podrían ser los números", *Mathesis* (México), v. 9, n. 3, (1993), pp. 317-343].

34. Chihara, Ch. S., *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford, 1990, p. 239.

35. Curiosamente, esboza algunas reglas para traducir proposiciones de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel en proposiciones de su versión de la teoría de conjuntos.

36. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 132.

37. Kitcher, Ph., "The Plight of the Platonist", *Noûs*, v. 12, (1978), p. 132-133.

38. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 120.

Esta sugerencia nos parece desacertada, puesto que un mundo posible próximo es una hipóstasis de la realidad matemática tanto como pueda serlo un mundo de formas platónicas, y nos quedamos de nuevo con la pregunta acerca de cómo entender la relación entre ese mundo y el real. Además, si deseamos conservar nuestra concepción empirista o constructivista, o debemos buscar semejante mundo en nuestro universo tangible y perceptible, o debemos construirlo usando operaciones ideales. Pero se supone que estos mundos establecen la validez de las operaciones ideales. Así, a menos que estas operaciones ideales se encuentren en un reino de entidades matemáticas, aparece un argumento circular como algo inevitable. Parece obvio que, aunque Kitcher lo niega, sus diversos e importantes supuestos existenciales le llevan a una situación difícil.

3.1.3 Verdad y práctica matemática

Del mismo modo que los humanos abstraemos la noción de gas ideal de los gases reales, los humanos también "especificamos las capacidades del agente ideal al hacer abstracción de las limitaciones accidentales de nuestra propia práctica colectiva"[39]. De este modo, a través de nuestras estipulaciones creamos un agente ideal perfecto, y los enunciados aritméticos, "como los enunciados de la teoría de gases ideales, resultan ser vacuamente verdaderos"[40]. Esta es la forma de conseguir la verdad sin compromisos ontológicos, pero al mismo tiempo nos deja con una reconstrucción bastante artificial de la verdad y el conocimiento matemáticos[41]. Recordemos que la identidad del agente ideal se fija por estipulación, y este proceso es guiado por la idealización de los agentes reales del mundo, idealización que a su vez es una operación, una de las operaciones humanas. En esta explicación, la idealización *sólo* alcanza *la aproximación y no la verdad*. Así no nos dará la verdad matemática a menos que aceptemos la existencia del sujeto ideal de la Aritmética de Mill. Sin embargo, Kitcher protestará porque, del mismo modo que la aceptación de la verdad aproximada de la geometría en una explicación de la estructura del mundo no entraña un compromiso con objetos geométricos ideales, así también, según él, nuestra aceptación de la verdad aproximada de la teoría de conjuntos y de la aritmética en semejante explicación no nos compromete con las entidades abstractas.

Cuando Kitcher discute los fines epistémicos de la matemática, propone una teoría pragmática de la verdad. Un enunciado verdadero dice algo sobre los poderes "propiamente atribuidos al sujeto ideal" y figura "en una historia que se narra de forma adecuada"[42]. "Adecuada" significa que podemos encontrar ese enunciado en la práctica. De hecho, como la verdad es "lo que la indagación racional producirá" (*Ibídem*), "idealmente a la larga", encontraremos ese enunciado en la *práctica (matemática) límite*[43]. Obsérvese que la verdad depende de la práctica y el único fin epistémico se reduce a la comprensión de los resultados alcanzados en esa práctica límite. Así, la matemática es el resultado de sistematizar las declaraciones hechas sobre los poderes humanos para ordenar y coleccionar, y depende "de otras ciencias y de intereses prácticos"[44]. Dicho de otro modo, tratamos los enunciados matemáticos como si tuvieran valores de verdad porque podemos explicar el papel que juegan "en nuestro sentido común y en nuestras investigaciones científicas"[45]. Pero si eso es así, resulta difícil comprender la necesidad del sujeto ideal. Las consideraciones pragmáticas no necesitan de una explicación idealizada de las operaciones humanas y, en nuestra opinión, ello queda debidamente apoyado por la aserción de Kitcher de que "no hay ninguna noción independiente de verdad matemática y progreso matemático que se sostenga con independencia de la conducta racional de la investigación y de nuestra búsqueda de los fines no matemáticos"[46].

3.1.4 El análisis de la teoría de conjuntos

La verdad de las traducciones que conseguimos de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo fluye de las estipulaciones sobre las operaciones ejecutadas por el agente ideal. Así, los axiomas deben

39. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 117. Kitcher dice: "No supongo que exista un sujeto ideal que realice estas operaciones ideales. (...) los axiomas establecidos se interpretan como si estipularan las condiciones de un sujeto ideal y nuestra teoría despliega las consecuencias de estas condiciones" (1983, p. 126, nota 29). Pero no explica por qué no importa que el sujeto ideal, cuya actividad es descrita por las versiones de Kitcher de nuestras teorías matemáticas, no exista realmente.

40. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, nota 18.

41. Resnik piensa que esta no es una forma atractiva de reconstruir la verdad matemática. Véase Resnik, M. D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford, 1997, p. 65.

42. Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism," en Aspray, W. y Kitcher, Ph. (eds), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Mineápolis, MN, 1988, pp. 314.

43. Kitcher, Ph., "Mathematical Progress", *Revue internationale de philosophie*, v. 42, (1988), p. 531.

44. Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism", p. 315.

45. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 105.

46. Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism", p. 315. Para una buena explicación de la idea de progreso matemático de Kitcher, véase González, W. J., "'Verdad' y 'prueba' ante el problema del progreso matemático", en Martínez-Freire, P. F. (ed), *Filosofía actual de la ciencia*, Publicaciones de la Universidad de Málaga, Málaga, 1998, pp. 315-323.

considerarse como consecuencias de las condiciones que imponemos sobre el agente ideal[47], pero también son "aceptadas porque sistematizan las soluciones de problemas previamente aceptadas"[48]. ¿Son éstas las recomendaciones para aceptar el Axioma de los Cardinales Medibles? Obsérvese que este axioma parece que es más una hipótesis teórica que una estipulación sobre las operaciones para sistematizar o para resolver problemas. ¿Pero qué ocurre con la introducción de nuevos axiomas que pueden generar (nuevas) soluciones a viejos problemas como la Hipótesis del Continuo? Quizás podemos servirnos de la introducción del Principio de Elección de Zermelo. En este caso resulta difícil ver las conexiones de algunos de estos axiomas con el empirismo asumido por Kitcher[49], a través de la supuesta racionalidad de las transiciones interprácticas que llevaron hasta ellos.

El análisis que Kitcher hace de la teoría de conjuntos se encuentra con otras objeciones. Se supone que un agente ideal realiza un acto de coleccionar objetos físicos al segregar físicamente estos objetos. Para conseguir que una teoría suficientemente poderosa dé lugar a una versión de la teoría de conjuntos, el agente ideal tiene que ejecutar actos de coleccionar sobre actos de coleccionar. Pero ¿cómo ha de hacer esto? Kitcher sugiere que "cuando llevamos a cabo actos de coleccionar de orden superior, las representaciones logradas en actos de coleccionar anteriores se pueden usar como materiales a partir de los cuales se genera una nueva representación"[50]. Chihara interpreta a Kitcher de este modo: representamos el acto de coleccionar llevado a cabo por medio de algún símbolo. Entonces coleccionamos los actos de coleccionar anteriores al llevar a cabo un acto de coleccionar sobre los símbolos que usamos para representar esos actos de coleccionar anteriores. Aunque se supone que el agente ideal ha de realizar un número no contable de tales actos de coleccionar, con el fin de coleccionar todos estos actos de coleccionar en un acto de coleccionar de orden superior, cada uno de estos actos de coleccionar en número no contable debe ser representado por un símbolo.

Chihara plantea algunas preguntas al respecto: "¿De dónde saca el agente ideal una totalidad no contable de símbolos para representar estos actos de coleccionar? ¿Y cómo asigna el agente un símbolo distinto para cada uno de estos actos de coleccionar? ¿Tenemos una verdadera idea de cómo se puede hacer esto? Además, ¿cómo lleva a cabo el agente todos los *posibles actos de coleccionar* los miembros de esta totalidad no contable?" A partir de ellos, concluye, tenemos que imaginar el sujeto ideal como "un super-agente que lleva a cabo super-operaciones en un super-tiempo", un agente que "parece más divino que humano"[51]. Finalmente, si es tan perfecto, ¿por qué no concederle la existencia?

3.1.5 El compromiso con alguna ontología

En general, la insistencia de Kitcher en concebir "la matemática como una colección de historias sobre las ejecuciones de un sujeto ideal" que contamos "para destacar los rasgos sobresalientes de una realidad confusa"[52] contrasta con sus preocupaciones por la visión que el platonista tiene de la ontología de la matemática. Sus cuestiones sobre objetos matemáticos se pueden traducir a cuestiones sobre su sujeto ideal. Por ejemplo, es un misterio "cómo podemos en último término referirnos a y tener conocimiento de conjuntos *abstractos*"[53]. ¿Pero qué ocurre con el sujeto ideal? Si las teorías matemáticas son historias acerca de un agente ideal, pueden ser verdaderas si ese agente ideal existe. Antes de la introducción de este agente, los matemáticos estaban contando historias acerca de los números, los conjuntos, los grupos, los espacios, etc., de los cuales pensaban que eran historias verdaderas. Quizás la mayor debilidad para Kitcher radica en hacer justicia a la matemática pura. Así, parece que reducir los matemáticos a la ficción o la narración de historias no evita el compromiso con alguna ontología, y una lectura platonista normal de las entidades de nivel superior es un poco más fácil de seguir que su explicación del operar sobre operaciones ejecutadas.

El naturalismo de Kitcher parece llevar a dificultades en su intento de evitar el platonismo. Pero en nuestra opinión su posición se explica mejor si unimos su constructivismo liberalizado con algunos elementos de empirismo y algunos otros elementos del platonismo (sofisticado). De alguna manera, el resultado puede ser una especie de constructivismo platonista que puede tener los beneficios de platonismo sin ninguna de sus particulares dificultades y puede dejar al margen los problemas de Benacerraf con el contacto causal.[54]

---

47. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 134.

48. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 271.

49. Kitcher dice: "El empirista debe responder explicando cómo la matemática 'superior' podría emerger de esas partes rudimentarias del tema que se pueden garantizar perceptivamente"; véase Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 271.

50. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 129.

51. Chihara, Ch. S., *Constructibility and Mathematical Existence*, p. 243.

52. Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism," pp. 313, 324.

53. Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism," p. 312.

54. De acuerdo con el platonismo matemático, los enunciados matemáticos describen las propiedades de objetos abstractos y, de alguna manera que se ha de explicar, nuestras experiencias ordinarias del mundo nos dan información sobre estos obje-

Es decir, la antigua cuestión que este filósofo reavivó de un modo significativo, a saber, ¿cómo sabemos algo acerca de los objetos matemáticos?, ahora se puede responder de una manera sencilla. Los construimos y nuestras construcciones nos "transcienden", de modo que podemos descubrir en nuestra construcción propiedades que nunca antes nos propusimos. Permítasenos observar que Benacerraf concede, de pasada, que podemos interactuar causalmente con objetos abstractos: para obtener conocimiento matemático, "sólo necesitamos explicar nuestra habilidad para producir y examinar demostraciones formales"[55], y estas demostraciones son objetos abstractos. Pero si podemos "producir y examinar" demostraciones formales, podemos interactuar con objetos abstractos.[56] De hecho, creamos demostraciones y descubrimos cosas sobre ellas. En particular, tenemos que determinar, como Benacerraf dice, que ellas "poseen ciertas propiedades sintácticamente definidas"[57].

Esta conexión entre creación y descubrimiento tiene un lugar en la filosofía de Popper. Desde el punto de vista de su epistemología, la matemática se puede contemplar como un producto de la comunidad matemática, pero este producto se vuelve autónomo de la comunidad que lo produce. Aunque son nuestras creaciones, los objetos matemáticos no son completamente diáfanos para nosotros. Poseen propiedades objetivas y dan lugar a problemas que no son invención nuestra. Popper ve la matemática como un producto evolutivo de los esfuerzos intelectuales de los humanos que crean nuevos objetos matemáticos al objetivizar sus creaciones por medio de nuestro lenguaje que es el vehículo indispensable para el matemático. Cerca de esto se encuentra la idea de Kitcher de que el lenguaje matemático posee dos funciones, es "el vehículo a través del cual creamos ciertas estructuras en el pensamiento y el medio con el que contamos historias idealizadas sobre las operaciones constructivas que llevamos a cabo con su ayuda"[58]. Pero ello no significa que la matemática sea una mera acumulación de enunciados verdaderos. Los matemáticos se interesan por verdades, por verdades que proporcionan respuestas a cuestiones que son valiosas y prometedoras en la práctica matemática.

En este sentido, para Popper, como para Kitcher, "la matemática genera su propio contenido". Como adversario de los positivistas, Popper concede que las cuestiones fundacionales sobre las ciencias envuelven una dimensión ontológica cuando postula el llamado 'mundo 3', que consta de contenidos objetivos de conocimiento. Aunque niega que éste sea el de la teoría de las Formas de Platón, parece realmente comprometido con algún tipo de platonismo cuando compara su mundo 3 con el contenido objetivo de pensamiento en el sentido de Frege. De hecho, "aunque originalmente construidos por nosotros"[59], los objetos matemáticos pueden llegar a ser parte del mundo 3, un mundo de problemas y soluciones que no inventamos, sino que más bien descubrimos.

3.2 Razonamientos matemáticos no rigurosos, demostraciones asistidas por ordenador y progreso

3.2.1 Razonamientos no rigurosos y demostraciones asistidas por ordenador

Tratamos de aumentar nuestra comprensión de un campo matemático al presentarlo de una manera sistemática, es decir, en un sistema axiomático, con un pequeño número de principios a partir de los cuales podemos inferir los resultados a través de pasos que exponen la conexión entre enunciados de la manera más completa posible. Kitcher propone considerar las demostraciones como "sucesiones de enunciados que pertenecen a un sistema de tales sucesiones". Pero "el conjunto de razonamientos aceptados supera al conjunto de demostraciones aceptadas"[60], porque algunos enunciados se establecen sobre la base de argumentos inductivos o analógicos, y se usan para garantizar la creencia, como la obra de Pólya nos ha mostrado. Para Kitcher los más interesantes de los razonamientos aceptados son los *razonamientos no rigurosos* de la práctica. "Comparten con las demostraciones aceptadas suficientes rasgos estructurales como para hacer que sea razonable suponer que se puede conseguir una demostración

tos. El principal problema del platonista es dar la explicación, porque, como señaló Benacerraf, los objetos abstractos son de forma aparente causalmente inertes y no es nada obvio cómo podemos llegar a tener conocimiento de entidades con las que no podemos tener ningún contacto causal. En Benacerraf, P., "Mathematical Truth", The Journal of Philosophy, v. 70, (1973), pp. 661-679, reimpreso en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds), The Philosophy of Mathematics. Selected Readings, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 403-420. [Versión española de F. Rodríguez-Consuegra, "La verdad matemática", *Ágora. Papeles de Filosofía*, v. 23, n. 2, (2004), pp. 233-253.]

55. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 409.

56. Para el argumento complete, véase Tymoczko, Th., "Mathematics, Science and Ontology", *Synthese*, v. 88, (1991), pp. 201-228.

57. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 409, nota 4.

58. Kitcher, Ph., "Mathematical Progress", p. 534.

59. Popper, K. R., *Objective Knowledge*, Clarendon Press, Oxford, 1972, p. 138. [Versión española de Solís Santos, C., *Conocimiento objetivo*, Tecnos, Madrid, 1974].

60. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 181.

siguiendo los detalles que ellos han fijado", pero es imposible reconstruirlos para integrarse en el sistema de demostraciones, porque su "fina estructura no se entiende"[61].

En este contexto, un buen ejemplo lo constituye la historia de la conjetura de los cuatro colores, conjetura que ha cosechado un buen número de presuntas demostraciones. Pero, ¿qué sucede con la demostración asistida por ordenador de esta conjetura? Si la demostración sirve para generar nuevo conocimiento y aumentar la comprensión, parece que esta demostración no proporciona ni lo uno ni lo otro. Si las concepciones metamatemáticas deben contener cánones de demostración y los matemáticos contemporáneos parecen haberse puesto de acuerdo en que las demostraciones deberían ser (mecánicamente) formalizables y representables en una teoría de conjuntos[62], porque ésta es la disciplina matemática fundamental, ¿qué ocurre entonces con las demostraciones asistidas por ordenador? ¿Están actuando irracionalmente los partidarios de estas demostraciones o avanzando hacia una práctica nueva?

Los matemáticos usan ordenadores cada vez con más frecuencia en sus demostraciones. Las demostraciones asistidas por ordenador sugieren que ha habido un cambio importante en el carácter del conocimiento matemático. Por ejemplo, T. Tymoczko[63] argumentó que las computaciones del ordenador usadas en la demostración del teorema de los cuatro colores infunden al razonamiento matemático un rasgo nuevo que no es menos empírico que la experimentación en el razonamiento científico ordinario. Para Tymoczko, los procesamientos llevados a cabo por el ordenador en la demostración del teorema de los cuatro colores son, de hecho, experimentos, que dotan a la matemática de contenido empírico. Pero, según Kitcher, las demostraciones asistidas por ordenador "son simplemente una nueva variación de un viejo tema"[64], es decir, los matemáticos siempre se han quejado de la posibilidad de que un error pudiera estar acechando en alguna parte de una demostración larga[65]. Los matemáticos y los ordenadores cometen errores. Cuando la comprobación a mano es posible, la probabilidad de error humano es considerablemente superior a la de un error de máquina. Curiosamente, los matemáticos solían incrementar su confianza en sus demostraciones pidiendo a otros matemáticos que las revisaran. Este método tradicional de comprobar las demostraciones, leerlas y verificar que cada inferencia es correcta no es aplicable a las demostraciones asistidas por ordenador.

Ahora bien, con los ordenadores resulta curioso que tengamos una demostración que necesita otra demostración para mostrar que la primera es correcta. Esto podría hacerse demostrando la consistencia del programa que procesa el ordenador o programando otro ordenador para comprobar el resultado obtenido por un ordenador anterior. Los matemáticos han sido testigos de un sinnúmero de otras verificaciones con otros ordenadores, cada una diferente de, y más simple que, las otras[66]. En resumen, podemos repetir las verificaciones, pero un millar de verificaciones no garantizará la corrección del resultado. Basta con una simple refutación o con el descubrimiento de un simple fallo, y todo el conjunto de verificaciones se vendrá abajo. Así, parece que ninguna verificación con ordenador de la conjetura de los cuatro colores se aceptará como definitiva. Los matemáticos esperan todavía un argumento que ponga al descubierto la razón oculta para la verdad de la conjetura. Para convencer a un humano (matemático), una demostración debería ser transparente y, por ello, no es sorprendente que los matemáticos encuentren las demostraciones con ordenador menos convincentes. Saben que la verificación con ordenador de la conjetura de los cuatro colores posee menos valor que, por ejemplo, la demostración completa del último teorema de Fermat, porque esta última abre nuevas posibilidades para la matemática.

3.2.2 Comprensión y demostraciones asistidas por ordenador

Parece que este nuevo tipo de demostración ha supuesto problemas para la comunidad matemática. Nunca antes el concepto de demostración o demostraciones concretas resultaron problemáticas, excepto en relación con algunos métodos o principios que se usaban en su seno.[67] Pero ahora la famosa

61. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 182.

62. De acuerdo con Kitcher, parece que los matemáticos contemporáneos respaldan estas afirmaciones. Véase Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 190.

63. Tymoczko, Th., "The Four-Color Problem and its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy*, v. 76 (1979), pp. 57-83, reimpreso en Tymoczko, Th. (ed), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Revised and Expanded Edition, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998, pp. 243-266.

64. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 46.

65. Una posibilidad real, sin embargo, y no en demostraciones tan largas. Por ejemplo, las demostraciones del teorema de los cuatro colores de Alfred Kempe en 1879 y Peter Tait en 1880 se aceptaron como correctas hasta 1890 cuando quedó claro que ambas contenían falacias.

66. Véase, por ejemplo, Thomas, R., "An Update on the Four-Color Theorem", *Notices of the American Mathematical Society*, v. 45, n. 7, (1998), pp. 848-859.

67. Por ejemplo, demostraciones que usan el Axioma de Elección o demostraciones por *reductio ad absurdum* de enunciados existenciales, en el caso del intuicionismo.

demostración asistida por ordenador de la conjetura de los cuatro colores[68], llevada a cabo por Appel y Haken, fue recibida con severa hostilidad, y algunos matemáticos expresaron su inquietud. Por ejemplo, Ian Stewart, de la Universidad de Warwick, se quejó de que la demostración "no da una explicación satisfactoria de *por qué* el teorema es verdadero". Es prácticamente imposible captar las enormes e inusuales extensiones de la demostración y de los cálculos del ordenador, que parecen no poseer estructura. "La respuesta —declaró Stewart— aparece como una especie de monstruosa coincidencia. ¿*Por qué* hay un conjunto inevitable[69] de configuraciones reducibles? La mejor respuesta de momento es: ahí está. La demostración: aquí está, mírala. La búsqueda que el matemático hace de la estructura oculta, su ansia por fijar las conexiones estructurales, queda frustrada"[70].

Como R. Thom decía, los matemáticos rechazarán una demostración no porque sea falsa, sino porque es incomprensible. La comprensión significa en este contexto "un conocimiento completo de todos los argumentos implicados en la demostración escrita"[71]. En definitiva, no tenemos una demostración escrita, porque algunas partes sólo son verificadas aleatoriamente por el ordenador. Resulta muy difícil que un humano pueda comprender un programa de ordenador con miles y miles de líneas de código. Si el programa es el resultado de un proceso de diseño razonable, la confianza puede aumentar. El humano puede tener presente algunos detalles y la arquitectura total, pero un refinamiento concreto puede resultar imposible al análisis. Esto marca una gran diferencia con respecto a los argumentos no rigurosos tradicionales. Así, pensando que los matemáticos pueden estar aún lejos de conseguir una "buena" demostración de la famosa conjetura de los cuatro colores, el algebrista P. Halmos afirmaba que "los oráculos no son demostraciones matemáticas útiles"[72].

¿Es posible considerar el ordenador como un agente semi-ideal? Recordemos que el agente ideal puede ejecutar grandes operaciones, operaciones que están más allá de las capacidades humanas. Se puede entender como un paso intermedio entre el mundo ideal y el mundo humano real de las operaciones la gran cantidad de cálculos que el ordenador realiza para nosotros en el teorema de los cuatro colores y ello de una manera firme y dependiente. Si Kitcher necesita el sujeto matemático ideal en su teorización filosófica de la matemática, es obvio que no tenemos "una nueva variación sobre un viejo tema", porque los ordenadores están haciendo parte del trabajo que atribuimos al sujeto ideal. A medida que la matemática evoluciona, los matemáticos están mejorando su comprensión de las habilidades del sujeto ideal que quedan libres de nuestras bien conocidas limitaciones. A medida que la tecnología de ordenadores evolucione, los matemáticos pueden aumentar su comprensión de la estructura de las demostraciones asistidas por ordenador.

Pero hay aquí otra analogía interesante: las grandes postulaciones que permitimos para el sujeto ideal —postulaciones que no entendemos por completo, y que nuestra "creencia en [ellas] está necesariamente basada en la fe"[73]—, con el fin de conseguir demostraciones de algún teorema, es similar a nuestra aceptación del ordenador. No decimos que el ordenador podría actuar como un matemático que posee la habilidad de conocer el resultado demostrado, ya que es difícil sostener que el sujeto ideal está dotado de conocimiento. Apuntamos hacia algo que está relacionado con la práctica, es decir, "Si aceptamos ciertos cálculos inevitables realizados por el ordenador, entonces cierto problema queda resuelto o cierto teorema queda demostrado". Del mismo modo, a un nivel teórico, la aceptación de los axiomas que explican las capacidades del sujeto ideal da lugar a algunos resultados. Sin duda alguna, mientras que es improbable que un sujeto ideal sea aceptado en las filas de una sociedad matemática, ésta acabará aceptando el ordenador con la creciente convicción de que el futuro de la matemática descansará más en la colaboración y la computación

68. De acuerdo con esta conjetura, cuatro colores bastan para colorear cualquier mapa dibujado en un plano de tal manera que los países que comparten frontera no tengan el mismo color.

69. Con un poco de imprecisión podemos decir que la mayoría de las configuraciones de mapas son tan grandes que el uso del ordenador para verificarlas es "inevitable". De hecho, para completar la demostración se requiere un lema que no se puede examinar y aquí es donde el ordenador interviene de forma decisiva.

70. Stewart, I., *Concepts of Modern Mathematics*, Penguin, Harmondsworth, 1981, p. 304.

71. Thom, R. et alii, "Responses to 'Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics', by A. Jaffe and F. Quinn", *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 30, n. 2, (1994), p. 203. Véase también Thom, R., "Modern Mathematics. Does it Exist?", en Howson, A. G. (ed), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973, p. 204; y Alcolea, J., "Proof as a Way to Increase Understanding", en Martínez, C. et alii (eds), *Verdad: Lógica, representación y mundo*, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1996, pp. 243-251.

72. Halmos, P. R., "Has Progress in Mathematics Slowed Down?", *The American Mathematical Monthly*, v. 97, n. 7, (1990), p. 577.

73. Woodin, W. H., "Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited", *The Mathematical Intelligencer*, v. 16, n. 3, (1994), p. 33. Por ejemplo, es probable que algún axioma de los cardinales grandes sea la clave para demostrar la Hipótesis de Riemann o la Conjetura de Goldbach, que son enunciados de la teoría de números como muchas de las preguntas clásicas no resueltas de la matemática.

inteligente[74]. Ocurre como en la demostración del teorema de los cuatro colores: un proceso complejo de interacción entre el humano y el ordenador, donde Appel y Haken empezaron a considerar el ordenador como un compañero activo que estaba 'pensando' de una manera diferente a como ellos pensaban. En un determinado momento, dicen, "el programa, que ya había absorbido nuestras ideas y mejoras durante dos años, empezó a sorprendernos. Al principio, comprobamos sus argumentos a mano de manera que siempre podíamos predecir el curso que seguiría en cualquier situación; pero ahora de repente comenzó actuar como una máquina de jugar al ajedrez. Elaboraba estrategias complejas basadas en todos los trucos que se le habían estado 'enseñando' y a menudo estos enfoques eran mucho más inteligentes que los que nosotros habríamos probado. Así empezó a enseñarnos cosas sobre cómo proceder que nunca habíamos imaginado. En cierto sentido, había superado a sus creadores en algunos aspectos de la tarea 'intelectual', así como en sus partes mecánicas"[75].

Estas ideas conectan con la concepción popperiana que hemos señalado previamente. Las demostraciones pueden existir independientemente de nuestra capacidad para examinarlas o completarlas. Por consiguiente, es razonable que algunos matemáticos aún estén buscando una demostración comprensible de la conjetura de los cuatro colores, y alguna manera de comprender las operaciones del ordenador. Recordemos la insistencia de Kitcher en que los matemáticos buscan comprensión, porque es la manera de mejorar nuestra caracterización del sujeto ideal a través de operaciones que se deben conectar con operaciones de nuestro entorno. Es decir, la caracterización de un sujeto ideal "a quien atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar nuestro medio". En el caso del ordenador no necesitamos atribuirle nada, porque él posee esos poderes. De este modo, decir que el enunciado de los cuatro colores es verdadero es hacer una afirmación acerca de los poderes que se reconocen adecuadamente en el ordenador[76], y 'adecuadamente' significará que la práctica incluirá el enunciado en el límite del desarrollo de la indagación racional. Pero no olvidamos que fue creación nuestra, como lo fue el sujeto ideal.

74. Obviamente, este será el caso si en esa sociedad la gran mayoría de los matemáticos no fueron "educados antes del desarrollo de los ordenadores de alta velocidad"; véase Appel, K. y Haken, W., "The Solution of the Four Color Map Problem", *Scientific American*, v. 237, n. 4, (1977), p. 121.

75. Appel, K. y Haken, W., "The Four-Color Problem", en Steen, L. A. (ed), *Mathematics Today*, Springer, Berlín, 1978, p. 175.

76. Estamos parafraseando una afirmación de Kitcher en Kitcher, Ph., "Mathematical Naturalism", p. 314.

3.2.3 Herramientas imperfectas y semirrigor

Kitcher sostiene que, para evaluar la racionalidad de alguna transición interpráctica, los "beneficios de la resolución de problemas se deben medir contra los costes de los nuevos métodos"[77]. Como ejemplo de costes percibidos, Kitcher dice que en el siglo XVIII las técnicas para hallar las sumas de series produjeron resultados reconociblemente falsos. Y observa que muchas de las transiciones interprácticas introdujeron nuevos métodos o conceptos que conllevaron costes significativos. No obstante, fue racional adoptar los nuevos métodos: "Los matemáticos, como los científicos naturales y como toda la gente, se sienten a veces justificados para usar herramientas imperfectas. Lo mismo que a veces es razonable adoptar una solución a un problema cotidiano y reconocemos que tiene ciertas deficiencias (o una teoría científica que hace frente a ciertas anomalías), y confiar en que, con el tiempo, seremos capaces de cubrirlas, así es razonable que los matemáticos acepten propuestas para extender una práctica que conlleva costes así como los beneficios de la resolución de problemas. Por más cualificada que pueda ser la anterior discusión, creo que saca en claro que la respuesta a cuestiones puede ser una manera racional de extender la práctica matemática aun cuando las técnicas introducidas para responder antiguas cuestiones traigan consigo nuevos problemas"[78].

Todo esto es bastante razonable, y en la práctica contemporánea encontramos matemáticos que usan "herramientas imperfectas", como los ordenadores. Pero Kitcher necesita mostrar que las nuevas prácticas estaban fundadas, lo que requiere mostrar que, a pesar de las imperfecciones de los nuevos métodos que a veces producían resultados reconociblemente falsos, los resultados aceptados al usarlos quedaban garantizados. ¿Y cómo va uno a mostrar que la garantía pasó al siguiente eslabón en la cadena de prácticas? Para nuestro caso, si son una "nueva variación sobre un viejo tema", ¿están garantizados los resultados obtenidos con la asistencia de un ordenador? La respuesta parece ser negativa.

Parece que las explicaciones de Kitcher sobre costes y beneficios no están relacionadas con consideraciones de tipo económico. Aunque muy rara, la idea ha llegado a nuestro ejemplo con las demostraciones asistidas por ordenador. Como dijimos, estas demostraciones requieren computaciones tan largas que no podrían ser realizadas y ni siquiera verificadas por un ser humano. Puesto que los ordenadores y los programas de ordenador son falibles, los matemáticos tendrán que aceptar que

77. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 199.

78. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 200.

las proposiciones demostradas de este modo nunca pueden ser más que provisionalmente verdaderas. Esta es una limitación en principio, pero la computación también tiene limitaciones prácticas, a pesar de todo su creciente poder. Siempre habrá tareas que lleven mucho tiempo o se piense que son demasiado caras. Las demostraciones con ordenador no son una excepción, y así los matemáticos han explorado las implicaciones que estas limitaciones podrían tener para la práctica matemática. Una predicción es que, ante tiempos de computación impracticables o costes prohibitivos, los matemáticos aceptarán el semirrigor.

Hace algo más de diez años, después de reconocer que el precepto fundamental de la fe matemática es "deberás demostrarlo todo rigurosamente", precepto que se podría tomar como la "propiedad definidora del matemático", el matemático Doron Zeilberger predijo que con la llegada de las demostraciones asistidas por ordenador iba a escribirse un nuevo testamento[79]. A medida que la demostración absoluta se vuelve más y más cara, sostenía, los matemáticos usarán demostraciones que son menos completas, pero más baratas. Apuntó al ejemplo de la teoría algorítmica de la demostración para identidades hipergeométricas, donde ya se conocen algunos algoritmos. El problema es que algunos casos requieren computaciones que incluso los ordenadores del futuro tardarán tanto tiempo en llevarlas a cabo que agotarían el presupuesto, si no la vida, del investigador. Concluyó que los matemáticos optarán por limitar la cantidad de computación asignada incluso a teoremas que, en principio, son fácilmente demostrables, optando por una cuasicerteza menos costosa. Además, predijo que los matemáticos en conjunto aceptarán tal semirrigor como una forma legítima de validación matemática.

3.2.4 El progreso y la práctica límite

Como ya hemos indicado, según Kitcher, el progreso matemático se puede concebir en términos de cambio racional que se puede apreciar "en términos de la maximización de las oportunidades para lograr los fines epistémicos". Uno de estos fines es lograr una comprensión sistemática de la matemática ya introducida, al responder a cuestiones que fueron generadas por la práctica anterior. Pero las respuestas se aceptarán como si fueran correctas en un momento dado sólo en el caso de que sean "reconocidas como si formaran parte de una historia que está *bien fundada* en ese momento"[80].

Al considerar las transiciones interprácticas en el caso del cálculo, Kitcher describe las obras de Newton y Leibniz como si proporcionaran respuestas a algunas cuestiones fundamentales. "La asombrosa complejidad de las técnicas inventadas por anteriores matemáticos (y por Newton en algunos de sus primeros ensayos) dio lugar a un método simple y unificado"[81]. Las nuevas técnicas permitieron resultados que no entraron en serio conflicto con otras técnicas más establecidas e inferencias científicas que eran aceptables. Estos hechos explican que resultara razonable que los matemáticos adoptaran esas nuevas técnicas, y que Leibniz defendiera su adopción, al tiempo que era conocedor de las dificultades para comprender cómo funcionaban y de que el razonamiento no era riguroso.

Pero conceder que era razonable aceptar algunos enunciados matemáticos en base a estas nuevas técnicas no basta para otorgar que esos matemáticos sabían que esos enunciados eran verdaderos. Para mostrar que poseían alguna garantía para aceptar los enunciados, se tendría que hacer algo más que mostrar que era razonable aceptarlos. Es decir, aunque las soluciones vengan primero, deben ir seguidas de justificaciones, de lo contrario estamos fusionando razonabilidad y racionalidad. Recordemos, sin embargo, el compromiso de Kitcher con la racionalidad como "el producto de nuestra previa reflexión sobre nuestras prácticas pasadas y presentes"[82]. En este caso, ¿cómo podemos estar seguros de que la práctica está aún en progreso y no en retroceso?

Quizás Kitcher pueda contestar que, en su concepción, basta con dar énfasis a la variedad explicativa del progreso de un modo que le ha llevado a reconocer "la necesidad de dejar de concentrarse sobre enunciados aceptados (un rasgo del empirismo lógico que sobrevive en Lakatos y Laudan) y centrarse en los modos en que los enunciados son *usados* al responder cuestiones"[83]. Nos parece que ésta es una

79. "Hay escritos en la pared acerca de que, ahora que ha llegado el salvador de silicio, se va a escribir un nuevo testamento. Aunque habrá un pequeño grupo de matemáticos al viejo estilo 'riguroso' (...) que insistirán en que la verdadera religión es la suya y que el ordenador es un falso Mesías, pueden ser considerados por los futuros matemáticos convencionales como una secta marginal de excéntricos inofensivos (...) En el futuro, no todos los matemáticos se preocuparán por la certeza absoluta, ya que habrá muchos hechos nuevos y emocionantes por descubrir"; véase Zeilberger, D., "Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-rigorous Mathematical Culture", *The Mathematical Intelligencer*, v. 16, n. 4, (1994), p. 11. Para más detalles, véase Alcolea, J., "La demostración matemática: Problemática actual", *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, v. 7, (2002), pp. 15-34.

80. Kitcher, Ph., "Mathematical Progress", pp. 531, 528.

81. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 231.

82. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 83.

83. Kitcher, Ph., *The Advancement of Science. Science Without Legend, Objectivity Without Illusions*, Oxford University Press, Oxford, 1993, p. 112, nota 21. [Versión española de Islas, H. y Manríquez, L. *El avance de la ciencia: la ciencia sin leyenda, objetividad sin ilusiones*, UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas, México, 2001].

respuesta dentro de la perspectiva crítica, en la que la razonabilidad se ve como un concepto gradual. El punto hasta el que una inferencia o declaración particular se considera razonable depende de la aceptabilidad de esa inferencia o declaración, como parte de un procedimiento para conducir una discusión crítica, para resolver el problema que nos ocupa, etc. A este respecto, la razonabilidad crítica depende del juicio humano: está relacionada con un grupo concreto de personas en un tiempo y en un lugar concretos. En el caso que nos ocupa, está relacionada con la práctica matemática. Pero la idea de justificación aún persiste.

Pensamos que Kitcher introduce la noción de *práctica límite* para satisfacer esta persistencia. "La práctica límite —dice Kitcher— servirá como el canon con el que se deben juzgar las transiciones en estadios anteriores del desarrollo de la matemática"[84]. En esta práctica límite hallaremos los conceptos adecuados, los enunciados correctos, los razonamientos convincentes, las cuestiones respondidas de forma adecuada y las tesis metodológicas coherentes. Pero de nuevo es inevitable la pregunta anterior, ¿cómo podemos estar seguros de que la práctica está aún en progreso y no en retroceso? Además, ¿es posible la estabilidad? Kitcher concluye que "no habrá momento alguno en el que una disciplina se vuelva estable"[85]. Podemos presumir que ello es consecuencia de la incompletud esencial de las teorías matemáticas, y deja la puerta abierta a alguna forma de realismo. Puede que el progreso no sea el descubrimiento de entidades abstractas, sino el resultado de cambiar la práctica, "cuya única función es la de asegurar tesis sobre la verdad matemática y el progreso matemático". Pero la práctica matemática es simplemente una sombra de un universo matemático objetivo, y la práctica límite condensa todo lo que supuestamente sabemos en un momento concreto[86].

Conclusión

Al llegar al final, debemos indicar que nuestras anteriores dudas no constituyen puntos decisivos contra la visión que Kitcher posee de la matemática, y no disminuye en absoluto el valor de su estudio en la historia de la matemática. Simpatizamos con su idea de que los filósofos de la matemática tienen mucho que aprender de la historia de la matemática. Pensamos que ha hecho una labor excelente al exponer la debilidad de los argumentos tradicionales a favor de las principales variedades de apriorismo matemático y la oscuridad de algunas nociones a las que con frecuencia acuden los filósofos aprioristas. Sin embargo, el interés de su contribución se acrecienta enormemente en lo tocante a sus propias propuestas constructivas a favor de una teoría del conocimiento matemático y de la realidad matemática. Surgen de las siguientes convicciones, que subscribimos sin reservas y que dan la clave de su naturalismo epistemológico y metodológico: "La epistemología no tiene ningún punto arquimediano desde el cual pueda ejercer influencia sobre las pretensiones de conocimiento de los que participan en los diversos tipos de investigación humana. No debe fijarse de antemano ninguna explicación global de lo que sea el conocimiento y de qué tipos de inferencia deberían ser considerados correctos. Antes bien, debe emerger de la consideración de los modos de inferencia de que realmente se sirven los humanos y de las pretensiones de conocimiento a que realmente llegan"[87].

Su trabajo en filosofía de la matemática debería haber jugado un papel más destacado tanto en la filosofía como en la historiografía de la matemática. Pero parece que, después de todo, no lo ha jugado. Sería racional admitir que su propuesta es incompleta y que se podría mejorar de alguna manera. Por ejemplo, teniendo en cuenta otros ejemplos históricos, el tratamiento del razonamiento matemático individual debería hacerse más extenso y más preciso manteniendo el puente de unión entre las discusiones filosóficas (tradicionales) y la compleja práctica de la matemática. Los conceptos introducidos por Kitcher resultarán incluso útiles para iluminar algunas partes de la actividad matemática. Nuestro objetivo ha sido simplemente llamar la atención del lector sobre sus ideas con el fin de motivar su estudio.

Adenda: pasos de Kitcher hacia el pragmatismo

En sus comentarios a la versión inglesa de este trabajo[88], Kitcher[89] reconocía la simpatía de nuestra posición con la suya, y la forma en que habíamos señalado cómo algunas de sus propuestas tenían que ser corregidas, pero en una línea "más radical" y que "el desarrollo histórico de la matemática" debía

84. Kitcher, Ph., "Mathematical Progress", p. 531.

85. Kitcher, Ph., "Mathematical Progress", p. 535.

86. Kitcher dice que "el universo abstracto es simplemente una sombra de la práctica matemática, cuya única función es suscribir declaraciones sobre la verdad matemática y el progreso matemático", en Kitcher, Ph., "Mathematical Progress", p. 527.

87. Kitcher, Ph., *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 97.

88. Alcolea, J., "Kitcher's Naturalistic Epistemology and Methodology of Mathematics", en González, W. J. (ed), *Scientific Realism and Democratic Society. The Philosophy of Philip Kitcher*, Rodopi, Ámsterdam / New York, NY, 2011, pp. 295-326.

89. Kitcher, Ph., "Second Thoughts", en González, W. J. (ed), *Scientific Realism and Democratic Society. The Philosophy of Philip Kitcher*, Rodopi, Ámsterdam / New York, NY, 2011, pp. 377-386.

haber desempeñado un papel más importante en su argumento y que "el orden epistemológico en matemáticas es aproximadamente el orden histórico"[90]. En particular, Kitcher anotaba que habíamos presentado "algunas objeciones devastadoras" a sus esfuerzos por articular una aproximación 'constructivista pragmática' a la verdad matemática[91].

De hecho, para Kitcher, era escasamente plausible concebir los procesos evolutivos de la matemática en interacción con entidades platonistas, pues una explicación de la ontología de la matemática debería explicar los descubrimientos matemáticos. Así, los matemáticos innovadores en nuevas formas de práctica matemática comenzaron respondiendo al estado de los juegos de lenguaje en que habían sido educados con nuevas formas (de manipular formas) simbólicas, sin necesidad de interactuar con ningún mundo platónico de entidades abstractas.

Entendiendo la corrección de nuestra crítica a sus esfuerzos por reconstruir la matemática en términos de la actividad constructiva de un sujeto ideal, Kitcher proponía entender esta ciencia como un conjunto de juegos de lenguaje, "guiados por un conjunto en evolución de valores y cánones"[92]. En su desarrollo a lo largo de la historia, los lenguajes matemáticos suministran a los investigadores los instrumentos conceptuales que facilitan su labor. El éxito cosechado por los investigadores en sus prácticas apunta a ciertas relaciones entre los términos matemáticos y el modo de interactuar con la realidad, del mismo modo que en el pasado ciertas acciones (coleccionar, por ejemplo) estaban relacionadas con el vocabulario básico de la aritmética. En la misma línea cabría pensar de los ordenadores como instrumentos al servicio de los matemáticos en sus prácticas.

Con posterioridad Kitcher ha seguido perfilando su posición, pero acentuando sus posiciones hacia el pragmatismo. Es cierto que, en las últimas décadas, el pragmatismo ha ejercido su influencia sobre diferentes campos de estudio. En su libro *Preludes to Pragmatism* —en realidad, una colección de 17 ensayos, la mayoría escritos en los últimos cinco años previos a la publicación del libro, pero no siempre reimpresos de otras fuentes, como el ensayo "Mathematical *Truth*?"[93]—, Kitcher ha presentado su creciente aceptación de esta corriente clásica de pensamiento para diversos proyectos próximos a la filosofía analítica y que van desde el naturalismo y la filosofía de la matemática hasta la educación y la democracia. Nuestro pensador pretende "renovar el proyecto de James-Dewey para nuestro propio tiempo"[94]. Destacamos dos importantes temas, al respecto: el naturalismo y el realismo "real".

El *naturalismo*, en una línea próxima a Dewey, reconectaría la psicología, la biología y las preocupaciones epistemológicas para devolver la filosofía al mundo del organismo humano. Esto es, se destacaría el papel de la ciencia en la epistemología. También corre el riesgo de definir el "bien cognitivo" de la verdad de forma pragmática. El objetivo de la investigación, nos dice, es "obtener una verdad significativa" —cuya importancia depende "de nuestras preocupaciones prácticas, o de nuestros intereses epistémicos"—, y "descubrir el orden del ser", un objetivo que sigue siendo parte de los "objetivos epistémicos impersonales" que la ciencia defiende[95]. Por tanto, para Kitcher, el pragmatismo significa continuar la investigación filosófica de una manera que se integre y responda a la ciencia moderna. Por su parte, su *realismo real* sostiene que "una vez que adoptamos un lenguaje, algunas de las oraciones de ese lenguaje serán verdaderas en virtud de las relaciones referenciales entre los términos constituyentes y las entidades que son independientes de nosotros. La adopción en sí misma, sin embargo, no está guiada por la naturaleza sino por lo que es conveniente y útil para nosotros al describir la naturaleza"[96]. El pragmatismo se convierte así en una forma de garantizar que nuestras teorías filosóficas estén conectadas con intereses de la vida real.

El naturalismo pragmático entiende que la objetividad de las matemáticas se apoya sobre todo en el lenguaje matemático. Las verdades matemáticas son entonces las que perduran de forma estable en las prácticas lingüísticas de los matemáticos consiguiendo determinados objetivos. Estos objetivos son las prácticas mundanas en las que se implicaron las primeras personas que se embarcaron en la aventura matemática, las respuestas que ofrecieron para facilitar precisamente esas prácticas mundanas y los usos que hicieron del lenguaje matemático al investigar la naturaleza. Ahora bien, este naturalismo pragmático no necesita invocar ningún tipo especial de objetos matemáticos para llegar a una visión de la verdad matemática y de la objetividad matemática. De hecho, se circunscribe a la idea kitcheriana de que "la epistemología sin historia es ciega" (por el nombre de su ensayo "Epistemology Without History is Blind"[97]).

90. Kitcher, Ph., "Second Thoughts", pp. 377-378, 381.

91. Kitcher, Ph., "Second Thoughts", p. 380.

92. Kitcher, Ph., "Second Thoughts", p. 384.

93. Kitcher, Ph., "Mathematical *Truth*?", en Kitcher, Ph., *Preludes to Pragmatism. Toward a Reconstruction in Philosophy*, Oxford University Press, New York, NY, 2012, pp. 166-191.

94. Kitcher, Ph., "Mathematical *Truth*?", p. xiii.

95. Kitcher, Ph., "Mathematical *Truth*?", pp. 60, 63.

96. Kitcher, Ph., "Mathematical *Truth*?", p. 109.

97. Kitcher, Ph., "Epistemology Without History is Blind", *Erkenntnis*, v. 75, (2011), p. 523.

"Mathematical *Truth*?" y la respuesta de Kitcher[98] a G. Rosen[99] se centra en la idea de que la explicación funcionalista de la verdad para las proposiciones matemáticas debe separarse de la idea de Tarski de reducir la verdad a referencia, pues de lo contrario entramos en el problema planteado por Benacerraf[100]: si la verdad matemática se entiende en términos de relaciones de referencia, los objetos parecen poseer propiedades que hacen imposible su conocimiento, al menos desde una perspectiva naturalista.

Para Kitcher, el naturalismo facilita la salida de esta complicada situación siguiendo una estrategia que al mismo tiempo es útil para comprender las prácticas humanas, pues de lo que se trata es de comprender en último término la evolución del conocimiento matemático. Los cambios que propone conllevan reconocer que determinadas formas lingüísticas son matemáticamente valiosas para propósitos humanos, de modo que las matemáticas acaban identificadas como sucesiones de juegos de lenguaje —en la línea de la filosofía del segundo Wittgenstein y su insistencia en la diversidad de usos del lenguaje— que se anclan en formas que permiten hacer frente a problemas físicos, biológicos o sociales, que se consolidan como prácticas útiles al resolver problemas ya planteados o por ser divertidas e incluso estéticamente divertidas. Por tanto, el progreso se produce como respuesta a problemas que encontramos en la práctica vigente y las verdades se configuran como los elementos estables que han sobrevivido a una sucesión imprecisa de transiciones progresivas. Así que "la verdad 'sucede' a algunas ideas matemáticas" ["Truth 'happens' to some mathematical ideas"][101], de manera que, como Kitcher dirá en *Life After Faith*, "las fuentes de valor matemático resultan ser bastante diversas"[102].

98. Kitcher, Ph., "Reply to Rosen", en Couch, M. y Pfeifer, J. (eds), *The Philosophy of Philip Kitcher*, Oxford University Press, New York, NY, 2016, pp. 38-44.

99. Rosen, G., "Kitcher against the Platonists", en Couch, M. y Pfeifer, J. (eds), *The Philosophy of Philip Kitcher*, Oxford University Press, New York, NY, 2016, pp. 14-38.

100. Benacerraf, P., "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy*, v. 70, (1973), pp. 661-679, reimpreso en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds), *The Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 403-420. [Versión española de F. Rodríguez-Consuegra, "La verdad matemática", *Ágora. Papeles de Filosofía*, v. 23, n. 2, (2004), pp. 233-253].

101. Kitcher, Ph., *Preludes to Pragmatism. Toward a Reconstruction in Philosophy*, Oxford University Press, New York, NY, 2012, p. xxiv.

102. Kitcher, Ph., *Life after Faith. The Case for Secular Humanism*, Yale University Press, New Haven, CT / Londres, 2014, p. 84.

Bibliografia

Alcolea, J., "Proof as a Way to Increase Understanding", en Martínez, C. et alii (eds), *Verdad: Lógica, representación y mundo*, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1996, pp. 243-251.

Alcolea, J., "La demostración matemática: Problemática actual", *Contrastes. Revista Interdisciplinar de Filosofía*, v. 7, (2002), pp. 15-34.

Alcolea, J., "Kitcher's Naturalistic Epistemology and Methodology of Mathematics", en González, W. J. (ed), *Scientific Realism and Democratic Society. The Philosophy of Philip Kitcher*, Rodopi, Ámsterdam / New York, NY, 2011, pp. 295-326.

Appel, K. y Haken, W., "The Four-Color Problem", en Steen, L. A. (ed), *Mathematics Today*, Springer, Berlín, 1978, p. 153-180.

Appel, K. y Haken, W., "The Solution of the Four Color Map Problem", *Scientific American*, v. 237, n. 4, (octubre 1977), pp. 108-121. [Versión española de L. Bou, "La solución del problema del mapa de cuatro colores", *Investigación y ciencia*, 15 (diciembre de 1977), pp. 78-90].

Benacerraf, P., "What Numbers Could Not Be", *The Philosophical Review*, v. 74, (1965), pp. 47-73, reimpreso en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds), *The Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 272-294. [Versión española de Rodríguez-Consuegra, F., "Qué no podrían ser los números", *Mathesis* (México), v. 9, n. 3, (1993), pp. 317-343].

Benacerraf, P., "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy*, v. 70, (1973), pp. 661-679, reimpreso en Benacerraf, P. y Putnam, H. (eds), *The Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 403-420. [Versión española de F. Rodríguez-Consuegra, "La verdad matemática", *Ágora. Papeles de Filosofía*, v. 23, n. 2, (2004), pp. 233-253].

Callebaut, W., *Taking the Naturalistic Turn or How Real Philosophy of Science is Done*, organizado y moderado por W. Callebaut, The University of Chicago Press, Chicago, 1993.

Chihara, Ch. S., *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

González, W. J., "'Verdad' y 'prueba' ante el problema del progreso matemático", en Martínez-Freire, P. F. (ed), *Filosofía actual de la Ciencia*, Publicaciones de la Universidad de Málaga, Málaga, 1998, pp. 307-346.

Halmos, P. R., "Has Progress in Mathematics Slowed Down?", *The American Mathematical Monthly*, v. 97, n. 7, (1990), pp. 561-588.

KITCHER, PH., “Fluxions, Limits and Infinite Littlenesse”, *Isis*, v. 64, (1973), pp. 33-49.
KITCHER, PH., “Kant and the Foundations of Mathematics”, *The Philosophical Review*, v. 84, (1975), pp. 23-50.
KITCHER, PH., “Bolzano’s Ideal of Algebraic Analysis”, *Studies in the History and Philosophy of Science*, v. 6, (1975), pp. 229-271.
KITCHER, PH., “Hilbert’s Epistemology”, *Philosophy of Science*, v. 43, (1976), 99-115.
KITCHER, PH., “The Plight of the Platonist”, *Noûs*, v. 12, (1978), pp. 119-136.
KITCHER, PH., “Frege’s Epistemology”, *The Philosophical Review*, v. 88, (1979), 235-262.
KITCHER, PH., “A Priori Knowledge”, *The Philosophical Review*, v. 89, (1980), pp. 3-23.
KITCHER, PH., “Apriority and Necessity”, *Australasian Journal of Philosophy*, v. 58, (1980), pp. 89-101.
KITCHER, PH., “Arithmetic for the Millian”, *Philosophical Studies*, v. 37, (1980), pp. 215-236.
KITCHER, PH., “Mathematical Rigor–Who Needs It?”, *Noûs*, v. 15, (1981), pp. 469-493.
KITCHER, PH., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
KITCHER, PH., *Vaulting Ambition. Sociobiology and the Quest for Human Nature*, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
KITCHER, PH., “Mathematical Naturalism”, en ASPRAY, W. y KITCHER, PH. (eds), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press, Mineápolis, MN, 1988, pp. 293-325.
KITCHER, PH., “Mathematical Progress”, *Revue internationale de philosophie*, v. 42, (1988), pp. 518-540.
KITCHER, PH., *The Advancement of Science. Science Without Legend, Objectivity Without Illusions*, Oxford University Press, Oxford, 1993. [Versión española de ISLAS, H. y MANRÍQUEZ, L. *El avance de la ciencia: la ciencia sin leyenda, objetividad sin ilusiones*, UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas, México, 2001].
KITCHER, PH., “Second Thoughts”, en GONZÁLEZ, W. J. (ed), *Scientific Realism and Democratic Society. The Philosophy of Philip Kitcher*, Rodopi, Ámsterdam / New York, NY, 2011, pp. 353-389.
KITCHER, PH., “Epistemology Without History is Blind”, *Erkenntnis*, v. 75, (2011), pp. 505-524.
KITCHER, PH., *Preludes to Pragmatism. Toward a Reconstruction in Philosophy*, Oxford University Press, New York, NY, 2012.
KITCHER, PH., “Mathematical *Truth*?”, en KITCHER, PH., *Preludes to Pragmatism. Toward a Reconstruction in Philosophy*, Oxford University Press, New York, NY, 2012, pp. 166-191.
KITCHER, PH., *Life after Faith. The Case for Secular Humanism*, Yale University Press, New Haven, CT / Londres, 2014.
KITCHER, PH., “Reply to Rosen”, en COUCH, M. y PFEIFER, J. (eds), *The Philosophy of Philip Kitcher*, Oxford University Press, New York, NY, 2016, pp. 38-44.
KUHN, TH., *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, Chicago, IL, 3ª edición, 1996. [Versión española de SOLÍS SANTOS, C., *La estructura de las revoluciones científicas*, Fondo de Cultura Económica, México, 3ª edición, 2006].
POPPER, K. R., *Objective Knowledge*, Clarendon Press, Oxford, 1972. [Versión española de SOLÍS SANTOS, C., *Conocimiento objetivo*, Tecnos, Madrid, 1974].
RESNIK, M. D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
ROSEN, G., “Kitcher against the Platonists”, en COUCH, M. y PFEIFER, J. (eds), *The Philosophy of Philip Kitcher*, Oxford University Press, New York, NY, 2016, pp. 14-38.
STEWART, I., *Concepts of Modern Mathematics*, Penguin, Harmondsworth, 1981.
THOM, R., “Modern Mathematics. Does it Exist?”, en HOWSON, A. G. (ed), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973, pp. 194-212.
THOM, R. ET ALII, “Responses to ‘Theoretical Mathematics: Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics’, by JAFFE, A. and QUINN, F.”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 30, n. 2, (1994), pp. 178-207.
THOMAS, R., “An Update on the Four-Color Theorem”, *Notices of the American Mathematical Society*, v. 45, n. 7, (1998), pp. 848-859.
TYMOCZKO, TH., “The Four-Color Problem and its Philosophical Significance”, *The Journal of Philosophy*, v. 76, (1979), pp. 57-83; reimpreso en TYMOCZKO, TH. (ed), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Revised and Expanded Edition, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998, pp. 243-266.
TYMOCZKO, TH., “Mathematics, Science and Ontology”, *Synthese*, v. 88, (1991), pp. 201-228.
WOODIN, W. H., “Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited”, *The Mathematical Intelligencer*, v. 16, n. 3, (1994), pp. 31-35.
ZEILBERGER, D., “Theorems for a Price: Tomorrow’s Semi-rigorous Mathematical Culture”, *The Mathematical Intelligencer*, v. 16, n. 4, (1994), pp. 11-18.