UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Programa de Doctorado en Didácticas Específicas

Especialidad en Didáctica de las Matemáticas

Un modelo de enseñanza de la modelización para trabajar las funciones elementales con el uso de datos reales y tabletas

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Miriam Ortega Pons

Dirigida por:

Dr. Luis Puig Espinosa

Valencia, julio de 2018

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Avda. Tarongers, 4 - 46022 Valencia
Aptdo. 22045 - 46071 Valencia, España

El Dr. Luis Puig Espinosa, profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València Estudi General

HACE CONSTAR

Que la presente memoria, titulada *Un modelo de enseñanza de la modelización para trabajar familias de funciones elementales usando datos reales y iPads*, ha sido realizada bajo su dirección por Dña. Miriam Ortega Pons en el Programa de Doctorado en Didácticas Específicas, Especialidad en Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València y constituye su tesis para optar al Grado de Doctora.

Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autoriza su depósito y defensa en la Universitat de València.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firma este documento en Valencia, a 10 de julio de 2018.

Fdo. Luis Puig
Presidente del Tribunal

Teléfono: 96 3983291
email: luis.puig@uv.es
url: http://www.uv.es/didmat/puigl

Agraïments

Comence aquesta memòria escrivint unes paraules en reconeixement a les persones que m'han acompanyat en aquest camí així com a aquelles que he conegut al llarg d'aquest que gràcies al seu recolçament i la seua ajuda han fet possible la realització d'aquest treball.

Al meu director, el Dr. Luis Puig, per haver confiat en mi per formar part d'aquest projecte. Per les hores dedicades al treball, la seua ajuda incondicional, les seues correccions i els seus consells, del que he après tant i al que li dec tot.

En general, als companys del departament, per haver sigut per a mi com una segona família. Per haver-me recolzat, per haver-me implicat en tota mena d'activitats i per haver compartit amb mi moments de reflexions i rialles.

Als professors Onofre Monzó i Maite Navarro, per haver-me facilitat els seus materials que han servit de base per a l'elaboració del nostre material d'ensenyament.

A David i Irene per la seua disponibilitat, la seua ajuda i els seus suggeriments, que tant m'han servit per millorar el treball i la memòria.

En especial, a Maria José i a Eva, per fer d'amigues a banda de companyes de despatx. Per suportar hores i hores de xerrades, per donar-me ànims sempre i per ajudar-me a mirar cap endavant en els moments de negativitat.

Als companys de la Universitat Autònoma de Barcelona per haver-me acollit tan bé al seu departament i haver-me fet sentir com a casa. En especial a Lluís Albarracín per la seua disponibilitat tant durant l'estada com després d'aquesta, sobretot per la seua ajuda en l'elaboració del disseny del material d'ensenyament i per les seues recomanacions.

A la gent del Freudenthal Institute, per haver-me implicat en les activitats del seu departament i dels que tant he aprés durant l'estada i durant la meua participació en el curs de la Summer School. En especial al meu tutor d'estada, Michiel Doorman, per la seua paciència i dedicació, i per ajudar-me en la reelaboració d'algunes parts del material d’ensenyament i en l’organització de l’anàlisi de l’estudi de casos. També a Jéssica, pel seu support incondicional i per ser una inmillorable companya d’estada.

A la professora Maria José Peidro, per deixar-me entrar a les seues classes, per facilitar-me la implementació del material i la recollida de dades, per la seua implicació desinteresada en aquest treball i per trasmetre’m el seu entusiasme per l’ensenyament de les matemàtiques. També als alumnes de 1r de batxillerat A, per la seua col·laboració en aquest treball i per haver-me fet gaudir tant durant les classes.

A les meues amigues, per donar-me el seu suport, per ajudar-me a desconnectar i per estar ahí sempre que les he necessitat, tot i passar llargues temporades sense veure’ns.

A David, per haver-me trasmés l’energia i la força necessària en aquesta recta final del camí. Gràcies per la teua paciència, per entendre’m tant, per tindre sempre unes paraules d’ànim per a mi i per formar part de la meua vida.

Per últim, vull dedicar aquest treball a la meua família, en especial al meu germà, per estar al meu costat quan ho he necessitat, i als meus pares, per haver-me recolzat sempre en les meues decissions, per transmetre’m els seus valors, per haver-me donat suport en els moments més difícils i per la seua estima incondicional.

A tots vosaltres, gràcies!

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, como parte de las actividades del grupo de investigación *Análisis didáctico, histórico y epistemológico de las matemáticas escolares* (GIUV2013-048).

Las investigaciones realizadas en las sucesivas etapas de desarrollo de esta Tesis Doctoral han sido financiada a través de una ayuda para contratos predoctorales (BES-2013-063826, MINECO) y de los proyectos *Modelos de enseñanza y competencia de la modelización y la resolución de problemas aritmético-algebraicos: análisis histórico y uso de entornos interactivos de aprendizaje* (EDU2012-35638, MINECO), *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas: análisis multidimensional* (EDU2015-69731-R, MINECO/FEDER), *La modelización en el ámbito STEM. Análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje* (GV/2016/129, Conselleria d'Educació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana), *Modelos de enseñanza y procesos de aprendizaje de las matemáticas escolares* (GVPROMETEO2016-143, Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana) y *Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: Análisis racional y empírico* (EDU2017-84377, AEI/FEDER).

Abstract

The study of functions is a topic that has caused many difficulties to students, especially because functions are usually taught in a formal and an abstract way in most upper secondary mathematics lessons. In this sense, modelling tasks are a useful resource to show the students the connection between mathematical concepts and real-life contexts, which can be even more explicit when technological tools are taken into account in different moments of the modelling process.

In this research, we analyse the students' performances while working on a teaching material that is designed to study some families of functions through the mathematical modelling of physical phenomena and the use of iPads. In this material, it is also included an analysis of the qualitative properties of the phenomena and the families of functions (from now on, qualitative analysis), which can be of help in the management and the control of the problem solving process of a modelling problem (Puig and Monzó, 2013). The work on aspects such as transformations between algebraic expressions with sense and the meaning of the parameters of the families of functions is also taken into consideration in the teaching material itself.

This study is done following the theoretical and methodological framework of the Local Theoretical Models (LTMs) (Filloy, Puig y Rojano, 2008). In this framework, a LTM is developed to make sense of the phenomena that take place in the teaching and learning processes of specific mathematical contents in a particular group of students. Hence, when developing a LTM is intended that the model described is suitable just for the observed phenomena in the particular context (Puig, 2008). Specifically, any LTM can be expressed in terms of four interrelated components that deal with different types of: 1) teaching models; 2) models for cognitive processes; 3) formal competency models, which simulates the performance of an ideal user; and 4) communication models. Therefore, our research aim will be to develop a LTM and to collect, analyse and explain the students' performances when working with a teaching model that includes a qualitative analysis and the use of iPads in relation to the aspects described in the competence model.

Our work is part of the line of research “Didactic, historical and epistemological analysis of school mathematics” that has been developed for years in the Department of Didactics of Mathematics of the University of Valencia in the framework of a collaboration agreement with the Centre of Investigation and Advanced Studies (CINVESTAV) of Mexico. Within this background, a series of works on the teaching of families of functions through the mathematical modelling of physical phenomena and the use of different technological environments have been carried out. In these studies, students’ performances have been analysed in relation to the implementation of a qualitative analysis in the management and the control of the modelling processes. Besides, our study will also take into account elements from other perspectives such as the Realistic Mathematics Education, the research on the use of technology in the learning of algebra and the research on problem solving from the viewpoint described in Puig (1996). These elements will serve to support our research, to prove the design of the teaching model and as a basis for the analysis of the collected data.

A study of a group and a case study were conducted to answer the research question. The study of the group was carried out in a class of 16 Year 11 students and it was organized in four lessons. In the first lesson, students worked individually and answered some questions related to the characteristics of families of elementary functions, the transformations between canonical forms and the meaning of the parameters, concepts that they would work in the following lessons. Then, in the lessons 2, 3 and 4, they had to study different families of functions in pairs through the mathematical modelling of three physical phenomena: the bounce of a ball, the lengthening of a spring and the cooling of a liquid that has been previously heated to a higher temperature than the ambient temperature and has been let it cool. Each lesson had a similar structure: first, the students had to analyse the qualitative properties of the phenomenon and the families of functions that could model the phenomenon; second, they had to represent the phenomenon in classroom and take real data using the apps Video Physics and Graphical Analysis; third, they had to find the formula of a function that describes the phenomenon trying to fit a graph to the data using the app Desmos, and fourth, they had to answer several questions to study the characteristics of the function and its adequacy in relation to the phenomenon in more detail. This study was carried out with a double purpose: on the one hand, to determine the effect of teaching on the students' performances in relation to the competency model, on the other hand, to characterize the students' performances of those who would participate in the case study.

Afterwards, 4 students were selected to participate in a case study that consisted on a interview with teaching, in which students had to work individually and to face the study of a fourth experiment: the heating of an object that has been previously cooled to a lower temperature than the ambient temperature and has been let it heated without applying any extra heat source. The purpose of the case study was to complete and complement the results of the study of the group to determine the cognitive tendencies of the students based on the empirical observations in relation to the aspects of the teaching model that we were interested in knowing.

The analysis of the data from the study of the group was done by making a description of the students' performances using the information collected from the different data collection instruments,. Next, for each item, similar types of students' performances were identified. Finally, cognitive tendencies along each lesson were found and described.

Regarding the analysis of the data from the interviews, a written protocol was elaborated. Not only transcriptions of the interviews were included in the protocol, but also description of the students' gestures and performances when using specific apps on iPads, accompanied by images of written answers and screenshots of videos and tablet screens. Secondly, comments to give meaning to students' performances were added to the written protocol. Afterwards, these comments were organised by undertaking a rational reconstruction (Puig 1996), that consists of a narration, based on the students' performances, with the purpose of making sense of the teaching-learning situation. In this narration, it is assumed that all students' performances have a rational and consistent base that justifies them. Next, cognitive tendencies regarding the research aim were identified. Finally, results from the study of the group during classroom lessons and from the case study were related in order to answer the research question.

After analysing the data, we obtained the following results. 1) The apps Graphical Analysis and Desmos allowed the students to focus on the central actions of the tasks, making calculations or representing graphs. 2) The Video Physics app made them to reflect on aspects that are normally settled for them, such as the reference taking and the definition of variables. Firstly, on the experiment of the bounce of a ball, the students did not seem to be fully aware that the way they have taken the references would affect the values of the variable 'height', neither in which way their actions would affect them. Consequently, they performed more based on their prior conceptions of the concept of height than on how they had taken the references. However, on the experiment of the lengthening of a spring, we observed an evolution in respect to the first experiment. In this, most of the students were aware that the way in which they had taken the references would influence the variables and also in which way they affected them because the students were coherent when interpreting the function in relation to the variables they had chosen. 3) The use and the characteristics of the app Desmos let the students give different meanings to the parameters in the formula in relation to the types of transformations of the graph, even in some case, let them give more than one meanings. It led us to establish a classification of the types of parameters according to the meanings observed during the whole teaching experiment: dynamic sense, static sense and sense of a particular feature of the graph of a family of functions.

Regarding the qualitative analysis of the phenomena, it was found that it is a key element in the management and the control of the modelling process, influencing the decision-making of the students, allowing them to validate the model and verifying if their previous decisions are correct.

Concerning the results of the students' performances related to the qualitative analysis, it was noted that it was a key element in the management and the control of the modelling process. In particular, it influenced the decision-making of the students, allowed them to validate the function chosen as a model and help them to verify if their previous decisions or ideas were correct.

Besides, a students' tendency to base their answers in their prior conceptions about height and lengthening was observed and also difficulties related to the description of the phenomena and the exponential function.

Finally, the results obtained from this resarch work and the observations done during the implementation of the material made possible to redesign the teaching material, which is also presented as a result of the study.

Índice

Índice de figuras

1.Problemática y antecedentes

1.1. JUSTIFICACIÓN Y PROPÓSITO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.1. LA PROBLEMÁTICA

Todos sabemos de la importancia de las matemáticas en nuestro día a día ya que constituyen una herramienta imprescindible a la hora de resolver multitud de problemas cotidianos, nos permiten entender fenómenos de la naturaleza, representar información de una forma organizada y visual, realizar predicciones o, incluso, garantizar la seguridad de nuestros datos en la red. A pesar de ello, no es habitual estudiar las matemáticas relacionándolas con la realidad más cercana en el aula, donde estas suelen trabajarse de forma abstracta a partir de tareas desligadas de contextos, basadas en contextos "poco reales" o a través de ejercicios en los que se pide realizar transformaciones de expresiones algebraicas que los propios alumnos aprenden como reglas mecanizadas que ejecutan y reproducen sin sentido. Este modo de trabajar provoca que los estudiantes experimenten dificultades en relacionar contenidos matemáticos con situaciones de la vida real (Henn, 2007; Oliveira y Barbosa, 2013).

En este sentido, las funciones son elementos de gran utilidad al permitir establecer relaciones entre diferentes variables, poniendo de relieve la relación entre matemáticas y contextos reales (Arcavi, Drijvers y Stacey, 2017). Sin embargo, hay estudios que dan cuenta de las dificultades que experimentan los alumnos al trabajar las funciones y sus propiedades en relación con situaciones del mundo real (Janvier, 1978; Radford, 2009) y, no solo ello, sino también en relación con las propias características de las funciones en sí (Hitt, 1998; Lovell, 1971; Stein y Leinhardt, 1989), como por ejemplo el hecho de otorgar sentido a los diferentes valores numéricos que aparecen en la expresión algebraica de una función, expresada en una forma canónica concreta, con respecto a la gráfica correspondiente (Bloedy-Vinner, 2001; Furinghetti y Paola, 1994; Ursini y Trigueros, 2004).

Siguiendo esta línea, la modelización matemática se revela como una herramienta de gran utilidad puesto que permite el trabajo de las funciones y sus características a partir, y a través, de contextos reales de modo que los estudiantes den sentido a los diferentes contenidos y procesos matemáticos involucrados en este (Villa-Ochoa y Berrio, 2015). Junto a ello, la tecnología, cuyo uso está totalmente integrado en nuestra sociedad, permite enriquecer el proceso de modelización (Geiger, 2011) y puede contribuir de forma positiva en la comprensión por parte de los estudiantes de los fenómenos presentes en todo aquello que nos rodea (Henn, 2007; Stillman, 2007). Además, como se muestra en diversos trabajos en los que se incluye el uso de diferentes entornos tecnológicos para el estudio de las funciones (Marmolejo, 2014; Infante, 2016; Puig, 2015), la tecnología puede servir de ayuda a los alumnos para dar sentido a los valores correspondientes a los parámetros de las diferentes familias de funciones en relación con las representaciones gráficas. No obstante, como señalan Grigoras, García y Halverscheid (2011), todavía queda mucho por hacer y son necesarios más estudios en los que se analice el papel concreto que juega la tecnología en las tareas de modelización. Por otro lado, también existen otros elementos que pueden ayudar al resolutor en la gestión y el control del proceso de modelización. Puig y Monzó (2013) plantean la hipótesis de que la realización de un análisis de las propiedades cualitativas de los fenómenos y de las familas de funciones (en adelante, análisis cualitativo) puede contribuir en dicha cuestión, por lo que llevan ya años incorporando este elemento de forma explícita en los diferentes materiales de enseñanza de sus trabajos y estudiando su efecto en las actuaciones de los estudiantes.

Por ello, en la presente investigación abordaremos la problemática del estudio de familias de funciones, en el que se incluye el trabajo de transformaciones entre expresiones algebraicas con sentido y del significado de los parámetros de las familias de funciones expresadas en una forma canónica determinada, a través de la modelización matemática de fenómenos físico, en el que se tiene en cuenta la incorporación de un análisis cualitativo en el propio material de enseñanza y el uso de herramientas tecnológicas, en este caso, de tabletas.

1.1.2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO: LOS MODELOS TEÓRICOS LOCALES

El marco teórico y metodológico que usamos para abordar esta problemática. Este marco es el de los Modelos Teóricos Locales, en adelante MTL, la elaboración del cuál fue iniciada por Eugenio Filloy por los años ochenta del siglo pasado. Este marco aparece ya de forma implícita en la tesis de Teresa Rojano dirigida por el propio Eugenio Filloy (Filloy y Rojano, 1984; Rojano, 1985) y de forma explícita por primera vez en Filloy (1988), aunque la exposición más detallada y completa de este se puede consultar en Filloy, Puig y Rojano (2008).

Este marco teórico y metodológico se elabora tanto para organizar una investigación como para organizar los resultados que se obtienen de esta y sirve para el estudio del aprendizaje de los fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje. Desde esta perspectiva, Puig (2008) explica el carácter local y de modelo de los MTL:

> El carácter local viene dado por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos y sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados. El carácter de modelo viene dado, entre otras cosas, por el hecho de que no se hace la afirmación fuerte de que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito. El modelo tiene

> pues carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera (mediante otro modelo). En esto se diferencia la pretensión de la elaboración del modelo de la pretensión que suele acompañar la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se avance para explicar los mismos hechos, a la que se combatirá como errónea. (Puig, 2008, p.88)

Además, cualquier MTL tendrá también un carácter recursivo, pues se construye para estudiar una situación cuya definición se verá especificada o alterada por los resultados de la investigación con el objetivo de poder explicar las nuevas evidencias.

Ahora bien, como las situaciones de enseñanza y aprendizaje se observan desde un enfoque semiótico, son concebidas como situaciones de comunicación y producción de sentido en las que aparecen implicados tres tipos de personajes esenciales: el alumno, el profesor y la materia objeto de enseñanza y aprendizaje, que en este caso son las matemáticas. Esto conduce a considerar que un MTL deberá tener cuatro componentes: un componente de competencia, un componente de actuación, un componente de enseñanza y un componente de comunicación.

En concreto, el componente de competencia hace referencia a aquello que explica y predice el conjunto potencialmente infinito de todas las actuaciones del sujeto ideal. Por ello, en nuestro trabajo una de las cosas que presentaremos serán los conocimientos del dominio matemático implicados en el modelo de enseñanza pero también las competencias del sujeto ideal relativas al proceso de resolución de problemas de modelización y al manejo de las apps utilizadas durante la experimentación.

En relación con el modelo de enseñanza, este pretende conseguir la competencia de los estudiantes en el sentido descrito en el modelo de competencia, por lo que este componente incluye todo aquello que organiza el profesor para enseñar unos contenidos concretos. En nuestro trabajo se plasmará tanto en todo aquello relativo al diseño del material de enseñanza como al diseño de la implementación.

En cuanto al componente de actuación, este incluye la caracterización de las estrategias que utiliza un estudiante cuando se enfrenta a una tarea matemática, los obstáculos que encuentra y los errores que comete, para dar cuenta de sus acciones. En particular, sabemos que, aunque no podamos conocer cómo piensan los estudiantes, durante el proceso de aprendizaje estos manifiestan unas tendencias cognitivas y las podremos calificar de positivas o negativas según tiendan o no a las que llevaría a cabo un sujeto ideal o competente. Este componente se abordará principalmente mediante la descripción de las actuaciones de los estudiantes.

Finalmente y englobándolo todo, el componente de comunicación, que pretende dar cuenta de los intercambios de mensajes entre sujetos con diferentes grados de competencia en el uso de los sistemas matemáticos de signos (Puig, 2003) que se utilizan en cada caso concreto.

Cabe destacar que por cómo está pensado y organizado el presente trabajo, el centro de este serán los componentes de enseñanza y actuación, que se presentan desarrollados con un mayor detalle.

1.1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo principal de nuestra investigación será el de diseñar un MTL que permita aproximarnos a dicha problemática, por lo que nuestra finalidad será la de conocer:

> Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con un modelo de enseñanza con unas características concretas en relación con los aspectos descritos en el modelo de competencia.

En particular, nos interesará conocer las actuaciones de los estudiantes en relación con algunos elementos del modelo de enseñanza, que son la incorporación de un análisis cualitativo en la enseñanza y el uso de la tecnología, por lo que querremos determinar:

1) Las actuaciones de los estudiantes condicionadas por el uso y las características de la tecnología en el modelo de enseñanza.
2) Las actuaciones de los estudiantes al incorporar un estudio de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones en el modelo de enseñanza

Por ello, lo que se elaborará como resultados de la investigación será una descripción de las actuaciones de un grupo natural de estudiantes al trabajar con un modelo de enseñanza con unas características determinadas (que se describirán en el capítulo 3) en relación con el modelo de competencia y, en concreto, nos fijaremos en el efecto tanto del estudio cualitativo como del uso que se hace de la tecnología, restringido a las características de esta, en dichas actuaciones. Ahora bien, cabe destacar que no analizaremos los datos solo mirando el efecto que tienen estos elementos en las actuaciones de los estudiantes ya que, de ser así, podría haber aspectos que nos ayudaran a describir las actuaciones de los estudiantes en relación con el modelo de competencia que quedaran fuera del estudio. Por tanto, realizaremos un análisis por fases, de más general a más específica, tratando de obtener cuáles fueron las tendencias cognitivas de los estudiantes. De este modo, obtendremos, por un lado, una descripción de las actuaciones de los alumnos que nos permitirá explicar lo que hemos observado en relación con los objetivos 1 y 2 y, por otro, otro tipo de resultados que, *a priori*, no estaban previstos aunque sí se contemplaba su aparición en la metodología de investigación ya que servirán para explicar las actuaciones de los estudiantes en el modelo de enseñanza en comparación con el modelo de competencia.

Por otro lado, cabe destacar que dichos resultados no pretenderán ser una verdad universal ni generalizar lo que observamos en la situación estudiada a otras de índole similar, sino que permitirán dar cuenta de las actuaciones de un grupo de estudiantes con unas características concretas en un contexto determinado.

1.2. ANTECEDENTES

El presente trabajo forma parte de la línea de investigación “Análisis didáctico, histórico y epistemológico de las matemáticas escolares” que viene desarrollándose desde hace ya años en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València en el marco de un convenio de colaboración con el Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) de México. En esta línea de trabajo se han realizado estudios especialmente sobre resolución de problemas, aritmética, álgebra y modelización, en los que se toma como marco teórico y metodológico general el de los MTL.

En los últimos años, dentro de esta línea de trabajo se ha centrado la atención en el estudio de las familias de funciones a través de la modelización matemática de fenómenos (tanto físicos como sociales o económicos) y el uso de entornos tecnológicos diversos, en los que se analiza el efecto en las actuaciones de los estudiantes de la incorporación de un análisis cualitativo en el propio material de enseñanza, cuya inclusión viene justificada por la importancia de enseñar de forma explícita la gestión del proceso de resolución de problemas, como veremos a continuación. Los trabajos de los cuales hablamos arrancan del proyecto de tesis doctoral de Onofre Monzó (Puig y Monzó, 2013). No obstante, cada uno de los diferentes trabajos presenta unas características particulares en cuanto al contexto en el que se realiza, el tipo de entorno tecnológico utilizado y el hecho de usar o no datos reales. Por ejemplo, mientras que los trabajos de Monzó, Navarro y Puig (2016); Navarro, Puig y Monzó (2015) y Puig y Monzó (2013) y se implementaron en cursos de la ESO o Bachillerato, los de Juan (2012) e Infante (2016) se realizaron en diferentes contextos universitarios, en particular, en alumnos de la facultad de matemáticas de la Universitat de València y de un curso de economía y administración en Colombia, respectivamente. Los tipos de herramientas tecnológicas utilizadas también son distintas para los diferentes trabajos: en unos se usaron calculadoras gráficas con programas de cálculo simbólico) y en otros ordenadores (con programas como Matlab® y GeoGebra®). Además, en los trabajos de Monzó, Navarro y Puig (2016); Navarro, Puig y Monzó (2015) y Puig y Monzó (2013) se realizaron tomas de datos reales a partir de experimentos físicos realizados en el aula y en el de Infante (2016) se utilizan datos que se toman de fuentes de información pública variadas (revistas, informes oficiales publicados e internet), mientras que en el estudio de Juan (2012) se trabaja con funciones dadas directamente en el enunciado de la tarea. En nuestro caso, realizamos la investigación en el contexto de un grupo de alumnos de bachillerato y usamos iPads equipados con diferentes tipos de apps como herramienta tecnológica, lo que nos permitió tomar datos directamente del aula y trabajar con estos.

A continuación presentamos las investigaciones relevantes en relación con los elementos que tomamos de otras perspectivas que nos servirán para fundamentar nuestra investigación, para justificar el diseño del modelo de enseñanza y como base para el análisis de los datos recogidos. En particular, indagaremos en las investigaciones relacionadas con la modelización y el uso de datos reales en el aula desde la corriente de la Educación Matemática Realista (sección 2.1), en el uso de la tecnología en el aprendizaje del álgebra (sección 2.2) y desde la perspectiva de la investigación en resolución de problemas (sección 2.3).

1.2.1. EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA: MODELIZACIÓN Y DATOS REALES

La Educación Matemática Realista o *Realistic Mathematics Education* (RME) es una corriente basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983). Esta corriente surge principalmente en Holanda por los años 70 como reacción a la matemática moderna y la la necesidad de reformar la enseñanza de las matemáticas aunque, al mismo tiempo que esta, aparecen trabajos con planteamientos similares en otros países tal como señalan Blum y Niss (1991), entre los que destacamos aquellos desarrollados en el Shell Centre en Nottingham (Shell Centre Team, 1985) y los del grupo Cero en Valencia (Grupo Cero, 1978; 1981).

Dentro de esta corriente, en el OW&OC Institute (antecedente del Freudenthal Institute de la Universidad de Utrecht) y en el marco del HEWET Project se desarrollan diversos currículos, entre ellos el currículo de matemáticas A, dirigido a alumnos que cursarían estudios universitarios en disciplinas como economía, ciencias sociales, medicina, etc. en las que se esperaba que hicieran un uso de las matemáticas como herramientas. Este currículo fue considerado por muchos como revolucionario al romper con la tradición en cuanto a la forma de enseñar matemáticas (su descripción más detallada se puede consultar en De Lange, 1987). Esto se debe al predominio de actividades en las que se trabajaba la matematización y en las que el uso de contextos tenía un papel destacado. Siguiendo esta línea, en Treffers (1987) y Treffers y Goffree (1985) se presenta una descripción de un currículo de primaria desarrollado dentro del Wiskobas Project en el que los autores describen el proceso de matematización de modo que en este no solo se incluye la realización de acciones para la organización de fenómenos de la experiencia sino que está formado por dos componentes: el horizontal (que va de los fenómenos a los conceptos) y el vertical (que concierne la matematización de los propios conceptos matemáticos). El hecho de incluir actividades tanto de matematización vertical como de horizontal es lo que lleva a Treffers a etiquetar el currículo como “realista”, porque da cuenta de aquello que realmente se hace en las matemáticas. Esto le permite, además, caracterizar el resto de currículos según el tipo de actividades que se contemplen en ellos. En particular llama “empirista” a aquellos currículos en los que se incluyen actividades mayoritariamente de matematización horizontal, “formalista” a los que ponen énfasis en actividades solo de matematización vertical y “mecanicista” a aquellos ausentes de cualquier tipo de matematización. Además, como decíamos, los contextos tienen un papel destacado en este currículo puesto que cualquier tarea tiene lugar en alguna situación del mundo real (entendido no solo como el mundo físico o social sino también como la realidad interna de las matemáticas o el mundo real de la imaginación de los estudiantes, que también suponen fuentes para el desarrollo de conceptos matemáticos) y por su importancia en las aplicaciones ya que los contextos permiten que la realidad se conciba como fuente y dominio de aplicación (De Lange, 1985).

En esta línea, siguiendo la idea de Puig (1997), cuando se habla de aprender un concepto determinado esto se refiere, no a un estado en el que el alumno posee los conocimientos sobre un concepto o contenido concreto que antes no tenía, sino a un proceso recursivo durante el cual el alumno reelabora los conceptos a partir de la experiencia y de la aparición de nuevas situaciones en las cuales está involucrado dicho concepto, lo que permitirá ampliar la idea que se tiene de este. Por ello, siguiendo la idea de que los conceptos se elaboran para organizar fenómenos de la experiencia, como señala Puig (1996), existe una relación entre el proceso de elaboración de conceptos y el de modelización ya que en ambos se pretende organizar fenómenos a través de actividades de matematización vertical y horizontal de modo que ambos procesos se conciben como escaleras de escalones irregulares en las que actividades de los dos tipos se representan entremezcladas. La diferencia entre estos procesos reside en que en el primero se elaboran conceptos para organizar fenómenos de la experiencia y en el segundo se seleccionan conceptos ya existentes o se reelaboran para organizar dichos fenómenos, lo que se representa en De Lange (1985) con la imagen de una espiral.

Desde la época en la que Freudenthal desarrolló estas ideas, la modelización matemática ha ido cobrando cada vez más relevancia en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de ello son la gran cantidad de trabajos relacionados con la modelización en los diferentes niveles educativos, la creación de proyectos específicos de modelización (como el LEMA Project) y la presencia de diferentes grupos de investigación dedicados al estudio de la modelización en congresos internacionales. De estos últimos destaca el *International Study Group for Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), grupo afiliado a la *International Comission on Mathematical Instruction* (ICMI), que organiza un congreso propio, el *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), que se celebra cada dos años y lleva ya 18 ediciones. El estado de la cuestión puede consultarse en los últimos libros publicados por la editorial Springer de la serie *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Stillman, Blum y Salett-Biembengut, 2015; Stillman, Blum y Kaiser, 2017), en los que se presentan algunos trabajos presentados en los diferentes ICTMAs, y en el libro *Lines of inquiry in*

Mathematical Modelling Research in Education (Stillman y Brown, en prensa), también de Springer y actualmente pendiente de publicación. Además, con motivo de su 50 aniversario, la revista ZDM ha lanzado un monográfico dedicado especialmente a la modelización en los números 1 y 2 del volumen 50 en el que se presenta una revisión de la bibliografía existente más reciente (especialmente en Schukajlow, Kaiser y Stillman, 2018).

Actualmente existe una gran variedad de tipos de tareas de modelización ligadas a las diferentes formas de concebir dicho término y son ya varios los autores que han tratado de establecer clasificaciones al respecto (Jennings y Adams, 2013). Kaiser y Sriraman (2006) hablan de tres tipos de tareas relacionadas con diferentes corrientes matemáticas: tareas de modelización realista o aplicada, tareas de modelización educacional y *model-eliciting activities*. Por otro lado, Stillman, Brown y Galbraith (2008) proporcionan otra clasificación según el uso que hacen los profesores en el aula de la modelización: uso como ejemplos contextualizados para motivar a los estudiantes, uso para que los estudiantes encuentren curvas que ajusten a modelos mediante la utilización de tecnología y uso como *model-eliciting*, donde los modelos emergen como resultado del proceso de estructuración de un problema. Por último, otros autores distinguen dos enfoques según la finalidad de las tareas en relación con lo que se pretende que trabajen los alumnos (Gravemeijer y Doorman, 1999; Julie y Mudaly, 2007) y hablan de: la modelización como contenido en sí, cuando lo que se persigue es que los alumnos desarrollen la capacidad de abordar problemas en contextos reales y de evaluar la calidad de las soluciones proporcionadas (esto es, que desarrollen competencias en modelización sin importar tanto el tipo de contenido matemático trabajado), y la modelización como vehículo para motivar a los estudiantes y ayudarles a trabajar un contenido matemático concreto, relacionándolo con un contexto real. Sin embargo, como indican Ärleback y Doerr (2018), desde algunas perspectivas como la de la RME se pretende abordar ambos objetivos a la vez.

En el capítulo 3 de la presente memoria indicaremos en qué sentido utilizamos la modelización en este trabajo.

1.2.2. LA TECNOLOGÍA Y EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

A día de hoy las herramientas digitales están presentes en la mayoría de ámbitos de nuestra vida cotidiana y numerosos organismos destacan la importancia de su incorporación también en la enseñanza. Desde hace ya tiempo, en los principios y estándares curriculares que establece el National Council of Teachers of Mathematics con la intención de proporcionar pautas sobre cómo debe tener lugar la enseñanza de las matemáticas en el aula, aparece el principio relacionado con las herramientas y la tecnología y sigue apareciendo actualmente. En este se indica que "an excellent mathematics program integrates the use of mathematical tools and technology as essential resources to help students learn and make sense of mathematical ideas, reason mathematically, and communicate their mathematical thinking" (NCTM, 2014, p.4).

Arcavi *et al.* (2017) también destacan la utilización de herramientas digitales por su gran funcionalidad para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En general, estudios previos (Pierce y Stacey, 2010; Pierce, Stacey y Wander, 2010) apuntan a que los MAS, *Mathematics Analysis Softwares*, ofrecen diferentes tipos de oportunidades según si hacen referencia a cambios curriculares (*qué* matemáticas se enseñan), cambios en cuanto a la evaluación (*cómo* se evalúan las matemáticas) y cambios pedagógicos (*cómo* se enseñan y aprenden las matemáticas). En relación con estos últimos, Pierce y Stacey (2010) elaboran un mapa en el que reflejan 10 tipos de oportunidades pedagógicas que brindan los MAS (ver Figura 1.1) organizados en tres niveles que hacen referencia a:

- La naturaleza de las tareas que los docentes proponen a los estudiantes (fila inferior); como por ejemplo el hecho de que la tecnología permite el uso de datos reales, la realización de simulaciones de situaciones reales e incluso puede servir de ayuda a los alumnos al permitirles conectar diferentes tipos de representaciones.
- Las interacciones en el aula (fila central).
- La visión de las matemáticas que se enseñan (fila superior).

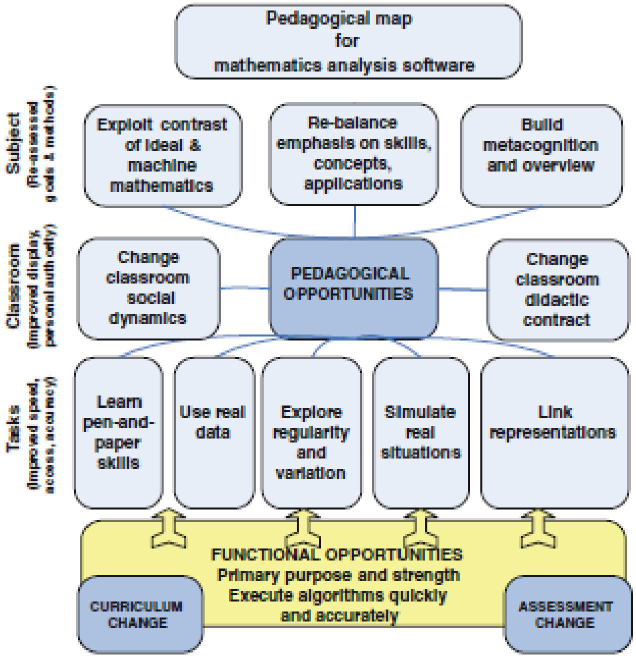

Figura 1.1. Oportunidades pedagógicas del uso de MAS (Pierce y Stacey, 2010)

En concreto para el caso de los CAS (*Computer Algebra Systems*), Arcavi *et al.* (2017) realizan una revisión de la bibliografía y ofrecen una visión del panorama actual en cuanto al uso de estas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. En dicha revisión, los autores señalan que es importante explorar las funcionalidades de las herramientas digitales para investigar el impacto de la tecnología en el aula y los tipos de oportunidades pedagógicas que ofrecen. En particular, establecen una clasificación según los tipos de funcionalidades de las CAS, aunque especifican que cada app, software o programa puede integrar varias de estas funcionalidades. Estas son:

- Funcionalidad simbólica: propia de herramientas que permiten trabajar con variables, expresiones y ecuaciones y manipularlas de forma algebraica.
- Funcionalidad gráfica: propia de herramientas que permiten representar gráficamente funciones de modo que se pueden manipular las gráficas, hacer zoom, cambiar de fórmula o trazar puntos, entre otros.
- Funcionalidad de tabla: propia de herramientas que incluyen la posibilidad de representar tablas de valores dados mediante funciones o relaciones algebraicas.
- Funcionalidad de visualización y representación: propia de herramientas que tienen la posibilidad de usar múltiples representaciones y combinarlas así como de usar otro tipo de representaciones disponibles en otro software.

Por tanto, teniendo en cuenta los tipos de funcionalidades de las CAS, las herramientas digitales son de gran utilidad para trabajar los conceptos de función y de variable, y por consiguiente de parámetro visto como una variable de orden superior. Asimismo, los autores indican que las diferentes herramientas pueden desempeñar diversos papeles pedagógicos u ofrecer diferentes oportunidades de aprendizaje:

- Como herramienta para hacer álgebra, esto es, como una especie de "asistente algebraico" que hace parte del trabajo por el usuario de modo que este pueda focalizar la atención en las cuestiones centrales de la tarea.
- Como entorno para practicar ciertas destrezas adquiridas como la resolución de ecuaciones, expansión de expresiones o su factorización, sin necesidad de la presencia del profesor.
- Como entorno para el desarrollo de conceptos, puesto que las herramientas digitales pueden ofrecer potentes imágenes, conectar diferentes tipos de representaciones o incluso trabajar algunos elementos de forma dinámica de modo que el usuario pueda relacionar estos aspectos con sus conocimientos previos, proceso que deberá ir acompañado de la guía del profesor por no ser evidente, en la mayoría de casos, la relación existente entre estos.

Por otro lado, debido al carácter abstracto del álgebra, Arcavi *et al.* (2017) señalan que una buena forma de introducir esta en la enseñanza es a través de tareas en las que se incluye la modelización matemática de contextos o situaciones problemáticas significativas. En esta línea, como indican en numerosos trabajos (Geiger, Faragher y Goos, 2010; Geiger, 2011; Greefrath, 2011; Greefrath y Rieß, 2013), las herramientas digitales pueden ser de gran ayuda en diferentes momentos del proceso de modelización. No obstante, cuando se usa tecnología hay que ser conscientes de que algunas de las competencias que deberían desarrollar los alumnos forman parte de las características de la herramienta tecnológica, en concreto de las apps usadas, por lo que derivan de los estudiantes a la máquina; y también porque los alumnos deberán desarrollar otro tipo de competencias adicionales adaptándose al funcionamiento de las apps y al uso que hagan de estas (Puig y Monzó, 2013). Esta afirmación se deriva de la teoría de la génesis instrumental desarrollada por Luc Trouche (Trouche, 2000) a partir de adaptar las ideas de Rabardel (1995) al contexto concreto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En esta teoría, se considera que hay una interacción entre la forma de entender los conceptos y el uso de herramientas tecnológicas, que se consideran como mediadores del comportamiento humano y del aprendizaje (Artigue, 2002). En particular, la mediación tecnológica se encuentra en el centro de la relación entre la herramienta o artefacto y el estudiante y se considera que el uso de esta transforma la forma de entender la tarea por parte de este. Este proceso mediante el cual el alumno transforma su concepción de la tarea al usar la herramienta se llama proceso de génesis instrumental y se considera que la herramienta o artefacto se convierte en un instrumento para el estudiante (Guin y Trouche 1999). Por tanto, los estudiantes deben percibir las posibilidades que ofrece la tecnología, en inglés *affordances* (Gibson, 1966), y hacer uso de ellas para poder entender las tareas de forma correcta y actuar en consecuencia (Brown, 2015). En este proceso, además, es muy importante el papel del profesor, quien no solo debe organizar la enseñanza sino ejercer de guía para que los alumnos sean conscientes de las matemáticas que muchas veces no se muestran de forma explícita al usar ciertas herramientas (Arcavi *et al.*, 2017). Por tanto, la génesis instrumental es un proceso que deberá ser un proceso cuidadosamente orquestado por el docente.

1.2.3. LA INVESTIGACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Desde hace ya años, se ha puesto el foco en la importancia de enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas y, tal como indica Puig (1996), esta perspectiva se ha tenido en cuenta en la mayoría de las reformas curriculares que han tenido lugar desde los años 80 del siglo pasado en todo el mundo.

En nuestro caso, consideramos una definición de problema lo suficientemente amplia teniendo en cuenta lo que indica Butts (1980) de que los problemas abarcan desde lo que este denomina ejercicios de reconocimiento hasta situaciones problemáticas y, por consiguiente, aquellos problemas que tradicionalmente se han considerado problemas de modelización. En este sentido, el proceso de modelización se concibe como un proceso de resolución de problemas para un tipo de problemas concretos, los de modelización, por lo que será importante tener en cuenta en nuestro trabajo ciertos elementos propios de la resolución de problemas.

Concretamente, en los trabajos de Polya (1945) se puede observar la necesidad de establecer pautas que permitan entender el comportamiento de un resolutor que podríamos llamar "ideal" ya que este establece que todo resolutor que se enfrente a un problema debe pasar por cuatro fases que se suceden una después de otra pasando por cada una de ellas: comprensión del problema, elaboración del plan, ejecución del plan y mirada retrospectiva. Además, este destaca la importancia de la heurística, cuyo objeto es el de "comprender el proceso de resolución de problemas, especialmente las operaciones mentales típicamente útiles en ese proceso", como señala Puig (1996). Décadas más tarde, Alan Schoenfeld, en su libro *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985), propone una categorización de lo que el propio autor llama componentes del conocimiento y de la conducta que permiten explicar las razones que conducen a resolutores reales a la persistencia en el fracaso, entre las que destacamos la necesidad del control y la gestión del proceso de resolución.

Sin embargo, como indica Puig (1996), este elemento se ha descrito habitualmente por sus funciones de carácter general y, cuando se ha organizado la instrucción de modo que pudiera generarse un buen gestor como un componente de la conducta de los resolutores, se ha enunciado también en términos absolutamente generales. Por este motivo, Puig añade que un buen gestor no solo deberá saber que ha de controlar el proceso, sino que deberá conocer cómo hacerlo, esto es, conocer cuáles son las tareas que deberá realizar para ello asociadas al uso de cada herramienta heurística y cada clase de problemas en concreto.

Como decíamos al inicio, en el trabajo de Puig y Monzó (2013) se incluye la realización de un análisis cualitativo en el propio material de enseñanza y se plantea la hipótesis de que este elemento puede contribuir en la gestión y el control del proceso de resolución de los problemas de modelización que estos plantean para la enseñanza de las familias de funciones. Esta idea surge de la necesidad de gestionar el proceso de resolución de problemas de la que habla Schoenfeld (1985) y de la idea de Puig (1996) de que, no basta con que el resolutor sepa que ha de gestionar el proceso, sino que es necesario que sepa cómo hacerlo, por lo que se deberá enseñar de forma explícita cómo hacerlo incluyendo ciertos elementos en el propio material de enseñanza. Por este motivo, en nuestro modelo de enseñanza incluiremos este elemento de forma explícita en el propio material como veremos en el capítulo 3 y, como hemos señalado previamente, uno de los objetivos de nuestro trabajo será el analizar las actuaciones de los estudiantes en relación con este.

1.3. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

Después de conocer cuáles son los objetivos de la investigación, explicaremos cómo organizamos y desarrollamos el presente estudio para abordarlas. En concreto, la metodología que utilizamos para dar abordar dichos objetivos es una de las habituales en el marco teórico y metodológico de los MTL. Esta consiste en la elección de un grupo natural de estudiantes, que constituyen la población de estudio (en este caso, un grupo de estudiantes de 1º de bachillerato de la especialidad de Ciencias), la realización de un estudio del grupo y, a continuación, la realización de un estudio de casos a algunos de los alumnos seleccionados *a posteriori*. El hecho de organizar de este modo la investigación se debió a que la forma de trabajar de los alumnos en cada momento de la experimentación era diferente, lo que nos llevaría a la obtención de datos de naturaleza distinta que nos permitirían completar y complementar la información proveniente de cada caso.

En primer lugar, el estudio del grupo se llevó a cabo en el grupo clase y se organizó en cuatro lecciones. En la primera lección se les administró a los alumnos un cuestionario inicial formado por preguntas relacionadas con los contenidos que trabajarían en el resto de lecciones. A continuación, en las lecciones 2, 3 y 4 estos debieron estudiar diferentes familias de funciones a través de la modelización matemática de tres fenómenos físicos. Cada lección tenía una estructura similar y en el diseño del material de enseñanza se contemplaba la incorporación de un análisis cualitativo y el uso de diferentes apps para realizar la toma de datos y trabajar con estos posteriormente. Este estudio se realizó con una doble finalidad: por un lado, la de determinar el efecto de la enseñanza en las actuaciones de los estudiantes en relación con el modelo de competencia en su entorno habitual de enseñanza y, por otro lado, la de caracterizar las actuaciones de los estudiantes que participaron posteriormente en el estudio de casos.

Después de ello, se realizó un estudio de casos que consistió en la realización de entrevistas con enseñanza individuales en las que los alumnos seleccionados debían abordar el análisis de un último fenómeno físico. Esta parte del estudio estaba orientada a determinar las tendencias cognitivas de los estudiantes a partir de las observaciones empíricas en relación con ciertos aspectos del modelo de enseñanza que nos interesaba conocer.

En cuanto a la metodología de análisis de los datos cabe destacar que realizamos un análisis de carácter cualitativo ya que para poder abordar la investigación nos interesaba obtener una descripción de las tendencias cognitivas observadas en las actuaciones de los estudiantes cuando trabajaban con el modelo de competencia. Pero cabe destacar que también observamos los datos en vistas a determinar dichas tendencias puesto que nuestro interés residía en obtener el tipo de actuaciones que más se repetían entre los estudiantes.

A continuación, en la Figura 1.2 mostramos un esquema general del diseño y del desarrollo de la experimentación mediante un diagrama de flujo, en el que se pueden observar las diferentes etapas del trabajo de investigación así como también algunas características fundamentales de un MTL. El estilo del diagrama se basa en los ya utilizados en trabajos previos del mismo marco teórico y metodológico (Fernández, 2009; González-Calero, 2014; Infante, 2016) que emanan del trabajo de Filloy, Rojano, Puig y Rubio (1999).

Pasamos ahora a describir en detalle las principales etapas de dicho esquema centrándonos, sobre todo, en la parte del diseño y desarrollo de la parte experimental del estudio en la que se incluye la participación de los alumnos.

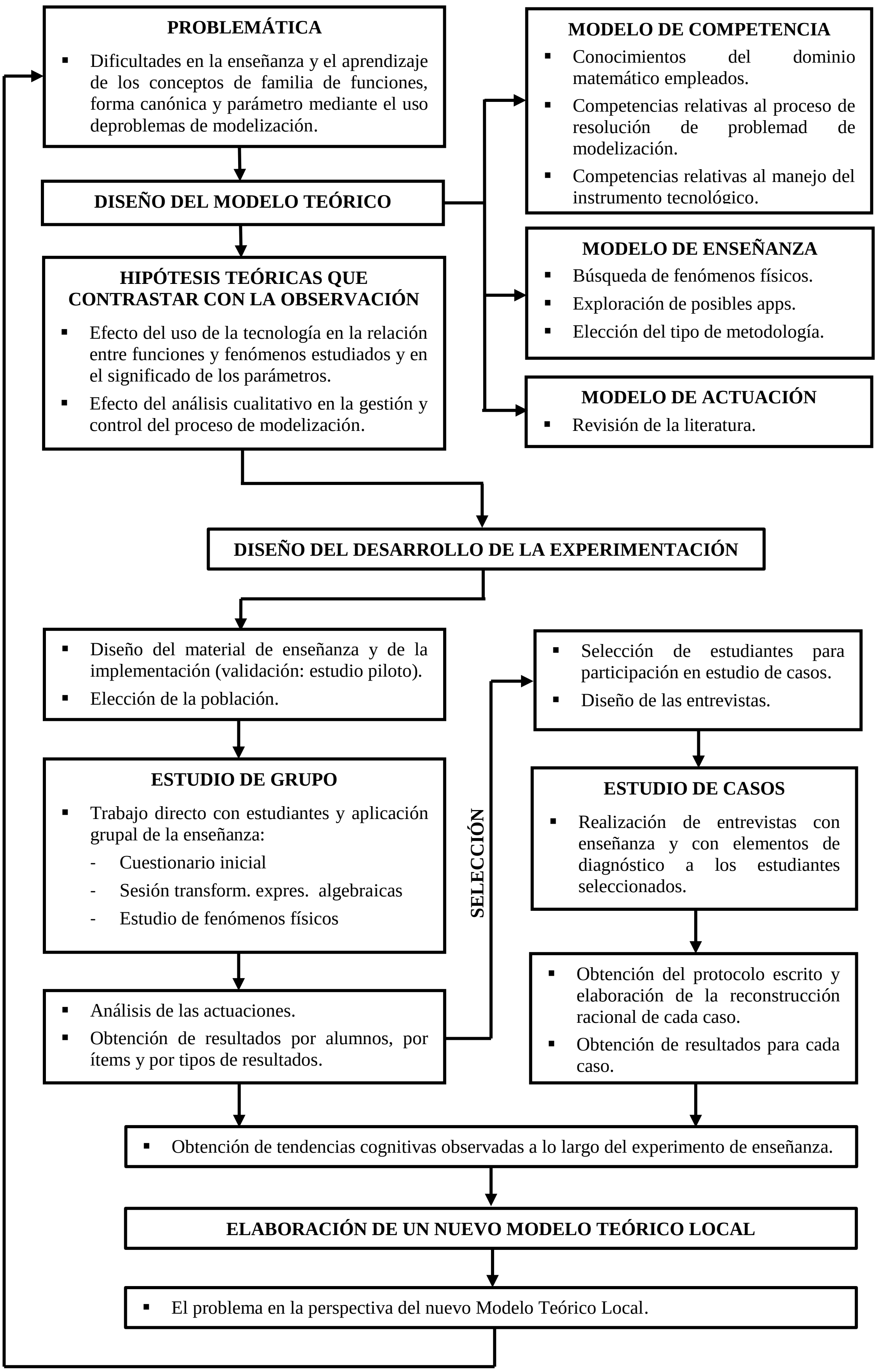

Figura 1.2. Esquema del diseño y desarrollo de la experimentación

Primeramente, diseñamos el material de enseñanza y la forma en la que llevaríamos a cabo la implementación considerando la bibliografía existente y los trabajos previos realizados. A partir de estos, elegimos los tipos de fenómenos que queríamos que estudiaran los alumnos y realizamos una revisión de las apps disponibles teniendo en cuenta la posibilidad de realizar experimentos de los fenómenos en clase y poder obtener los datos utilizando dichas apps. A continuación, realizamos un estudio piloto con la finalidad de validar dicho material con alumnos, lo que nos llevó a incorporar ciertos elementos y a realizar cambios sobre el material inicial.

Después de ello, llevamos a cabo el estudio del grupo en un grupo natural de alumnos de 1º de bachillerato. Primeramente, implementamos el cuestionario previo cuyo fin era el de proporcionarnos algunas ideas previas de los alumnos sobre las familias de funciones, las transformaciones entre expresiones algebraicas y el significado de los parámetros. La implementación de dicho cuestionario se realizó a los alumnos de forma individual y tuvo una duración de un total de 2 sesiones. Después de analizar los datos recogidos, se realizó una sesión para trabajar algunos aspectos en los que observamos que los alumnos tenían dificultades y que era necesario que conocieran previamente para poder abordar la siguiente parte del experimento de enseñanza. A continuación, los alumnos se agruparon por parejas para trabajar en el estudio de los fenómenos, al que se dedicó un total de 10 sesiones de clase. El estudio de cada uno de los fenómenos tenía una estructura similar que constaba de diversas partes: el enunciado del fenómeno que debían estudiar, la realización de un análisis cualitativo, la realización del experimento y posterior toma y procesamiento de datos, la obtención de la función a partir de los datos y el estudio de esta en relación con el experimento.

A continuación, se analizaron los datos para obtener los resultados del estudio del grupo y se seleccionó un subgrupo de 4 alumnos para su participación en el estudio de casos. En este, los alumnos participaron en una entrevista de enseñanza en la que estudiaron un último fenómeno pero centrándose más en dos aspectos: el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones y el tipo de significado de los parámetros en una forma canónica concreta. En esta entrevista trabajaron de forma individual junto con la investigadora, cuyo papel fue el de ejercer de guía del estudiante a través de la formulación de preguntas y sugerencias. Después de ello, los datos del estudio fueron analizados con el fin de obtener una descripción de las actuaciones de cada uno de los alumnos participantes. Finalmente, se analizaron los datos teniendo en cuenta los resultados tanto del estudio del grupo como del estudio de casos con el fin de describir las tendencias cognitivas observadas y, de este modo, dar respuesta a los objetivos de investigación.

Como explicaremos en el capítulo 3, antes de la realización del presente trabajo se realizó un estudio previo (Ortega, 2013) siguiendo una versión simplificada de un ciclo completo de este esquema.

1.3. DESCRIPCIÓN DE LOS CAPÍTULOS

En esta última sección presentamos una sinopsis del contenido y de la estructura de cada capítulo con la finalidad de ofrecer al lector una visión global del trabajo y de la forma en la que se organiza esta memoria.

En relación con el capítulo en el que nos encontramos, tenemos que la primera sección (sección 1.1) se dedica a presentar: la problemática en la que se enmarca este estudio (apartado 1.1.1), el marco teórico y metodológico que usamos (apartado 1.1.2) y desde el que abordamos los objetivos de investigación (apartado 1.1.3). A continuación, se ofrece una revisión de la bibliografía existente en relación con los antecedentes de nuestro estudio. En particular, se describe la línea de investigación de la que forma parte nuestro trabajo y de los elementos que tomamos de otras perspectivas y que nos servirán para fundamentarlo, para justificar el diseño del modelo de enseñanza y como base para el análisis de los datos recogidos. Por último, en este capítulo también se presenta una breve descripción de las fases que seguimos para diseñar y desarrollar el estudio junto con un esquema de dichas fases en forma de diagrama de flujo (sección 1.3).

El capítulo 2 se dedica a realizar una descripción del modelo de competencia en la que se incluyen los diferentes elementos de competencia que contemplamos en esta investigación. Para ello, primeramente se presentan los conocimientos implicados relativos al dominio matemático trabajado (sección 2.1): concepto de función y familia de funciones (apartado 2.1.1), concepto de forma canónica de una familia de funciones (apartado 2.1.2) y tipos de significados de los parámetros y dificultades en relación con estos (apartado 2.1.3). A continuación, se describen las competencias que deberán desarrollar los estudiantes relativas al proceso de resolución de problemas de modelización (sección 2.2). Por último, se incluye una explicación de las competencias relativas al manejo de las apps utilizadas en el experimento (sección 2.3).

El capítulo 3 está destinado a describir en detalle las características del modelo de enseñanza. Por un lado, se abordan los elementos relacionados con el diseño del material de enseñanza (sección 3.1), partiendo del contexto de la realización de un trabajo previo y de la posterior toma de decisiones en cuanto al diseño del material como consecuencia de los resultados de este (apartado 3.1.2), continuando por la descripción de las características del diseño inicial del material de enseñanza utilizado en el experimento (apartado 3.1.3), hasta llegar a la descripción del diseño final del material reelaborado a partir de los resultados de la realización de un estudio piloto (3.1.4). Por otro lado, se presentan los aspectos relacionados con el experimento de enseñanza (sección 3.2). En concreto, se describe minuciosamente la población participante en el estudio (apartado 3.2.1), el diseño de las diferentes partes del experimento de enseñanza (apartado 3.2.2), la forma en la que se llevó a cabo la implementación de la secuencia de enseñanza y la realización de las entrevistas (3.2.3), los tipos de instrumentos de recogida de datos (apartado 3.2.4) y las dificultades y limitaciones observadas durante dicho experimento (apartado 3.2.5).

El capítulo 4 se centra en el estudio del grupo. En primer lugar, se presenta la finalidad del estudio (sección 4.1) así como una descripción de las técnicas de obtención de los datos recogidas y de la forma en la que se llevó a cabo el análisis (sección 4.2). Después, se presenta el análisis de los datos y los resultados del estudio (sección 4.3), organizando la sección por lecciones de modo que en cada una de ellas se presentan los resultados del análisis relativos a las actuaciones de cada alumno o pareja, los correspondientes a cada uno de los ítem y un resumen de los resultados que se desprenden de cada una de las lecciones.

El capítulo 5 está destinado a describir la parte relativa al estudio de casos. En este, al igual que en el anterior, se presenta la finalidad con la que se realizó el estudio (sección 5.1) y se describe en detalle la técnica utilizada para la obtención de los datos y el análisis de estos (sección 5.2). Se sigue con una descripción de las características de los estudiantes seleccionados para la participación en el estudio en base a sus actuaciones en el estudio de grupo (sección 5.3). Por último, se presentan los resultados para cada uno de los casos estudiados (sección 5.4) de modo que se incluye: un resumen de las actuaciones de los estudiantes organizado según las partes de la entrevista a las que hacen referencia sus intervenciones (esquema de la reconstrucción racional), una tabla con la descripción de las actuaciones relativas al proceso de ajuste de la función pertinente a los datos del experimento y un resumen de los resultados observados más relevantes.

Para terminar, el capítulo 6 constituye el capítulo final en el que se incluyen los resultados que se desprenden del trabajo, tanto del estudio del grupo como del estudio de casos, y que permiten dar respuesta a las preguntas de investigación. En concreto, se presentan, por un lado, los resultados relativos a las actuaciones de los estudiantes en relación con el uso y las características del instrumento tecnológico, que permiten abordar el primero de los objetivos (sección 6.1) y, por otro lado, los relativos a las actuaciones de los estudiantes en relación con la incorporación del análisis cualitativo en el material de enseñanza (sección 6.2). Además, se incluyen una sección relacionada con otras tendencias cognitivas (sección 6.3) y otra con algunas dificultades observadas (sección 6.4). También se presenta el nuevo diseño del material de enseñanza, elaborado a partir de las observaciones realizadas y de los resultados obtenidos (sección 6.5). Para acabar, se realizan una serie de consideraciones finales y se señalan algunas líneas futuras de trabajo (sección 6.4).

Por último, en el capítulo 7 se presentan las referencias bibliográficas que aparecen en la memoria y se incluye un anexo con los documentos relativos al material de enseñanza, las respuestas de los estudiantes, algunas tablas con resúmenes de sus respuestas y los protocolos escritos de los estudiantes junto a su análisis.

2. El modelo de competencia

Son muchas las diferentes acepciones que podemos encontrar en la literatura del término "competencia" (véase Puig, 2008; Rico, 2007 o Maaβ, 2006), aunque algunas de ellas derivadas del hecho de designar conceptos distintos con un mismo término de forma equívoca, tal como explica Puig (2008). Nosotros, en este trabajo entenderemos por competencia la definición que proporciona Puig basada en cómo define Chomsky (1965) la competencia en el campo de la lingüística. Por ello, definimos la competencia matemática como aquello que explica y predice el conjunto potencialmente infinito de todas las actuaciones del sujeto epistémico de las matemáticas (Puig, 2008). En este sentido, el modelo de competencia ha de proporcionar pues una descripción de la conducta del sujeto epistémico en el dominio matemático puesto en juego y, por tanto, ha de explicar y predecir su conjunto de actuaciones posibles en ese dominio (Puig, 2008). De este modo y siguiendo la definición anterior, el modelo de competencia de un MTL estará totalmente relacionado con el resto de componentes del MTL puesto que servirá para evaluar el modelo de enseñanza presentado a través de las observaciones de las actuaciones de los estudiantes o sujetos reales.

Concretamente, en este capítulo describiremos los modelos de competencia (locales) o elementos de la competencia que contemplamos en esta investigación ya que no existe un único modelo de competencia puesto que el estudio que llevamos a cabo toma elementos de varias perspectivas. Cabe destacar que las fuentes para la elaboración de tales modelos podrán encontrarse tanto en el análisis de las competencias requeridas en el dominio matemático en cuestión como en las actuaciones concretas de los sujetos reales en el propio dominio que pueden proporcionar nuevos elementos de la competencia quizá no incorporados al modelo en el análisis del dominio matemático (Puig, 2008), y que no incluiremos en este capítulo puesto que, o bien se desprenden de las actuaciones de los estudiantes durante la implementación del modelo de enseñanza de modo que serán consideradas durante la propia experimentación, o bien se derivaran de los resultados de la propia investigación por lo que se tendrán en cuenta para futuras implementaciones (lo que se debe al carácter recursivo de un MTL del que hablábamos en el capítulo 1). Por ello, en este capítulo presentaremos, en primer lugar los conocimientos del dominio matemático que entran en juego en el modelo de enseñanza como son las funciones y familias de funciones, las formas canónicas de las familias de funciones y las transformaciones entre estas y el significado de los parámetros de una familia de funciones dada en una forma canónica concreta, elementos que forman parte de la competencia conceptual del sujeto ideal (sección 2.1.). Pero además, abordaremos también la descripción de las competencias relativas al proceso de resolución de problemas de modelización, en el sentido en el que los concebimos nosotros (sección 2.2.) y aquellas relativas al manejo del instrumento tecnológico, puesto que las competencias necesarias para abordar las tareas propuestas con éxito en caso de que estas se hubieran presentado en lápiz y papel se derivan en este caso de los estudiantes al propio instrumento, por lo que deberemos considerar las características y la forma en la que deberán hacer uso de este también en el modelo de competencia (sección 2.3.).

2.1. CONOCIMIENTOS DEL DOMINIO MATEMÁTICO IMPLICADOS

Como hemos dicho, será necesario considerar las competencias relativas a los conocimientos del dominio matemático puesto en juego en el modelo de enseñanza. Por ello, cabe destacar que, aunque los alumnos hayan estudiado algunos de los conceptos que mencionaremos a continuación en cursos previos, siguiendo la idea de Puig (1997) de que los conceptos se reelaboran para organizar fenómenos de la experiencia, hay que tenerlos en cuenta puesto que el modelo de enseñanza que presentamos en el capítulo 3 les permitirá reelaborarlos, ampliando y modificando así la idea que tenían de estos inicialmente.

2.1.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN Y FAMILIA DE FUNCIONES.

Comenzamos esta subsección tratando de dar una definición del concepto de función en el sentido en el que lo usaremos en este trabajo. Existen muchas formas de definir el término función, dependiendo del momento histórico, del contexto en el que se use y para lo que se use (no es lo mismo presentarlo en un aula de secundaria que en una facultad de ciencias) o el área de conocimiento desde la que se defina (desde un punto de vista algebraico, desde el análisis matemático, etc.), entre otros factores.

Partiendo del análisis fenomenológico del concepto de función, estudiado por Navarro (2012), Puig (1997, p.92) señala que el concepto de función es mucho más complejo que el de número, objeto geométrico o razón puesto que implica el conocimiento de la idea de variable y de dependencia funcional. Cabe señalar que, aunque se observaron ejemplos de funciones ya en tiempos paleobabilónicos, no es hasta Euler cuando se usa el término "función" con un sentido similar al actual, es decir, en el sentido de dependencia entre variables. Sin embargo no fue este sino Dirichlet, en 1837, el primero en definir función en este sentido:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente. (Boyer, 2007, p. 687)

Con el paso del tiempo esta definición se ha ido reelaborando de forma que ha incorporado elementos de la teoría de conjuntos, como la definición que propone Godement (1971), sobre la que se basan la mayoría de las que aparecen en los libros de texto escolares en la actualidad y en la que ha desaparecido la idea de dependencia entre variables:

> Se llama función a la terna $f = \{G, X, Y\}$, en donde G, X, Y, son conjuntos que cumplen las condiciones siguientes:
>
> 1) $G \in X \times Y$
>
> 2) Para todo $x \in X$ existe un y, y sólo un $y \in Y$, tal que $(x, y) \in G$ donde G es la gráfica de la función.

Ya Freudenthal (1983) distinguía entre estos dos tipos de definiciones y hablaba de que, aunque estas son *lógicamente* equivalentes, no lo son fenomenológicamente ni tampoco desde el punto de vista de la fenomenología didáctica puesto que solo la primera de ellas se basa en la dependencia entre variables, idea de la que surge en sus inicios el concepto de función:

> La función es una dependencia especial, esto es, entre variables que se distinguen como dependientes e independientes, una terminología anticuada, que sin embargo remarca el fenómeno fenomenológicamente importante: las directrices de algo que varía libremente a algo que lo hace bajo control. (Freudenthal, 1983, p. 496)

Además, Freudenthal añade que "se pueden oponer estas definiciones entre sí como dinámico contra estático si a uno no le importa usar términos en desuso", relacionando dinámico con el carácter de la primera de las definiciones, ya que se presenta como una relación entre dos variables de modo que al variar los valores de una varían los de la otra, y estático con la segunda por tratarse de una definición en la que una función se define como un subconjunto de un producto cartesiano.

Por tanto, siguiendo la idea de Freudenthal, tomaremos una definición en la que se considere la dependencia entre variables puesto que es la que surge de un análisis fenomenológico del concepto[1]. En concreto, definimos pues una función real de variable real f (a partir de ahora, simplemente función) como una regla que asigna a cada número real x perteneciente a un cierto conjunto de números reales D, llamado dominio de definición de f, un único número real $y = f(x)$ llamado también imagen de x. Simbólicamente,

$$f: D \to \mathbb{R}, \text{ donde } D \subset \mathbb{R}$$

$$x \to y = f(x)$$

Cabe destacar que a menudo hablamos de que una función tiene diferentes representaciones ya que se puede expresar en forma de fórmula, gráfica, describiendo verbalmente sus propiedades específicas, a través de una tabla de valores, etc. Sin embargo, estas no son representaciones de una función sino formas distintas de expresarla ya que, siguiendo la definición que da Youschkevitch (1976), una función queda totalmente definida mediante la descripción verbal de su propiedad específica o directamente mediante su gráfica. No obstante, dependiendo del modo que usemos para expresar una función, podremos obtener un tipo de información distinta. Por ejemplo, la gráfica nos proporciona la información de carácter global de la función, la tabla algunos valores de esta (aunque es posible que no sepamos exactamente cuál es la regla precisa que relaciona x y y) y la fórmula de la función nos indica cuál es la imagen de cualquier

[1] Freudenthal no habla de que haya que evitar usar la definición algebraica sino de que esta puede usarse pero siempre y cuando se tenga en cuenta que esta definición se da como resultado de un proceso de abstracción de la otra y sin perder de vista su origen fenomenológico.

número x, aunque esta también nos puede dar información de carácter global dependiendo de la forma canónica en la que se presente y de sus peculiaridades[2].

Por otro lado, es importante diferenciar el concepto función del de familia de funciones, términos a los que nos referiremos en repetidas ocasiones en capítulos posteriores. Consideramos una familia de funciones como el conjunto de todas las funciones cuyas expresiones algebraicas tienen una característica propia que las define (esto es, las mismas peculiaridades) o cuyas gráficas tienen una forma parecida, salvo traslaciones y dilataciones. No obstante, conviene señalar que la relación de pertinencia a una familia de funciones no provoca una partición del conjunto de todas las funciones y hay que entender que una función puede pertenecer a varias familias dependiendo de las características consideradas, por lo que la clasificación de las funciones en familias no es excluyente. Asimismo, hay funciones que, a pesar de tener una característica propia que las define y de poder expresarse con una expresión algebraica similar, habitualmente se consideran de familias distintas, bien por la forma en la que se presenta su expresión algebraica, o bien por la forma de su gráfica. Es el caso, por ejemplo, de las funciones de proporcionalidad inversa que, como apuntan Puig y Monzó (2013, p.16), se identifican "como una familia en sí misma y no como miembro de la familia de las funciones potenciales" debido a la forma de su gráfica, que es una hipérbola, o incluso a lo que Kirshner (1989) llamó sintaxis visual del álgebra, ya que si se expresan en forma de fracción visualmente su fórmula no tiene el aspecto de una función potencial. Algo parecido sucede con las polinómicas de grado 3 como indica Puig (2015) que, a pesar de poder expresarse con una expresión algebraica parecida, si se observa su gráfica pueden no atribuirse a la misma familia puesto que las cúbicas monotónicas no tienen máximo ni mínimo sino sólo un punto de inflexión, mientras que el resto sí.

2.1.2. CONCEPTO DE FORMA CANÓNICA DE UNA FAMILIA DE FUNCIONES

Toda expresión algebraica de una familia de funciones se puede expresar mediante una forma canónica diferente, según los aspectos de la función que queramos poner de relieve. Por ejemplo, en el caso de la función cuadrática, como indica Puig (2015), tenemos que:

a) $y = ax^2 + bx + c$ es una forma canónica que pone de relieve la forma de la expresión algebraica que se trata de un polinomio, de modo que los parámetros son los coeficientes de este.

b) $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ es una forma canónica que pone de relieve las raíces de la función (o las coordenadas primeras de los puntos de corte con el eje OX).

c) $y = a\left(\frac{x-c}{b}\right)^2 + d$ es una forma canónica que pone de relieve las transformaciones que permiten obtener la gráfica de una función de la familia partiendo de la más simple, en este caso $y = x^2$, de modo que los parámetros se refieren a esas transformaciones.

Como señala Puig (2015), es obvio que en estas tres formas canónicas están representadas de alguna manera propiedades de la función, de su gráfica y de su expresión algebraica (debido a que las propiedades de una función expresada en cualquiera de sus formas posibles están relacionadas), pero el aspecto que más se resalta en cada una de ellas es el que hemos señalado.

[2] Por ejemplo, las funciones cuadráticas tienen la peculiaridad de que el mayor grado de la variable independiente es 2 y las exponenciales que la variable independiente está en el exponente.

Además, conviene señalar que en el caso de algunas funciones que modelizan fenómenos, no solo es posible resaltar mediante la forma canónica algunos aspectos de dichas funciones sino también propiedades o magnitudes consideradas en el propio fenómeno.

La forma canónica elegida para la enseñanza será la del tercer tipo ya que nos interesará que los estudiantes encuentren la función que modeliza el fenómeno estudiado realizando una serie de operaciones sobre la expresión algebraica de la función más simple de la familia de funciones con la finalidad de que ajuste a una nube de puntos representada gráficamente dotando de significado a los parámetros. No obstante esto, también aparecerán funciones en otras formas canónicas debido al uso que haremos de una de las apps de modo que nos proporcionará la función que representa el fenómeno tras realizar algunas acciones. Además, esta función no es exclusiva de la familia de funciones cuadrática sino que es posible encontrar una forma general que pueda usarse con familias de funciones diferentes. En efecto, tal como lo define Puig (2015), si llamamos f a una función cualquiera, la forma canónica que utilizaremos de f será:

$$y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$$

dónde los parámetros siempre tienen el mismo significado en términos de la gráfica de forma que,

- $a \neq 0$ dilata la gráfica de f en la dirección del eje OY (verticalmente), respecto de la recta $y = d$.
- $b \neq 0$ dilata la gráfica de f en la dirección del eje OX o (horizontalmente), respecto de la recta $x = c$.
- c traslada la gráfica de f en la dirección del eje OX; hacia la derecha si $c > 0$ y hacia la izquierda si $c < 0$.
- d traslada la gráfica de f en la dirección del eje OY; hacia arriba si $d > 0$ y hacia abajo si $d < 0$.

Hay que destacar que, se elige que el parámetro c aparezca restado a la variable x y no sumando precisamente para que al tomar este parámetro valores positivos, la gráfica de f se desplace en el sentido positivo del eje OX. Análogamente para el parámetro d, que se elige que aparezca sumado a todo el resto de la expresión algebraica, y no restando, para que al tomar éste valores positivos se desplace en el sentido positivo en dirección al eje OY. Lo mismo pasa con los parámetros a i b que el primero multiplica la expresión $\frac{x-c}{b}$ y el segundo divide $x-c$ para que al tomar valores positivos la gráfica de f se dilate en sentido positivo hacia el eje OX y hacia el eje OY, respectivamente.

Por tanto, las familias de funciones que se usaran para describir los fenómenos estudiados en el modelo de enseñanza, que son la lineal, la cuadrática y la exponencial, quedarían como sigue si las expresáramos con esta forma canónica:

- Si $f(x) = x$, entonces $y = a\frac{x-c}{b} + d$.
- Si $f(x) = x^2$, entonces $y = a\left(\frac{x-c}{b}\right)^2 + d$.
- Si $f(x) = e^x$, entonces $y = ae^{\frac{x-c}{b}} + d$.

Sin embargo, cabe destacar que en algunos de estos casos la expresión algebraica de las funciones se puede simplificar debido a que, como señala Puig (2015), existen diferentes tipos de transformaciones, según las expresadas en la forma canónica, que permiten obtener la misma gráfica de una función[3]. Esto sucede a causa de que, aunque la imagen punto a punto de dichas transformaciones no sea la misma, sí lo es la imagen global de esta. No obstante, este aspecto no lo podemos encontrar en todos los tipos de funciones. De entre los casos que nos conciernen esto solo sucederá en las funciones lineales y cuadráticas, aunque también en las de proporcionalidad inversa.

Por ejemplo, para el caso de la función lineal $y = 3x$, si la recta se traslada 6 unidades hacia arriba ($y = 3x + 6$) o 2 unidades hacia la izquierda ($y = 3(x - (-2))$) se obtiene la misma gráfica. Sin embargo, si observamos que sucede con cualquier punto de la función, por ejemplo el (1,3), vemos que en un caso se traslada al (1, 9) y al (-1, 3) en el otro. La justificación analítica proviene del hecho de que $3x + 6 = 3(\mathrm{x} - (-2))$ y ambas expresiones se pueden ver como expresiones expresadas mediante la forma canónica elegida. Lo mismo pasa para el caso de la función cuadrática, si aplicamos una dilatación horizontal de razón 0,5 a $y = x^2$ ($y = \left(\frac{x}{0{,}5}\right)^2$) y una dilatación vertical de razón 4 ($y = 4x^2$) obtenemos la misma gráfica ya que $\left(\frac{x}{0{,}5}\right)^2 = \left(\frac{x}{1/2}\right)^2 = \frac{x^2}{1/4} = 4x^2$. No obstante, por ejemplo el punto (1, 1) de la función va a parar al (0.5,1) en el primer caso y al (1,4) en el segundo[4].

Por consiguiente, tendremos que en el caso de la lineal adoptaremos una versión simplificada con solo dos parámetros, ya que tanto a y b como c y d se pueden combinar en un solo parámetro, y en el de la cuadrática con tres, puesto que sucede lo mismo de nuevo con a y b. De este modo, tendríamos que las formas canónicas resultantes en la forma canónica para la función lineal y la cuadrática quedarían como $y = a'x + d'$ y $y = a'(x - c)^2 + d$, respectivamente. Ahora bien, hay que darse cuenta de que esto es correcto hacerlo porque las nuevas formas canónicas pueden obtenerse también a través de transformaciones expresadas en la forma canónica inicial, $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$. En concreto, el tipo de transformaciones que describen los nuevos parámetros en ambas funciones es equivalente al de las expresiones iniciales en el caso en el que se le asigna el valor 1 al parámetro b, para ambas funciones, y el valor 0 al parámetro c para el caso de la función lineal. Por tanto, en realidad las expresiones algebraicas de las formas canónicas quedarían descritas cómo $y = ax + d$ y $y = a(x - c)^2 + d$, por lo que cuando hablamos de simplificar las expresiones algebraicas de la forma canónica combinando los parámetros lo hacemos en el sentido de colapsarlos, no de fusionarlos en un solo de forma que tomen significados distintos a los descritos por el tipo de transformaciones expresadas en la forma canónica.

En definitiva, elegiremos esta forma canónica por dos motivos: 1. Porque pone de manifiesto las propiedades de la gráfica y 2. Porque es una forma genérica para todas las

---

[3] Analíticamente, las formas canónicas se pueden simplificar debido a que ambas expresiones, la inicial y la resultante de fusionar los parámetros, son equivalentes desde el punto de vista algebraico. Por ejemplo, en el caso de la cuadrática, $a\left(\frac{x-c}{b}\right)^2 + d = a\frac{(x-c)^2}{b^2} + d = \frac{a}{b^2}(x - c)^2 + d = a'(x - c)^2 + d$.

[4] Esto se debe a que toda dilatación horizontal de razón $1/k$ aplicada a $y = x^2$ cambia los puntos de la forma (x,y) a la forma $(\frac{x}{k},y)$ y toda dilatación vertical de razón k^2 los cambia por puntos de la forma (x, k^2y)... La justificación más detallada de esto se puede encontrar en Puig (2015).

familias de funciones y, en consecuencia, incluso aunque en algunos casos se pueda simplificar la expresión, el significado de los parámetros será el mismo.

No obstante, aunque se trabajen las funciones en una forma canónica o en otra, hay que resaltar la importancia de las transformaciones entre estas por el hecho de dotarlas de sentido ya que dichas transformaciones se aprenden en la enseñanza tradicional de forma mecánica y sin sentido (Puig y Monzó, 2013).

2.1.3. TIPOS DE SIGNIFICADOS DE LOS PARÁMETROS Y DIFICULTADES

En el apartado anterior hemos mostrado la forma canónica que usaremos en el material de enseñanza para que los alumnos traten de ajustar la gráfica de una función a los puntos obtenidos al realizar una serie de experimentos en clase (véase el capítulo 3 para más detalle). Asimismo, hemos indicado el significado de los parámetros en esa forma canónica, que hace referencia al tipo de transformaciones que permiten obtener la gráfica de una función de la familia partiendo de la más simple de ellas y que, además, será el mismo para todas las familias de funciones expresadas en esta forma canónica. De este modo, tal como indica Puig (2015), al atribuir un significado de transformación a los parámetros, estos son vistos más bien como operadores; $\cdot\, a$, $\cdot\, b$, $+c$ y $+d$, que no como valores en sí. Así pues, siguiendo a Puig, esta consideración de los parámetros como operadores nos permite hacer una distinción entre tipos de parámetros según su comportamiento, por lo que tenemos los parámetros multiplicativos, que se refieren a aquellos relativos a las dilataciones, y los aditivos, que se refieren a los relativos a las translaciones.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que, tal como indica Puig (2015), para algunas casos especiales de familias de funciones expresadas en la forma canónica que estamos usando, se puede atribuir otro tipo de significado a los parámetros en relación con la gráfica (aparte de verlos como operadores). En concreto, Puig habla de que los parámetros también pueden poner de manifiesto o describir características de una gráfica particular dentro de una familia de funciones. Por ejemplo, en el caso de la parábola, los parámetros c y d son las coordenadas del vértice de la parábola. O en el caso de la función lineal, d es la altura a la que la recta corta el eje OY.

Igualmente, en el modelo de competencia hay que tener en cuenta también algunos aspectos en relación con el significado de estos parámetros que puedan suponer una dificultad para los alumnos ya que estos deberán ser competentes (en el sentido habitual de la palabra en el que se utiliza en el currículum) en ellos para poder superar dichos obstáculos. Por ello, pasamos a indicar las dificultades que describe Puig (2015) que provienen de la observación de las actuaciones de los estudiantes en la práctica docente.

La primera de ellas, como explica el autor, está relacionada con el tipo de concepción de los parámetros que acabamos de mencionar, es decir, el hecho de atribuirles un significado de transformación de una función a otra, un carácter dinámico, como denominaremos posteriormente (ver capítulo 6), o el de atribuirles un significado en relación con las características particulares de una familia de funciones concreta. Esto, sucede porque los alumnos no conciben que los parámetros puedan tener los dos significados a la vez, lo que provoca que al atribuir uno de los dos significados a un parámetro no se planteen que pueda tener otro o que al observar de forma experimental que un parámetro tiene doble significado duden de la validez de sus observaciones y acaben descartando uno de ellos.

Otra de las dificultades de las que habla Puig deriva del hecho de que hemos denotado por “translaciones” y “dilataciones” los dos tipos de transformaciones que pueden darse en la forma canónica escogida y que a veces no se conciben como tales. Para el caso de las dilataciones, este término debe entenderse tanto para dilataciones positivas como negativas, esto es, engloba lo que habitualmente se denominan dilataciones y contracciones. Pero además, el hecho de cambiar los valores de los parámetros a o b de positivos a negativos también suele ser causa de errores, puesto que esta transformación suele identificarse más con una simetría que con una dilatación. Por lo que respecta a las traslaciones, término que habitualmente se usa para designar los movimientos positivos en línea recta, debe entenderse de forma que engloba las traslaciones que van en un sentido y en el opuesto cuando estos parámetros toman valores negativos, aunque este término no suele provocar tantas dificultades en los estudiantes puesto que es más común su uso en el lenguaje habitual (aunque tampoco deja de ser causa de errores).

Por último, también pueden aparecer obstáculos relacionados con el hecho de que hay parámetros que, al tomar ciertos valores 1. no aparecen en la expresión algebraica, cosa que no tiene porqué causar mayores dificultades, o 2. hacen que la sintaxis visual de la expresión cambie. Por este motivo, pueden aparecer dificultades a la hora de identificar funciones que en realidad podrían considerarse de una misma familia de funciones debido a que visualmente su expresión algebraica es muy distinta.

2.2. MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Como hemos explicado en el capítulo 1, consideramos el proceso de resolución de problemas de modelización como un caso concreto de resolución de problemas por lo que buscamos que los estudiantes sean competentes tanto en modelización como en resolución de problemas del tipo concreto de modelización. Por ello, Monzó y Puig (2013) definen los elementos que están presentes en un proceso de modelización en el que se modeliza un fenómeno o situación real a través de una función real de variable real mediante una regresión entre las medidas de algunas magnitudes que vienen dadas ya en el enunciado del problema. Estos elementos son los que siguen:

> 1. Un fenómeno que se describe mediante algunas medidas de algunas magnitudes.
>
> 2. Una regresión entre las medidas.
>
> 3. Un tipo de función que se ajusta mediante esa regresión.
>
> 4. Una decisión sobre el tipo de función que se va a ajustar de entre un catálogo de funciones disponibles, basado en:
>
>   4.1. Un conocimiento de propiedades cualitativas del fenómeno.
>
>   4.2. Un conocimiento de propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.
>
> 5. La determinación de la función concreta de ese tipo, que describe los datos obtenidos de ese fenómeno concreto observado.
>
> 6. La expresión de la función en una forma canónica, elegida de forma que los parámetros expresen propiedades del fenómeno que interesa resaltar.
>
> (Puig y Monzó, 2013, p.7)

A partir de estos elementos, los autores definen una relación de competencias necesarias para realizar cualquier proceso de modelización de este tipo y que detallamos a continuación. Por ello, serán necesarias competencias en:

> 1. Propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles.

2. Análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, con respecto al mismo tipo de propiedades.

3. Formas canónicas de los tipos de funciones.

4. Significado de los parámetros en las formas canónicas.

5. Efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas.

6. Transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica.

7. Análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

(Puig y Monzó, 2013, p.7)

De los puntos 1 y 2 se desprende la importancia de los conocimientos cualitativos no solo del fenómeno que se quiere modelizar sino también de los diferentes tipos de funciones ya que permiten tomar decisiones sobre el tipo de función usada cómo modelo y controlar la posterior adecuación de esta para predecir otros valores del fenómeno que no se hayan obtenido experimentalmente. Por otro lado, como comenta Puig (2015), estos conocimientos cualitativos están sólidamente fundados y son eficaces cuanto se sustentan en el conocimiento de las formas canónicas, el significado de los parámetros y el efecto de los cambios de dichos parámetros en las propiedades cualitativas, cuya importancia de ser competente en estos se destaca en los puntos 3, 4 y 5. El punto 6, apunta a la importancia de la competencia en las transformaciones entre formas canónicas de expresiones algebraicas, con el fin de convertir las expresiones en formas canónicas que pongan énfasis en ciertas propiedades de la función y que permitan relacionarla con aspectos del fenómeno. Y, por último, el punto 7 muestra la importancia de realizar un análisis crítico del modelo en relación con la forma en qué describe el fenómeno que modeliza.

Por tanto, los estudiantes deberán poseer una serie de sub-competencias, algunas de las cuales relacionadas entre ellas, para realizar cualquier proceso de modelización, lo que concuerda con la idea de Maaß (2006) expresada en Puig y Monzó (2013) de que la competencia no se limita a “seguir los pasos” de un método. Además, Puig y Monzó añaden que ser competente (en el sentido en el que lo usamos aquí) incluye el tener que ser un buen gestor del proceso de modelización y destacan que “el elemento clave de la buena gestión del proceso es el conocimiento cualitativo de los fenómenos y los modelos funcionales y el uso de ese conocimiento cualitativo para tomar decisiones, controlar y organizar el conjunto del proceso” (Puig y Monzó, 2013, p.8).

2.3. EL USO DE LAS APPS

Como hemos comentado en el capítulo anterior, las competencias pueden verse alteradas por el uso de la tecnología. Por ello, es importante considerar cuidadosamente qué puede ofrecer cada herramienta tecnológica (Arcavi *et al.*, 2017, p.130), cuyo funcionamiento se describe de forma más detallada en el capítulo 3, así como las competencias en el uso de estas. En este caso, las herramientas tecnológicas utilizadas serán tablets dotadas con las apps Video Physics, Graphical Analysis, Desmos y Free Graphing Calculator, apps que, a pesar de no haber sido diseñadas para el propósito específico de nuestra investigación, la forma en la que se usan y sus características se contemplan en nuestro modelo de enseñanza. A continuación, pasamos a describir las características de las apps que los estudiantes deberán tener en cuenta cuanto trabajen en el modelo de enseñanza.

En primer lugar, la app Video Physics exige que, una vez grabados los vídeos de los experimentos, se tomen una serie de referencias en pantalla: se deben fijar unos ejes de coordenadas en uno de los fotogramas del vídeo, marcar una serie de puntos sobre el objeto que se mueve y tomar una medida de referencia e introducir su medida real. Por consiguiente, la app proporciona de forma gráfica la relación entre diferentes variables, entre las que destacamos la variable tiempo, la variable posición del punto respecto al eje OX y la variable posición del punto respecto al eje OY. Por ello, los alumnos deben entender el funcionamiento de la app, esto es, deben de tener en cuenta el significado de las variables obtenidas y el de las gráficas que proporciona esta. Además, deben de tener en cuenta que, aunque el experimento se realiza en la realidad, las imágenes del vídeo están en dos dimensiones, por lo que se deberán tomar todas las referencias sobre elementos de la imagen que estén aproximadamente en el mismo plano para que la app muestre los datos de la forma más precisa posible.

Por lo que respecta a la app Graphical Analysis, esta proporciona una función de ajuste a la nube de puntos obtenidos con Video Physics al seleccionar el nombre de la familia de funciones adecuada de entre los que aparecen en una lista. Por ello, los alumnos no necesitan saber cómo ajustar una función determinada a los puntos pero sí tener conocimientos previos sobre la forma de la gráfica de las diferentes familias de funciones que aparecen en la lista[5]. Además, al enviar los datos de Video Physics a Graphical Analysis, la app muestra una columna por cada una de las variables obtenidas en Video Physics por lo que los alumnos deben saber reconocer qué variables están representadas en cada una de las columnas y cuáles deberán considerar para el estudio de cada uno de los fenómenos, (así como si deben considerar alguna variable extra que no aparece en las columnas o si deben construir otra a partir de los valores dados, como sucede en la lección 3, tal como explicaremos en los siguientes capítulos).

En relación con la app Desmos, es una app que muestra la representación gráfica de funciones y puntos a partir de introducir las expresiones algebraicas y las coordenadas de estos, cosa que hace en una misma pantalla de modo que puede ayudar a favorecer la relación entre los elementos simbólicos y gráficos. En nuestro caso, usamos la app para que los alumnos traten de encontrar la función de ajuste a los puntos obtenidos de los experimentos. No obstante, por la gran cantidad de datos que se obtienen en la mayoría de experimentos, les pedimos que seleccionen solo algunos de ellos. Por este motivo, los alumnos deberán tener en cuenta la forma de la gráfica y la posición de los puntos en relación con esta en el caso de que deseen escoger y representar aquellos que proporcionen una mayor información de la gráfica y, por consecuentemente, obtener una función que ajuste mejor usando esta app.

Por último, los alumnos podrán usar la app Free Graphing Calculator de forma opcional para realizar los cálculos de las imágenes de algunos puntos (entre otras acciones), por lo que deberán conocer el tipo de acciones que deberán realizar en esta para poder obtener la información deseada. En concreto, para calcular las imágenes de una función, los alumnos podrán obtener una tabla de valores para las variables dependiente e independiente usando la app a partir de introducir la expresión algebraica de la función y una instrucción que permita generar los diferentes valores de x formada por un valor numérico fijo para la coordenada x que llamamos n (a partir del cual se generaran el

[5] En realidad, no es del todo necesario conocer la gráfica que corresponde a cada una de las fórmulas que proporciona la app en la lista ya que, como veremos en el análisis de los datos, los alumnos pueden encontrar la función que ajusta a estos probando las diferentes familias de funciones y observando cuál de ellas ajusta. Sin embargo, esto sí que es necesario para elegir la familia de funciones más adecuada cuando la gráfica de más de una de ellas ajusta a los puntos.

resto de valores) y un valor de incremento i (que indicará que la tabla mostrará los valores para las coordenadas x a partir de n de i en i, esto es, mostrará los puntos cuyas coordenadas primeras serán x, $x+i$, $x+2i$, $x+3i$, etc).

Además, de forma más general cabe destacar que también aparecen algunos elementos relativos a la nomenclatura usada por las propias apps que los estudiantes deben conocer para actuar en consecuencia e interpretar las cosas de forma correcta. Por ejemplo, en la app Free Graphing Calculator los alumnos deben usar el signo "^" para expresar una función que tiene un exponente por lo que deberán escribir x^2 para expresar x^2. Algo similar sucede en la app Graphical Analysis, que expresa la función exponencial como "$y = a\,\exp(-cx) + b$" en vez de "$y = ae^{-cx} + b$". Por ello, los alumnos deberán saber reconocer e interpretar el significado de estos comandos o expresiones.

3. El modelo de enseñanza

Un modelo de enseñanza es uno de los elementos de todo MTL que se diseña con la finalidad de que el alumno alcance el nivel de competencia tal como se define en el modelo de competencia (Puig, 2008). Por tanto, el objeto de nuestro modelo de enseñanza será el de contribuir en el desarrollo de las competencias de los estudiantes participantes en la investigación en la comprensión de los conceptos de familia de funciones, forma canónica de una familia de funciones y significado de parámetro de una familia de funciones concreta así cómo en la resolución de problemas, en concreto de modelización, y en el uso de las apps para iPad.

En este capítulo nos ocuparemos de exponer las características del modelo de enseñanza que diseñamos y utilizamos en esta investigación. Para ello, organizaremos el capítulo en dos partes. En la primera de ellas, abordaremos todo aquello relacionado con el diseño del material de enseñanza, partiendo del contexto de la realización de un trabajo previo y explicando la toma de decisiones que nos llevó a reconsiderar dicho diseño como consecuencia de los resultados de este, hasta llegar a la obtención del material que utilizamos en el presente estudio. En la segunda parte presentaremos en detalle todo lo relacionado con el experimento de enseñanza, en concreto con la implementación de la secuencia de enseñanza y la realización de una serie de entrevistas a algunos alumnos seleccionados, así como también la forma en que se llevó a cabo la recogida de datos, el tipo de instrumentos que utilizamos para ello y las dificultades y limitaciones observadas durante dicho experimento.

Antes de abordar el primer apartado cabe destacar que, debido a la doble intención con la que se diseña la secuencia de enseñanza[6], en la propuesta final del material de enseñanza que aquí presentamos incluimos algunas preguntas cuya finalidad es la de mejorar la recopilación de información con fines de investigación. Por tanto, al final de

[6] La intención con la que se diseña el experimento de enseñanza es, por un lado y desde el punto de vista de una investigación, la de recoger información para su posterior análisis y, por el otro, desde el punto de vista de la docencia, la de obtener una secuencia de enseñanza que ayude a los estudiantes en el desarrollo de ciertas competencias.

todo el estudio se presentará dicho material eliminando las preguntas de diagnóstico de su diseño así como incorporando los elementos de mejora teniendo en cuenta los resultados obtenidos, las limitaciones observadas y las dificultades encontradas.

3.1. DISEÑO DEL MATERIAL DE ENSEÑANZA

En el currículo oficial de la Comunidad Valenciana (Conselleria d'Educació, 2007) se especifica que uno de los contenidos abordados durante la etapa de secundaria deberá ser el estudio de las funciones a través del uso de las tecnologías de la información así como la interpretación de fenómenos desde un punto de vista funcional. Es por ello que, nuestro objetivo desde el punto de vista de la enseñanza, será el de diseñar un material para propiciar un incremento de la competencia de los estudiantes en el dominio matemático de las familias de funciones, formas canónicas y significado de los parámetros en dichas formas canónicas a través de la modelización matemática de fenómenos o situaciones reales y que incorpore el uso de iPads.

Como la parte central del material de enseñanza tendrá como finalidad el estudio de fenómenos o situaciones reales a través de diferentes familias de funciones, en la primera sección de este capítulo presentaremos los modelos físicos que permiten describir cada uno de los fenómenos estudiados, ya que esto formará parte de los conocimientos que deberá tener el profesor y servirá para poder justificar el tipo de función que mejor describe dichos fenómenos (3.1.1). A continuación, presentaremos en detalle un estudio previo que realizamos en el cual diseñamos un experimento para estudiar la familia de funciones cuadráticas a partir de la modelización del bote de una pelota con el uso de unas apps concretas para iPad (3.1.2). Después de este estudio exploratorio y teniendo en cuenta las limitaciones observadas, decidimos incorporar nuevos elementos en el diseño anterior así como realizar algunos cambios, cosa que explicaremos en la siguiente parte de la sección, además de mostrar la secuencia de enseñanza describiendo en detalle las características concretas del material y de las apps usadas (3.1.3). Una vez diseñada la primera propuesta de la secuencia de enseñanza, realizamos un estudio piloto con alumnos, que mostramos en la cuarta y última parte de la sección, en la que también indicamos los elementos que modificamos como consecuencia de las observaciones realizadas durante dicho estudio (3.1.4).

3.1.1 MODELOS FÍSICOS

En primer lugar, pasamos a describir los modelos físicos que servirán para justificar el tipo de familia de función que mejor describe cada fenómeno de los que deberán estudiar los alumnos durante la implementación del material de enseñanza y las entrevistas de enseñanza a las que se someteran algunos de los alumnos posteriormente. Estos fenómenos son el bote de una pelota, el alargamiento de un muelle, el enfriamiento de un líquido que se ha calentado previamente hasta una temperatura superior a la del ambiente y se ha dejado enfriar, y, por último, el calentamiento de un cuerpo que se ha enfriado previamente hasta una temperatura inferior a la del ambiente y se ha dejado calentar sin introducir ninguna fuente de calor. Cabe destacar que estos modelos físicos vienen dados por leyes físicas y el modelo matemático, que es el que los alumnos tendrán que tratar de encuentrar ajustando la gráfica de una función a unos puntos mediante la manipulación de una expresión algebraica, no tiene por qué coincidir con este.

3.1.1.1. El bote de una pelota

El primer fenómeno físico que deberán estudiar los alumnos es el bote de la pelota. Este consiste en estudiar la relación entre el tiempo que transcurre y la altura a la que se encuentra una pelota que se deja caer desde una altura determinada en cada instante, pero solo durante el primer bote. Es decir, solo se estudia la relación tiempo-altura desde el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez, después de haberla soltado en dirección vertical, hasta que lo vuelve a tocar.

Desde el punto de vista de la cinemática, podemos considerar que el movimiento de la pelota en el intervalo estudiado es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado puesto que la aceleración de la pelota es constante. En concreto, se trata de un movimiento de tiro vertical ya que es un movimiento hacia arriba en línea recta en el que la velocidad disminuye conforme asciende la pelota hasta que esta se detiene y empieza a caer de vuelta a la superficie. No obstante, este movimiento no es provocado por el lanzamiento de la pelota sino por el propio impulso de esta al rebotar contra el suelo. Por tanto, la fórmula que relaciona el tiempo con la altura vendrá dado mediante la siguiente expresión algebraica:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot \left(t - t_0\right) + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2, \tag{1}$$

donde y y t son las variables altura de la pelota y tiempo y v_0, t_0 y a las constantes que representan la velocidad inicial, el tiempo inicial y la aceleración, que por tratarse de un movimiento en dirección vertical, coincidirá con la aceleración de la gravedad y tendrá signo negativo siempre. Esto es:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_0)^2 \tag{2}$$

Por tanto, la relación entre las variables estudiadas será una función cuadrática.

3.1.1.2. El alargamiento de un muelle

El segundo fenómeno sobre el que deberan trabajar los estudiantes es el del alargamiento de un muelle. En concreto los alumnos deberan estudiar la relación entre el alargamiento de un muelle y el número de canicas introducidas en un vaso que cuelga de este en un intervalo en el que la variabilidad de la elasticidad del muelle pueda considerarse despreciable[7].

Sabemos que todos los materiales sólidos poseen una cierta elasticidad, lo que implica que si se les aplica una pequeña fuerza se comprimen o se estiran, según el sentido de la fuerza. Cuando ésta es débil, la deformación es aproximadamente proporcional a la fuerza aplicada, es decir:

$$F = k \cdot y, \tag{3}$$

donde F es la fuerza, k es la constante de elongación y y el alargamiento del muelle.

Por otro lado, debido a que la única fuerza que actúa sobre el muelle es la del peso que cuelga de este, tenemos que

$$F = F_{peso} = m_T \cdot a = m_T \cdot g = n \cdot m \cdot g, \tag{4}$$

donde n es el número de canicas, m la masa de cada canica y g la aceleración de la gravedad.

[7] Entendemos por alargamiento del muelle o de un objeto elástico similar la longitud que toma este con respecto a la longitud o longitud inicial, que será la medida que va desde la parte más alta del muelle hasta la más baja en línea recta cuando este se encuentra colgado de un soporte y tiene un vaso en el extremo inferior sin haberle introducido ninguna canica.

Entonces, igualando las expresiones (3) y (4) tenemos que $k \cdot y = n \cdot m \cdot g$, donde y y n son las variables y el resto constantes. Por tanto, aislando la variable dependiente obtenemos que el alargamiento del muelle, $y(n)$, provocado por el número de canicas introducidas en el vaso viene dado por la fórmula:

$$y(n) = \frac{m \cdot g}{k} n \qquad (5)$$

Por tanto, la relación entre el número de canicas introducidas en un vaso y el muelle del que cuelga este es lineal en el intervalo en el que la elasticidad del muelle no varía o es despreciable.

3.1.1.3. El enfriamiento de un líquido

El siguiente fenómeno que deberán estudiar los alumnos es el enfriamiento de un líquido. Concretamente, tendrán que estudiar la relación entre el tiempo que pasa y la temperatura a la que se encuentra una cierta cantidad de agua que se ha calentado previamente hasta alcanzar una temperatura significativamente superior a la del ambiente y se ha dejado enfriar libremente.

En primer lugar, sabemos que cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo, en este caso el agua, y el medio ambiente en el que se encuentra no es demasiado grande, el calor transferido por unidad de tiempo hacia el cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente. Esto es

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha S(T - T_a), \qquad (6)$$

donde α es la constante que representa el coeficiente de intercambio de calor y S el área del cuerpo a través de la cuál se transfiere la temperatura.

Por otro lado, sabemos que el calor transferido dQ viene dado por la ecuación:

$$dQ = -m \cdot c \cdot dT, \qquad (7)$$

donde $m = -\rho \cdot V$ es la masa del cuerpo (ρ la densidad y V el volumen) y c el calor específico.

Por tanto, para obtener la ecuación que nos da la variación de temperatura T del agua en función del tiempo tenemos que dividir (7) por dt e igualar (6) y (7) obteniendo así:

$$-\rho \cdot V \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = \ \alpha S(T - T_a), \qquad (8)$$

Por tanto, pasando todas las constantes a la parte derecha de la igualdad, obtenemos la Ley del enfriamiento y calentamiento de Newton que dice que la velocidad con la que se enfría y calienta un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura T y la temperatura ambiente T_a:

$$\frac{dT}{dt} = \ -\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c}(T - T_a), \qquad (9)$$

donde $\frac{\alpha \cdot S}{\rho \cdot V \cdot c}$ es un valor constante que llamaremos k.

Como queremos obtener la relación entre el tiempo y la temperatura del agua en cada instante y teniendo en cuenta que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de variables separables, aislamos en una parte de la igualdad todo lo referente a T y en el otro todo lo referente a t, por lo que obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{dT}{T - T_a} = -kdt, \qquad (10)$$

Entonces, aplicando integrales a ambos lados de la igualdad de la ecuación anterior y considerando como condición inicial que la temperatura inicial, es decir, la temperatura para $t = 0$, es T_0 obtenemos que:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_a} = -k \int_0^t dt \qquad \rightarrow \qquad \ln(T - T_a) - \ln(T_0 - T_a) = -k \cdot t \qquad (11)$$

Ahora, pasamos el logaritmo al otro lado de la igualdad y despejamos T aplicando exponenciales a ambos lados. De esta forma obtenemos la fórmula que permitirá conocer la relación entre el tiempo y la temperatura del agua a cada instante:

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \qquad (12)$$

Por tanto, en términos de funciones, dicha relación no es más que una función exponencial, en la que la diferencia $T_0 - T_a$ será positiva:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \qquad (13)$$

3.1.1.4. El calentamiento de un cuerpo

Por último, durante las entrevistas algunos alumnos deberán estudiar el experimento del calentamiento de un cuerpo. En particular deberán estudiar la relación entre el tiempo transcurrido y la temperatura de un sensor después de haberlo enfriado rociándolo con Cloruro de Etilo y habiéndolo introducido en un recipiente con agua a temperatura ambiente. En este caso podemos asumir que la temperatura del agua es lo que llamamos la temperatura ambiente, ya que es el ambiente donde se introduce el sensor, y la temperatura del cuerpo la del sensor.

A priori podríamos pensar que la ley que explica el comportamiento de dicho fenómeno es la Ley de Intercambio del calor, y no la Ley de Newton para el enfriamiento y el calentamiento de un cuerpo puesto que puede que al introducir el sensor en el agua afecte a la temperatura de esta disminuyéndola. Sin embargo, si consideramos una cantidad suficiente de agua, su temperatura no se verá afectada al introducirle el sensor (cosa que tendremos en cuenta al realizar el experimento), por lo que podemos explicar el comportamiento de dicho fenómeno también mediante la Ley de enfriamiento y calentamiento de Newton. Por tanto, la función exponencial que obtendremos ahora será:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \qquad (14)$$

con la única diferencia de que ahora $T_0 - T_a$ será negativo.

Cabe destacar que resulta interesante el estudio de este fenómeno porque si no se presta la suficiente atención a las características de este podría entenderse que la función que mejor lo describe es una logarítmica, por ser el proceso de calentamiento de un cuerpo el contrario del de enfriamiento y esta función la inversa de la exponencial. Sin embargo, esto carece de sentido si se analiza el fenómeno en detalle puesto que las funciones logarítmicas tienden a infinito cuando la variable x aumenta indefinidamente, cosa que no sucede con el fenómeno estudiado, en el que la función tiende a una asíntota horizontal con valor igual al de la temperatura ambiente (en este caso, la del agua).

3.1.2. ESTUDIO PREVIO

No podemos abordar este apartado sin hacer referencia a los antecedentes de esta investigación ya que son necesarios para poder entender en profundidad las características concretas del diseño del material de enseñanza. Como ya hemos mencionado en el capítulo 1, este trabajo resulta de la evolución del trabajo previo presentado en Ortega (2013) que, a su vez, toma elementos de los trabajos de Monzó, Navarro y Puig (Puig y Monzó, 2013; Monzó, Navarro y Puig, 2016). En dicho trabajo, diseñamos un material de enseñanza para trabajar la familia de funciones cuadrática a partir de la modelización matemática del fenómeno físico del bote de la pelota que hemos presentado en la subsección anterior. Concretamente, se presentaba un material para que los estudiantes trataran en encontrar la función que describía el fenómeno estudiado a partir de datos reales obtenidos de realizar el experimento en clase y analizaran su adecuación respondiendo una serie de preguntas que se administraron en dos fichas por separado y que permitían guiarlos a través del proceso de modelización.

Considerando la distinción que hacen Julie y Mudaly (2007) así como Gravemeijer y Doorman (1999), diseñamos la tarea considerando la modelización como vehículo para trabajar un contenido matemático específico: las características de la familia de funciones cuadrática[8]. Sin embargo, debido a que cómo hemos explicado en el capítulo 1, consideramos el proceso de resolución de problemas de modelización cómo un caso concreto de proceso de resolución de problemas, incluimos elementos que permitirán contribuir al aprendizaje del proceso de modelización y, en consecuencia, al desarrollo de competencias en modelización, entre otros. Por dichos elementos nos referimos a cuestiones que guiarán a los alumnos en la gestión y control del proceso a partir de la realización de un análisis cualitativo del fenómeno estudiado y de las familias de funciones, idea desarrollada en Puig y Monzó (2013) y que se ha estado aplicando en los trabajos de Monzó y de Navarro mencionados previamente. Por ello, al igual que en dichos trabajos, el objetivo principal de este estudio era el de analizar las actuaciones de los estudiantes cuando trabajaban con un modelo de enseñanza en el que se incluía la realización de un análisis cualitativo en la propia enseñanza. Por otro lado, y debido a la dificultad que tienen los estudiantes a la hora de relacionar lo que Blum (2011) llama mundo real[9] y mundo de las matemáticas, también decidimos analizar la influencia del uso del iPad, en concreto de las apps utilizadas, en las decisiones de los alumnos al modelizar el fenómeno estudiado durante las fases de matematización del experimento e interpretación de la función que lo modeliza en relación con éste debido a que es en ambas fases cuando se relacionan las matemáticas con la realidad (Ortega, Puig y Albarracín, en prensa). Además, debido al carácter exploratorio del estudio, estos no fueron los únicos objetivos sino que también quisimos explorar todo aquello relacionado con las actuaciones y las concepciones de los alumnos cuando trabajaban en el entorno informático de los iPads y con un modelo de enseñanza con unas características concretas.

El experimento de enseñanza se llevó a cabo en un grupo natural de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria y nosotros asumimos el rol del profesor encargado de gestionar las sesiones. Durante la primera sesión y antes de empezar con la toma de

[8] En el diseño de las tareas que constituyen el eje principal del presente trabajo, aparte de trabajarse las características de las familias de funciones lineal, cuadrática y exponencial también se trabaja el concepto de parámetro así cómo el de forma canònica.

[9] Entendiendo por mundo real la parte de la realidad en la que no se engloban las matemáticas puesto que consideramos estas como parte de ella.

datos en clase, se les administró una primera ficha (primera ficha del Anexo 1) para que los estudiantes realizaran un análisis cualitativo del fenómeno respondiendo una serie de preguntas sobre cómo pensaban que sería el fenómeno descrito en el enunciado con la finalidad de indagar sobre las ideas previas de los alumnos y de servir de guía en el proceso de modelización. En concreto, les pedíamos que realizaran un esbozo de la curva que pensaban que describiría el salto de la pelota y, a continuación, que eligieran la familia de funciones que pensaban que describiría mejor la curva dada en su expresión algebraica de entre todas las que aparecían en una lista para, finalmente, dar una justificación.

Después de esto, tenían que, trabajando por parejas, realizar el fenómeno descrito mediante un experimento en clase y, utilizando la app Video Physics de Vernier para iPad, realizar una grabación en vídeo de dicho experimento. Después de la grabación, dicha app les permitía obtener una nube de puntos al realizar una serie de operaciones sobre los fotogramas del vídeo. En particular, la app divide el vídeo en varios fotogramas, cosa que permite fijar unos ejes de coordenadas en uno de los fotogramas cualquiera de la grabación, tomar una medida de referencia en la realidad e introducírsela a la aplicación para que ésta use este dato como referencia para calcular cualquier otra medida y, finalmente, marcar sobre la pelota una serie de puntos en los distintos fotogramas del vídeo. La app produce entonces una gráfica de puntos que muestra la relación entre el tiempo y la altura. Ahora bien, para poder encontrar la función que modelizaba el experimento realizado era necesario obtener las coordenadas de los puntos que mostraban la trayectoria de la pelota, cosa que se hacía introduciendo una dirección de correo electrónico en la app de forma que esta enviaba un archivo con los datos. Debido a que la forma en que se presentaban los datos en el archivo no permitía interpretar a primera vista cuales eran las coordenadas de los puntos ya que mostraba los números en forma de columnas, no de tabla, decidimos realizar este proceso en una segunda sesión y encargarnos nosotros mismos de transformar los datos obtenidos en una tabla con dos columnas de forma que la primera mostraba las coordenadas del tiempo y la segunda las de la altura de la pelota. Cabe destacar que les facilitamos una hoja con las instrucciones de uso de cada app para que cada pareja pudiera trabajar a su ritmo (ver hojas de instrucciones de las apps en el Anexo 2).

De este modo, al inicio de la segunda sesión, les facilitamos una hoja con los datos de las coordenadas de los puntos ya en un formato más adecuado para que pudieran continuar trabajando con estos y les facilitamos otra hoja con el resto de preguntas con la intención de que los alumnos estudiaran el experimento realizado con mayor profundidad eligiendo la función que mejor lo describiera y comprobando su adecuación al hacerles reflexionar sobre aspectos concretos de este (ver ficha de actividades parte 2 en el Anexo 1). Concretamente, les proponíamos una primera pregunta donde estos, utilizando la aplicación Data Analysis para iPad, tenían que introducir las coordenadas de algunos de los puntos en la app y elegir la función de regresión que mejor ajustara a estos. Después, se les proponía una pregunta para que se dieran cuenta de que la función de regresión, que en este caso era una parábola, no representaba a la función que modelizaba el experimento en todo su dominio, sino solamente en el intervalo en el que se estaba estudiando y para el que se había definido: desde que la pelota golpea el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a golpear. Es decir, se pretendía ver si los estudiantes eran capaces de darse cuenta de que la función no servía para predecir otros valores de esta fuera del dominio en el que se había definido. Finalmente, les propusimos una última pregunta con varios apartados para ver si eran capaces de interpretar características concretas de la función obtenida en relación con el experimento, para lo que utilizaron la app Free Graphic Calculator, cuya función es similar a la de una calculadora gráfica.

El experimento de enseñanza concluía con la realización de un estudio de casos en el que se realizaron entrevistas a algunas de las parejas, con la intención de analizar el origen de sus respuestas y conocer cuáles eran sus concepciones con mayor profundidad, así como también con la intención de guiarlos para que fueran capaces de reflexionar y modificar algunas de las ideas erróneas que presentaban.

Por ello, después de analizar los datos obtenidos pudimos observar que el análisis cualitativo previo del fenómeno estudiado y de las familias de funciones era clave en la gestión y el control del proceso de modelización ya que los alumnos se basaban en estos tanto para tomar decisiones como para justificar sus respuestas. En particular observamos que era clave en dos momentos: a la hora de elegir la función usada como modelo y de interpretarla en términos del experimento representado (Ortega y Puig, 2017).

Además, en relación con el segundo de los objetivos enunciados, pudimos observar que las características de la herramienta tecnológica usada en el estudio, concretamente la app Video Physics, requería que los estudiantes tomaran referencias durante la matematización, referencias que venían dadas por el lugar donde fijaran el eje de las x y el lugar donde marcaran los puntos en relación con la pelota y que indicaba su posición en cada instante. Por ello, la función concreta que eligieron dependía de estos factores y, por consiguiente, la interpretación que deberían hacer los estudiantes de esta *a posteriori* en relación con el experimento tendría que ser coherente con las referencias elegidas. Sin embargo, tal como pudimos observar después de analizar los datos, a pesar de que la mayoría de los estudiantes no eligen el suelo como referencia durante la matematización con la app, durante las preguntas que les hacemos en la segunda ficha relativas a la interpretación de la función en relación con el experimento realizado revelan incoherencias ya que todos ellos suponen que el suelo es la referencia, probablemente debido a que habitualmente es la referencia que se toma. Los resultados de este estudio se pueden consultar en Ortega (2013) y en Ortega *et al.* (en prensa).

Finalmente, encontramos otros aspectos que vale la pena destacar ya que algunos de ellos nos sirvieron para incorporar modificaciones en el diseño del material de enseñanza. En primer lugar, pudimos observar que durante la realización de la primera ficha los estudiantes trataban de dotar de significado los parámetros de las familias de funciones en relación con la gráfica. Esto es, trataban de averiguar si el valor que podría tomar dicho parámetro indicaba un movimiento concreto de una función sobre la gráfica o tenía alguna relación con la posición en la que se encontraba. Además, con respecto también a los parámetros pudimos ver cómo para los estudiantes no era necesario dotarlos de significado en relación con la gráfica para poder determinar la función que mejor ajustaba a la nube de puntos cuando trabajaban en la app Data Analysis. Por otro lado, la mayoría de estudiantes presentaban lo que llamamos una concepción absoluta del tiempo, es decir, consideraban que el tiempo era cero justo cuando la pelota tocaba el suelo ya que esbozaban una curva en el ítem 1 partiendo del origen de coordenadas, obviando que el fenómeno se presentaba dentro de un contexto más amplio. Asimismo, del análisis del estudio de grupos y de las entrevistas también deducimos que los alumnos consideraban que la altura del suelo valía cero siempre, cosa que cuando pasaban a trabajar con sus datos dependía de donde fijaran las referencias en la app Video Physics.

Después de analizar los datos, observamos algunos elementos del modelo de enseñanza que pensamos que podrían ser mejorables en cuanto al diseño o la implementación del material de enseñanza y que presentamos a continuación.

En primer lugar, pudimos encontrar un vacío en cuanto a la información que disponíamos sobre los conocimientos previos de los estudiantes. También notamos que estos, o bien no justificaban sus respuestas, probablemente debido a que no se lo pedíamos explícitamente, o bien no explicaban suficientemente sus respuestas, a pesar de que tenían espacio suficiente y les indicábamos en la propia pregunta que podrían responder en la parte trasera de la hoja (como podemos ver en los ítems 3, 6 y 7 de las Fichas de Actividades en el Anexo 1).

Por otro lado, la forma de obtener las coordenadas de los puntos de la nube de puntos proporcionada por Video Physics después de realizar las acciones antes mencionadas no era demasiado práctica ya que esto causaba que los alumnos no pudieran trabajar a su propio ritmo en la segunda ficha hasta que no les facilitáramos nosotros los datos en un formato más legible, cosa que requería que tuviera que hacerse en la siguiente sesión.

Por último, en cuanto al significado de los parámetros, pensamos que sería conveniente encontrar una forma de que los alumnos tuvieran que dotar de sentido los valores de los parámetros en relación con la gráfica al tratar de encontrar la fórmula de la función de ajuste a los puntos ya que por cómo se planteaba en este estudio no les era necesario.

3.1.3. CARACTERÍSTICAS DEL DISEÑO DEL MATERIAL DE ENSEÑANZA

Las características genéricas del diseño del material de enseñanza que utilizaremos en este trabajo son similares a las del estudio exploratorio puesto que también usamos situaciones de modelización matemática para trabajar algunas familias de funciones, formas canónicas y el significado de los parámetros ya que estas situaciones son un lugar idóneo para el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos (Puig, 2013). Además, en el material de enseñanza se incluye el uso de tabletas, por su utilidad para tomar datos reales y trabajar con estos, así como también la realización de un análisis cualitativo, por su importancia en la gestión y el control del proceso de resolución de problemas de modelización (Puig y Monzó, 2013), elemento que incorporaremos en el propio material antes de la realización de cada experimento.

Tomamos la decisión de diseñar el material de enseñanza para el 4º curso de la E.S.O debido a que, tal como se refleja en la parte del currículo oficial de la Comunidad Valenciana (Conselleria d'Educació, 2007) relativa al bloque de funciones, en este curso los alumnos ya conocían un abanico lo suficientemente grande de familias de funciones sabiendo no solo identificarlas sino relacionar sus características propias en cualquiera de sus representaciones. No obstante, por motivos que explicaremos más adelante, lo implementamos al inicio de curso de 1º de bachillerato.

En este caso, diseñamos un material de enseñanza para el estudio de tres fenómenos: el bote de una pelota, el alargamiento de un muelle y el enfriamiento de un cuerpo. Asimismo, a diferencia de lo que hicimos en el estudio exploratorio, en las sesiones posteriores al trabajo en grupo, se realizaron entrevistas con enseñanza en las que unos cuantos alumnos estudiaron un cuarto fenómeno: el calentamiento de un cuerpo.

Como consecuencia tanto de la reflexión sobre las observaciones y los resultados que se desprenden del estudio previo como de la necesidad de crear un material con el que se pudiera realizar una mayor y más exhaustiva recogida de datos, decidimos realizar una serie de modificaciones con respecto al modelo de enseñanza presentado en el estudio previo.

En primer lugar, la falta de información disponible sobre los conocimientos previos de los alumnos nos llevó a diseñar un cuestionario previo para tener más información sobre las ideas previas de los estudiantes sobre los conceptos y procedimientos que se abordarían en el propio experimento de enseñanza. Además, como novedad con respecto al estudio previo y debido a la falta de justificación de las respuestas dadas por los estudiantes, incorporamos en el propio material de enseñanza lo que llamamos preguntas de diagnóstico, cuya finalidad era, no tanto la de guiar o hacer que los estudiantes reflexionaran sobre aspectos del proceso de modelización, sino la de obtener información por parte de la investigadora sobre los motivos por los cuales habían dado cada una de sus respuestas. Asimismo, como explicaremos posteriormente en 3.2.4, durante el trabajo en el aula, realizamos grabaciones de voz de cada una de las parejas para conocer con más detalle el proceso por el cuál daban cada una de las respuestas. Igualmente, con la intención de que el espacio disponible para justificar cada una de las respuestas no condicionara estas y para evitar que los alumnos pudieran ver las preguntas posteriores o modificar las respuestas que ya habían dado (como pasó en alguno de los casos que participaron en el estudio previo, lo que dificultó el posterior análisis de los datos), decidimos escribir cada pregunta en una hoja diferente para poder administrarlas por separado y recoger cada una ellas conforme iban respondiéndolas.

En relación con las apps usadas durante el experimento, también incorporamos una serie de cambios. Primeramente decidimos usar la app Graphical Analysis de Vernier, que permitía enviar los datos de Video Physics a dicha app directamente mediante un archivo Excel en formato .xlsx. Esta app tenía características semejantes a la usada en el experimento anterior, Data Analysis, en cuanto a que proporcionaba el modelo que ajustaba a los puntos directamente al seleccionar la expresión algebraica de una familia de funciones de entre las de una lista dada. Por ello, decidimos que los alumnos usaran dicha app (Graphical Analysis) para conocer las coordenadas de los puntos pero después trataran de encontrar la función que ajustaba a estos por ellos mismos copiando algunos puntos a otra app, Desmos, y tratando de encontrar la fórmula que ajustara a estos al relacionar los cambios sobre las fórmulas con las transformaciones sobre la gráfica. Elegimos dicha app debido a que nos pareció que tenía un *software* intuitivo y sencillo de usar que, además (como indicamos en el capítulo 2), tenía la característica de que se podían observar en una misma pantalla las coordenadas de los puntos, la expresión algebraica y la gráfica, con lo que posibilitaría a los alumnos observar la relación entre estos. Asimismo, esta app también permitía hacer cambios sobre la expresión algebraica una vez introducida, con lo que evitaríamos que los alumnos tuvieran que reescribirla de nuevo cada vez que quisieran cambiar el valor de un parámetro, reduciendo así el tiempo dedicado a esto.[10] Además, aprovechando el hecho de que Graphical Analysis proporcionaba la función de regresión de los puntos y los alumnos obtendrían otra función usando Desmos, incluimos una pregunta en la que les pedíamos que compararan ambas funciones (expresadas en formas canónicas distintas), basándonos en el elemento de la competencia del que hablan Puig y Monzó (2013, p.7) que se refiere a “transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma

[10] Aunque esto tenía la desventaja de que no podríamos obtener una lista de las acciones que realizaban los alumnos en cada momento, desventaja que quedaría suplida grabando la pantalla de cada iPad con una app que nos permitiría obtener un vídeo de todo el proceso (cosa que finalmente no se pudo hacer).

canónica". Con ello, realizarían las transformaciones con una finalidad: la de comparar ambas funciones.

Pasamos a explicar ahora las características concretas del material de enseñanza que diseñamos. Este constaba de un cuestionario inicial (apartado 3.1.3.1) y unas fichas para el estudio de los tres fenómenos (apartado 3.1.3.2): el del bote de una pelota, el del alargamiento de un muelle y el del enfriamiento de un cuerpo. Para la realización de las entrevistas, también diseñamos unas fichas, similares a las anteriores pero con un menor número de preguntas (apartado 3.1.3.3).

3.1.3.1. El cuestionario inicial

Las preguntas relativas al cuestionario inicial se pueden consultar en el Anexo 4. Diseñamos dicho cuestionario con la finalidad de conocer y tener registrados los conocimientos previos de los estudiantes relativos a los aspectos que se abordarían en el estudio de los experimentos concretos que son los conceptos de familia de funciones elementales, el significado de los parámetros de unas expresiones algebraicas concretas en relación a la gráfica de la función y las transformaciones algebraicas entre formas canónicas. Concretamente, este cuestionario inicial constaba de 7 ítems que podemos dividir en tres partes. La primera constaba de preguntas relativas a familias de funciones (ítems 1, 2, 3, 4 y 5), la segunda de preguntas cuya finalidad era conocer si los alumnos eran capaces de atribuir un significado gráficamente a los parámetros de una función dada en una forma canónica concreta (ítems 6 y 7) y la tercera parte contenía una pregunta relacionada con las transformaciones algebraicas entre formas canónicas (ítem 8).

<u>Parte 1. Familias de funciones</u>

En el primer ítem se pretende conocer qué familias de funciones, dadas en forma de expresiones algebraicas, saben identificar los estudiantes. Para ello, se muestra una tabla con una lista de familias de funciones y, justo a la derecha de cada una de ellas, aparece una columna para que los alumnos marquen una cruz en "sí" o en "no" dependiendo de si la conocen o no. Las familias que elegimos para que aparecieran en la tabla fueron las que da la app Graphical Analysis (funciones a, b, c, g, h, i, j, k y m), app que tendrían que usar los alumnos posteriormente para encontrar la función que modelizaría el experimento estudiado haciendo uso precisamente de estas familias. Además, como queríamos que, en vez de encontrar la fórmula de la función directamente con la app, primero trataran de encontrarla ajustando la gráfica a los puntos obteniendo así una función del tipo $y = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$, decidimos incorporar a la tabla algunas funciones dadas en dicha forma canónica[11]: $y = a \cdot (x - c)^2 + d$ y $y = a \cdot log(x - c) + b$ (fórmulas d) y n)). Por otro lado, añadimos una función polinómica de grado 3, tanto en la forma canónica polinómica como en la otra, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $y = a \cdot (x - c)^3 + d$, así como las funciones raíz cuadrada y seno dadas en dicha forma canónica también, $y = a \cdot \sqrt{x - c} + b$ y $y = a \cdot sin(x - c) + b$ (funciones e), f), o) y p)). Por este motivo y por el hecho de que no se especifica qué valores pueden tomar los parámetros de las distintas familias, es posible concebir unas familias como subfamilias de otras, como en el caso de $y = ax + b$ y $y = ax$ o $y = a/x$, $y = a/x^2$ y $y = a/x^n + b$, por ejemplo. De este ítem podremos obtener información sobre qué familias de funciones conocen en general pero también si son capaces de reconocer algunas de

[11] Cabe destacar que usamos la notación para los parámetros que aparece en las fichas, que no hace referencia al significado explicado en 2.1.2.

ellas en una forma canónica determinada ya que puede que reconozcan una función dada en una forma canónica pero no en otra.

Con respecto a los ítems 2, 3 y 4, se pretende ver si los alumnos son capaces de asociar un fenómeno, situación o problema real a una familia funcional. Para ello, se plantean varias preguntas en la que se busca ver si dada una gráfica o una fórmula, son capaces de describir una situación real y qué tipo de situación describen (ítem 2); dado un enunciado, si saben elegir qué gráfica representa la relación descrita (ítem 3), y dado un enunciado, si saben elegir qué fórmula lo describe (ítem 4) En concreto, en el ítem 2 les damos la gráfica de una parábola con parámetro a negativo y la de una exponencial decreciente, así como también una función lineal en su expresión algebraica, $y = 5x + 15$, por lo que se trata de una pregunta más bien abierta con múltiples soluciones. Por lo que respecta al ítem 3 que consta de tres apartados, les proporcionamos un enunciado para que elijan cuál de las gráficas es la que describiría el fenómeno mejor. Las gráficas que proporcionamos son de características similares, por lo que dependiendo de qué factores o variables consideren los estudiantes podrán determinar cuál es la correcta. Por ejemplo, la respuesta al apartado a) sería la gráfica de una función lineal y creciente ya que es la función que describe lo que cobraría un taxista que, cuando entra el cliente al taxi tiene una tarifa base y va aumentando de precio de forma proporcional según vaya pasando el tiempo. Por otro lado, en el apartado b), la gráfica correcta sería la c) ya que describe la relación entre la altura de un carrete de una noria en relación con el tiempo, por lo que la función no puede tener picos. Por último, la del apartado c) sería la opción d) ya que es la que representa un movimiento parabólico, que es lo que describe la relación tiempo-altura de una pelota cuando se lanza hacia arriba. En cuanto al ítem 4, consta de dos apartados en los que damos dos enunciados y los alumnos tienen que escoger cuál de las 4 fórmulas representa el fenómeno o situación real descrita. En primer lugar, la respuesta al ítem a) sería la opción d) ya que es la única que es una función constante, función que describe la relación entre la velocidad a la que camina Joan y el tiempo transcurrido. La respuesta del apartado b) sería la a), que es una proporcional inversa ya que cuanto más ancho sea el diámetro, menos tiempo tardará en llenarse la piscina.

Por último, en el ítem 5 pretendemos ver si, dadas unas gráficas, los estudiantes son capaces de relacionarlas con unas fórmulas dadas. Las respuestas, considerando a distinto de cero siempre, son 1:l); 2: a), c); 3: b), h), k); 4: b), h), k); 5: d); 6: e), n), o); 7: f), m); 8: g); 9: j); 10: i), p); por lo que cabe destacar que más de una gráfica puede relacionarse con más de una fórmula y viceversa. Para poder responder la pregunta correctamente los estudiantes tienen que tener en cuenta que los valores que pueden tomar los parámetros pueden ser reales y, además, tienen que intentar ver las propiedades de la gráfica en general o intentar dar varios valores concretos a cada parámetro, no uno solo porque podrían dejarse gráficas sin identificar.

Parte 2. Significado de los parámetros

En el ítem 6 se pretende que los estudiantes digan qué tipos de valores numéricos tienen que tomar los parámetros de las funciones (si tienen que ser positivos, negativos o cero), para que representen cada una de las gráficas anteriores. También les pedimos que especifiquen los valores concretos en caso de que los sepan, para lo que se tienen que fijar en la posición, la forma y la orientación de las gráficas.

En el ítem 7 les damos la gráfica de una función y tres expresiones algebraicas de la misma pero en formas canónicas distintas: una en forma polinómica ($y = 2x^2 - 12x + 16$), otra en la forma canónica que permite ver los cambios sobre la gráfica ($y =

$2(x-3)^2-2)$ y, por último, en forma de producto de x menos sus raíces ($y=2(x-2)(x-4)$). Les pedimos que expliquen la relación de estas con la gráfica para ver si son capaces de darse cuenta de que: los parámetros de la primera no tiene una relación evidente con la gráfica, solo que al ser el coeficiente de x^2 positivo, la orientación de esta es cóncava; en la segunda sucede lo mismo pero el resto de parámetros sí que tienen un significado concreto ya que el valor 3 indica que la gráfica está desplazada 3 unidades hacia la izquierda en comparación con la función $y=x^2$ y el 2 que está desplazada 2 unidades hacia arriba; y por último, la última indica los puntos de corte de la gráfica en el eje de las x.

Parte 3. Transformaciones algebraicas

Para finalizar, incluimos un último ítem relativo a los cambios que deberán realizar los estudiantes posteriormente para la función cuadrática de una forma canónica a otra. Esta consta de tres apartados que, supuestamente, van de menor a mayor dificultad. En el primero de ellos les pedimos que transformen la expresión x^2+6x+9 en un cuadrado perfecto, cosa que se puede hacer de forma directa sabiendo que la ecuación $x^2+6x+9=0$ tiene dos raíces que son 3. La respuesta al segundo de los apartados también es directa pero ahora las raíces de la ecuación $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ son 0,5, por lo que puede resultarles más complicado. Por último, les pedimos que transformen la expresión $y=2x^2+4x-6$ en otra equivalente de la forma $y=a(x-b)^2+c$ pero, a diferencia de antes, c ahora es distinto de cero, por lo que tienen que proceder, sacando factor común 2 e intentando formar un cuadrado perfecto sumando y restando algún número para acabar obteniendo la expresión $y=2(x+1)^2-8$.

3.1.3.2. Las fichas para el estudio de los experimentos

En primer lugar, los estudiantes trabajaron los fenómenos que antes hemos mencionado por varios motivos. Elegimos fenómenos clásicos de la física porque de esta forma la fórmula de la función que describiría los experimentos estaría basada en una fórmula conocida (debido a que habría sido bien fundamentada teóricamente) y porque buscábamos que pudieran modelizarse mediante familias de funciones elementales, y no mediante conjuntos de estas u otras curvas. Asimismo, debido a que la finalidad del material que diseñamos era que pudiera usarse como material de enseñanza en las aulas, tratamos de minimizar los costes económicos que pudieran derivarse de la compra de apps o sensores extra ya que Vernier dispone de una amplia gama de dispositivos que hubieran permitido realizar la toma de otros datos (aceleración, luminosidad, presión...) o la toma de datos de otro modo distinto (por ejemplo, la toma de datos del experimento del muelle se podría haber hecho usando el sensor Motion Detector en vez de como se plantea en este estudio), pero cuyos costes hubieran sido mucho más elevados. Además, escogimos estos fenómenos en concreto ya que habían sido estudiados previamente con el uso de calculadoras gráficas u ordenadores (usando *softwares* como por ejemplo GeoGebra) y modelos de enseñanza similares (como los de Puig y Monzó, 2013 o Navarro, Puig y Monzó, 2015) para ver cuáles eran las actuaciones de los estudiantes cuando los trabajaban mediante el uso de una nueva herramienta: las tabletas.

En concreto, escogimos el experimento del bote de la pelota y no otro que representara un tiro parabólico, además de porque ya lo habíamos estudiado en el trabajo previo, siguiendo las recomendaciones de Janvier (1978) que afirma que para evitar que los alumnos asocien la forma de la gráfica de una función con la trayectoria que representa, hay que proponer, además de fenómenos en los que esto suceda, también del tipo en que la trayectoria no coincida con la forma de la gráfica. Por otro lado, elegimos el experimento del alargamiento de un muelle porque, era fácilmente realizable en el aula, podía hacerse con la app Video Physics sin tener que comprar ningún sensor extra y porque, aunque es un experimente que ya ha sido ampliamente estudiado en otros trabajos (por ejemplo en Búa-Ares, Fernández-Blanco y Salinas, 2015) no se había estudiado previamente con iPads. Por último, en cuanto a la tarea del enfriamiento de un cuerpo, fue elegida porque, aparte de que haría posible que los alumnos estudiaran una función como la exponencial, no era un experimento complicado de realizar en clase y, además, ya había sido estudiado con otros dispositivos tecnológicos (por ejemplo en Puig y Monzó, 2013).

Pasamos ahora a explicar el diseño de las fichas para el estudio de los tres experimentos que se estudiarían en las sesiones de clase posteriormente, que se pueden consultar en los Anexos 5, 6 y 7. Cabe destacar que los ítems relativos a cada uno de los experimentos eran similares y podemos distinguir tres partes dependiendo del objetivo general con el que se plantean a los alumnos. La primera parte estaba dedicada a realizar un análisis cualitativo previo de los fenómenos, de las familias de funciones y del significado de los parámetros (ítems 1, 2, y 3); análisis que se llevaría a cabo antes de realizar el experimento en clase y hacer la toma de datos. La segunda parte estaba formada por dos ítems que permitirían guiar a los estudiantes en la realización del experimento y en la toma de datos y, al mismo tiempo, les harían reflexionar sobre algunos de los aspectos involucrados en este proceso (ítems 4 y 5). Finalmente, la tercera y última parte estaba formada por cuatro ítems que servirían para guiar a los estudiantes hasta encontrar la función de ajuste con Desmos, compararla con la obtenida en la app Graphical Analysis, estudiar el dominio de validez de la función e interpretarla en relación con los datos del experimento (ítems 6, 7, 8 y 9). Explicaremos cada parte en detalle haciendo referencia a uno de los experimentos pero, en caso de que las preguntas o instrucciones no sean exactamente iguales, las explicaremos haciendo referencia a cada uno de los experimentos.

<u>Parte 1. Análisis cualitativo de los fenómenos, de las familias de funciones y del significado de los parámetros</u>

En esta primera parte se plantea el enunciado de la situación o fenómeno real que los alumnos tenían que estudiar. Este se plantea de forma general, es decir, sin dar datos concretos, ya que los tomarían posteriormente al realizar el experimento, y redactado de modo que sea posible que los alumnos realicen interpretaciones distintas de este. Por ejemplo, en el enunciado del fenómeno del bote de la pelota se explica que la pelota se deja caer desde una cierta altura y no se dice cuando termina, aunque se especifique que solo tendrán que estudiarlo desde el primer bote de la pelota hasta el segundo. Lo mismo pasa con el resto de experimentos. Esto se hace con la intención de ver cómo consideran el fenómeno en sí, sin restricciones, aunque solo tengan que analizar una parte.

A continuación se añaden una serie de ítems con la finalidad de que los estudiantes analicen cualitativamente el fenómeno y las familias de funciones. Por lo que respecta al primer ítem, y a diferencia de lo que pasaba en el estudio anterior, se plantea en forma de pregunta más abierta para ver si son capaces de darse cuenta de que lo que se presenta en el enunciado es una función. En el primer apartado les pedimos que describan con sus propias palabras cómo creen que será la relación entre las dos variables estudiadas, con la finalidad de ver si ya conciben qué tipo de relación será (proporcional, cuadrática, etc.), mientras que en el segundo les pedimos que dibujen dicha relación, para ver si se dan cuenta de que la mejor forma de dibujar dicha relación es a partir de una gráfica.

El segundo ítem consta de cuatro apartados. Al igual que en el ítem 1 del estudio previo les pedimos que esbocen en un sistema de ejes coordenados la gráfica de la función. La diferencia es que en este caso no les damos los ejes dibujados para no restringir las posibilidades de que la dibujen en cualquier posición respecto de los ejes. Además, añadimos tres apartados más para que expliquen las características de la gráfica. En b) les preguntamos por qué dibujan la gráfica con esa forma concreta (parábola, recta...); en c) qué representa cada uno de les ejes, qué unidades de medida piensan que sería más conveniente usar y por qué (para saber cómo escalarían los ejes teniendo en cuenta el enunciado del fenómeno), y en d), por qué han representado la gráfica en esa posición concreta con respecto a los ejes y no lo han hecho en otra posición o cuadrante, o si piensan que podría representarse en otras posiciones aunque no lo hayan hecho así.

Por último, el ítem 3 se plantea siguiendo la línea del ítem 2 del estudio anterior pero ahora en vez de preguntarles a qué familia de funciones dadas en su expresión algebraica pertenece la gráfica de la función, les facilitamos las fórmulas en una tabla con la opción de qué marquen las familias de funciones que ajustan mejor con el objetivo de que tengan la posibilidad de elegir más de una, si es el caso (ya que aparecen dos funciones lineales, dos cuadráticas pero con distinta forma canónica, etc.). Como antes, las fórmulas que aparecen son las de la app Graphical Analysis pero añadimos la función cuadrática en otra forma canónica distinta, $y = a(x - b)^2 + c$, ya que es la que deberán usar en el experimento de la pelota para hacer el ajuste. Además, se plantean dos apartados más. En b) les pedimos que expliquen por qué han elegido la familia de funciones del apartado anterior y en c) que indiquen qué letras de la función son parámetros y traten de darles algún significado en relación con la gráfica que han representado.

Parte 2. Realización del experimento y toma y procesamiento de datos

Esta segunda parte difiere de experimento a experimento debido a que planteamos dos tipos de experimentos según cómo se recojan los datos: aquellos cuyos datos se recogen mediante la grabación de un vídeo con la app Video Physics (el del bote de la pelota y el del alargamiento del muelle) y aquellos cuyos datos se toman directamente mediante el uso de sensores y la app Graphical Analysis (el del enfriamiento de un líquido[12]). Por tanto, explicaremos las características de los ítems según cada uno de los experimentos.

Antes que nada, cabe destacar que, tanto en esta parte como en la tercera, prescindimos de las hojas de instrucciones que habíamos usado en el estudio previo para explicar el funcionamiento de las apps ya que decidimos que explicaríamos el funcionamiento de estas de forma oral en el aula. No obstante, sí que se incluyeron instrucciones en las propias preguntas de cómo usarlas.

En el primero de los ítems, el ítem 4, para el caso del bote de la pelota se dan instrucciones de las acciones que tienen que realizar para obtener los datos de la realidad después de haber grabado un vídeo del experimento realizado en clase. Estas son: marcar los puntos que muestran la trayectoria de la pelota en los diferentes fotogramas en los que la app divide el vídeo (apartado a)), fijar los ejes de coordenadas en uno de los fotogramas del vídeo (apartado b)) y tomar una medida de referencia en la realidad e introducírsela a la app para que muestre las medidas reales (apartado c)). Esto nos permitiría conocer qué referencias toman y, por tanto, determinar si, a diferencia del estudio previo, eligen el suelo o no. Además, en el apartado a) les preguntamos en qué

[12] También el del calentamiento del sensor, aunque en este caso no lo explicamos aquí ya que este experimento se hará durante las entrevistas y las preguntas se formularán de forma oral.

intervalo tienen que estudiar la trayectoria, para hacer énfasis en el hecho de que solo es durante el primer bote y no marquen los puntos desde el momento en que se deja caer la pelota. Al mismo tiempo que realizan todas estas acciones, les pedimos que escriban lo que hacen, que justifiquen sus respuestas y realicen varias capturas de pantalla con la finalidad de que podamos ver qué han hecho posteriormente. Una vez contestadas las preguntas y realizadas las acciones pertinentes, se les pide que pulsen el botón de representación de gráficas de forma que la app transforma sus acciones en diferentes gráficas en las que se representa las relaciones entre las variables posición de puntos respecto a eje OX, posición de puntos respecto a eje OY y tiempo transcurrido. Además, de estas, muestra también dos gráficas relativas a las velocidades. Les indicamos que habrá una gráfica que muestre la relación entre el tiempo y la altura. A continuación, en el ítem 5 se les indica que deben enviar los datos a la app Graphical Analysis para obtener las coordenadas numéricas de los puntos y se les explica cómo hacerlo. Esta app muestra las coordenadas de los puntos gráficamente dando la posibilidad de escoger una familia de funciones de una lista y facilitando la gráfica y la fórmula de la función concreta del ajuste de esta familia a los puntos (opción que tendrán que usar más adelante). Además, genera un archivo de tipo ".xlsx" (formato Excel) de forma que en cada columna se representan los valores de cada variable. En este caso, el archivo Excel mostrará cinco columnas, una por cada variable de Video Physics (tiempo, posición de puntos respecto a eje OX, la derivada de esta, posición de puntos respecto a eje OY y también su derivada), por lo que en el apartado a) se les formula una pregunta para que se den cuenta de ello dando instrucciones para que descarten las columnas innecesarias y se queden solamente con las columnas que representan el tiempo y la altura de la pelota y, por tanto, obtener así las coordenadas de los puntos. Por otro lado, en el apartado b) les pedimos que elijan 5 puntos y los copien a la app Desmos para tratar de ajustar una función a estos, por lo que si quieren conseguir un buen ajuste, deben de elegirlos de forma consciente no aleatoriamente. Además, les preguntamos también por qué eligen los puntos que han elegido exactamente para ver en qué se han basado para hacerlo, cosa que no hacíamos en el estudio previo.

En el caso del muelle, aparte de dar instrucciones sobre las acciones que tienen que realizar en el ítem 4, también se les indica cómo grabar el experimento y, a diferencia del bote de la pelota que el experimento está acotado por naturaleza, ya que lo tenían que estudiar desde que la pelota golpeaba el suelo hasta que lo volvía a golpear, en este les indicaríamos que empezaran a grabar el vídeo en el momento en el que no habían introducido ninguna canica hasta haber introducido 8. Como antes, les indicamos que marquen los puntos que muestran la altura a la que se encuentra el vaso donde crean conveniente, que fijen los ejes de coordenadas y que tomen una medida de referencia, justificando sus respuestas y haciendo capturas de pantalla después de cada acción realizada. Cabe destacar que, como lo que les pedimos a los estudiantes es que calculen el alargamiento del muelle en relación con la cantidad de canicas, dependiendo de dónde fijen el eje y de dónde marquen los puntos obtendrán lo que se ha alargado el muelle o habrá que restarle o sumarle una cierta cantidad concreta. Además, habrá que tener en cuenta que ninguna de las gráficas que proporciona la app Video Physics mostrará la relación estudiada ya que ninguna considera el número de canicas tal y como se indica al final del ítem 4. No obstante, sí que será posible obtener las coordenadas segundas de cada punto, las del alargamiento del muelle, realizando algún que otro cálculo, la dificultad de los cuales dependerá de donde fijen los estudiantes las referencias en la app. Para ello lo primero que deberán hacer es enviar los datos a Graphical Analysis, realizar los cálculos convenientes para obtener las coordenadas segundas que representan los valores para el alargamiento del muelle (apartado a)) y, posteriormente, añadir las coordenadas de los puntos relativas a la cantidad de canicas introducidas en el vaso para saber las coordenadas x e y (apartado b)) que van desde 0, ya que el experimento empieza cuando no se ha introducido ninguna canica, hasta 8, número máximo de canicas introducidas.

Por último, en cuanto al experimento del enfriamiento de un cuerpo, les damos instrucciones precisas de cómo realizar el experimento y les indicamos como tomar los datos usando el sensor de temperatura Go Wireless Temps y la app Graphical Analysis. Les indicamos que deben calentar el vas con agua y apartarlo de la fuente de calor cuando en la pantalla del iPad aparezca que el sensor esté a una temperatura superior a 60ºC, que será cuando deberán empezar a tomar datos de la temperatura (durante unos 10 o 12 minutos). Por tanto, en este caso, en el ítem 4 no les formulamos ninguna pregunta pero sí que les explicamos cómo realizar el experimento y tomar los datos. Por otro lado, en el ítem 5, les indicamos que pulsen la opción "Table" de la propia app para obtener las coordenadas de los puntos y, al igual que en el experimento del bote de la pelota, como hay muchas coordenadas, les pedimos que elijan unas 10, las apunten en la hoja y expliquen en qué se han basado para elegir exactamente esas.

Parte 3. Obtención de la función e interpretación en términos del experimento

Esta tercera y última parte consta de cuatro ítems (6, 7, 8 y 9) que difieren en algunos aspectos por lo que explicaremos pregunta por pregunta haciendo énfasis en las diferencias entre unos experimentos y otros.

En cuanto ítem 6, se les pide que, antes de nada, abran la app Desmos y copien las coordenadas de los puntos que han elegido en el ítem 5. Como hemos dicho antes, esta app permite representar gráficamente tanto puntos cómo funciones de forma que muestra en la misma pantalla la representación gráfica de estos, la fórmula y los puntos en forma de coordenadas de modo que permite que los alumnos puedan ver lo que sucede gráficamente al realizar cambios sobre la fórmula.

Después, en el apartado a), les preguntamos qué tipo de función piensan que ajustará a estos puntos (esperando que respondan si será una función lineal, cuadrática, etc.) y les pedimos que razonen su respuesta y que traten de encontrar la fórmula de una función cuya gráfica ajuste a dichos puntos. Las preguntas de este apartado se plantean con la intención de que los alumnos obtengan la fórmula de la función que ajusta a los puntos en la forma canónica $y = a \cdot f((x-c)/b) + d$ partiendo de la función más elemental de la familia (en el caso de la cuadrática, $y = x^2$). Pero no obstante, este no es el único objetivo, sino también se plantea con la finalidad de hacer que los alumnos sean conscientes del significado de cada uno de los parámetros de la forma canónica en relación con la gráfica. Con esta pregunta se pretende obtener información sobre el procedimiento que han seguido los alumnos hasta llegar a obtener la fórmula y averiguar qué tipo de significado atribuyen estos a los parámetros según cómo relacionen la gráfica de la función estudiada con el valor numérico que manipulan en la fórmula de esta para obtener dicha gráfica. Ahora bien, habrá que tener en cuenta que debido al tipo de instrumentos de recogida de datos que utilizamos (fichas, capturas de pantalla y grabaciones de voz), esta información será restringida, cosa que ya se contempla en la propia metodología de investigación puesto que esto es lo que motiva la realización del estudio de casos que nos permitirá completar y complementar la información disponible posteriormente. Además, habrá que tener en cuenta también en el análisis de los datos que el hecho de que los alumnos doten de significado los parámetros de una forma canónica no implica que no los hayan podido interpretar de otra distinta en otro momento, solo que no disponemos de los datos que nos permiten saberlo.

Por otro lado, en el apartado b) les preguntamos si creen que la función ajusta a la perfección y les pedimos que razonen qué ocurre con la finalidad de que expliquen los motivos por los que la gráfica no ajusta a la perfección a los puntos (que podrían ser, por ejemplo, el no haber marcado bien los puntos en Video Physics, el no haber escrito las coordenadas de los puntos con todos sus decimales, el que la función sea una función de regresión cosa que implica que no tiene por qué ajustar a todos los puntos, etc.

Una vez obtenida la expresión algebraica de la función que ajusta a los puntos de forma manual en Desmos, en el ítem 7 les pedimos que lo hagan de forma automática con la app Graphical Analysis y comparen ambas fórmulas. Esta pregunta se plantea por dos motivos: el primero de ellos, para que validen si la fórmula de la función obtenida en Desmos es correcta y ajusta bien (y si no lo es, que dispongan de otra que les permita continuar trabajando sobre el experimento) y el segundo, para que realicen transformaciones algebraicas, en este caso de funciones algebraicas que representan dos formas canónicas distintas de una misma función, dándoles sentido. Para ello, antes que nada les pedimos que obtengan la fórmula de la función con la app Graphical Analysis. A continuación, en el apartado a), les pedimos que escriban la fórmula obtenida y les preguntamos si coincide con la obtenida anteriormente, para lo que esperamos que las comparen transformándolas a la misma forma canónica[13]. Por otro lado, en el apartado b) les preguntamos si piensan que, a pesar de ser diferentes, ambas funciones son correctas; y también por la percepción que tienen de cuál de las dos fórmulas es más ajustada, lo que nos permitirá obtener información sobre sus concepciones.

En cuanto al ítem 8, está pensado, al igual que los ítems 5 y 6 del estudio exploratorio, para ver si son capaces de darse cuenta de que solo tiene sentido estudiar la función en el dominio donde se ha definido. Por esto, en el apartado a) les pedimos que calculen las imágenes de algunos puntos y en el b) les preguntamos por el significado de esto en términos del fenómeno estudiado, con la finalidad de que interpreten qué significa x y que significa y y se den cuenta de que hay valores cuya imagen no tiene sentido calcular. Conviene señalar los enunciados de estos apartados difieren del experimento previo y aquí enunciamos de este modo las preguntas para tratar de fomentar que los alumnos interpreten las variables. A continuación, en el ítem c), les preguntamos si creen que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre, les pedimos que justifiquen sus respuestas y también que den los datos que no se ajustan a lo que esperaban. Esta pregunta no se formula solo para obtener información de cómo piensan los alumnos sino también para hacerles reflexionar sobre el dominio de validez de la función. Además, nuestro objetivo era también el de ver si, al igual que en el experimento exploratorio, los alumnos se fijaban más en el valor numérico de las imágenes de la función y en el sentido que podrían tener en relación con el experimento que en si tenía sentido calcular las imágenes de ciertos valores. Asimismo, en el caso del experimento de la pelota, añadimos una última pregunta en el apartado d) en la que les preguntamos si creen que si el experimento se realizará a un nivel inferior al del suelo, esto influiría en el valor numérico de los datos. Esto se hizo teniendo en cuenta

[13] Aunque inicialmente se planteó la posibilidad de pedirles a los alumnos que transformaran la expresión obtenida en Graphical Analysis a otra con la misma forma canónica que la obtenida en Desmos, al final decidimos no hacerlo y darles la libertad de que escogieran cuál de las dos transformar a cuál ya que al trabajar con datos reales podrían aparecer datos deciamles que añadirían aún más complejidad al proceso de transformación.

los resultados obtenidos en el estudio piloto, en los que los estudiantes consideraban que la altura del suelo era cero independientemente de donde habían fijado ellos las referencias en la app Video Physics. Por tanto, la finalidad con la que se les proponía la pregunta era, no solo la de obtener información sobre sus concepciones, sino también la de hacerles reflexionar sobre este hecho. Sin embargo, como veremos posteriormente y debido a que el hecho de que esta pregunta no hace referencia al experimento de forma directa sino a una situación hipotética parecida, decidimos dejar esta pregunta para realizarla, en todo caso, durante las entrevistas posteriores. En cuanto a los experimentos del muelle y del enfriamiento, añadimos un apartado d) en el que les preguntamos si la función obtenida nos puede ayudar a predecir lo que sucede cuando se añade una cantidad muy elevada de canicas, ya que es una pregunta que también hace referencia al dominio de la función y al hecho de si tiene sentido calcular imágenes de valores muy grandes.

Por último, en el ítem 9 planteamos preguntas para que interpretaran la función en términos del experimento realizado. En concreto, esperamos observar si se basan o no en cómo han tomado las referencias para responder, qué tipos de estrategias de resolución utilizan para llegar a sus respuestas, en qué aspectos de la función se basan para compararla con características concretas del experimento (tabla, fórmula o gráfica) y si realizan una correcta interpretación de los resultados (ya que por ejemplo, en el estudio anterior daban por sentado que la referencia tomada era el suelo y, por consiguiente, la altura de la pelota en el suelo era cero, cosa que depende de dónde fijen ellos las referencias). Concretamente, para el caso del bote de la pelota, en el apartado a) les pedimos que calculen los valores del tiempo para los que la pelota golpea el suelo. En el apartado b) les preguntamos por el valor del tiempo para el que la pelota alcanza su máxima altura e incluimos también una pregunta nueva en la que les pedimos que obtengan la altura máxima que alcanza la pelota. En el caso del experimento del muelle, les preguntamos por el alargamiento del muelle cuando se han introducido 4 canicas, por la mínima y máxima longitud del muelle durante el experimento (haciendo hincapié en la diferencia entre calcular la longitud del muelle en cada instante y el alargamiento), por la distancia del vaso al suelo y también cómo cambiaría la función si, en vez de estudiar la longitud del muelle estudiaran la distancia al suelo. En el caso del experimento del enfriamiento, les preguntamos por los valores del tiempo en los que el agua alcanza la máxima y la mínima temperatura y el tiempo que tardará en pasar de la máxima a la mínima.

Después de estas preguntas nos planteamos la posibilidad de formularles otras preguntas a los estudiantes en las que, cambiando un poco el contexto, pudieran dar la fórmula de la función, como por ejemplo, "¿cómo crees que variaría la función si la pelota tuviera menos elasticidad y subiera 10cm menos?" o "¿cómo crees que variaría la función si la temperatura ambiente fuera de 5 grados superior?", lo que nos proporcionarían información sobre cómo interpretan los alumnos los parámetros de la fórmula en relación con la gráfica y con el fenómeno. No obstante, al final decidimos descartarlas por no prolongar el tiempo de realización de cada experimento.

3.1.3.3. El material para las entrevistas

Durante las entrevistas los estudiantes tendrían que estudiar un cuarto experimento: el calentamiento de un cuerpo. Cabe destacar que los motivos que nos llevaron a elegir dicho experimento fueron los mismos que en el caso del enfriamiento de un cuerpo añadiendo el hecho de que, como veremos en el capítulo 4, los estudiantes que trabajaron en el experimento del enfriamiento presentaron dificultades a la hora de identificar y trabajar las características de esta función, por lo que quisimos buscar otro experimento de modo que la función que lo modelizara fuera también una exponencial para trabajar durante las entrevistas y observar sus actuaciones con un mayor detalle. Además, también lo elegimos puesto que al ser el fenómeno contrario al del enfriamiento puede que si los alumnos no tuvieran en cuenta las características propias de la función exponencial (existencia de asíntotas horizontales) podrían llegar a pensar que la función que mejor representa el fenómeno es la logarítmica, por ser la inversa de la exponencial.

Así pues, como hemos comentado anteriormente, debido al tipo de instrumentos de recogida de datos que utilizamos en el estudio del grupo, sabíamos que no nos sería posible obtener la información necesaria para interpretar algunos aspectos, por lo que diseñamos el estudio de casos con la finalidad de obtener información que completara y complementara los datos del estudio del grupo. Por consiguiente, diseñamos el material para las entrevistas centrándonos en dos aspectos: el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones y el modo de dotar de sentido los parámetros de la forma canónica. En concreto, diseñamos: 1. una ficha para el estudio del experimento del calentamiento y 2. unas hojas de puntos con los datos de 3 experimentos distintos (material que podemos encontrar en el Anexo 14). En cuanto a la ficha para el estudio del experimento cabe destacar que los ítems que aquí incluimos son análogos a los que aparecen en las fichas diseñadas para el estudio del resto de experimentos pero de modo que se centran en los elementos que nos interesa estudiar en esta parte. En concreto, incluimos un primer ítem en el que les preguntamos a los alumnos cómo creen que será la relación entre las variables estudiadas, les pedimos que esbocen la gráfica de la función y les formulamos preguntas relativas a su forma, su posición y al significado de los ejes de coordenadas. A continuación, incluimos un segundo ítem en el que les pedimos que elijan la familia de funciones que creen que mejor ajustará a la gráfica. Y, por último, añadimos una pregunta en la que les indicamos que abran el archivo correspondiente en la app Graphical Analysis con los datos de un experimento como el que tienen que estudiar, que interpreten la gráfica y que copien unos cuantos puntos a Desmos para tratar de encontrar la función que ajusta a estos usando dicha app.

Por otro lado, preparamos unas hojas de puntos con datos de 3 experimentos de modo que de un experimento a otro solo variara la temperatura inicial (en el experimento E1 era de 14ºC, en el E2 de 4ºC y en el E3 de 10ºC). Esto se hizo con la intención de que, si disponíamos del tiempo suficiente al terminar el estudio del fenómeno con los datos de E1, los alumnos encontraran las fórmulas también con los datos de los experimento E2 y E3 y trataran de relacionar los valores de los parámetros de las fórmulas obtenidas con los valores de la temperatura inicial para cada experimento.

3.1.4. ESTUDIO PILOTO Y NUEVO DISEÑO DEL MATERIAL DE ENSEÑANZA

Después de diseñar el material de enseñanza y antes de implementarlo en el aula con el grupo escogido, decidimos realizar un estudio piloto con alumnos de nuestras clases particulares con la finalidad de comprobar la adecuación de las fichas al nivel del alumnado, ver si la interpretación que hacían de los enunciados de las preguntas era la correcta o había que reformularlos y, por último, para hacernos una idea del tiempo estimado que tardarían en responderlas. Para ello, decidimos escoger uno de los experimentos, el del bote de la pelota, puesto que ya teníamos experiencia en cuanto al tipo de respuestas que podrían dar los alumnos del estudio previo y del cual ya teníamos vídeos, por lo que nos ahorraríamos tener que realizar la toma de datos reales. Además, debido a las características del diseño del material de enseñanza, pensamos que probablemente y teniendo en cuenta la finalidad con la que realizábamos este pequeño estudio, los resultados se podrían extrapolar a los otros experimentos.

La población que participó en el estudio piloto fueron dos alumnos de centros distintos que en ese momento se hallaban cursando 4º de la ESO y la opción B de matemáticas, opción pensada para preparar a los estudiantes que desean realizar primer curso de bachillerato en especialidades de ciencias básicas o de la salud. Es importante destacar que, aunque estos alumnos asistían semanalmente a clases particulares no lo hacían por los motivos habituales de repasar o afianzar los contenidos vistos en sus clases regulares sino para ampliar los conocimientos adquiridos con la finalidad de ir mejor preparados en la materia para el curso siguiente. La implementación se llevó a cabo el 17 de junio después del horario escolar, por lo que los alumnos ya estaban finalizando el curso académico y habían estudiado todo el bloque de contenidos relativo a las funciones. Primero realizamos el experimento con uno de ellos y al terminar con el otro, por lo que no trabajaron por parejas como estaba previsto que hicieran los alumnos que participarían en el experimento de enseñanza. Empezamos facilitándoles una hoja con el enunciado y las preguntas 1, 2 y 3. Después de responderlas les explicamos que ahora deberían realizar el experimento y grabarlo en vídeo pero que procederíamos usando uno de los vídeos que ya disponíamos. Entonces, les pedimos que, siguiendo las indicaciones de los ítems 4 y 5 y usando las apps Video Physics y Graphical Analysis, obtuvieran las coordenadas de los puntos y eligieran unos cuantos para representarlos en Desmos y encontrar la función que mejor ajustaba a estos. Luego procedieron respondiendo las preguntas de los ítems 6, 7, 8 y 9.

La recogida de datos se hizo mediante grabaciones de audio, ya que les pedimos a los alumnos que intentaran pensar en voz alta y nos hicieran comentarios con el fin de poder obtener la máxima información posible. Además, mientras los alumnos iban realizando el experimento, disponíamos de una réplica de las hojas que ellos tenían e íbamos anotando aspectos mejorables y también utilizamos una hoja para hacer comentarios más extensos sobre aspectos del diseño que pensábamos que podríamos mejorar.

A continuación, vamos a describir en detalle los aspectos que observamos durante la realización del experimento piloto que nos hicieron modificar el diseño del material de enseñanza con respecto al que ya teníamos y de qué manera decidimos hacerlo. Para ello, comentaremos los cambios realizados con respecto a las fichas del experimento del salto de la pelota ya que se harán de forma análoga en el resto y, solo en los casos en los que decidamos realizar otros cambios en las fichas de los otros experimentos, así lo indicaremos. Las fichas con los cambios realizados se pueden consultar en los Anexos 9, 10 y 11.

En primer lugar, por lo que respecta a la primera parte, debido a que los alumnos se limitaban a responder lo que representaban los ejes x e y y a decir en qué unidades de medida sería conveniente utilizar sin explicar nada más, decidimos añadir al apartado c) del ítem 2 la pregunta “¿Por qué?” para que así justificaran su respuesta. Con respecto al apartado c) del ítem 3 y debido a que ninguno de los dos alumnos tenía claro lo que pedíamos, decidimos reformular la pregunta para que quedara más explícito que lo que pedíamos era que explicaran en qué afectaban los valores que podían tomar los diferentes parámetros de la fórmula elegida en relación a la gráfica de la función. En concreto, reformulamos la pregunta de forma que les pedimos que explicaran cómo variaba la gráfica al variar el valor de cada parámetro. Hay que destacar que, aunque utilizamos el término variación en el enunciado de la pregunta y esto pueda llevar a pensar que queremos hacer énfasis en el significado de transformación de los parámetros, pensamos que este no tiene por qué ser determinante en cuanto al tipo de respuesta que puedan dar los alumnos y que podría ser tanto en un sentido como en otro.

Por lo que respecta a los ítems que hacen referencia a la toma de datos, reformulamos el apartado a) del ítem 4aya que los alumnos no entendían a qué nos referíamos cuando les pedíamos que marcaran los puntos sobre la pelota y les preguntábamos de nuevo en qué intervalo de tiempo había que estudiar la relación entre tiempo y altura de esta, cosa que era totalmente innecesario puesto que ya estaba en el enunciado del experimento. Por ello, eliminamos la pregunta e indicamos directamente que marcaran los puntos en la pelota solo en el intervalo estudiado: en el primer bote. También decidimos pedirles que realizaran una única captura de pantalla donde se apreciara donde marcaban los puntos en la pelota y donde fijaban los ejes. Por último, decidimos incorporar un último apartado en el que, en vez de indicarles qué gráfica era la que mostraba la relación entre el tiempo y la altura de la pelota, tuvieran que ser ellos los que pensaran qué gráfica representaba dicha relación y que justificaran su respuesta. Además, la instrucción de que enviaran los datos a Graphical Analysis la añadimos al siguiente ítem ya que vimos que era más coherente por el hecho de que en este se hace referencia al procesamiento de los datos obtenidos en el ítem 4 y a la obtención de las coordenadas de los puntos y no tanto la anterior.

Así pues, los cambios más substanciales se llevaron a cabo en los ítems de la tercera parte. Esto fue debido a que, al tener que realizar tanto el ajuste de la función a los puntos como de comparar ambas formas canónicas, la obtenida en Desmos y la que proporciona Graphical Analysis, los alumnos no sabían cómo hacerlo debido a que no tenían suficientes instrucciones. Por ello decidimos incorporar un ítem extra de ayuda en cada caso para que, si sabían cómo realizar dichas acciones pudieran hacerlo sin necesidad de ayuda pero, si no era el caso, tuvieran la posibilidad de pedir una ayuda extra en forma de ficha con preguntas que les guiaría a lo largo del proceso sin necesidad de intervención del profesor. Por ello, en el ítem 6, después de preguntarles qué tipo de función piensan que ajustaría a los puntos, añadimos un apartado b) en el que les pedíamos que trataran de ajustar dicha función a estos y que, en caso de no saber hacerlo, pidieran una ayuda, la ayuda 1. En esta hoja de ayuda les indicamos que, partiendo de la función más elemental, $y = x^2$ en el caso de la cuadrática, traten de hacer transformaciones buscando ciertos movimientos de la gráfica con respecto a $y = x^2$ hasta llegar a obtener una fórmula del tipo $y = a(x - c)^2 + d$ con valores reales concretos para a, c y d. De esta forma pretendíamos, a través de preguntas, que notaran qué efecto tenía sobre la gráfica cada uno de los cambios en la fórmula y, así, que atribuyeran significado a los tipos de valores que podían tomar los parámetro. Empezábamos pidiéndoles que cambiaran la orientación de la gráfica con la finalidad de que asociaran el signo negativo de a a un cambio de orientación en la gráfica. Proseguíamos pidiéndoles que movieran la gráfica en el eje de las y y, de forma más concreta, que pensaran qué valores hacían que esta subiera o bajara. Después hacíamos lo mismo para el eje de las x. Finalmente les pedíamos que trataran de modificar el ancho de la gráfica, haciéndola más ancha o más estrecha. Elegimos realizar las preguntas en ese orden concreto porque nos pareció que sería una forma fácil para ellos de darse cuenta del valor concreto de cada parámetro en cada caso y no solo del tipo movimiento que provocaban en la gráfica, aunque podría haberse elegido hacerlas en otro orden. Además, cabe destacar que la hoja de ayuda tenía la intención, de alguna manera, de substituir las posibles preguntas que formularía un profesor si estuviera realizando la actividad con ellos pero, de esta forma, cada una de las parejas podría trabajar por su cuenta. Por tanto, otro de los aspectos que nos interesará conocer es si los alumnos piden la ficha de ayuda y cuál es el efecto del uso de esta en las actuaciones de los alumnos. Del mismo modo, añadimos un apartado en el que les pedíamos que copiaran la fórmula final obtenida y decidimos eliminar la pregunta anterior b) y añadirla al final del siguiente ítem.

Por lo que respecta al ítem 7, decidimos añadir instrucciones para que borraran las gráficas que aparecían en el programa ya que, al enviar los datos de Video Physics a Graphical Analysis, aparecían todas las gráficas y solo nos interesaba que se quedaran con una de ellas para realizar el ajuste y obtener la fórmula. Como en el ítem anterior, durante el experimento piloto nos dimos cuenta de que podría darse el caso de que algunos alumnos tuvieran dificultades para pasar de una de las funciones a la misma forma canónica que la otra, por lo que añadimos un segundo ítem de ayuda, la ayuda 2. En esta les proporcionamos instrucciones para pasar una función de la forma canónica $y = a'x^2 + b'x + c'$ a otra de la forma $y = a(x - c)^2 + d$ acompañadas de un ejemplo. Al finalizar esta pregunta, añadimos un último apartado pidiendo que compararan ambas funciones ahora que ya estaban en la misma forma canónica y que explicaran cuál de las dos pensaban que ajustaba más a los datos.

También realizamos cambios en el ítem 8. Cómo en el estudio piloto nos preguntaron con qué función tenían que trabajar en los siguientes ítems, añadimos en el enunciado que eligieran la fórmula que pensaban que mejor ajustaría al fenómeno estudiado. Reformulamos el ítem a) y, en vez de preguntarles que calcularan la altura de la pelota para unos ciertos valores del tiempo, les pedimos que calcularan algunas imágenes de la función y después les preguntamos qué significado tenían en término del fenómeno para que fueran ellos los que lo interpretaran. Además, decidimos eliminar la pregunta del apartado d) anterior porque no hacía referencia directa al experimento y pensamos que sería más bien una pregunta que les podríamos hacer durante las entrevistas posteriores si lo creíamos conveniente. A cambio, añadimos una pregunta para ver si pensaban que la función obtenida podría ayudar a predecir lo que sucede cuando el tiempo tiende a infinito. Además, pensamos que la propia pregunta les podría hacer reflexionar para que se dieran cuenta de que la función solo representa el experimento estudiado en el intervalo para el que se ha definido ya que al calcular la imagen de valores muy grande obtendrían un valor muy grande y negativo y no el valor del suelo (que dependerá de donde habían fijado el eje y de dónde habían marcado el punto en la pelota). Finalmente, en la pregunta 9 añadimos en el enunciado que pueden hacer uso de las apps Free Graphing Calculator y/o Desmos para hacer los cálculos. También añadimos en el apartado a) la pregunta de a qué altura se encuentra el suelo, con la intención de hacerles reflexionar sobre la relación entre los conceptos de “altura del suelo” y “altura de la pelota en el suelo” que no tienen por qué ser iguales ya que depende de cómo hayan tomado las referencias en la app Video Physics

Como hemos comentado antes, realizamos cambios análogos en el material de enseñanza de los otros dos experimentos aunque decidimos, en el caso del muelle, no proporcionar la ayuda 2 ya que no sería necesario por la sencillez de los cálculos y, en el del enfriamiento, decidimos omitir dicha pregunta ya que los cálculos podrían ser demasiado complicados para el nivel en el que se encontraban los alumnos. Además, en el experimento del muelle, cambiamos el ítem 5 de forma que, en vez de decirles cómo calcular las coordenadas de los puntos directamente, ya que les faltan las primeras coordenadas de cada punto que corresponden al número de canicas, les hacemos preguntas para que reflexionen y encuentren cómo calcularlas. Además, añadimos una pregunta para ver si saben calcular la fórmula de la función sin usar ninguna app.

3.2. EL EXPERIMENTO DE ENSEÑAZA

En esta segunda parte del capítulo explicaremos todo aquello relacionado con la realización de la secuencia de enseñanza en la que se incluye la implementación del material de enseñanza que acabamos de presentar. Por ello y debido a que es el primer momento en el que hablamos de los sujetos que participaron en el experimento de enseñanza, hablaremos de cuál fue la población que participó en el estudio, justificando los motivos que nos llevaron a elegir dicha población (apartado 3.2.1). A continuación, expondremos brevemente como organizamos el experimento de enseñanza, distinguiendo entre el trabajo relativo a la implementación de la secuencia de enseñanza en el aula y el relativo a las entrevistas, así como el tipo de metodología usada (apartado 3.2.2). Después explicaremos cómo y cuándo se llevó a cabo el experimento de enseñanza en el aula, organizando el apartado por lecciones y distinguiendo el número de sesiones empleadas para la realización de cada lección, los materiales necesarios, el procedimiento seguido y explicando también los problemas surgidos. Haremos lo mismo para las sesiones relativas a las entrevistas (apartado 3.2.3). Luego, comentaremos cuáles fueron los instrumentos que se utilizaron para recoger los datos y qué se pudo obtener de cada uno de estos (apartado 3.2.4). Por último, indicamos las dificultades observadas durante la implementación (previas al análisis de los datos), las limitaciones y los aspectos que consideramos susceptibles de mejora para futuras implementaciones, desde el punto de vista del docente y del investigador (3.2.5).

3.2.1. LA POBLACIÓN DE ESTUDIO

La población que participó en esta investigación estaba formada por un total de 16 estudiantes de primer curso de bachillerato de la especialidad de Ciencias, dirigido a estudiantes que desean cursar estudios superiores en ciencias básicas, de la salud o ingenieras, de un centro público de la Comunidad Valenciana. Los estudiantes tenían una edad comprendida entre 16 y 17 años, entre los cuales había 6 chicas y 10 chicos. El grupo de estudiantes correspondía a un grupo natural con la particularidad de que uno de ellos participaba en el proyecto Estalmat de la Comunidad Valenciana desde los 12 años (el alumno al que más adelante pasaremos a referirnos como 2.1), cuyo objetivo es la detección, orientación y estimulación del talento matemático de 25 alumnos seleccionados de entre todos los de la comunidad autónoma. Menos uno de los alumnos que era la segunda vez que realizaba el curso actual (el alumno 5.2), el resto había cursado cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria durante el curso anterior, realizando la opción B de la asignatura de Matemáticas.

La elección del primer curso de bachillerato estuvo condicionada en parte por el grupo elegido. Las características que buscábamos en los alumnos eran que tuvieran conocimientos previos sobre los modelos funcionales que se incluyen en la secuencia de enseñanza, sabiendo así identificar y relacionar sus características propias en cualquiera de sus representaciones (gráfica, expresión analítica, etc.). Por ello, como en el material de enseñanza se incluyen funciones como la exponencial o la logarítmica, el curso a partir del cual tenía sentido escoger el grupo era 4ºESO, ya que en este ya han trabajado previamente con estos modelos funcionales tal como se refleja en el currículo oficial de la Comunidad Valenciana (Conselleria d’Educació, 2007). Sin embargo, debido a que el grupo de alumnos escogidos abordó el estudio del bloque de funciones al final del curso anterior sin haber finalizado lo marcado en el currículo, decidimos llevar a cabo la implementación de la secuencia de enseñanza justo al inicio del curso actual, por lo que de esta forma todavía tendrían reciente los aspectos vistos en el curso previo y serviría de conexión con los contenidos trabajados al final del curso anterior. No obstante, bien se podría haber implementado la secuencia de enseñanza justo a continuación del estudio de los modelos funcionales en el cuarto curso de la ESO. Además, la elección del grupo concreto se debió también al hecho de que tanto el centro al que pertenecían los alumnos como los profesores involucrados mostraron una actitud de total colaboración con nosotros. Cabe destacar que, tal como se deduce de lo previamente comentado, el momento en el que se desarrolló la investigación fue elegido intencionalmente ya que los estudiantes ya habían estado trabajando con las diferentes familias de funciones durante el curso anterior y se encontraban en los primeros días del siguiente curso.

Es importante señalar que, debido a que la profesora actual del grupo había sido su profesora de matemáticas también durante el curso anterior, pudimos tener acceso a materiales con los que habían trabajado y conocer el tipo de enseñanza que habían recibido y el tipo de metodología en la que habían sido instruidos.

3.2.2. DISEÑO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Por experimento de enseñanza nos referimos a la parte del modelo de enseñanza[14] que comprende la llevada a cabo de la enseñanza, incluyendo tanto la parte experimental que tuvo lugar en clase como la parte de la realización de entrevistas que realizamos posteriormente. Por ello, en los siguientes apartados hablaremos no solo el material de enseñanza sino también del tipo de metodología empleada por parte del profesor, del tipo de material usado y de la organización de las sesiones. A continuación explicaremos con mayor detalle cuál fue el diseño del experimento de enseñanza, distinguiendo entre el trabajo en el grupo clase (3.2.2.1) y la parte de las entrevistas con entrevistas (3.2.2.2).

3.2.2.1. Trabajo en el grupo clase

En el trabajo en el grupo clase se realizó la implementación de una secuencia de enseñanza articulada en cuatro lecciones para desarrollar en unas once o doce sesiones de 55 minutos. Estas son las siguientes:

Lección 1. El cuestionario inicial

Lección 2. El bote de la pelota

Lección 3. El alargamiento de un muelle

Lección 4. El enfriamiento de un líquido

Como ya hemos señalado en la sección anterior, en las lecciones 2, 3 y 4 lo que se pretende es que los estudiantes trabajen sobre tres experimentos físicos que se realizan en clase y són la parte central de la secuencia de enseñanza. Dentro de las lecciones relativas al estudio de los experimentos se contempla la realización de un estudio cualitativo de cada uno de estos (ítems 1, 2 y 3), previo a la representación del propio experimento en sí y a la toma de datos. Posteriormente se pretende que realicen los experimentos en clase ítems para obtener los datos (ítems 4 y 5) y que encuentren la fórmula de la función que mejor representa cada experimento y respondan una serie de ítems más (ítems 6, 7, 8 y 9) para comprobar su adecuación reflexionando sobre la relación entre gráfica, expresión algebraica, tabla de valores y experimento. Cabe destacar que, como hemos avanzado antes, los ítems relativos al estudio de los

[14] Modelo de enseñanza es un término más amplio que el de experimento de enseñanza ya que hace referencia a todos los elementos que contiene el experimento de enseñanza y además incluye aquellos como por ejemplo la forma de enseñar, la relación de los contenidos con el currículum, los conocimientos previos de los participantes en el experimento, etc.

experimentos físicos (lecciones 2, 3 y 4) se administrarían por separado con la finalidad de que los estudiantes dispusieran de suficiente espacio para responder y que no modificaran sus respuestas anteriores; por lo que cada hoja se recogería antes de proporcionar la siguiente, tarea en la que nos ayudaría la profesora habitual del grupo.

El orden en el que se decidió organizar las lecciones relativas a los experimentos viene dado por el hecho de que el estudio previo que realizamos (aunque con otra población de estudio) fue sobre el de la pelota, además de ser el único que, *a priori*, no tendría por qué suponer mayor dificultad en los estudiantes. A continuación decidimos que estudiaran el del muelle, cuya función de regresión es una función lineal pero tiene la peculiaridad de que han de ser los alumnos los que construyan las coordenadas de los puntos a partir de las variables que proporciona la app Video Physics, por lo que tienen que ser conscientes de cómo toman las referencias. Y, por último, el del enfriamiento, ya que pensamos que resultaría más complicado para ellos porque la función que lo modelizaba, que era una exponencial, era la única función que solo habían visto desde el curso anterior y no en cursos previos como pasaba en el caso de las otras.

Por lo que respecta al rol de los alumnos, cabe destacar que se decidió que estos últimos trabajaran individualmente durante la primera lección, de forma que esto nos permitiría conocer sus conocimientos previos uno por uno; y que trabajaran por parejas en el resto de lecciones. Por ello, debido a que eran un total de 16 alumnos los que participaron en el experimento de enseñanza, se formaron 8 parejas. Cabe destacar que el agrupar a los alumnos por parejas se debió, como explicaremos en 3.2, al hecho de que no podemos conocer exactamente los procesos cognitivos de estos cuando se enfrentan a cada tarea, por lo que esta técnica favorecería la verbalización de lo que hicieran, pensaran hacer o quisieran hacer (Schoenfeld, 1985). Sin embargo, hay que tener en cuenta que el hecho de que verbalicen no garantiza que podamos conocer cuáles son los procesos cognitivos sino que lo que conocemos es la explicación que dan los propios alumnos de ellos, por lo que el tipo de datos obtenidos no serán los procesos cognitivos que ponen en marcha los alumnos para resolver las tareas sino la explicación que dan ellos de estos en un entorno colaborativo o cooperativo.

Durante el trabajo en el aula, la investigadora adoptó el rol de profesora. Como en la forma de organizar las lecciones se tiene en cuenta el hecho de que la intervención del docente se produzca solo en casos puntuales (ya que diseñamos el propio material de forma que se incluyen instrucciones precisas y pistas que permiten guiar a los alumnos), nuestro papel durante el experimento de enseñanza sería el de gestionar el aula, dando instrucciones más precisas en caso de que fuera necesario, advirtiendo sobre cómo realizar y grabar los experimentos, administrando las fichas con las preguntas y respondiendo dudas, entre otros. Además, estava previsto que si los alumnos nos formulaban preguntas durante alguna de las lecciones, nuestra forma de actuar no sería la de responderles directamente sino la de hacer que reflexionaran guiándolos a través de preguntas hacia la respuesta. Por otro lado, la profesora habitual del grupo estaría también presente en el aula por si se requiriese su ayuda en algún momento del experimento.

3.2.2.2. Entrevistas con enseñanza

Después de la implementación de las lecciones en clase, seleccionamos a 4 alumnos para su participación en un estudio de casos. En esta parte, los alumnos trabajaron en el estudio de un último experimento pero centrándose más en dos aspectos: el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones y el tipo de significado de los parámetros en una forma canónica concreta.

Organizamos cada entrevista en tres partes. En primer lugar, realizamos un recordatorio de los experimentos anteriores poniendo especial énfasis en las actuaciones relativas a dicho análisis cualitativo, al tipo de función obtenida y al tipo de significado que otorgaban a los parámetros. A continuación, los alumnos realizarían un estudio cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones antes de trabajar con los datos. Y, por último, les facilitaríamos los datos del experimento E1 para que obtuvieran la función que mejor ajustaría a estos a partir de ir dando valores a los parámetros en relación con la gráfica. Planificamos también, en caso de que dispusiéramos de tiempo suficiente, que después de ello los alumnos trabajaran con los datos de los experimentos E2 y E3 para tratar de encontrar una relación entre el significado de los parámetros en la forma canónica obtenida con los valores de la temperatura inicial para cada uno de los tres experimentos.[15]

Este estudio de casos se planteó en forma de entrevistas con enseñanza. Estas consisten en un diálogo entre la investigadora y el alumno de modo que las actuaciones de la investigadora deben ir en la línea de dejar que sea el alumno, al que se quiere enseñar, el que elabore lo que se le quiere enseñar. Como explica Puig (2015):

> Eso implica, por un lado, que el investigador deje que el alumno siga el curso de la resolución en la dirección por él emprendida, sea o no adecuada, siempre que éste produzca algo, pero también implica, por otro lado, que el investigador ofrezca indicaciones al alumno, en momentos de bloqueo o inacción, para proporcionarle nuevos datos con los que pensar la tarea o nuevos puntos de vista para pensar en la tarea. (Puig, 2015, p.10)

Por ello, el papel de la investigadora es fundamental puesto que esta debe ejercer de guía de los estudiantes a través de la formulación de preguntas y sugerencias. Esta idea, tal como señalan Roth y Radford (2011), se basa en la importancia de trabajar en la zona de desarrollo próximo del estudiante a través de lo que Freudenthal (1983) denomina “proceso de reinvención guiada”, yendo más allá del modelo de Sócrates en el que el profesor tiene la iniciativa y es el alumno el que se limita a asentir (Puig, 2015). Siguiendo esta línea, decidimos que los alumnos trabajaran individualmente porque además, como apunta Schoenfeld (1985), de este modo se ponen de manifiesto las cogniciones propias de los estudiantes de una manera más fiel y no suelen florecer argumentaciones o justificaciones de las acciones realizadas debido a que el propio contexto no hace necesaria su aparición. No obstante, la entrevista también tuvo un carácter de diagnóstico puesto que se les formularon preguntas a los alumnos con la finalidad de indagar sobre el origen de algunas concepciones observadas en los experimentos previos.

3.2.3. IMPLEMENTACIÓN DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

La implementación del experimento de enseñanza tuvo lugar entre el 1 de octubre de 2015 y el 19 de febrero de 2016. Dicha implementación se realizó dentro de las sesiones habituales de clase de matemáticas, que eran de 55 minutos cada una los martes de 9:55 a 10:50, los miércoles de 13:25 a 14:20, los jueves de 13:25 a 14:20 y los viernes de 12:10-13:05; aunque en algún caso se usaron también las sesiones de tutorías, que eran una vez por semana los viernes de 9:00 a 9:55. A continuación en la Figura 3.1 mostramos el cronograma al que haremos referencia posteriormente cuando expliquemos cada lección en

[15] Como veremos en el capítulo 6, solo en uno de los casos dispusimos de tiempo para abordar esta parte.

detalle, dónde pueden apreciarse las diferentes partes de la implementación para mostrar de forma más esquemática y clara cuándo tuvo lugar cada una de estas.

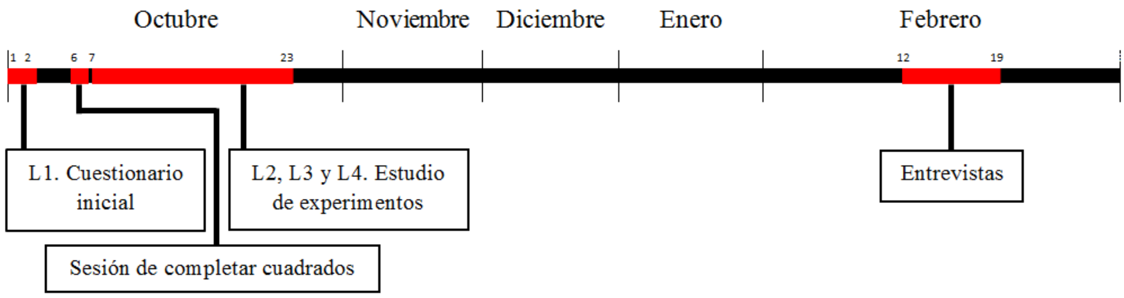

Figura 3.1. Cronograma de la implementación de la secuencia de enseñanza

Cabe destacar que la implementación de las lecciones se llevó a cabo en un total de 12 sesiones y las entrevistas en 4, una por cada alumno entrevistado. El inicio de la implementación de la secuencia de enseñanza se llevó a cabo prácticamente al comienzo del curso escolar, que tuvo lugar el 18 de septiembre, cosa que tiene su justificación en el hecho de que la profesora quería repasar previamente los contenidos vistos en el curso anterior relativos al bloque de números y álgebra para enlazar con el actual, a excepción de aquellos relativos a las familias de funciones, que son los que íbamos a abordar nosotros a continuación y que, como ya hemos dicho, fueron los últimos que vieron a finales del curso previo[16]. El contenido trabajado en estas sesiones previas a la implementación de la secuencia de enseñanza se puede consultar en los apuntes de uno de los estudiantes en el Anexo 3 y se basó en un repaso global de la clasificación y las propiedades de los números así como de su representación sobre la recta numérica, el uso de la notación científica, la definición del logaritmo y sus propiedades y, por último, de las propiedades de las potencias.

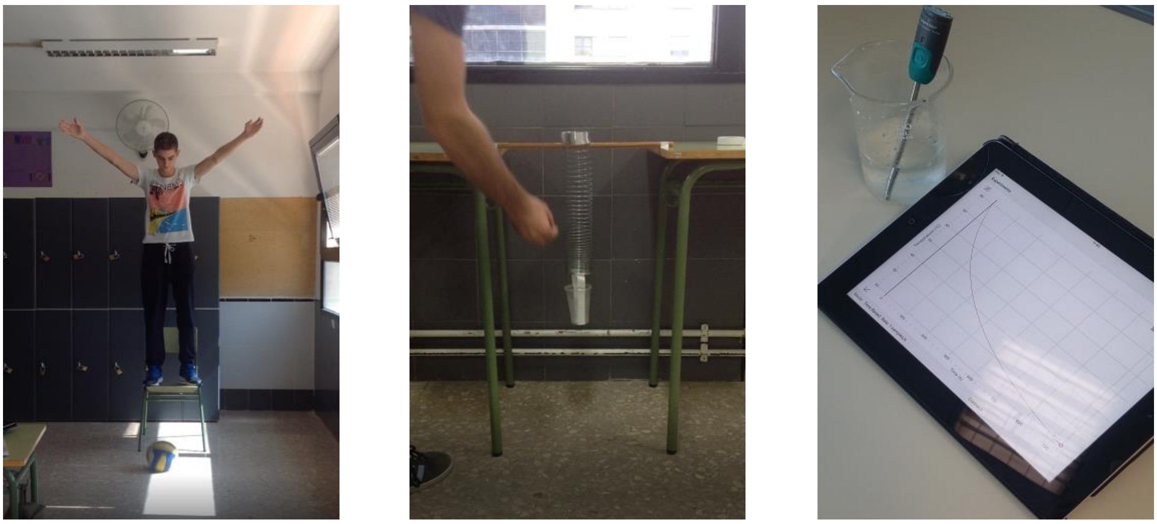

Figura 3.2. Fotografías de la realización de los experimentos físicos en clase

A continuación, vamos a explicar cómo se llevó a cabo la implementación de la secuencia de enseñanza (cosa que haremos por lecciones) y la realización de las entrevistas. En cada caso, detallaremos el número de sesiones que se dedicaron y en qué días tuvo lugar, cuál fue el material necesario para la realización de cada sesión (sin incluir el material que se usó para la recogida de datos, lo que se explicará en 3.2.4) y el lugar donde tuvo lugar y,

[16] Lo único que abordaron del bloque de funciones durante estas sesiones fue la representación de la función exponencial y logarítmica a partir de la representación de unos cuantos puntos de la función.

por último, el procedimiento seguido y los problemas surgidos, si es el caso. En la Figura 3.2 podemos ver unas imágenes de la realización de los experimentos de las lecciones 2, 3 y 4, respectivamente en el aula. Cabe destacar que tomamos la decisión de que los alumnos tomaran datos una única vez y trabajaran todos sobre los mismos para poder comparar mejor sus respuestas.

3.2.3.1. Lección 1. El cuestionario inicial

Número de sesiones, días y contenidos

La implementación del cuestionario inicial se llevó a cabo en dos sesiones, los días 1 y 2 de octubre. Durante la primera sesión los alumnos respondieron los ítems 1, 2, 3 y 4 y durante la segunda los ítems 5, 6, 7 y 8. Cabe destacar que al final de la sesión se realizaron breves comentarios sobre los aspectos en los que los alumnos habían presentado dificultades.

Material necesario y lugar de las sesiones

Ambas sesiones tuvieron lugar en el aula habitual del grupo y el material utilizado fueron las fichas de los cuestionarios, disponibles en el Anexo 4.

Procedimiento seguido y problemas surgidos

Durante estas dos sesiones los alumnos trabajaron individualmente y la investigadora se encargó de administrar las fichas, de facilitar las instrucciones necesarias y de aclarar las dudas de forma individualizada que se planteaban durante la realización de estas. En primer lugar, les administramos el cuestionario inicial compuesto por los ítems 1-8. Esto lo hicimos en dos sesiones distintas para que tuvieran tiempo de responder las preguntas con calma, explicar bien sus respuestas y también para que no vieran las preguntas de los ítems que deberían responder durante la siguiente sesión. Por ello, durante la primera sesión, el día 1 de octubre, les administramos los ítems 1, 2, 3 y 4 y el día 2 los ítems 5, 6, 7 y 8. Además, el día 2, aprovechando que los alumnos terminaron antes de responder los ítems, corregimos las preguntas de los cuestionarios haciendo hincapié en los ítems en los que más dificultad habían presentado y en los aspectos que no eran correctos.

Después de observar los resultados obtenidos en el cuestionario previo y debido al hecho de que solo dos de los alumnos fueron capaces de responder el ítem 8 correctamente, ítem dedicado a transformar una serie de expresiones a otras de la forma $y = a(x-b)^2 + c$, decidimos incluir una sesión de enseñanza para repasar los pasos que tenían que seguir hasta conseguir dicho objetivo. Cabe destacar que hablamos de “repasar” y no de “enseñar” en sí puesto que la manipulación de expresiones algebraicas forma parte del currículo oficial del curso anterior y ya lo habían estudiado previamente, además de haberse incluido en el recordatorio previo a la implementación de la secuencia de enseñanza que se realizó en clase. Pero, debido a la importancia que este contenido tendría a la hora de dotar de sentido las transformaciones entre las formas canónicas de las funciones que representan los fenómenos físicos que estudiarían posteriormente, decidimos dedicar una sesión entera para recordarles de nuevo cómo se llevaba a cabo este procedimiento, sesión que tuvo lugar el día 6 de abril. Esta sesión fue impartida por la profesora habitual del grupo ya que era ella la que se había encargado de realizar las sesiones dedicadas a hacer una revisión de los contenidos abordados en el curso anterior y esta sesión estaba enfocada en la misma línea. En el Anexo 8 se pueden observar los apuntes que elaboramos y que utilizó la profesora para impartir dicha sesión, que son instrucciones de cómo llevarla a cabo y ejemplos resueltos de transformaciones entre expresiones algebraicas de la forma $ax^2 + bx + c$ a expresiones de la forma $a(x-b)^2 + c$ ordenados de menor a mayor complejidad (según si los números estaban pensados para que la transformación fuera más directa o menos y si aparecían números enteros o decimales) y de menor a mayor cantidad de pasos a realizar para obtener una expresión de esta forma. Cabe destacar que esta sesión se enfocó íntegramente a hacer transformaciones entre expresiones algebraicas de polinomios de segundo grado con la finalidad de que supieran transformar la fórmula de la función cuadrática obtenida en el apartado a) del ítem 7 a la forma canónica de la obtenida en el apartado c) del ítem 6 y así poder compararlas.

Durante la sesión del día 6 los alumnos trabajaron también en el aula habitual pero en este caso alternando el trabajo individual y en el grupo clase. Inicialmente la profesora iba mostrando las expresiones algebraicas que había que transformar en la pizarra y, al preguntar a los alumnos, estos iban guiando las acciones que debía de realizar. Después proporcionaba ejemplos similares para que estos trabajaran individualmente.

3.2.3.2. Lección 2. El bote de la pelota

Número de sesiones, días y contenidos

Aunque inicialmente estaba previsto realizar esta lección en tres sesiones, finalmente tuvimos que emplear cuatro, una más de las que utilizamos durante el estudio previo debido a que incorporamos más ítems con respecto a este y durante el estudio piloto observamos que los alumnos tardaban bastante tiempo en encontrar la función con la app Desmos y no estaban familiarizados con el uso de las diferentes apps. En concreto, durante la primera sesión los alumnos abordaron los ítems 1, 2 y 3, realizaron la toma de datos con la app Video Physics, transfirieron los datos a los iPads y se quedaron empezando a trabajar en el ítem 4, donde se les pedía que tomaran referencias. En la siguiente sesión, continuaron tomando las referencias en el ítem 4, terminaron el ítem 5 (aunque algunos alumnos empiezan ya el ítem 6). La tercera sesión se dedicó íntegramente a que los alumnos encontraran la función que ajustaba a los puntos con la app Desmos, cosa que les costó bastante, y a responder alguna pregunta del ítem 7 (solo en el caso de algunos alumnos. Por último, en la última sesión los alumnos respondieron el resto de ítems. Dichas sesiones tuvieron lugar los días 7, 8, 13 y 14 de octubre.

Material necesario y lugar de las sesiones

Las sesiones relativas al experimento del bote de la pelota se realizaron en el aula habitual del grupo. El material necesario para la realización de estas fueron iPads (uno por cada pareja de alumnos y dotados con las apps Video Physics, Graphical Analysis, Desmos y Free Graphing Calculator), las fichas con los ítems del experimento de la pelota, un ordenador con conexión inalámbrica, una pelota de básquet o voleibol y una cinta métrica. Además, se disponía también de acceso al internet inalámbrico del centro, necesario para poder transferir los datos del iPad donde se había grabado el experimento al resto.

Procedimiento seguido y problemas surgidos

En primer lugar cabe destacar que, como ya hemos mencionado antes, a partir de la lección 2 los estudiantes se organizaron por parejas y trabajaron juntos hasta el final del experimento de enseñanza. La sesión empezó con la explicación de que durante las siguientes sesiones iban a estudiar tres experimentos distintos. Les comentamos que en cada uno de ellos deberían responder una serie de preguntas inicialmente, después harían el experimento planteado en clase ellos mismos y usarían tabletas electrónicas tanto para gravarlo en video como para responder una serie de preguntas usando unas apps determinadas. Les pedimos que explicaran lo máximo posible sus respuestas, que lo hicieran como si tuvieran que escribir exactamente lo que estaban pensando, que lo hicieran con bolígrafo y no a lápiz y que no usaran corrector sino que tacharan lo que quisieran cambiar de forma que todavía se pudiera ver, ya que lo que queríamos era observar cómo pensaban las actividades y no tanto si las resolvían correctamente o no. Además, les indicamos que cuando terminaran de responder un ítem nos entregaran la hoja y nos pidieran el siguiente. Les pedimos también que no hablaran con el resto de compañeros de otros grupos, que si tenían alguna duda que nos la preguntaran directamente a nosotros mismos o a la profesora habitual del grupo. También les dijimos que mientras contestaban las preguntas usarían iPads para hacer grabaciones de voz, lo que nos permitiría saber cómo habían llegado a cada respuesta y que, por ello, intentaran dialogar con el compañero, tomar las decisiones de forma conjunta y hablar en voz alta para que quedara todo grabado. A continuación y para mantener el anonimato de los estudiantes, asignamos un número a las parejas, del 1 al 8, y les dijimos que ese sería el número del iPad que deberían utilizar durante todas las sesiones y el número que deberían escribir en las hojas.

Les comentamos que en la primera clase iban a estudiar el salto de una pelota y, después de repartir las hojas con los enunciados de las tareas, uno de ellos se ofreció voluntario para leer el texto en voz alta. Después de ello, les preguntamos si tenían alguna duda y si habían entendido perfectamente lo que tenían que estudiar y, entonces les repartimos las preguntas del primer ítem. Hay que destacar que, aunque el cuestionario inicial hace referencia principalmente al estudio de las familias de funciones y sus características, los alumnos no sabían que lo que iban a hacer en las siguientes sesiones sería estudiar tres fenómenos físicos utilizando funciones, por eso muchos de ellos nos preguntaron a qué nos referíamos por dibujar la relación entre las variables tiempo y altura en el apartado b) del ítem 1. A esta pregunta les respondimos que tenían que dibujar como iría variando la relación entre estas variables a lo largo del experimento. En este caso, muchos de ellos dibujan la gráfica de una función pero algunos de ellos realizan dibujos con flechas tratando de representar en un mismo dibujo como cambia la relación entre ambas variables. Conforme iban terminando de responder, les repartimos la hoja con las preguntas del siguiente ítem y así sucesivamente.

A continuación, pedimos a los alumnos de la primera pareja que terminó de responder las cuestiones de los tres primeros ítems que nos ayudara a preparar el experimento. Para ello, despejamos un rincón del aula donde se dispuso una silla sobre la que el alumno debería subir para dejar caer una pelota. Cabe destacar que previamente al experimento ya habíamos comprobado que la pelota estuviera lo suficientemente hinchada y al dejarla caer y rebotara contra el suelo de forma vertical. Les pedimos que midieran la pata de la silla, ya que esta sería la medida que introducirían en la app para que mostrara las medidas coherentes con la realidad, y la apuntamos en la pizarra. Cuando todos los alumnos habían respondido el tercer ítem, pedimos un voluntario para realizar el experimento, le explicamos lo que tenía que hacer y le pedimos a otro compañero que lo grabara con el iPad, al que le comentamos que tuviera cuidado de no mover el dispositivo mientras se producía la grabación. A continuación, para copiar el vídeo a los diferentes iPads fue necesario un ordenador portátil con conexión inalámbrica de forma que copiamos el vídeo al ordenador y los alumnos iban pasando por nuestra mesa para que les copiáramos el vídeo con el experimento. Este proceso nos llevó más tiempo del esperado debido a que la conexión wifi del centro no era muy buena, por lo que terminó la clase y algunos alumnos no pudieron obtener el vídeo del experimento y tuvimos que copiarlo fuera de clase para que así dispusieran de este en la siguiente sesión. Después de copiar el vídeo a cada uno de los iPads, les facilitamos la hoja con el ítem 4 a los alumnos. Además, les comentamos en voz alta en el grupo clase que ahora tendrían que realizar diferentes acciones con la app Video Physics para que así esta les proporcionara diferentes gráficas relacionando las variables tiempo, posición de los puntos respecto al eje de las x, posición de los puntos respecto al eje de las y, así como otras dos variables que no les serían importantes para su experimento (que eran las derivadas de la posición de los puntos respecto al eje de las x y de las y, pero decidimos no pararnos a explicar en qué consistían ya que no era relevante para el experimento y todavía no habían estudiado en clase el concepto de derivada). Cuando terminaron de responder el ítem 4 les facilitamos el 5, con lo que obtuvieron las coordenadas de los puntos que relacionaban tiempo y altura de la pelota. Algunos alumnos terminaron antes y les proporcionamos las preguntas del ítem 6.

Durante la sesión tercera, abordan el ítem 6 para encontrar una función que ajustara a los puntos con la app Desmos y la mayoría de alumnos pidieron el ítem de ayuda para hacerlo, aunque algunos de ellos se resisten porque quieren intentar hacerlo sin ningún tipo de ayuda. Con la ayuda 1, los alumnos son capaces de encontrar la función cuadrática que ajusta a los puntos, aunque en algunos casos tienen dificultades para saber cómo mover la función en el eje de las x, por lo que al preguntarnos les guiamos a través de preguntas hasta que encuentran cómo hacerlo. Algunos alumnos que terminan más pronto empiezan el ítem 7 pero no la mayoría.

Finalmente, en la última sesión, los alumnos abordan los ítems 7, 8 y 9. Algunos alumnos no entienden qué significa $f(x)$ en el primer apartado de la pregunta 8 y al ver que era una duda generalizada, explicamos en voz alta que $f(x)$ es equivalente a y y cuando les pedimos que calculen f de un número concreto lo que tienen que entender es que calculen el valor de y cuando x vale ese número. Aclarada la duda generalizada, prosiguen respondiendo el resto de preguntas sin mayor dificultad.

3.2.3.3. Lección 3. El alargamiento de un muelle

<u>Número de sesiones, días y contenidos</u>

Esta tercera lección se llevó a cabo en dos sesiones y media. Inicialmente habíamos previsto que se realizara en tres pero debido a que ahora los alumnos ya conocían la estructura de las preguntas y lo que les pedíamos con estas, así como el funcionamiento de las diferentes apps, la lección transcurrió más rápido de lo previsto (además de que en esta lección no les pedíamos que transformaran una expresión algebraica a otra, con lo que el tiempo empleado fue menor). Concretamente, durante la primera sesión abordaron los ítems 1, 2 y 3, realizaron y grabaron el experimento mientras respondían los ítems 4 y 5. En la siguiente sesión continuaron trabajando en la pregunta 5 para obtener las coordenadas de los puntos que representaban la relación entre el número de canicas y el alargamiento del muelle y terminaron empezando a responder la pregunta 8, pero solo algunos de los grupos. Para finalizar, en la tercera sesión acabaron de responder los ítems 8 y 9, para lo que utilizaron solo la primera parte de la sesión. Esto se llevó a cabo los días 16, que tuvieron lugar dos de las sesiones usando la tutoría y la clase de matemáticas, y 20 de octubre, la primera parte de la sesión.

<u>Material necesario y lugar de las sesiones</u>

Para la realización de esta sesión fueron necesarios iPads (uno por cada pareja de alumnos y dotados con las apps Video Physics, Graphical Analysis, Desmos y Free Graphing Calculator), las fichas con los ítems del experimento del muelle, un listón de madera, un ordenador con conexión inalámbrica, dos mesas o sillas de clase libres, un muelle bastante elástico, un vaso de plástico no muy pesado, unas 8 canicas, cinta adhesiva y una cinta métrica. Además, también fue necesario internet inalámbrico para transferir los datos una vez grabado el vídeo al resto de iPads para que los alumnos continuaran trabajando con estos. Asimismo, durante las sesiones relativas a la lección 3 estuvieron trabajando en el aula habitual del grupo.

Procedimiento seguido y problemas surgidos

Al inicio de la sesión procedimos como en el experimento anterior, repartimos las hojas con los enunciados de la tarea y pedimos un voluntario para que leyera el enunciado en voz alta y aclarar posibles dudas por lo que respecta a la comprensión del fenómeno que se disponían a estudiar. Una vez leído y entendido el enunciado, les repartimos las hojas con el primero de los ítems. Cabe destacar que en este caso ya la mayoría de los alumnos intuía que al pedirles que dibujaran la relación entre dos variables les estábamos pidiendo que representaran la gráfica de la función que las relaciona, por lo que ya muchos de ellos no realizaron un dibujo sino que representaron directamente la gráfica de la función. Además, como en este caso el enunciado de la pregunta no era acotado y se planteaba de forma general, sin hacer referencia a ningún dato concreto (número de canicas introducidas, elasticidad del muelle, cuando consideramos que acaba el experimento, etc.) dependiendo de las variables tenidas en cuenta, dibujaron la función de una forma o de otra (por ejemplo, como veremos en el siguiente capítulo, los alumnos del grupo 2 consideran que la función no es exactamente lineal porque el muelle se deforma y va perdiendo elasticidad conforme se introducen más canicas en el vaso). Cuando terminan el ítem 1 responden las preguntas del 2 y del 3.

Al igual que en la lección anterior, el primer grupo de alumnos que terminó de responder las cuestiones del ítem 3 nos ayudó en la preparación del experimento. En este caso, realizamos un montaje en un rincón del aula en el que dispusimos dos mesas y entre ellas un listón de madera. Colgando de este colocamos el muelle sujetado con cinta adhesiva y, de este, enganchamos también con cinta adhesiva un vaso de plástico de forma que dejamos un pequeño espacio entre el muelle y el vaso para poder introducir las canicas. Les pedimos a los alumnos que midieran con la cinta métrica la pata de una de las mesas ya que esta sería la medida de referencia que deberían introducir en la app. Cabe destacar que, antes de realizar el experimento en clase, buscamos un muelle cuya elasticidad no variara demasiado al colgarle el vaso de plástico e introducir unas pocas canicas. Una vez terminaron todos de responder el ítem 3, se realizó y se grabó el experimento con uno de los iPads y, a continuación, se transfirió el vídeo a cada uno de estos pero esta vez sin ninguna incidencia. Probablemente debido a esto y a que ahora ya conocían el funcionamiento de la app Video Physics, los alumnos fueron más rápidos en responder esta vez y terminaron la pregunta 4 durante la primera sesión e incluso alguno de ellos responde el ítem 5. En la segunda sesión empezaron en el ítem 5 y algunos en el 6. Cabe recordar que, aunque la función que ajustaría a los puntos obtenidos del experimento era una función que los alumnos habían trabajado bastante en cursos previos, la dificultad de este experimento residía en la forma de obtener las coordenadas de los puntos que representaban la relación entre el número de canicas (variable que no viene dada por la app Video Physics) y el alargamiento del muelle (variable que pueden obtener solo si son conscientes de donde fijan las referencias en dicha app, interpretan los valores obtenidos y realizan algunas operaciones en caso de que sea necesario). Como veremos después, ninguno de los alumnos se para a reflexionar en cómo toman las referencias y en si la variable considerada para el alargamiento del muelle es correcta o tiene sentido (para consideran la variable alargamiento deberán haber realizado cálculos para que esta valga cero cuando todavía no se han introducido canicas y tome valores positivos en el resto de casos). Los alumnos de uno de los grupos comentan que querían pasar las coordenadas de lo que ellos consideran por “alargamiento del muelle” de metros a centímetros para no obtener valores tan pequeños ya que resultaría más difícil de ajustar en la app Desmos. No obstante, al final deciden no realizar el cambio ya que, como ellos dicen, en este caso no podrían comparar la función obtenida luego con la que proporciona Graphical Analysis.

Conforme van terminando de responder las preguntas del ítem 5, piden las del 6 y del 7, que responden sin mayor dificultad aparentemente, lo que les permite encontrar la función que mejor ajusta a los puntos. Cabe destacar que solo en uno de los casos piden la ayuda en el ítem 6, probablemente porque la función lineal es más sencilla de ajustar y ya la han trabajado en cursos previos. Los alumnos del grupo 6 no pueden encontrar la función que ajusta a los puntos en Desmos debido a que no grabaron los puntos introducidos en Desmos en la sesión anterior y a que no disponen de la hoja en la que tenían las coordenadas de los puntos apuntadas ya que esta pregunta la habían contestado en la primera sesión. En esta sesión, algunos de los alumnos (los del grupo 1, 2, 4 y 8) empiezan a abordar las preguntas del ítem 8 antes de finalizar la clase. Para finalizar, en la última sesión, abordan los ítems 8 y 9. Debido a cómo han tomado las referencias, algunos de ellos nos explican que no pueden realizar algunos de los cálculos que les pedimos en 9 porque les faltan datos como la medida del vaso o la distancia total (ya que esto depende de donde hayan tomado las referencias). En estos casos, les pedimos que expliquen qué harían y por qué no pueden responder a las preguntas. De esta forma finaliza el estudio de este experimento y la primera parte de la clase.

3.2.3 4. Lección 4. El enfriamiento de un líquido

<u>Número de sesiones, días y contenidos</u>

Por último, para trabajar con el experimento del enfriamiento de un líquido empleamos dos sesiones y media también, empezando con este durante la segunda mitad de la sesión del día 20 de octubre. Durante esta, los alumnos respondieron los ítems 1, 2, 3, 4 y 5, cosa que hicieron con bastante rapidez debido a que ya estaban familiarizados con la estructura de las preguntas y al hecho de que en este experimento, aunque costaba tiempo de tomar los datos, no tenían que procesarlos como pasaba en los dos anteriores ya que Graphical Analysis ya proporcionaba las variables tiempo y temperatura. La siguiente sesión, que tuvo lugar el día 21 de octubre, se dedicó íntegramente a responder el ítem 6, es decir, a encontrar la función que ajustaba a los puntos con la app Desmos, cosa que les costó bastante y, como veremos en el estudio del grupo, la mayoría no fue capaz de encontrar. Por último, la sesión final, la del día 23 de octubre, los alumnos terminaron de responder los ítems que faltaban y realizamos una pequeña puesta en común al final de esta para hacer balance de lo que habían aprendido, recibir retroalimentación por parte de los alumnos y para que realizaran una valoración de la experiencia.

<u>Material necesario y lugar de las sesiones</u>

Para la realización de esta sesión fueron necesarios iPads (uno por cada pareja de alumnos y dotados con las apps Graphical Analysis, Desmos y Free Graphing Calculator), las fichas con los ítems del experimento del enfriamiento, un ordenador con conexión inalámbrica, un sensor de temperatura Go Wireless Temp de Vernier, una fuente de calor, un encendedor, unos guantes para el calor, unos 100 ml de agua y dos recipientes de cristal para calentar el agua. Además, fue también necesaria la conexión a internet, al igual que en los otros dos experimentos, para realizar la transferencia de datos del iPad donde se realizaría el experimento al resto. Cabe destacar que, a diferencia de en los otros experimentos, para realizar este experimento fue necesario usar uno de los laboratorios del centro debido que se iban a utilizar instrumentos de trabajos que podían ser peligrosos y el aula no estaba acondicionada para ello. Sin embargo, el resto de sesiones tuvieron lugar en el aula.

Procedimiento seguido y problemas surgidos

Este experimento empezó en la segunda mitad de la sesión dedicada a acabar de responder las preguntas del experimento del muelle. Conforme iban terminando de responder, les facilitamos las hojas del enunciado del experimento así como del primero de los ítems. En este caso, no realizamos la lectura del enunciado en voz alta sino que lo leyeron pareja por pareja y nos preguntaron las dudas que tenían, si era el caso. Los alumnos respondieron los ítems 1 y 2 y, dependiendo de los elementos o variables consideradas, dibujaron la gráfica con una forma u otra. Muchos alumnos tuvieron dificultades en el ítem 3 por el tipo de representación que habían hecho en el ítem 2, lo que les hizo tardar más tiempo en responder la pregunta.

A continuación, como teníamos que realizar el experimento en el laboratorio, nos desplazamos hasta allí e hicimos el experimento. El montaje ya estaba hecho previamente, por lo que calentamos el agua y tomamos datos durante unos minutos con el sensor y el iPad. Concretamente, lo que hicimos fue preparar un recipiente de cristal con agua dentro y lo calentamos usando una fuente de calor. Conectamos el sensor de temperatura a un iPad con la app Graphical Analysis e introducimos el sensor en el vaso de forma que en la pantalla de la app aparecía la temperatura a la que se encontraba el agua en cada instante. Entonces, cuando en la pantalla de la app pudimos ver que el agua había alcanzado una temperatura de unos 60 grados, quitamos el vaso de la fuente de calor con la ayuda de los guantes y lo dejamos reposar sobre el banco del laboratorio. Inmediatamente pulsamos el botón de la app Graphical Analysis para empezar con la toma de datos y esperamos unos 11 o 12 minutos. Cabe destacar que la transferencia de los datos del iPad al resto de los dispositivos mediante el ordenador la hicimos nosotros fuera de clase para evitar utilizar tiempo de la siguiente sesión y que pudieran producirse fallos con la conexión inalámbrica del centro (como pasó en el experimento de la lección 2) y, por consiguiente, no poder realizar la transferencia de datos. Además, debido al gran número de datos que había tomado la app (tomaba datos cada medio segundo durante unos 1 minutos) funcionaba de forma mucho más lenta de lo habitual a la hora de mostrar por pantalla la información relativa a los valores numéricos de las variables tiempo y temperatura. Por ello, decidimos copiar los puntos en forma de dos columnas (tal como aparecían en la app) en una hoja aparte y administrársela a los alumnos al inicio de la siguiente sesión. Sin embargo, no copiamos todos los datos sino solo aquellos cuyas coordenadas temporales eran múltiplos de 5, cosa que redujo mucho la cantidad de datos y además permitió presentar las dos columnas de datos divididas en tres partes en una misma hoja, lo que permitiría que obtuvieran una visión general de cómo eran los puntos (ver Anexo 12). De esta forma, los alumnos tendrían todos los valores de las dos variables y les sería más rápido poder elegir los puntos. Cabe destacar que esta sesión se realizó el día 21 y duró un poco más de 55 minutos, utilizando una pequeña parte del recreo que tenía lugar a continuación ya que queríamos terminar de realizar el experimento. Después de proporcionarles la hoja con los puntos a los alumnos, les pedimos que eligieran unos 10 puntos aproximadamente y los copiaran al Desmos.

A continuación, tuvieron que encontrar la función que ajustara a estos puntos (ítem 6), a lo que se dedicaron durante toda la segunda sesión. Cabe destacar que todos los alumnos menos los del grupo 4 nos pidieron la hoja de ayuda para poder encontrar la fórmula de la función. Algunos se sorprendieron al ver que la función era una exponencial ya que esto entraba en contradicción con lo que habían elegido durante el análisis cualitativo bien por el tipo de gráfica representada en el ítem 2 o bien porque pensaban que la exponencial tenía otra gráfica. Además, aparecieron problemas a la hora de escribir la función exponencial en Desmos ya que los que pidieron la hoja de ayuda intentaban escribir la expresión de partida, e^x pero lo hacían introduciendo "ex", en vez de usar la tecla "a^b, o incluso elevando la función a valores numéricos, no a x, por lo que les resultó difícil encontrar la gráfica. Sin embargo, decidimos no intervenir y que continuaran trabajando con la función que obtendrían en Graphical Analysis en la siguiente pregunta. Después, en la última sesión, obtienen la fórmula con esta app y responden las preguntas del resto de los ítems.

Al final de la sesión cuando ya todos habían terminado el experimento realizamos una puesta en común de las impresiones que habían tenido, con la finalidad de ver la idea que tenían sobre lo que habían aprendido y si sería posible mejorar algunos aspectos en vistas a futuras implementaciones del material de enseñanza. En general, los alumnos comentaron que les había gustado mucho la experiencia pero que lo que no les gustó es que tenían que escribir y justificar todo lo que hacían, aspecto que se hizo principalmente con la finalidad de recopilar datos para la investigación. Sin embargo, también se pensó con el objetivo de que reflexionaran sobre lo que habían hecho por lo que les preguntamos si pensaban que les había servido y uno de los alumnos de la pareja 7 explicó que realmente sí porque algunas veces gracias a tener que explicar todo lo que hacían se daban cuenta de que el razonamiento que habían hecho no era correcto. Otra alumna comentó que habían aprendido que hay funciones en la realidad y que nunca antes lo hubiera dicho, que por fin han visto que las cosas de matemáticas se pueden aplicar ya que los profesores siempre lo dicen pero nunca lo demuestran. En la misma línea, otra alumna comentó que le había parecido destacable el hecho de que a partir de un vídeo pudieran obtener gráficas y hacer matemáticas, por lo que destacan la utilidad de esta herramienta tecnológica para la obtención de datos reales. Remarcaron además que les había gustado trabajar por parejas, algo a lo que no estaban acostumbrados, y que les hacía que tuvieran que hablar de todas las cosas. Otro alumno comentó que de este modo también habían podido experimentar una mejora en cuanto al uso de las tabletas y a la comprensión de los enunciados con respecto al primer experimento.

Después de llevar a cabo las lecciones en el aula, realizamos un análisis de los datos obtenidos para seleccionar a cuatro alumnos que participarían en el estudio de casos que consistió en la realización de una entrevista.

3.2.3 5. Las entrevistas. El calentamiento de un cuerpo

Número de sesiones, días y contenidos

Para la realización de las entrevistas relativas al estudio de casos empleamos cuatro sesiones que tuvieron lugar los días 12 y 19 de febrero de modo que realizamos dos entrevistas completas cada día.

Material necesario y lugar de las sesiones

Para la realización de estas sesiones fueron necesarios iPads (uno para cada alumno, dotados con las apps Graphical Analysis con los datos de los experimentos E1, E2 y E3; con la app Desmos y con la app Free Graphing Calculator, por si acaso), la ficha con los ítems del experimento del calentamiento y las hojas de puntos E1, E2 y E3. En este caso no fue necesaria la conexión a internet para pasar datos porque los alumnos no tenían que realizar los experimentos en clase ni enviarlos (aunque sí que fue necesario para proyectar la pantalla del iPad en el ordenador y grabarla usando el programa Air

Server). Las sesiones se realizaron durante las sesiones de clase y tutorías pero en un aula aparte.

Procedimiento seguido y problemas surgidos

La estructura de las entrevistas fue la misma para cada caso. Esta constaba de tres partes como ya hemos comentado. En la primera hicimos un recordatorio de los experimentos de las lecciones 2, 3 y 4 con la ayuda de los alumnos, preguntándoles siempre que fuera necesario el motivo de sus respuestas. En la segunda parte, les presentamos el cuarto experimento que deberían estudiar y les hicimos preguntas para que realizaran un estudio cualitativo antes de trabajar con los datos del experimento. En la tercera parte les facilitamos los datos y les pedimos que los interpretaran, que seleccionaran unos cuantos y los representaran en Desmos y, por último, que trataran de encontrar la función de ajuste de la gráfica a los puntos mediante la manipulación de la expresión algebraica correspondiente. Por lo que respecta al tipo de forma canónica que debían obtener, nuestra actitud fue la de dejarles libertad a los propios alumnos para seguir el criterio que ellos mismo creyeran conveniente, siempre y cuando la forma canónica de la fórmula hacia la que se dirigían les permitiera observar la relación entre el valor de los parámetros y el movimiento de la gráfica y/o su relación con los datos de su experimento.

Cabe destacar que, debido a la falta de tiempo, solo un alumno pudo abordar la parte de la comparación entre los valores de los parámetros obtenidos para las funciones y los valores de las temperaturas iniciales de cada experimento (como veremos en el capítulo 6).

3.2.4. Los instrumentos de recogida de datos

A continuación, pasamos a detallar cuáles fueron los instrumentos de recogida de datos y qué información esperamos extraer de estos pero para empezar, comentaremos cómo recopilamos los datos en cada parte del experimento de enseñanza.

Primeramente, conviene señalar que disponíamos de información previa de los alumnos de antes de empezar con el experimento, tanto de los contenidos que habían abordado en el curso previo y la metodología con la que había trabajado en clase como también de lo que habían estado trabajando durante las sesiones previas a la realización del experimento de enseñanza (ver Anexo 3).

Por lo que respecta a las sesiones en las que los estudiantes estuvieron respondiendo las preguntas del cuestionario inicial, aparte de disponer de las fichas con sus respuestas, también teníamos información sobre las posibles dificultades observadas o comentarios realizados por los alumnos durante estas debido a que estuvimos realizando anotaciones en una hoja de todos los aspectos que pensábamos que podrían resultar relevantes para poder entender mejor las respuestas que habían dado.

Por otro lado, durante la sesión en la que tuvo lugar la enseñanza sobre cómo completar cuadrados, fotocopiamos los apuntes de uno de los alumnos para poder disponer de la información de cómo se había llevado a cabo esta. Aparte, tanto en estas sesiones como en las de los experimentos y las entrevistas, realizamos grabaciones de vídeo para tener registradas todas las intervenciones que se hacían en voz alta o posibles aclaraciones por parte de la profesora habitual del grupo y que podrían haber influido en sus respuestas.

A continuación, durante las sesiones dedicadas a los experimentos pudimos obtener datos de tres fuentes, aparte de las grabaciones de vídeo en el aula: las fichas, los iPads y los diarios de aula. Estos últimos los diseñamos con la finalidad de recopilar información extra sobre aspectos que nos resultaran interesantes para el análisis posterior de los datos como por ejemplo posibles preguntas que formulaban los alumnos en clase, posibles interpretaciones de las reflexiones que hacían estos, si les dábamos alguna información relevante que pensábamos que podría influir en sus respuestas, etc. En particular, estos diarios de aula constaban de dos partes (la plantilla se puede consultar en el Anexo 13). En la primera aparecía una tabla de ocho filas, una por cada pareja participante, y dos columnas, de forma que la primera contenía el número identificativo de cada pareja y la segunda un espacio en blanco donde realizar las anotaciones. La segunda parte constaba de tres apartados: el primero de ellos estaba pensado para anotar el contenido abordado durante la sesión y los ítems que habían contestado la mayoría de los estudiantes así como un espacio para que, en caso de que alguna de las parejas no hubiese terminado de responder alguno de los ítems, tenerlo en cuenta para la próxima sesión; en el segundo apartado había un espacio para anotar si se había producido algún incidente y, por último, en el tercero, comentarios globales de observaciones realizadas en clase. Además, aprovechando que en estas sesiones cada pareja disponía de un iPad, les pedimos a los alumnos que al empezar la clase realizaran grabaciones de audio con la app AudioMemos para así poder disponer de las discusiones individuales que se producían entre estos de modo que, si en algún caso no nos era posible encontrar el motivo por el cual habían dado una respuesta tendríamos la posibilidad de recuperar la conversación y así averiguarlo.

Por último, durante las entrevistas a algunos de los estudiantes, realizamos tanto grabaciones de videos para tener registrados sus gestos y señales como grabaciones de audio mediante una grabadora de voz Roland Edirol R-09HR. Además, realizamos grabaciones de la pantalla del iPad con el que trabajaba cada uno de los alumnos para poder así tener la información de lo que estaban haciendo en cada momento, cosa que hicimos conectando el iPad mediante conexión inalámbrica a un portátil y realizando la grabación sobre la pantalla de este con el programa Air Server. Asimismo, de la parte de las entrevistas también pudimos disponer de las hojas en las que los estudiantes hacían esbozos cuando trataban de explicar mejor sus respuestas, realizaban anotaciones de datos para acordarse más adelante, apuntaban fórmulas o realizaban cálculos.

Por tanto, los instrumentos de recogida de datos fueron las fichas de los alumnos, los iPads, las grabadoras tanto de audio como de vídeo y, finalmente, los diarios de aula. La información disponible en las fichas nos permitió saber más acerca de los conocimientos de los alumnos sobre las familias de funciones, cómo relacionaban gráficas con fórmulas, cómo las interpretaban en relación con los experimentos, etc. Por otro lado, de los iPads pudimos obtener los vídeos con la posición donde los estudiantes fijaban las referencias, la información sobre la función elegida en Graphical Analysis o los puntos elegidos para representarlos en Desmos entre otros; las capturas de pantalla que les pedimos que hicieran a lo largo del experimento, y también las grabaciones de voz. Además, como hemos dicho, también pudimos obtener grabaciones de la pantalla del iPad cuando los alumnos trabajaban con la app Desmos durante las entrevistas por el hecho de proyectar la imagen de dicha pantalla en el portátil y realizar grabaciones de esta. Las grabaciones de audio realizadas con el iPad nos permitieron tener registrado el proceso de resolución seguido por los alumnos y recuperar las conversaciones entre las diferentes parejas durante las sesiones de aula (aunque no en todos los casos ya que la grabación tuvo lugar en clase y había muchas conversaciones paralelas a la vez, por lo que no se podían escuchar tan bien como nos hubiera gustado) y las realizadas con la grabadora Roland Edirol R-09HR, nos permitieron obtener las intervenciones tanto nuestras como de los alumnos durante la entrevista. Por otro lado, la cámara de vídeo nos permitió, aparte de obtener las conversaciones que tenían lugar en general en el grupo y las anotaciones que se hacían en la pizarra durante las sesiones de clase, también los gestos que realizaban los alumnos tanto durante las sesiones de clase como durante las entrevistas. Por último, de los diarios de aula pudimos obtener información que nos pareció destacable durante la realización de los experimentos con la finalidad de tenerla en cuenta para el análisis de los datos.

3.2.5. DIFICULTADES, LIMITACIONES Y ASPECTOS MEJORABLES

Después de implementar la secuencia de enseñanza, pudimos observar algunas limitaciones o aspectos susceptibles de mejora relativos a dicha implementación. Debido a que la investigación presentada no consiste en un estudio en el que se implementa un material de enseñanza en el que se aísla a los sujetos del entorno habitual en el que se encuentran para analizar unos aspectos concretos sino que consiste en una investigación que se lleva a cabo en el contexto habitual de un aula, podemos distinguir dos puntos de vista: el de la docencia y el de la investigación. Por ello, pasamos a continuación a detallar las limitaciones observadas organizando el apartado según si estos se refieren a la realización del experimento de enseñanza en sí (organización de las lecciones, dificultades de los alumnos, metodología usada, etc.), por la importancia que pueda tener para el docente; o más a la parte relativa a todo lo relacionado con la investigación (falta de datos, dificultades a la hora de recoger la información, etc.), por la importancia que pueda tener para el investigador si desea replicar el experimento.

En primer lugar y por lo que respecta a la parte de la docencia, pudimos observar que en algunas preguntas los alumnos tenían dificultades para saber qué les pedíamos por no ser los enunciados de estas lo suficientemente claros o concisos, por lo que habría que reformularlos (ver sección 6.5). Por ejemplo, durante la implementación del cuestionario previo los alumnos tenían dificultades a la hora de comprender lo que les pedíamos en el ítem 8 ya que no sabían a qué nos referíamos con la expresión “cuadrados perfectos”. Por ello, tal vez deberíamos cambiar la formulación y pedirles que transformaran las tres expresiones propuestas a una que fuera equivalente pero de la forma $y = a(x - b)^2 + c$. Por otro lado, presuponíamos que, al ser las tabletas una herramienta que utilizan a diario los alumnos (aunque con fines distintos con los que lo hacen aquí) no tendrían mayor dificultad a la hora de conocer el funcionamiento de las apps y decidimos prescindir de realizar explicaciones muy concretas de su funcionamiento en el enunciado de los ítems a no ser que fuera necesario. Sin embargo, a pesar de que no les resultó muy complicado entender su funcionamiento, sí que nos formularon bastantes preguntas sobre su funcionamiento durante la primera de las lecciones en las que las usaron. Por ello, como posible solución a esto, podrían o bien añadirse instrucciones más concisas en los enunciados de los ítems en los que se requiere el uso de las apps o bien realizar una lección previa a las lecciones 2, 3 y 4 en la que se abordara el funcionamiento de las apps utilizadas. Por lo que respecta a cómo estaban enunciadas los experimentos, al principio los alumno se muestran y comentan que no pueden dibujar cómo será la función por no disponer de números ni datos concretos, probablemente como consecuencia de que siempre que representan gráficas de funciones lo hacen a partir de los valores concretos o con datos específicos por lo que nos preguntan reiteradamente si lo que hacen es correcto o no, por lo que deberían plantearse más tareas de este estilo en clase.

En relación al tipo de metodología de trabajo empleada en las lecciones 2, 3 y 4 que consistía en trabajar por parejas, también observamos algunos aspectos que pudieron dificultar de algún modo el trabajo, aunque los propios alumnos destacan en la sesión final en la que hay una puesta en común que este tipo de trabajo fue positivo. En concreto, lo que sucedía era que en algunos casos los alumnos de una misma pareja no se ponían de acuerdo con la respuesta o no concebían el fenómeno de la misma forma, por lo que nos pedían ayuda y nos preguntaban la solución. Este hecho podría deberse a que no los alumnos no estaban acostumbrados a trabajar por parejas sino más bien de forma individualizada, por lo que se centran en defender su propia postura. En estos casos les comentamos que, aunque no pensaran igual que intentaran explicar su punto de vista, escuchar el punto de vista del compañero y trataran de llegar a un acuerdo.

En cuanto a las limitaciones en relación al uso de la tecnología, tuvimos algún problema al copiar el vídeo del experimento de la pelota a los iPads del resto de alumnos debido a la mala conexión inalámbrica en el aula, lo que no sucedió en el resto de sesiones. Además, también tuvimos que solucionar el problema de que, al disponer de una gran cantidad de datos para el experimento del enfriamiento, la app Graphical Analysis no funcionaba con fluidez, por lo que tuvimos que copiar los puntos en una hoja y facilitársela a los alumnos en la siguiente sesión. Asimismo, en algún caso alguno de los iPad dejó de funcionar y tuvimos que cambiarlo a mitad experimento. Con respecto a las características de las apps usadas, cabe destacar que, para encontrar la función en Graphical Analysis, en vez de buscar la función que sabían que ajustaría a los puntos de entre las que se proporcionan en la lista, lo que hacen la mayoría de alumnos es ir probando las diferentes opciones que les mostraba la app por pantalla. Aunque *a priori* pensamos que esto podría ser debido a que no reflexionaban sobre qué tipo de función ajustaría a los puntos, durante las sesiones de clase los alumnos nos explicaron que actuaban de este modo debido a que la app solo les proporcionaba el nombre de la función y no la fórmula (como sí que hacía la app Data Analysis). Además, este estaba en inglés (proportional, quadratic), por lo que muchos alumnos no conocían a qué función se refería la app y optaban por ir probando todas las opciones hasta encontrar una que ajustara. En cuanto a la notación también surgió alguna dificultad como por ejemplo que en Desmos la coma decimal se expresaba con un punto, como en la lengua inglesa y al contrario de lo que sucede en español que se hace mediante una coma. Por ello, al tener que copiar las coordenadas de los puntos a la app Desmos, algunos alumnos copiaban tanto las comas decimales como las que sirven para separar ambas coordenadas usando la coma decimal, cosa que les da error.

También pensamos que la duración de las sesiones debería ser mayor de forma que en una misma sesión los alumnos empezaran y terminaran cada uno de los experimentos ya que si no teníamos que interrumpir el estudio de un experimento para continuar el próximo día, cosa que ocasionaba que no tuvieran tan reciente lo que habían estado haciendo previamente.

Así pues, a pesar de que tomamos la decisión de que los alumnos trabajaran a su ritmo en clase para no tener que estar esperando a que terminaran para hacer puestas en común (aparte de para que las respuestas no fueran influenciados por las de sus compañeros), en algunos momentos sí que había que esperar a que todos terminaran algo para empezar la parte siguiente, como es el caso en que tenían que realizar los experimentos, que no podíamos empezar hasta que todos hubieran respondido las cuestiones del ítem 3, cosa que hizo que el tiempo de implementación fuera mayor de lo esperado inicialmente.

Con respecto a la parte de investigación, más en concreto a la toma de datos mediante el uso de la tecnología, cabe destacar que, no pudimos grabar la pantalla de los iPads en vídeo, lo que nos hubiera permitido obtener información muy relevante para conocer el tipo de operaciones que realizaban los alumnos para obtener la función que ajustaba a los puntos en la app Desmos. Esta limitación ya la tuvimos en cuenta antes de la implementación del material de enseñanza y tratamos de buscar alternativas como por ejemplo colocar una cámara de vídeo por cada pareja de alumnos o conectar cada iPad a un ordenador portátil y grabar la pantalla de este (tal cómo se hizo durante las entrevistas). No obstante y debido a la poca viabilidad de este tipo de alternativas, decidimos descartarlas y dejar el análisis de las actuaciones de los estudiantes relativas al significado de los parámetros para las entrevistas ya que pensamos que el hecho de realizar la toma de datos de este modo podría llegar a influir de forma negativa en el ritmo normal de las sesiones debido a la presencia de tal elevado número de cámaras o dispositivos. Por otro lado, también se produjeron otros hechos inesperados que impidieron que pudiéramos obtener otros datos, como por ejemplo un caso en el que la cámara de vídeo que se encargaba de grabar el aula dejó de funcionar o que las grabaciones de voz que realizaban los alumnos con la app AudioMemos en iPad se cortaban cuando estos abrían la app Video Physics, por lo que no pudimos obtener algunos fragmentos de información. Sin embargo, al disponer de las respuestas de los alumnos a las fichas, las capturas de pantalla y los diarios de aula, el hecho de perder parte de los datos no fue decisivo para conocer los motivos que los habían llevado a dar una respuesta determinada.

Por otro lado, por lo que respecta a la toma de datos mediante las fichas de los alumnos, aunque les pedíamos que explicaran sus respuestas en detalle y de que había espacio suficiente en cada hoja para hacerlo, en algunos casos estos no daban demasiada información. Por ejemplo, aunque tratamos de obtener información acerca del significado que los alumnos atribuían a los parámetros pidiéndoles de forma específica que explicaran lo que hacían para obtener la fórmula de las funciones, estos no explicaban lo suficientemente sus respuestas y no pudimos obtener toda la cantidad de información que nos habría gustado. Por otro lado, el hecho de retirarles a los alumnos las hojas de cada ítem después de haber terminado de responder, aunque en general aportó más aspectos positivos que negativos ya que de esta forma no pudieron modificar sus respuestas, supuso un inconveniente en algún caso puntual. En concreto en el de los alumnos de la pareja 6, que debido a que no grabaron los datos en la app Desmos cuando trabajaban para encontrar la función que ajustaba a los puntos en el experimento del muelle, en la sesión posterior no pudieron disponer de esta información que se encontraba en la hoja del ítem 5. También tuvimos dificultades para detectar si las respuestas de los estudiantes al ítem 6 se realizaban antes o después de solicitar la hoja de ayuda, puesto que estos respondían en la hoja del ítem 6 antes y después de haber utilizado la ayuda.

4. Estudio del grupo

Debido a cómo hemos organizado la enseñanza y atendiendo a los objetivos de investigación, en los siguientes capítulos 5 y 6 presentaremos todo aquello relacionado con el modelo de actuación del MTL. Concretamente, en este capítulo abordaremos todo lo referente a las actuaciones de los estudiantes durante la implementación de la secuencia de enseñanza en clase, mientras que en el 6 describiremos todo aquello relativo a las actuaciones de los estudiantes que fueron seleccionados para participar en las entrevistas durante la realización de estas.

Centrándonos pues en este capítulo, expondremos en primer lugar la finalidad con la que se llevó a cabo el estudio de grupo, justificando por qué se realizó de tal forma (sección 4.1). Después describiremos cuáles fueron las técnicas de obtención de los datos en cada caso así como la forma en que llevamos a cabo el análisis de estos en relación con la finalidad del estudio (sección 4.2). Por último, presentaremos el análisis de los datos y los resultados (sección 4.3), organizando la sección según la lección a la que hacen referencia estos de modo que empezaremos mostrando los resultados de la lección 1, correspondiente a la realización del cuestionario previo, para continuar con los relativos a las lecciones 2, 3 y 4, en las que los alumnos realizaron estudios de fenómenos físicos. Además, en cada lección presentaremos los resultados del análisis empezando por los relativos a las actuaciones de cada alumno o pareja de alumnos, continuando por los resultados para cada ítem y terminando presentando un resumen de los resultados más importantes observados en cada lección. Cabe destacar que, como acabamos de mencionar, lo que se muestra en relación con la última sección no es solo el propio análisis en sí sino también los resultados de este, que aunque inicialmente se presenten en un formato más “en bruto”, conforme se avanza en el proceso de análisis estos se irán refinando.

4.1. FINALIDAD DEL ESTUDIO

Planteamos el estudio de grupo con un doble propósito. En primer lugar, con la finalidad de describir cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con el modelo de enseñanza en relación con los aspectos descritos en el modelo de competencia, aspecto relacionado con el objetivo general del trabajo; y de forma más concreta, con el propósito de abordar los objetivos de investigación que hemos enunciado de forma más específicas. Y, en segundo lugar, con la finalidad de caracterizar a los estudiantes que participaron posteriormente en el estudio de casos[17].

Por tanto, por un lado, del primero de los propósitos enunciados se desprende la necesidad de realizar un resumen de los resultados, relativos a las actuaciones de los estudiantes en general en el modelo de enseñanza y, más en concreto, en relación con algunos de los elementos que se incluyen en este. Estos resultados se mostraran en el apartado 4.3 para cada una de las lecciones y se obtendrán como resultado de observar las tendencias cognitivas de los estudiantes en cada una de estas. Cabe destacar que las tendencias cognitivas observadas a lo largo de las diferentes lecciones que analizamos en este capítulo se presentaran posteriormente en el capítulo 6, ya que así será posible complementar la información con los resultados que se desprendan del estudio de casos.

Por otro lado, del segundo de los propósitos se deriva la necesidad de dar sentido a las actuaciones de los alumnos que posteriormente seleccionamos para su posterior participación en un estudio de casos. Por ello, aquí empezaremos realizando un análisis de las actuaciones de cada uno de los estudiantes o parejas de estudiantes para cada ítem de modo que en el capítulo 5 presentaremos una descripción de las actuaciones de cada una de las parejas seleccionadas en las diferentes lecciones de la secuencia de enseñanza.

4.2. LA TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE DATOS

Empezaremos el análisis realizando una descripción de las actuaciones de los alumnos, en cada una de las lecciones y más en concreto haciendo referencia a cada uno de los ítems o partes en las que hemos dividido cada lección. Dicha descripción se llevará a cabo realizando un vaciado de la información disponible en los diferentes instrumentos de recogida de datos y poniéndola en común. Además, debido a que el objetivo no es solo el de analizar sus actuaciones con miras a la obtención de tendencias cognitivas sino también el de caracterizar a los alumnos o parejas de alumnos, no solo describiremos las actuaciones de estos sino que también trataremos de dar sentido a dichas actuaciones a través de la formulación de hipótesis explicativas, esto es, explicaciones de las posibles causas que llevan a los alumnos a actuar de un modo concreto. Cabe destacar que estas hipótesis no se formulan con la intención de asegurar que los procesos cognitivos reales de los estudiantes son los que hemos hipotetizado, sino que si los procesos cognitivos fueran los descritos, las actuaciones serían las que hemos observado, lo que se debe al carácter descriptivo, explicativo y predictivo de un MTL (Puig, 2008). Asimismo, documentaremos las dificultades observadas y los errores cometidos puesto que nos serán de utilidad no solo para caracterizar a los alumnos sino también para determinar aquellos elementos que deberán ser incorporados en el modelo de competencia.

Por otro lado, para obtener los resultados que dan respuesta a las preguntas de investigación, lo que haremos será realizar una descripción de los tipos de actuaciones observadas en cada ítem partiendo de la descripción de las actuaciones de los alumnos que acabamos de realizar. Para ello, empezaremos construyendo tablas de doble entrada para cada uno de los ítems de modo que en cada una de ellas se indiquen los diferentes

[17] Como veremos en el capítulo 6, el estudio de casos servirá también para poder dar respuesta a las preguntas de investigación, en concreto, para complementar los resultados obtenidos y dar respuesta a alguna de las preguntas de forma más precisa.

tipos de actuaciones de cada alumno o pareja de alumnos en relación con diferentes aspectos del ítem que nos interesan estudiar. Cabe destacar que el tipo de actuaciones asociadas a los alumnos se determinará teniendo en cuenta la descripción por parejas que acabamos de realizar y agrupando actuaciones semejantes. Las tablas correspondientes a los ítems de cada una de las lecciones se pueden observar en los anexos 15, 16, 17 y 18. A continuación, describiremos en detalle los tipos de actuaciones observadas para cada pareja en relación con cada aspecto destacado del ítem, formulando además hipótesis explicativas de los motivos que pueden haberles conducido a actuar de tal manera. Por último, realizaremos un resumen de los resultados relacionados con las actuaciones de los alumnos que hayamos observado que se repiten a lo largo de la lección tanto para los alumnos como en los diferentes ítems y que llamamos tendencias cognitivas.

Como ya hemos comentado, por los tipos de instrumentos de recogida de datos usados, en algunos casos no será posible obtener toda la información acerca de las actuaciones de los estudiantes en el estudio del grupo. Por ello, habrá que tener en cuenta que lo que aquí presentamos son los resultados obtenidos en relación con los datos disponibles, siendo conscientes de que habrá que complementarlos con la información obtenida del estudio de casos. Como veremos, esto sucede por ejemplo con los resultados obtenidos en el ítem 6 de las lecciones 2, 3 y 4, de modo que con los datos disponibles en algunos casos no nos será posible conocer el proceso seguido por los alumnos hasta conseguir la fórmula de la función que ajusta a los puntos dotando de significado a los parámetros ni tampoco el tipo de significado que atribuyen en cada momento a cada parámetro, cosa que se complementará con los resultados que se deriven del posterior estudio de casos.

Además, cabe destacar que, como ya hemos avanzado en la introducción de este capítulo, lo que aquí mostramos ya son resultados en sí de modo que se presentan en diferentes fases o niveles según como estén de organizados. Por ello, comenzamos con los resultados más “en bruto” que son aquellos que se obtienen como resultado de describir las actuaciones de los estudiantes en cada uno de los ítems, continuando por los resultados de cada ítem que se presentan organizados de algún modo, y, por último, terminando con el resumen de los resultados observados que se derivan de los anteriores y se agrupan según tendencias cognitivas observadas.

4.3. ANÁLISIS Y RESULTADOS POR ALUMNOS E ÍTEMS

A continuación pasamos a mostrar el análisis de los datos. Debido a la necesidad de mantener el anonimato de los estudiantes participantes en el estudio, explicaremos el tipo de código que asignamos a cada uno de ellos para poder identificarlos durante el análisis de sus respuestas pero sin tener que revelar su verdadera identidad. Cabe destacar que, como los alumnos trabajaron por parejas en la mayor parte del experimento, decidimos asignar un código a la pareja de alumnos y, a partir de este, asignar otro a cada alumno para poder identificar fácilmente a la pareja a la que pertenecía cada uno de ellos cuando trabajaban individualmente. Por ello, a cada pareja le asignamos un número del 1 al 8 puesto que había un total de 8 parejas y, a partir de este, asignamos a cada alumno el código $x.y$ con x, y números naturales tales que $1 \leq x \leq 8$ y $1 \leq y \leq 2$. En este código, el primer número indica el número de la pareja a la que pertenece el alumno, x, y el segundo número que aparece en el código, y, se asignó de forma aleatoria para distinguir un alumno del otro de la misma pareja. Los números que se asignaron a las parejas y a los que haremos referencia durante el análisis, son los mismos que les asignamos en clase y que los alumnos utilizaron para identificarse en las fichas y para saber el número del iPad con el que estaban trabajando.

Es importante destacar que, a pesar de que identificamos a los alumnos de forma individual y no solo como parte de una pareja, durante el análisis de los datos derivados del trabajo en equipo no haremos distinción entre los alumnos de una misma pareja ya que nos interesa analizarlos como pareja en sí puesto que las decisiones que toman son el resultado de una discusión y un posterior acuerdo entre ambos. Sin embargo, en casos puntuales haremos referencia a algunos de los miembros de alguna pareja en concreto si lo consideramos necesario puesto que esto nos podrá servir para caracterizar sus actuaciones en cuanto a la elección de alumnos para la realización del estudio de casos.

Como hemos comentado, organizaremos esta sección en relación con los resultados obtenidos para cada lección y, para cada una de ellas, mostraremos los resultados obtenidos primero por alumnos o parejas, después por ítems y, por último, realizaremos un resumen de los resultados.

Además, para cada ítem de cada lección hemos elaborado tablas resumen en las que se contemplan las respuestas de cada alumno o pareja de alumnos. Cabe destacar que hay tablas que recogen solo las respuestas de los alumnos en cada uno de los apartados del ítem y otras que se organizan según aspectos que hemos considerado relevantes en cada apartado o ítem. Elaboramos una tabla para cada ítem, menos en el caso del ítem 6 de las lecciones 2, 3 y 4, para el que consideramos dos tablas: una en general que muestra las respuestas de los alumnos en cada apartado y otra que muestra: 1. el proceso seguido por los alumnos hasta conseguir la fórmula dotando de significado a los parámetros de la fórmula utilizada, 2. el tipo de significado que atribuyen en cada momento a cada parámetro y 3. el efecto del uso de la ficha de ayuda 1 y de nuestra intervención en las actuaciones de los alumnos (en particular en el significado de los parámetros y el uso de una forma canónica u otra). Las tablas que citamos se muestran en los Anexos 15, 16, 17 y 18 y corresponden a las lecciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Asimismo, para las lecciones 2 y 3 elaboramos otras tablas, que se muestran en los Anexos 19 y 20 respectivamente, en las que mostramos cómo realizan la toma de referencias así como la categorización de sus respuestas en base a esta. En particular, para la lección 2 elaboramos la Tabla 19.1 del Anexo 19 en la que mostramos las capturas de pantalla que realizaron los propios alumnos, en las que se puede apreciar donde fijaron los ejes de coordenadas y qué medida de referencia tomaron (columna 1), dónde marcaron los puntos que mostraban la trayectoria de la pelota (columna 2) y un diagrama en el que representamos de forma esquemática dónde marcaron los puntos con respecto a la pelota y dónde fijaron el eje OX con respecto a esta, así como también el valor de la altura para el primer punto (columna 3). También elaboramos la Tabla 19.2 donde se muestra la categorización de sus respuestas según la toma de referencias. Por otro lado, para la lección 3, elaboramos dos tablas análogas a estas (Tabla 20.1 y Tabla 20.2) más otras dos en las que se muestran cómo consideran los alumnos las variables número de canicas (Tabla 20.3) y alargamiento del muelle (Tabla 20.4) a lo largo del experimento. En este caso, en la Tabla 20.1 se muestran dónde fijaron los ejes de coordenadas los alumnos y qué medida de referencia tomaron (columna 1), dónde marcaron los puntos que mostrarían como se alargaba el muelle (columna 2), un diagrama para cada caso en el que representamos de forma esquemática la posición de los puntos y del eje OX (elementos relevantes para las variables estudiadas) en relación con algunos elementos característicos del experimento (muelle, vaso, listón sobre el que se engancha el muelle, etcétera.) así como también los valores para las coordenadas x e y del primer punto marcado (columna 3).

Por último, las hojas con las respuestas de los alumnos a las lecciones 1, 2, 3 y 4 se pueden consultar en los Anexos 21, 22, 23 y 24, respectivamente.

4.3.1. LECCIÓN 1. EL CUESTIONARIO INICIAL

El cuestionario inicial servirá para evaluar la competencia previa de los estudiantes en los conceptos de familia de funciones, forma canónica y significado de los parámetros. Esto es, nos permitirá conocer las concepciones previas de cada uno de ellos sobre dichos conceptos, cosa que nos proporcionará más información sobre sus conocimientos de base de aquellos aspectos que se trabajaran posteriormente en las lecciones 2, 3 y 4, así como durante las entrevistas.

4.3.1.1. Por alumnos

En esta parte del capítulo analizaremos las actuaciones de los alumnos organizándolas según las tres partes en las que hemos dividido el cuestionario inicial según hacen referencia a: las familias de funciones (parte 1), el significado de los parámetros (parte 2) i las transformaciones entre formas canónicas (parte 3). Pasamos pues a mostrar dicho análisis en detalle para cada alumno.

<u>Alumno 1.1</u>

Parte 1. En cuanto al primer ítem, podemos ver como la alumna es capaz de reconocer todas las familias de funciones polinómicas así como también aquella cuyo exponente de x es general. Además, también reconoce la función raíz cuadrada, la de proporcionalidad inversa y $y = a/x^2$, aunque no cuando se expresa como una familia de funciones más genérica, esto es, como $y = a/x^n + b$. Sin embargo, no reconoce las funciones exponencial, logarítmica y trigonométrica, aunque sí que las estudiaron durante el curso anterior.

En cuanto al segundo ítem, la alumna no da ninguna respuesta, de lo que podemos deducir que encuentra dificultades a la hora de describir un fenómeno o situación real a partir de una gráfica o fórmula, seguramente por lo poco familiarizada que está a que se le planteen este tipo de situaciones en clase.

Lo mismo sucede en el ítem 3, que deja el apartado b) sin responder. Sin embargo, sí que contesta el apartado a), aunque de forma incorrecta ya que interpreta la relación entre los kilómetros que hace un taxi i lo que cobra como una función exponencial. En su respuesta tampoco justifica su elección ya que solo explica que la función estará a una altura determinada por el hecho de que al entrar el cliente al taxi se le cobra una tarifa base. También responde el apartado c), en este caso de forma correcta ya que elige la parábola convexa (apartado d)), aunque en su respuesta explica que ha elegido esta gráfica y no la del apartado c) porque sería así solo en el caso de que la piedra se quedara quieta en el punto máximo. Sin embargo, la velocidad en el punto de máxima altura también sería cero en la gráfica d), por lo que su justificación no sirve para explicar por qué elige una en vez de la otra.

Por lo que respecta al ítem 4, la alumna elige la función lineal para describir la relación entre la velocidad de Joan y el tiempo que transcurre, por lo que la respuesta es incorrecta. Además, no justifica su respuesta, por lo que no podemos averiguar qué le ha hecho elegir esta función. En cuanto al apartado b), la alumna elige la opción a) que es correcta puesto que la relación entre el diámetro de una manguera que se usa para llenar una piscina y el tiempo transcurrido es una función proporcional inversa. Sin embargo, la alumna vuelve a dejar la parte de justificar la respuesta en blanco.

En cuanto al ítem 5, la alumna asigna la gráfica de la función constante a la fórmula $y = a$. Sin embargo, asocia la lineal $y = ax + b$ solo a la gráfica a) pero no a la c) que también es lineal pero con pendiente negativa. Lo mismo hace con la función cuadrática, a la que le asocia una sola gráfica, la b). Probablemente esto se deba a que no se ha dado cuenta de que más de una gráfica puede relacionarse con cada expresión, dependiendo de los valores que tomen los parámetros. Por tanto, no solo es importante pensar en la forma general de cada tipo de función sino también en el tipo de valores concretos que pueden tomar los parámetros para cada una de ellas. Por otro lado, la alumna asocia la función de proporcionalidad inversa a la gráfica c) que es una lineal, posiblemente porque la forma en la que se presenta la expresión, $y = a/x$ es muy similar a $y = ax$ y la alumna se ha confundido. Además, asigna h), que es una parábola, a la fórmula de la función raíz cuadrada, seguramente por descarte porque no es consciente de que puede asociar varias gráficas a una misma expresión algebraica y la de la opción 3. ya la ha asociado a otra gráfica. Cabe destacar que, a pesar de que en el ítem1 indica que conoce también otro tipo de funciones, no es capaz de relacionar gráficas con fórmulas de familias de funciones en este ítem.

Parte 2. Por lo que respecta al ítem 6 en el que les pedimos que digan qué letras son parámetros de la función y digan qué tipo de valores tienen que tomar para obtener cada una de las gráficas anteriores, la alumna no da ninguna respuesta. Esto se debe a que probablemente no conoce el significado del término “parámetro”.

En cuanto al ítem 7, la alumna solo es capaz de dar sentido a los valores de la última de las expresiones en relación con la gráfica ya que dice que son los valores en los que la parábola corta el eje OX.

Parte 3. Por último, en el ítem 8 la alumna tiene dificultades a la hora de escribir la expresión en forma de cuadrado perfecto, probablemente porque no están acostumbrados a realizar este tipo de actividades. En el primero de los ítems escribe como respuesta $(x \cdot 3x \cdot 3) + (x \cdot 2 \cdot 3)$, aunque esto no daría lugar a la expresión $x^2 + 6x + 9$, por lo que podemos observar dificultades a nivel de manipulación de expresiones algebraicas debido a que estas habitualmente se aprenden en clase sin dotarlas de sentido. Por lo que parece, descompone el 6 como producto que 2 por 3 y el 9 como producto de 3 por 3 y de ahí construye la expresión anterior, que como es evidente, no da lugar a la primera. Por otro lado, en la segunda expresión la alumna saca una x factor común de la expresión, a pesar de no poder hacerlo por existir un término independiente, y escribe la expresión que deja dentro del paréntesis elevada al cuadrado, cambiando 1/4 por 1/2 ya que $(1/2)^2 = 1/4$, por lo que también trata de convertir la expresión inicial en cuadrado perfecto sin ningún éxito. Por último, por lo que respecta a la última expresión lo que hace el alumno es sacar factor común x solo de los términos que tienen x, dejando el término independiente igual y escribiendo un cuadrado a la expresión que queda entre paréntesis de forma que la fórmula final tampoco es equivalente a la inicial.

<u>Alumno 1.2</u>

Parte 1. En el primer ítem la alumna solo reconoce las familias de funciones polinómicas dadas en cualquiera de las formas canónicas que aparecen en la lista así como la de proporcionalidad inversa, aunque no las funciones $y = a/x^2$ ni $y = a/x^n + b$ aunque $y = a/x$ y $y = a/x^2$ podrían considerarse subfamilias de la primera. No reconoce las familias de funciones exponencial (ni la de base e ni la de base a), logarítmica (ni la neperiana ni la logarítmica de base e), raíz cuadrada ni función seno.

En este segundo ítem, responde los apartados a) y b) pero no el apartado c) que, a diferencia de los otros en los que se pide describir una situación real a partir de una gráfica, en este se hace a partir de una fórmula o expresión algebraica. En el primer apartado, la alumna explica que la gráfica de la parábola podría representar las temperaturas durante un año ya que al principio del año están más bajas y a medida que pasan los meses estas suben para luego volver a bajar. Cabe destacar que es probable que esta alumna no se haya fijado en los valores de los ejes puesto que esos van del 0 al 6, que no es lo más habitual para representar los meses del año (ni tampoco las temperaturas) por lo que podemos deducir que solo se ha fijado en la forma de esta. Por otro lado, en el apartado b), en el que aparece la gráfica de una función proporcional inversa, la alumna describe que podría "representar el dinero o las ganancias que recibe una empresa a lo largo de los años", aunque esto solo tendría sentido si consideráramos la gráfica en un intervalo pequeño ya que no parece muy razonable considerar que inicialmente las ganancias de dicha empresa sean infinitas. Cabe destacar que, por el tipo de situaciones proporcionadas por la alumna a partir de la observación de las gráficas, podemos ver que esta no ha descrito fenómenos que se rigen mediante leyes de la física, cuya explicación puede que resida en el hecho de que estos no están acostumbrados a relacionar dichos fenómenos con gráficas de funciones ni tampoco de enfrentarse a tareas en las que se les pide que describan situaciones reales a partir de funciones.[18]

En cuanto al tercer ítem, la alumna solo responde el apartado c). Esta comenta que la relación entre la altura de la piedra y el tiempo transcurrido es una parábola porque "al tirar la piedra hacia arriba realiza una parábola", por lo que parece que en su explicación subyace la idea de que la piedra describe dicha trayectoria, es decir, identifica la gráfica con la trayectoria de la piedra. Este hecho podría deberse, como ya señalaba Janvier (1978), a lo poco acostumbrados que están a enfrentarse al estudio de situaciones en las que las trayectorias analizadas no coincidan con la forma de la gráfica que representa la relación entre las variables. Además, añade que "cuando llega al máximo punto que puede llegar, por la velocidad ejercida, se desplaza hacia abajo" y escribe la fórmula de la velocidad, $v = \frac{e}{t}$, para justificar su respuesta.

En el apartado a) del cuarto ítem, tenemos que la alumna ha elegido la función $y = x$ como aquella que describe mejor la relación entre la velocidad a la que camina Joan y el tiempo transcurrido porque, según ella, cuando aumenta el tiempo la velocidad también aumenta, es decir, ve las variables como si fueran directamente proporcionales. Sin embargo, explica que la velocidad es constante y escribe "v = cte", por lo que no es coherente con el tipo de función que ha elegido. En cuanto al apartado b), elige la función proporcional inversa para describir la relación entre el diámetro de la manguera i el tiempo que tardará en llenarse la piscina, porque según ella, "el diámetro de la manguera condiciona la cantidad de agua que sale [de esta]" y, por tanto, el tiempo que tardará en llenarse la piscina, aunque no justifica por qué considera que dicha relación es proporcional inversa.

En el ítem 5 la alumna es capaz de asociar la gráfica l a la función constante $y = a$. Sin embargo, en el caso de la función lineal, esta asocia una gráfica que es exponencial. Todo apunta a que esto es debido a que, como veremos en el análisis de sus actuaciones en las lecciones 2, 3 y 4, esta no se fija en la forma global de la expresión algebraica para encontrar a qué tipo de representación gráfica da lugar, sino que da valores tanto a

[18] Cabe destacar que, al finalizar el experimento, la alumna comenta que le llama la atención encontrar fenómenos físicos que se puedan describir mediante funciones.

los parámetros como a las variables para tratar de averiguarlo, cosa que no logra con éxito. Podemos saber que la alumna actúa también aquí de esta forma puesto que en la parte superior de algunas de las fórmulas podemos observar que escribe algunos números. Por otro lado, asigna la gráfica de una polinómica de grado 3 a la función logarítmica, puede que porque no sabe qué tipo de representación gráfica tiene esta, tal como indica en el primer ítem en el que expresa que no conoce la gráfica de esta función, y tampoco sabe qué tipo de expresión algebraica puede describir dicha gráfica. Por otro lado, asigna la gráfica de la función lineal de la opción a) a la fórmula $y = a/x$, puede que porque no se da cuenta de que la barra que aparece en la expresión es una barra de fracción y compara esta expresión con $y = ax$.

Parte 2. En el ítem 6, cuando les preguntamos qué valores de las funciones son parámetros, la alumna indica que son las letras a, b y c. Además, explica que, de forma general, si estos valores son positivos se representaran en el primer y en el tercer cuadrante, mientras que si estos son negativos se representaran en el segundo y en el cuarto. Por ello, podemos deducir que la alumna no está pensando en qué tipo de funciones dará lugar el hecho de que estos parámetros tomen unos valores u otros, sino que parece estar recurriendo a una propiedad de las coordenadas de los puntos que conoce (en el primer cuadrante las coordenadas de x e y son positivas, mientras que en el segundo y en el cuarto o bien las de x o bien las de y son negativas) para hablar de los parámetros, cuyas propiedades parece desconocer. Sin embargo, no sabemos en qué se basa para afirmar que si los valores que toman estos parámetros son positivos también se representaran en el tercer cuadrante.

Por lo que respecta al ítem 7 en el que pedimos a los alumnos que expliquen qué significado tienen los valores numéricos que aparecen en las fórmulas en relación con la gráfica, la alumna no responde directamente sino que se limita a manipular las expresiones con el objetivo de comparar si son equivalentes, cosa que ya se indica en el enunciado de forma implícita ya que este dice que "las tres expresiones algebraicas representan la siguiente gráfica".

Parte 3. Por lo que respecta a las transformaciones algebraicas, podemos ver que la alumna es capaz de escribir las expresiones de los apartados a) y b) en forma de cuadrados perfectos y la del apartado c) en una equivalente de la forma $y = a(x-b)^2 + c$. Sin embargo, no podemos averiguar cómo llega a cada expresión en los apartados a) y b) puesto que en la respuesta no aparece el procedimiento seguido sino solo el resultado, probablemente porque ha encontrado la respuesta observando las expresiones y viendo directamente la solución. Por otro lado, en el apartado c) llama especialmente la atención que lo primero que haya escrito la alumna sea el resultado, es decir, la expresión $y = 2(x+1)^2 - 8$ que es la equivalente a $y = 2x^2 + 4x - 6$ en la forma $y = a(x+b)^2 + c$, y luego la desarrolle hasta llegar a la inicial. Inicialmente esto nos hace pensar que puede que la alumna haya realizado los cálculos en una hoja aparte, que no ha entregado (a pesar de que les pedimos que lo entregaran todo). Sin embargo, después de reflexionar sobre su respuesta y de ver que no era la única alumna que proporcionaba la expresión directamente, llegamos a la conclusión de que la forma de proceder de esta fue la de dar valores a los distintos parámetros de $y = a(x+b)^2 + c$ al mismo tiempo que iba comprobando que la expresión para esos valores era equivalente a la inicial, desarrollándola.

<u>Alumno 2.1</u>

Parte 1. Por lo que respecta al primer ítem, el alumno reconoce solo algunas funciones polinómicas. Reconoce las funciones lineales y la cuadrática pero solo dada en la forma

canónica polinómica, no en la que usaremos posteriormente en la lección 2 para que ajusten una gráfica a una nube de puntos. Esto puede ser debido a que, a pesar de que sí que han trabajado la función cuadrática, nunca lo han hecho a partir de esta forma canónica, aunque también puede ser debido a que ve las dos familias de funciones como disjuntas por no reconocer la segunda como una función cuadrática. Indica que tampoco conoce las funciones polinómicas de grado 3 en ninguna de las dos formas canónicas, probablemente porque no se acuerda de cuál es su representación, aunque sí la polinómica de grado desconocido, $y = ax^b$, cosa que puede ser porque conozca algunas de las funciones de la familia, por ejemplo cuando x vale 1 o 2 pero no en otros casos. Indica también que conoce la familia de funciones de proporcionalidad inversa, aunque no conoce $y = a/x^2$ ni tampoco $y = a/x^n + b$. Tampoco reconoce las funciones exponencial, logarítmica, raíz cuadrada y función seno.

En el apartado a ítem 2, el alumno parece no tener dificultades para dar una situación real que se podría describir mediante una parábola: la relación entre la altura de una pelota que da un salto al rebotar contra el suelo y el tiempo que tarda desde que rebota hasta que vuelve a llegar al suelo. Conviene señalar que el alumno describe una trayectoria cuya forma es la misma que la forma de la gráfica. Este alumno deja sin responder el apartado b). Por lo que respecta al c), explica que una situación que podría ser descrita mediante la función $y = 5x + 15$ sería lo que cobra un taxista por los metros que recorre en el taxi, aunque da esta respuesta después de haber contestado el apartado a) del ítem 3. Probablemente la respuesta que da en el apartado a) del ítem 2 también es consecuencia de observar la situación real descrita en 3.c).

En cuanto al ítem 3, el alumno elige la gráfica que describe una función lineal en el apartado a). Lo justifica diciendo que tiene que ser esta función porque inicialmente la gráfica está a una altura determinada, por cobrar el taxista una tarifa de base, y luego aumenta de forma proporcional puesto que “cada kilómetro más que recorre, [el precio] aumentará de la misma forma”. En relación con el apartado b), el alumno elige la gráfica de la opción c) que, efectivamente, describe la situación presentada. Sin embargo, no da ninguna justificación. Por último, en cuanto al apartado c), el alumno elige la opción d) y describe cómo sería la relación tiempo-altura pero en términos generales, sin explicar por qué tendría esa forma la gráfica y no otra. Solo lo explicita más cuando dice que cuando la piedra llegue a su máxima altura, la velocidad será cero. No obstante, no justifica por qué elige la opción d) en vez de la a) o la c), en las cuáles la velocidad también es cero cuando la piedra alcanza la máxima altura.

En el ítem 4 apartado a), elige la opción correcta y explica que ha escogido la función $y = a$ ya que la velocidad a la que va Joan es siempre constante. En relación al apartado b), elige la función $y = a/x + b$ porque, según dice que “es la única que se parece a la función indirectamente proporcional”, por lo que ve que al aumentar el diámetro de la manguera, el tiempo que tardará en llenarse la piscina será menor. Además, parece que debido al hecho de que no han trabajado antes con familias de funciones (presentadas en forma de expresiones algebraicas con parámetros, aunque sí lo han hecho para el caso de la función lineal), para él no es que la expresión $y = a/x + b$ sea la de la familia de las funciones de proporcionalidad inversa, sino que se parece a una función proporcional inversa.

En el ítem 5, este alumno asocia las gráficas correspondientes a las funciones constante, lineal, cuadrática (en ambas formas canónicas, a pesar de indicar en el primer ítem que no conocía la segunda), polinómica de grado 3 (a pesar de indicar también que no la conocía en el ítem 1) y proporcional inversa. Sin embargo, no ha asignado todas las gráficas que corresponden a cada expresión, por lo que puede haber pensado que había que asignar una única gráfica a una única expresión y no ha pensado que, dependiendo de los valores que tomen cada parámetro, la representación gráfica de cada función concreta puede tener una forma u otra. Por otro lado, se ha equivocado al asignar las gráficas a las familias de funciones exponencial y logarítmica, a las cuales les ha asignado una gráfica logarítmica y una raíz cuadrada, respectivamente. Sin embargo, visualmente estas gráficas tienen una forma similar (en términos generales) a las gráficas de las funciones que han indicado, por lo que podemos pensar que este alumno sí que parece tener conocimientos generales sobre cómo son estas funciones, aunque no conoce sus características concretas, esto es, que la función exponencial tiene una asíntota horizontal y la logarítmica una vertical.

Parte 2. Por otro lado, en cuanto al significado de los parámetros, podemos ver que el alumno trata de responder el ítem 6 analizando cada una de las funciones. Sin embargo, se queda en la función lineal y parece no entender bien lo que le pedimos ya que escribe $b = 0$ porque parece que esté tratando de ver cómo sería la función cuando dicho parámetro toma este valor, pero no explica más su respuesta.

En el ítem 7, el alumno explica que "los puntos de corte con el eje OX equivalen a los números cambiados de signo", refiriéndose a los valores 2 y 4 que aparecen dentro de los paréntesis de $y = 2(x-2)(x-4)$. Además explica que si sustituyéramos las x por estos valores, la expresión se anularía. Parece que trata de relacionar esto con lo que ha aprendido en cursos previos de que las soluciones de una ecuación son los valores numéricos que hacen que estas expresiones se anulen. En cambio, no hace referencia a los números del resto de expresiones en las que aparece escrita la función.

Parte 3. En cuanto al último ítem, el alumno sí que es capaz de dar la solución correcta en los tres apartados pero da la solución directamente sin explicar el proceso seguido, por lo que puede que no haya realizado ningún tipo de transformación siguiendo reglas matemáticas sino simplemente substituyendo los parámetros de $y = a(x-b)^2 + c$ por valores hasta encontrar la expresión $y = 2(x-(-1))^2 + (-8)$ que es la que da como solución. Después desarrolla dicha expresión hasta llegar a la expresión que le proporcionábamos al inicio para indicar y comprobar que ambas expresiones son equivalentes. Sin embargo, a diferencia de lo que hace la alumna 1.2, este sí que da la solución en la forma $y = a(x-b)^2 + c$ teniendo en cuenta los signos de los números.

Alumno 2.2

Parte 1. En el ítem 1, esta alumna indica que conoce todas las familias de funciones polinómicas, incluso aquellas que se proporcionan con una forma canónica con la que no están acostumbrados a trabajar y aquella cuyo exponente es un número genérico b. También reconoce la familia de funciones de proporcionalidad inversa pero no $y = a/x^2$ ni tampoco $y = a/x^n + b$. Sin embargo, aunque no reconoce las funciones exponenciales de base e y a ni tampoco la logarítmica neperiana, sí que indica que conoce la función logarítmica en base 10, probablemente debido a que no se acuerde de que la función ln es un caso particular de esta en la que la base es e. Indica que también conoce las funciones raíz cuadrada y la función seno.

En relación con el ítem 2, la alumna solo responde el apartado a), por lo que parece que tiene dificultades a la hora de dar situaciones reales a partir de gráficas o fórmulas, probablemente debido a la poca experiencia que tienen en realizar este tipo de tareas en clase. En cuanto al apartado a), la alumna explica que esta gráfica podría ser la que relaciona la altura de una pelota golpeada por un niño con el tiempo transcurrido, por lo que busca una situación cuya trayectoria descrita se parece a la forma de la gráfica.

En el ítem 3 apartado a), elige la opción b) que es la correcta. Sin embargo, no justifica lo suficiente su respuesta ya que explica que ha elegido esta opción "porque el taxista cobra desde un principio", lo que sucede en las cuatro gráficas que se presentan como posibles respuestas. Por otro lado, tiene dificultades para elegir la gráfica que mejor representa la situación expresada en el apartado b) ya que no proporciona ninguna respuesta. Y, por último, en el apartado c) elige la gráfica de la opción d) como aquella que describe la relación entre el tiempo y la altura de una pelota cuando la tiramos hacia arriba. Esta justifica que ha elegido dicha gráfica porque inicialmente sube muy rápido y poco a poco va perdiendo velocidad hasta que llega un momento que se queda en el aire para después volver a caer, cosa que le hace descartar el resto de opciones.

En cuanto al ítem 4 apartado a), la alumna razona bien la respuesta porque dice que la velocidad será constante y que además la gráfica no subiría ni bajaría. Sin embargo, no elige bien la fórmula que describe una relación constante entre las variables ya que escoge la función lineal $y = x$. Por otro lado, en el apartado b) la alumna elige la opción c), aunque no justifica su respuesta, lo que nos lleva a pensar que lo ha hecho por descarte ya que de las cuatro funciones que se dan, la alumna había indicado que las conocía todas menos la exponencial y puede que para ella la relación no pudiera ser descrita mediante ninguna de las tres funciones que conoce.

Por lo que respecta al ítem 5, esta alumna asigna una única gráfica a una única expresión y lo hace de forma correcta para los casos de la función constante, lineal y cuadrática (en ambas formas canónicas), aunque no en el caso de la función polinómica de grado 3, a la que le asigna la gráfica de una parábola. Cabe destacar que llama la atención que la alumna asigna una parábola a cada una de las fórmulas de las familias de funciones cuadráticas pero no la misma parábola, por lo que cabe la posibilidad de que las conciba como familias de funciones disjuntas. Además, la tercera parábola que aparece representada se la asigna a la función polinómica de grado 3, aunque en el ítem 1 indica que conoce dicha función. Esto puede ser debido a que haya entendido el enunciado de forma que haya que asignar una única gráfica a una única familia de funciones y puede que haya actuado así como consecuencia.

Parte 2. De la parte relativa al significado de los parámetros no podemos saber nada de esta alumna puesto que ha dejado en blanco tanto la pregunta 6 como la 7.

Parte 3. Por último, por lo que respecta al ítem 8, la alumna ha sido capaz de escribir en forma de cuadrado perfecto las expresiones de los apartados a) y b), pero no de realizar las transformaciones algebraicas correspondientes que les pedimos en el apartado c). Por lo que parece, esta alumna también ha realizado los cálculos de forma oral o en una hoja aparte que no ha entregado ya que proporciona la solución directamente y para justificarla la desarrolla hasta llegar a la expresión que les pedimos que transforme, en los dos apartados a) y b).

Alumno 3.1

Parte 1. Del primer ítem, podemos deducir que este alumno conoce todas las funciones polinómicas, incluso la de grado b. No obstante, a pesar de indicar que sí que reconoce la polinómica de grado 3 en la forma canónica que hemos llamado polinómica, no lo hace en la forma canónica que pone de manifiesto el significado de la transformaciones gráficas, probablemente porque no la reconoce como una función polinómica de grado 3. También expresa conocer las funciones $y = a/x$ y $y = a/x^2$ pero no aquella cuyo exponente es n. Del resto de funciones, el alumno solo indica que conoce la función raíz cuadrada.

Este alumno deja en blanco la pregunta 2, por lo que podemos adivinar que tiene dificultades a la hora de indicar situaciones reales que puedan ser descritas a partir de gráficas o fórmulas ya que no está acostumbrado a tener que realizar este tipo de tareas y probablemente conozca pocos ejemplos de situaciones reales que vengan descritas mediante funciones.

En cuanto al apartado a) del ítem 3, el alumno elige la opción b) y explica que, la tarifa base será 3 (ya que la gráfica de la función empieza en 3) y que el precio irá aumentando de forma proporcional, por lo que su explicación le lleva a una única opción. En relación con el apartado b), el alumno vuelve a dar con la respuesta correcta aunque su justificación no queda del todo clara ya que explica que ha elegido este caso porque el carrito de la noria no sube y baja directamente de forma vertical sino que lo hace dando vueltas, cosa que le ha hecho descartar el resto de opciones y quedarse con la opción válida. Es probable que dé esta explicación al ver que la gráfica de la opción a) está formada por líneas rectas ascendentes y descendentes, cosa que asocia con un movimiento en dirección vertical del carrito. Por último, en relación con el apartado c), el alumno escoge la opción d) que también es correcta y lo justifica describiendo la gráfica y, al igual que en el resto de casos, de forma que en su respuesta no quepa otra opción que la que ha elegido. Por ello, explica que elige esta gráfica ya que inicialmente la piedra ascendería de forma muy rápida y poco a poco iría disminuyendo la velocidad conforme va acercándose al punto de máxima altura. En general, podemos observar que en este ítem el alumno ya no parece tener tantas dificultades a la hora de relacionar situaciones reales con gráficas, a diferencia de lo que sucedía en el ítem anterior, en el que tenía que inventar una situación real a partir de una fórmula o gráfica dadas, probablemente porque no dispone de ejemplos de funciones debido a la falta de experiencia previa en relacionar situaciones reales con funciones pero sí que es capaz de relacionar funciones con estas cuando ya le vienen dadas.

En el ítem 4 apartado a), elige la opción d) de la fórmula de la función constante ya que explica que la velocidad de Joan no varía con el tiempo. Sin embargo no es capaz de responder el apartado b), probablemente por dos motivos. El primero de ellos porque la relación entre las variables descritas en la situación real presentada ya no es tan directa y segundo porque, como ya ha indicado antes, no conoce todas las funciones de las dadas (ni la exponencial ni la logarítmica) y, de entre las que conoce, no ve que ninguna pueda describir la situación expuesta.

En el ítem 5, el alumno solo asigna gráficas a las expresiones algebraicas de las familias de funciones constante, lineal y cuadrática (en ambas formas canónicas), aunque en el ítem 1 ha indicado que también conoce las familias de funciones polinómicas de grado 3 y de proporcionalidad inversa pero parece que ha tenido dificultades a la hora de encontrar qué gráficas podrían ser las que describen dichas expresiones. Además, en el caso de las funciones cuadráticas el alumno ha asignado todas las gráficas que aparecen en cada caso, es decir, ha asignado las gráficas b), h) y k) a ambas familias de funciones, al contrario que para la familia de funciones lineales, a la que solo le ha asociado la gráfica de la recta con pendiente negativa.

Parte 2. En esta parte no podemos saber qué significado atribuye a los parámetros el alumno ya que deja sin respuesta tanto el ítem 6 como el 7, probablemente porque no entendía qué le pedíamos en cada pregunta.

Parte 3. Por último, en el ítem 8 el alumno trata, sin éxito, de manipular las expresiones para transformarlas. En concreto en el apartado a), el alumno trata de transformar la expresión $x^2 + 6x + 9$ en un cuadrado perfecto sacando factor común, primero sacando factor común un número, $x^2 + 3(2x + 3)$, y luego la x, $x(x + 6) + 9$, pero sin llegar a la solución. Este deja sin responder el apartado b) que es similar al a) pero con otros valores numéricos. Sin embargo sí que intenta responder el apartado c) pero también sin éxito ya que escribe como respuesta la expresión $y = 2(x + 2)^2 - 6$ que no es equivalente a la inicial, cosa que probablemente ha hecho comparando la expresión inicial con $y = a(x - b)^2 + c$ y sacando factor común 2 de los coeficientes de x y de x^2 de forma que en la nueva expresión ha escrito el cuadrado de la x fuera del paréntesis, lo que no equivale a la expresión inicial. Por tanto, podemos observar cómo el alumno realiza transformaciones algebraicas sin dotarlas de sentido, probablemente porque está acostumbrado a hacerlo de este modo en clase.

<u>Alumno 3.2</u>

Parte 1. En el ítem 1, el alumno indica que conoce las funciones lineal (en ambas formas canónicas), cuadrática y polinómica de grado 3 (estas dos solo en la forma canónica polinómica, probablemente porque habitualmente las ha estudiado en la forma canónica polinómica y no sabe que pueden expresarse en otras) y proporcional inversa $y = a/x$. Tampoco reconoce las funciones $y = a/x^2$ ni $y = a/x^n + b$ que podrían considerarse de la misma familia de funciones, así como tampoco la exponencial, logarítmica, etc. Esto es probable que se deba a que no se acuerda exactamente de su representación gráfica puesto que estas funciones sí que fueron estudiadas por los alumnos en el curso anterior.

En cuanto al segundo ítem, el alumno dice que la primera gráfica podría corresponder al lanzamiento de un balón y escribe el nombre de las variables que representaría cada eje en el dibujo: el eje de las x representaría la longitud (m) y el eje de las y la altura (m), proporcionando un ejemplo en el que el movimiento descrito por la trayectoria del balón coincide con la forma de la gráfica. Por otro lado, el alumno deja sin responder el apartado b), porque no habrá encontrado ningún ejemplo de situación real que pudiera ser descrita mediante esta gráfica. Y, por último, en el apartado c) el alumno asocia la expresión algebraica de una función lineal a una expresión en la cual identifica y con su edad y x con la de su hermano de modo que la fórmula da la relación entre un valor y otro. Esto es, concibe la función como una ecuación en la que hay dos valores concretos no conocidos, lo que Küchemann (1981) llama letra como incógnita específica. Esto puede que se deba a la influencia que ha tenido la enseñanza previa del alumno, ya que es habitual que en cursos previos los alumnos aprendan a expresar en lenguaje algebraico situaciones dadas a partir del lenguaje natural. Además, aparte de considerar las letras como valores desconocidos en vez de variables, la forma en la que explica la relación entre ellos es incorrecta ya que dice que "para averiguar la edad de tu hermano (x), sabiendo que tiene tu edad (y) multiplicada por 5+15", lo que daría lugar a la ecuación $(5 + 15)y = x$ no a $y = 5x + 15$.

En el ítem 3 apartado a), el alumno explica que la gráfica que muestra la relación entre los kilómetros que hace un taxi y lo que cobra el taxista por ellos es la de la opción b) y lo justifica diciendo que esto es porque la coordenada y del primer punto es un nombre mayor que cero y la x aumenta de forma proporcional. En relación con el segundo apartado, el alumno marca que la respuesta correcta es la c) pero no da ningún tipo de justificación. Por último, en el apartado c) señala que la gráfica que describiría la altura de una piedra en cada instante es la de la opción d) y lo explica haciendo referencia al resto de gráficas que ha descartado. Dice que “cuando lancemos la piedra hacia arriba y llegue al punto más alto no bajará de repente como en los casos a) y c), ni tampoco la lanzamos hacia abajo como en el caso b)”.

A continuación, en el ítem 4 apartado a, el alumno escoge la fórmula $y = a$ porque dice que “la velocidad será constante”. Sin embargo, deja el apartado b) sin responder, probablemente porque, tal como ha indicado en el ítem 1, no conoce dos de las funciones y piensa que, las otras dos que conoce no describirían la situación real presentada.

En cuanto al ítem 5, el alumno es capaz de asignar la gráfica de la función constante a la fórmula correspondiente, así como también una recta a la de la lineal y una de las parábolas a la función cuadrática expresada en la fórmula $y = ax^2 + bx + c$, pero no a la otra. Sin embargo, a pesar de afirmar que conocía la familia de funciones $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en el primer ítem, le asigna una gráfica incorrecta, la de la opción k) que se trata de una parábola desplazada 3 unidades hacia la derecha y 1 hacia arriba. Por otro lado, también asigna de forma adecuada la gráfica de la función de proporcionalidad inversa a la familia de funciones correspondiente.

Parte 2. En relación con el ítem 6, no podemos realizar ningún tipo de afirmación puesto que el alumno ha dejado la pregunta en blanco. Sin embargo esto puede ser debido a que no entiende el significado del término parámetro, como nos comentan los alumnos en clase al finalizar la realización del cuestionario.

Por lo que respecta al ítem 7, el alumno no explica su respuesta pero sí que señala el -2 que aparece como término independiente en la segunda fórmula como el punto más bajo de la gráfica. Por otro lado, en relación con la primera expresión algebraica, el alumno señala el $2x^2$ y luego lo escribe en medio de los dos brazos de la parábola, remarcando los puntos donde estos cortan el eje OX, por ello pensamos que el alumno relaciona el coeficiente principal con la apertura de la parábola, es decir, con la distancia entre ambos brazos de la parábola cuando esta corta el eje OX.

Parte 3. Por último, del ítem 8 solo podemos obtener información del último apartado puesto que el alumno no ha respondido los dos primeros. En este, ha escrito la expresión $y = 2x^2(x - 4x)^2 - 6$ como respuesta y lo que ha hecho es simplemente substituir los parámetros a, b y c por los monomios $2x^2$, $4x$ y 6. Por tanto, no realiza transformaciones algebraicas en sí sino que substituye los parámetros sin pararse a reflexionar si tiene o no sentido lo que está haciendo o si las expresiones son equivalentes.

<u>Alumno 4.1</u>

Parte 1. Según las respuestas de este alumno al primer ítem, podemos afirmar que este solo reconoce las funciones lineales y la cuadrada y la de grado 3, pero estas últimas solo dadas en la forma canónica polinómica, no en la forma canónica $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$. Esto seguramente es debido a que no las identifica como funciones cuadrática y polinómica de grado 3. Las otras dice no conocerlas debido a que no se acuerda de cómo es su representación gráfica ya que, como hemos dicho, sí que las trabajaron en el curso anterior.

Por otro lado, en el ítem 2 apartado a), el alumno comenta que la gráfica podría describir el lanzamiento de un balón relacionando así el tiempo transcurrido con la altura del balón tal como señala en los ejes de coordenadas. De nuevo podemos observar aquí como el alumno describe una situación en la que la trayectoria coincide con la forma de la gráfica proporcionada. Cabe destacar que parece que este alumno y el alumno 3.1, situados muy cerca el uno del otro en clase durante todas las lecciones, hubieran intercambiado información ya que, aparte de que la respuesta que dan es muy similar, también lo es la forma en la que la dan ya que ambos escriben “lanzamiento de un balón” como justificación de su respuesta así como también indican lo que representaría cada uno de los ejes en la gráfica junto con las unidades de medida. Este alumno deja sin responder los apartados b) y c) porque no encuentra ninguna situación real que pueda describir la gráfica y la fórmula dadas, probablemente por la falta de conocimiento de situaciones reales que puedan ser representadas mediante una función de proporcionalidad inversa o una función lineal.

En el ítem 3 apartado a), el alumno elige la opción b) y explica que debe ser esta gráfica ya que “al subir [al taxi] el dinero va aumentando en relación al tiempo que ha pasado”. Seguramente se refiere a que va aumentando de forma proporcional, cosa que le ha hecho elegir la función lineal, pero con la explicación que da, no justifica por qué ha elegido justo esa opción y no las de las opciones a) o d), en cuyas gráficas el dinero que tendría que pagar un cliente también aumenta conforme va pasando el tiempo. Por otro lado, en el apartado b) el alumno elige la opción b) porque, según él, la noria para después de cada vuelta e identifica “los picos” de la gráfica con las paradas de la noria, aunque si la situación fuera como la concibe el alumno, la gráfica tampoco sería esta. Por último, en cuanto al apartado c), el alumno elige la opción d) y explica que es esta gráfica puesto que “cuando lanzamos un objeto hace una parábola”, es decir, decide escoger esta opción porque concibe que la forma de la trayectoria de la piedra al lanzarla será una parábola, a pesar de que en el enunciado se dice que tiramos la piedra hacia arriba.

En el apartado a) del ítem 4, este alumno elige la opción d), $y = a$ ya que tal como explica “el número [que da la velocidad a la que camina Joan] siempre se mantendrá constante”. Sin embargo no responde el apartado b), seguramente porque, tal como indica en el ítem 1, solo conoce una de las funciones de las cuatro que se dan, $y = -ax + b$, y esta no describe la relación entre el diámetro de la manguera y el tiempo que tardará en llenarse la piscina.

En cuanto al ítem 5, el alumno asigna correctamente la gráfica de la función constante con su correspondiente expresión algebraica, una de las dos rectas con la fórmula de la expresión de la función lineal y una parábola con la fórmula, $y = ax^2 + bx + c$, de las dos que se presentan. Sin embargo, se atreve a asignar, aunque de forma errónea, algunas otras gráficas a expresiones de familias de funciones aunque en el ítem 1 afirma que no las conoce. En concreto, asigna la gráfica de una función trigonométrica a la familia de funciones polinómicas de grado 3, la de la raíz cuadrada a la expresión algebraica de una proporcional inversa y la de una proporcional inversa a la expresión de la familia de funciones seno.

Parte 2. En el primer ítem del que pretendemos extraer información sobre el significado que atribuyen los alumnos a los parámetros, el alumno escribe tres expresiones, la última de ellas incompleta, con valores concretos para los parámetros. En particular, escribe $y = +2$, $y = +3x + 2$ y $y =$. Parece que lo que iba a hacer el alumno era, dando valores a los parámetros, intentar averiguar cómo serían las gráficas de las expresiones algebraicas para esos casos. Sin embargo no termina de copiar las expresiones, cosa que puede ser porque se da cuenta de que si lo hace así en vez de pensar en tipos de valores (positivos, negativos o cero) aparecen muchos casos distintos.

Por lo que respecta al ítem 7, tenemos que el alumno desarrolla la segunda de las expresiones de forma que concluye que las tres expresiones son la misma y describen la misma gráfica, cosa que ya les indicamos en el enunciado. Por tanto, no hace referencia en ningún momento a los valores numéricos correspondientes a lo que serían los parámetros y su significado en relación con la gráfica.

Parte 3. Por último, en el ítem 8 el alumno responde correctamente los apartados a) y b), cosa que parece que haga tratando de aplicar la fórmula del cuadrado de una suma o de una resta, vista en cursos previos, ya que no ha desarrollado la expresión. Sin embargo, la respuesta que da en el último apartado es incorrecta y, por lo que podemos ver, parece que el alumno la ha encontrado dando valores a la expresión $y = a(x-b)^2 + c$ ya que no aparece ningún tipo de cálculo ni operación para tratar de transformar $y = 2x^2 + 4x - 6$ en $y = a(x-b)^2 + c$.

Alumno 4.2

Parte 1. En el primer ítem este alumno indica que reconoce las dos funciones lineales que aparecen en la tabla y también la cuadrática y la polinómica de grado 3 pero solo en la forma canónica con la que han trabajado en clase, por lo que podemos decir que considera que estas no son de la misma familia o no tienen la misma representación gráfica. Además, indica que también conoce $y = ax^b$, $y = a/x$, $y = a/x^2$ i $y = a/x^n + b$ y la logarítmica de la opción n), aunque no la de la opción m).

Este alumno solo responde el apartado a) del primer apartado del ítem 2, por lo que parece tener dificultades a la hora de inventar situaciones reales que describan gráficas o fórmulas. En el primer apartado utiliza como ejemplo la situación en que se lanza un proyectil que, según él, describiría el movimiento de una parábola ya que "siempre va aumentando su altura hasta que ya no puede más y empieza a decrecer", por lo que ve la gráfica como la trayectoria de dicho proyectil.

Por otro lado, en relación con el ítem 3, el alumno deja sin responder los dos primeros apartados. Sin embargo, en el apartado c) sí que explica que ha elegido la opción de la parábola "porque la piedra irá subiendo hasta llegar a un punto que no podrá subir más y empezará a bajar con un recorrido en forma de parábola". Es decir, elige dicha opción porque concibe que el movimiento que hace la piedra no es en dirección vertical como decimos en el enunciado, "hacia arriba", sino que concibe que la piedra se lanza y su trayectoria viene descrita mediante una parábola.

En cuanto al ítem 4, el alumno responde el apartado a), pero no el b), es posible que porque no conozca todas las funciones que aparecen y no conciba que alguna de las que sí conoce pueda describir la situación presentada. Así pues, en el apartado a), el alumno elige la función $y = x$ después de dudar entre esta y la función constante porque, tal como explica, "a medida que aumenta la distancia recorrida, también aumenta el tiempo que transcurre". Es decir, el alumno, aunque no ha dado la respuesta correcta, sí que es coherente con su elección ya que él ha descrito que la relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido es lineal.

En relación con el ítem 5, este alumno solo relaciona tres de las gráficas con expresiones algebraicas de familias de funciones, a pesar de indicar en el ítem 1 que conoce muchas más familias de funciones. No obstante, las que relaciona lo hace de forma correcta, aunque no asigna todas las gráficas a las expresiones algebraicas correspondientes ni tampoco asigna a una misma gráfica dos expresiones algebraicas distintas en ninguno de los caso. Concretamente relaciona la gráfica de la función constante con su fórmula, la gráfica de la parábola convexa con la expresión $y = ax^2 +$

$bx + c$ y la de la parábola cóncava con $y = a(x - b)^2 + c$. Esto podría hacernos pensar que ve la primera familia de funciones como la de las gráficas cóncavas y la segunda como la de las convexas, pero el hecho de haberse comportado así puede ser debido a que piensa que en este ítem no queremos que asignen una misma gráfica a distintas expresiones sino una gráfica a una expresión.

Parte 2. En cuanto al ítem 6, el alumno no proporciona ninguna respuesta. En el ítem 7, el alumno explica que las tres expresiones son equivalentes ya que, parece que las resuelve en una hoja aparte, e indica que $x = 2$ y $x = 4$ son las soluciones y dan $y = 0$, "al igual que en el dibujo", lo que no aporta nada nuevo ya que esto ya se les indicaba en el enunciado. Sin embargo, en ningún momento hace referencia a que en la tercera de las expresiones los valores que se ponen de relieve son precisamente estos, 2 y 4.

Parte 3. Por último, en el ítem 8 el alumno iguala las expresiones de los apartados a) y b) a cero, seguramente para encontrar las soluciones de la ecuación y poder escribir la expresión inicial como producto de sus raíces. Sin embargo, este no realiza dicho cálculo sino que lo deja indicado. Por otro lado, en el apartado c) lo que hace el alumno es substituir los parámetros a, b y c de la expresión $y = a(x - b)^2 + c$ por los coeficientes de los monomios de la expresión $y = 2x^2 + 4x - 6$, en este mismo orden. Es decir, no realizan ningún tipo de operación sobre la expresión inicial para transformarla, sino que substituye los valores sin ni siquiera comprobar que ambas expresiones son equivalentes y sin ningún sentido, cosa a lo que están acostumbrados hacer por el tipo de trabajo que se suele realizar en las clases habitualmente.

Alumno 5.1

Parte 1. En el ítem 1 el alumno indica que solo conoce las familias de funciones lineales y la cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ pero no la otra, seguramente porque no está habituado a verla en esta forma canónica y no la reconoce como cuadrática. Indica que no conoce el resto de familias de funciones, aunque en la opción de $y = ax^b$ duda porque primero marca que sí y luego que no. Por tanto, el hecho de que indique que no conoce el resto de funciones puede ser debido a que no se acuerda de la representación gráfica que tiene cada una de estas o porque no le es fácil de imaginar casos concretos de estas familias de funciones por la aparición de tantos parámetros en una misma fórmula.

En cuanto al apartado a) del segundo ítem, el alumno explica que una situación real que podría ser descrita mediante una parábola sería la relación entre la altura a la que se encuentra un coche cuando sube una montaña y el tiempo transcurrido (o la distancia en línea recta, no lo especifica). Por otro lado, en el segundo apartado, el alumno indica que la gráfica podría ser la de la cantidad de lluvias a lo largo de un mes. Según parece, cuando el alumno hace tal afirmación no se fija en que la función tiende a infinito en cero y a cero en más infinito, por lo que no parece tenerlo en cuenta. Podríamos pensar que este no conoce la función proporcional inversa ya que, además, así lo ha indicado en el primer ítem. Sin embargo, sabemos que esto no es así ya que los alumnos trabajaron con esta función durante el curso anterior. Además, probablemente haya dado esta función porque haya visto una gráfica con una forma semejante a esta en su enseñanza previa. Cabe destacar que, este alumno describe una situación que no tiene por qué ser así siempre sino que es esta para una situación concreta pero no viene dada a partir de ninguna ley física. Por otro lado, en cuanto al apartado c), el alumno no proporciona ninguna situación real sino que se limita a interpretar lo que representa la ecuación "cada valor de y son $5x$ más 15" y añade un ejemplo para que se vea de forma más clara: $40 = 5 \cdot 5 + 15$. Por ello, podemos decir que el alumno parece tener dificultades para proporcionar una gráfica a partir de la expresión dada seguramente porque, no está habituado a relacionar el contenido relativo a las funciones con situaciones reales.

En relación con el tercer ítem, el alumno elige las opciones d) en el primer caso y c) en el segundo pero sin dar ningún tipo de justificación, por lo que no podemos saber qué le ha llevado a tomar estas decisiones. Sin embargo, en el apartado c), el alumno elige la opción d), después de dudar entre las opciones c) y d) puesto que "la [gráfica de la opción] d) es la que hace el recorrido de una piedra", esto es, de nuevo se decanta por esta opción porque concibe que la trayectoria que sigue la piedra es la que se describe en la gráfica d).

Por otro lado, en el apartado a) del ítem 4, el alumno elige la opción d), $y = a$, ya que según él "el tiempo y la velocidad es la misma", refiriéndose seguramente a que la velocidad es siempre la misma conforme pasa el tiempo. Sin embargo parece que inicialmente no lo tenía muy claro ya que las opciones a) y b) aparecen tachadas porque previamente las había elegido como respuesta. En el apartado b), el alumno elige la opción d) a pesar de afirmar en el primer ítem que no conocía la función logarítmica, decisión que seguramente haya tomado de forma aleatoria ya que, según él, no solo no conoce la logarítmica sino tampoco la proporcional inversa ni la exponencial.

Por lo que respecta al ítem 5, el alumno solo relaciona de forma adecuada la gráfica de la función constante con su expresión algebraica y las parábolas de las opciones b) y h) que las relaciona con la expresión de la familia de funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$, aunque no con la expresión $y = a(x - b)^2 + c$, a la que le asigna la gráfica de una función proporcional inversa, por lo que podemos afirmar que el alumno no vé que ambas familias de funciones describan el mismo tipo de funciones (cosa que ya podíamos adivinar en el ítem 1 donde el alumno indica que no conoce la familia de funciones $y = a(x - b)^2 + c$). Del resto de funciones, el alumno asigna gráficas a expresiones algebraicas de forma errónea, incluso en los casos en los que se suponía que conocía las familias de funciones, ya que así lo había indicado en el primer ítem. En particular, asigna de nuevo la parábola b) a la expresión algebraica de una familia de funciones lineales, las gráficas, f), m), n) y o) a la polinómica de grado 3 y las rectas de las opciones a) y c) a la expresión algebraica $y = a/c$.

Parte 2. En cuanto al ítem 6, el alumno indica que para él los parámetros son x e y, por lo que parece que no entienda el significado del término parámetro, tal y como se confirma después cuando comentamos los aspectos en los que los alumnos tenían dificultades en clase. Del ítem 7 no podemos obtener información ya que el alumno deja la pregunta sin responder.

Parte 3. De la parte 3 tampoco podemos decir nada puesto que el alumno deja sin responder los tres apartados.

<u>Alumno 5.2</u>

En primer lugar cabe destacar que este alumno ha realizado ya el curso actual, por lo que puede que a lo largo del análisis de los datos esto se refleje en sus actuaciones.

Parte 1. Por lo que respecta al primer ítem, este alumno indica que conoce todas las familias de funciones que aparecen en la tabla menos las exponenciales de base a y e y la función logarítmica neperiana. Esto puede ser porque no se acuerda en general de cuál es su representación gráfica o no las ha visto expresadas mediante esta forma canónica antes. Cabe destacar que llama especialmente la atención (y más en el caso de este alumno, que era la segunda vez que realizaba el curso actual) que reconozca la función logarítmica pero no la exponencial puesto que en la enseñanza previa que recibieron, ambas funciones se había presentado juntas para explicar la diferencia en sus características así como para introducir el concepto de asíntota de forma gráfica. Esto puede deberse al hecho de que estas funciones se presentan en una forma canónica determinada en la que no aparecen valores numéricos sino letras.

En el apartado a) del segundo ítem, el alumno explica que la gráfica puede describir la evolución de la resistencia de una persona a lo largo de su vida porque, "cuando naces no tienes y cada vez tienes más si la trabajas hasta que llegas a una cierta edad en la que la vas perdiendo otra vez". En el apartado b), el alumno sigue con la misma idea, describe una situación que según él daría lugar a este tipo de función pero que no tendría por qué ser así. Concretamente explica que esta podría ser la gráfica que representa la agilidad de una persona porque "de pequeño se tiene más agilidad y cada vez se tiene menos". Hay que destacar también que, además, la situación que proporciona tampoco justifica la forma concreta que tiene la gráfica. Para finalizar, el alumno deja sin respuesta el apartado c), en el que la función viene dada a partir de una expresión algebraica, por lo que parece tener dificultades de interpretar la fórmula o de encontrar una situación que la describa.

En el tercer ítem, el alumno deja sin respuesta los apartados a) y b) y, sin embargo, sí que responde el apartado c). En este, el alumno indica que ha elegido la opción d) "porque igual que sube baja", lo que parece indicar que concibe la situación descrita de forma que la piedra no se lanza hacia arriba en dirección vertical. Al igual que en el resto de casos, esta forma de entender la situación parece provocada, no por cómo esté redactado el enunciado, sino por las opciones posibles de graficas que se dan como respuesta. Además, justifica que ha elegido dicha gráfica describiéndola, no justificando qué le ha hecho elegir esta y no alguna de las otras.

En cuanto al ítem 4, tenemos que en el apartado a) el alumno ha elegido la familia de funciones $y = a^x$ y lo justifica explicando que "él mantiene el mismo paso pero el tiempo va aumentando", por lo que parece que sí que concibe que la velocidad a la que va Joan es constante pero no entiende el significado de las expresiones algebraicas que les proporcionamos ya que la que da una relación constante no es la que ha elegido. Por lo que respecta al apartado b), el alumno elige la función exponencial a pesar de haber indicado en el ítem 1 que no lo conocía. Esto lo justifica explicando que "es el diámetro de la piscina más el tiempo que tardará en llenarse", por lo que parece identificar el diámetro con "e^x" y el tiempo con "b", de donde podemos deducir que, de nuevo, el alumno parece tener dificultades a la hora de interpretar las funciones a partir de su expresión algebraica.

En el ítem 5, el alumno asigna una única gráfica a cada expresión algebraica, aunque lo hace de forma errónea en la mayoría de los casos. Solo lo hace correctamente para la gráfica de la función logarítmica y la función seno, funciones que en el ítem 1 había indicado que conocía. Sin embargo, también había señalado que conocía las funciones cuadrática, polinómica de grado 3, proporcional inversa, etc. y las relaciona con gráficas que no corresponden a estas. Además, relaciona la gráfica de la función de raíz cuadrada con la expresión de la constante, la de la constante con la expresión de la lineal (cosa que tiene sentido si ha considerado que a es cero o simplemente que la expresión algebraica $y = ax + b$ es una recta), la gráfica de una recta con la expresión de una familia de funciones cuadrática, etc. por lo que parece que en algunos casos lo haya hecho sin sentido o por descarte.

Parte 2. En el ítem 6 parece que el alumno no sabe responder la pregunta ya que escribe la expresión $y = ax + b$ como respuesta a la pregunta de qué letras de las que aparecen en las expresiones anteriores son parámetros.

En cuanto al ítem 7, el alumno explica que los valores numéricos que aparecen en la tercera expresión, que son 2, -2 y -4 aparecen, según él, "porque empieza en el 2 a la derecha y empieza desde x hacia -2 y después sube de x hasta -4". Parece que el sentido que el alumno atribuye a los parámetros es más bien "dinámico"[19], ya que explica que estos valores indican cómo y cuánto se ha movido la gráfica de la función con respecto a otra en cada caso.

Parte 3. De esta tercera parte no tenemos información puesto que el alumno no ha respondido ninguno de los apartados del ítem 8.

<u>Alumno 6.1</u>

Parte 1. En el ítem 1 el alumno indica que conoce las funciones lineales, la cuadrática pero solo en la forma canónica $y = ax^2 + bx + c$, no en la otra (porque seguramente no la ha identificado como cuadrática y las ve como familias de funciones disjuntas) y las funciones $y = a/x$ y $y = a/x^2$, aunque no $y = a/x^n + b$, quizá porque no sepa cómo es la representación gráfica de estas para valores de n mayores que 2.

En el ítem 2, el alumno deja sin respuesta todos los apartados, por lo que parece tener dificultades para encontrar situaciones reales que vengan descritas mediante estas gráficas y fórmula, dificultad que proviene de la falta de enfrentarse previamente a tareas de este tipo.

Por lo que respecta al ítem 3, el alumno explica que en el apartado a) elige la función de la opción d) ya que "al principio es un número estable pero después va en aumento según los kilómetros". Es decir, describe cómo es la gráfica pero no hace referencia en ningún momento al fenómeno, además de que esta no es la que representa la relación entre la cantidad de kilómetros que hace el taxi y el dinero que se cobra. Por otro lado, el alumno deja sin responder el apartado b), probablemente porque no ve cuál de ellas describe la relación entre la altura de la noria y el tiempo transcurrido. Por último, en el apartado c) el alumno elige la gráfica de la opción d) como aquella que mejor describe el fenómeno. Sin embargo, su elección se basa en el hecho de que interpreta de forma errónea la situación presentada ya que dice que "al lanzar una pelota, al igual que cualquier otro objeto, se traza una parábola en el momento en el que empieza a descender". Es decir, no interpreta que el movimiento de la piedra sea vertical como se dice en el enunciado, seguramente debido al tipo de gráficas que se presentan como posibles soluciones.

En cuanto al ítem 4, el alumno elige la familia de funciones $y = a$ en el apartado a) porque, según dice, "su trayecto es constante" y deja sin responder el apartado b), probablemente porque no sabe qué tipo de función son la exponencial y la logarítmica y no está seguro de cuál de las cuatro describiría mejor el fenómeno que se presenta.

En el ítem 5, el alumno solo asigna dos gráficas a dos expresiones algebraicas: la gráfica de la constante (opción l)) a la familia de funciones $y = a$ y la recta de la gráfica de la opción a) a la familia de funciones $y = ax + b$, aunque no la recta de la opción c), seguramente porque piensa que hay que asignar una única gráfica a una única expresión algebraica. Cabe destacar que en el ítem 1 el alumno indicaba que conocía también otras

[19] La definición de este término se encuentra en el capítulo 6, en el que explicamos en qué sentido hemos reelaborado la definición que proporciona Puig (2015) a partir de los resultados de este estudio.

familias de funciones como la cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la de proporcionalidad inversa y $y = a/x^2$ pero en este apartado no las ha relacionado con ninguna de las gráficas.

Parte 2. En esta parte el alumno deja sin responder ambos ítems, por lo que no disponemos de información de cómo interpreta los parámetros.

Parte 3. En el ítem 8 el alumno solo responde el apartado a), aunque lo hace de forma incorrecta ya que da como respuesta la expresión $x(x + 6) + 9$, por lo que ha sacado factor común x de la expresión inicial proporcionada pero no ha sabido expresarla en forma de cuadrado perfecto, probablemente porque no está acostumbrado a realizar este tipo de trabajo en clase sino el contrario, desarrollar el cuadrado de una suma o una resta siguiendo la fórmula $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$, con a un número real.

<u>Alumno 6.2</u>

Parte 1. En el ítem 1, la alumna indica que conoce las dos familias de funciones lineales que se muestran en la tabla, la cuadrática, pero solo aquella expresada en la forma canónica polinómica. También indica que conoce las familias de funciones $y = a/x$, $y = a/x^2$ y $y = a/x^n + b$ así como la de la raíz cuadrada y la familia de funciones $y = ax^b$.

En el ítem 2, la alumna solo responde uno de los apartados, el b) cosa que nos indica lo poco familiarizados que están los alumnos a enfrentarse a este tipo de situaciones. La alumna explica que esta gráfica podría ser la trayectoria de un ave que desciende muy rápidamente y que antes de tocar el suelo continúa recto. Por tanto, la alumna describe una situación en la que la trayectoria de la función descrita coincide con la gráfica que se presenta.

En cuanto al ítem 3, la alumna solo responde el apartado c), en el que elige la opción c) que no es la que describe la relación entre la altura de la pelota y el tiempo transcurrido. La justificación que da esta es que es esta gráfica "ya que se eleva de una forma recta y una vez se le acaba la fuerza que han hecho para tirarla baja en picado", por lo que la alumna describe la gráfica como si de una trayectoria se tratase, por lo que no interpreta de forma correcta la situación descrita y la identifica con una trayectoria.

Por lo que respecta al ítem 4, la alumna solo responde el apartado a) e indica que la familia de funciones que describe la relación entre la velocidad a la que camina Joan y el tiempo transcurrido es la opción a), $y = a^x$. Esta justifica su elección diciendo que "la velocidad es todo el rato la misma pero el tiempo transcurre mientras camina", es decir, concibe que la velocidad es constante pero elige esta fórmula en vez de $y = a$ porque, puede que al no aparecer la variable correspondiente al tiempo en esta última. En el caso del apartado b) tampoco se decanta por ninguna de las opciones disponibles, puede que porque no conoce algunas de las funciones que se presentan y las que sí conoce no ve que representen la situación real descrita en el enunciado.

En el ítem 5, solo asigna correctamente la gráfica de la función constante y las gráficas b) y h) que son parábolas y que ha asignado una a la expresión $y = ax^2 + bx + c$ y la otra a $y = a(x - b)^2 + c$, seguramente porque piensa que solo hay que asignar una gráfica a una fórmula y sabe que la representación gráfica de las funciones de ambas familias son parábolas. Sin embargo, llama la atención que esta asigna la gráfica de la parábola de la gráfica k) a la familia de funciones lineales ya que en el ítem 1 había indicado que sí que la conocía y esta es una de las funciones que más suele trabajarse en secundaria. Además, en el ítem 1 también había indicado que conocía la expresión de la familia de funciones de proporcionalidad inversa y en cambio aquí la ha relacionado con la gráfica de una función trigonométrica. También asigna la familia de funciones $y = a \cdot log_c x + b$ a otra gráfica trigonométrica de forma errónea, aunque en este caso la alumna ya había indicado que no conocía dicha familia de funciones.

Parte 2. Por lo que respecta al ítem 6, esta no da ninguna respuesta. En el ítem 7 la alumna explica que las tres expresiones algebraicas que le proporcionamos "son expresiones algebraicas con el mismo resultado, pero algunas más resueltas o simplificadas, pero las tres representan una parábola". Esto parece indicar que la alumna ve las fórmulas, no como funciones que expresan alguna característica de la gráfica, sino como ecuaciones que hay que resolver, que es lo que suelen hacer en clase en las que se igualan a cero expresiones para buscar sus soluciones. Además, lo único que explica es que las tres fórmulas representan la gráfica que les damos, cosa que ya les habíamos indicado en el enunciado de la pregunta. Por tanto, no podemos averiguar nasa del significado que atribuye a los parámetros.

Parte 3. En el apartado a) de este último ítem, la alumna realiza una serie de operaciones partiendo de la expresión $x(x+3)+3(x+3)$ hasta llegar a la que le pedimos que exprese en forma de cuadrado perfecto. Sin embargo, la alumna ha visto que 6 es múltiplo de 3 y 9 también, por lo que ha intentado sacar factor común x y 3 y luego ha comprobado que esto le llevaba de nuevo a la expresión inicial, por lo que parece que no ha entendido qué le pedíamos en la pregunta. Algo similar hace en el apartado b), en el que saca x factor común de los primeros dos monomios y luego, como en este caso el único múltiplo en común entre el término independiente y el coeficiente de x es 1 lo saca también factor común (aunque en este caso se olvida de escribir la x en el paréntesis), cosa que probablemente no hace para que le cuadren las operaciones y al multiplicar obtener la expresión inicial, aunque, de nuevo, no proporciona la expresión en forma de cuadrado perfecto. Por último, parece que la alumna sigue con la misma idea de sacar factor común, aunque no llega a obtener una expresión del tipo $y = a(x-b)^2 + c$. Empieza escribiendo 1/2 factor común de los dos primeros monomios aunque en el interior del paréntesis copia $2x^2 + 4x$ tal cual estaba en la expresión inicial aparte de elevar al cuadrado la expresión que hay entre paréntesis, probablemente tratando de seguir un paralelismo con la fórmula a la que quiere llegar. Luego, aplica el cuadrado a ambos monomios pero sin utilizar la fórmula del cuadrado de una suma, por lo que lo hace de forma incorrecta. Finalmente parece que en vez de multiplicar lo que ha sacado factor común escribe directamente la expresión inicial. Por tanto, la alumna realiza una serie de transformaciones sin sentido para tratar de llegar a obtener una expresión como la que le pedimos.

<u>Alumno 7.1</u>

Parte 1. En el ítem 1, este alumno indica que las únicas familias de funciones que reconoce son las lineales y la cuadrática expresada en la forma canónica polinómica. Esto puede ser debido a que solo se acuerda de la representación gráfica de estas familias y no del resto. Además, parece que no identifica $y = a(x-c)^2 + d$ como una función cuadrática por la forma canónica en la que viene dada.

En el primer apartado del ítem 2, el alumno comenta que la gráfica puede ser la altura que alcanza una persona en una montaña rusa en un tiempo determinado, por lo que parece que trata de describir una situación en la que la trayectoria descrita es de la misma forma que la gráfica dada. En el caso del apartado b), el alumno explica que esta gráfica podría ser "una bajada brusca de temperatura que después tiende a mantenerse", aunque no da detalles de a qué podría deberse dicha bajada de temperatura. Por último, en el apartado c), parece que el alumno trata de dar valores a las variables x e y para representar la gráfica de la función y después ver qué tipo de situación real podría ser descrita mediante dicha gráfica. Sin embargo, durante este proceso parece tener dificultades ya que representa la variable dependiente en el eje OX por lo que no llega a representar la gráfica de la función ni tampoco da ninguna situación real que podría ser descrita mediante esta.

En cuanto al ítem 3, el alumno deja sin responder los apartados a) y b), probablemente porque tiene dudas sobre qué tipo de gráficas podrían representar los fenómenos descritos. Sin embargo, sí que responde el apartado c), en el que elige la opción d) ya que "a medida que va llegando a la altura máxima, la velocidad va decreciendo hasta que llega y empieza a caer". Además, para justificar por qué elige esta gráfica y no otra, especifica que la forma debe ser esta debido a que "la pelota no tiene la misma velocidad cuando la lanzas que cuando llega a la máxima altura", por lo que la única opción posible es la d).

En cuanto al ítem 4, el alumno elige la función $y = x$ en el apartado a) como aquella que mejor describe la relación entre la velocidad a la que va caminando Joan y el tiempo que transcurre, que es constante aunque él elige esta porque "siempre lleva el mismo ritmo", por lo que es probable que piense que esto se traduce en una gráfica en la que la función es una línea recta y, consecuentemente, en una función lineal. Por otro lado, el alumno deja sin responder el apartado b).

En relación con el ítem 5, podemos ver que el alumno es capaz de relacionar gráficas con expresiones algebraicas correctas en el caso de la familia de funciones constante, lineal, cuadrática en la forma canónica polinómica y de proporcionalidad inversa (a pesar de que en el ítem 1 había indicado que no conocía esta familia de funciones). Sin embargo, solo asigna una única gráfica a cada expresión aunque hay más que corresponden a estas.

Parte 2. En el ítem 6, el alumno trata de averiguar los valores concretos de los parámetros que se han utilizado para representar las gráficas y, en caso de que no lo sepa, trata de decir en general si el de esa gráfica concreta debería ser positivo o negativo. En concreto, explica que para el caso de la gráfica de la función que hemos representado en el ítem anterior de la familia de funciones constantes, a tiene que ser igual a 2, probablemente porque la recta está representada a una altura de 2 en el eje OY. Para el caso de la lineal, este indica que b es la pendiente, "m", ya que esta función ha sido trabajada por los alumnos en cursos previos de modo que los parámetros eran designados mediante las letras m y n en vez de a y b y a estos se les asignaba el significado de pendiente y ordenada al origen, respectivamente. Sin embargo, el alumno recuerda el significado de estos parámetros de forma incorrecta ya que indica que "b es la pendiente". Por último, para el caso de la familia de funciones cuadráticas dice que deberá tener un valor positivo, aunque no indica a qué parámetro se refiere.

En cuanto al ítem 7, el alumno desarrolla las expresiones de las opciones b) y c) hasta obtener la misma expresión que la de la opción a) pero sin indicar qué significado tienen los parámetros de cada una de estas en relación con la gráfica.

Parte 3. Por último, el alumno solo responde el apartado a) del ítem 8 y expresa $x^2 + 6x + 9$ como $(x + 3)(x + 3)$, cosa que es correcto pero no da su respuesta en forma de cuadrado perfecto, por lo que parece que no ha pensado en la fórmula del cuadrado de una suma sino que puede que haya tratado de sacar factor común x y 3 y haya visto que en realidad la expresión se puede presentar como un producto.

Alumno 7.2

Antes que nada cabe destacar que este alumno se puso enfermo durante la segunda sesión y solo estuvo la mitad del tiempo en clase, lo que justifica la ausencia de algunas respuestas a partir del ítem 5.

Parte 1. En el primer ítem, el alumno indica que conoce todas las familias de funciones polinómicas, incluso aquellas que se presentan en una forma canónica con la que los alumnos no han trabajado previamente y aquella cuyo exponente es una letra. Además, indica también que conoce las familias de funciones cuya x aparece en el denominador de un cociente, a excepción de la función $y = a/x^n + b$. Por último también afirma conocer las familias de funciones raíz cuadrada y seno.

En el segundo ítem, el alumno no responde ninguno de los apartados, es decir, no encuentra ninguna situación real que pueda ser descrita mediante estas gráficas y fórmula, probablemente debido a que durante la enseñanza previa recibida no ha trabajado las funciones relacionándolas con situaciones o fenómenos reales o lo ha hecho en muy pocas ocasiones.

En el ítem 3, el alumno solo da respuesta a los apartados a) y c). En el primero de ellos, explica que la gráfica que describe la relación entre la tarifa que cobra un taxi y los kilómetros recorridos es la de la opción b) ya que "empieza en un precio de 3€ y va aumentando a medida que pasan los kilómetros". Por tanto, como podemos ver en la respuesta del alumno, este se limita a describir la gráfica que ha elegido, sin prestar atención a si de esta forma está justificando lo suficiente por qué ha elegido esta y no cualquiera de las otras. En concreto el alumno explica que empieza cobrando 3€, ya que la función empieza en el número 3 del eje OY pero, el afirmar que esta va aumentando a medida que el taxi va haciendo más kilómetros no justifica que lo haga de forma lineal. En cuanto al apartado c), el alumno elige la opción c) como aquella que describe la relación entre el tiempo y la altura que alcanza una piedra que es lanzada hacia arriba, aunque no lo justifica debidamente ya que explica que "la piedra llega a una altura que ya no se eleva más i es un punto concreto", pero no indica por qué piensa que la gráfica tendría esa forma y no otra.

En relación con el ítem 4, el alumno elige la opción d) en el primer apartado, que corresponde a una función constante, y la opción a) en el segundo, que se trata de una proporcional inversa. Sin embargo, no justifica sus respuestas, seguramente por falta de tiempo.

En el ítem 5 el alumno solo relaciona la gráfica de la función constante con la expresión algebraica $y = a$, a pesar de haber indicado previamente que también conocía otras familias de funciones.

Parte 2. De esta segunda parte en la que esperábamos obtener datos sobre cómo los alumnos interpretan los parámetros, no podemos obtener información puesto que el alumno deja ambas preguntas en blanco.

Parte 3. Por último, en el apartado a) del ítem 8, el alumno da como respuesta la expresión $(x + 3)^2$, que es correcta, aunque no sabemos cómo ha llegado a esta. Por otro lado, en el apartado b), el alumno no ha sabido dar la respuesta correcta ya que se limita a sacar factor común x de los primeros dos monomios de forma que la respuesta que da es $x(x - 1) + \frac{1}{4}$. Por último, en el apartado c), el alumno intenta encontrar la respuesta correcta pero al final no lo consigue, por lo que tacha todas las operaciones que había realizado para conseguirlo. No obstante, se puede apreciar que lo que trata de hacer es dar valores a los parámetros de la expresión $a(x-b)^2+c$ pero sin lograr dar con los valores que hacen que esta sea equivalente a la primera.

Alumno 8.1

Parte 1. En el primer ítem podemos observar que la alumna 8.1 asegura conocer las familias de funciones polinómicas incluyendo $y=ax^b$, aunque en algunos casos aparecen dadas en una forma canónica con la que no han trabajado previamente. También indica que reconoce las familias de funciones cuya variable independiente aparece en el denominador de un cociente, incluyendo aquella cuyo grado de x es n, así como las familias raíz cuadrada y seno. Sin embargo, asegura que no conoce las funciones exponenciales ni logarítmicas, pese a haber sido trabajadas el curso anterior en clase, cosa que probablemente se deba al hecho de que se presenten en una forma canónica que no es habitual para ella.

Esta alumna no responde ninguno de los apartados del ítem 2, por lo que podemos afirmar que ha tenido dificultades a la hora de encontrar situaciones reales que puedan ser descritas mediante las gráficas y fórmula que se muestran, probablemente no en interpretarlas ya que en el ítem 1 la alumna afirma conocer todas las funciones que les proporcionamos.

En relación con el tercer ítem, la alumna elige la opción d) "porque hasta que arranque [el taxi] tendrá que pagar lo mismo y una vez haya arrancado el coche el dinero aumenta según los kilómetros que hace". Esto es, parece que la alumna de alguna forma contempla en la gráfica de la función la relación entre el tiempo y la velocidad del coche puesto que pone énfasis en que inicialmente el coche está parado (comparándolo con la parte inicial de la gráfica en la que el crecimiento es lento) y que después este se pone en marcha (comparándolo con la parte de la gráfica en la que esta empieza a crecer de forma más rápida). Por otro lado, la alumna no responde al apartado b), probablemente porque no está segura de cuál de las gráficas puede llegar a describir el fenómeno del enunciado ya que, por las respuestas que da en a) y en c), parece que tiene cierta tendencia a identificar la forma de la gráfica con el enunciado y en este caso ninguna de las gráficas tiene una forma que coincida con la trayectoria que haría el carrito de una noria. Y, por último, por lo que respecta al apartado c), la alumna señala la gráfica de la opción c), aunque en la justificación explica que la gráfica sería la a), cosa que parece indicar que ha dudado entre varias de las opciones. Esta explica que ha elegido la opción a) ya que "desde el momento en el que lanzas la piedra irá muy rápido y el tiempo también". Por tanto, parece que la alumna interprete que la forma de la primera gráfica representa que la velocidad a la que se lanza la piedra es muy alta desde el principio, aunque esto no es así y es la gráfica d) la que reflecta este hecho. Además, en su respuesta podemos apreciar que para ella el tiempo no es algo fijo sino que también lo concibe como algo que puede "ir muy rápido o muy lento". En definitiva, podemos apreciar dificultades en esta alumna a la hora de interpretar las gráficas y darles sentido en relación con los fenómenos, así como también una cierta tendencia a comparar la forma de estas con las trayectorias descritas.

Por otro lado, la alumna elige la opción d) en el apartado a) del cuarto ítem y explica su respuesta diciendo que "es proporcional el tiempo a la velocidad", por lo que esto daría lugar a una función lineal. Sin embargo esta elige la función constante, puede que porque aunque haya dicho que la función es proporcional, se refiera no a la relación entre el tiempo y la velocidad sino entre el tiempo y la distancia recorrida. En cuanto al apartado b), la alumna elige la expresión algebraica de una proporcional inversa. Sin embargo parece que tenga dificultades a la hora de explicar su elección ya que no justifica su respuesta.

En el ítem 5, la alumna solo es capaz de relacionar la gráfica de la función constante con su expresión algebraica y la recta de la opción a) con la familia de funciones lineales. Sin embargo para el caso de las expresiones de las familias de funciones cuadráticas, esta asigna una gráfica de una logarítmica a la expresión $y = ax^2 + bx + c$ y la de una exponencial a la expresión $y = a(x - b)^2 + c$, a pesar de haber señalado que conocía ambas en el ítem 1. Lo mismo pasa para la familia de funciones polinómica de grado 3 y la proporcional inversa, que indica que las conoce pero a la hora de asignar qué tipo de gráfica describiría cada una de estas, señala que serían la proporcional inversa de la opción g) y la exponencial de la opción n), respectivamente. Del resto no indica nada, por lo que podemos afirmar que esta alumna presenta dificultades a la hora de relacionar gráficas con fórmulas expresadas en forma de familias de funciones.

Parte 2. En esta parte no podemos obtener información acerca de cómo conciben los parámetros y qué tipo de significado les otorgan puesto que la alumna no ha respondido el ítem 6 ni tampoco el 7, en el que solo ha explicado que las tres expresiones que les proporcionamos representan la misma gráfica, pero no ha indicado nada en relación con el significado de los valores numéricos que aparecen en cada una de ellas.

Parte 3. Para finalizar, en el ítem 8 la alumna solo ha respondido el último ítem, en el que parece que ha dado el valor 2 a los parámetros a, b y c ya que da como respuesta la expresión $y = 2(x - 2)^2 + 2$ que es incorrecta y lo hace sin dar ningún tipo de explicación. Puede que esta haya actuado de este modo ya que los valores numéricos que aparecen en la expresión proporcionada (2, 4 y 6) son múltiplos de 2.

<u>Alumno 8.2</u>

Parte 1. Por lo que respecta al primer ítem, esta alumna indica que solo reconoce las funciones lineales, la cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la polinómica de grado b y aquellas en las que la x aparece en el denominador de una fracción, menos $y = a/x^n + b$. Seguramente no haya marcado $y = a(x - c)^2 + d$ porque no la identifica como de la familia de funciones cuadráticas, por presentarse en una forma canónica distinta a la polinómica que es la que normalmente aparece en la enseñanza. Cabe destacar que esta alumna no ha indicado que no conozca el resto de familias de funciones, aunque esto parece indicar que realmente no las ha sabido identificar.

En el segundo ítem, la alumna no da ninguna respuesta, lo que parece indicar que tiene dificultades a la hora de encontrar fenómenos o situaciones reales que puedan ser descritos mediante estas gráficas y fórmula.

En relación con el apartado a) del tercer ítem, la alumna escoge la opción b) que es la gráfica de una función lineal y explica que “cuantos más kilómetros hace [el taxista] más dinero cobra”, con lo que justifica el hecho de que la gráfica sea creciente pero no la forma que tiene. Tampoco responde el apartado b) de este ítem pero sí el c), en el cual podemos adivinar que interpreta el fenómeno como una trayectoria ya que justifica su respuesta indicando que “tiramos la piedra hacia arriba y no puede hacer curvas”.

En el apartado a) del ítem 4, la alumna elige la opción c) que es una función lineal y explica que lo ha hecho porque “la velocidad es constante”, por lo que no tiene dificultades a la hora de identificar el tipo de movimiento que hace Joan al caminar pero sí a la hora de identificarlo con la expresión algebraica que lo representa. En el apartado b), esta elige la opción a) que corresponde a la expresión algebraica de una familia de funciones de proporcionalidad inversa y explica su respuesta diciendo que “depende del diámetro de la manguera, tardará más o menos en llenarse la piscina”, aunque no explica nada en su respuesta que justifique qué cómo es la relación que hay entre las variables estudiadas.

En cuanto al ítem 5, esta alumna solo ha sido capaz de relacionar la gráfica de la función constante, la recta de la opción a) y la parábola de la opción b) con las expresiones algebraicas de las familias de funciones correspondientes. Hay que destacar que, además, en el caso de la parábola lo ha hecho solo con la expresión $y = ax^2 + bx + c$ y no con $y = a(x - b)^2 + c$, por lo que puede que conciba las familias de funciones como disjuntas, cosa que ya se podía intuir en las respuestas al ítem 1 ya que no señala que conozca esta última expresión algebraica.

Parte 2. En el ítem 6 la alumna no da ningún tipo de respuesta, probablemente porque no entiende el significado del término parámetro. Sin embargo, en cuanto al ítem 7, la alumna sí que es capaz de relacionar algunos valores numéricos con aspectos o características de la gráfica que representan. En la primera expresión la alumna explica que esta nos dice que es ascendente, puede que refiriéndose a que tiene forma cóncava, cosa que viene indicado por el valor del coeficiente de x^2. Por otro lado, explica que en la expresión del apartado b), el valor numérico correspondiente a -2 indica que el vértice de la parábola está en -2. Por tanto, esta alumna es capaz de dar sentido a algunos de los valores relativos a los parámetros de la función y, por lo que explica, les da un sentido de valores concretos o puntos fijos de esta gráfica concreta, no un significado dinámico.

Parte 3. En este último ítem, la alumna da como respuesta del apartado a) la expresión $(x + 3)^2$, que efectivamente es un cuadrado perfecto, y lo hace porque reconoce que es una identidad notable. Sin embargo, en el segundo apartado se limita a sacar factor común x de los dos primeros monomios del polinomio y da como respuesta la expresión $x(x - 1) + \frac{1}{4}$, probablemente porque no ha sabido identificar el valor que restado a x y elevado al cuadrado da la expresión que presentamos, esto puede que sea como consecuencia de que el coeficiente de x no es múltiplo de 2. Por último, en el apartado c) podemos ver como la alumna realiza operaciones tratando de buscar la respuesta. En concreto lo que hace es probar qué tipo de expresión obtiene al substituir los parámetros de $y = a(x - b)^2 + c$ por valores concretos e incluso variables. Primero prueba con $a = x$ y $b = 2$ con lo que obtiene que al desarrollar el cuadrado y multiplicarlo por x el grado de la expresión se incrementa en 1. Después prueba lo mismo pero con $a = x$ de nuevo y $b = 1$ lo que hace que obtenga una expresión muy similar a la que le proporcionamos pero a falta de ser multiplicada por 2 y a falta de algún arreglo más, lo que hace que cambie la x que ha escrito en vez de a por 2 hasta obtener $2x^2 - 4x + 2$. Esto hace que al final escriba $y = 2(x - 1)^2$ y sumando 4 que son las unidades que le faltan a 2 para obtener el 6 de la expresión inicial. Finalmente, desarrolla la expresión hasta obtener la expresión $2x^2 - 4x + 6$ que es similar a la inicial pero no es la misma.

4.3.1.2. Por ítems

En esta parte del capítulo realizaremos una recopilación de los tipos de actuaciones observadas ítem por ítem. En cada uno de ellos haremos referencia a las tablas que hemos elaborado y que se encuentran en el anexo correspondiente, y de forma análoga en el análisis por ítems del resto de lecciones.

<u>Ítem 1</u> (Anexo 15, Tabla 15.1)

En la tabla 15.1, hemos expresado las funciones que los alumnos indican que conocen con una “c”, las que desconocen con una “d” y, para las que no dan respuesta, hemos dejado un espacio en blanco (aunque como podemos ver, esto solo lo hace la alumna 8.2). En esta tabla, hemos diferenciado por colores las columnas que hacen referencia a las respuestas que dan los alumnos respecto a cada tipo de familia de funciones de forma que hemos representado en un mismo color aquellas familias de funciones que, de alguna forma, podríamos decir que podrían ser subfamilias unas de otras (sin cambiar el tipo de función) o están relacionadas.

Del análisis de las respuestas por alumnos se deriva que la mayoría de ellos conocen las funciones polinómicas, aunque algunos no son capaces de reconocerlas cuando vienen dadas mediante la forma canónica $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ por lo que por ejemplo no conciben que $y = a(x-c)^2 + d$ y $y = ax^2 + bx + c$ describan el mismo tipo de funciones sino que las ven como disjuntas. Probablemente esto se deba a que estas funciones han sido trabajadas en clase en una forma canónica distinta a esta pero también porque, para tratar de averiguar cómo es su representación gráfica, los alumnos se fijan más en la forma de la forma canónica que en las características globales de esta (o en sus peculiaridades, como lo llamábamos en el capítulo 2). Por otro lado, muchos alumnos sí que son capaces de reconocer las familias de funciones en las que la variable independiente aparece en el denominador de un cociente, pero no aquella que se presenta mediante la forma canónica que acabamos de mencionar, lo que también puede ser debido al hecho de que el grado de x sea una letra, n, y no un valor numérico. Destaca también el hecho de que ninguno de los alumnos indica que conoce la función exponencial, a pesar de haberla trabajado en el curso anterior tal y como nos confirma su profesora[20]. Esto puede ser por el uso de la forma canónica en la que aparece la familia de funciones en la tabla así como por la cantidad de letras que aparecen en la fórmula y la imposibilidad de distinguir cuales son variables y cuales parámetros. Además, llama la atención que tres de los alumnos afirmen que, a pesar de no conocer la familia de funciones exponenciales, reconocen la familia de funciones $y = a\log(x-c) + b$ ya que habitualmente estas se introducen en la enseñanza relacionando las unas con las otras. Además, también indican que no conocen la familia de funciones $y = a\ln(x-c) + b$ que es un caso particular de la anterior.

En resumen, el hecho de que los alumnos indiquen que no conocen algunas familias de funciones puede ser debido a varios motivos: 1) a que no se acuerdan de la representación gráfica que tiene cada una de estas, 2) a la aparición de tantos valores simbólicos en una misma fórmula, lo que hace que no sean capaces de distinguir qué letras son variables y cuáles parámetros, 3) a que no hayan visto la familia de funciones expresada en otra forma canónica aparte de la habitual y por ello no la identifiquen como tal.

Además, hay que tener en cuenta que en esta pregunta se les pide a los alumnos que indiquen qué familia de funciones conocen, cosa que puede llevar a varios tipos de interpretaciones ya que para cada uno de ellos conocer una familia de funciones puede significar una cosa distinta: saber qué tipo de representación gráfica tendría, haber visto previamente su expresión algebraica aunque no sepan qué tipo de representación, conocer algunas funciones de la familia de funciones, etcétera. Por tanto, habrá que

[20] Es por este motivo por el que durante la última sesión dedicada al cuestionario inicial, cuando los alumnos terminan de responder las preguntas, se emplea un poco de tiempo para realizar comentarios y aclaraciones sobre los aspectos en los que observamos dificultades. En concreto se abordan conceptos como el de función exponencial y logarítmica, cosa que se hace mediante la representación gráfica de algunos casos concretos y la explicación de sus peculiaridades.

tener en cuenta las respuestas a las preguntas y sus actuaciones durante el resto de lecciones para poder tener más pistas de cuáles son sus concepciones.

Ítem 2 (Anexo 15, Tabla 15.2)

En la tabla 15.2 hemos clasificado las respuestas de los estudiantes considerado dos aspectos, según el tipo de situaciones reales que hemos observado que usan los alumnos para describir las gráficas o fórmulas dadas. Estos son: (1) si el alumno describe una situación real que corresponde con algún fenómeno físico (o si por el contrario no es así y la situación descrita podría dar lugar a otro tipo de gráfica en otras circunstancias) y (2) en el caso en que el fenómeno descrito corresponda a una trayectoria, si la forma de esta es similar a la forma de la gráfica (solo en el caso de los apartados a) y b)). En la tabla hemos indicado con una "s" si se da lo que acabamos de mencionar en (1) y (2) y con una "n" en caso contrario, si esto no sucede. En el caso de (2), si el fenómeno no es una trayectoria, lo indicaremos con el signo "-". Por otro lado, en caso de que los alumnos no hayan contestado alguno de los apartados, la casilla correspondiente de la tabla aparece en blanco y asignamos el signo "?" a las respuestas de los alumnos cuya justificación no nos permite saber con exactitud si se da o no lo que acabamos de mencionar así como también a aquellas respuestas en las que lo que describe el alumno no es una función.

En general, podemos afirmar que los alumnos tienen dificultades para describir situaciones reales a partir de una gráfica o de una fórmula dada ya que muchos de ellos dejan la pregunta totalmente en blanco o algunos apartados sin respuesta. Además, en el caso de los alumnos que sí que responden los apartados a) y b), podemos concluir que muchos de estos describen situaciones reales que, es cierto que podrían describirse mediante las gráficas presentadas, pero son situaciones concretas que se dan en unas condiciones determinadas y en otro caso podrían ser descritas mediante otro tipo de gráficas (como la situación que describe la alumna 1.2 que explica que la gráfica de la opción b) podría representar las ganancias de una empresa a lo largo de los años) o incluso situaciones que parecen forzadas y poco reales (por ejemplo la que describe el alumno 5.2 en el apartado b), que dice que podría ser la resistencia en relación con la edad). Llama la atención también que muchos alumnos usen la situación del lanzamiento de un balón o proyectil para describir la gráfica del apartado a), cosa que probablemente se deba a que la hayan trabajado en cursos previos o en otras asignaturas, como en física.

Por otro lado, también cabe destacar que la mayoría de situaciones descritas son situaciones cuya trayectoria coincide con la forma de la gráfica presentada por lo que, como ya menciona Janvier (1978) en su tesis doctoral, hay que someter a los alumnos a que estudien situaciones en las que esto no siempre sea así.

Además, podemos ver que la gráfica del apartado b) ha resultado más complicada a la hora de encontrar situaciones que pudieran ser descritas mediante esta que la del apartado a) que es una parábola, con la que han trabajado más durante los cursos académicos previos. En cuanto al apartado c), solo el alumno 2.1 ha dado un ejemplo de situación real que pudiera ser descrita mediante la expresión algebraica presentada (a pesar de ser una función lineal, bastante trabajada en clase por los alumnos), por lo que parece que les resulta más complicado proporcionar situaciones reales a partir de fórmulas que de gráficas.

Ítem 3 (Anexo 15, Tabla 15.3)

Como podemos observar en la tabla, los alumnos que responden el apartado a) dudan entre la opción b), que es la correcta, y la opción d), que muestra una gráfica exponencial en la que, por definición, inicialmente el crecimiento es muy lento pero conforme x aumenta, la función crece más rápido. Probablemente esto se deba a que, aunque la gráfica de la opción a) también es creciente por ser una función logarítmica, las dos en las que visualmente se aprecia un crecimiento son las funciones de las opciones b) y d) y dependiendo de la interpretación que los alumnos hacen de estas, conciben que la respuesta es una o la otra. Aunque en la mayoría de las respuestas de los alumnos que han elegido la opción d) no podemos encontrar ningún indicio que nos permita averiguar porqué eligen esta opción y no otra, puede que lo hayan hecho porque piensen que conforme más kilómetros recorre el taxi, lo que cobrará el taxista será mayor, es decir, como si de una función de acumulación se tratara.

Por otro lado, podemos observar que solo unos pocos responden el apartado b), puede que por la dificultad a la hora de relacionar el movimiento circular que describiría cualquier carrito de la noria con el tipo de gráfica que representa la relación tiempo-altura, que tendría forma sinusoidal, dificultad que podría estar relacionada con el hecho de que muchos alumnos solo son capaces de relacionar situaciones reales con trayectorias cuyo movimiento coincide con la forma de la gráfica, como ya hemos comentado previamente. Además también aparecen dificultades en cuanto a la interpretación de gráficas, ya que parece ser que lo que hacen muchos alumnos para tratar de dar con la respuesta correcta es interpretar las gráficas disponibles y ver cuál de las interpretaciones se corresponde con la situación descrita. De aquí hemos podido identificar algunas interpretaciones que no son correctas como por ejemplo la del alumno 4.1 que identifica “los picos de las gráficas” correspondientes a altura cero con el hecho de que la noria pare cada vez que da una vuelta, cosa que daría lugar a otro tipo de gráficas.

Por último, en cuanto al apartado c), llama la atención que muchos de los alumnos conciben que la representación del fenómeno descrito es la gráfica de la opción d) porque entienden que coincide con la trayectoria que realiza la piedra al lanzarla, a pesar de que en el enunciado se dice que esta se lanza hacia arriba (es el caso de los alumnos 1.2, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 6.1 y 6.2). Además, incluso algunos de aquellos alumnos que no eligen dicha opción, también interpretan de forma errónea la situación real presentada. Todo apunta a que esta forma de entender la situación proviene de la forma que tienen los alumnos de abordar la tarea ya que parece ser que lo que estos hacen es, después de leer el enunciado, tratan de dar sentido a las gráficas disponibles y, debido a que están acostumbrados a trabajar con gráficas cuya trayectoria coincide con la forma de esta, cambian el sentido del enunciado y lo interpretan de otra forma.

Además, en general llama la atención que muchos alumnos hayan dejado de responder los apartados a) y/o b) pero sin embargo, todos ellos hayan contestado el c). No obstante, después de lo que acabamos de comentar y de indagar en sus respuestas, deducimos que puede que esto se deba al hecho de que, al concebir la situación presentada en el enunciado como el lanzamiento de una piedra con un ángulo estrictamente menor de 90 grados, les es más fácil relacionar la situación real con la gráfica por la similitud entre el movimiento descrito por la piedra en el aire y la forma de la gráfica.

Ítem 4 (Anexo 15, Tabla 15.3)

Por lo que respecta al apartado a), podemos observar como una gran parte de los alumnos elige la función lineal $y = x$ en vez de la función constante $y = a$. Sin embargo, al analizar la justificación que dan en sus respuestas podemos ver que realmente los alumnos sí que identifican que la velocidad a la que camina Joan es constante, lo que ocurre es que confunden ambas expresiones algebraicas, probablemente por la similitud entre la forma de ambas expresiones.

Por otro lado, en el apartado b) podemos ver que hay una gran parte de alumnos que no da ningún tipo de respuesta, probablemente porque la relación entre las variables estudiadas no es tan directa como en otros casos. Además, si tenemos en cuenta las respuestas al ítem 1, ninguno de estos alumnos conoce todas las expresiones algebraicas de las familias de funciones que se dan como posibles respuestas y parece ser que, de entre las familias de funciones que sí conocen, ninguna les parece que sea la que describe el fenómeno explicado, por lo que terminan sin responder.

De forma adicional, cabe destacar que de los ítems 3 y 4 se desprende la idea de que en general la mayoría de alumnos tiene dificultades a la hora de expresar sus respuestas y de justificarlas, concretamente a la hora de justificar por qué eligen una opción y no otra ya que se centran solo en describir por qué han elegido esta y no las demás.

Ítem 5 (Anexo 15, Tabla 15.4)

En general, podemos afirmar que los alumnos presentan dificultades a la hora de relacionar gráficas con fórmulas expresadas en forma de familias de funciones. En primer lugar llama la atención que todos los alumnos asignen la gráfica l a la función constante ya que algunos de estos en el ítem anterior hablan de que la relación entre el tiempo y la velocidad es constante pero sin embargo asocian la fórmula $y = x$ en vez de $y = a$. También llama la atención que algunos alumnos asignen la gráfica de una parábola a la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$ y otra parábola distinta o incluso otro tipo de gráfica a la familia de funciones $y = a(x - b)^2 + c$, cosa que no tiene porqué ser debido a que vean ambas familias de funciones como disjuntas sino a que piensan que tienen que asignar una única gráfica a una única expresión (en el primer caso) o a que no la reconocen como una función cuadrática porque no han trabajado con esta forma canónica antes (en el segundo). En relación con lo que responden en el ítem 1, algunos de las funciones que indican que conocen no sean capaces de relacionarlas con gráficas de funciones concretas para dicha familia, lo que probablemente se deba a que en 1 señalan que conocen la expresión, pero igual de haberla trabajado en el tema de ecuaciones, no como una función en sí. Además, aparecen casos en los que los alumnos tienen dificultades a la hora de reconocer las familias de funciones debido a la nomenclatura usada. Esto pasa en el caso de la expresión algebraica $y = a/c$, que algunos alumnos identifican esta con la gráfica de alguna de las rectas, probablemente porque no interpretan el signo "/" como una raya de fracción y consideran la expresión equivalente a $y = ax$ (esto pasa en los casos de los alumnos 5.1 i 2.1).

También hay que destacar que la mayoría sabe reconocer las funciones constantes, lineales y cuadráticas pero no el resto como por ejemplo la función exponencial o logarítmica, a pesar de haberlas trabajado en cursos previos.

Ítem 6

De este ítem no hemos podido extraer mucha información puesto que muchos alumnos dejan la pregunta en blanco porqué, tal como nos indican durante los comentarios posteriores a la realización del cuestionario, no saben a qué nos referimos cuando hablamos de parámetros, aunque tampoco nos lo preguntan durante la realización de este. Por ello durante la corrección del cuestionario les explicamos que los parámetros son las letras que no son las variables cuya relación queremos estudiar, sino las letras que representan valores numéricos fijos cualquiera y que darían lugar a funciones concretas. Además, otros no entienden qué les pedimos en el enunciado, como la alumna 1.2. El único alumno que parece haber entendido que les pedimos es el alumno 7.1, que intenta encontrar los valores concretos de los parámetros para las gráficas representadas, y en caso de que no sepa encontrarlos indica el signo que debería tomar este para cada caso, aunque solo lo explica para las tres primeras familias de funciones.

Ítem 7 (Anexo 15, Tabla 15.5)

En general hemos encontrado dos tipos de respuesta: 1 Las de aquellos alumnos que tratan de comparar las tres expresiones algebraicas y llegan a la conclusión, como es obvio y ya les indicamos en el enunciado de la pregunta, de que las tres son equivalentes y representan la misma gráfica; y 2. Las de aquellos alumnos que tratan de dar algún tipo de significado a los valores numéricos que aparecen en las expresiones algebraicas en relación con la gráfica, tal como les pedíamos. Cabe destacar que la clasificación que damos para los tipos de respuestas no es disjunta puesto que el alumno 4.2 trata de dar significado a los valores numéricos obtenidos como solución de la ecuación resultante de igualar cada una de las expresiones a cero (que son los valores numéricos que aparecen restando a x en la tercera expresión) y al final concluye que las tres expresiones son equivalentes. También es importante resaltar que probablemente la justificación de las actuaciones de aquellos alumnos que tratan de resolver las ecuaciones igualando las expresiones a cero proviene del hecho de que esta es una actividad que habitualmente realizan en clase, por lo que interpretan así la pregunta. Por otro lado, destaca que, de los alumnos que sí que han tratado de interpretar el significado de los parámetros de alguna de las formas canónicas, parece que el tipo de significado que atribuyen hace referencia a la posición de una gráfica concreta o a alguna característica de esta (cosa que es probable que se deba al tipo de enseñanza previa recibida en la que se prima este tipo de significados), solo el alumno 5.2 parece que le atribuya un significado dinámico al -4 de $y = 2(x-2)(x-4)$ ya que dice que "[la gráfica] sube de x hasta el -4".

Ítem 8 (Anexo 15, Tabla 15.6)

Esta pregunta en general estaba planteada para ver si los alumnos eran capaces de realizar transformaciones algebraicas para pasar de expresiones del tipo $y = ax^2 + bx + c$ a expresiones del tipo $y = a(x-b)^2 + c$ puesto que en alguna de las lecciones les pediríamos que transformaran las funciones de una forma canónica polinómica a una de este tipo. Para ello, inicialmente les presentábamos una expresión en la que les pedíamos que completaran cuadrados, proceso que necesitarían realizar para cambiar de una forma canónica a otra y que podía realizarse con la simple observación de la expresión y la identificación de esta con la fórmula del cuadrado de una suma. Después les presentábamos otra expresión similar con otros valores numéricos y finalmente una para que realizaran el proceso completo.

En general, como podemos observar en la tabla 15.6, en los apartados a) y b) aparecen dos tipos de respuestas: 1. la de aquellos alumnos que tratan de sacar factor común x o bien 3 o bien cualquier otro tipo de factor (porque no saben cómo hacerlo o no entienden qué les pedimos) y 2. La de aquellos que parece que dan la respuesta de cabeza tratando de identificar esta con la fórmula del cuadrado de una suma o una resta, expresión que han trabajado en cursos previos. Cabe destacar que resulta más complicado para estos transformar la expresión del apartado b) que la del a) ya que algunos de ellos son capaces de dar la respuesta correcta en el primer apartado pero no en el segundo. Por otro lado, a pesar de esperar que los alumnos realicen operaciones como sumar, restar, sacar factor común, etc. para encontrar la expresión equivalente en el apartado c), hemos observado que ninguno de los alumnos que responde este apartado realiza este tipo de transformaciones sino que tratan de dar valores a los parámetros de la expresión algebraica $y = a(x - b)^2 + c$ hasta encontrar aquellos que hacen que esta sea equivalente a la expresión dada (en la tabla 15.6 hemos indicado con una cruz aquellos alumnos que abordan el apartado de esta forma). Además, destaca también el hecho de que muchos alumnos realicen operaciones para transformar una forma canónica a otra sin sentido, aplicando reglas matemáticas que han aprendido en clase pero sin pararse a reflexionar si en este caso esto se puede hacer o no.

4.3.1.3. Resumen de resultados

Como resultados hemos obtenido información sobre las ideas previas de los estudiantes en el dominio matemático de las familias de funciones, las formas canónicas de las familias de funciones y el significado de los parámetros.

En cuanto a los conocimientos previos de las familias de funciones, hemos observado que a los alumnos les resulta más fácil relacionar enunciados con gráficas, etc. que tener que inventar situaciones reales para describir gráficas, etc. debido a la falta de experiencia previa a la hora de relacionar matemáticas con situaciones reales. Además, en el caso en el que inventan situaciones reales, sobre todo a partir de gráficas, en la mayoría de ellos describen movimientos cuya trayectoria coincide con la gráfica de la función (como sucede en el ítem 2a). Incluso en los casos en los que la situación real ya viene dada mediante un enunciado y tienen que relacionarla con una gráfica, interpretan esta situación de forma que el movimiento descrito no coincide con la gráfica. Esto pasa en el ítem 3c en el que se dice que se lanza una piedra hacia arriba, entendiéndose que se hace en dirección vertical, pero estos, al ver las gráficas disponibles, lo interpretan como que su trayectoria describe la misma forma que la parábola de la opción d). Hemos observado también dificultades a la hora de relacionar gráficas de funciones concretas con expresiones algebraicas de familias de funciones, probablemente porque al estar estas expresadas en forma de parámetros no podían usar la técnica que usan habitualmente para representar una gráfica a partir de una fórmula que es la de dar valores a las variables y generar una tabla de puntos ni tampoco podían obtener pistas de qué tipo de gráfica sería observando los valores numéricos correspondientes a algunos parámetros de las funciones. En cambio, lo que tenían que hacer era fijarse en las características generales de cada tipo de familia de funciones (si está elevada al cuadrado sabremos que será una parábola, etc.).

En relación con el significado que atribuyen los alumnos a los parámetros, no hemos podido extraer mucha información debido a que muchos alumnos no han respondido o no han entendido lo que les pedíamos. Sin embargo, hemos podido observar que los que sí que son capaces de atribuir un cierto significado a los parámetros (en el caso del ítem 6) y a los valores numéricos (en el caso del ítem 7), lo hacen mayoritariamente basándose en las características concretas de la gráfica particular, y no atribuyen un significado dinámico, cosa que puede ser debido a que en la enseñanza habitual trabajan las funciones de este modo.

Por último, en relación a las transformaciones entre expresiones algebraicas, destaca sobre todo el hecho de que muchos alumnos realizan transformaciones sin ningún sentido, sumando o restando algún número cuando no pueden hacerlo, sacando factor común de forma equívoca o incluso desarrollando la expresión del cuadrado de una suma o una resta elevando cada uno de los monomios al cuadrado. Es decir, realizan transformaciones algebraicas sin ningún sentido, tratando de aplicar de forma errónea reglas matemáticas que han aprendido y sin razonar si lo que están haciendo es posible o no.

4.3.2. LECCIÓN 2. EL BOTE DE LA PELOTA

En cuanto a la segunda lección, nos interesará extraer la información disponible relativa a las preguntas de investigación. Por ello, primero analizaremos las actuaciones de las parejas de alumnos ítem por ítem, después presentaremos un resumen de las actuaciones de estos en relación con diferentes aspectos del ítem analizado para cada uno de los ítems y, para finalizar, mostraremos un resumen de los resultados obtenidos que nos permitirán, al finalizar el análisis, dar respuesta a las preguntas de investigación.

4.3.2.1. Por parejas

Empezaremos analizando las actuaciones de los alumnos organizándolas según los ítems a los que hacen referencia.

<u>Pareja 1</u>

Ítem 1. En el primer apartado del ítem podemos observar que las alumnos no describen la relación entre las variables de un mismo experimento sino que explican que "las magnitudes son directamente proporcionales" en el sentido de que si la pelota llega a una altura mayor, el tiempo que tardará en llegar al suelo también será mayor. Ven, de algún modo, la relación existente entre ambas pero no describen cómo será esta relación.

En relación con el segundo apartado, cuando les pedimos que realicen un dibujo de cómo creen que será la relación entre las variables, estos dibujan una gráfica en un sistema de referencia (escriben SR.) de modo que el eje horizontal representa el tiempo, "t", y el vertical la altura, "h" por lo que sí conciben que la mejor manera de representar la relación estudiada es mediante la gráfica de una función. En cuanto a la forma de esta, dibujan una parábola cóncava delimitada por dos puntos: el primero situado en una posición más alta que el segundo y unidos mediante una especie de recta a rallas, con la que parece que quieren indicar que la altura máxima a la que llega la pelota va disminuyendo conforme pasa el tiempo. Por tanto, parece que representan la relación entre el tiempo y la altura de la pelota, no desde el momento en el que esta toca el suelo hasta que lo vuelve a tocar, sino desde que alcanza la máxima altura después de rebotar contra al suelo, hasta que vuelve a alcanzar la máxima altura en el siguiente salto (puesto que ya en el apartado a) hablaban de la altura que alcanza la pelota en un bote). Siguiendo este razonamiento, la forma que para ellos tiene la relación estudiada tampoco sería correcta porque según la gráfica la pelota iría disminuyendo la velocidad al tocar el suelo y, a continuación, iría aumentando hasta volver a llegar a la máxima altura, cuando es al revés. No obstante, puede que dibujen una parábola puesto que en el apartado c del ítem 3 del cuestionario inicial les pedíamos que relacionaran una situación similar con la gráfica correspondiente y en el caso de las alumnas de este grupo, ambas decidieron que la relación era una parábola. Por lo que respecta a la posición, parece que conciban que ambas variables deben ser positivas, o al menos en el caso que han dibujado, puesto que el dibujo se encuentra en el primer cuadrante. Además, no necesariamente conciben que la altura que tiene el suelo tenga que ser cero puesto que habitualmente se toma el origen de coordenadas como el (0,0) y en este dibujo, la parte más baja de la parábola está un poco por encima del eje OX, no justo encima. Parece que las alumnas han dibujado la gráfica en general pensando en valores concretos de esta ya que escriben algunos valores concretos en la parte inferior del dibujo y es a lo que están acostumbrados, debido a que habitualmente en clase representan una gráfica a partir de una tabla de valores.

Ítem 2. A diferencia de en el ítem anterior, en este les pedimos que dibujen explícitamente en un sistema de ejes coordenados la gráfica que representa la relación estudiada. Sin embargo, no dibujan la misma gráfica que en el ítem anterior. Ahora representan la altura en el eje OX y el tiempo en el OY, es decir, para ellos la variable dependiente es el tiempo y no la altura tal como explican ya que dicen que "a más altura, más tardará en tocar el suelo y pegar el siguiente bote". Esto explica la forma de la gráfica ya que se trata de una gráfica creciente y lo que representan no es la relación entre el tiempo y la altura de un experimento en concreto sino el hecho de que al aumentar la altura de la pelota también aumentará el tiempo que tarda en volver a tocar el suelo. Al pedirles que expliquen por qué la han dibujado en esa posición concreta con respecto a los ejes, no explican esto sino por qué para ellos la gráfica es creciente.

Ítem 3. Estas alumnas marcan las funciones, $y = ax$, $y = ax + b$ e $y = a/x$ porque la gráfica que han obtenido es, según ellas, "una línea recta, es decir, no es parábola, por lo que no pueden ser las funciones cuadráticas". Por tanto, relacionan el tipo de gráfica con las fórmulas en los casos de $y = ax$ y $y = ax + b$ correctamente, pero no en el caso de la función de proporcionalidad inversa que gráficamente no es una recta. En cuanto a los parámetros señalan que estos son a y b en las tres fórmulas pero no explican cómo variaría la gráfica al variar el valor de estos sino que dicen que la gráfica variará al "aumentar o disminuir el valor de la y", por lo que parece que estén indicando que será posible obtener la gráfica de la función al obtener los valores de y como resultado de dar valores a x.

Ítem 4. Como podemos ver en la tabla 19.1 del Anexo 19, las alumnas fijan el punto en el centro de la pelota y los ejes de coordenadas de forma que el eje OX quede justo en la parte baja de la pelota, en lo que sería el suelo, "porque es donde rebota", y el eje OY pasando por la pata de la silla, aunque este dato será irrelevante en nuestro estudio puesto que las variables que estudian son el tiempo y la altura. Cabe destacar que, a pesar de fijar el eje OX en el suelo, la altura de la pelota cuando esta está en el suelo no será exactamente cero puesto que el punto está marcado en el centro de la pelota y no encima del eje OX. Por otro lado, la medida que introducen en la app para que les muestre los valores numéricos reales es 0,45m. Además, cuando les preguntamos qué gráficas de las que genera la app muestran la relación entre el tiempo y la altura explican que es aquella que muestra la relación entre y y t "porque relaciona lo que tarda en subir y bajar [la pelota]".

Ítem 5. Estas alumnas explican en el apartado a) que eligen como primera coordenada el tiempo que es la primera columna que aparece en la app Graphical Analysis, app a la que han enviado los datos de Video Physics para poder ver las coordenadas de los puntos que acaban de marcar, y como segunda coordenada la altura que viene dada en la tercera columna. Copian algunos puntos a la app Desmos pero al dictarle las coordenadas una alumna a la otra se equivocan y algunas de las coordenadas se las dicta de otra columna lo que hace que al representar los puntos gráficamente se den cuenta de que han hecho alguna cosa mal porque no les salen con la forma esperada que, según ellas, será una especie de recta ascendente por lo que han obtenido en el resto de respuestas. La imagen de los puntos representados se puede observar en la Figura 4.1. No obstante, al principio no se dan cuenta de que han copiado mal los puntos y una de las alumnas dice, tal como se puede escuchar en la grabación, que deberían escoger los puntos más espaciados para poder ver mejor la forma de la gráfica, eso es, escoger los puntos de forma que cubran todo el eje OX y puedan adivinar mejor su forma, cosa que hacen cuando vuelven a elegir otros puntos.

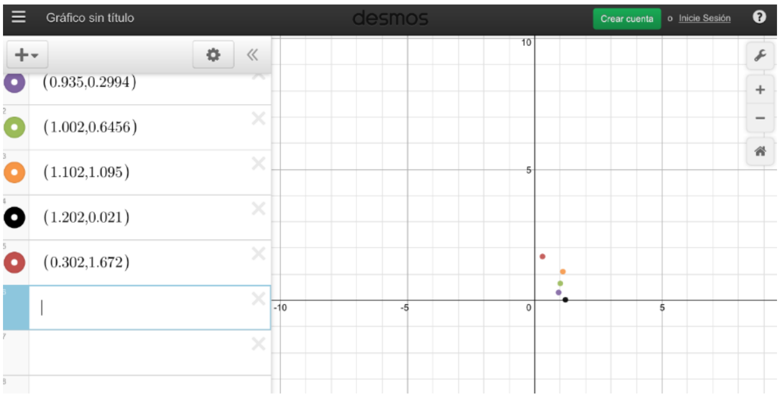

Figura 4.1. Representación puntos erróneos escogidos (pareja 1, lección 2)

Ítem 6. En el siguiente ítem, las alumnas indican que el tipo de función que mejor ajustará a los puntos es una parábola, fijándose ahora, al parecer, en la forma de los puntos representados en Desmos y no en el análisis cualitativo que realizan en el ítem 2, donde dibujan una gráfica que no representa la relación entre el tiempo y la altura de la pelota durante el primer bote.

En cuanto al apartado b), las alumnas empiezan ajustando la función $y = x^2$ y son capaces de saber qué parámetros utilizar para hacerla más ancha y más estrecha o cambiarla de sentido. Sin embargo, no saben cómo pueden moverla hacia arriba y hacia abajo, por lo que les facilitamos la pista. En esta, empiezan respondiendo a las preguntas y explican que para cambiar de orientación la gráfica hay que "poner la x negativa". A continuación les preguntamos cómo pueden mover la gráfica a lo largo del eje OY y escriben la expresión "$y = x^2 + a$" con la intención de indicar que esto se consigue sumando un número cualquiera a la expresión "$y = x^2$". Ahora bien, cuando les preguntamos cómo pueden mover hacia arriba o hacia abajo la función responden solo que esto se consigue "sumando valores a x", por lo que puede que entiendan que dependiendo del signo del valor de estos la gráfica subirá o bajará. En cambio, cuando preguntamos cómo pueden mover la gráfica a lo largo del eje OX estas explican que "restándole [un valor] a x" y, aunque no especifican cómo hacer que se mueva en un sentido o en otro, escriben que la fórmula final será de la forma "$y = -b(x - c)^2 + a$". Finalmente, cuando les preguntamos cómo pueden cambiar el ancho de la gráfica escriben la expresión "$y = -bx^2 + a$", indicando que, al multiplicar x por b se cambia la anchura. Observamos aquí que parece que las alumnas atribuyen un significado dinámico a todos los parámetros puesto que les dan un significado de cambio entre una gráfica inicial y otra final después de realizar algún cambio en la fórmula de esta. En definitiva, la fórmula que obtienen es $y = -10(x - 1{,}4700)^2 + 1{,}91$ que, como podemos ver en la Figura 4.2, a pesar de que está en la forma canónica que permitiría ajustar la gráfica a los puntos esta ajusta a los valores centrales representados pero no a los valores que se encuentran en los laterales. Sin embargo, las alumnas la dan por buena. Parece que obtienen los valores para los parámetros c y d (1,47 y 1,91) observando las coordenadas x e y del punto central que representa el vértice de la parábola (aunque este no es uno de los que hayan decidido representar), por lo que parece que los relacionan con características concretas de la función.

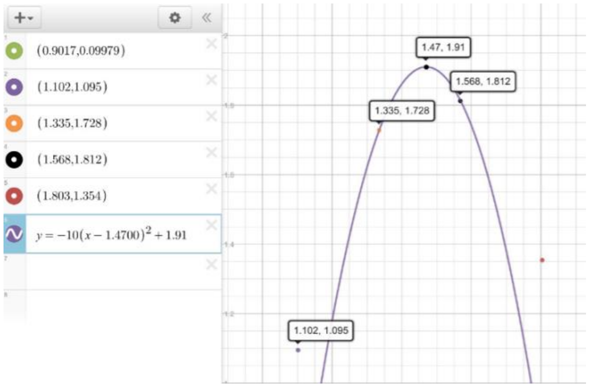

Figura 4.2. Gráfica respuesta apartado b) ítem 6 (pareja 1, lección 2)

Ítem 7. Después de trata de encontrar la fórmula de una función que ajustara a los puntos representados, les pedimos a los alumnos que encuentren la fórmula de la función utilizando la app Graphical Analysis, que la proporciona directamente sin tener que manipular parámetros, solo realizando una serie de operaciones con esta como borrar de la pantalla las gráficas que no correspondan a la relación estudiada (por lo que deben saber identificar qué tipo de gráfica es), seleccionarla y elegir de la lista de funciones la que han elegido como modelo en el apartado a) del ítem 6 (función que viene dada en una forma canónica polinómica). Esto les proporciona la fórmula de la función en la forma canónica polinómica, $y = -5x^2 + 14{,}9x + (-9{,}3)$. Una vez obtenida, les pedimos que la escriban en el apartado a) y en b) que escriban ambas funciones (esta y la obtenida en el ítem anterior) en la misma forma canónica para poder compararlas. Por ello, lo que hacen los alumnos es tratar de hacerlo sin ayuda pero como no saben hacerlo, nos piden la hoja con la ayuda 2 de modo que, siguiendo las instrucciones que allí aparecen, consiguen transformar esta fórmula a una de la forma $y = a(x - c)^2 + b$. Sin embargo, a pesar de que el objetivo de esta actividad era (aparte de comprobar si habían realizado correctamente el ajuste en el ítem 6) que realizaran transformaciones algebraicas con un objetivo concreto, el de comparar ambas funciones, y no como habitualmente se hace en clase que se hacen sin ninguna finalidad, las alumnas no realizan esta comparación en ningún momento.

Ítem 8. En este ítem les pedimos a los alumnos que elijan una de las funciones que han obtenido para calcular algunas imágenes de esta y responder una serie de preguntas. Las alumnas de este grupo indican que la función que consideran es la del ejercicio 7, pero antes de haberla transformado a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$, posiblemente porque no están seguras de que dicha fórmula sea correcta. Por tanto, no utilizan los cálculos realizados en el ítem anterior para transformar una función a la forma canónica de la otra. Como sabemos, el dominio de la función que modeliza el fenómeno en el que tendrá sentido la función (que es distinto al dominio de la función cuadrática sin más) no serán todos los reales, sino desde el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar. Por ello, tenemos que este será [0.9017, 2.07] y será el mismo para todas las parejas ya que esto depende de cómo haya fraccionado la app el vídeo en fotogramas, entre otros, y no de como tomen los alumnos las referencias. Por tanto, el único valor que tendrá sentido calcular la imagen es el 1,1 para todos los casos. Una vez realizados los cálculos en el apartado a) y habiendo indicado en b) que la x es la variable tiempo y la y la altura, las alumnas explican que todas las respuestas obtenidas tienen sentido, tratando de buscar una justificación, en este caso no válida, de por qué aparecen valores negativos para las imágenes. Es decir, las alumnas no se basan en que no tiene sentido calcular la imagen de unos valores que no se encuentran en el dominio sino que les llama más la atención que aparezcan valores negativos para las imágenes, lo que tratan de justificar diciendo que esto ocurre “porque [...] están acercándose al sistema de referencia”.

En cuanto a los apartados d) y e), las alumnas no dan ningún tipo de respuesta, puede que por tener el tiempo muy justo, aunque al apartado d) puede que no respondan porque, como han explicado, para ellas todos los datos tienen sentido.

Ítem 9. En el apartado a) de este ítem, les pedimos que calculen los valores del tiempo para los que la altura golpea el suelo así como la altura a la que se encuentra este. Para ello, usan la gráfica representada en la app Graphical Analysis, siendo así coherentes con lo que han hecho en el ítem anterior puesto que la función que consideran para realizar los cálculos es precisamente la que aquí aparece representada.

En concreto, obtienen que la pelota golpea el suelo a los 0,9010s (respuesta correcta puesto que casi coincide con 0,9017 que es la coordenada temporal del primer punto) y la altura del suelo 0,09979m, que es la imagen del valor de y para $x = 0{,}9010$, cosa que hacen al situarse con el cursor sobre la posición deseada de modo que la app les proporciona los valores del tiempo y de la altura cuando la pelota está en el suelo (como podemos ver en la primera imagen de la Figura 4.3). Por tanto, consideran que la altura del suelo coincide con la de la pelota en el suelo y es distinta de cero, a pesar de que estas alumnas son de las pocas que toman el suelo como referencia. Además, cabe destacar que solo dan la respuesta par la primera vez que la pelota toca el suelo, no para la segunda.

En cuanto al apartado b), siguen el mismo procedimiento, colocan el cursor sobre el vértice y observan los valores del tiempo en los que esto se da (Figura 4.3). Luego, como en este caso la app no les proporciona el valor para la altura, miran cuál será aproximadamente en el eje OY. Por tanto, están considerando que la altura será la diferencia entre la base de la pelota y el punto que está en el centro de esta.

En definitiva, como hemos observado tanto en un apartado como en el otro comparan la concepción que ellos tienen del fenómeno con la gráfica de la función para responder.

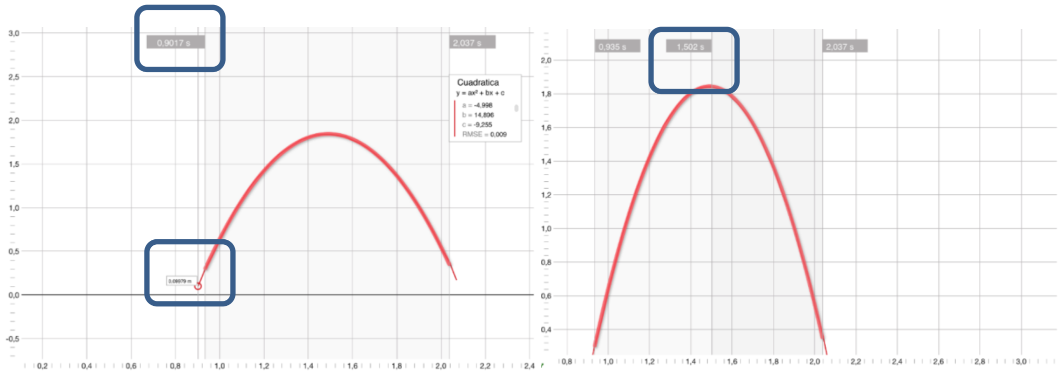

Figura 4.3. Gráficas respuestas apartados a) y b) ítem 9 (pareja 1, lección 2)

Cabe destacar que en esta app solo se representa gráficamente la parte de la parábola en la que tiene sentido hacer el ajuste, en el dominio, no la parábola en su totalidad como pasaba en Desmos, cosa que puede haber facilitado a los alumnos el saber cuándo esta toca el suelo ya que si lo hubieran hecho en Desmos puede que hubieran confundido el suelo con el eje OX.

<u>Pareja 2</u>

Ítem 1. Los alumnos indican que la relación entre ambas variables será “parabólica” y dan una descripción detallada de cómo será esta en cada momento desde que la pelota

toca el suelo por primera vez hasta la siguiente vez que lo toca. En esta, describen el fenómeno haciendo referencia no solo al tiempo y la altura sino también a la velocidad. En concreto, explican que "en el momento en que da el primer bote [la pelota] subiría a una velocidad menor que la inicial. A partir de este momento empieza a perder velocidad de forma gradual hasta que vuelve a tocar. El tiempo es constante de modo que la altura aumenta hasta llegar a un máximo. En ese instante continuará el tiempo pero la pelota se mantendrá en el aire unas milésimas porque la velocidad que llevará será cero. Después por efecto de la gravedad bajará". Aunque indiquen que la pelota "empieza a perder velocidad de forma gradual hasta que vuelve a tocar", parece que, por como describen la relación entre el tiempo y la altura son conscientes de que esto no es así, sino que la velocidad disminuye hasta el punto de máxima altura donde esta será cero, después volverá a aumentar hasta llegar al suelo.

Por lo que respecta al segundo apartado, los alumnos representan una gráfica, por lo que ven que la mejor forma de representar la relación estudiada es mediante una función. Dibujan una parábola convexa en unos ejes de coordenadas que representan el tiempo y la altura de forma que la parábola empieza en el origen de coordenadas que probablemente hayan considerado como el punto (0,0), por lo que conciben el tiempo como absoluto, es decir, consideran que el tiempo vale cero justo en el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez, a pesar de que este fenómeno se presenta en un contexto más amplio. Además, añaden una m en el eje de la x indicando que será en este momento cuando la pelota vuelve a tocar el suelo y lo mismo en el eje de las y, en el que escriben una m para indicar cuál sería el punto de máxima altura. En este caso los valores m y n no son valores numéricos concretos que han usado los alumnos para representar la gráfica como en el caso de las alumnas del grupo 1, sino que son valores que indican momentos en los que el fenómeno tiene un comportamiento concreto y los escriben para justificar de algún modo el motivo que les ha llevado a representar la gráfica de esta forma. Hay que destacar que dibujan la gráfica empezando en el eje OX y terminando también en este, por lo que probablemente conciban que la referencia es el suelo, donde rebota la pelota y, por consiguiente, que la altura de este es cero.

Ítem 2. En el segundo ítem los alumnos dibujan la misma gráfica, la única diferencia es que ahora indican que el valor m es el tiempo que tarda en volver a tocar el suelo la pelota, y no el instante en el que toca el suelo como en el ítem 1, por lo que aquí lo ven como un intervalo y no como un valor fijo. En este caso, justifican también la forma que tiene la gráfica explicando que esto se debe a que la velocidad aumenta hasta un momento en el que esta vale cero y luego a causa de la gravedad disminuye. Por otro lado, justifican que consideran el eje OX el tiempo por ser la variable independiente y en el OY la altura de la pelota que depende del tiempo del experimento en el que nos encontremos. Esto no es cierto pues lo que aumenta hasta llegar al máximo y disminuye posteriormente es la altura, no la velocidad. Sin embargo, parece que interpreten esto así basándose en la forma de la gráfica. Además, indican que el sistema de referencias que han tomado es el (0,0), por lo que consideran el tiempo como absoluto y la altura del suelo como cero.

Ítem 3. Estos alumnos marcan la familia de funciones $y = ax^2 + bx + c$ como aquella que mejor describe la gráfica representada en el ítem anterior ya que, según ellos, "es la única función que nos permite adaptar la función a lo que nosotros queremos porque es una función parabólica", es decir, identifican la familia de funciones cuadrática dada en la forma polinómica con el tipo de gráfica correspondiente que es una parábola. Sin embargo, no identifican la fórmula $y = a(x - b)^2 + c$ como una familia de funciones cuadrática, a pesar de que uno de los alumnos sí que indica conocerla en el cuestionario previo. Por lo que respecta a los parámetros, indican que son a, b y c y que a será negativa ya que la forma de la parábola es convexa.

Ítem 4. Estos alumnos comentan que han fijado los puntos que muestran la trayectoria de la pelota en el centro de esta, aprovechando la forma que tiene el cursor que, como podemos ver en los fotogramas que se muestran en la tabla 19.1 del Anexo 19, es redondo y de un tamaño similar al de la pelota. Por otro lado, fijan los ejes de coordenadas en el centro de la pelota cuando esta está en el suelo, es decir fijan el origen de coordenadas justo encima del primer punto marcado, sin pensar en si esto tiene sentido en términos del fenómeno o no, lo hacen porque según ellos es "para que salga proporcionado". Al igual que el resto de sus compañeros toman como medida la pata de la silla que mide 45cm y así lo indican. Por último, indican que sí que hay una gráfica que muestra la relación entre el tiempo y la altura de la pelota y que sería la que describiría la fórmula $y = ax^2 + bx + c$.

Ítem 5. En el apartado a) de este ítem los alumnos explican que para obtener las coordenadas de los puntos usaran las columnas primera, que les proporcionará el tiempo y corresponde al eje de las x, y tercera, que les proporcionará las coordenadas relativas a la altura de la pelota e irá en el eje de las y. Por otro lado, en el apartado b) podemos observar que los alumnos eligen en primer lugar las coordenadas de modo que, según comentan en clase y se puede escuchar en las grabaciones, las relativas a la altura las pasan a metros. Sin embargo, la forma en la que hacen los cálculos no es correcta ya que se limitan a eliminar las comas decimales de los puntos, cosa que provoca que la representación gráfica de estos no les salga como esperaban y que hace que vuelvan a copiar los puntos, ahora considerando la coma decimal. Además, explican que han escogido los puntos de forma aleatoria pero después especifican que lo han hecho de 5 en 5 aunque podrían haberlo hecho "de otra forma" tal como comentan en clase. Sin embargo, parece que al elegir este modo de escoger los puntos no han pensado en cubrir todo el eje OX y, por consiguiente, no han pensado que esto les facilitaría la tarea a la hora de ajustar una gráfica a los puntos puesto que en total obtienen 36 puntos y al coger 5 puntos de 5 en 5 solo representan hasta el vigésimo punto.

Ítem 6. En este ítem los alumnos dicen que la función que ajustará a los puntos será una parábola y especifican que será la que viene representada mediante la ecuación "$ax^2 + bx + c = 0$", es decir, identifican que será una expresión cuadrática pero confunden lo que es una función y una ecuación. Además, lo justifican describiendo el fenómeno estudiado haciendo hincapié en el momento en el que este cambia, cosa que parece que les lleva a considerar que la función será una cuadrática. Cabe destacar que, parece que al describir el fenómeno están pensando en la forma de la gráfica que lo representa, debido a que ya han analizado cualitativamente esta relación fenómeno-gráfica-fórmula.

Para tratar de ajustar la función a los puntos, los alumnos explican que lo primero que hacen es buscar el punto más alto de la gráfica para saber qué vale c, con lo que no podemos saber qué tipo de significado atribuyen a este parámetro. Por otro lado, comentan que "ax^2 tiene que ser negativa", refiriéndose a que la expresión para un valor concreto de a tiene que tener un signo negativo delante. Es decir, conciben que el tener un signo negativo o no hace que la gráfica sea cóncava o convexa. Tal como ellos mismos explican, escriben un valor multiplicando a x^2 para modificar la anchura. Después de esto, intentan añadir un término "bx" intentando hacer que esta se mueva en el eje de las x, ya que según ellos la fórmula de la parábola es "$y = ax^2 + bx + c$". Sin embargo el hecho de añadir este término no hace los movimientos esperables. Por ello nos piden la pista 1, que tampoco les sirve de ayuda porque continúan muy anclados a la idea de que la fórmula es $y = ax^2 + bx + c$ con a negativo, con lo que decidimos intervenir. Les guiamos a través de preguntas para que se den cuenta de que, si para mover la función en el eje de las y hay que cambiar el valor del parámetro que afecta a toda la fórmula, para moverla en el eje de las x habrá que mover uno que solo afecte a x, por lo que se escribe entre paréntesis. Entonces, miran las coordenadas del vértice de nuevo y copian la primera coordenada restando a la x del paréntesis, 1,428, con lo que obtienen mover la gráfica hacia la derecha. Aunque no lo dicen, parece que sí son conscientes, al hacer este tipo de acciones, de que la gráfica se moverá tantas unidades como indique este número. Luego cambian el valor del número que correspondería con el parámetro a de $y = a(x - c)^2 + d$ y con ello, obtienen la fórmula de la función que ajusta a los puntos: $y = -7{,}2(x - 1{,}428)^2 + 1{,}925$. Sin embargo, aunque dan sentido a los parámetros en esta forma canónica, realizan los cálculos pertinentes para obtener una fórmula de la función en la forma $y = -ax^2 + bx + c$, que es la que para ellos ajusta a los puntos.

Ítem 7. En cuanto al apartado a), los alumnos dan la fórmula obtenida en Desmos pero ahora en la forma canónica polinómica, esto es, $y = -7{,}2x^2 + 20{,}563x - 12{,}7$. Por otro lado, en b) sí que usan la fórmula obtenida con Graphical Analysis para transformarla a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$. Para ello, realizan los cálculos basándose en el ejemplo que les proporcionamos correctamente hasta la línea 6, en la que como podemos ver en sus respuestas, han considerado que $-(1{,}48)^2$ es igual que $(-1{,}48)^2$ ya que no han considerado que el resultado de elevar este número al cuadrado es negativo, cosa que hace que se produzca un error en el valor del parámetro independiente de la fórmula final obtenida. No responden el apartado c), por lo que no comparan las funciones.

Por tanto, hay que señalar que lo que han hecho los alumnos ha sido pasar la función obtenida con Desmos, dada en la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$, a la forma canónica polinómica y la obtenida con Graphical Analysis, dada en la forma canónica polinómica a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$ pero sin tener en cuenta el objetivo con el que queríamos que transformaran la forma canónica de las funciones (y que aparece explicado en el apartado c)): que compararan ambas funciones. Por consiguiente, podemos afirmar que parece que los alumnos realizan las operaciones sin preocuparse de si lo que hacen, lo hacen con alguna finalidad específica o no, cosa que no les extraña puesto que así es cómo parece que lo hacen habitualmente en clase.

Ítem 8. En este ítem los alumnos, usan la fórmula de la función que han obtenido en el ítem anterior después de haber realizado las operaciones necesarias para transformarla a una forma canónica del tipo $y = a(x - c)^2 + d$. No obstante, cometen un error y la fórmula no es correcta, cosa de la que se dan cuenta cuando representan la gráfica en Desmos para tratar de calcular las imágenes de los puntos ya que, como podemos escuchar en las grabaciones, explican que les sale "más arriba que la de antes" refiriéndose a que la función está desplazada en la dirección positiva del eje de las y con respecto a la que habían representado antes, la del ítem 7 pero antes de cambiarla de forma canónica. Sin embargo, como no están seguros, calculan las imágenes y obtienen unos valores muy diferentes de lo esperado ya que, como podemos escuchar en las grabaciones, comentan que les sale "una barbaridad". Se lo comentan a la profesora del grupo y repasan la fórmula aunque no se dan cuenta del error. La profesora les sugiere que desarrollen la expresión final y comprueben si obtienen la misma que la del ejercicio 7 para ver si es correcta pero los alumnos no realizan el proceso por ser muy laborioso y deciden continuar respondiendo a las preguntas a pesar de que los valores obtenidos no tienen sentido para ellos en términos de altura[21]. Es decir, comparan los valores obtenidos después de realizar el cálculo con lo que debería tener sentido para el fenómeno y, después de tratar de dar sentido a dichos valores, comentan que han hecho algo mal y que son conscientes de ello pero que van a continuar con el ejercicio porque no tienen tiempo.

No obstante, cuando les preguntamos si para ellos las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre, comentan que “la mayoría sí pero la última [$f(100)$] no lo representa porque se tiene que tener en cuenta que el móvil no puede atravesar el suelo”. Es decir, solo se fijan en las imágenes y si estas tienen sentido en relación con el fenómeno estudiado, no en si realmente tiene sentido calcular las imágenes de ciertos valores. A pesar de ello y probablemente debido a que no saben si las imágenes les salen valores tan altos debido a que han realizado algún cambio de escala en algún momento, solo hablan de que el valor que no tendría sentido sería la imagen de 100, por ser un valor negativo significaría ya que esto significaría que la pelota atraviesa el suelo. Es cierto que por cómo marcan los puntos y fijan el eje OX estos alumnos en Video Physics, la altura de la pelota en el suelo será aproximadamente cero, pero esto no implica que la altura del suelo sea cero (de hecho no lo es porque fijan el eje OX en el punto marcado justo en el centro de la pelota). Por tanto, parece que los alumnos no comprueban lo que han hecho en Video Physics para hacer tal afirmación, sino que se basan en cómo conciben ellos la altura. En definitiva, se centran más en intentar encontrar si tienen sentido los valores para las imágenes y, además, no contrastan lo que piensan con cómo son los datos para su experimento particular.

Sin embargo, cuando les preguntamos de forma explícita si piensan que la función puede ayudar a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito responden que no “porque el experimento solo es desde el primer bote hasta el segundo”. Por tanto, también piensan en el dominio, aunque no especifican qué dominio es este (a pesar de poder calcularlo fácilmente mirando la gráfica o la tabla de valores de Graphical Analysis).

Ítem 9. En el apartado a) de este último ítem les pedimos que calculen los valores del tiempo para los cuales la pelota toca el suelo. Lo que hacen estos alumnos es igualar y a cero, es decir, consideran que la altura a la que se encuentra la pelota en el suelo es cero, cosa que es cierta en su experimento pero que parece que, de nuevo, afirman sin pensar en cómo son sus datos puesto que en las grabaciones de audio se puede escuchar cómo, después de leer el enunciado del apartado a), los alumnos exclaman “¡ah esta [pregunta] es muy fácil! Ponemos aquí cero y ya está” mientras escriben la expresión de la fórmula pero en vez de escribir la letra y, escribiendo un “0”. En cuanto a la altura del suelo, tenemos que los alumnos explican que es cero porque es el punto de corte con el eje OX, considerando que la altura del suelo, al igual que la altura de la pelota en el suelo, es cero, lo que como sabemos no es cierto.

En relación con el apartado b), inicialmente comentan que buscaran en la gráfica representada en Desmos de la fórmula obtenida en el ítem 7 (la transformada) la máxima altura, pero después deciden calcularlo de forma más exacta usando la fórmula del vértice $-b/2a$ y sustituyendo por los valores concretos de la expresión. Cabe

[21] En la grabación del aula se puede escuchar también como vuelven a preguntar a la profesora habitual del grupo y ella les dice que comprueben que no hayan realizado ningún cambio de escala (puesto que es lo que intentan hacer en el ítem 5, aunque finalmente deciden no llevarlo a cabo). Para ello, piensan que podrían entrar a la app Video Physics y ver si la altura máxima coincide con la de la función que acaban de representar pero en las grabaciones no se entiende si finalmente lo hacen o no.

destacar que en este caso sí que se basan en la fórmula que se da en la forma polinómica. Por tanto, obtienen que la máxima altura se alcanza a los 1,48s y, substituyendo en la fórmula $y = -5{,}4(x - 1{,}48)^2 + 21{,}55$ este valor en x obtienen la altura máxima a la que llega la pelota.

Pareja 3

Ítem 1. Cuando les pedimos a los alumnos que describan como sería la relación estudiada proceden a describir cómo será la relación de las variables en diferentes momentos en los que el fenómeno se comporta de forma distinta. Además, utilizan la variable velocidad que, aunque no es una de las dos que les pedimos que estudien, está implícita en la relación estudiada. Concretamente explican el fenómeno descrito en dos partes. En la primera comentan que la pelota "sube con una fuerza N que, a causa de la gravedad g y de la fuerza de rozamiento del aire, disminuye con la velocidad de la pelota hasta que se para en el punto más alto de la trayectoria" y en la segunda que la pelota "baja adquiriendo velocidad a causa de la aceleración de la gravedad", lo que justificaría la forma en la que dibujan la gráfica en el apartado b). Cabe destacar que utilizan términos que han estudiado previamente en física porque probablemente han estudiado fenómenos semejantes en esta asignatura, aunque no desde el punto de vista de las matemáticas.

En cuanto a la gráfica, cabe destacar que representan la gráfica de la función en el primer cuadrante y en forma de parábola que empieza en el punto (0,0) ya que así lo han indicado en el punto donde se cruzan los ejes, que representan el tiempo (s) el de las x y la altura (m) el de las y. También cabe destacar que la parábola empieza en (0,0) y termina en el eje OX, por lo que toman el suelo como referencia, ya que es donde rebotaría la pelota y donde empieza y acaba el fenómeno estudiado. También consideran el tiempo como absoluto puesto que han obviado el contexto en el que se presenta el fenómeno y han considerado el tiempo cero justo en el momento en el que la pelota toca el suelo la primera vez. En este caso no parece que los estudiantes usen valores concretos para representar la gráfica sino, como en la pareja 2, para indicar referencias o momentos especiales en los que el fenómeno cambia de comportamiento.

Ítem 2. En el segundo ítem no añaden información extra por lo que respecta a la gráfica y justifican la forma de esta explicando lo mismo que en el apartado a) del ítem 1. Lo único que añaden es que la altura, representada en el eje OY, es la variable dependiente y el tiempo, representado en el OX, la variable independiente. Cuando les pedimos que justifiquen la posición de la gráfica se limitan a repetir a qué eje corresponde cada variable, sin justificar por qué han dibujado la gráfica en esa posición.

Ítem 3. Los alumnos eligen la familia de funciones cuadrática expresada en forma polinómica, porque "para formar una parábola es necesario haber un cuadrado [en la fórmula]", pero no aquella que está expresada en otra forma canónica distinta. Sin embargo, no saben identificar cuáles de las letras son parámetros y cuáles no.

Ítem 4. Podemos ver en la tabla 19.1 del Anexo 19 cómo estos alumnos identifican el suelo como la parte más baja de la pelota cuando esta está en el suelo ya que, además, explican que "la parte más baja de la pelota es la que toca el suelo". Además, comentan que marcan el primer punto aquí ya que "x_0" es el suelo. Sin embargo, esto no implica que hayan tomado como referencia el suelo, es decir, que la altura de este sea exactamente cero, ya que esto depende de que hayan fijado el eje OX justo en el suelo, cosa que no hacen ya que lo fijan en el centro de la pelota. No obstante, parece que no terminan de entender el funcionamiento de la app ni cómo influyen estas acciones en los valores que tomará la altura ya que según como han tomado las referencias (puntos y ejes) la altura del suelo no será cero y, en cambio, ellos consideran que "el inicio del bote de la pelota se tomará como 0". Por otro lado, especifican que la medida de referencia es la pata de la silla sobre la que está el alumno y mide 0,45m. Por último, explican que sí que hay una gráfica que relaciona el tiempo con la altura, la que considera estas como variable independiente y dependiente respectivamente.

Ítem 5. Una vez enviados los datos de la app Video Physics a Graphical Analysis y de haber puesto la app en el modo en el que se pueden observar los valores de las variables por columnas, les preguntamos a los alumnos qué columnas creen que tendrán que mirar para obtener las coordenadas de los puntos e indican que la primera, que representa los valores para el tiempo, y la tercera, que representa los de la altura. No obstante, al principio dudan porque el primer valor de la altura es negativo y ellos conciben que deberá ser cero pero al comentar uno de los dos alumnos que el primer valor que aparece es parecido a cero (aunque sale negativo precisamente por cómo han tomado ellos las referencias), deciden elegir esa variable. Por otro lado, en el apartado b), los alumnos copian una serie de puntos y explican que han elegido estos porque "son parcialmente equivalentes", es decir, porque la distancia entre los valores numéricos para x es muy similar. Sin embargo, aunque no lo indiquen de forma explícita, también han tratado de coger valores de x para todo el plano.

Ítem 6. En el primer apartado de este ítem comentan que el tipo de función elegida sería una ecuación de segundo grado, refiriéndose a una función cuadrática ya que "estas forman parábolas" y ya saben que la función que describe la relación estudiada es una parábola (porque así lo describen durante el análisis cualitativo que realizan previamente y lo corroboran después al observar las gráficas que les muestra Video Physics).

Estos alumnos no piden la ficha con la ayuda ya que consiguen ajustar la gráfica de la función a los puntos representados usando la fórmula $y = ax^2 + bx + c$. En concreto, explican que obtienen la fórmula $y = -5x^2 + 15x - 9.4$ porque saben que "para que la función sea descendiente, la x^2 tiene que ser negativa" refiriéndose a que para que la función tenga una forma convexa, el exponente de x^2 tiene que ser negativo. Añaden que "la x aumentada, aumenta el mayor valor de la y" haciendo referencia a que si se escribe un número mayor delante de x esto hace que la gráfica de y se mueva en dirección ascendente y desplazándose hacia la derecha (aunque esto no sucede siempre, solo cuando el coeficiente de x es positivo). Por último, añaden que el término independiente, al que llaman "el número sin x", "sube o baja la función respecto al valor de y".

Ítem 7. La finalidad de este ítem es que obtengan la fórmula de la función que ajustaría a los puntos usando la app Graphical Analysis y que transformen ambas a la misma forma canónica para poder compararlas. No obstante, como los alumnos obtienen la función en Desmos usando la forma canónica polinómica y la que proporciona la app Graphical Analysis está en la misma forma, no necesitan realizar transformaciones algebraicas de ningún tipo, por lo que la finalidad de este ítem para ellos se reduce a simplemente obtener la función mediante esta app, comprobar que la función obtenida en el ítem anterior es correcta y responder la pregunta de cuál de las dos ajusta mejor a los datos. Una vez obtenida la función, como respuesta a la pregunta, los alumnos comentan que la que más ajustará será la que proporciona la app sin tener que manipular ellos mismos los parámetros ya que, según ellos, es más exacta, respuesta que probablemente dan debido a que los valores numéricos para los parámetros de esta fórmula tienen un número mayor de decimales, lo que les lleva a pensar que es más precisa.

Ítem 8. Siendo coherentes con lo que afirman en el apartado anterior, los alumnos eligen la función $y = -5{,}259x^2 + 15{,}605 - 9{,}751$ para responder las preguntas de este ítem. Para calcular las imágenes usan la app Desmos, pero lo que hacen es introducir la expresión de la función de modo que x vale 0.76, 1.1, 0.11 y 100, con lo que obtienen gráficas de rectas horizontales cuya altura corresponde al valor de la imagen de la función por el punto. Como no entienden el significado de esto llaman a la profesora y esta les explica a qué es debido esto. Después de ello, deciden usar la calculadora que usan en clase pero, por lo que parece, realizan algún tipo de operación mal ya que los valores que obtienen para las imágenes de los puntos no son correctas. Concretamente obtienen que $f(0.76) = -45.7$, $f(1.1) = -118.8$, $f(0.11) = -9.9$ y $f(100) = -81957469.75$ y explican que para ellos esto no muestra lo que verdaderamente ocurre ya que "el balón no puede estar en una y negativa, porque significaría que ha atravesado el suelo". Es decir, ven que el hecho de que la y sea negativa, es decir, que la altura sea negativa, implica que la pelota ha atravesado el suelo. Por ello comentan que ninguno de los resultados obtenidos se ajusta a lo que esperaban, sin embargo no se preguntan esto a qué puede ser debido (a cálculos mal realizados, a que los valores no están en el dominio para el que hemos definido la función, etcétera). Además, conciben que la referencia tomada es el suelo puesto que explican que la función "no puede atravesar el eje de coordenadas ya que está el suelo", es decir, conciben el eje OX como el suelo y, en consecuencia, como la referencia, la altura cero. Por tanto, parece que estos alumnos no piensan en ningún momento en dónde han tomado la referencia en Video Physics sino que se basan más en la idea que tienen de que el suelo es la referencia ya que, como hemos comentado, estos no fijan el eje en el suelo sino en medio de la pelota. Además, como podemos ver en la tabla del Anexo 19 en su caso sí que podrían aparecer valores negativos y tener sentido ya que han fijado el eje OX ligeramente por encima del primer punto marcado.

Por otro lado, cabe destacar también que cuando les preguntamos si piensan que la función les podría ayudar a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito explican que no porque cortaría el eje, por lo que parece que se basan en cómo es la gráfica de la función, que cuando x crece la función decrece, aunque no explican por qué sucede esto si la función que han calculado se supone que describe el fenómenos estudiado.

Ítem 9. Por último, les pedimos que encuentren los valores del tiempo para los que la pelota golpea el suelo. No obstante y a diferencia de antes, aquí no piensan en cuál será la referencia sino en que la pelota tocará el suelo en el primer punto y en el último, por lo que proporcionan la primera coordenada de ambos puntos, 0,9017 y 2,07, como los valores del tiempo para los que la pelota toca el suelo y obtienen la altura a la que se encuentra el suelo mirando la altura del primer y del último punto en la gráfica de esta función que han representado en Desmos, aproximadamente -0,02 y 0,05. Por tanto, están considerando que la altura del suelo y la altura de la pelota en el suelo son iguales, cosa que no es cierto en su caso. Además, parece que no interpretan los resultados en relación con el fenómeno en general porque no les extraña obtener dos valores distintos para el suelo, -0,02 y 0,05, ni tampoco que uno sea negativo.

Y, para finalizar, en el apartado b) de este ítem podemos ver que los alumnos obtienen el valor del tiempo y el de la altura para el cuál la pelota está en su máxima altura moviendo el cursor sobre la gráfica hasta el vértice y observando los valores que le proporciona la app, tal como se observa en la imagen de la Figura 4.4.

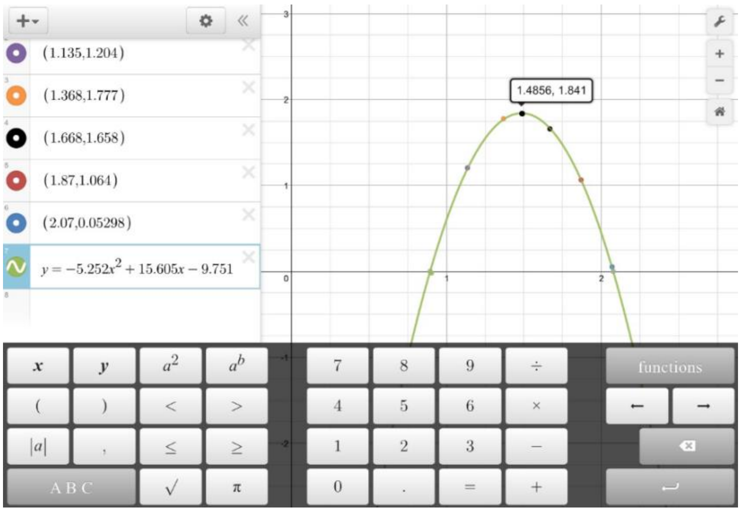

Figura 4.4. Gráfica respuesta apartado b) ítem 9 (pareja 3, lección 2)

<u>Pareja 4</u>

Ítem 1. Los alumnos de esta pareja explican en el apartado a) que la relación entre las variables es proporcional puesto que “cuanto más tiempo tarda [en llegar la pelota al suelo] más alto llega y por el contrario cuanto menos tarde llega más bota”. Es decir, explican cómo sería la relación tiempo-altura entre diferentes botes de la pelota, no la relación tiempo-altura en cada momento de un mismo bote.

Sin embargo, en el apartado b), dibujan la gráfica que representa la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de la pelota en cada instante, por lo que, además, podemos ver cómo los alumnos son conscientes de que la mejor forma de representar dicha relación es a través de una función. Concretamente dibujan unos ejes perpendiculares, que etiquetan como “T(s)” y “h(m)”, y que representan el tiempo transcurrido en segundos y la altura de la pelota en metros. La forma de la gráfica es de parábola, aunque aquí no justifican porqué lo han hecho así, y en medio de esta dibujan una línea rallada desde el punto más alto hasta el eje OX y otra desde el mismo punto al eje OY, probablemente para poner énfasis en cuál es el punto más alto así como en la simetría de la función. Cabe destacar que estos la dibujan empezando del origen de coordenadas que, aunque no indican qué valores toma, presuponemos que han considerado el (0,0) como habitualmente hacen en clase, por lo que conciben el tiempo como absoluto, así como también el suelo como referencia ya que empiezan y terminan dibujando la gráfica en el eje OX simulando cuando la pelota toca el suelo por primera y segunda vez, por lo que han considerado que la altura del suelo es cero.

Ítem 2. En el segundo ítem, aparte de repetir la gráfica que dibujan en el ítem anterior, encontramos la justificación de porqué los alumnos la han representado con esta forma, aunque no se trata de una descripción completa ya que sólo explican por qué crece y decrece, “porque a medida que va pasando el tiempo la pelota llega a una altura la cual no aumenta y empieza a descender lentamente”, pero no por qué tiene forma de parábola. En cuanto a la posición, explican que toman “la altura como sistema de referencia” ya que “la pelota no puede pasar de ahí” así como también que el tiempo no puede ser negativo por lo que, efectivamente, habían considerado (0,0) como origen de de coordenadas y, por ello, dibujan la gráfica en el primer cuadrante y en esta posición concreta, por lo que conciben que las variables tiempo y altura, x e y, son siempre positivas.

Ítem 3. Estos alumnos señalan la familia de funciones$y = ax^2 + bx + c$ como aquella que mejor ajustaría a la gráfica y lo justifican diciendo que lo han hecho “porque es una ecuación de segundo grado”, refiriéndose a que es la fórmula de una familia de funciones cuadráticas, por lo que su representación será una parábola. Además, especifican que los parámetros de la fórmula son a, b y c y que “c representa el lugar del eje OY donde corta la parábola”, cosa que no sabemos de dónde han deducido, si de su experiencia previa o porque saben que cuando x vale 0 se obtiene el valor que corta el eje OY y en este caso si asignamos el valor 0 a x obtenemos que y vale c.

Ítem 4. Estos alumnos fijan el punto que muestra la trayectoria de la pelota en el centro de esta (ver Tabla 19.1 del Anexo 19) y lo hacen “porque el centro de gravedad está en el centro de la pelota”, es decir, para decidir dónde fijar el punto se basan en un motivo ajeno a lo que tienen que estudiar en este experimento: la relación entre el tiempo y la altura. Por lo que respecta al eje OX lo sitúan “en el suelo”, aunque como podemos ver en la imagen correspondiente en la Tabla 19.1, lo hacen justo en el primer punto que marcan en la pelota, por lo que la altura de la pelota en el suelo será cero aproximadamente, pero no la altura del suelo. Puede que expliquen que fijan el eje en el suelo pero sin prestar atención al sitio concreto del suelo donde lo fijan (ya que como podemos observar en la imagen, se puede ver suelo a diferentes alturas). A pesar de que para las variables estudiadas en este experimento no tiene importancia donde fijen el eje OY, estos explican que lo hacen en la trayectoria del recorrido de la pelota. Por otro lado, añaden que toman la pata de la silla como referencia y la medida que introducen en la app es 0,5m, aproximando los 0,45m que les habíamos indicado que medía. Además, indican que es la cuarta gráfica que muestra Video Physics la que representa la relación estudiada.

Ítem 5. En este ítem los alumnos indican que han elegido las columnas “Time(s)” y “y(m)” que representan el tiempo y la altura. En el segundo apartado copian en forma de columna una coordenada temporal y al lado la correspondiente a la altura para ese tiempo y explican por qué han elegido cada uno de los valores. Como podemos ver han intentado coger puntos abarcando todo el eje OX al igual que han tratado de hacerlo de forma que la distancia entre uno y el siguiente sea parecida.

Ítem 6. En este ítem, al preguntarles a los alumnos qué tipo de función piensan que ajustará a los datos obtenidos indican que la ecuación de segundo grado, refiriéndose a la función cuadrática.

En cuanto al ajuste de la función a los puntos, por lo que podemos escuchar en las grabaciones, estos empiezan escribiendo la fórmula de la familia de funciones cuadrática para algunos valores concretos y van modificándolos de modo que llegan a la conclusión de que el signo negativo en la a hace que la gráfica gire, que “el número que no tiene x” que se mueva hacia arriba o abajo y “el que multiplica a la x” que se mueva en diagonal. Por ello, al considerar esta forma canónica y concebir que los parámetros de esta hacen estos movimientos, les resulta complicado ajustar la gráfica a los puntos, con lo que terminan pidiéndonos la hoja con las preguntas de ayuda. Conviene señalar que en ningún momento hablan de cómo pueden hacer para dilatar o contraer la gráfica para que tenga la misma forma que los puntos. Además, cabe destacar que, siguiendo las interpretaciones que hacen los alumnos del significado de los parámetros, estos les otorgan un significado dinámico en la mayoría de los casos. Una vez les proporcionamos la hoja con la ayuda, los alumnos se limitan a ir respondiendo las preguntas, puesto que ya saben la respuesta de algunas de estas de antes, aunque ahora empiezan representando la función $y = x^2$. Indican que para cambiar la orientación de la gráfica hay que añadir un signo negativo en el coeficiente y que para mover la gráfica verticalmente hay que sumar un número a la expresión, en concreto la segunda coordenada del vértice. Luego, al ver que hay una pregunta en la que se les pide que muevan la gráfica solo horizontalmente tratan de hacer cambios sobre la fórmula tratando de buscar cómo conseguirlo con lo que llegan a obtener expresiones del tipo como la que aparece en la Figura 4.5. Por ello, decidimos intervenir para que lleguen a la solución. Les indicamos que si se fijan, para mover la gráfica verticalmente en el eje OY han tenido que sumar un número a toda la expresión. Les preguntamos que si ahora lo que quieren es mover la gráfica en el eje OX, qué deberían hacer, a lo que responden que deberán introducir un número de modo que solo afecte a x, pero no saben cómo hacerlo. Finalmente, después de unas cuantas preguntas más, se dan cuenta de que deberán escribir un número "antes de elevar al cuadrado la x", por lo que así lo indican. Además, señalan que este número deberá ser la primera coordenada del vértice. Por último, especifican que hay que cambiar el número que multiplica a x^2 para cambiar la amplitud y que esta será más ancha cuando introducen un número que está "cada vez más cerca de cero".

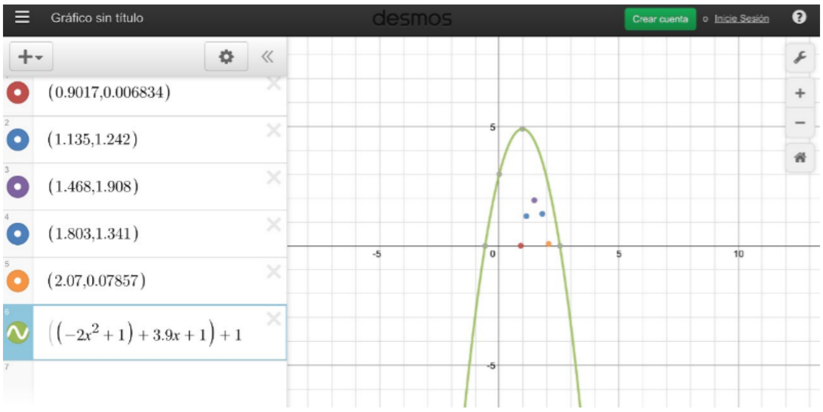

Figura 4.5. Búsqueda función de ajuste a puntos en Desmos (pareja 4, lección 2)

Ítem 7. Después de obtener la fórmula en Desmos, realizan las operaciones necesarias para obtener la fórmula en Graphical Analysis, que proporciona la función directamente sin que los alumnos tengan que manipular los valores correspondientes para los diferentes parámetros y obtienen la fórmula $y = -5{,}513x^2 + 16{,}394x - 10{,}271$ en la forma canónica polinómica.

En cuanto al apartado b), en el que les pedimos que escriban ambas funciones en la misma forma canónica, los alumnos deciden usar la ayuda para transformar la función que acaban de obtener a otra cuya forma canónica es la misma que la función del ítem anterior. Para ello, siguen los pasos que se indican en la ayuda pero basándose en el ejemplo que se les proporciona cambiando los valores numéricos de los coeficientes de la expresión que allí aparece por los de la función que ellos han obtenido (en vez de seguir las instrucciones escritas). Es decir, no usan la ficha de ayuda con las indicaciones para saber el tipo de operaciones que deben realizar entendiendo el significado de estas, sino que parece que la usan sin dar sentido a lo que hacen, de forma mecanizada. Además, al copiar una de las expresiones (la de la línea 6), los alumnos cometen un error que provoca que el término independiente de la expresión final que obtienen no sea correcto y, por consiguiente, no ajuste a los puntos. No obstante, cuando les pedimos que comparen ambas funciones, lo que hacen es representarlas gráficamente y observar cuál de las dos ajusta más, tal como podemos ver en la imagen de la Figura 4.6., en vez de comparar ambas expresiones algebraicas. Además, las funciones que representan son la obtenida con Desmos y la obtenida directamente con Graphical Analysis, por lo que en ningún momento usan la que acaban de obtener, es decir, realizan los cálculos porque es algo que les hemos pedido, no con ninguna otra finalidad. Como consecuencia de esto, explican que la que más ajusta es la que obtienen con Graphical Analysis, justificando que "es la que usa números más exactos", probablemente porque usa valores con más cifras decimales.

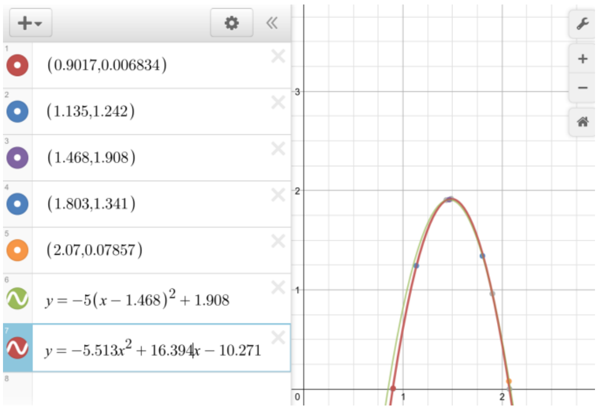

Figura 4.6. Comparación funciones obtenidas en Desmos y en Graphical Analysis (pareja 4, lección 2)

Ítem 8. En el siguiente ítem, los alumnos usan la fórmula de la función del ítem anterior para realizar los cálculos y responder a las preguntas, la obtenida con Graphical Analysis, pero antes de transformarla a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$ (por lo que, de nuevo, tampoco utilizan la función que han obtenido para los cálculos sino la que proporciona directamente la app). Conviene señalar que solo tendrá sentido calcular $f(1,1)$ porque 1,1 es el único valor que se encuentra en el dominio de la función. Sin embargo, una vez calculadas las imágenes de los puntos que les pedimos, algunas de las cuales son negativas, los alumnos explican que las respuestas obtenidas no muestran lo que verdaderamente ocurre "porque algunos valores son negativos y, en este caso, no es posible", no porque algunos de los valores de los cuales han calculado las imágenes estén fuera del dominio. Además, en la respuesta al apartado e) explican que la pelota "no puede pasar el suelo", por lo que podemos deducir que, en vez de pensar en cómo han tomado las referencias previamente en la app y si esto tiene sentido o no comparándolo con los datos obtenidos, se limitan a identificar valores negativos con estar por debajo del suelo. Por tanto, conciben que la referencia tomada es el suelo y, por consiguiente que la altura de este es cero, lo que no es cierto. Además, indican cuáles son los datos que no se ajustan a lo que esperaban y dicen que son $f(0,76)$, $f(0,11)$ y $f(100)$ "porque la altura da negativa". Cabe destacar que en su caso tendrían razón ya que para ellos la altura de la pelota en el suelo es aproximadamente cero. No obstante, esta afirmación de que la altura no puede ser negativa se basa en sus concepciones y no parece que sea el resultado de reflexionar sobre cómo han tomado las referencias en Video Physics. Por otro lado, indican que la función sí que puede ayudarnos a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito pero dicen que "en este contexto no es útil ya que no puede pasar el suelo y dar valores negativos". Es decir, parece que al hacerles esta pregunta sí que ven que la función no tiene sentido para todos los reales solo en el intervalo para el que se ha definido ya que especifican que en otro contexto igual sí que tendría sentido.

Ítem 9. Para finalizar, les formulamos una serie de preguntas con la intención de que continúen interpretando la función en términos del fenómenos para ver su adecuación y también para comprobar si se dan cuenta de lo importante que es tener en cuenta dónde han fijado las referencias para responder las preguntas. Sin embargo, estos alumnos no se dan cuenta de ello y hacen más caso a sus concepciones. Por ejemplo, en el apartado a) de este ítem les pedimos que calculen los valores del tiempo para los cuales la pelota golpea el suelo y lo que hacen es representar la gráfica en Desmos a partir de la función y ver el punto de corte de esta con el eje OX (ver Figura 4.7), tal como indican después, porque han considerado que la altura de la pelota en el suelo es cero. Es cierto que para dar respuesta a la pregunta estos alumnos tienen que considerar que la altura es cero porque en su caso fijan el eje OX justo en el primer punto marcado. Sin embargo, lo hacen en el centro de la pelota, por lo que el suelo no estaría a esta altura y posteriormente hacen referencia a que la altura del suelo es cero. Por tanto, parece que, de nuevo, su respuesta se haya basado más en qué conciben que es la referencia que no en qué tipo de referencia han tomado en la app Video Physics.

Por último, en el segundo apartado actúan de forma paralela. Para responder la pregunta de para qué valores del tiempo la pelota alcanza su máxima altura y cuál es esa altura lo que hacen es situar el cursor en el vértice de la parábola, que identifican como el punto de máxima altura comparando la gráfica con el fenómeno, para obtener los valores de x e y en este punto (ver Figura 4.7).

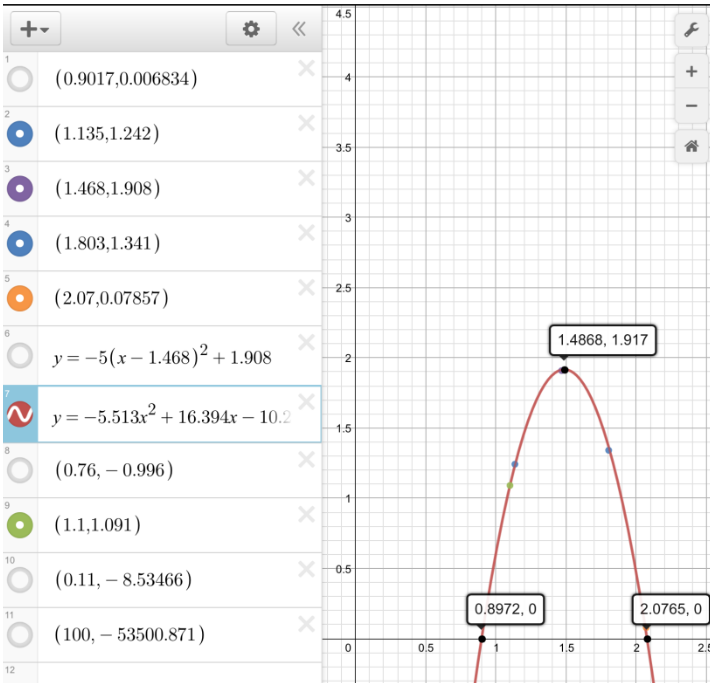

Figura 4.7. Gráfica respuestas apartados a) y b) ítem 9 (pareja 4, lección 2)

<u>Pareja 5</u>

Ítem 1. En el primer apartado de este ítem los alumnos se limitan a explicar que la relación entre el tiempo y la altura dependerá de ciertas variables: “la velocidad que tome la pelota, el peso de la pelota y la gravedad”. Sin embargo, no explican cómo será esta relación.

Por lo que respecta al apartado b), empiezan realizando un esbozo del movimiento que realizaría la pelota, cosa que no aporta mucha información. Sin embargo, a continuación se dan cuenta de que la mejor forma de expresar dicha relación será mediante una gráfica que relacione el tiempo con la altura. Para ello, dibujan dos ejes perpendiculares y representan la variable tiempo en el eje de las x y la variable altura en el de las y. Dibujan los ejes divididos en rallas más pequeñas y más grandes, por cada 4 de las pequeñas una grande, de forma que representan los valores que tomará la función en cada instante, por lo que probablemente los alumnos hayan representado la gráfica pensando en un caso concreto de experimento debido a que han dibujado los ejes escalados. El tipo de gráfica que representan es una parábola de modo que esta empieza en el origen de coordenadas y termina en un valor del eje OX, por lo que conciben el tiempo como absoluto, obviando que el fenómeno se presenta en un contexto más amplio, y toman como referencia el suelo ya que la gráfica empieza en OX y termina en OX. Por la forma en la que han dibujado la gráfica todo parece apuntar a que lo han hecho tratando de establecer un paralelismo entre lo que sería la trayectoria de la pelota (no totalmente vertical) y la gráfica representada, cosa que se corrobora al observar la gráfica del ítem 2. Cabe destacar que dibujan la gráfica totalmente contenida en el primer cuadrante, por lo que parece que no ven que el tiempo y la altura puedan tomar valores negativos.

Ítem 2. En este segundo ítem los alumnos dibujan de nuevo una parábola contenida en el primero de los cuadrantes, aunque en este caso también han dibujado el resto de ellos. De nuevo dibujan los ejes escalados aunque no dibujan la parábola de las mismas medidas que la anterior, por lo que pensamos que en este caso simplemente han escalado los ejes pero no se han fijado en estos para hacer la representación. A la hora de justificar por qué han dibujado la gráfica en forma parabólica estos explican que lo hacen "porque los botes caen ondulados no caen en picado". Por tanto, parece que, como apuntábamos antes, tratan de dibujar la gráfica pensando en la forma en la que tendría su trayectoria y no en cómo sería la relación entre las variables estudiadas. Además, en el apartado c) indican que los ejes de coordenadas "sirven para representar un recorrido", por lo que se confirma nuestra hipótesis. Por otro lado, indican que han representado el tiempo y la altura en segundos y en metros respectivamente porque son las unidades del sistema internacional, es decir, no han pensado en si esto tendría o no sentido en términos del fenómeno ni tampoco han mirado la gráfica que, según lo que han indicado, la pelota rebotaría hasta los 7 metros de altura. Por otro lado, indican que la han dibujado en esta posición concreta respecto a los ejes puesto que la altura y el tiempo no pueden ser negativos.

Ítem 3. Estos alumnos marcan la opción $y = ax + b$ como aquella que mejor ajustaría a la gráfica y lo justifican diciendo que la han elegido "porque a y b serían gravedad y peso", es decir, no se basan en la forma de la gráfica para determinar el tipo de familia de funciones que mejor ajustaría a esta sino en las variables que ellos creen que influirían en cómo sería un fenómeno concreto. Probablemente, al pensar que solo hay dos variables desconocidas han escogido esta familia de funciones que tiene también dos parámetros desconocidos. Por otro lado, cuando les pedimos que digan cuáles de las letras son parámetros indican que son todas menos x e y, pero refiriéndose a las de todas las fórmulas.

Ítem 4. Los alumnos indican que marcan el punto justo en el medio de la pelota por ser simétrico, es decir, no lo hacen por ningún motivo relacionado con las características del fenómeno ni tampoco parece que sean conscientes de la repercusión de sus acciones en la app posteriormente para la variable altura. También explican que fijan los ejes de coordenadas en el centro del balón cuando este pega el primer bote "porque estamos midiendo el balón", es decir, tampoco parece que piensen en que esto influirá después en sus datos. Añaden que la medida de referencia tomada es 0,45m aunque no especifican que se refiere a la medida de la pata de la silla pero podemos verificar que así es en la captura de pantalla correspondiente en la Tabla 19.1 del Anexo 19. Además, explican que la gráfica que mostrará la relación que tienen que estudiar es la primera gráfica de la tercera página "porque es la que más se parece al bote de un balón, porque sube y baja onduladamente". Es decir, se decantan por esta gráfica porque comparan la forma con la forma de la trayectoria, como ya hacían en el cuestionario inicial, incluso en el caso en el que la trayectoria no es ni tan siquiera así.

Ítem 5. En relación con el apartado a) de este ítem, los alumnos explican que eligen las columnas "time(s)" y "y(m)" pero no solo porque son las que muestran la relación entre el tiempo y la altura sino que también influye un tercer factor que es los valores que toma cada variable ya que explican que escogen estos "porque son las únicas columnas que no dan negativo porque el tiempo y la altura no pueden ser negativos". Por otro lado, copian una serie de puntos y dicen que copian exactamente esos porque, como había 36 y les pedimos que elijan 5, han dividido 36 entre 5 y al salirles 9 han decidido tomar los puntos de 9 en 9.

Ítem 6. En cuanto al tipo de función que representa los datos obtenidos, los alumnos comentan que se trata de una parábola, siendo coherentes con lo que piensan en los ítems anteriores. Además, indican que se trata de una parábola sin hacer referencia al tipo de fórmula, que sería la de una función cuadrática, "porque representa el bote de la pelota", por lo que están pensando en la representación gráfica de esta, que bien han realizado en ítems anteriores (análisis cualitativo) y que han obtenido también en la app Video Physics.

Por otro lado, en el apartado b) no responden nada y tampoco se escuchan bien las grabaciones que realizan en el aula, por lo que no podemos saber qué saben hacer antes de pedir las pistas y qué no. No obstante, todo apunta a que se dan cuenta del tipo de fórmula que ajustará a los puntos al pedir la pista e indicarles que empiecen ajustando $y = x^2$. En primer lugar, teniendo en cuenta la información disponible en el diario de aula de la sesión correspondiente, tenemos que estos solo anotan lo que significa cada parámetro una vez han encontrado la fórmula de la gráfica que ajusta a los puntos, lo que explicaría por qué dan las justificaciones en general sin proporcionar los valores concretos para cada parámetro hasta el final. De las respuestas de estos alumnos a las fichas podemos decir que la función obtenida es $y = -5{,}4(x - 1{,}468)^2 + 1{,}873$. Pero antes de escribir esta fórmula, los alumnos responden las preguntas que les formulamos en la ficha de ayuda 1. En esta explican que "si [$y = x^2$] es negativo va hacia abajo y si es positivo va hacia arriba", es decir, que si se le añade un signo negativo a dicha expresión la parábola será convexa y si no, será cóncava, otorgándole así un significado que hemos denominado "estático"[22] a la aparición o no del signo negativo en el parámetro. Por otro lado, explican que cuando mueven la gráfica a lo largo del eje OY esto "hace que sea más grande la parábola", probablemente refiriéndose a que está más arriba o más abajo ya que cómo explican en c.3), "si le pones más algo la parábola sube y si le pones menos la parábola baja" explicitando a qué se referían anteriormente e indicando que lo que hace que la gráfica se mueva en este sentido es el sumar o restar un parámetro. De los dos tipos de respuesta podemos ver que los alumnos dan un significado tanto estático ("es la amplitud de la parábola, que sea más grande") cómo dinámico ("la parábola sube […] y baja") a este parámetro. A continuación, les pedimos

[22] La definición de este término se encuentra en el capítulo 6, en el que explicamos en qué sentido hemos reelaborado la definición que proporciona Puig (2015) de los parámetros en la forma canónica considerada a partir de los resultados obtenidos en este estudio.

que muevan la gráfica en el eje de las x y les preguntamos cuál es el efecto en la fórmula y responden que “es lo contrario que antes, que el eje de las y [...]”. Además, indican que para mover la gráfica hacia la derecha y hacia la izquierda añaden paréntesis y un parámetro a restando solo a x: $(x-a)^2$. Cabe destacar que, al igual que en el caso de otros alumnos, les proporcionamos ayuda durante la sesión para que lleguen a la conclusión de que lo que mueve la gráfica en esta dirección es escribir un número que solo afecte a la variable independiente. En este caso le dan un significado dinámico al parámetro a, y también cuantitativo puesto que añaden que “los números que se mueve son a”. Por último, explican que lo que cambia el ancho de la gráfica es el número “de delante del paréntesis”, refiriéndose al número de delante de la expresión $(x-a)^2$. Sin embargo, cuando les pedimos que sean más específicos, explican que “poniéndole un número a la y la hacemos más ancha y poniéndole un número a la x la hacemos más fina”. Con esta afirmación se refieren a que, si escriben un número multiplicando a y (supuestamente positivo para que no cambie la orientación de la gráfica) la gráfica se dilata, y si escriben un número (supuestamente positivo) delante del paréntesis hace que esta se contraiga (por lo que consideran este parámetro cómo positivo y el signo como algo aparte que indica la forma de la parábola, posiblemente influenciados por cómo hemos planteado las preguntas en el experimento). Asimismo, hay que destacar que probablemente han escrito los valores 1,468 y 1,873 de la fórmula para los parámetros c y d respectivamente puesto que han mirado las coordenadas del vértice, que es uno de los puntos que han representado, tal como se puede observar en la Figura 4.8. Además, puede que el color que proporciona la app para cada punto ayude a identificar cuál es el vértice evitándoles así tener que interpretar que representa cada coordenada hasta el momento de pensar cuál de las dos representará el tiempo y cuál la altura.

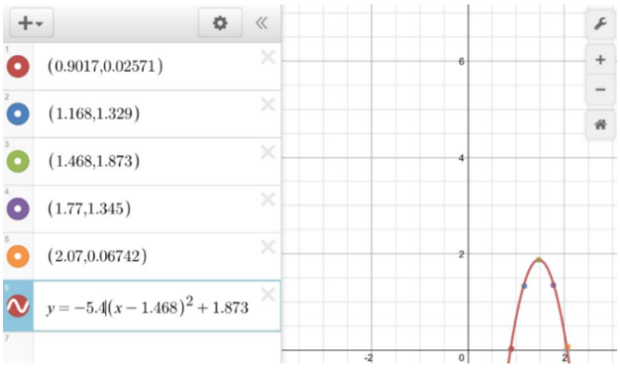

Figura 4.8. Búsqueda función de ajuste a puntos en Desmos (pareja 5, lección 2)

Ítem 7. Una vez obtenida la función con Desmos, les pedimos que obtengan la función con Graphical Analysis con el objetivo de que las comparen y, puesto que esta última viene dada en la forma canónica polinómica, tengan que realizar una serie de operaciones de modo que estos realicen operaciones algebraicas con una finalidad concreta, y no sin ningún sentido como están acostumbrados a hacer en clase. Por ello, una vez obtenida la función, $y=-5{,}215x^2+15{,}472+(-9{,}688)$, nos piden la hoja con la ayuda para transformarla a una función de la forma $y=a(x-c)^2+d$. No obstante, no son capaces de hacerlo, probablemente porque no saben interpretar las instrucciones que les hemos proporcionado o no saben cómo aplicarlas. Por tanto, no consiguen obtener la función en dicha forma canónica y, por consiguiente, tampoco comparar ambas.

Ítem 8. Con respecto al penúltimo ítem, podemos ver que los alumnos deciden usar la función obtenida en el ítem 6. Así pues, como en el resto de los casos, cabe destacar que el único valor el cual tendrá sentido calcular su imagen será el 1,1 ya que el dominio en el cual tiene sentido la función en relación con el experimento realizado será desde 0,9017 hasta 2,07. Sin embargo, al calcular las imágenes de los puntos y preguntarles si muestran lo que verdaderamente ocurre, explican que no "porque dan negativo" y después que "los datos que no ajustan son la imagen de 0,11, la de 0,76 y la de 100 porque dan negativo". Es decir, les llama más la atención que aparezcan valores negativos para la altura que no calcular imágenes de valores que ni siquiera están en el dominio.

Estos alumnos obtendrán que la altura de la pelota en el suelo será siempre positiva y casi cero en el suelo por cómo han fijado las referencia en Video Physics: en el centro de la pelota y haciendo coincidir el eje OX con el primer punto marcado. No obstante, parece que lo afirman no porque estén pensando en ello sino en que la referencia es el suelo y por tanto está a altura cero, cosa que no es cierta ya que, debido a que las referencias las fijan en el centro de la pelota, este estará a una altura negativa.

Ítem 9. Por último, en el apartado a) de este ítem los alumnos explican que para responder usan la app Graphical Analysis, a pesar de que la fórmula que utilizan en el ítem anterior es la obtenida con Desmos, por lo que parece que no se han parado a reflexionar sobre si esto tendrá algún tipo de impacto sobre sus respuestas. En concreto, explican que los valores en los que la pelota toca el suelo son 0,9 y 2,07, valores que han obtenido al mirar el primer y el último punto en la tabla de Graphical Analysis (en la primera columna relativa al tiempo). No obstante, a la hora de determinar a qué altura está el suelo, no miran la columna correspondiente a la altura para esos dos valores sino que directamente afirman que esta es cero, por lo que deducimos que conciben el suelo como la referencia, sin pensar en cómo toman las referencias en la app Video Physics y en que esto influye en el tipo de resultados obtenidos aquí. En relación con el segundo apartado, podemos ver como los alumnos actúan casi del mismo modo. En este caso, parece que piensen en cómo es el fenómeno y al mirar la gráfica reconocen que la máxima altura se alcanzará en el valor más alto de esta. Por tanto, colocan el cursor sobre este punto y obtienen un valor determinado para el tiempo, lo que les hace ir a la tabla que proporciona la app, buscar un valor parecido para ese tiempo, 1,468s, y copiar el valor y también el de la altura, 1,873, para saber cuál será esta altura máxima (ver Figura 4.9).

Experimentos

	Time (s) VideoAnalysis	X (m) VideoAnalysis	Y (m) VideoAnalysis	X Velocity (m/s) VideoAnalysis	Y Velocity (m/s) VideoAnalysis	
12	1,268	-0,03139	1,581	0,017	2,553	12
13	1,302	-0,03421	1,667	0,110	2,322	13
14	1,335	-0,01767	1,764	0,049	1,395	14
15	1,368	-0,03388	1,738	0,074	1,008	15
16	1,402	-0,01749	1,803	0,226	1,292	16
17	1,435	-0,01724	1,857	0,344	0,725	17
18	$\boxed{1,468}$	0,005361	$\boxed{1,873}$	0,449	-0,426	18
19	1,502	0,01798	1,819	0,383	-1,308	19
20	1,535	0,0338	1,757	0,219	-1,382	20

Figura 4.9. Coordenadas respuesta apartado a) ítem 9 en tabla de Graphical Analysis (pareja 5, lección 2)

Pareja 6

Ítem 1. Estos alumnos tampoco describen cómo será la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de la pelota durante el primer bote sino que comparan cómo será el experimento dependiendo de la altura a la que se deje caer la pelota ya que indican que “cuanto más alta esté la pelota, más velocidad tomará y con más fuerza golpeará el suelo, de modo que la fuerza de rebote también será mayor”. Por otro lado, en el apartado b) dibujan unos ejes de coordenadas, como lo harían cuando representan funciones, pero lo que representan son flechas en dirección vertical y en ambos sentidos tratando de indicar el movimiento que haría la pelota al dejarla caer así como dos círculos que representarían la pelota cuando está en el suelo y cuando está en su máxima altura.

Ítem 2. En el caso del segundo ítem, en el que ya les pedimos que representen de forma explícita la gráfica de la función que muestra dicha relación, los alumnos empiezan dibujando una curva descendiente partiendo de un valor positivo del eje OY (seguramente porque están considerando todo el fenómeno, no solo el primer bote) hasta casi el eje OX de forma que a continuación va decreciendo de forma mucho más lenta. Sin embargo, posteriormente descartan esta opción y dibujan una curva ondulada cuyas ondas van haciéndose cada vez más pequeñas hasta terminar en una recta horizontal. Parece que estas ondas simulan la relación entre la altura de la pelota y el tiempo transcurrido desde el momento en que se deja caer la pelota hasta que esta para, por lo que estos alumnos han considerado todo el experimento. La justificación que dan de la forma de la gráfica es que la pelota “empieza a caer y toma una aceleración hasta llegar a una velocidad constante y cuando llega al suelo rebota, pero la altura de cada bote es menor hasta que llega un momento en el que ya no bota más”. No obstante, con esta justificación no explican por qué tiene esta forma concreta, únicamente por qué dibujan las ondas cada vez más pequeñas. Asimismo, la afirmación de que la pelota, después de tomar aceleración, llega a una velocidad constante, es incorrecta, puesto que la velocidad va variando en todo momento, es más alta cuando la pelota toca el suelo y más baja o nula cuando esta llega a su máxima altura. Además, de la gráfica también podemos deducir que han tomado el suelo como referencia ya que han dibujado las curvas de modo que cambian de dirección al tocar el eje OX. Así pues, añaden lo que representa cada uno de los ejes pero no justifican por qué han tomado los segundos y los centímetros como medidas de referencia, aunque probablemente sea porque han pensado que serían las que más sentido tendrían en términos del fenómeno.

Ítem 3. Estos alumnos señalan varias familias de funciones como aquellas que podrían ajustar mejor a la gráfica. En concreto señalan las fórmulas $y = ax + b$, $y = ax^b$ y $y = a/x$, aunque no sabemos por qué motivo puesto que los tipos de gráficas de las tres funciones son distintas (menos en el caso en el que el exponente de la segunda sea 1 que sería una función lineal como la primera). La justificación que ellos dan es que eligen estas familias de funciones por la aceleración que adquiere la pelota, que hace que sea un movimiento simple. Por otro lado, cuando les pedimos que digan qué letras son los parámetros indican que son las variables x e y y que estas varían en el eje vertical y horizontal respectivamente.

Ítem 4. Estos alumnos indican que marcan el punto que muestra la trayectoria de la pelota en el centro de esta puesto que “es más fácil encontrar el lugar [donde marcar la pelota] cuando sube o baja”, refiriéndose a que, al tener el cursor una forma redonda de igual forma y casi igual tamaño que la pelota, es más fácil de marcar los puntos de forma exacta, por lo que no se fijan en cómo esto influirá posteriormente, sino en la forma en la que los resultados numéricos serán más parecidos a los reales. En cuanto a los ejes de coordenadas, solo indican donde fijan el eje OX, no el OY, probablemente porque son conscientes de que donde se fije este eje no influye en las variables que les pedimos que estudien (ver Tabla 19.1 del Anexo 19 para ver cómo toman las referencias). Indican también que la medida de referencia tomada es la pata de la silla y consideran este valor como 0,5m. Por último indican que, de las gráficas que muestra la app, sí que hay una que da la relación que tienen que estudiar pero no indican cual es sino que dicen "los ejes coordenados", posiblemente haciendo referencia a que aquella gráfica que da la relación es la que en los ejes aparecen las variables estudiadas: el tiempo y la altura.

Ítem 5. Después de enviar las coordenadas de los puntos de Vide Physics a Graphical Analysis, los alumnos explican que eligen la columna del tiempo, haciendo referencia a la que pone "time(s)" y a la de "y(m)", según ellos porque hay que saber el tiempo que tarda en caer y porque son los ejes de coordenadas. Además, cuando les pedimos que copien algunos puntos para después introducirlos en una nueva app y tratar de ajustar una función a estos, empiezan copiando los valores de y(m), luego los de x(m) y finalmente también los de Time(s). Al darnos cuenta de que no entienden la pregunta, les guiamos para que se den cuenta de que solo necesitan los valores de las variables tiempo y altura para construir con estas las coordenadas de los puntos que posteriormente deberán representar gráficamente y buscar una función que ajuste a estos. Esto hace que copien una serie de puntos aleatoriamente, cosa que hacen en formato tabla de modo que en la primera columna copian las coordenadas de la primera columna de Graphical Analysis y en la segunda las de la tercera columna.

Ítem 6. En primer lugar, los alumnos indican que el tipo de función que ajustaría a los puntos obtenidos es una parábola, probablemente porque estén pensando en la gráfica de la función, aunque no explican el porqué de su respuesta.

En relación con los apartados b) y c) los alumnos no dan ningún tipo de respuesta. Todo apunta a que sí que solicitan la hoja de ayuda ya que son capaces de llegar a obtener la fórmula que ajusta a los puntos, $y = -5{,}8(x - 1{,}435)^2 + 1{,}75$, pero parece ser que no la entregan al finalizar la sesión. Sin embargo, de las capturas de pantalla que realizan durante el ajuste, podemos deducir que se han basado en las coordenadas del vértice para encontrar los valores de los parámetros c y d de la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$, tal como podemos ver en la imagen de la Figura 4.10.

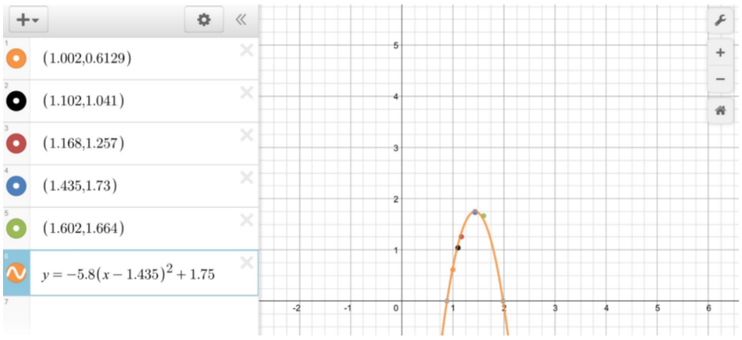

Figura 4.10. Gráfica función obtenida en Desmos (pareja 6, lección 2)

Ítem 7. Una vez obtenida la función con Desmos, queremos que obtengan la función realizando una serie de acciones, con la app Graphical Analysis, que proporciona la fórmula de esta directamente sin tener que buscar como ajustar la gráfica de esta a los puntos.

Así pues, una vez obtenida la fórmula con Graphical Analysis, fórmula que no anotan en la ficha, nos piden la hoja con las indicaciones para pasar esta función, que está en una forma canónica polinómica, a una forma canónica del tipo $y = a(x - c)^2 + d$. No obstante, después de observar las instrucciones que les facilitamos, los alumnos comentan que no saben cómo proceder, por lo que les sugerimos que hagan la transformación inversa, es decir, que desarrollen el cuadrado y pasen la función del ítem 6 a una forma canónica polinómica para así poder comparar ambas. Pero, aun así, se equivocan con los cálculos y no obtienen la fórmula correcta. Además, tampoco comparan las funciones, por lo que parece que realizan las operaciones sin ninguna finalidad, simplemente porque se lo pedimos nosotros.

Ítem 8. En este ítem los alumnos usan la función del ejercicio 6 que acaban de transformar, de forma errónea, a una polinómica. Por ello, los valores de las imágenes que calculan mediante esta función, aunque son correctos, no tienen ninguna coherencia en relación con el fenómeno. Por ello, explican no solo que los resultados de calcular las imágenes no tienen sentido sino tampoco el hecho de calcular las imágenes de ciertos valores. En particular comentan que "el valor 100 de x es un valor incoherente, tanto este como el de y, -59 650,66". Sin embargo, solo explican por qué no tiene sentido calcular la imagen de 100 y no por qué no tiene sentido el resultado obtenido, "el valor 100 de x nos parece una cosa incoherente ya que es imposible que tarde 100 segundos en caer [la pelota]". Es decir, ven que 100 es un valor que no tendrá sentido pensando en términos del fenómeno estudiado. No obstante, aunque en este caso tampoco tendría sentido calcular las imágenes de los valores 0,11 y 0,76 por estar fuera del dominio de definición de la función, no dicen nada de estos, probablemente porque están más cerca de este.

Ítem 9. Por último, en este ítem los alumnos no parecen leer con detenimiento el enunciado de la pregunta ya que responden en los dos apartados lo mismo. Lo que hacen es obtener el valor del tiempo para el cuál la pelota alcanza la máxima altura mirando las coordenadas del punto más alto de la gráfica (aunque no podemos saber si lo hacen mirando la gráfica en Desmos o en Graphical Analysis), tal como ellos mismos explican ya que afirman que lo que han hecho es "entrar a la gráfica y observar las estadísticas de la gráfica y observarla", refiriéndose por estadísticas a los valores de esta.

Pareja 7

Ítem 1. Los alumnos explican que "la relación que hay entre la altura y el tiempo que tarde dependerá de la altura inicial y del tiempo que haya tardado en caer, que al pegar el primer bote, el balón tomara una altura máxima menor que la inicial y tardará menos tiempo". Es decir, explican que la relación tiempo-altura de la pelota en el primer bote dependerá de la altura a la que se ha dejado caer la pelota pero también del tiempo que tarda en caer (aunque esto último no es cierto puesto que esta variable es la independiente). Además, añaden que la altura máxima que alcanzará será menor que la altura a la que se ha dejado caer la pelota inicialmente pero no describen qué tipo de relación tendrán las variables.

En cuanto al apartado b), los alumnos dibujan una función ya que representan una gráfica en dos ejes perpendiculares que representan el "tiempo (s)" y la "altura (cm)". Cabe destacar que los alumnos parece que se hayan basado en cómo sería un fenómeno concreto a la hora de representar la gráfica ya que numeran ambos ejes de coordenadas y señalan algunos valores uniéndolos como el 2 del eje OX y el 100 del eje OY, tratando de representar que a los 2 segundos la pelota ha alcanzado una altura de 100cm. Además, por cómo están numerados los ejes podemos afirmar que toman como origen de referencia el (0,0), por lo que conciben el tiempo como absoluto, obviando el contexto en el que se presenta el fenómeno. Además, debido a que han dibujado la gráfica empezando y acabando en el eje OX, podemos deducir que han tomado el suelo como referencia, posiblemente porque es lo que están acostumbrados a hacer y debido a que no conciben que el tiempo y la altura puedan tomar valores negativos.

Ítem 2. En este ítem los alumnos representan los ejes de coordenadas pero no la gráfica ya que indican que será la misma que la del ítem anterior. Lo que sí que hacen es explicar que toman como referencia el suelo y que deciden fijar el punto (0,0) como el momento en el que la pelota pega el primer bote, que es donde empiezan a contar el tiempo. Justifican que la gráfica crece y decrece ya que indican que "a medida que pasa el tiempo la altura varía hasta llegar al punto máximo y vuelve a caer al suelo" aunque no explican por qué tiene esa forma exactamente. En cuanto a los ejes, indican que deciden considerar la variable tiempo en el eje OX por ser una variable "que no se puede parar", la variable independiente, y en el eje OY la altura, porque depende del tiempo. Además, explican que estas variables se medirían en segundos y centímetros respectivamente puesto que "con metros costaría más de medir y el tiempo en segundos porque tarda segundos en pegar los botes y será una medida más precisa". Es decir, se basan en cómo será el fenómeno para determinar las unidades de medida.

Ítem 3. Estos eligen la familia de funciones cuadrática dada en la fórmula polinómica pero no la otra, puede que porque no la reconozcan como una familia de funciones cuadrática. En concreto explican que la eligen porque la gráfica es una parábola, describiendo cómo es la gráfica de nuevo. Por otro lado, indican que los parámetros son las letras x e y sin dar ningún tipo de explicación.

Ítem 4. En este ítem, los alumnos marcan los puntos en el centro de la pelota, posiblemente por la facilidad a la hora de realizar las marcas con mayor exactitud. Por lo que respecta a los ejes, indican que los sitúan "en la pata de la silla" refiriéndose a que sitúan el eje de las y encima de la pata y lo justifican diciendo que lo hacen "porque sabemos qué punto es" probablemente porque consideren que es cero por ser la base sobre la que se apoya esta: el suelo (que habitualmente se toma como referencia cuando se estudia la altura). Además, añaden que el punto donde se apoya la silla y donde han fijado el origen de coordenadas de los ejes "coincide con el punto del bote del balón", cosa que no es exactamente así ya que si miramos la coordenada segunda (referida a la altura) del primer punto que obtienen los alumnos da un valor positivo, concretamente 0,4585 (ver Tabla 19.1 del Anexo 19), pero esto sí que nos da una pista de que, aparte de fijarse en situar el eje OX en la base de la pata de la silla también han tratado de que esta coincidirá con el primer punto marcado. Por lo que respecta a la medida de referencia, indican que han tomado la de 0,45m y, por último que la gráfica que representa la relación estudiada es la que aparece en la tercera pantalla y que tiene forma de parábola. Además explican que la han escogido pensando en cómo es el fenómeno estudiado y haciendo referencia no solo al tiempo y a la altura sino también a la velocidad.

Ítem 5. En este ítem los alumnos explican que, después de copiar los datos a Graphical Analysis, pensaban que las columnas que tenían que elegir y que representaban las variables tiempo y altura eran la primera y la segunda pero posteriormente se dieron cuenta de que eran la primera y la tercera, respectivamente. En el segundo apartado, copian algunos valores y explican que eligen algunos de ellos por preferencias personales y luego el resto por ser valores mayores, intentando abarcar un rango más diferente de valores según el eje OX.

Ítem 6. Al preguntarles por el tipo de función que piensan que ajustará a los datos indican que "la parábola, es decir, la cuadrática" "porque es la que parece que describen los puntos". Es decir, una vez representados los puntos, ven que tienen forma de parábola, no porque previamente hayan visto que la relación entre el tiempo trascurrido y la altura de la pelota viene descrita mediante este tipo de función.

Por lo que respecta al ajuste de la función, los alumnos especifican en la hoja principal que la gráfica "puede cambiar hacia arriba o hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda o la anchura" pero no especifican como pueden hacerlo usando los parámetros. A continuación, escriben la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ cuando les pedimos que copien la fórmula de la función obtenida. De estas respuestas y de las capturas de pantalla que realizan, podemos afirmar que lo que estos alumnos intentan en primer lugar es ajustar una parábola a los puntos usando la fórmula de la función cuadrática en su forma polinómica, con la que no son capaces de encontrar una función que ajuste a los puntos. Por ello, nos piden la ficha de ayuda, con la que sí que son capaces de obtener la función. Parten de cambiarle el signo a la función, lo que les proporciona una gráfica convexa. Luego explican que para subir arriba la función hay que añadirle un valor sumando, aunque no dicen cuál. Sin embargo, tienen dificultades para encontrar el valor que les hace desplazar la función lateralmente, por lo que nos piden ayuda y les guiamos como hemos hecho con el resto de alumnos. Esto hace que encuentren que para poder mover la función lateralmente se debe sumar o restar un valor solo a la variable x. Finalmente indican que para cambiar el ancho de la gráfica hay que multiplicar un valor a la expresión que se encuentra entre paréntesis, por lo que obtienen la función $\mathrm{y} = -4{,}3(\mathrm{x} - 1{,}49)^2 + 1{,}5$. Cabe estacar que, en este caso los alumnos no eligen el vértice como uno de los puntos que representan y tampoco miran la tabla que obtienen en Graphical Analysis, por lo que deducimos que tratan de ajustar la función dando valores a los parámetros y observando los cambios sobre la gráfica.

Ítem 7. Debido a que el iPad de estos alumnos deja de funcionar, no pueden disponer de los datos que tenían, por lo que no realizan esta actividad y continúan trabajando con la función obtenida en Desmos.

Ítem 8. Con dicha función, se disponen a calcular las imágenes de unos cuantos valores: 0.76, 1.1, 0.11 y 100. Teniendo en cuenta cómo se ha realizado el experimento cabe destacar que el único valor del que tiene sentido calcular la imagen es de 1.1 puesto que el resto se encuentra fuera del dominio en el que se ha definido la función. Sin embargo, copian mal la fórmula de la función ya que se les olvida copiar el signo negativo que afecta al coeficiente de x^2, por lo que al calcular las imágenes estas salen todas positivas. Sin embargo, de la interpretación que hacen de estas podemos deducir que se basan más en los valores obtenidos para la altura que no en si tiene sentido calcular las imágenes de ciertos valores. En particular, al obtener que $f(100) = 41.729{,}646$ comentan que "en 100 segundos no puede alcanzar 41.729,646m sino la gente viajaría con pelotas en vez de con aviones". Es decir, les llama más la atención que salgan valores tan grandes para la altura que no el hecho de calcular la altura de la pelota a los 100 segundos de haberla dejado caer, que ya estará en el suelo en reposo. Además, no les llaman la atención el resto de resultados obtenidos, que tampoco cuadrarían con lo que es el fenómeno que acaban de estudiar ya que por ejemplo a los 0,11 segundos la pelota estaría a una altura de 9,68892m. Esto puede que se deba a que posiblemente no interpreten el resto de resultados en términos del fenómeno. En cuanto al apartado e) explican que la función no les podría ayudar a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito porque a los "100s la altura sería de 0m y no de 41.729,646m".

Ítem 9. En cuanto a esta última pregunta, parece que los alumnos se dan cuenta de que se les había olvidado copiar el signo negativo en la fórmula de la función, lo que provocaba que, entre otros, no pudieran obtener la altura máxima en el apartado b) del ítem ya que “cuando más grande sea el valor de x más alto es el de y (altura)”. Sin embargo, añaden que, a pesar de darse cuenta de que se habían equivocado, “con el signo negativo lo hemos vuelto a comprobar y nos sale lo mismo pero en negativo”.

<u>Pareja 8</u>

Ítem 1. En el primer apartado de este ítem las alumnas se limitan a describir qué variables pueden influir en la relación entre el tiempo y la altura de la pelota. Por ello explican que “depende de la altura a la que soltamos la pelota, [...] del tamaño, del peso de la pelota” y que esto “hará que rebote antes o después”. No obstante, no describen como será la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de la pelota durante el primer bote.

En cuanto al segundo apartado, les pedimos que dibujen la relación entre el tiempo y la altura pero las alumnas se limitan a esbozar un dibujo de lo que sería la pelota subiendo y bajando de forma que cada vez sube una distancia más pequeña, en vez de una función. Además, estas escriben la fórmula “$velocidad = \frac{espacio}{tiempo}$” y comentan que “a menor rebote, menor tiempo, cada vez tardará menos en tocar el suelo hasta que ya no rebote más, y a mayor rebote tardará más en tocar el suelo”. Es decir, tratan de justificar de este modo por qué han dibujado diferentes pelotas de forma que las siguientes suben menos que las anteriores.

Ítem 2. Inicialmente cuando les pedimos que esbocen la gráfica de la función en un sistema de ejes coordenados dibujan ambos ejes representando el tiempo y la altura y una gráfica que es una línea curva en forma ondulada de modo que empieza en el punto (0,1). Sin embargo, después descartan y dibujan una gráfica formada por un conjunto de líneas rectas crecientes y decrecientes que inicialmente pasa por el punto (0,0). Cabe destacar que representan el tiempo en el eje OX y la altura en el OY e indican que estos se medirían en segundos y en centímetros, respectivamente, ya que “en metros es demasiado grande y en minutos y horas sería ilógico”, por lo que piensan en cómo sería el fenómeno para determinar las unidades de medida más adecuadas. Además, por el hecho de haber escalado los ejes y haber añadido algunas medidas, podemos afirmar que consideran como origen de coordenadas el punto (0,0). Asimismo, aunque hayan representado el fenómeno más allá de lo que les pedíamos, empiezan a representarlo cuando la pelota toca el suelo por primera vez, cosa que coincide con el punto (0,0), de donde podemos deducir que conciben el tiempo como absoluto, así como el suelo como referencia ya que las líneas cambian de dirección cuando tocan el eje OX (además de que añaden que la altura y los segundos no pueden ser negativos). Cabe destacar que las alumnas usan valores concretos para representar la gráfica del fenómeno, no lo hacen en general para todos los fenómenos sino para un caso concreto debido a que esto es lo que habitualmente hacen en clase para representar cualquier gráfica, que lo hacen mediante una tabla de valores o a partir de datos o valores concretos.

Ítem 3. En este ítem, las alumnas marcan las familias de funciones $y = ax$ y $y = ax + b$ como aquellas que mejor ajustarán a la gráfica del ítem 2. Por otro lado, señalan que los parámetros serían las letras a y b pero indican que no saben cómo variaría la gráfica de la función al variar el valor de cada parámetro.

Ítem 4. En este ítem, les pedimos que marquen los puntos que indican la trayectoria de la pelota, que fijen los ejes de coordenadas y que tomen una medida de referencia. En primer lugar, indican que marcan los puntos en el centro porque, tal como afirman, “creemos que es lo correcto”, sin especificar por qué creen que lo es. Además, cabe destacar que consideran el suelo como referencia ya que explican que “el punto (0,0) es el final de la pata izquierda de la silla, porque así la pelota toma una trayectoria positiva". Sin embargo, conviene señalar que hablar de "el suelo" en un contexto como este puede resultar un tanto ambiguo puesto que cada fotograma del vídeo, que es una imagen en 2 dimensiones, muestra un espacio en 3 dimensiones. Por tanto, no está a la misma altura el suelo sobre el que se apoya la silla que el suelo sobre el que rebota la pelota. Por otro lado, indican que la medida de referencia tomada es 0,45m y la gráfica que muestra la relación estudiada será la que aparece en cuarto lugar en la app, que es la correcta.

Ítem 5. Una vez enviados los datos de Video Physics a Graphical Analysis y haber puesto la pantalla en la que se muestra la tabla de valores cuyas columnas son las diferentes variables que proporciona la app, les preguntamos qué columnas tendrán que considerar para poder estudiar el fenómeno. En primer lugar explican que las columnas donde pone "x(m)" y "y(m)" puesto que coinciden en nombre con cómo habitualmente se suelen llamar las variables independiente y dependiente. Sin embargo, luego se dan cuenta de que no es así y de que la variable para la altura será y(m) pero la variable tiempo será Time(s). En el apartado b), copian 5 puntos y explican que los han escogido de forma que no estén muy juntos el uno del otro, es decir, tratando de que estén igualmente espaciados.

Ítem 6. En el primer apartado de este ítem las alumnas explican que la función que piensan que ajustará a los datos es $y = ax^2 + bx + c$ porque es una parábola, es decir, son conscientes de que la función que ajustará es una cuadrática puesto que anteriormente han visto que su representación es una parábola, aunque en el análisis cualitativo no lo conciben así pero sí cuando deciden que la gráfica que muestra la relación estudiada en Video Physics tiene esta forma.

En relación con el ajuste de la gráfica a los puntos, como podemos ver en las capturas de pantalla de los alumnos, inicialmente se disponen a ajustar la función usando la forma canónica polinómica de forma que consiguen que tenga la forma y orientación adecuadas pero no la posición ya que no saben cómo desplazar la gráfica lateralmente sin que se desplace también hacia arriba (cosa que sucede al cambiar de valor el número que multiplica a x) tal como comentan en clase. Por ello, les facilitamos la ficha con las preguntas de ayuda, cosa que hace que empiecen representando la función partiendo de $y = x^2$ y no dando unos valores concretos a todos los parámetros de $y = ax^2 + bx + c$. Aún así, esto hace que experimenten el mismo problema cuando les preguntamos cómo pueden mover la gráfica lateralmente, que no saben cómo hacerlo puesto que al saber que la gráfica tienen forma de parábola, buscan que la fórmula sea la de una cuadrática de forma canónica polinómica. Por tanto, intervenimos de un modo similar al del resto de parejas, cosa que hace que escriban un paréntesis y empiecen a poner parámetros sumando y restando hasta dar con el valor de ajuste. Para finalizar, dejan la expresión de modo que escriben el número 2 multiplicando a x dentro del paréntesis (que no hace más que dilatar la gráfica) y un número, el 3, restando a x, cosa que hace que se desplace lateralmente. Con ello, obtienen la expresión $y = -(2x - 3)^2 + 1{,}75$.

Ítem 7. Después de esto, les pedimos a los alumnos que usen Graphical Analysis para obtener la fórmula de la función con la intención de que la comparen con la obtenida en el ítem anterior. Así pues, la función que les proporciona esta app viene dada mediante una forma canónica polinómica, que en este caso es $\mathrm{y} = -5{,}238\mathrm{x}^2 + 15{,}594\mathrm{x} - 9{,}843$, por lo que tienen que tener las dos funciones en una misma forma canónica y así poder compararlas. Para ello, nos piden la hoja de ayuda 2 que explica cómo transformar la función obtenida con Graphical Analysis a una función cuya forma canónica sea como la del ítem anterior. Ahora bien, durante este proceso de transformación podemos ver cómo parece que los alumnos usen esta hoja, no con la finalidad con la que inicialmente la habíamos planteado (que era la de que siguieran las instrucciones que les indicamos), sino que usan el ejemplo con la finalidad de copiar las operaciones que tienen que hacer sustituyendo los valores numéricos por los homólogos en este caso. Esto se deduce del hecho de que en la tercera línea, escriben la expresión $-5{,}238(x^2 - 2{,}978x + 2{,}217 - 2{,}217 + 1{,}879)$ y en la cuarta $-5{,}238((x - 1{,}489)^2 - 0{,}338)$ de modo que podemos ver cómo en la primera expresión ya han considerado el cuadrado del número que deberán escribir en el paréntesis restando a x, mientras que todavía parece que no han calculado cuál es este número ya que escriben “$2{,}978x$” y no “$2 \cdot 1{,}489x$”. Por tanto, realizan operaciones sin sentido, estableciendo un paralelismo con las operaciones que mostramos en el ejemplo, sin razonar por qué se hace cada paso. Además, cuando les pedimos que comparen las funciones y que digan cuál piensan que ajustará más, lo que hacen es compararlas gráficamente, por lo que no usan el hecho de que ahora ambas están en la misma forma canónica para hacerlo. Es más, cuando las representan gráficamente usan la del ítem 7 antes de haberla transformado a la nueva forma canónica, tal como podemos ver en la Figura 4.11.

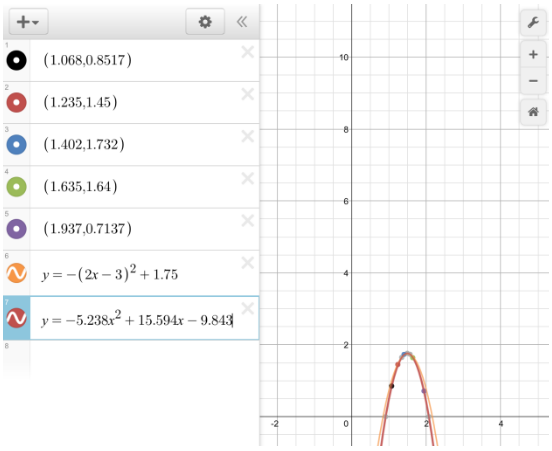

Figura 4.11. Comparación funciones obtenidas en Desmos y en Graphical Analysis (pareja 8, lección 2)

Ítem 8. En cuanto al penúltimo ítem, estas alumnas utilizan la función obtenida en Graphical Analysis pero de nuevo la inicial, no sobre la que han realizado operaciones para transformar a otra forma canónica. Después de calcular las imágenes de los valores, las alumnas explican que sí que hay valores que no muestran lo que verdaderamente ocurre y son los negativos. Es decir se fijan más en si tienen sentido los valores obtenidos para las imágenes que en el dominio en sí. Además, llama la atención que se refieran a que los negativos son los que no tendrían sentido puesto que por cómo ellos han tomado las referencias en Video Physics podrían aparecer valores negativos (ver Tabla 19.1 del Anexo 19). Por tanto, parece que los alumnos conciban que los valores negativos no tienen sentido porque habitualmente estos se asocian a estar trabajando por debajo del nivel del suelo y en este experimento no es así, aunque no dan ninguna justificación a su respuesta. En cuanto al apartado e), explican que no saben si la función puede ayudar a predecir o no lo que pasaría cuando el tiempo tiende a infinito, puede que porque la pregunta se formula de forma más bien de forma abstracta y sin concretar para qué valores.

Ítem 9. Por último, les preguntamos para qué valores del tiempo la pelota toca el suelo y responden de forma aproximada mirando el valor para x en el cual la gráfica corta el eje OX en Desmos, es decir, consideran que la altura de la pelota en el suelo será cero.

Además, especifican que la altura del suelo es 0m, por lo que consideran que la altura de la pelota en el suelo es igual a la altura del suelo e igual a cero, cosa que no es cierta y que afirman porque se basan en que habitualmente se toma el suelo como referencia y no piensan que esto depende de donde hayan fijado las referencias en la app Video Physics. Por otro lado, no dan el valor del tiempo para el que la pelota toca el suelo por primera vez, solo la segunda.

En cuanto al apartado b), tenemos que las alumnas siguen el mismo procedimiento, miran la gráfica representada en Desmos cuáles son los valores en los ejes OX y OY para el punto más alto de la gráfica, que identifican con el punto de máxima altura de la pelota, y así obtienen los valores para el tiempo y la altura respectivamente.

4.3.2.2. Por ítems

A continuación, realizaremos una recopilación de los tipos de actuaciones observadas en las diferentes parejas ítem por ítem. En cada uno de ellos haremos referencia a las tablas que hemos elaborado y que se encuentran en el anexo correspondiente.

<u>Ítem 1</u> (Anexo 16, Tabla 16.1)

En este ítem hemos podido observar diferentes interpretaciones por lo que respecta a qué interpretan los alumnos cuando les pedimos que describan la relación entre la altura de la pelota a lo largo del primer bote y el tiempo transcurrido. Hemos podido identificar diversos tipos de actuaciones. En primer lugar, hay alumnos que describen en detalle la relación, tal y cómo esperábamos que hicieran (parejas 2 y 3). Pero sin embargo, hay otros alumnos que no se centran en describir cómo es esta relación durante el primer bote sino en comparar lo que pasaría en varios botes, es decir, en explicar que en los botes siguientes la altura de la pelota irá disminuyendo o en decir que si la altura del bote es mayor, también lo será el tiempo que tarde en volver a tocar el suelo (pareja 1, 7 y 8). Por otro lado, los hay que comparan experimentos diferentes en el sentido de que (parejas 4, 6 y 7) hablan de que si la altura se lanza desde más alto tardará en llegar más tiempo al suelo. Y, por último, los hay que especifican qué tipo de variables influyen en cómo será el experimento como ahora la gravedad, la fuerza peso, la fuerza de rozamiento, etc. (parejas 3, 5 y 8). Todo parece indicar que la aparición de este tipo de respuestas se debe a la falta de datos numéricos concretos en el enunciado (a lo que los alumnos están acostumbrados), por lo que dan respuestas tratando de explicar que la forma de la gráfica (que para ellos suele obtenerse a partir de datos concretos) dependerá de ciertas variables o factores, a pesar de que, en general, la forma será siempre la misma: forma de parábola.

En cuanto al segundo apartado, cabe destacar que al pedirles que dibujen la relación estudiada la mayoría de alumnos representan la gráfica de la función, que es la única forma en la que se puede representar en un mismo dibujo la relación entre ambas variables en diferentes instantes. Solo las alumnas de la pareja 8 dan como respuesta un dibujo en el que representan varias pelotas con flechas verticales en los dos sentidos indicando el movimiento que haría la pelota. Por lo que respecta a la forma, la mayoría de alumnos dibujan una parábola convexa empezando desde el origen de coordenadas (0,0) y terminando en un punto cuya segunda coordenada es cero, cosa que nos permite afirmar que estos alumnos toman el suelo como referencia. Además, el hecho de empezar a representar la gráfica de modo que esta pase por el (0,0) significa que los alumnos han considerado el tiempo como absoluto, es decir, han obviado que el fenómeno que tenían que estudiar se presenta englobado en un contexto determinado y han considerado que el tiempo empieza a contar solo desde el momento en el que la pelota toca el suelo. Por tanto, la afirmación que algunos de estos hacen de que el tiempo no puede ser negativo no es coherente con sus respuestas puesto que el tiempo sería negativo en el momento en el que se deja caer la pelota, por ejemplo. Volviendo a la forma de la gráfica, destaca la que han dibujado las alumnas de la pareja 1 que se trata de una parábola cóncava. Esto puede haber sido debido a una mala interpretación de la expresión “primer bote” ya que esta se puede entender de dos formas distintas: como solo el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez o como el periodo que empieza desde que la pelota toca el suelo por primera vez y acaba cuando esta lo vuelve a tocar. Por este motivo, la pareja 1 parece que interprete “el primer bote” como en el primer caso, por lo que describe el fenómeno desde que la pelota alcanza máxima altura, toca el suelo y vuelve a alcanzar la máxima altura en el siguiente bote, lo que da lugar, según ellos, a una parábola cóncava cuyo “brazo” derecho es menor que el izquierdo.

Por lo que respecta a cómo o en qué se han basado para representar la gráfica, también cabe destacar que muchos alumnos lo hacen asignando valores concretos a momentos clave del fenómeno ya que, como podemos ver, en algunos casos representan tablas con algunos valores (como el caso de la pareja 1) o escalan los ejes (como la pareja 7, por ejemplo). Sin embargo, es importante destacar que no en todos los casos en los que los alumnos hacen uso de valores concretos parece que lo hacen con la intención de usarlos para representar la gráfica, sino más bien para indicar momentos en los que el fenómeno tiene un comportamiento concreto y para justificar de algún modo el motivo que les ha llevado a representar la gráfica de esta forma (por ejemplo el caso de los alumnos de la pareja 2 cuando escriben m y n).

Ítem 2 (Anexo 16, Tabla 16.2)

Los resultados en este ítem en cuanto a la forma de la gráfica son los mismos que los descritos en el apartado anterior para la mayoría de casos. Solo cabe destacar el caso de los alumnos de la pareja 8, que antes no dibujaban una gráfica y ahora que se les pide de forma explícita sí lo hacen, y los de la pareja 1 que representaban una parábola cóncava y ahora dibujan una curva ascendente, curva que parece que encuentren al dar valores concretos a momentos del fenómeno y considerando el eje OX como la altura y el eje OY como el tiempo. Sin embargo, en general la respuesta que más predomina es, como en el ítem 1, la de una gráfica en forma de parábola convexa empezando desde el origen de coordenadas (0,0) y de forma que acaba en el eje OX. Los resultados sobre cómo conciben el tiempo y la altura los alumnos de las diferentes parejas son los mismos que en el ítem anterior.

Por último, todos los alumnos menos los de la pareja 1 representan la variable tiempo en el eje OX por ser la variable independiente y la altura en el OY, y la mayoría explica que las unidades de medida que se usarían segundos y metros o segundo y centímetros porque serían las que más coherentes con el fenómeno estudiado, es decir, piensan qué unidades de medida tendrían sentido para el caso del fenómeno estudiado.

Ítem 3 (Anexo 16, Tabla 16.3)

En este ítem la mayoría de alumnos son coherentes con sus respuestas puesto que los que dibujan una parábola convexa en el ítem 2 eligen $y = ax^2 + bx + c$ como la familia de funciones que mejor ajustaría a este tipo de gráfica, menos los alumnos de la pareja 5 que eligen la lineal porque asocian los parámetros a y b a la gravedad y al peso. Sin embargo, parece que no identifican $y = a(x - b)^2 + c$ como una familia de funciones cuadráticas ya que ninguno de los alumnos la señala. Ahora bien, las alumnas de la pareja 1 señalan que la gráfica que han dibujado es una recta creciente por lo que eligen como familia de funciones $y = ax$ y $y = ax + b$, siendo coherentes con su respuesta, aunque también eligen la función $y = a/x$ que, como hemos visto en el cuestionario inicial, consideran que es una recta. También eligen las familias de funciones lineales los alumnos de la pareja 8 ya que dibujan un conjunto de rectas. Sin embargo los alumnos de la pareja 6 que representan una curva ondulada eligen las familias de funciones $y = ax + b$, $y = ax^b$ y $y = a/x$ según ellos porque es un movimiento simple, pero no podemos encontrar ninguna relación con dicha afirmación y la elección que han hecho. En cuanto a los parámetros, la mayoría los identifica correctamente menos los alumnos de las parejas 6 y 7 y solo unos pocos son capaces de darles significado. Los alumnos de la pareja 2 dicen que la a de $y = ax^2 + bx + c$ será negativa ya que la gráfica es una parábola convexa y los alumnos de la pareja 4 aseguran que el parámetro c indica donde corta la gráfica el eje OY. Además, llama la atención que algunos alumnos, como los de las parejas 5 y 8, identifiquen la letra que, e, que se usa para designar la función exponencial como un parámetro lo que probablemente se debe a que esta es la letra siguiente a d, que sí es parámetro, en el abecedario.

<u>Ítem 4</u> (Anexo 16, Tabla 16.4 y Anexo 19, Tablas 19.1 y 19.2)

En cuanto al primer apartado, les pedimos que marquen los puntos que describen la trayectoria de la pelota, cosa que hace que se hayan obtenido dos tipos de respuestas: aquellos que los marcan en la parte inferior de la pelota (la pareja 3) y los que los marcan en el centro de la pelota (el resto de parejas). Estos últimos dan diferentes tipos de justificaciones: algunos dicen que lo hacen en este lugar en concreto por la forma que tiene el cursor de la app que es redondo y de un tamaño similar al de la pelota, otros lo hacen pensando en la forma de la pelota ya que explican que de esta forma el punto está simétrico o que es el centro de gravedad de la pelota (parece que conciban el objeto, la pelota, como que lo reducen a un punto que sería el que marcan) y, por último, el resto de alumnos o bien no justifican sus respuestas o bien dan una explicación que no justifica nada, como la pareja 8 que explican que lo han hecho así porque han pensado "que era lo correcto".

En cuanto al segundo apartado, aunque les pidamos que fijen los ejes y justifiquen su respuesta, distinguiremos lo que hacen para el eje OX y para el eje OY ya que solo la posición del eje OX influye en la variable "altura". Por ello, hemos observado que los alumnos fijan este eje en tres sitios distintos: en el suelo o parte más baja de la pelota (parejas 1 y 6), en el suelo o parte donde se apoyan las patas delanteras de la silla (parejas 7 y 8) y en el centro de la pelota (parejas 2,3, 4 y 5)[23]. Cabe destacar que aquí aparece una cierta tendencia para la mayoría de alumnos de elegir el suelo para fijar el eje OX ya que habitualmente se toma el suelo como referencia cuando están estudiando la altura[24]. Sin embargo debido a que la imagen es una fotografía de una imagen en 3 dimensiones lo que se entiende por suelo depende de cómo lo conciba cada alumno. Por otro lado, llama la atención que, aunque el lugar dónde fijen el eje OY es irrelevante para el estudio de la relación tiempo-altura de la pelota, los alumnos fijan este eje en algún lugar concreto tratando de justificar por qué lo hacen aquí y sin, aparentemente, darse cuenta de que esto no influirá en las variables estudiadas. En concreto, hay alumnos que fijan los ejes en la pata de la silla sobre la que han marcado la referencia (parejas 1, 7 y 8), en el centro de la pelota cuando esta está en el suelo (parejas 2, 3 y 5) y siguiendo la trayectoria de la pelota que se lanza verticalmente (pareja 4). Los

[23] Aunque la pareja 4 fija el eje OX en el centro de la pelota, comenta que lo ha fijado "en el suelo".

[24] No obstante, como veremos *a posteriori*, estos no están tomando exactamente el suelo como referencia ya que ello depende también de donde marquen el punto, no solo de donde fijen el eje OX.

alumnos de la pareja 6 son los únicos que no explican por qué lo han fijado donde lo han hecho, puede que porque sean conscientes de que esto no influirá posteriormente.

Por lo que respecta a la referencia tomada para que la app muestre las medidas lo más aproximadas a las medidas reales, podemos observar que todos los alumnos toman la pata de la silla como referencia e introducen la medida que tomamos en clase de 0,45cm, aunque algunos de ellos lo aproximan e introducen 0,5cm.

Por último, todos los alumnos son capaces de identificar la gráfica que describe la relación que tienen que estudiar de las que muestra la app Video Physics, menos la pareja 1 que parece que elige la segunda de las gráficas que aparecen puesto que tiene forma ascendente y, por tanto, es similar a la que han dibujado en el ítem 2. Según las respuestas obtenidas, podemos clasificar las justificaciones de los estudiantes en dos tipos: los que afirman que la gráfica que representa la relación es una gráfica determinada por la forma que tiene (parejas 1, 4, 5, 6 y 8) y los que se fijan en el tipo de variables que se relacionan (parejas 2, 3, 6 y 7). Además, todo parece apuntar a que los primeros se basan en el análisis cualitativo del ítem 2 y después buscan aquella gráfica que tenga una forma similar a la que han dibujado en el análisis cualitativo (parejas 1, 4, 5 y 6) aunque en el caso de la pareja 1 no haya sido una estrategia efectiva puesto que no dibujan una gráfica correcta en el ítem 2 (pero el análisis cualitativo continúa siendo un instrumento de gestión ya que lo usan para gestionar el proceso igualmente). No obstante, los alumnos de la pareja 8, al no encontrar ninguna gráfica similar a la que han dibujado, parece que piensen de nuevo en el fenómeno, cosa que como se puede observar en su respuesta, les ayuda a elegir qué gráfica es la que representa la relación estudiada.

<u>Ítem 5</u> (Anexo 16, Tabla 16.5)

Después de analizar las respuestas de los alumnos hemos obtenido que algunos de ellos escogen los puntos tratando de cubrir todo el eje OX con la intención de saber por dónde estará la función en todo el dominio, otros los cogen de modo que estén igualmente espaciados los unos de los otros o al menos de forma aproximada y, por último los hay que los eligen de forma aleatoria. Además, también hay alumnos (parejas 3, 4 y 5) que los eligen haciendo uso de varios de estos criterios. Cabe destacar que, parece que solo los alumnos que eligen los puntos tratando de cubrir todo el eje OX son los que realmente están pensando en cómo es la gráfica de la función y, por ello, tratan de coger puntos que les permitan saber dónde está esta de modo que ello les facilite la representación.

Tal como recalcamos en el diario de aula correspondiente a la tercera sesión, los alumnos tienen dificultades a la hora de reconocer las coordenadas de los puntos. Algunos no saben qué columnas elegir y otros intentan escribir 3 puntos para una misma coordenada. Esto se debe probablemente a que no están acostumbrados a realizar este tipo de tareas en clase y a que no les dan sentido.

<u>Ítem 6</u> (Anexo 16, Tablas 16.6a y 16.6b)

Con respecto al apartado a), tenemos que todos los alumnos hacen referencia a que la función que ajustará a los datos será la cuadrática, incluso aquellos que no habían elegido esta función en el análisis cualitativo previo (como en los casos de los alumnos de las parejas 1 y 8). Asimismo, los alumnos justifican su elección por varios motivos: 1. porque la forma que tienen los puntos representados se asemeja a la de una parábola, 2. porque se basan en cómo es el fenómeno estudiado o 3. porque anteriormente han visto que la gráfica de esta función es una parábola. Cabe destacar que en este tercer caso puede que los alumnos hagan alusión a la gráfica de Video Physics (ya que les pedimos explícitamente en el apartado d) del ítem 4 que busquen la gráfica que muestra la relación estudiada) o a la del análisis cualitativo previo realizado, cosa que no es posible determinar con la información disponible.

Con respecto al apartado b), les pedimos que traten de ajustar dicha función a los puntos representados en Desmos. Para empezar, conviene señalar que la mayoría de alumnos hacen uso de la hoja de ayuda lo que les permite obtener la fórmula de la función en la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$, menos los de la pareja 3, que obtienen la fórmula en la forma canónica $y = ax^2 + bx + c$. No obstante, hay que destacar que muchos alumnos, aunque empiezan representando $y = x^2$ y son capaces de descubrir que x^2 tiene que ser negativa y de atribuir significado a los parámetros a y d tales que $y = ax^2 + d$, tienen problemas a la hora de "desplazar la gráfica hacia la derecha y hacia la izquierda", aspecto que parece estar muy ligado a la forma en que ellos conciben que tiene que ser la forma canónica de la fórmula que ajuste a los puntos que, tal como anticipan en el ítem 4, es $y = ax^2 + bx + c$ y no $y = a(x - c)^2 + d$ que muchos de ellos ni tan solo conciben como función cuadrática. En consecuencia, para mover la función buscan añadir un término de la forma bx de modo que se dan cuenta de que no provoca el efecto deseado. Por tanto, el hecho de que conciban que la fórmula debe ser de la forma canónica polinómica (idea muy ligada al modo de trabajar esta función en clase) parece suponer un obstáculo para encontrar la fórmula de la función. Por ello, parece que ni con la ayuda proporcionada a través de la ficha son capaces de conseguir mover la gráfica en el eje OX por este motivo. Solo lo consiguen cuando intervenimos nosotros a través de preguntas y sugerencias con las que los guiamos a la respuesta correcta.

Por lo que respecta a la interpretación del significado de los parámetros, conviene señalar que hemos detectado que los alumnos atribuyen diferentes sentidos a estos: dinámico, estático y de característica de una gráfica concreta, lo que se describe en detalle en el capítulo 6. En general, hemos observado que los alumnos son capaces de ver que si x^2 es negativa tiene forma convexa (significado estático) o que al escribir un signo negativo, cambia la orientación de la gráfica (significado dinámico). Además, antes de usar la ficha de ayuda la mayoría son capaces de ver que el parámetro a que multiplica x^2 sirve para "cambiar el ancho de la gráfica", es decir, para dilatarla o contraerla, y que el parámetro c tal que $y = -ax^2 + c$ sirve para "mover la gráfica en sentido vertical" (aunque de sus respuestas no podemos deducir si son capaces de darle un significado cuantitativo). Ahora bien, después de usar la ficha con las pistas los estudiantes tienden a interpretar los parámetros otorgándoles un significado dinámico, probablemente por cómo están enunciadas las preguntas que ponen de manifiesto unos parámetros determinados i están enunciadas en términos de "movimientos" o "cambios" de la gráfica. Por otro lado, para el caso de los parámetros c y d de la fórmula $y = a(x - c)^2 + d$, muchos alumnos los relacionan con las coordenadas del vértice de la parábola y miran, por lo que se dan cuenta de que describen una característica concreta para el caso de las funciones cuadráticas, cosa que puede ser debido al hecho de presentar la app las coordenadas de los puntos, la fórmula y la gráfica en una misma pantalla, que puede que fomente el que estos los relacionen entre sí. Además, como ya hemos comentado antes, el color que proporciona la app para cada punto tanto en la representación gráfica de las coordenadas como en la representación escrita que es el mismo para cada punto y distinto para cada uno de estos, puede que ayude a identificar cuál es el vértice de la parábola y cuáles los valores de sus coordenadas de modo que solo tienen que pensar cuál de las dos representará el tiempo y cuál la altura. No obstante, aparte de interpretar estos parámetros como características concretas, la mayoría de alumnos también les otorgan un significado dinámico puesto que hablan de que los valores correspondientes a ciertos parámetros, “suben la función” o “la mueven hacia la derecha”.

En definitiva, hay que destacar que, a pesar de que la ficha de ayuda no ha servido para que los alumnos llegaran a la fórmula de la función sin nuestra ayuda o la ayuda de la profesora, sí que parece que sirva para que recapaciten sobre el significado que les han otorgado a los parámetros en relación con la gráfica antes de repartirles la ficha (ya que de esta forma son más conscientes de cómo han conseguido hacer que la gráfica se comporte de una forma determinada. Además, cabe destacar que el modo de actuar de los alumnos antes de repartirles la hoja de ayuda parece ser el de, en vez de tratar de averiguar los movimientos que hace la gráfica al cambiar los valores de los diferentes tipos de parámetros, centrarse en buscar aquellos tipos de parámetros que hacen que la gráfica haga los movimientos que ellos quieren que haga para ajustarse a los puntos, lo que veremos que también sucede en las entrevistas. En cambio, el facilitarles las hojas de ayuda hace que traten de buscar los movimientos que les sugerimos en las preguntas a diferencia de lo que hacían antes.

<u>Ítem 7</u> (Anexo 16, Tabla 16.7)

En general, todos los alumnos han sido capaces de encontrar la función que proporcionaba Graphical Analysis siguiendo las instrucciones que les dábamos, aunque en algún caso puntual les hemos proporcionado ayuda si no las entendían. En relación con el apartado b), hemos observado diferentes modos de actuar. La mayoría de alumnos pide la ayuda de la pista, por lo que tratan de transformar la fórmula de la función obtenida usando Graphical Analysis a una de la forma $y = a(x - c)^2 + d$ (menos los alumnos de la pareja 3 que al ya tener ambas funciones en forma polinómica no necesitan realizar transformaciones para poder compararlas). No obstante, hay alumnos que experimentan dificultades a la hora de transformar la forma canónica de la función, por lo que abandonan el proceso (pareja 5) o deciden realizar el proceso inverso: transformar la función obtenida en Desmos a forma polinómica (pareja 6). Además, entre aquellos que tratan de realizar las transformaciones pertinentes, podemos observar que cometen errores en el procedimiento y solo los alumnos de las parejas 1 y 8 son capaces de pasar la función a la forma canónica antes mencionada sin errores. En cuanto a la metodología usada, llama la atención que, en vez de usar la hoja de ayuda para seguir las instrucciones que allí se indican, lo que hacen algunos de ellos (parejas 4 y 8) es copiar las operaciones que se indican en el ejemplo pero cambiando los números, sin hacer caso de las instrucciones escritas (a pesar de que inicialmente el ejemplo se había planteado para que pudieran entender dichas instrucciones). Esto se puede observar en la respuesta de la pareja 8 que para completar cuadrados suman y restan el cuadrado de un número sin indicar hasta la siguiente línea qué número es. También podemos ver en la respuesta de la pareja 4 que directamente realizan las operaciones en la hoja de ayuda 2 al lado del ejemplo pero copian mal la fórmula de la línea 6 (posiblemente porque no se paran a pensar porqué están realizando cada una de las operaciones) y se equivocan. Por tanto, podemos afirmar que existen parejas de alumnos que realizan las operaciones sin reflexionar aparentemente sobre si lo que hacen tiene sentido hacerlo o no, lo que hacen es reproducir aquellas operaciones que se muestran en el ejemplo estableciendo una especie de paralelismo. Probablemente actúan de este modo debido al tipo de metodología que están acostumbrados a seguir en el aula, en la que se les muestra cómo resolver un tipo determinado de tarea o problema y lo que ellos tienen que hacer es aprender a reproducirlo.

En cuanto al apartado c) del ítem, en el que les pedimos que comparen las funciones, llama la atención que 1. o bien no las comparen 2. o bien no utilicen las fórmulas obtenidas para hacerlo, sino que las comparan representándolas gráficamente (pero ni tan siquiera usando la fórmula que acaban de obtener). Por tanto, parece que realizan las transformaciones entre formas canónicas sin entender la finalidad por la que les hemos pedido que lo hicieran: poder comparar las fórmulas de ambas funciones.

Además, entre los pocos alumnos que sí que comparan las respuestas y responden a la pregunta de cuál ajusta mejor, hacen alusión al hecho de que ajustará mejor la obtenida con Graphical Analysis antes de ser transformada, "por ser más exacta" (como indican los alumnos de las parejas 3 y 4) refiriéndose a que los números que aparecen en la fórmula tienen una cantidad mayor de cifras decimales.

Ítem 8 (Anexo 16, Tabla 16.8)

En primer lugar cabe destacar que en el apartado a), pedíamos que calcularan algunas imágenes de la función utilizando una de las fórmulas anteriores e indicaran cuál habían escogido. Por ello, tenemos que algunos usan la del ítem 6 (las parejas 5 y 7), otros la del 6 pero transformada a la forma canónica polinómica (pareja 6), otros la de del ítem 7 antes de transformar (parejas 1, 3, 4 y 8) y solo la pareja 2 la del ítem 7 pero transformada a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$. Conviene señalar que, como consecuencia de que algunos alumnos usan una función que no han comprobado si es correcta (cosa que les pedíamos en el ítem anterior y pocos han hecho), las imágenes que obtienen son erróneas (parejas 2, 6 y 7). Pero además, estos no son los únicos alumnos que obtienen imágenes erróneas sino también aquellos que se equivocan a la hora de realizar los cálculos de las imágenes (pareja 3). Por tanto, solo los alumnos de las parejas 1, 4, 5 y 8 obtienen que las imágenes calculadas corresponden con el fenómeno descrito. Sin embargo, de las parejas en las que esto no es así, solo son capaces de darse cuenta los alumnos de la pareja 2, que indican que son conscientes de que se han equivocado en algo porque al representar la gráfica de la función les sale "muy hacia arriba" (tal como se escucha en las grabaciones de audio) aunque continúan sin cambiar de función; y los de la pareja 7, aunque se dan cuenta más tarde de que han copiado mal la fórmula de la función, en concreto cuando están respondiendo las preguntas del ítem 9 ya que comentan que "nos ha faltado el signo negativo [...]".

Por otro lado, el apartado b), hay que resaltar que todos ellos explican que x representa el tiempo transcurrido y $f(x)$ o y la altura a la que se encuentra la pelota en cada instante.

Ahora bien, en el apartado c) les preguntamos a los alumnos si las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre para ver si son capaces de darse cuenta de que realmente no tiene sentido calcular las imágenes de unos puntos que se encuentran fuera del dominio para el cual se ha definido la función que va desde el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar. Para ello, necesitaremos conocer tanto el dominio como el recorrido de la función por si, en su defecto, hacen referencia a los valores obtenidos para las imágenes, poder argumentar si dichos valores tienen sentido o no en relación con su experimento.

Entonces, tenemos que el dominio de la función será el mismo para todos, puesto que depende de cómo divida la app Video Physics el vídeo en fragmentos. Por tanto, mirando los valores de la variable temporal para el primer y el último punto marcados obtenemos que el dominio es [0.9017, 2.07], por lo que solo tiene sentido calcular la imagen de 1.1. Por otro lado, tenemos que el recorrido será distinto para cada pareja ya que dependerá de dónde hayan tomado las referencias en la app (en concreto de dónde hayan fijado el eje OX y de donde hayan marcado los puntos que muestran la trayectoria de la pelota). Como la función es una parábola convexa, el recorrido o los valores posibles para la imagen serán el rango de valores que van desde el valor de la variable y para el primer o último punto marcado (que será el valor más pequeño posible que tomará la variable) hasta el vértice que será el valor de máxima altura[25]. Sin embargo, calculamos también el recorrido por la función que han escogido cada uno de los alumnos, por si se basan en esto para justificar sus respuestas en vez de recurrir a la tabla de valores proporcionada por la app[26].

Sin embargo, cuando les preguntamos a los alumnos, la mayoría responde que los resultados obtenidos no muestran lo que verdaderamente ocurre pero haciendo referencia a las imágenes, no a los valores que pueden estar o no en el dominio. Es decir, les llaman más la atención los valores obtenidos para las imágenes que no el hecho de calcular la imagen de unos valores que no están en el dominio de la función (alguno de ellos, $f(100)$, incluso de forma muy clara ya que a los 100 segundos la pelota es evidente que ya estará en reposo). La mayoría de alumnos afirman que no tienen sentido porque los valores para las imágenes no pueden ser negativos (parejas 2, 3, 4, 5 y 8), algunos llegando a dar una explicación: que la pelota no puede atravesar el suelo (parejas 2 y 3). Del resto de los que afirman que las respuestas no muestran lo que verdaderamente ocurre (pareja 7) cabe destacar que afirman que para ellos solo hay un valor que no tiene sentido, la imagen de 100, y que esto se debe a que el valor (41.7291,64643) es muy grande en comparación con lo que hubieran esperado obtener. De los que afirman que los valores obtenidos sí que muestran lo que verdaderamente ocurre, tenemos a los alumno de la pareja 6, que explican que esto es porque relacionan el tiempo con la altura, es decir, no interpretan los valores en relación con el experimento; y las alumnas de la pareja 1 que también se fijan en el recorrido y en la aparición de valores negativos pero tratan de justificarlos diciendo que esto se debe a que “se acercan al sistema de referencia”.

Además, a pesar de que se basan en el recorrido para explicar que los datos no muestran lo que verdaderamente ocurre, ninguno de ellos mira si los valores obtenidos para las imágenes tienen sentido o no en su experimento en concreto (ni calculan el recorrido usando su función ni tratan de deducirlo usando la tabla de valores de Graphical Analysis proporcionada por Video Physics), sino que parece que sean producto de sus concepciones previas. En concreto, hemos observado que la mayoría de alumnos comenta que los datos no muestran lo que verdaderamente ocurre debido a que son negativos y la altura no puede ser negativa (a pesar de que, como vemos en los valores calculados para el recorrido, en algunos de los casos, los de las parejas 3, 5 y 8, sí que es posible que aparezcan valores negativos para la altura y tengan sentido teniendo en cuenta tanto el recorrido obtenidos mediante los valores de la tabla como mediante la función). Es decir, a pesar de haber tomado unas las referencias en la app, los estudiantes no interpretan estos datos en relación con lo que han hecho allí (ni siquiera parece que se dan cuenta de que sus acciones en la app Video Physics vayan a tener influencia posteriormente) sino que consideran el suelo como referencia (como

[25] Por “valores de la variable y” nos referimos a los valores de la columna en la que aparece la variable y en la tabla que proporciona la app Graphical Analysis. Por tanto, los valores que mostramos en la Tabla 16.8 del Anexo 16 se han calculado basándonos en los valores correspondiente a los proporcionados por la app de la variable y.

[26] Cabe destacar que, tengan o no la función bien calculada, este valor no tiene por qué coincidir con el valor que se da para el recorrido obtenido usando las coordenadas que proporciona la app directamente.

habitualmente se considera en la mayoría de tareas escolares) ya que, como algunos de ellos comentan, si aparecen valores negativos es señal de que la pelota ha atravesado el suelo cosa que no puede ser.

En cuanto al siguiente apartado, el d), les pedimos a los alumnos que especifiquen qué valores no muestran lo que verdaderamente ocurre y de nuevo se fijan en el recorrido para responder. Más en concreto, indican que los valores que no muestran lo que sucede son aquellos cuyas imágenes son negativas. Además, hay otros alumnos que, a pesar de no obtener valores negativos también indican que estos no tienen sentido probablemente por ser valores muy grandes y diferentes de lo esperado. Hablamos de los alumnos de las parejas 7 y 8. Por un lado, los de la pareja 7 explican que los valores que no tienen sentido son $f(0{,}11)$ y $f(100)$ que dan como imagen 9m y 41729 aproximadamente pero sí $f(0{,}76)$ que, aunque tampoco está en el dominio, da como resultado 3,79m. Por otro lado, las alumnas de la pareja 8 indican que la imagen de 100, que les sale un valor muy grande no negativo, no tiene sentido porque "la pelota cada vez [...] rebota menos". En cambio, los alumnos de la pareja 6, a pesar de haber indicado en el apartado anterior que los datos sí que muestran lo que verdaderamente ocurre, en este indican que tanto el valor obtenido para $f(100)$ como el hecho de que x sea 100 es incoherente. Es decir, aquí sí que interpretan los resultados en términos del fenómeno e indican que no tiene sentido calcular esta imagen basándose tanto en el dominio como en el recorrido (aunque parece que no en sus datos en sí, sin en la idea que tienen de cómo son los datos que podrían tener sentido para el experimento estudiado).

Por último en el apartado e), les pedimos que expliquen si piensan que la función puede ayudarles a predecir qué pasa cuando el tiempo tiende a infinito, con la intención de que piensen en el dominio de esta y si tendrá sentido usarla para calcularlo. Cabe destacar que, de los alumnos que responden la pregunta, 4 continúan fijándose en el recorrido y argumentando que esto no puede suceder ya que obtendrían valores negativos para la altura y esto implicaría que la pelota atraviesa el suelo, cosa que no sucede. Es decir, continúan viendo que el hecho de obtener valores negativos implica que se está trabajando por debajo del nivel del suelo a pesar de que algunos de ellos obtienen de hecho valores negativos entre los datos de este experimento. Por tanto, consideran el suelo como referencia sin pararse a comprobar si esto tiene sentido en relación con lo que ellos han hecho o no, es decir, se basan más en sus concepciones previas. Ahora bien, sí que hay algunas parejas que se fijan en el dominio para responder que la función no puede predecir lo que pasa en el infinito, aunque dan justificaciones diversas. En particular, los alumnos de la pareja 2 afirman que la función solo está definida desde el primer bote hasta el segundo, los de la pareja 6 que no se puede calcular la imagen de un número infinito y los de la 7 que la altura a los 100s sería 0m, probablemente porque ha pensado en el experimento estudiado y ha pensado qué puede estar haciendo la pelota cuando han pasado 100s.

<u>Ítem 9</u> (Anexo 16, Tabla 16.9)

En cuanto al apartado a), les preguntamos para qué valores del tiempo golpea la pelota el suelo, lo que correspondería a los valores del dominio de la función. No obstante, solo los alumnos de la pareja 3 y 5 dan la respuesta correcta (también las de la pareja 1 pero solo dan el valor de cuando golpea el suelo por primera vez), unos mirando las primeras coordenadas del primer y del último punto representados en Desmos (que corresponden al primer y último punto de la tabla que proporciona Graphical Analysis) y los otros mirando la gráfica en Graphical Analysis (que solo aparece representada desde el primer punto hasta el último). Sin embargo, aquellos que miran la gráfica en la app Desmos (parejas 4 y 8) dan unos valores erróneos debido a que identifican el eje OX con el suelo y dan los valores de corte con el eje OX (por ejemplo los alumnos de la pareja 4), es decir, consideran que la pelota toca el suelo cuando y vale cero, identificando así el suelo como la referencia, cuando esto no tiene porqué ser así y depende de cómo hayan tomado las referencias. Además, les preguntamos también por la altura a la que se encuentra el suelo, que no la altura a la que se encuentra la pelota en el suelo, con la finalidad de que tengan que volver a pensar cómo habían hecho las cosas en la app Video Physics y que, como consecuencia de como toman las referencias, podrán calcular o no. No obstante, algunos alumnos no han pensado en su experimento concreto sino que consideran que la altura a la que se encuentra el suelo es cero (parejas 2, 4, 5 y 8) basándose en sus concepciones ya que en ningún caso han tomado el suelo como referencia. Aunque a pesar de ello, podemos encontrar alumnos que sí que usan los datos de su experimento para responder, aunque no de forma correcta puesto que lo que dan es la altura de la pelota cuando esta toca el suelo, no la altura del suelo en sí. Estos son las alumnas de la pareja 1, que miran la imagen por la gráfica del primer punto marcado y los alumnos de la pareja 3 que miran las segundas coordenadas del primer punto y el último. Por tanto, a pesar de que sí que tratan de buscar la respuesta con cierta coherencia, no piensan en cómo han tomado las referencias en Video Physics y lo que ello implica.

Por lo que respecta al apartado b), tenemos que hay alumnos que obtienen el valor del tiempo para el cuál la pelota alcanza la máxima altura y el valor de esta altura al identificar el punto más alto de la gráfica con este y considerando las coordenadas (parejas 1, 4, 6 y 8), otros que se basan en la tabla de puntos proporcionada por Graphical Analysis e identifican el punto cuya altura es mayor grande (parejas 3 y 5) y otros que usan la fórmula de la ecuación del vértice para calcular el tiempo y después substituyen en la ecuación para obtener la altura máxima (pareja 2).

4.3.2.3. Resumen de resultados

Incluimos en este apartado los resultados obtenidos de reflexionar sobre aspectos observados en algún ítem concreto (como por ejemplo, las concepciones que tienen sobre el concepto de altura) así como aquellos que hemos observado en diferentes ítems (como la consideración del suelo como referencia o el efecto del análisis cualitativo). No repetiremos aquí aquellos resultados que hacen referencia a aspectos concretos de un ítem determinado sobre los cuáles ya hayamos reflexionado previamente puesto que estos se encontraran en 4.3.2.2.

<u>Efecto del análisis cualitativo en la gestión y el control del proceso de modelización</u>

Hemos podido observar que los alumnos se basan en el estudio previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones en varios momentos durante la implementación de la secuencia de enseñanza. En concreto lo hacen: 1. Durante la realización del propio estudio cualitativo y 2. *A posteriori*, cuando ya han realizado el experimento en clase y han tomado datos reales.

En el primer caso, hemos visto que los alumnos hacen referencia al análisis de las propiedades cualitativas de la función durante el propio análisis ya que, en vez de basarse en el fenómeno en sí, hacen referencia a propiedades concretas de las familias de funciones que se ponen de manifiesto en la gráfica para responder el resto de ítems. Por ejemplo, las alumnas de la pareja 1 explican en el apartado b) del ítem 3 que eligen la fórmula de la función $y = a/x$ porque la gráfica es “una línea recta” (aunque esto no es correcto) o los alumnos de la pareja 2, que explican en el apartado c) del ítem 3 que el parámetro c de la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ será negativo por la forma convexa que tiene la parábola, basándose en la gráfica que han dibujado en ambos casos en el ítem anterior (una línea recta en el primer caso y una parábola en el segundo).

En el segundo caso, los alumnos también se basan en el análisis cualitativo para tomar ciertas decisiones durante la modelización del fenómeno. En otras palabras, se basan en este para gestionar y controlar el proceso de modelización (tal como se afirma en trabajos previos como en Ortega y Puig, 2017). Esto sucede por ejemplo a la hora de elegir qué gráfica de las que da la app en el apartado d) del ítem 4 es la que representa la relación estudiada, que los alumnos eligen la que tiene forma parabólica porque la forma es similar a la de la gráfica que han dibujado antes, tal como indican por ejemplo los alumnos de la pareja 4. Sin embargo, debido a la inclusión de esta pregunta posteriormente cuando hagan referencia a la gráfica de la función no podremos afirmar con seguridad si se basan en las gráficas de los ítems 1 y 2 o en la que observan en la app Video Physics. Por ejemplo, en el ítem 5 hay alumnos que aseguran haber elegido las columnas correctas para construir las coordenadas de los puntos (la columnas primera y tercera que proporciona la app Graphical Analysis) puesto que al comparar la forma de los puntos con la forma de la gráfica que representaría el experimento, estos tiene forma de parábola, por lo que los consideran correctos. En este caso, no sabemos si cuando hacen referencia a la parábola, se refieren a la del ítem 2 o a la que han visto en la app Video Physics (o incluso también puede que se hayan basado en la gráfica que muestra la app Graphical Analysis que, aunque no hacemos hincapié en ella hasta el ítem 7, aparece en pantalla junto a otras gráficas al pedirles a los alumnos que envíen los datos de Video Physics a Graphical Analysis).

No obstante, a pesar de que no podemos asegurar que los alumnos se basen en el análisis cualitativo del fenómeno posteriormente, podemos afirmar que puede que este haya influido en las respuestas que dan los alumnos en varios ítems. Por ejemplo, en el ítem 6 ya que cuando les preguntamos qué tipo de función piensan que ajustará a los datos obtenidos, algunos explican que: 1. Es la parábola, basándose en la representación gráfica que han hecho previamente (aunque también puede que se refieran a la representación gráfica que proporciona Video Physics), y 2. Es la función $y = ax^2 + bx + c$ puesto que es la fórmula que ya han elegido antes en la tabla del ítem 3. Además, la mayoría de ellos empieza tratando de ajustar esta función a los puntos representados precisamente porque saben que es la fórmula de una parábola. Por otro lado, tenemos que también puede haber influido en el ítem 7, puesto que les pedimos a los alumnos que borren de la pantalla las gráficas que no representen la relación estudiada i se queden solo con la que quieren estudiar, para posteriormente, usando la app, obtener la fórmula de la función con Graphical Analysis.

<u>Transformaciones algebraicas entre formas canónicas sin sentido</u>

Como hemos comentado en el capítulo anterior, el ítem 7 estaba inicialmente pensado para que: 1. Los alumnos transformaran ambas funciones a la misma forma canónica y poder así comprobar o validar si la función obtenida en Desmos era correcta; y 2. para que los alumnos realizaran las operaciones algebraicas correspondientes con la finalidad de comparar ambas funciones, y no sin sentido como normalmente se hace en clase.

Sin embargo, como hemos podido observar, los alumnos realizan las operaciones de transformación de formas canónicas sin sentido. En primer lugar, cabe destacar que gran parte de los alumnos comparan las funciones gráficamente (alumnos de las parejas 4 y 8) o no las comparan (alumnos de las parejas 1, 2 y 6) a pesar de haber realizado los cálculos oportunos para transformar ambas funciones a la misma forma canónica, por lo que parece que no se dan cuenta de que precisamente se les ha pedido que realicen dichos cálculos con un objetivo: el de poder comparar las dos funciones obtenidas mediante su fórmula[27]. En segundo lugar, vemos que para pasar una función en forma canónica polinómica a una de la forma $y = a(x-c)^2 + d$, algunos de los alumnos usan la hoja de ayuda pero no para seguir las instrucciones que se dan, sino para copiar el ejemplo que allí se plantea (que estaba pensado para que entendieran mejor las instrucciones escritas) de modo que copian las expresiones que aparecen en cada uno de los pasos pero cambiando los valores numéricos y sin entender por qué se realizan. Además, lo hacen sin pararse a cuestionar si lo que están haciendo es correcto o no lo es, por lo que lo hacen sin sentido alguno y, en algunas ocasiones, incluso se equivocan. Vemos el caso de los alumnos de la pareja 8 que, como hemos comentado antes, primero suma y resta el cuadrado de un número a la expresión (cosa que se plantea para tratar de completar cuadrados) y luego escribe el número del cual ha calculado el cuadrado; cosa que sucede al no dar sentido a las operaciones que está realizando debido a que las copia sin razonar porqué y, además, en un orden diferente.

Dificultades debido al desconocimiento de formas canónicas alternativas

Cabe destacar que, hemos detectado que los alumnos tienen dificultades a la hora de ajustar la gráfica de una función cuadrática a los puntos representados en el ítem 6 debido a que conciben que la fórmula de la función será $y = ax^2 + bx + c$ y ninguna otra. Es decir, conciben que la fórmula de una parábola es la polinómica y esta solo puede expresarse mediante esta forma canónica, probablemente porque en su experiencia previa solo han visto que se pueda expresar de esta forma. Esto provoca que les resulte más complicado ajustar una gráfica a los puntos puesto que el significado de algunos de los parámetros expresados en esta forma canónica no se traduce en transformaciones evidentes sobre la gráfica. Además, el hecho de que vean que esta es la única forma canónica dificulta también que los alumnos realicen otro tipo de operaciones sobre la función cuando tratan de ajustarla a los puntos. Por ello, muchos alumnos son capaces de obtener una gráfica con una forma que ajustaría a los puntos y de desplazarla verticalmente pero sin embargo no encuentran la forma de mover la gráfica solo horizontalmente porque para ello tienen que pasar de una fórmula de la forma $y = ax^2 + d$ a una de la forma $y = a(x-c)^2 + d$ que, como ya vimos en el ítem 3.a., no reconocen como fórmula de una parábola. Por tanto, sería interesante introducir esta forma canónica en la enseñanza de los estudiantes para ver si de este modo no tendrían tantas dificultades a la hora de ajustar la gráfica a los puntos.

El significado de los parámetros

Para determinar el significado que otorgan los estudiantes a los parámetros en este experimento, miraremos cómo actúan en el ítem 3, antes de realizar la toma de datos, y en el ítem 6, en el que tratan de encontrar la fórmula de una función que ajuste a los puntos usando la app Desmos y comparando los valores que dan a los parámetros de la fórmula en relación con la gráfica.

En general, hemos observado que inicialmente, en el ítem 3, los alumnos que veían la función como una parábola y que elegían como familia de funciones la cuadrática en la

[27] El resto, o bien no responden a la actividad por problemas con la tecnología (pareja 7), o bien no consiguen obtener las dos funciones en la misma forma canónica (pareja 5). Solo los de la pareja 3 obtienen ambas funciones en la misma forma canónica y las comparan aunque, debido a que en el ítem 6 consiguen obtener la fórmula de la función ajustando una polinómica, en este ítem no deben de realizar ningún tipo de operación, por lo que no se puede llevar a cabo uno de los objetivos con los que planteamos esta tarea: el de que doten de significado las transformaciones algebraicas según la forma canónica $y = a(x-c)^2 + d$.

forma canónica $y = ax^2 + bx + c$, no eran capaces de dar sentido a los parámetros o lo hacían de forma muy limitada. No obstante, después de tratar de encontrar una función en Desmos que ajustara a los puntos obtenidos mediante la manipulación de los parámetros de la fórmula $y = a(x - c)^2 + d$ estos son capaces de relacionar los parámetros de dicha fórmula con características o transformaciones de la gráfica.

Concretamente, hemos observado que en el ítem 3 pocos alumnos apuntan cuál es el significado de los parámetros de la familia de funciones escogida en relación con la gráfica que han representado en el ítem anterior. Además, de los que eligen la familia de funciones cuadrática solo los de las parejas 2 y 4 dan significado a los parámetros. En particular, los de la pareja 2 indican que el parámetro a será negativo por haber dibujado la gráfica convexa mientras que los de la pareja 4 solo interpretan el parámetro c que, según estos, representa el lugar del eje OY donde corta la parábola.

Por otro lado, tenemos que en el ítem 6 todos los alumnos son capaces de encontrar la función que ajusta a los puntos usando la app Desmos. Cabe destacar que todos lo hacen mediante la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$ y dotando de significado los parámetros en relación con la gráfica, menos los de la pareja 3, que son capaces de hacerlo pero usando la fórmula de la familia de funciones cuadráticas en la forma canónica $y = ax^2 + bx + c$. En cuanto al tipo de significados otorgados por los alumnos a los parámetros de las funciones dadas en forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$, hemos identificado de tres tipos (los que hemos comentado antes) que, aunque están relacionados, son diferentes. Cabe destacar que, el hecho de indicar aquí que los alumnos hayan interpretado los parámetros de una forma determinada, no implica que no lo hayan podido hacer, además, de otra forma; simplemente que, basándonos en las respuestas que dan y en la información disponible, parece que los interpreten de la forma que hemos indicado.

<u>El concepto de altura y el significado de los números negativos</u>

A lo largo del experimento de enseñanza relativo a la lección 2 hemos observado que los alumnos tienen una concepción muy arraigada de que la "altura" no puede ser negativa ya que esto "no tiene sentido" o "no es posible" (como afirman los alumnos de las parejas 4, 5 y 8) o debido a que "la pelota no puede atravesar el suelo" (como señalan los de las parejas 2 y 3), es decir, identifican los valores negativos para la altura con estar por debajo del suelo. Esta concepción proviene, probablemente, del hecho de considerar que se toma el suelo como referencia y, por consiguiente, que la altura de este es cero y cuando trabajamos por encima del nivel del suelo positiva, ya que es la consideración que suele hacerse en la mayoría de tareas escolares e incluso en nuestra vida cotidiana. Sin embargo, por cómo se plantea la tarea presentada en esta lección, está de más hacer este tipo de consideraciones puesto que los valores para la altura dependen de cómo actúen los alumnos en la app Video Physics. A pesar de ello, esta concepción está muy arraigada en los alumnos y hemos podido observarla en sus respuestas a los diferentes ítems a lo largo del experimento.

Por ejemplo, en el ítem 5, cuando les pedimos a los alumnos que elijan las columnas en la app Graphical Analysis que corresponden a las variables estudiadas, los alumnos de la pareja 3 obtienen que uno de los valores para la variable "y(m)" es negativo, por lo que dudan de si esta columna representará la altura de la pelota ya que ven que la altura no puede ser negativa en su experimento. Sin embargo, uno de ellos comenta que el valor es negativo pero casi cero, con lo que al final deciden que es correcto. Por otro lado, los alumnos de la pareja 5 explican que eligen las columnas "time(s)" y "y(m)" pero no solo porque son las que muestran la relación entre el tiempo y la altura sino que también influye un tercer factor que es los valores que toma cada variable ya que explican que escogen estos "porque son las únicas columnas que no dan negativo porque el tiempo y la altura no pueden ser negativos". De esta afirmación se puede deducir que los alumnos ven que la altura no puede ser negativa, por lo que tiene que ser positiva siempre, cosa que probablemente consideren porque ven que están trabajando por encima del suelo y habitualmente este es el que se toma como referencia como hemos comentado antes.

Por otro lado, en el ítem 8 hemos visto que los alumnos se fijan más en los valores obtenidos para las imágenes y en el sentido que puedan tener estos en términos del fenómeno que no en los valores de los cuales les pedimos que calculen las imágenes. Es decir, los alumnos se fijan más en si los valores obtenidos para las imágenes tienen algún sentido en términos de altura que no en si los valores de los que les pedimos calcular las imágenes tienen sentido en términos del tiempo. En concreto, como hemos mencionado antes, los alumnos de las parejas 4, 5, 6 y 8 explican que la altura no puede ser negativa, que no tiene sentido, mientras que los de las parejas 2 y 3 van más allá y explican que no pueden tener sentido puesto que la pelota no puede atravesar el suelo, dando a entender que para ellos la obtención de valores negativos implica el estar trabajando por debajo del nivel del suelo. Estas concepciones ya se podían observar en el estudio previo, por lo que decidimos reformular las preguntas para este nuevo estudio ya que pensábamos que podría ser que la pregunta del ítem 5 del estudio previo (ver Anexo 1) pusiera demasiado énfasis en "la altura" cosa que hacía que los estudiantes se fijaran más en esto que en el dominio (ver Anexo 1); lo que dio lugar a los apartados a) y b) del ítem 8 (ver Anexo 9). Sin embargo, los alumnos que participaron en este nuevo estudio actúan del mismo modo que los que participaron en el estudio previo: fijándose más en la altura y en que esta no puede tomar valores negativos. Además, incluimos una pregunta (apartado e) del ítem 8) en la que tratamos de poner énfasis en los valores que puede tomar la función, lo que ha hecho que algunos alumnos presten atención en este momento al dominio para el cual se ha definida la función. No obstante, la concepción de que la altura no puede ser negativa y de que debe ser cero en el suelo continúa estando en ellos. Por ejemplo, podemos ver esto en los alumnos de la pareja 7, que explican que la función no puede ayudarnos a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito "porque en 100s la altura sería 0m", identificando así el suelo como la referencia.

Por último, también hemos podido observar estas concepciones en las respuestas de los alumnos al ítem 9, en el que les hacemos una serie de preguntas para que traten de interpretar la función obtenida en términos del fenómeno. En concreto les preguntamos para qué valores del tiempo la pelota toca el suelo, lo que hace que algunos alumnos den como solución los valores en los que la gráfica (la representada en la app Desmos) corta con el eje OX (parejas 4 y 8) o igualen $f(x)$ a cero y traten de buscar los valores de x que cumplan esta ecuación, considerando en ambos casos que la altura de la pelota en el suelo es cero, no porque lo hayan comprobado que así sucede en sus datos, sino porque se basan en sus concepciones previas.

En definitiva, los alumnos tienen una idea muy arraigada de que la altura no puede tomar valores negativos ya que esto implica que están trabajando por debajo del nivel del suelo, idea que aparece reiteradamente a lo largo de la lección.

<u>La altura de la pelota en el suelo y la altura del suelo</u> (Anexo 19, tabla 19.2)

Cabe destacar, además, que hay alumnos que no solo dan por sentado que "la altura" no puede ser negativa sino que consideran que "la altura del suelo" y "la altura de la pelota en el suelo" son lo mismo y usan ambos conceptos indistintamente, cosa que se puede observar en repetidas ocasiones en sus respuestas, tanto explícita como implícitamente, a pesar de que esto depende de cómo toman las referencias en Video Physics. En concreto, "la altura de la pelota en el suelo" vendrá dada por la distancia del primer punto al eje OX y "la altura del suelo" dependerá de la distancia del "suelo" al eje OX.

En la Tabla 19.2 del Anexo 19 se puede observar una categorización de cómo toman las referencias los alumnos expresadas en forma de diagrama. Dichos diagramas son representaciones de cómo fijan los alumnos el eje OX y el punto en la app con respecto a la pelota y al suelo, cuando la pelota toca el suelo por primera vez[28]. En ellos hemos representado el suelo y la pelota como una línea recta horizontal y una circunferencia de trazado discontinuo y color gris respectivamente y el eje OX y el punto mediante una recta horizontal y una circunferencia pequeña ambas con un trazado continuo y en color negro. Cabe destacar que, debido a que los diagramas son representaciones en dos dimensiones de fotogramas de un espacio tridimensional, hemos considerado "el suelo" como la línea horizontal situada en la parte más baja de la pelota ya que así lo consideran los alumnos a lo largo del experimento[29]. Además, hay que resaltar también que en dichos diagramas también hemos realizado simplificaciones con la intención de poner de relieve los elementos del fotograma que nos serán útiles para averiguar qué referencia toman los alumnos de cada pareja y dejando de lado el resto de elementos. Por tanto, como decíamos, los valores que puede tomar "la altura del suelo" dependerán del eje OX y del "suelo" (tal como lo acabamos de definir) y los que puede tomar "la altura de la pelota en el suelo" tanto del eje OX como del primer punto marcado. Entonces, para poder considerar que "la altura del suelo" es igual a "la altura de la pelota en el suelo", los alumnos deberían marcar el punto en la parte más baja de la pelota, cosa que solo hacen los alumnos de la pareja 3. Sin embargo, la mayoría de alumnos considera que "la altura del suelo" es igual a "la altura de la pelota en el suelo" como podemos observar en los diagramas, por lo que no son coherentes con los datos que han tomado en su experimentos.

Por ejemplo, los alumnos de la pareja 1 fijan el eje OX en el suelo, lo que hace que la altura del suelo sea cero, pero al marcar el punto en el centro de la pelota, el valor de la altura de la pelota en el suelo será distinto de cero (caso 1). Sin embargo, consideran que estas valen lo mismo. Esto se puede observar en la respuesta al apartado a) del ítem 9 en la que utilizan la gráfica de Graphical Analysis para obtener los valores del tiempo para los cuales la pelota toca el suelo y la altura del suelo. En primer lugar, tenemos que para obtener los valores del tiempo observan los extremos de la gráfica de modo que, al mostrar esta app la función cuadrática solo en el dominio de definición, obtienen los valores del tiempo para los cuales la pelota está en el suelo, considerando la altura de la pelota en el suelo. Sin embargo, cuando les preguntamos a qué altura se encuentra el suelo consideran esta 0.09979m que corresponde con la segunda coordenada del primer punto, es decir, con la altura de la pelota cuando esta está en el suelo. Por tanto, consideran la altura del suelo y la altura de la pelota en el suelo como iguales.

[28] Nos fijamos en el fotograma en el cual la pelota toca el suelo por primera vez pero podríamos habernos fijado también en la imagen del vídeo en la que la pelota toca el suelo por segunda vez, que sería equivalente. Sin embargo, hemos decidido escoger este fotograma puesto que, por cómo ha dividido la app el vídeo en imágenes, en el fotograma en el que se marca el último punto la pelota no está exactamente en el suelo.

[29] Por ejemplo, los alumnos de la pareja 3 explican en el ítem 4.a) que marcan el punto en la parte más baja de la pelota porque "es la que toca el suelo", considerando por el suelo el eje horizontal situado justo en la parte baja de la pelota.

Por otro lado, tenemos los alumnos de las parejas 2 y 4 que toman las referencias como en el caso 2, es decir, marcan el punto en el centro de la pelota y el eje OX tratando de fijarlo justo donde han marcado el primer punto. Por ello, tendremos que la altura de la pelota en el suelo será cero o casi cero (dependiendo de la precisión con la que han tomado las referencias los alumnos), pero no coincidirá con la del suelo, que será negativa. No obstante estos alumnos consideran ambas alturas iguales. En particular, tenemos que los alumnos de la pareja 2 calculan el tiempo para el cual la pelota golpea el suelo considerando que la altura de la pelota en el suelo es cero ya que igualan la expresión de su función a cero para calcular los valores de x y, por otro lado, consideran también que la altura del suelo es cero justificándolo como que es el punto de corte con el eje de las x. Por tanto, ven que la altura de la pelota en el suelo y la altura del suelo es la misma: cero (cosa que no es así). Por otro lado, en el caso de los alumnos de la pareja 4 tenemos que estos miran en la gráfica representada en Desmos el punto de corte de la función con el eje OX para calcular el tiempo en el apartado a) del ítem 9 (considerando la altura de la pelota en el suelo como cero) y dan como respuesta que la altura del suelo es cero, por lo que consideran también que ambas alturas son iguales y valen cero, de donde podemos ver que tampoco se han parado a mirar los datos concretos para su experimento y han considerado directamente que ambas alturas son iguales.

Por último, también podemos observar esta concepción en los alumnos de la pareja 8 que, marcan el punto en el centro de la pelota y el eje OX en el suelo de la silla que, al representarse en el diagrama en un dibujo en dos dimensiones, aparece por encima del punto, por lo que los valores para ambas altura, aunque podrán tomar valores negativos, tampoco coincidirán (caso 4). Sin embargo, los alumnos de la pareja 8 sí que las consideran iguales e incluso iguales a cero ya que miran los puntos de corte de la gráfica con el eje OX para obtener los valores del tiempo para los cuales la pelota toca el suelo (considerando que esta lo toca a altura cero) y afirman que la altura del suelo es cero.

En definitiva, hemos observado una tendencia a considerar equivalentes los términos “altura de la pelota en el suelo” y “altura del suelo” en algunos alumnos, a pesar de que esto no tiene sentido para sus experimentos.

<u>Tendencia a considerar el suelo como sistema de referencia</u>

A lo largo del experimento hemos podido observar una tendencia a considerar el suelo como referencia, esto es, a considerar la altura del suelo 0 o, equivalente. El hecho de que los alumnos consideren el suelo como referencia es debido a que habitualmente esta es la referencia que se considera en la mayoría de tareas en las que se trabaja con la altura como variable y dicha concepción se puede observar en repetidas ocasiones.

Por ejemplo, en las gráficas que dan como respuesta a los ítems 1 y 2 en los que se les da libertad para que representen como conciben el fenómeno gráficamente, podemos ver cómo la mayoría de alumnos consideran el suelo como referencia ya que dibujan las gráficas partiendo del eje OX y acabando en este (todos menos los alumnos de la pareja 1, que presentan dificultades a la hora de representar gráficamente la relación estudiada y no la conciben como una parábola convexa).

Por otro lado, en el ítem 4, también se les da libertad para que tomen las referencias y, como podemos observar, existe una cierta tendencia a fijar el eje OX en algún lugar relacionado con el suelo, bien sea donde rebota la pelota (parejas 1 y 6) o donde se apoya la silla (parejas 7 y 8). Aparte, hay alumnos que aseguran haber fijado el eje OX en el suelo y en realidad no haberlo hecho así (pareja 4) y otros que marcan el primer punto en la parte baja de la pelota porque “es la que toca el suelo”. No obstante, tomar o no el suelo como referencia implica fijar el eje OX en “el suelo”, pero el suelo de la pelota ya que este es el objeto que es objeto de nuestro estudio. Por tanto, solo se puede considerar que los alumnos 1 y 6 toman el suelo como referencia. Además, a diferencia de en los ítems 1 y 2, cómo tomen en la app las referencias será un factor decisivo en su experimento puesto que deberán tenerlo en cuenta posteriormente para poder hacer una interpretación correcta de los datos.

Sin embargo, en los ítems 8 y 9 podemos encontrar que hay alumnos que tienden a considerar el suelo como referencia a pesar de no haberlo considerado así en su experimento, es decir, cuando tomaron los datos en Video Physics. En concreto, tenemos los alumnos de las parejas 2, 4 y 5 que fijan el eje OX justo donde han marcado el primer punto, en el centro de la pelota, por lo que para estos el suelo no será la referencia puesto que la altura de este será negativa (caso 2). Sin embargo, hemos observado que en sus respuestas todos consideran que la altura del suelo es cero. En particular, los alumnos de la parejas 2 y 4 conciben que la altura del suelo es cero ya que identifican el suelo con el eje OX; mientras que los de la pareja 5 afirman claramente que "el suelo se encuentra a altura 0 metros". Por otro lado, tenemos los alumnos de la pareja 3 que marcan el punto en la parte baja de la pelota y el eje en el centro de esta, por lo que la altura a la que se encuentra el suelo será negativa (caso 3). No obstante, en la respuesta que dan en el apartado c) del ítem 8 podemos observar que estos consideran que el hecho de obtener números negativos implica atravesar el suelo, por lo que consideran de forma implícita que el suelo es la referencia. Por último, tenemos los alumnos de las parejas 7 y 8 que, según ellos, toman como referencia "el suelo" puesto que afirman que fijan el eje OX en el suelo, pero refiriéndose al suelo de la silla. Sin embargo, como podemos ver en el diagrama del caso 4 (Tabla 19.2, Anexo 19), esto se traduce a que el eje OX está por encima del suelo, por lo que la altura de este no será cero sino negativa. No obstante, cuando le preguntamos por la altura del suelo, ellos consideran que esta vale cero sin mirar los datos concretos para su experimento y sin llegar a darse cuenta de que, conforme han tomado las referencias y según el funcionamiento de la app, realmente no han considerado este como referencia. Este hecho lo podemos ver en las respuestas de los alumnos de la pareja 7 al apartado a) del ítem8 o en la de los alumnos de la pareja 8 al apartado a) del ítem 9, que consideran que la altura del suelo es cero.

4.3.3. LECCIÓN 3. EL ALARGAMIENTO DE UN MUELLE

4.3.3.1. Por parejas

Empezaremos analizando las actuaciones de los estudiantes organizándolas según los ítems a los que hacen referencia y relacionando sus actuaciones, siempre que lo creamos conveniente, con las actuaciones de los propios estudiantes en las lecciones anteriores.

<u>Pareja 1</u>

Ítem 1. En el primer apartado del ítem podemos observar que las alumnas describen la relación entre la cantidad de canicas introducidas en el vaso y el alargamiento del muelle como proporcional directa: cuando aumenta una variable, aumenta la otra ya que indican que "cuantas más canicas introduzcamos en el vaso, más se alarga el muelle". Además, teniendo en cuenta esta respuesta y considerando como representan la relación en el apartado b), podemos afirmar que consideran el fenómeno estudiado en general o para un intervalo en el que el muelle se comporta uniformemente, sin tener en cuenta que este no podrá alargarse hasta el infinito puesto que existen otros factores, como por ejemplo la elasticidad del muelle o su longitud, que condicionaran hasta cuándo se puede alargar y la elasticidad que tendrá en cada momento, que no será la misma. Analizando con más detalle la gráfica, encontramos que las alumnas han representado

una recta partiendo del origen de coordenadas. Por tanto, teniendo en cuenta cómo se presenta el experimento y cuáles son las variables estudiadas (alargamiento del muelle y cantidad de canicas), deducimos que han representado el experimento partiendo del momento en el que no se han introducido canicas en el vaso y el alargamiento del muelle es cero.

Ítem 2. En este ítem los alumnos no dibujan ninguna gráfica, por lo que deducimos que consideran la misma que la del ítem anterior. No obstante, representan los ejes coordenados y les dan nombre de modo que al eje OX le asignan la variable peso y entre paréntesis escriben el número de canicas. Parece que, aunque el peso no es una de las variables que hay que estudiar, como está muy relacionada con el número de canicas, la consideran como equivalente, en términos generales de la relación estudiada ya que al aumentar tanto el peso como el número de canicas el muelle se alarga. Cuando les pedimos que expliquen la forma de la gráfica, los alumnos indican que tiene esta forma (supuestamente de recta creciente) "porque el alargamiento del muelle depende del peso (número de canicas, x)", aunque con esta respuesta lo único que parecen indicar es que la variable dependiente es la del alargamiento del muelle. A continuación, indican que "$x =$ número de canicas (peso)" y "$y =$ alargamiento del muelle (longitud)" expresando explícitamente cuales son las variables independiente y dependiente respectivamente e identificando de nuevo el número de canicas con el peso. Por último, en el apartado d), indican que toman como sistema de referencia el (0,0) "porque el muelle todavía no se ha alargado ya que no se han introducido canicas", confirmando así la hipótesis que formulábamos en el ítem 1.

Ítem 3. En este ítem las alumnas eligen la familia de funciones $y = ax$ porque han considerado que la función que representa el fenómeno es una recta y saben que la fórmula que la describe es del tipo $y = ax + b$ donde a es la pendiente y b la ordenada al origen, ya que lo han estudiado así en cursos anteriores. No obstante, conciben que al aparecer b en la fórmula implica que debe tomar algún valor real distinto a cero y gráficamente esto implicaría que la gráfica "no pasa por el punto 0, 0", por lo que eligen $y = ax$ e indican que a es el único parámetro y que indica la pendiente o inclinación de la recta. Comentan también que no puede ser una parábola, lo que parece que les sirve para descartar $y = ax^2 + bx + c$ y $y = a(x - b)^2 + c$ (que ya saben que es una parábola, de la lección anterior). También descartan $y = a/x$ afirmando que "no puede ser tampoco fracción porque no puedes poner una parte de canica, tiene que ser entera". Por lo que parece ser que consideran que, al existir una fracción en la fórmula ello implicaría que la variable x, que para ellos es el número de canicas, podría ser una fracción y esto no puede ser. Por tanto, de esta afirmación podemos extraer varias cosas. La primera de ellas es que no son conscientes de que al dibujar la gráfica como lo han hecho están considerando que el número de canicas puede tomar un valor real positivo no necesariamente natural. La segunda es que parece que usan la variable x con un doble significado, tanto "el peso de la canica" como "el número de canicas", probablemente debido a que la relación entre ambas variables es lo que hace que se alargue el muelle (el número de canicas tendrá un peso que hará que el muelle se alargue). Del resto de fórmulas no comentan nada al respecto.

Ítem 4. En relación al cuarto ítem, les pedíamos que utilizaran la app Video Physics para grabar el experimento y realizar una serie de acciones que consistían en tomar referencias (en la tabla 20.1 se puede observar cómo las toman). Inicialmente estas alumnas querían fijar el eje OX en la parte alta del vaso y el punto en la base (tal como indican en la Figura 4.12a), explicando que sitúan el punto allí "porque si conocemos lo que mide el vaso, sabremos qué mide el vaso", ya que probablemente piensen que será un elemento que deberán conocer para saber cuánto se alarga el muelle. En el dibujo no solo indican cómo querían fijar el eje OX, sino también que querían girar los ejes de modo que la parte positiva del eje OY quedara abajo y así obtener que el alargamiento del muelle fuera positivo. Sin embargo, como ven que, a pesar de poder girar el eje en la app no lo pueden hacer lo suficiente como para dejarlo tal como ellas querían (ya que este no puede girar más de 90º en sentido horario y 90º en sentido antihorario respecto de la posición habitual), deciden situarlo en la posición habitual, tal como indican en la Figura 4.12b y el eje OX en la parte baja del vaso, asumiendo de este modo la posibilidad de obtener valores negativos para esta magnitud y que dichos valores tengan sentido para su experimento (indican que "por tanto, el alargamiento nos dará negativo"). Aquí podemos pues observar un ejemplo de que las alumnas conciben el problema de modo que los datos para el alargamiento deberían ser positivos pero, debido a las características del funcionamiento de la app (en este caso debido a la limitación en cuanto al giro del eje OY) tienen que amoldarse a su funcionamiento. Por tanto, parece que sí que sitúan los ejes OX pensando en cómo esto repercutirá posteriormente en la variable alargamiento. No obstante, no sabemos si también lo son para marcar los puntos ya que no explican por qué han decidido hacerlo en la parte baja del vaso a pesar de no situar el eje OX como querían ya que de este modo no podrán saber la medida del vaso (motivo por el cual indican que han decidido marcar los puntos donde los marcan).

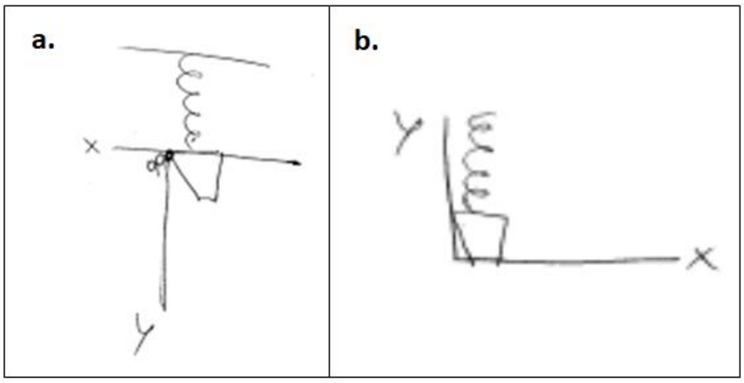

Figura 4.12. Dibujos respuesta ítem 4 (pareja 1, lección 3)

En cuanto a la medida de referencia tomada, indican que será de 0,75m correspondientes a la longitud de la pata de la mesa. Por último, indican que ninguna de las gráficas que proporciona la app es la que permite observar la relación entre las variables estudiadas, aunque no justifican su respuesta.

Ítem 5. En primer lugar cabe destacar que, debido a que la app no proporciona las coordenadas de las variables cuya relación queremos que estudien, se lo preguntamos y les pedimos que, sea cual sea su respuesta, que escriban las coordenadas de los puntos. Las alumnas de esta pareja explican que no tienen todos los datos pues falta la variable que indicaría el peso o cantidad de canicas ya que, recordemos que estas alumnas ven que una de las variables a estudiar es esta, considerando la cantidad de canicas y el peso de estas como la misma variable, parece que si ambas variables podrían tomar los mismos valores o no. No obstante, cuando les pedimos que copien las coordenadas de los puntos, inicialmente copian como variable x las del tiempo, aunque posteriormente se dan cuenta al representarlas sobre la app Desmos (probablemente porque les salen valores altos para la variable x y aquí están solo estudiando 8 canicas), y como variable y las que proporciona la app directamente en la tercera columna, que corresponderían al alargamiento negativo. Por último, no son capaces de calcular la función que ajustaría a los puntos sin usar la app y se limitan a escribir la ecuación de la recta $y = mx + n$.

Ítem 6. Después de representar los puntos en Desmos, las alumnas indican que el tipo de función que piensan que ajustará a estos será la lineal, pero sin dar ningún tipo de justificación. A continuación, cuando les pedimos que traten de ajustar la función a los puntos representados y que expliquen el proceso paso a paso, estas comentan que la explicación está en la hoja de ayuda que han pedido, por lo que no podemos saber qué tipo de operaciones han realizado antes de pedir la hoja de ayuda o cómo han dotado de sentido los valores correspondientes a los parámetros, entre otros; lo que sabemos es que después de pedir la hoja han conseguido obtener la fórmula de la función, que indican que es $y = -0{,}0014x$ basándose en $y = ax + b$ ya que indican que "a cambia la inclinación", refiriéndose a la pendiente y "b su altura". En relación con el parámetro a, cabe destacar que cuando les pedimos que cambien la inclinación de la gráfica en la hoja de ayuda, indican solo que esto se hace añadiendo un signo negativo, en concreto, escriben $y = -x$ y explican que la recta será decreciente "cuando la x sea negativa" y creciente "cuando la x sea positiva". Es decir, no tratan de dar sentido a los valores que pueda tomar a, sino solo al signo de este parámetro, puede que porque en la lección anterior se lo preguntábamos por separado. Además, podríamos decir que otorgan un significado estático a a cuando dicen que es creciente o decreciente y dinámico cuando hablan de un cambio en la inclinación. Por otro lado, tenemos que indican que el parámetro b representa la altura, pero también especifican que la gráfica puede moverse hacia arriba "sumándole un número al eje x" y hacia abajo "sumándole un número negativo", atribuyéndole a b un significado estático en el primer caso y dinámico en el segundo, probablemente debido a cómo funciona la app y a la forma en la que les formulamos las preguntas en la hoja de ayuda. Cabe destacar que, aunque la función ajusta a los puntos, esta no permitirá estudiar la relación entre el número de canicas y el alargamiento del muelle ya que usan como coordenada x la variable tiempo.

Ítem 7. Lo primero que deben hacer en este ítem es construir la tabla de valores con las coordenadas de los puntos que muestran la relación que queremos estudiar. Para ello, las alumnas copian la columna correspondiente al tiempo y la correspondiente a la variable y y realizan las acciones pertinentes para obtener la fórmula de la función con la app. No obstante, una vez calculada se dan cuenta de que han considerado una variable que no era, el tiempo, por lo que cambian estas por los valores 0, 1...8 (correspondientes a los valores para el número de canicas introducidas en el vaso) y vuelven a realizar las acciones pertinentes obteniendo, ahora sí, una fórmula que muestra la relación estudiada: $y = -0{,}019x - 0{,}006$. Por ello, indican que la función que se ajusta sería la que acaban de calcular, puesto que la del ítem 6 muestra otra relación.

Ítem 8. En este ítem les pedimos que calculen las imágenes de algunos puntos (-1, 0, 2.5, 4 y 100) cosa que hacen sustituyendo en la fórmula de la función obtenida en el ítem 7. A continuación, les preguntamos por el significado que tiene lo que han calculado y explican que lo que han calculado es la relación que muestra "para cada canica, el alargamiento que hace el muelle", sin concretar los valores que según ellas puede tomar cada variable. A continuación, les preguntamos si creen que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre y explican que "no, porque no pueden haber -1 canicas ni 2,5 canicas, por lo que para ellas solo lo tendrían los valores naturales incluyendo el cero. Sin embargo, no comentan nada del valor 100 que, a pesar de que podría tener sentido en algún experimento de características semejantes (si el vaso no hubiera llegado al suelo o considerando que la elasticidad del muelle no se ha visto afectada todavía), no lo tiene en su experimento particular puesto que introducen 8 canicas y no más, por lo que las alumnas están considerando el experimento en general.

Por último indican que la función podría ayudarles a predecir lo que pasa cuando se añade una cantidad muy grande de canicas aunque indican que "tocará el suelo y el alargamiento del muelle se detendrá" por lo que parece que entienden mal la pregunta ya que parece que interpreten que les estamos preguntando si podrían describir el fenómeno completo mediante una función en vez de si con esta función que es lineal pueden predecir todo el fenómeno.

Ítem 9. Por último, en el apartado a) indican que el alargamiento del muelle cuando han introducido 4 canicas sería de 0,082 y que sí que tendría sentido el resultado ya que "el sistema de referencia está en la base del vaso, por tanto, el alargamiento será negativo". A diferencia de lo que observamos en su comportamiento en el experimento de la lección anterior, aquí hacen alusión a cómo toman las referencias en la app Video Physics para justificar que tendría sentido la aparición de valores negativos para el alargamiento.

En cuanto al apartado b), indican que la longitud mínima del muelle durante el experimento sería 0 y la máxima hasta tocar el suelo, por lo que parece que respondan pensando en general en el fenómeno, no en su experimento concreto en el que han considerado que estudian la relación desde que el vaso no contiene ninguna canica hasta que contiene 8 y con 8 canicas el vaso no llega a tocar el suelo. Además, a pesar de que es cierto que por cómo han considerado las referencias en Video Physics las alumnas obtendrán que el alargamiento mínimo será 0, cabe destacar que por la precisión de los datos no será exactamente así, aunque estas no lo comprueban.

En relación con el apartado c), les preguntamos si sería posible calcular la distancia del vaso al suelo cuando hemos introducido 4 canicas en el vaso. Aunque en su caso no lo sería por cómo toman las referencias, nos interesa ver si son capaces de pensar qué deberían hacer en Video Physics para poder calcular esta distancia. No obstante, las alumnas dicen que, efectivamente, no pueden calcular la distancia del vaso al suelo conforme han tomado los datos pero indican que la app no les permite "poner el sistema de referencia encima del vaso", cosa que sí que es posible pero aquí probablemente se estén refiriendo a lo que habían intentado hacer antes (ver Figura 4.12) de poner el eje OY en la parte negativa y el eje OX encima del vaso.

Por último, les preguntamos de forma explícita como cambiaría la función si en vez de considerar la variable y como el alargamiento del muelle consideraran la variable distancia al suelo e indican que la gráfica sería descendiente, aunque esta también lo es pero parece que aquí están pensando más bien en la que han dibujado en el análisis cualitativo que sería creciente porque consideran un alargamiento positivo.

Pareja 2

Ítem 1. En este primer ítem, tenemos que los alumnos describen la relación entre el número de canicas introducidas en el vaso y el consecuente alargamiento del muelle en detalle, como una relación "proporcional", entendiendo este término como que al aumentar el valor de la variable independiente, aumenta también el de la dependiente. Sin embargo, llega un momento que relacionan de forma implícita la variable alargamiento con la deformación del muelle ("cuantas más canicas ponga, mayor será el peso, entonces mayor será la deformación que sufrirá el muelle por la tensión que tiene que ejercer para no romperse") y pasan a describir la relación entre número de canicas y deformación del muelle. Concretamente explican que "llegará un momento en el que el muelle no se podrá deformar más porque habrá llegado a la máxima deformación posible". Es decir, parece que describen la relación de modo que al inicio es creciente ya que a mayor número de canicas, mayor deformación pero llega un momento en el que ya no se deforma más. No obstante con esta descripción no explican el tipo de crecimiento que tendría la función, cosa que sí que plasman en la gráfica que han realizado de la relación, en la que de nuevo han escrito que la variable y corresponde a la deformación del muelle. En particular, describen una curva que al inicio crece muy rápidamente pero poco a poco va estabilizándose hasta acabar en un punto con una recta vertical que, según han descrito, correspondería al momento en el que el muelle se rompe. Por tanto, describen la relación desde el inicio hasta que ya no se podría alargar más el muelle (por lo que están considerando que el experimento terminaría cuando el muelle no se puede estirar más). Además, conciben el fenómeno de modo que inicialmente, cuando no se le han introducido canicas al vaso, el muelle se ha deformado 0 unidades, por lo que no consideran la deformación inicial de este al estar colgado del vaso. Cabe destacar también que, por el hecho de haber dibujado la gráfica continua, cabe la posibilidad de que la variable número de canicas no sea un número natural.

Ítem 2. En este segundo ítem observamos que persiste la misma idea ya que dibujan una gráfica semejante a la del ítem 1 con la diferencia de que ahora llaman a uno de los ejes "alargamiento del muelle", en vez de "deformación del muelle". Esto lo hacen porque para ellos, el alargamiento y la deformación que sufre el muelle son equivalentes ya que, de hecho, los usan como sinónimos en varios momentos en el ítem 2 tal como se puede observar en su respuesta. Por ejemplo, dicen que "al principio [el muelle] irá deformándose o alargándose proporcionalmente al número de canicas" o que "al ir añadiéndole canicas aumentará el alargamiento o la deformación del muelle". Por otro lado, justifican que la gráfica dibujada tiene esta forma describiendo de nuevo el fenómeno pero sin dar detalles precisos de cómo será la relación entre las variables. Comentan también que consideran que "al comienzo no habrá ni canicas ni deformaciones, así que empezaremos en 0" para justificar porque han dibujado a gráfica empezando en el origen de coordenadas. Cabe destacar también que las unidades de medida que indican que serían las de cada variable son número de unidades para el número de canicas y refiriéndose a que se mediría con números naturales, y cm para la deformación que, de nuevo, usan como sinónimo de alargamiento.

Ítem 3. Como estos alumnos dibujan la gráfica de una curva que al principio crece muy rápido y luego más despacio, buscan una función logarítmica y dicen que la única es $y = a \cdot ln\, bx$, aunque afirman que no están seguros de si sería la logarítmica con base e. Cabe destacar que, los alumnos comentan que al final el alargamiento del muelle "se mantendrá constante" (apartado b) del ítem 2), por lo que su gráfica tendría una asíntota horizontal. No obstante, las funciones que tienen una forma similar a esta y tienen una asíntota horizontal son las exponenciales, no las logarítmicas, por lo que parece que no tienen muy claro esta característica de la función (cosa que se verá posteriormente en el estudio de casos en el que participa el alumno 2.1). Además, por lo que respecta a los parámetros, indican que estos son a, que indica "como te mueves en el eje de las x", y b, que si lo modificas "prolonga el tiempo que tarda en llegar a la constante", aunque no sabemos en qué se basan para hacer estas afirmaciones.

Ítem 4. En este ítem tenemos que los alumnos no dan unas respuestas coherentes con cómo han tomado las referencias (que se pueden ver en las imágenes correspondientes de la tabla 20.1). Esto es porque inicialmente toman las referencias en un sitio y posteriormente las cambian repetidamente hasta dejarlas en la posición en la que lo han hecho. Por tanto, finalmente marcan los puntos en la parte inferior del muelle y fijan los ejes de coordenadas en el primer punto para, después de realizar una serie de operaciones, obtener el alargamiento del muelle. Cabe destacar que estos marcan el primer punto cuando el vaso no contiene canicas. Por último, toman como referencia la pata de la mesa y como medida 0,8m. Además, explican que ninguna de las gráficas que aparecen en la app muestra la relación estudiada "porque ninguna relaciona el número de canicas con el alargamiento del muelle".

Ítem 5. En este ítem los alumnos explican que, en la tabla no aparecen todos los datos que necesitan "porque solamente nos aparecen los centímetros de alargamiento que experimenta el muelle y no tenemos el número de canicas". Por ello, cuando les pedimos que escriban cuales serían las coordenadas de los puntos, escriben como primera coordenada los valores 1, 2, 3... (considerando 1 como la primera coordenada del primer punto siendo incoherentes con cómo han tomado las referencias) y como segunda coordenada los de la tercera columna de la app Video Physics transformados de centímetros a metros (que era como los proporcionaba la app) y cambiados de signo, cosa que hacen con la finalidad de obtener un alargamiento positivo. No obstante, para ser coherentes deberían haber cambiado también el primero de los valores obtenidos que, era casi cero, cosa que no hacen por ser ya positivo. Cabe destacar que inicialmente habían considerado, aparte de cambiar los signos a positivos de la variable y, pasarlos de metros a centímetros. No obstante, piensan que si hacen esto y calculan la función en Desmos, después no podrán compararla con la obtenida en Graphical Analysis (que antes venía dada directamente mediante la app pero ahora no) y deciden dejar los valores tal cual como están.

Ítem 6. En primer lugar cabe destacar que, a pesar de que los alumnos indican que la función es una logarítmica, aquí explican que la función que se ajusta a los datos obtenidos es una función lineal porque solo consideramos un pequeño espacio de tiempo". Dan esta justificación puesto que la gráfica dibujada es una recta, aunque como podemos ver en la Figura 4.13, primero tratan de ajustar una función logarítmica a los puntos, basándose en la que habían escogido en el ítem 3 y sin éxito alguno, por lo que parece que a pesar de ver que los puntos estaban dispuestos de forma alineada, intentan ajustar la función que habían escogido en el análisis cualitativo.

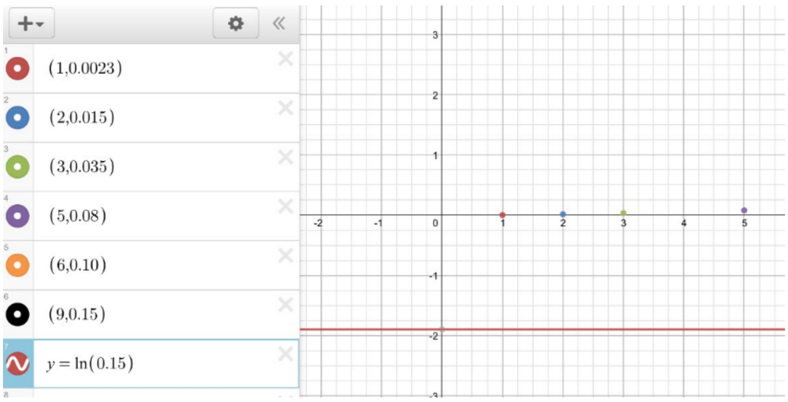

Figura 4.13. Gráfica ajuste función logarítmica a puntos (pareja 2, lección 3)

En cuanto al apartado b), cabe destacar que estos alumnos no piden la hoja de ayuda para encontrar la fórmula de la función que ajusta a los puntos. Estos indican que la función es $y = 0{,}0127x$, valor que han obtenido calculando la pendiente de la recta usando el primer y el segundo punto:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{0{,}015 - 0{,}0023}{2 - 1} = 0{,}0127$$

Parece, por tanto, que han visto que gráficamente la función pasaría muy cerca del (0,0), tal como podemos ver en la imagen de la Figura 4.13 y, por ello, la fórmula de la función sería de la forma $y = ax$, lo que explicaría que sean capaces de calcular la gráfica después de haberla representado y no antes ya que en el ítem 5 no responden el ítem c. Cabe destacar que la gráfica no pasaría exactamente por el (0,0) por cómo han definido las coordenadas ya que han considerado que el alargamiento es cero (aunque no lo es exactamente por la precisión en la que se toman los datos) cuando se ha introducido 1 canica y no 0. Cuando les pedimos que expliquen cómo cambia la gráfica al cambiar los valores que pueden tomar los parámetros indican que "la gráfica varía según la pendiente", por lo que parece que le atribuyan al parámetro a de $y = ax$ el significado de una característica de la familia de funciones lineal, que el parámetro indica la pendiente de la recta, probablemente porque así lo han estudiado en cursos previos.

Ítem 7. En este ítem los alumnos introducen los valores de las coordenadas en una tabla en la app Graphical Analysis pero, a diferencia de lo que hacían en Desmos, las coordenadas que consideran ahora para la variable x son 0, 1, 2…8, siendo coherentes con cómo habían tomado las referencias. Por tanto, ambas funciones no serían comparables en el sentido de que las variables que relacionan no miden lo mismo. No obstante, parece que los alumnos no son conscientes de ello porque, después de obtener la fórmula de la función con Graphical Analysis la comparan con la obtenida en Desmos e indican que son similares, por lo que no se decantan por elegir una de las dos. Cabe destacar que la fórmula obtenida en Graphical Analysis es $y = 0{,}020x - 8{,}644 \cdot 10^{-4}$, aunque los alumnos terminan considerando $y = 0{,}020x$ por ser $-8{,}644 \cdot 10^{-4}$ un valor muy cercano a cero.

Ítem 8. En este ítem los alumnos consideran la fórmula obtenida en el ítem 7 y calculan las imágenes de algunos de los puntos usando esta fórmula. En el cálculo se equivocan ya que escriben que $f(2{,}5) = 0{,}5$ en vez de 0,05 y $f(4) = 0{,}8$ en lugar de 0,08, aunque no se dan cuenta de ello. Así pues, estos explican que lo que están calculando es el alargamiento del muelle respecto a las canicas y que las respuestas que no muestran lo que verdaderamente ocurre son las negativas, refiriéndose a $f(-1) = -0{,}02$ ya que tanto el valor en sí como su imagen son negativos. No obstante, no les resulta extraño que aparezcan valores decimales en el dominio de la función, por lo que están considerando la variable como continua, ni tampoco que en el dominio aparezca el 100, que en este caso no tendría sentido puesto que ellos estudian un experimento en el que se introducen hasta 8 canicas en el vaso y no más de esto.

Ítem 9. Por último, en el ítem 9 tenemos que los alumnos indican que el alargamiento del muelle para 4 canicas sería 0,08, cálculo que han realizado usando de nuevo la fórmula del ítem 7. Explican que este valor sí que tendría sentido porque comparan con la gráfica de la función y el valor correspondiente de y para $x = 4$ es 0,08, cosa que es obvio puesto que esta gráfica es la de la función usada para calcular el valor.

En el apartado b) les preguntamos por la longitud mínima y máxima que alcanza el muelle durante el experimento y los alumnos indican que "la longitud mínima del experimento es la propia longitud del muelle sin que haya peso en su interior" y "la máxima será 0,16 dentro del experimento con 8 canicas". Por ello, son coherentes con cómo tomaron las referencias en Video Physics y con los valores considerados para las variables a partir de las cuales obtienen la fórmula de la función usada.

En el ítem c) les preguntamos si son capaces de calcular la distancia del vaso al suelo cuando se han introducido 4 canicas en el vaso y durante la sesión nos comentan que no lo pueden calcular con sus datos, por lo que les indicamos que expliquen como lo harían. Estos comentan que "la distancia al suelo es la distancia inicial al suelo menos el alargamiento inicial del muelle y 0,016", donde 0,016 es el alargamiento para 4 canicas (que lo han calculado mal porque en realidad da 0,16). Es decir, consideran que la distancia del vaso al suelo vendrá dada por la distancia total del listón de madera al suelo menos la longitud inicial del muelle y 0,016 que es lo que se ha alargado para 4 canicas. Por tanto, parece que estén considerando el experimento en general sin tener en cuenta cómo pide Video Physics que actúen. La fórmula que escriben es:

Distancia inicial – (alargamiento inicial + 0,016) = Distancia suelo

Cabe destacar que, según esta hipótesis en la que hemos reinterpretado lo que los alumnos intentan indicar con esta fórmula, están considerando los términos "longitud" y "alargamiento" como sinónimos.

Por último, les pedimos que describieran como cambiaría la función si en lugar de estudiar el alargamiento del muelle estudiaran la distancia al suelo, por lo que indican que "saldría una función en la cual llegaría un momento en que el peso de las canicas haría que el vaso cayera al suelo" y dibujan la gráfica de una recta decreciente de modo que empieza con una altura determinada y acaba en el eje OX que han denominado suelo.

Pareja 3

Ítem 1. En este primer ítem los alumnos describen la relación estudiada como proporcional, es decir, "a más canicas, más alargamiento del muelle". Además, cuando les pedimos que dibujen la relación tienen dificultades de hacerlo porque, tal como nos comentan en clase, habría tres variables: "y = el alargamiento del muelle", "x = número de canicas" y "z = longitud que adquiere el muelle por cada canica". Es decir, ven que las variables que ellos etiquetan como y y z son distintas cuando, por como las enuncian parecen ser la misma o, al menos, estar relacionadas. Después de ello, tratan de escribir una fórmula para relacionar las tres variables y, probablemente, a partir de esta representar la relación. No obstante, al considerar tres variables, obtienen dos ecuaciones (aunque al final deciden descartar la primera de ellas, $x_{final} = x_0 + yz$, porque aparece tachada). En concreto, conciben que las relaciones entre las variables serán lineales, dando lugar a las ecuaciones $x_{final} = x_0 + yz$ y $y_{final} = y_0 + xz$.

Ítem 2. En este segundo ítem podemos ver que los alumnos sí que empiezan dibujando la gráfica de una función y ahora parecen no tener dificultades en representarla ya que dibujan una recta (ver gráfica a) en la Figura 4.14), probablemente porque la ecuación que han considerado antes es lineal. Pero además, llama la atención que ahora consideran dos variables que no son las mismas que las de la ecuación (o fórmula) que habían considerado antes, $y_{final} = y_0 + xz$, pero tampoco son las que aparecen en el enunciado ya que relacionan cantidad de canicas con longitud del muelle, no con el alargamiento porque puede que conciban que estas variables son iguales. En cuanto al tipo de representación gráfica que realizan, hay que señalar que la gráfica que han dibujado parte del origen de coordenadas (que han etiquetado con un cero), probablemente porque no han pensado en cuál podría ser la longitud del muelle cuando no se le ha introducido todavía ninguna canica en el vaso.

No obstante, posteriormente descartan esta opción y deciden dibujar la gráfica de nuevo como una recta pero partiendo de un valor positivo en el eje OY, debido a que ahora han considerado que inicialmente “el muelle ya tiene una longitud propia” (ver gráfica b) de la Figura 4.14). En cambio, tampoco deciden que esta es la opción definitiva ya que finalmente también la descartan.

Por último, dibujan una gráfica escalonada creciente que parte de un valor positivo para y (ver gráfica c) de la Figura 4.14). Esto lo hacen, tal como comentan en clase, porque ven que no se puede introducir un número decimal de canicas en el vaso. Es decir, ven que la función solo tendrá sentido para valores naturales y hasta que no se introduce en el vaso una canica más, no se alarga el muelle. Sin embargo, no lo representan así. Parece que implícitamente estén considerando la variable tiempo o peso en la gráfica que dibujan puesto que, en vez de dibujar una gráfica formada por puntos dibujan rectas de modo que hasta que no se le vuelve a introducir un número natural de canicas en el vaso, el muelle no se alarga (es decir, usan la variable con un doble significado el de “número de canicas” y “masa de las canicas”). Es más, en su respuesta al apartado b) comentan que la gráfica tiene esa forma “porque el muelle ya tiene una longitud, y porque al aumentar el nº canicas asciende directamente la longitud del muelle, no progresivamente” Por tanto, están considerando igualmente que el dominio son todos los reales a partir de cero, aunque ellos indican que “el número de canicas no es fraccional”.

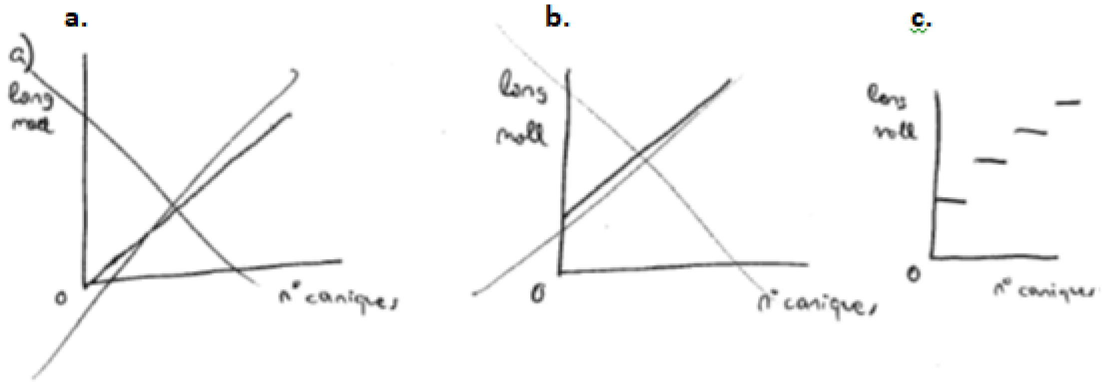

Figura 4.14. Dibujos respuesta apartado a) ítem 2 (pareja 3, lección 3)

Ítem 3. En este ítem los alumnos indican que eligen la familia de funciones $y = ax + b$, porque “la y aumenta en relación al número de canicas con la longitud original del muelle”. Es decir, parece que elijan esta familia de funciones, no por la forma de la gráfica, sino porque identifican las letras (variables y parámetros) con magnitudes que pueden haber influido en el estudio del fenómeno. Es más, esta hipótesis toma más fuerza después de observar la respuesta al siguiente apartado, donde los alumnos indican que los parámetros de la función son todas las letras que aparecen y les asignan los siguientes significados: y la longitud del muelle, a el alargamiento del muelle, x el nº de canicas y b la longitud inicial del muelle. Además, describen la relación entre estas, no según la gráfica, sino fijándose solo en las fórmulas y en cómo afecta a y el hecho de aumentar el valor asignado cada una de las otras letras. De nuevo aquí aparece la idea que comentábamos en el ítem 1 de que parece que los alumnos vean que no hay solo 2 factores que influyan en el experimento, sino más, por lo que ven que todos ellos deben aparecer en la fórmula y no saben cómo hacer para que esto suceda.

Ítem 4. En primer lugar hay que destacar que los alumnos de esta pareja marcan los puntos cuando el vaso no contiene ninguna canica y lo hacen en la parte baja de este (ver Figura 20.1 en Anexo 20) según ellos “porque es el extremo del muelle”, por lo que parece que consideran despreciable la medida de este a la hora de considerar lo que sería la segunda variable. De hecho, fijan el eje OX en la parte superior del muelle, concretamente en el listón de madera de donde cuelga este, de modo que parece que son conscientes de que de esta forma la app les proporcionará los valores de la “longitud del muelle”, tal como ellos llaman a esta variable, entendiendo el término longitud del muelle como sinónimo de lo que nosotros hemos considerado como longitud inicial del muelle más longitud del vaso más alargamiento del muelle. Por tanto, los alumnos deberán ser coherentes posteriormente con el uso que hacen de esta definición que, además, incluye que dicha longitud pueda tomar valores negativos ya que explican que “para adaptar el vídeo a nuestras gráficas, deberíamos colocar el origen de coordenadas en la parte alta del muelle y el eje positivo de y por debajo del negativo. Pero hemos colocado el origen en la parte alta del muelle para obtener un aumento negativo de y”, dando a entender que inicialmente querían girar los ejes de modo que la parte positiva del eje OY estuviera en la parte inferior y, así, los valores para “la longitud” fueran positivos. Pero, que al darse cuenta de que la app no permite que giren tanto los ejes, deciden cambiar de idea y consideran que la variable obtendrá valores negativos. Por último, en el apartado d), estos alumnos indican que sí que hay una gráfica que muestra la relación estudiada y es aquella que representa la relación entre el tiempo y la longitud del muelle, pero añaden que “x representa las canicas, aunque por valores del vídeo, está representada por el tiempo”. Es decir, señalan que sí que existe una gráfica que muestra la relación e indican que es la que es una línea recta, probablemente comparando la gráfica con las que habían considerado inicialmente en el ítem 2 (aunque al final deciden representar una función escalonada). No obstante, añaden que la variable estudiada no sería el tiempo sino “las canicas”.

Ítem 5. En cuanto al ítem 5, los alumnos indican que sí que aparecen los datos necesarios en la tabla y que serían “la columna del tiempo y la de y(m), pero a cada punto le quitamos el valor del tiempo y le aplicamos el número de canicas”, refiriéndose a que en vez de considerar la variable tiempo deberían considerar la de “número de canicas”. Por ello, en el apartado b) escriben las coordenadas de los puntos de modo que los valores para la primera de ellas son 0, 1, 2... (siendo consistentes con el hecho de considerar que el valor de x para el primer punto es 0). No obstante, para la segunda coordenada de los puntos, los alumnos escriben los de la variable y(m) directamente, por lo que están considerando lo que ellos han llamado “la longitud del muelle”, esto es, la variable $-1 \cdot (A + l_m + l_v)$ donde A sería el alargamiento que variaría para cada canica, l_m la longitud inicial del muelle cuando no se le han introducido canicas en el vaso y l_v la longitud del vaso, que serían valores fijos. Por último, en el apartado c) en el que les preguntamos si serían capaces de calcular la función que ajusta a los puntos sin usar ninguna app los alumnos copian la fórmula de la función que obtienen posteriormente con Desmos.

Ítem 6. No obstante, en este ítem los alumnos indican que la función que ajusta a los datos obtenidos es $y = ax + b$ y en concreto señalan que es $y = x \cdot (-0.02) - 0.45$, aunque, por lo que indican se basan en cómo perciben el fenómeno para obtenerla ya que indican que la han calculado “sabiendo que b es la longitud inicial del muelle (-0,45); y la a es el aumento de la longitud del muelle por cada canica (-0,02)”. Cabe destacar que no les extraña que aparezcan valores negativos para la longitud, probablemente porque son conscientes de cómo han tomado las referencias. Añaden también una explicación de cómo se comportan los parámetros de la fórmula en relación con la gráfica y explican que “al cambiar los valores de a la inclinación de la función será mayor o menor y cambiando los valores de b varía el punto por donde pasa la función en el eje OY", por lo que parece que otorgan un significado dinámico al primero y de característica particular de la gráfica al segundo.

Ítem 7. En este ítem les pedimos a los alumnos que calculen la fórmula de la función usando la app Graphical Analysis y que digan cuál de las dos fórmulas ajusta mejor y por qué. No obstante, obtienen la misma fórmula, $y = x \cdot (-0.02) - 0.45$, por lo que indican que ambas funciones son iguales.

Ítem 8. En este ítem tenemos que los alumnos calculan las imágenes de los puntos de forma correcta usando la fórmula obtenida y cuando les preguntamos, explican que el significado que esto tiene es "saber en x número de canicas, cuál será la longitud del muelle y". Es decir, consideran como segunda coordenada la longitud del muelle, no el alargamiento, siendo coherentes con cómo han tomado las referencias y considerando el vaso como parte del muelle (en el ítem 4 ya comentaban que marcan el punto en la base del vaso porque lo ven como "el extremo del muelle").

A continuación les preguntamos si piensan que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre e indican que no porque "no pueden haber -1 bolas ni tampoco 10 bolas, ya que solo hay -0,75 metros de altura", por lo que se fijan en el dominio de la función y ven que no tiene sentido considerar -1 canicas por ser negativo. No obstante, no dicen nada del 2,5, puede que porque se encuentra entre los valores 1 y 8 y la gráfica que obtienen en Desmos es una recta, por tanto continua (pero no piensan que la variable que están estudiante es discreta). Por otro lado, destaca que para el valor de 100 se basen en la imagen no en el dominio e indican que tampoco tendría sentido calcular su imagen, no porque se hayan introducido 100 canicas y en su experimento hayan usado solo 8, sino porque se basan en la imagen de este que es -2,45m y lo comparan con la distancia total que es la altura de la mesa, 0,75m, para afirmar que el muelle no puede tener una longitud mayor que la pata de la mesa, que sería la misma que la distancia del listón de madera hasta el suelo. Además, tienen en cuenta de considerar la longitud de la pata de la mesa como negativa para poder así compararla con la longitud del muelle que la han considerado como negativa por cómo han tomado las referencias.

Por otro lado, explican que la función no nos puede ayudar a predecir lo que pasaría cuando añadimos un número grande de canicas "ya que con 15 canicas [el vaso] tocaría el suelo". Parece que han usado la gráfica de la función para ver que a las 15 canicas la longitud del muelle sería de -0,75m, es decir, la longitud que han considerado para la pata de la silla, por lo que a partir de este instante la gráfica sería constante.

Ítem 9. Por último, explican que el alargamiento del muelle con 4 canicas sería de -0.53, considerando el alargamiento como sinónimo de longitud aunque podemos observar una cierta tendencia a que cuando se refieren a lo que se alarga el muelle consideren el valor en negativo por cómo han tomado las referencias y en positivo cuando hablan de longitud inicial del muelle. Además, parece que no usan la fórmula para encontrar este valor sino que piensan en términos del fenómeno ya que multiplican 4 por lo que se alarga el muelle por cada canica y al resultado le suman la longitud inicial del muelle, 0,45, y lo escriben con un signo negativo pues están considerando la longitud como negativa por cómo han tomado las referencias en la app.

Por otro lado, indican que 0,45m es la longitud inicial del muelle, cosa que parece que han obtenido calculando la imagen de la función para 0. En cambio, no indican cuál sería la máxima longitud, probablemente porque no hayan leído la pregunta.

En cuanto al apartado c) del ítem, les preguntamos por la distancia del vaso al suelo cuando este tiene canicas y restan la distancia total que han considerado antes que es la medida de la pata de la silla, 0,75, al valor obtenido para 4 canicas, 0,53.

Por último, explican que si quisieran estudiar la distancia del vaso al suelo habrían cambiado de posición el eje OX, refiriéndose a cómo habrían actuado en la app. Por tanto, hablan de cambiar referencias cuando les preguntamos como cambiaría la función, por lo que su definición de la función incluye cómo se tomarían las referencias en la app.

Pareja 4

Ítem 1. En el primer apartado de este ítem los alumnos explican que la relación estudiada será proporcional directa ya que cuantas más canica, más se alarga el muelle. No obstante, cuando les pedimos que dibujen dicha relación no lo representan así sino que dibujan, al igual que los alumnos de la pareja 3, una gráfica escalonada creciente, es decir, formada por segmentos de rectas horizontales cada vez con mayor altura. Por tanto, en primer lugar cabe destacar que los alumnos sí que conciben que la mejor forma de representar dicha relación es a través de una función. Además, por el tipo de gráfica que dibujan, puede que la idea sobre la que se han basado para dar su respuesta es la de que hasta que no se introduce la siguiente canica en el vaso (que corresponderá a un valor natural para x), el muelle no se alarga. Sin embargo, al dibujar rectas horizontales lo que representan realmente es que el número de canicas puede ser un número real y que al introducir, por ejemplo, 1,3 canicas, el muelle se ha alargado una distancia igual a cuando se han introducido 1 canica. Además, los segmentos que han representado empiezan con una circunferencia sin pintar y otra pintada (como podemos ver en la respuesta de los alumnos en el Anexo 23), lo que parecen querer indicar que, para los valores de x de los extremos del segmento, el valor de y correspondiente será aquel que corresponda con la circunferencia pintada. Cabe destacar que los ejes están graduados de modo que para la variable "número de canicas" podemos deducir que habrán considerado como escala los números naturales y para 0 canicas, el muelle se ha alargado cero unidades; para 1 canica, una unidad; para 2, 2 unidades, etcétera. Por tanto, según su representación, justo después de introducir cada canica en el vaso, el muelle se alarga, pero no cuando se ha introducido una canica. Por otro lado, tenemos que estos alumnos llaman al eje OY altura en vez de alargamiento. No obstante, parece que en el sentido en el que lo usan es en el de alargamiento. Además, indican que el eje OX representa las canicas y la unidad de medida son los gramos, seguramente porque piensen que el muelle se alarga como consecuencia del peso que será más razonable que se mida en gramos, y que la de la altura son los metros, lo que llama la atención ya que según como dibujan la gráfica, cada vez que se introduce una canica más, aumenta en una unidad la variable y.

Ítem 2. En este segundo ítem los alumnos vuelven a dibujar una gráfica escalonada creciente pero ahora no lo hacen del mismo modo que antes puesto que los "escalones" no están dibujados de igual forma. En este caso no dibujan los ejes graduados, por lo que pensamos que no se han basado tanto en dibujar la gráfica pensando en valores concretos sino en la forma que habían dibujado antes. Ahora para 1 canica la altura considerada es 0 de modo que para valores mayores que 1 hasta 2 la altura aumenta, luego para valores mayores que 2 vuelve a aumentar hasta 3, etcétera. De nuevo vuelven a dibujar una gráfica que no representa lo que parece que conciben ya que consideran la posibilidad de que el número de canicas sea un valor real no natural y de que la "altura" o alargamiento del muelle aumente pero justo después de haber introducido la canica.

No obstante ellos no lo conciben así ya que explican en el apartado b) del ítem que “por ejemplo, cuando tiene la primera canica, [el muelle] se estabiliza y no se estira más hasta que no ponemos otra”. Por otro lado, vemos que usan la variable que han denominado “canicas” con dos significados distintos: “número de canicas” y “masa de las canicas” puesto que en el apartado b) vemos que lo hacen en el primer sentido y en c) en el segundo (en este explican que la unidad de medida que sería conveniente usar para la variable “canicas” es el gramo): “la masa en gramos que es peso adherido para cada canica”.

Ítem 3. Debido al tipo de gráfica representada en el ítem anterior, estos alumnos nos comentan en clase que no saben qué familia de funciones sería la que la represente. Esto se plasma en su respuesta, en la que los alumnos explican que “realmente ninguna [fórmula] se ajusta a la gráfica sacada por nosotros, ya que al ser función discontinua no tiene fórmula”. No obstante, añaden que “si eligiéramos solo el punto el cual dejamos la canica, formaría una ecuación de primer grado ($y = ax$)”, es decir, los alumnos indican que solo consideran los puntos de la recta para los cuales la variable “número de canicas” tiene sentido, que corresponden a números naturales. Por tanto parece que ven la función como discreta. Además, parece que no eligen la fórmula $y = ax + b$ porque conciben que b tiene que ser distinto de cero al aparecer dicho parámetro en la fórmula y saben que esto implicaría que la gráfica no pasara por el origen de coordenadas. En cuanto al significado que atribuyen a los parámetros, tenemos que identifican que el parámetro es a y explican que “cuando aumentamos o disminuimos el valor de a se acerca más al eje x o al eje y”, por lo que parece que lo conciben como que aumenta o disminuye la pendiente acercándose más al eje de las x o de las y.

Ítem 4. Por lo que respecta a las referencias tomadas, cabe destacar que estos alumnos marcan los puntos en la parte baja del muelle tal como podemos observar en la Tabla 20.1 del Anexo 20 ya que indican que lo hacen “al final del muelle, donde este se une con el vaso [...] porque de ahí aumenta la altura (alargamiento)” refiriéndose a que consideran que la longitud inicial del muelle será la longitud base a partir de la cual se alargará el muelle conforme vayan introduciendo las canicas en el vaso. No obstante, estos fijan los ejes de coordenadas justo en el último punto marcado, por lo que la app les proporcionará la distancia de los puntos al eje OX, que será cada vez menor, no mayor como ellos indican. Es decir, parece que toman las referencias basándose en como conciben el problema, no tanto en cómo funciona la app. Cabe destacar que, como podemos escuchar en la grabación, inicialmente los alumnos habían fijado los ejes justo en el primer punto, no en el último, lo que explicaría su respuesta en el apartado a) en el que indican que “desde ese punto sería 0 en el eje OY”, refiriéndose a que marcan los puntos en la parte baja del muelle porque de este modo en el primer punto el alargamiento sería 0. Sin embargo, después deciden cambiar de opinión debido a que así obtienen valores negativos para el alargamiento y deciden situar los ejes en el último punto y así hacer que estos sean positivos. No obstante, lo que esto hace es que la variable que obtienen no sea el alargamiento positivo como pretendían, sino $d_{p,x} - A$ dónde $d_{p,x}$ es la distancia del primer punto al eje de las x. Por otro lado, cabe destacar que mientras responden estas preguntas parece que son conscientes de que realmente la variable que correspondería a su x, número de canicas, no pueden obtenerla de ningún modo mediante la app ya que indican que “la x al ser canicas no se puede poner en el eje de las x”. En cuanto a medida de referencia, los alumnos indican que esta sería la pata de la mesa que mediría 0,75m (aunque al introducirla en la app esta redondea la cifra a 0,8m).

Por último, indican que sí que hay una gráfica en Video Physics que representa la relación entre el tiempo y la variable y, aunque indican que "desde nuestro punto de vista no es correcta en su mayoría ya que consideramos más que es una función discontinua que una función de primer grado". Es decir, los alumnos señalan que la gráfica que representa la relación es la única que tiene forma de recta pero añaden que para ellos debería ser una función discontinua y probablemente escalonada tal como la han representado en los ítems 1 y 2.

Ítem 5. En cuanto a las coordenadas de los puntos, explican que no las tienen todas porque "falta el número de canicas, que lo hemos obtenido mirando el vídeo" indicando que se fijan en cómo han tomado las referencias en el vídeo de la app Video Physics para obtener esta variable, concretamente en el número de canicas que había en el vaso cuando han marcado el primer punto, el segundo, etcétera. En cuanto a la coordenada y del experimento relativa al alargamiento del muelle, comentan que han considerado la variable y(m) directamente, mirando la tercera columna de la tabla de valores obtenida al enviar los datos de Video Physics a Graphical Analysis. Por último, indican que no sabrían calcular la función sin usar la app.

Ítem 6. A pesar de haber elegido la función $y = ax$ en el ítem 3 como aquella que mejor representaría el fenómeno, en este ítem los alumnos ajustan una función lineal del tipo $y = ax + b$ a los puntos que acaban de representar en Desmos ya que por cómo han tomado las referencias el alargamiento inicial no es exactamente cero. Además, la gráfica que representan tiene pendiente negativa, lo que no parece llamarles la atención.

En concreto en el primer apartado indican que la fórmula de la función es $y = -0{,}0189x + 0{,}1522$ "porque el valor 0,1522 es el que corta el eje OY haciendo que pase por el primer punto, (0, 0.1522)" y "el -0,0189x porque nos ha dado lo más aproximado". Es decir, consideran la segunda coordenada del primer punto como el término independiente de la fórmula porque les da donde corta esta el eje OY y como parámetro que multiplica a x el -0,0189 que lo han obtenido probando en la fórmula diferentes valores y observando su representación gráfica. Además, como podemos ver en la respuesta de los alumnos al apartado c) (ver Figura 4.15), estos dan una explicación genérica en la que afirman que el signo de a varía la orientación de modo que si es negativo la gráfica será decreciente y si es positivo creciente; el valor de a hace que "se acerque más al eje OY" e indican dibujando gráficas que si está entre 0 y 1 la recta estará más lejos del eje OY, si es 1 estará en el medio de los dos ejes y si es menor que 1 estará más cerca del eje OY); y el valor de b dará el punto de corte con el eje OY. Por tanto, de las interpretaciones que hacen los alumnos tenemos que parece que conciben que el signo del parámetro a es estático porque indica si la recta está en una posición u otra, y dinámico al parámetro a ya que explican que cambia lo próxima que esté la recta del eje OY. Por otro lado, parece que al parámetro b le otorguen un significado de característica de la gráfica ya que indican que es el punto de corte con el eje OY. Al igual que los alumnos de la pareja 1 distinguen entre el signo y el valor absoluto del parámetro a.

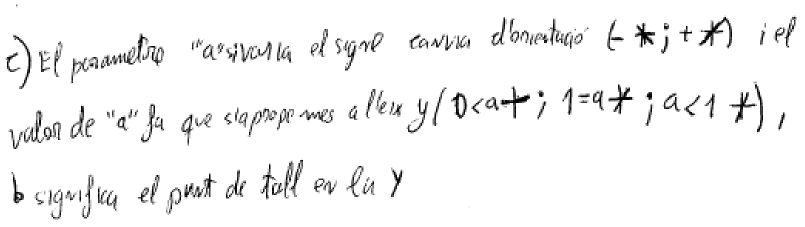

Figura 4.15. Respuesta apartado c) ítem 6 (pareja 4, lección 3)

Ítem 7. A continuación les pedimos que creen una tabla de valores en Graphical Analysis con las coordenadas de los puntos que muestran la relación entre número de canicas y alargamiento del muelle, calculen la fórmula de la función con la app y comparen el resultado con la fórmula obtenida mediante la app Desmos y digan cuál ajusta mejor a los datos. Los alumnos escriben que la fórmula obtenida es $y = -0{,}019x + 0{,}151$ y afirman que la función que mejor ajusta es la que han calculado ellos en Desmos "ya que no hemos aproximado los decimales". *A priori* podríamos pensar que los alumnos se refieren a que han aproximado los valores que han considerado para crear la tabla y por eso hacen esta afirmación; pero al observar las capturas de pantalla que realizan, nos damos cuenta de que no es así ya que han utilizado los valores exactos. Parece que, como ellos han encontrado la fórmula basándose en que el parámetro que ellos llaman b es la segunda coordenada del primer punto, piensan que la app también procede del mismo modo para proporcionar la función y, en este caso, como el valor que da es 0,151 y no 0,1522 piensan que lo ha aproximado y que, por ello, la fórmula que ellos proporcionan es más exacta.

Ítem 8. En el ítem 8, los alumnos usan la fórmula obtenida mediante Desmos para calcular las imágenes de los valores que les pedimos, cosa que hacen de forma correcta. Además, explican que el significado que tiene lo que han calculado es "conforme aumenta el valor x (número de canicas) va aumentando la altura hasta el suelo y (altura)". Por tanto, aunque no han calculado la función que representa la relación estudiada sino la que muestra la relación entre número de canicas y "la distancia al suelo", son conscientes de ello y no afirman que esta variable sea el alargamiento.

En cuanto al apartado c), les preguntamos si piensan que las respuestas obtenidas en el apartado anterior muestran lo que verdaderamente ocurre y responden que sí, pero no porque piensen en su experimento sino en la gráfica porque "al ser una proporcional directa pueden darse los casos".

Por último, en el apartado d) explican que la función no podría ayudarles a predecir lo que pasa cuando añaden una cantidad muy grande de canicas "ya que el muelle tiene un límite elástico que haría que se partiera". Esto es, conciben que la función no puede representar el comportamiento del muelle para valores más grandes ya que la función es una línea recta y el muelle no se alargaría constantemente porque llegaría un momento en el que se rompería al perder elasticidad, ahora sí, comparando lo que sería la función con el experimento.

Ítem 9. En primer lugar les pedimos a los alumnos que calculen el alargamiento del muelle cuando hemos introducido 4 canicas cosa que obtienen "restando la posición inicial [del muelle] menos la de cuando tiene 4 canicas ($f(0) - f(4)$ =0,1522 - 0,07335 = 0,07885cm)". Es decir, aquí comprobamos realmente que los alumnos son conscientes de que lo que realmente proporciona la función es la posición del punto marcado con respecto al eje OX para un número de canicas determinado, es decir, el valor de la distancia del muelle al eje OX para un determinado número de canicas menos el alargamiento.

En cuanto al apartado b), indican que la longitud mínima del muelle será "la del punto inicial, es decir, la de antes de poner ninguna canica" pero que no calculan por no disponer de suficientes datos. Análogamente para la máxima longitud, que indican que sería la longitud del muelle "cuando ponemos 8 canicas" pero tampoco la calculan.

En relación con el apartado c), les preguntamos si podrían calcular la distancia del vaso al suelo y responden que "se puede calcular pero no de la forma en la que lo tenemos nosotros", refiriéndose a como han tomado ellos las referencias ya que les falta la medida del vaso y del último punto al suelo.

Por último, en el apartado d) indican que la función que obtendrían si quisieran estudiar la distancia del muelle al suelo en vez del alargamiento "sería igual pero negativa" y escriben "$y = -x$". Sin embargo, en la función que han obtenido el coeficiente de x también es negativo por lo que parece que están pensando más en el fenómeno que no en los datos que tienen.

Pareja 5

Ítem 1. En este primer ítem los alumnos de la pareja 5 explican que "cada vez que haya más peso [en el vaso] el muelle va estirándose" cuando les pedimos que describan la relación entre la cantidad de canicas y el alargamiento del muelle. De aquí podemos destacar dos cosas: 1. que parece que conciben la relación como proporcional directa, de modo que cuando aumenta una cantidad aumenta otra y 2. que hacen referencia a la variable cantidad de canicas como peso (de hecho lo escriben entre paréntesis al final de la respuesta) y al alargamiento como longitud. En cuanto al apartado b), vemos que los alumnos no representan ninguna función sino un dibujo en el que representan "flechas" en dirección vertical y sentido hacia abajo para indicar la relación entre ambas variables. Además, añaden que "cada vez que ponemos más canicas, el muelle más se estira" tratando de suplir lo que no pueden expresar mediante un dibujo.

Ítem 2. Por lo que respecta al segundo ítem, vemos que los alumnos ahora sí que expresan la relación usando una gráfica y no necesitan escribir nada extra para aclarar como es esta relación porque queda totalmente determinada por la gráfica. En este caso, los alumnos dibujan una recta que empieza en el origen de coordenadas y que tiene pendiente 1. Parece que para dibujar la recta se han basado en valores concretos para la función puesto que en su respuesta podemos ver cómo han representado los ejes graduados y se pueden apreciar pequeños puntos de modo que todo apunta a que, para dibujar la recta, primero pensaron en valores concretos (cuando no hay canicas, el muelle no se alarga, cuando introducimos una canica se alarga una unidad, etcétera). Cuando les pedimos que expliquen la forma de la función estos dicen que "si hay más peso habrá más longitud", relacionando de nuevo las variables peso y longitud en vez de número de canicas y alargamiento que es lo que parece que conciben para representar la gráfica, porque lo que hacen es suponer unos valores de y para los valores naturales de x y luego representar la recta a partir de aquí (como normalmente están acostumbrados a hacer para representar una función, que primero dan valores concretos). Llama la atención que las escalas que dibujan para representar las variables en cada uno de los ejes estén formadas por 4 rallas pequeñas y una grande dando a entender que cada 5 unidades pequeñas es una grande de modo que asocian cada ralla grande con un valor natural, con número de canicas, tal como podemos escuchar en las grabaciones de aula. Sin embargo, al considerar como gráfica una recta parece que estén dando a entender que consideran el peso. Cabe destacar, por otro lado, que conciben que cuando no se ha introducido ninguna canica la longitud del muelle es cero, por lo que para ellos inicialmente el muelle tendrá una longitud inicial.

Ítem 3. En cuanto a este tercer ítem, los alumnos eligen la familia de funciones $y = ax + b$ supuestamente porque su gráfica es una recta ya que explican que esta fórmula "forma la mitad de la gráfica", refiriéndose a que genera una gráfica que divide por la mitad el segundo cuadrante, sin explicar por qué hacen referencia justo a esta característica de su gráfica. No obstante, parece que dudan entre elegir $y = ax$ y $y = ax + b$ ya que inicialmente eligen la primera y luego la tachan para quedarse con la segunda. *A priori* podemos pensar que no eligen la fórmula $y = ax$ porque saben de cursos previos que la fórmula de la recta es $y = ax + b$ y no se han planteado si b puede ser cero o no o simplemente no saben qué repercusión tiene esto gráficamente. No obstante, en el segundo apartado podemos deducir que esto no es así ya que, a pesar de haber escogido $y = ax + b$, explican que el único parámetro es a, considerando que b es cero, por lo que parece que hayan escogido $y = ax + b$ por ser la familia de funciones en general, que también engloba la otra. No obstante, no explican el significan el significado de a sino que se limitan a dar un ejemplo.

Ítem 4. Después de grabar el vídeo, los alumnos indican que marcan los puntos en la parte baja del vaso (ver captura de pantalla correspondiente en la Tabla 20.1 del Anexo 20) aludiendo a que "es donde se concentra el peso", además marcan el primer punto cuando el vaso contiene una canica. En cuanto a los ejes de coordenadas, indican que sitúan el eje OX "en la parte baja, donde se acaba el vídeo" refiriéndose a que lo hacen en el último punto que marcan, es decir, cuando ya han terminado de introducir las 8 canicas en el vaso. Además, justifican que lo han hecho aquí "porque es donde más se aproxima al suelo" ya que justo el último punto está sobre la línea que separa el suelo de la pared (ver captura de pantalla), aunque no están diciendo que esto implique que el vaso toca el suelo en este punto. Por tanto, no parece que estén pensando en cómo afectará la forma en la que tomen las referencias en la app en los valores que tome la variable y. Por otro lado, indican que la pata de la mesa mide 0,8m y así lo introducen en la app. Y, por último, una vez tomadas las referencias, les preguntamos si existe alguna gráfica de las que muestra la app que represente la relación estudiada. Aunque inicialmente afirman que sí y se refieren a la gráfica que tiene forma de recta (por tener la misma forma que la que han representado ellos en el ítem 2), posteriormente se dan cuenta de que "no es ninguna gráfica, porque ninguna muestra la relación entre el peso y la longitud".

Ítem 5. En el siguiente ítem, les preguntamos si en la tabla que acaban de obtener tienen todos los datos necesarios, a lo que responden que no, ya que "faltan los del peso (cantidad de canicas)". En el apartado b) muestran las coordenadas de los puntos de modo que las correspondientes a la variable x son 1, 2, 3... siendo coherentes con lo que han considerado en Video Physics (donde marcan el primer punto cuando el vaso contiene ya una canica) y las correspondientes a la variable y como las obtenidas directamente por la app como "y(m)", por lo que, al igual que los alumnos de la pareja 4, no están considerando el alargamiento, sino $\mathrm{d_{p,x}} - \mathrm{A}$ con $d_{p,x}$ la distancia del primer punto al eje de las x y A el alargamiento. Por último, parece que no saben calcular la fórmula de la función que ajustaría a los puntos sin ayuda de la app ya que se limitan a escribir la fórmula $x = ay$.

Ítem 6. En primer lugar cabe destacar que los alumnos consideran que el tipo de función que ajustará a los datos será $y = ax + b$ y añaden que la recta "acaba aproximándose a la línea de las x" y que obtienen la fórmula "probando". En cuanto al significado de los parámetros indican que "a es negativa porque va decreciendo", otorgándole un significado estático al parámetro puesto que se refieren a la posición de la gráfica cuando el coeficiente de x es negativo. Además, indican que "si cambias a, gira" refiriéndose a que visualmente la recta parece que dé un giro y que "si cambias b, sube y baja", dándoles un significado dinámico a los parámetros en ambos casos. Por último, escriben la fórmula de la función que han obtenido que es $y = -0{,}02x + 0{,}2$.

Ítem 7. En este ítem les pedimos que calculen la fórmula de la función pero esta vez usando la app Graphical Analysis y a partir de crear una tabla de valores con los valores correspondientes a las variables estudiadas. Para ello, los alumnos introducen las coordenadas del ítem 5 en la app, siendo coherentes con cómo consideran la variable número de canicas y obtienen que la fórmula es $y = -0{,}021x + 0{,}174$. Comparando con la función obtenida en Desmos, indican que esta se ajusta más “porque lo hemos comprobado en Desmos y esta ajusta a la perfección”, es decir, representan gráficamente ambas en la app para ver cuál de las dos da un mejor ajuste y eligen la que proporciona la app Graphical Analysis.

Ítem 8. En el ítem 8 los alumnos consideran la fórmula de la función obtenida en el ítem anterior y calculan las imágenes que les pedimos (se equivocan calculando $f(0)$ que da 0,174 y no -0,174) indicando que su significado es “la longitud del muelle”, cosa que no es cierto ya que como hemos dicho anteriormente lo que obtienen es $d_{p,x} - A$ siendo $d_{p,x}$ la distancia del primer punto al eje de las x, que en este caso coincide con el último punto marcado, y A el alargamiento. Además, al preguntarles si piensan que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre responden que sí “porque cuando vas poniéndole peso, la longitud sube”, por lo que parece que piensan en el alargamiento de la función (no sabemos si considerando que el alargamiento es lo que aumenta la medida del muelle respecto a su longitud inicial o lo que mide el muelle en total en cada caso) y no en la variable que realmente están ellos considerando puesto que esta disminuye conforme van introduciendo canicas.

Por último, les preguntamos si creen que la función les permitirá predecir lo que sucede cuando añadimos una cantidad muy grande de canicas al vaso y explican que no “porque tocará el suelo y del suelo no pasa”.

Ítem 9. En el último ítem les pedimos, en primer lugar, que calculen el alargamiento del muelle cuando han introducido 4 canicas en el vaso y que digan si tiene sentido el resultado. Por ello, los alumnos de la pareja 5 calculan la imagen de la función para $x = 4$ que da 0,09 pero, para ver si esta tiene sentido miran el vídeo y explican que no lo tiene “porque hemos visto el vídeo y creemos que no son 9cm”. Parece ser que al mirar el vídeo los alumnos interpretan esta medida como la longitud del muelle y por eso piensan que no puede ser de 9cm, y no como la distancia del vaso cuando tiene 4 canicas al último punto marcado que sería lo que realmente mide 9cm. Por tanto, tal como sospechábamos, parece que los alumnos no son conscientes del significado que tiene el haber tomado las referencias como lo han hecho.

Por otro lado, indican que el alargamiento mínimo del muelle sería de 0,174 “porque es 0”, considerando que el alargamiento mínimo se dará cuando no haya canicas en el vaso y calculando la imagen de la función para $x = 0$ (ya que mediante la tabla no es posible hacerlo porque ellos marcan el punto cuando el vaso tiene una canica). En cambio, indican que el máximo valor del alargamiento es de 0,93 porque, según ellos, “es la altura inicial del vaso”, valor que coincide con el que aparece en la última columna de la tabla que han construido para calcular la función. Sin embargo, al afirmar que el valor del alargamiento máximo es igual a la altura inicial del vaso, nos hace pensar que lo que hacen es comparar en el vídeo la medida del vaso con lo que se habrá alargado el muelle cuando el vaso tiene 8 canicas que, como podemos ver en la captura de pantalla de la Figura 4.16 será una medida semejante.

Por último, indican que sí que podrían calcular la distancia del vaso al suelo, pero dicen que “no sabemos cómo”, a pesar de que en su caso la propia función les da este valor ya que marcan el punto en la base del vaso y el eje OX en el suelo pero parece que, como hemos señalado, ellos ven que la función les da la longitud del muelle. Para finalizar, indican que si estudiaran la distancia al suelo en lugar del alargamiento del muelle la función sería $y = x$.

Figura 4.16. Captura de pantalla con puntos en Video Physics (pareja 5, lección 3)

Pareja 6

Ítem 1. Cuando les pedimos a los alumnos de esta pareja que describan la relación, la explican relacionando las variables con una variable "auxiliar" que sería el peso de las canicas ya que indican que "cuantas más canicas pongamos en el vaso, más aumentará el peso, y más se alargará el muelle", por lo que conciben la relación como proporcional directa. Esto se corrobora cuando les pedimos que dibujen la relación estudiada, que dibujan la gráfica de una recta creciente, por lo que ven la relación como función, además de considerar la posibilidad de que la variable número de canicas tome valores reales. Esto puede ser debido a que consideran esta variable como el peso, no como el número de canicas en sí ya que escriben en el eje OX que la variable representada en este eje será la cantidad de canicas y entre paréntesis la letra g indicando que se mide en gramos (unidad de medida con la que se mediría la masa de la canica, no el número de canicas). Además dibujan la gráfica empezando del origen de coordenadas por lo que han considerado que cuando no se ha introducido ninguna canica en el vaso, el muelle tienen un alargamiento nulo.

Ítem 2. En este ítem los alumnos responden de forma similar a como lo habían hecho antes ya que representan una función lineal partiendo del origen de coordenadas para representar la relación entre la cantidad de canicas y el alargamiento del muelle. Cabe destacar que, de nuevo, indican que la cantidad de canicas se mide en gramos, no en unidades, por lo que parece que usan la expresión "cantidad de canicas" con el significado de "masa de las canicas". Justifican la forma de la gráfica explicando que dibujan una recta "porque es proporcional, si pones canicas (peso) es preciso que el muelle se alargue, y si el muelle se alarga es porque estamos poniendo peso", de nuevo haciendo referencia a la cantidad de canicas como un peso.

Ítem 3. En este ítem los alumnos eligen la familia de funciones $y = ax$ e indican que lo han hecho porque "son las más adecuadas respecto a la gráfica porque cuantas más canicas más se alarga el muelle", es decir, eligen esta función por ser proporcional directa y por describir el fenómeno estudiado. No obstante, no indican por qué eligen esta y no $y = ax + b$ que también describe la misma relación. En cuanto al apartado c), indican que el único parámetro de la familia de funciones es a y que lo que hace es aumentar la longitud del muelle. Cabe destacar que si los alumnos se refieren no a la longitud inicial del muelle sino a lo que se alarga al introducirles las canicas, entonces la interpretación es correcta. Teniendo en cuenta las respuestas a ambos apartados, observamos que parece que los alumnos no hacen referencia a la gráfica de la función sino al fenómeno.

Ítem 4. En este ítem indican que marcan los puntos que muestran cómo se alarga el muelle "en la base del vaso" según ellos, porque "así todo es igual y sabemos el punto exacto donde marcarlo". Además, esto último lo justifican diciendo que lo sitúan allí ya que "conforme más canicas introduces, va bajando más" refiriéndose a que de este modo podrán conocer el alargamiento del muelle. Asimismo, se dan cuenta de que este alargamiento será negativo ya que dicen que "sale en negativo", por lo que deciden considerar que esta variable puede tomar valores negativos y, por tanto, no realizan ningún tipo de operación para cambiar los valores de la variable de signo. En este caso, los alumnos también toman como referencia la pata de la mesa e introducen la medida real: 0,75m. Por otro lado, en el apartado d) indican que sí que hay una gráfica que representa la relación estudiada, la que relaciona el tiempo con la variable y, probablemente porque tiene forma de recta y, por consiguiente, coincide con la que ellos habían representado en los ítems 1 y 2. Además, tratan de dar sentido a la gráfica en relación con las variables que supuestamente deberían estudiar para encontrar una justificación, a pesar de que saben que estas no son las variables estudiadas. En concreto, explican que podría ser esta gráfica "porque los metros dependen del tiempo cuando pones las canicas".

Ítem 5. Por lo que respecta al siguiente ítem, tenemos que los alumnos inicialmente indican que sí que tienen todos los datos. Sin embargo, durante la sesión nos preguntan si lo están haciendo correctamente y les hacemos reflexionar hasta llegar a que si les hemos pedido que estudien una relación, aunque no tienen todos los datos mediante la app, los pueden obtener de otra forma. Por ello, indican que no tienen todos los datos puesto que les faltan los del número de canicas de modo que modifican los valores de los puntos escribiendo 1, 2, 3... para la primera coordenada de cada uno para representar la cantidad de canicas que contiene el vaso en cada momento. Por otro lado, como segunda coordenada introducen la proporcionada directamente por la variable y de la app de modo que, como han comentado antes, los valores para esta saldrán negativos.

Ítem 6. En este ítem les pedimos a los alumnos que encuentren la fórmula de la función cuya gráfica ajuste a los puntos representados usando la app Desmos y que expliquen cómo lo han hecho y qué significado tienen los parámetros de la fórmula. Sin embargo los alumnos se limitan a indicar que usan la fórmula de la familia de funciones $y = ax$, tal como concebían ya en el ítem 3, y en concreto que la función encontrada es $y = -0{,}018x$.

Ítem 7. En el siguiente ítem les pedimos que creen una tabla de valores en Graphical Analysis con las coordenadas de los puntos que muestran la relación estudiada. Por ello, los alumnos realizan las acciones pertinentes e indican que la fórmula de la función obtenida es $y = -0{,}020x + 0{,}014$ pero indican que no pueden determinar cuál de las dos funciones ajusta mejor porque no disponen de la hoja donde tienen apuntada la fórmula de la función calculada con Desmos, por lo que no responden el apartado b) del ítem y en los siguientes ítems usan la fórmula calculada aquí.

Ítem 8. En primer lugar, les pedimos que calculen algunas imágenes e indiquen qué significado tiene esto en términos del fenómeno estudiado. Así lo hacen los alumnos y explican que "cada coordenada va referida a un valor de la tabla", por lo que no interpretan el significado de esto en términos del fenómeno sino que parece que comparen la relación entre los valores correspondientes a x y $f(x)$ con los de las dos columnas de la tabla. Además, parece que no piensan si las imágenes calculadas o los valores de los cuales han calculado las imágenes tienen sentido en términos del fenómeno, puesto que comentan que todos tienen sentido “porque son valores reales”, cuando en el experimento realizado en clase se han considerado solo el número de canicas de 1 hasta 8, por lo que, por ejemplo, no tendría sentido calcular la imagen de 100.

Por último, comentan que la función sí que podría ayudarles a predecir qué sucede cuando se añaden al vaso una cantidad muy grande de canicas “porque sabemos lo que se estira para cada canica”, sin tener en cuenta que en la relación estudiada pueden influir otras variables como la elasticidad del muelle o la distancia del vaso al suelo.

Ítem 9. En este último ítem, les pedimos que calculen cuál es el alargamiento del muelle cuando han introducido 4 canicas en el vaso, por lo que los alumnos sustituyen x por 4 en la fórmula de la función obteniendo $y = -0{,}066$, dando por sentado que este es el alargamiento del muelle pero sin interpretar el resultado ni comentar si este tiene sentido o no en términos del fenómeno o por cómo han tomado ellos las referencias. En el apartado b), indican que la mínima longitud del muelle se obtendrá cuando este tenga 0 canicas y la máxima cuando toque el suelo, pensando en términos del fenómeno y considerando aquí que sí que existe una limitación y que el muelle no se alargaría hasta el infinito. A continuación, indican que sí que podrían calcular la distancia del vaso al suelo cuando han introducido 4 canicas, “midiéndolo con Video Physics”, aunque no explican cómo ni dan ningún resultado. Por último, dicen que la función que representara la relación entre el número de canicas y la distancia al suelo sería muy similar a esta “ya que es lo mismo en realidad”, porque puede que vean que el experimento es el mismo y simplemente tendrían que medir otros aspectos, aunque no dan ningún tipo de explicación a su respuesta.

<u>Pareja 7</u>

Ítem 1. Los alumnos de la pareja 7 describen la relación entre las variables probablemente pensando en un intervalo en el que esta relación es uniforme ya que no destacan lo que pasaría si el vaso tocara el suelo o qué pasaría si el muelle perdiera elasticidad, por ejemplo. En concreto explican que “para cada canica que añadimos dentro del vaso mayor será el peso y por tanto más se estirará el muelle”, es decir, hacen uso de una variable auxiliar, el peso de la canica, para explicar la relación. No obstante, cuando tratan de representar gráficamente la relación, escriben en el eje OX “peso”, por lo que parece que están considerando como equivalentes el peso y el número de canicas puesto que están relacionadas. Hay que destacar también que, a pesar de dibujar unos ejes y, por consiguiente, reconocer que la mejor forma de dibujar dicha relación es mediante una función, los alumnos no son capaces de dibujar la gráfica de esta.

Ítem 2. En cambio, en este segundo ítem sí que dan como respuesta la gráfica de una recta y de nuevo indican que el eje OX representa el peso y el eje OY el alargamiento del muelle, por lo que parece que para ellos esta es la relación estudiada. No obstante, al realizar este dibujo están considerando que la variable peso para este experimento es continua, es decir, que toma valores en todos los reales positivos y cero, o sea, no consideran cantidades discretas de peso para las diferentes canicas introducidas, sino una cantidad continua, probablemente porque ven que el peso puede tomar cualquier valor real positivo. En cuanto al hecho de considerar como el punto de inicio el origen de coordenadas (0,0), explican que esto se debe a que “inicialmente el muelle está en situación de reposo” porque “tomamos como referencia el alargamiento que tiene el muelle sin peso, que sería 0, y como todavía no hemos introducido ninguna canica el peso sería 0 también". Añaden por último que las unidades de medida consideradas son "los gramos porque es lo que pesa una canica" y "los centímetros porque metros no llegamos a medir".

Ítem 3. En este tercer ítem tenemos que los alumnos escogen la familia de funciones $y = ax$ como aquella que mejor describe la gráfica ya que "pasará por (0,0) y dibujará una recta". Además indican que "la b) también podría ser pero esta no pasa por (0,0)" refiriéndose a que la familia de funciones $y = ax + b$ también podría describir el fenómeno pero como tiene un parámetro b no pasará por el origen de coordenadas, considerando que b será distinto de cero siempre y que es el parámetro que determina si la gráfica pasa por el origen de coordenadas o no. En cuanto al apartado c) en el que les pedimos que identifiquen qué letras son parámetros, los alumnos indican que son las variables x e y que son la dependiente e independiente, respectivamente, seguramente porque no conocen el significado de parámetro. Además, cuando les pedimos que expliquen su significado se limitan a explicar un caso concreto de cómo se verá afectada y cuando x y a tomen unos ciertos valores. En particular explican que "cuando la x sea negativa y el valor a positivo, y será negativa" teniendo en cuenta solo los valores que tomaran estos en la fórmula y no su significado en relación con la gráfica.

Ítem 4. Después de haber realizado el experimento y grabarlo con la app Video Physics, observamos que los alumnos marcan los puntos que muestran como se alarga el muelle en la parte baja de este (ver captura de pantalla correspondiente en la Tabla 20.1 del Anexo 20) cosa que hacen porque "lo que medimos es lo que se estira el muelle". Además, marcan el primer punto cuando el vaso no contiene ninguna canica, por lo que así lo deberán tener en cuenta posteriormente. Por otro lado, indican que fijan los ejes de coordenadas en la pata de la mesa de modo que el origen de coordenadas lo sitúan en el extremo inferior de esta. Esto lo hacen, según ellos, "porque es un punto del que conocen la altura" ya que toman la pata de la mesa como medida de referencia (e indican que mide 0,75m), por lo que parece que de este modo les será posible obtener como se alarga el muelle. Sin embargo, no están considerando el funcionamiento de la app cuando están tomando sus decisiones puesto que al fijar el eje de este modo lo que obtendrán es la distancia del muelle al suelo y no lo que se alarga, es decir, si llamamos A al alargamiento y $d_{p,x}$ a la distancia del primer punto marcado al eje OX, tenemos que la variable y que obtendrán estos alumnos será $d_{p,x} - A$. Además, que de las gráficas que muestra Video Physics, ninguna les parece adecuada.

Ítem 5. Por lo que respecta a la tabla de Graphical Analysis, los alumnos indican que no pueden obtener todos los datos para construir las coordenadas de los puntos puesto que falta la variable número de canicas pero que saben cuál es. Por ello, construyen las coordenadas de los puntos usando como variable x los valores 0, 1, 2... 8 de modo que indican que esta "sería la [columna] de los números, porque el número 1 es realmente 0" refiriéndose a la columna de la izquierda que se puede observar en la Figura 4.17. Por otro lado, indican que "la coordenada del eje OY sería la que corresponde a la columna del eje OY", refiriéndose a que usaran como coordenada segunda los valores proporcionados por la variable y, sin pararse a pensar si lo que estos valores proporcionan es realmente lo que ellos entienden por alargamiento del muelle o no. Por último, tratan de encontrar la fórmula de la función usando la fórmula $y = ax$, que es la que habían señalado en el ítem 3. No obstante, comentan que han pensado como hacerlo pero no han conseguido llegar a la solución.

Experimentos

	X	Y
1	0	0,4805
2	1	0,462694
3	2	0,438905
4	3	0,418684
5	4	0,397274
6	5	0,3759
7	6	0,354454
8	7	0,330665
9	8	0,316392

Figura 4.17. Tabla de valores con coordenadas de los puntos en Graphical Analysis (pareja 7, lección 3)

Ítem 6. En este ítem los alumnos sí que son capaces de encontrar la fórmula de la función que ajusta a los puntos usando la app, concretamente "dándole valores hasta que hemos comprobado que pasa por los puntos", e indican que es $y = -0{,}02x + 0{,}4805$. Además añaden que lo que hacen es "poner x negativa, sumarle valores, etc.", por lo que tratan de indicar de algún modo cómo han conseguido llegar a esta fórmula. No obstante la información que dan no es suficiente puesto que es probable que aunque hayan empezado cambiando de signo la variable independiente y hayan continuado sumándole un valor, hayan tenido que alternar entre cambiar los valores que multiplican a x y los que suman. En cuanto al significado que otorgan estos a los parámetros tenemos que, en primer lugar, indican que "el signo varia la posición" y dibujan una gráfica creciente y una decreciente de modo que al lado de cada una de ellas escriben "positivo" y "negativo" respectivamente, refiriéndose a que cuando el parámetro a que multiplica a x es positivo, la gráfica es creciente y cuando es negativo, decreciente de modo que le dan un significado estático. Por otro lado, comentan que "el valor que multiplica la x hace variar su inclinación", otorgándole un significado dinámico a este. Por último, indican que "el valor que suma indica por donde corta [la función] el eje de las y" refiriéndose al valor d tal que $y = ax + d$ y dándole un sentido de característica de la gráfica particular. Cabe destacar que estos alumnos también explican por separado el significado del signo negativo de a y el valor absoluto de este, probablemente como influencia de cómo les formulábamos las preguntas en la hoja de ayuda proporcionada en la lección anterior.

Ítem 7. En el ítem 7 les pedimos a los alumnos que calculen la fórmula de la función usando la app Graphical Analysis y digan cuál de las dos fórmulas ajusta mejor y por qué. Por ello, realizan las acciones oportunas en la app, construyendo en primer lugar una tabla de valores cuyas columnas son las variables que tienen que relacionar, y obtienen que la fórmula de la función es $y = -0{,}021x + 0.482$, aunque indican que la que ellos han calculado antes ajusta más y, por ello, aunque no justifican su respuesta y posteriormente usan la obtenida en este ítem.

Ítem 8. En este ítem los alumnos calculan las imágenes de los valores que les pedimos utilizando la función del ítem 7 y explican que el significado que tiene "corresponde al número de canicas y al alargamiento del muelle", refiriéndose al significado de los valores y de sus imágenes. No obstante, cuando les preguntamos si tienen sentido las respuestas que acaban de obtener explican que no "porque -1 canica no puedes poner, 2,5 tampoco y 100 no caben en el vaso". Por tanto, parece que no conciben que puedan haber cantidades negativas de canicas ni tampoco valores decimales, a diferencia de lo que concebían en el ítem 1, donde dibujaban la dibujaban continua. En cambio, también destacan que no podemos considerar 100 canicas, pero no porque no tenga sentido en nuestro experimento, sino porque no cabrían tantas canicas en el vaso. Por último, dicen que la función no podría ayudarnos a predecir lo que pasa cuando añadimos un número grande de canicas puesto que el muelle "se estira tanto que se rompe".

Ítem 9. Para finalizar, les pedimos que calculen el alargamiento del muelle cuando han introducido 4 canicas y les preguntamos si tiene sentido. Por ello, las alumnas calculan la imagen de 4 mediante la función obtenida con Graphical Analysis y explican que sí lo tiene "porque al añadirle 4 canicas ya sufre un estiramiento". Por otro lado, calculan la longitud mínima y máxima del muelle sustituyendo en la función por $x = 0$ y $x = 9$, respectivamente, a pesar de que el máximo número de canicas que introducimos es 8 no 9. Por ello, asumimos que están considerando como la variable y la longitud del muelle, cosa que se contradice con cómo han tomado las referencias y también con cómo han considerado antes la variable que afirmaban que era la longitud. Por último, explican que si estudiáramos la distancia del suelo al muelle en vez del alargamiento la relación entre esta variable y el número de canicas cambiaría en que "los valores serían más grandes porque habría más distancia", refiriéndose a que lo que cambiaría es que los valores de la distancia al suelo serían más grandes que lo que se alarga el muelle, basándose probablemente en lo que pasa en su experimento.

Pareja 8

Ítem 1. Las alumnas de esta pareja también explican que el tipo de relación entre las variables será proporcional directa: "cuantas más canicas introduzcamos en el vaso, más largo irá haciéndose el muelle". En cuanto al segundo apartado, en primer lugar realizan un dibujo de un muelle colgando de un soporte que tiene enganchado un vaso. No obstante, al darse cuenta de que no pueden representar la relación mediante un dibujo realizan un esbozo de cómo piensan que sería la gráfica de la función. Para ello, aunque no disponen de datos, parece que piensen en un experimento concreto y hacen uso de valores concretos suponiendo lo que se alargaría el muelle al haberle introducido 0 canicas, 1, 2, etcétera (valores que escribe en el eje OX). En concreto, denominan el eje OX como "nº canicas" y el eje OY como "alargamiento (cm)" y parece que asignan una escala a cada eje ya que dibujan segmentos pequeños del mismo tamaño dividiendo cada eje en secciones igualmente espaciadas. Además, el tipo de gráfica que dibujan es una recta creciente partiendo del origen de coordenadas, por lo que conciben la relación como lineal y de modo que el muelle se ha alargado 0 unidades cuando se han introducido 0 canicas. Asimismo, parece que primero representan algunos puntos (como habitualmente hacen para representar gráficas de funciones) cuando x vale 0, 1, 2, 3, etc. todos ellos valores naturales y después los unen mediante la recta, por lo que están representando que la variable número de canicas puede tomar valores reales y no solo naturales.

Ítem 2. En este segundo ítem las alumnas realizan un dibujo semejante al del ítem 1. No obstante, añaden una explicación: "cada 2 canicas que ponemos [en el vaso], [el muelle] se alarga 1cm", por lo que están representando un caso particular de este experimento. A diferencia de antes, ahora no parece que hayan usado los puntos para representar la función puesto que ya saben qué forma tiene, sino para "copiar" la representación que habían hecho en el ítem anterior. En cuanto al apartado b) en el que les pedimos que justifiquen el porqué de la forma de la gráfica, las alumnas se limitan a describirla: "relacionamos el nº de canicas que introducimos con el alargamiento del muelle. Además, a más cantidad de canicas, aumenta el alargamiento del muelle. La gráfica es ascendiente". No obstante cabe señalar que hacen un inciso y consideran que esta función no será así siempre, sino hasta que toque el suelo el vaso ya que explican que "habrá un límite que será cuando el muelle toque el suelo". Indican también que la unidad de medida del alargamiento del muelle serán los centímetros y del número de canicas, los números naturales; a pesar de que ellas no lo representan así gráficamente al haber considerado una recta como la gráfica. Además, especifican que han dibujado la gráfica en esa posición con respecto a los ejes "porque partimos de que no hay canicas en el vaso", haciendo referencia a porqué han representado la gráfica de modo que empieza en el origen de coordenadas.

Ítem 3. En el tercer ítem, tenemos que esta pareja elige la familia de funciones $y = a/x$ después de haber descartado $y = ax$ y $y = ax + b$. Estos explican que han supuesto "que cada 2 canicas el muelle se alargará 1cm, entonces si, por ejemplo, la x es 4, la y es 2, por eso, cada x, la y es la mitad de x". Es decir, consideran que el muelle se alarga la mitad de unidades que canicas introducidas en el vaso por lo que al concebir la relación entre ambas como una fracción (que correspondería expresar mediante la expresión $y = ax$ con el parámetro a), consideran que la fórmula de la función que la describe deberá tener "forma de fracción". Además, se limitan a escoger la familia de funciones que piensan que describiría el caso concreto que han considerado, en vez de considerar una familia de funciones que describiera todos los casos, independientemente de lo que se alargue el muelle.

En cuanto a la pregunta del siguiente apartado tenemos que las alumnas indican que los parámetros son a, b y c refiriéndose a los parámetros de todas las familias de funciones. En cambio cuando les pedimos que los interpreten, explican que "cada canica aumentará el alargamiento del muelle (0,5cm cada canica)", es decir, se limitan a explicar qué hace la función para el caso concreto que han considerado sin hacer referencia a ningún parámetro.

Ítem 4. Pasamos ahora a trabajar con el iPad y ver cómo tomaron las referencias las alumnas. Concretamente, indican que marcan los puntos en la parte baja del vaso y en el centro ya que "es el punto que más hacia abajo se encuentra" por lo que parece que quieren tomar este punto como referencia para, a partir de ahí, calcular lo que se alarga el muelle. Por otro lado, explican que han fijado los ejes de coordenadas "en la pata de la mesa", concretamente en el extremo inferior de esta, porque "así es positivo", es decir, de este modo, los valores que tomará el alargamiento del muelle serán positivos puesto que se encuentran en la parte positiva del eje OY, aunque de este modo la variable obtenida para y no será el alargamiento sino más bien una función decreciente que proporcionará valores equivalentes a la diferencia entre la distancia del primer punto al eje y el alargamiento. También indican que toman como medida de referencia la pata de la mesa, que es de 0,75m y que no hay ninguna gráfica de las que muestra la app que represente la relación entre los metros y el número de canicas.

Ítem 5. Por último, una vez obtenida la tabla con los datos de la app Video Physics, les preguntamos si en ella aparecen todos los datos necesarios para obtener las coordenadas de los puntos y comentan que no, que "falta la del número de canicas que vamos introduciendo". Sin embargo, vemos que sí que son capaces de conseguir los valores de esta variable basándose en cómo han tomado las referencias en la app Video Physics e indican que "$x =$ número de canicas (números)" de modo que los valores para ella son 0, 1, 2... No obstante, para la variable alargamiento del muelle copian directamente los valores que les proporciona la app para la variable y, con lo que no obtienen el alargamiento del muelle sino, como hemos comentado antes, la diferencia entre el valor de la distancia entre el primer punto marcado y el eje OX y el valor real de lo que se alarga el muelle. Por tanto, parece que no reflexionan demasiado sobre este aspecto. También indican que no son capaces de calcular la fórmula de la función que ajustaría a estos puntos sin usar ninguna app.

Ítem 6. En este ítem los alumnos tratan de ajustar una gráfica de una función realizando cambios en su fórmula correspondiente. En este caso, los alumnos eligen la fórmula de la forma canónica $y = ax + b$ y afirman que han escogido esta “porque es la que mejor pasa por todos los puntos” que es una recta, aunque en el ítem 2 también habían dibujado una recta y en el ítem 3 elegían la fórmula de la familia de funciones $y = a/x$ porque suponían que cada 2 canicas el muelle se alargaba 1cm, que era la mitad. En concreto, indican que la fórmula que han encontrado cuya gráfica ajusta a los puntos es $y = -0{,}015x + 0{,}32$, fórmula que han obtenido “ajustando a y b para ver cuál ajusta más” de modo que “si cambiamos la a sube y baja” y “si cambiamos la b gira hacia la derecha o hacia la izquierda”, otorgando a los parámetros un significado dinámico.

Ítem 7. Por otro lado, la función que obtienen en este ítem introduciendo las coordenadas correspondientes en la app Graphical Analysis y realizando una serie de acciones es también una lineal de la forma canónica $y = mx + b$; concretamente $y = -0{,}020x + 0{,}335$. De entre esta y la que obtienen usando la app Desmos en el ítem 6, indican que ajusta más la de este ítem, porque “es más exacto”.

Ítem 8. Por ello, en el ítem 8 utilizan la fórmula de la función obtenida en el ítem anterior para calcular las imágenes de los puntos que le pedimos (aunque se equivocan en uno de ellos, en f(-1) que da 0,355 y no 0,34) y cuando les pedimos que expliquen que el significado de lo que acaban de calcular indican que “cuando más grande es la x más pequeña es la y”, describiendo la relación entre las variables, y no el significado de una y la otra. Además, indican que no todas las respuestas que han obtenido tienen sentido ya que “no pueden haber 2,5 canicas ni -1 canicas”, por lo que conciben la variable como que solo puede tomar valores naturales, aunque no consideran que para 100 canicas no tenga el sentido tampoco el experimento, a pesar de que su experimento termina al introducir 8 canicas, por lo que aparte de fijarse en el dominio de la función, parece que están pensando en el fenómeno en general y no en lo que ellos han hecho en clase. Por otro lado, también indican que la función no les podrá ayudar a predecir lo que sucede cuando añadimos una cantidad muy grande de canicas “porque si ponemos 100 canicas no se alarga -1,665cm”; por lo que parece que la pregunta les hace reflexionar sobre el sentido de la imagen de la función en términos del alargamiento, aunque no sabemos si lo que le hace explicar que no tiene sentido es el signo del número, el valor de este o ambos.

Ítem 9. Por último, tenemos que en el ítem 9 los alumnos obtienen cuál es el alargamiento del muelle para 4 canicas substituyendo x por el valor de 4 y usando la app Free GraCalc como calculadora. En este caso, indican que el resultado obtenido no tiene sentido “porque una canica pesa más de 1 gramo y si hay 4 canias, debería alargarse más”. Es decir, los alumnos se basen en la concepción que tienen del fenómeno (cuál es el peso de cada canica, cómo es la elasticidad del muelle, etc.) y no en la función en sí para hacer tal afirmación. Cabe destacar también que, a pesar de que la función que han considerado les da la distancia del vaso al suelo, ellos consideran que lo que da es el alargamiento del muelle.

En cuanto al apartado b), indican que el alargamiento del muelle será mínimo “cuando no haya ninguna canicas en el vaso” y máximo “cuando el muelle toque al suelo” pero no realizan ningún cálculo.

Para finalizar, les preguntamos si podrían calcular la distancia al suelo cuando el vaso tiene 4 canicas y afirman que "cada 2 canicas se alarga 1cm. Si ponemos 4 canicas se alargará 2cm" volviendo a explicar la relación entre el número de canicas y el alargamiento, no la distancia, además de que se basan en la hipótesis que han formulado en el análisis cualitativo, no en los datos concretos de su experimento. En cuanto la función obtenida para estudiar dicha relación, explican que "la a de la función sería positiva" (refiriéndose a la a de la forma canónica $y = ax + b$), y haciendo tal afirmación probablemente porque ven que la distancia aumenta cuando el alargamiento disminuye y viceversa, por lo que la recta estaría girada en el otro sentido, tal como ellos la conciben en el ítem 6, por lo que si a ahora era negativa, para estudiar la otra relación debería ser positiva.

4.3.3.2. Por ítems

A continuación, realizamos un análisis desde el punto de vista de los tipos de actuaciones observadas en las diferentes parejas relativas a los diferentes ítems. Haremos referencia a cada una de las tablas correspondientes cuando abordemos cada ítem.

<u>Ítem 1</u> (Anexo 17, Tabla 17.1)

En cuanto a la descripción que hacen los alumnos en el apartado a) tenemos que la mayoría de ellos (todos menos los alumnos de la pareja 2) no describe la relación en detalle comparándola con el fenómeno sino que se limitan a comentar que la relación entre las variables estudiadas es directamente proporcional, a más canicas mayor será el alargamiento del muelle, sin decir qué tipo de relación es. En esta descripción, hay algunos alumnos que hacen referencia a una tercera variable (alumnos parejas 5, 6 y 7) y que hemos denominado como "auxiliar" que es el peso ya que explican que cuantas más canicas, mayor será el peso del vaso y, por consiguiente, mayor será el alargamiento del muelle. Además, también hemos observado que todos los alumnos (menos los de la pareja 2) describen el fenómeno en un intervalo en el que esta se comporta de forma uniforme. No obstante, los alumnos de la pareja 2 añaden que no siempre será así ya que "llegará un momento en el que el muelle no se podrá deformar más porque habrá llegado a la máxima deformación posible", considerando que el comportamiento del muelle puede verse afectado por un factor externo: "la capacidad de deformación".

En cuanto al apartado b), tenemos que la mayoría de alumnos ven que la mejor forma de expresar la relación entre las variables estudiadas es mediante una función (todos menos los de la pareja 5 y la 3, aunque los de la pareja 7 que sí que dibujan unos ejes tampoco son capaces de encontrarla). No obstante, no todos representan la relación entre las variables estudiadas ya que algunos consideran el peso o la masa en vez del número de canicas (parejas 6 y 7), o la longitud, la altura o la deformación en vez del alargamiento (parejas 2 y 4), aunque es cierto que en algunos casos les dan nombres distintos pero les atribuyen el mismo significado que las variables originales. Por lo que respecta a la forma de la gráfica, hemos observado de los alumnos dibujan tres tipos de gráficas diferentes: en forma de línea recta creciente (parejas 1, 6 y 8), en forma de línea curva creciente que se estabiliza (pareja 2) y en forma de gráfica escalonada creciente (pareja 4). Los primeros dibujan una línea recta porque parece que conciben las magnitudes estudiadas como directamente proporcionales sin pararse a pensar si tiene sentido esto en términos del fenómeno estudiado, es decir, si tiene sentido considerar que el número de canicas es una variable que puede tomar valores reales positivos y cero. Por otro lado, tenemos los que dibujan la gráfica como una curva creciente que se estabiliza, cosa que hacen ya que consideran que conforme vaya pasando el tiempo, debido a la elasticidad propia del muelle, este no se alargará tanto y llegará un momento en el que se rompa. Y, por último, tenemos los que representan una función escalonada creciente, que conciben que el muelle no se alarga hasta que no se introduce la siguiente canica (considerada como una unidad o número natural), aunque realmente no representan esto sino que la variable "número de canicas" toma valores en todos los reales de modo que cuando el vaso contiene m canicas siendo m cualquier valor real entre n y $n+1$ con n número natural, el alargamiento del muelle es igual al de $n+1$ canicas, por lo que al dibujar segmentos parece que implícitamente estén considerando la variable tiempo o peso de las canicas en la gráfica puesto que, en vez de dibujar una gráfica formada por puntos dibujan rectas simbolizando que el muelle no se vuelve a alargar hasta que se le introduce una nueva canica. Solo los únicos alumnos que hacen referencia al hecho de que el experimento no tendría sentido infinitamente ya que llegaría un momento en el que se rompería el muelle son los de la pareja 2.

Con respecto a los valores que puede tomar cada variable, cabe destacar que hemos observado una idea generalizada de que el alargamiento del muelle, también la "deformación" como lo llaman la pareja 2 o la "altura" como lo hacen los de la pareja 4, es siempre positivo y cero cuando no se le ha introducido ninguna canica en el vaso.

<u>Ítem 2</u> (Anexo 17, Tabla 17.2)

En cuanto al segundo ítem tenemos que todos los alumnos han sido capaces de representar una gráfica para describir la relación estudiada. No obstante, como ya habíamos observado en el ítem anterior, algunos no representan las variables que hay que estudiar sino otras: en vez del número de canicas, el peso o la masa (pareja 1, 4, 5, 6, 7) y en vez del alargamiento, la longitud (parejas 3 y 5) o la altura (pareja 4). Aunque, como hemos comentado en el análisis por alumnos, que los alumnos afirmen que están estudiando estas variables no implica que no estén estudiando otras sino que las usan como sinónimos. En concreto, como podemos ver en la Tabla 17.2, todos los alumnos usan como segunda variable el alargamiento del muelle menos los de la pareja 3 que interpretan que tienen que estudiar la longitud en vez del alargamiento y así lo hacen también cuando toman las referencias en Video Physics. Los de la pareja 4 usan el término altura como sinónimo de alargamiento, como indican posteriormente en el apartado a) del ítem 4.

En cuanto a la forma de la gráfica, de nuevo hemos observado tres tipos de respuestas, los que representan: una línea recta creciente (parejas 1, 5, 6, 7 y 8), una línea curva creciente que se estabiliza (pareja 2) y una función escalonada creciente (parejas 3 y 4). En este caso, hemos observado que parece que los primeros dibujen una línea recta por tres motivos: 1. porque no se paran a pensar que uniendo los puntos representados están considerando que el número de canicas puede tomar valores reales; 2. porque consideran las magnitudes "número de canicas" y "peso de las canicas" como equivalentes (parejas 1, 6 y 7) y, por tanto, estudian la relación entre el peso y el alargamiento y ven que la variable peso, al medirse en gramos, será continua[30]; 3. porque hacen uso de esta variable en ambos sentidos, es decir, ven que representa "número de canicas" y "peso" a la vez ya que la usan como "número de canicas" para

[30] Hay que destacar que, aunque los alumnos consideren la variable x como "peso de las canicas", la gráfica de la relación estudiada no debería ser exactamente continua puesto que la variable tomaría valores reales positivos pero su dominio no serían todos los reales positivos, sino solo aquellos valores reales positivos que equivalen al peso de las canicas introducidas en el vaso (0, 1, 2...).

representar los puntos sobre la gráfica, pero después se refieren a esta variable como "peso de las canicas" y unen los puntos representados mediante una recta puesto que al concebirla como "peso" que se mide en gramos, podrá tomar valores reales también. Por otro lado, os alumnos de la pareja 2, que dibujan de nuevo una gráfica que es una curva creciente que se estabiliza, copian aquella que habían representado en el ítem anterior. Y, por último, los alumnos que dibujan una función escalonada creciente lo hacen puesto que parece que consideren la variable tiempo o peso de las canicas de forma implícita (como ya hemos explicado antes) ya que no dibujan puntos sino rectas. Además, cabe destacar que, debido a que no hay restricciones en el enunciado del experimento que se plantea estudiar, la mayoría de alumnos lo interpretan como en un intervalo en el que se comportaría de manera uniforme. No obstante, los alumnos de las parejas 2 y 8 consideran que la relación estudiada no será lineal siempre puesto que poco a poco el muelle se irá deformando menos (pareja 2) o que llegará un momento en el que el vaso tocará el suelo (pareja 8).

En referencia al uso de valores concretos, de nuevo vemos que hay alumnos que hacen uso de estos (aunque no escriban los números en sí) no solo para ayudarse a representar la función (parejas 5 y 8) sino también para indicar qué referencia toman (pareja 3, que indican que el origen es el origen de coordenadas).

Por último, cabe señalar que la mayoría de alumnos dibuja la gráfica partiendo del origen de coordenadas, independientemente de la forma que representen. Esto se debe a que, tal como explican ellos, cuando el vaso no tiene canicas, el muelle no se ha alargado o tiene una longitud cero. Solo los alumnos de la pareja 3 representan funciones que no pasan por el origen de coordenadas y porque han tomado como variable dependiente la longitud, por tanto, consideran que inicialmente el muelle tendrá una longitud inicial.

<u>Ítem 3</u> (Anexo 17, Tabla 17.3)

En este ítem les pedíamos a los alumnos que eligieran la familia de funciones que mejor ajustara a la gráfica. Por ello, hemos considerado interesante incluir en la Tabla 17.3el tipo de gráfica que representan ya que esto condicionará el tipo de familia de funciones que elijan. En general, podemos observar que los alumnos de las parejas 1, 6 y 7 que dibujan rectas eligen la función $y = ax$; la pareja 5, $y = ax + b$ porque tienen forma de recta y la pareja 8 $y = a/x$ porque consideran que si se introducen n canicas en el vaso con n natural, el muelle se estira $n/2$ cm. Por otro lado, los de la pareja 2 que dibujan una curva creciente que se estabiliza eligen la logarítmica, fijándose en la forma de la gráfica pero sin tener en cuenta que la función logarítmica no se estabiliza cuando crece y según han explicado, el muelle llega un momento en el que para de crecer. Por último, tenemos que los alumnos de la pareja 4, que dibujan funciones escalonadas crecientes, conciben que la familia de funciones será $y = ax$ porque solo consideran los puntos que toma cada valor natural para x en la gráfica que han dibujado anteriormente y, uniéndolos se obtiene una recta. En cambio, no todos parece que se hayan fijado en la relación entre gráfica y fórmula para elegir la fórmula de la familia de funciones, sino en la interpretación de la fórmula en relación con el fenómeno. Nos referimos al caso de los alumnos de la pareja 3 que eligen la familia de funciones $y = ax$ y explican que "y aumenta en relación al número de canicas con la longitud", tratando de dar sentido a las letras que aparecen en la fórmula en relación con el fenómeno y, por tanto, relacionando fórmula con fenómeno sin interpretar la gráfica.

En cuanto al valor que le otorgan a los parámetros tenemos que la mayoría de alumnos consideran $y = ax$ pero no $y = ax + b$ porque las ven como familias de funciones disjuntas, por el hecho de que ven que al aparecer el parámetro b, este será distinto de cero. Solo los alumnos de la pareja 5 eligen $y = ax + b$ porque consideran que esta es la fórmula general para la recta, aunque en su caso b sea 0. Además, la mayoría son capaces de asociar a b distinto de cero, aunque sea de forma el significado de que la gráfica no pasa por el origen de coordenadas. Solo los alumnos de las parejas 1, 4 y 6 son capaces de asociar un significado correcto al parámetro a, los de las parejas 1 y 4 en relación con la pendiente de la recta y los de la 6 en relación con el fenómeno ya que explican que el parámetro "aumenta la longitud del muelle", refiriéndose al alargamiento.

Ítem 4 (Anexo 17, Tabla 17.4 y Anexo 20, Tablas 20.1 y 20.2)

Cabe destacar que hay algunos alumnos que marcan los puntos cuando el vaso no tiene canicas (parejas 1, 2, 3, 4, 7 y 8) y otros que lo hacen cuando ya han introducido una canica (parejas 5 y 6), cosa de lo que deberán ser conscientes posteriormente para ser coherentes. Además, de las respuestas observadas hemos detectado que los alumnos marcan los puntos en dos sitios: en la parte baja del muelle y en la base del vaso, aunque los argumentos a los que aluden para justificar sus respuestas son bien distintos. Por un lado, en las respuestas de los que deciden marcar los puntos en la parte baja del muelle parece que subyace la idea de que es desde aquí desde donde se alarga el muelle (parejas 2, 4 y 7). Por otro lado, los que lo hacen en la parte baja del vaso parece que lo hacen considerando el vaso como una prolongación del muelle de modo que calcularan cómo se alarga el muelle desde aquí (parejas 1, 3, 5, 6 y 8), aunque los motivos que dan son variados ya que encontramos por ejemplo los de la pareja 5 que dicen que lo hacen aquí porque es donde se concentra el peso (y para ellos esta es la variable estudiada), o los de la pareja 1 que añaden que de este modo podrán conocer la medida del vaso.

En cuanto a los ejes de coordenadas, encontramos también variedad en las respuestas de los alumnos. Estos los fijan en el listón desde donde cuelga el muelle (pareja 3), en la parte baja del muelle (pareja 2), en la parte baja del vaso (parejas 1 y 6), en el último punto marcado (parejas 4 y 5) y en el extremo inferior de la pata de la mesa (parejas 7 y 8). A diferencia del experimento anterior, en este los alumnos ya parece que son conscientes de que la forma en la que tomen las referencias influirá en los valores que tomen las variables posteriormente, aunque los motivos que dan algunos no lo reflejen tanto (como por ejemplo los de la pareja 5 que indican que fijan el eje OX en el último punto ya que es donde más se acerca el vaso al suelo). En cambio, aunque sean conscientes de que esto influirá posteriormente parece que no lo sean tanto de cómo influirá. Esto es, hay alumnos que no tienen en cuenta el funcionamiento de la app para tomar las referencias o no saben cómo funciona, como los de las parejas 4, 5, 7 y 8, que al fijar la referencia en el último punto (parejas 4 y 5) o en el extremo de la silla (parejas 7 y 8) consideran como variable y: $d_{p,x} - A$, donde $d_{p,x}$ es la distancia del primer punto marcado al eje OX y A lo que sería el alargamiento, visto como cantidad positiva siempre y cero inicialmente. No obstante, algunos sí que parecen tener en cuenta cómo funciona la app para tomar las referencias, como los alumnos de las parejas 1, 3 y 6 que dicen que al fijarlas así el alargamiento tomará valores negativos o los de la pareja 2 que lo fijan de modo que el alargamiento obtendrá valores negativos pero que después al operar sobre ellos harán que este sea positivo. Es más, hemos observado que algunos de ellos concebían el problema de otro modo pero, al considerar cómo funciona la app, han tenido que adaptarse a esta y cambiar el modo de ver el problema para solventarlo y/o el modo de concebir la variable. En concreto, los alumnos de las parejas 1 y 3 tratan de conseguir que la parte positiva del eje OY esté abajo girando los ejes OY sin éxito, por lo que acaban dejándolos en su posición habitual asumiendo que el alargamiento del muelle será negativo. O los de la pareja 6 que fijan el eje en el primer punto marcado asumiendo desde un principio que no hay forma de fijarlos para que la variable alargamiento sea positiva y vaya aumentando conforme añadimos canicas.

Con respecto a la medida de referencia, todos toman la pata de la silla e introducen que la medida es 0,75m o 0,8m, aunque de los que introducen 0,75m en algún caso la app muestra 0,8m porque redondea el número a una cifra decimal.

Por último, en el último d) apartado les preguntamos si de las representaciones gráficas que muestra la app Video Physics, hay alguna que muestre la relación estudiada. Aunque la mayoría de ellos indica que no, algunos dicen que sí y que es la gráfica que relaciona tiempo con y, ya que se fijan en la forma de esta que es una línea recta. Por ello, tratan de dar sentido a que en la gráfica aparezcan estas variables en vez de las que supuestamente deberían estudiar encontrando una relación entre estas para poder justificar su respuesta. En concreto, indican que "x representa las canicas, aunque por valores del vídeo, está representada por el tiempo" (pareja 3) o "porque los metros dependen del tiempo cuando introduces la canica" (pareja 6). También hay otros alumnos, los de la pareja 4, que afirman que la gráfica es esa pero que ellos no la ven así, ya que para ellos sería discontinua y tendría forma escalonada, es decir, se basan en la gráfica que han dibujado cuando analizaban cualitativamente el fenómeno.

Ítem 5 (Anexo 17, Tabla 17.5 y Anexo 20, Tabla 20.2)

En este ítem, a diferencia del ítem 5 de la lección anterior, los alumnos tenían que construir las coordenadas de los puntos.

Con respecto a la primera coordenada tenemos que la mayoría de alumnos son coherentes con cómo han tomado las referencias en Video Physics y aquellos que marcan el primer punto cuando no había canicas en el vaso, consideran como primera coordenada 0 y aquellos que lo hacen cuando el vaso tenía 1 canica, consideran como primera coordenada el 1. No obstante, los alumnos de la pareja 1 consideran como variable x el tiempo en vez del número de canicas y los de la pareja 2 consideran el número inicial de canicas 1 a pesar de que empiezan marcando los puntos cuando el vaso no contiene canicas.

En segundo lugar, para los valores relativos a la segunda coordenada hemos elaborado una tabla (Tabla 20.2) en la que aparece una categorización según qué valores han considerado para esta coordenada los alumnos. En la tabla aparecen: las parejas de cada categoría (fila 1), los diagramas que muestran como han tomado las referencias estas parejas[31] (fila 2), los valores que obtienen para la variable y en Video Physics dados a partir de una fórmula (fila 3) y los valores que toman como y en el ítem 5 dados a partir de una fórmula (fila 4). En dichas fórmulas hemos denotado por A lo que sería el alargamiento (cantidad positiva siempre y cero inicialmente), con l_m la longitud del muelle inicialmente (distancia en línea recta desde lo alto del muelle hasta la parte más baja de este inicialmente), con l_v la longitud del vaso y con $d_{p,x}$ la distancia del primer punto marcado hasta el eje de las x. Por tanto, siguiendo la tabla tenemos que los alumnos del caso 1 (parejas 1 y 6) consideran la segunda coordenada como el alargamiento negativo, los del caso 2 (pareja 2) como la variable alargamiento en sí[32],

[31] En los diagramas para los casos de las parejas 4, 5, 7 y 8 no hacemos distinción entre si fijan el eje OX en el último punto (parejas 4 y 5) o si lo hacen en la base de la pata de la silla (parejas 7 y 8).

[32] No obstante, a pesar de que los alumnos de la pareja 2 realizan operaciones para obtener el alargamiento positivo, tampoco lo consiguen puesto que cambian todos los valores de signo menos el primero que ya era positivo.

los del caso 3 como el alargamiento más la longitud del muelle y del vaso pero con valores negativos y los del caso 4 (parejas 4, 5, 7 y 8) como la distancia del punto al eje OX.

Por último, tenemos que ninguno de los alumnos es capaz de calcular la fórmula de la función que ajustaría a los puntos obtenidos sin usar ninguna app.

Ítem 6 (Anexo 17, Tablas 17.6a y 17.6b)

En relación con el tipo de función que los alumnos consideran que ajustará a los puntos tenemos que todos indican que será una lineal, por lo que algunos alumnos cambian de tipo de función con respecto a la que habían considerado en el análisis cualitativo realizado previamente. No obstante, la mayoría explica por qué ha considerado esta función después de haber ajustado la función, por lo que los motivos que dan no son por qué piensan que la función es lineal, sino por qué ajusta esta función a los puntos o cómo la han podido encontrar. Solo los alumnos de la pareja 2 indican que es lineal porque consideran un fenómeno más restringido que antes (refiriéndose a su respuesta al ítem 2). El resto, o no justifica su respuesta o lo hace haciendo alusión a la representación gráfica de esta en Desmos.

Por otro lado, cabe destacar también que todos son capaces de encontrar la fórmula cuya gráfica ajusta a los puntos pero ahora sin necesidad de pedir la hoja de ayuda (solo lo hicieron las alumnas de la pareja 1). Además, algunos de los alumnos usan la forma canónica $y = ax$, los de las parejas 1, 2 y 6 que por cómo toman las referencias el alargamiento inicial del muelle será cero; y el resto usan $y = ax + b$, con a y b parámetros. En cuanto al significado de estos, hemos observado que existe variedad en el tipo de significado que les atribuyen, probablemente debido a que los alumnos ya habían estudiado esta función ampliamente en cursos previos en esta forma canónica[33] y, al estudiarla desde otro punto de vista y con el uso de apps, puede que haya cambiado la forma en la que los conciben de modo que ahora son capaces de otorgarles otro tipo de significados además de los mencionados en el ítem 3. Cabe destacar que, con ello, no estamos afirmando que ahora los vean de otra forma distinta a la anterior ni asegurando que antes no les otorgaran este significado, sino que puede que ahora sean capaces de verlos de otras formas distintas, reelaborando la definición que tenían anteriormente. Concretamente, definen el parámetro a como aquel que cambia la orientación de la gráfica o la gira (significado dinámico) o como la pendiente de la recta (significado estático). Además, destaca que hay alumnos (parejas 1, 4, 5 y 7) que explican su significado diferenciando entre el signo de este (que lo ven como aquello que indica la orientación de la gráfica e indicando que si este es negativo, la recta será decreciente y si es positivo, creciente), y su valor absoluto (que indica el grado de inclinación de la recta., probablemente por la influencia de las preguntas que les hacíamos en la lección 2 para guiarles en la búsqueda de la función que ajustara a los puntos ya que les preguntábamos por separado. Por otro lado, algunos indican que el parámetro b nos da el punto de corte con el eje OY, asociándole un significado de característica concreta de la gráfica, y otros que ven que este hace que la gráfica se mueva en la dirección del eje OY, hacia arriba y hacia abajo.

[33] En cursos previos los alumnos estudian la función lineal como una función de la forma $y = mx + n$ cuya representación es una recta de pendiente m, y de modo que n indica la ordenada al origen, tal como figura en el currículo.

Ítem 7 (Anexo 17, Tabla 17.7)

En este ítem les pedimos a los alumnos que construyan una tabla de valores en Graphical Analysis de modo que cada columna represente una de las dos variables cuya relación deben estudiar para, después de realizar una serie de acciones con la app, obtener la fórmula de la función que ajusta a estos puntos y compararla con la que ya han obtenido en el ítem anterior. Hemos observado que, la mayoría de alumnos construyen la tabla de valores considerando los mismos valores que en Desmos, es decir, la primera variable el número de canicas y la segunda la misma variable considerada para el "alargamiento" en Demos, por lo que ambas funciones serían comparables. No obstante, esto no sucede en todos los casos. Los alumnos de la pareja 1 consideran como primera columna la variable tiempo en Desmos pero en Graphical Analysis se dan cuenta de que esta variable no es la que tenían que estudiar y consideran el número de canicas. Otros alumnos que tampoco consideran la misma variable en Desmos que en Graphical Analysis son los de la pareja 2 que se dan cuenta de que el valor para la primera coordenada es 0 por cómo han tomado las referencias en Video Physics, y no 1 a la hora de definir las coordenadas de los puntos en el ítem 5. En cuanto al tipo de función elegida, tenemos que hay alumnos que eligen la fórmula del ítem 6 (pareja 4 y 7), otros que eligen la del ítem 7 (parejas 1, 5, 6 y 8) y otros que indican que las dos fórmulas son iguales o semejantes (parejas 2 y 3) y, aunque no eligen ninguna de las dos, en el ítem 8 usan la del 7. Además, cabe destacar que unos se basan en comparar las funciones gráficamente (parejas 1, 2, 5 y 8) y otros en comparar las fórmulas (parejas 3 y 4).

Ítem 8 (Anexo 17, Tabla 17.8)

Lo primero que cabe destacar es que la mayoría de alumnos eligen la función del ítem 7 (todos menos los de la pareja 4 que ya indicaban antes que para ellos se aproximaba más la del ítem 6), y usan la fórmula de la función para calcular las coordenadas de los puntos que les pedimos.

En cuanto al apartado b), les preguntamos a los alumnos el significado que tiene lo que han calculado en términos del fenómeno estudiado. Por ello, la mayoría de alumnos dan como respuesta el significado de las variables x e y en relación con este, menos los alumnos de la pareja 6 que explican que "cada coordenada va referida a un valor en la tabla" o los de la pareja 8, que responden haciendo alusión a la relación entre las variables x e y sin mencionar el fenómeno. En concreto, de los que hacen referencia al fenómeno, todos indican que la variable x representa el número de canicas mientras que para la variable y tenemos que: los alumnos de las parejas 1, 2 y 7 indican que representa el alargamiento, los de las parejas 3 y 5 la longitud del muelle y los de la pareja 4 la altura hasta el suelo[34].

Del apartado c) tenemos que la mayoría de alumnos considera que las respuestas obtenidas en el apartado a) no muestran lo que verdaderamente ocurre (aunque sí los hay que afirman que sí que tienen sentido las respuestas, pero bien porque se fijan solo en la función sin relacionarla con el experimento, como las parejas 4 y 6, o bien porque no relacionan el significado de los valores concretos de x e y, como la pareja 5). Cabe destacar que aquellos que afirman que los datos no tienen sentido se basan en el dominio de la función, aunque algunos no solo se basan en el dominio sino también en

[34] Cabe destacar que, el hecho de que haya parejas de alumnos que usen el mismo nombre para designar una variable deterimada no implica que les otorguen el mismo significado, cosa que comentaremos más adelante en detalle.

el recorrido. En concreto, los que hacen referencia al dominio indican que no tiene sentido obtener -1 canicas por ser un valor negativo (parejas 1, 2, 3, 7 y 8), que tampoco tiene sentido considerar 2,5 canicas por ser decimal (parejas 1, 7 y 8) y/o que tampoco lo tiene considerar 100 canicas porque no cabrían en el vaso, no porque en su experimento estudien hasta 8 canicas (parejas 7). Por otro lado, de los que hacen referencia, además de al dominio, a los valores obtenidos para las imágenes, explican que no tiene sentido calcular f(-1) = -0,02 por ser la imagen negativa (pareja 2) y que no pueden haber 100 canicas porque la longitud total es de -0,75m (considerando la longitud negativa) y el valor que da la imagen de 100 es -2.45m que, en términos de valores absolutos, es mayor (pareja 3).

Por último, en el apartado d) tenemos que todos los alumnos, menos los de la pareja 6, afirman que la función no puede ayudar a predecir lo que pasa para valores muy grandes de canicas, basando su afirmación, ahora sí, en el recorrido de la función. En concreto, hay alumnos que aluden al hecho de que llegará un momento en el que el vaso tocará el suelo y por tanto esta función no podría predecirlo (parejas 1, 3 y 5) y otros a que llegará un momento en el que el muelle se romperá y la función sería constante (parejas 2, 4 y 7). Por tanto, parece que la pregunta del apartado d) les hace reflexionar sobre los valores que puede tomar la variable y en relación con el experimento.

Ítem 9 (Anexo 17, Tabla 17.9)

En relación con el apartado a) tenemos que todos los alumnos usan la fórmula de la función para calcular el valor del alargamiento del muelle para 4 canicas, es decir, calculan $f(4)$, independientemente de cómo hayan tomado las referencias en Video Physics[35]; solo los alumnos de la pareja 4 calculan el valor del alargamiento haciendo $f(0) - f(4)$, tratando de ser coherentes con cómo han tomado dichas referencias. Además, les preguntamos si piensan que estas respuestas tienen sentido para tratar de averiguar en qué se basan y si son coherentes con lo que han considerado en su experimento. Tenemos que la mayoría de alumnos afirman que sí que tiene sentido el valor obtenido para el alargamiento. De estos, hay alumnos que lo afirman siendo conscientes de qué variable han considerado para y (parejas 1, 2, 3 y 4) y otros que no lo son (pareja 7). Además, de los que responden que no tiene sentido el valor obtenido para 4 canicas (parejas 5 y 8) observamos que tampoco parecen ser conscientes de que lo que les da la variable y está condicionado por cómo toman las referencias en Video Physics, no en cómo piensan que es el alargamiento. En concreto, estos hablan de alargamiento cuando ellos lo que han considerado ha sido la distancia del vaso al último punto (pareja 5) o del vaso al suelo (pareja 8). Los primeros explican que el valor obtenido no corresponde al alargamiento para 4 canicas puesto que debería haberse alargado más. Los primeros hacen tal afirmación basándose en la longitud del muelle en el vídeo del experimento, por lo que parece que consideren el alargamiento del muelle como la longitud en este caso. Los segundos porque piensan que el valor del alargamiento será igual al valor del peso de las canicas, que han considerado mayor de 1 gramo, por lo que el alargamiento debería ser mayor de 4.

[35] Como comentaremos en el resumen de resultados, algunos alumnos no son conscientes de cómo influye la forma en la que han tomado las referencias en Video Physics (parejas 5, 7 y 8), otros sí que lo son y consideran el alargamiento en sí (pareja 2) y otros son conscientes pero, a pesar de que lo que consideran no es el alargamiento como cantidad que vale cero inicialmente y es positiva siempre, sí que son coherentes a la hora de interpretar esta variable por el hecho de ser conscientes del significado de cómo han tomado las referencias en Video Physics (parejas 1, 3 y 4).

Por lo que respecta al apartado b) tenemos que todos los alumnos indican que la longitud mínima del muelle se obtendrá cuando el vaso no contenga canicas (incluso afirman esto los alumnos que marcan el primer punto cuando el vaso contiene una canica). En cuanto a los valores de la longitud, hemos observado que hay alumnos que la calculan haciendo $f(0)$ (alumnos pareja 3, 5 y 7) pero hay otros que no lo calculan bien porque consideran que no tienen datos para hacerlo o bien porque responden basándose en su idea general de cómo es el experimento estudiado (parejas 2, 4, 6 y 8). Hay que destacar que las alumnas de la pareja 1 parece que se basen en su idea general del fenómeno ya que afirman que la longitud inicial del muelle será cero, sin pensar en su experimento concreto y, al parecer, confundiendo alargamiento del muelle con longitud. Por otro lado, en cuanto a la longitud máxima del muelle, tenemos que los alumnos indican que esta se alcanzará cuando se introduzcan 8 canicas en el vaso (parejas 2, 4 y 7) o 9 (pareja 7, probablemente porque se han confundido y no recuerdan bien que eran 8 canicas el máximo en su experimento). Sin embargo, a pesar de que su experimento se realiza para 8 canicas, hay otros alumnos que indican que esta longitud se alcanzará cuando el vaso toque el suelo (parejas 1, 6 y 8). En relación con el valor para la longitud, hay alumnos que lo calculan haciendo $f(8)$ o $f(9)$ (parejas 2, 5 y 7), otros que no lo calculan, probablemente porque son conscientes de que por como toman referencias no pueden hacerlo y otros que no lo calculan porque han considerado que esta longitud se alcanza cuando el vaso toca al suelo (pareja 4) y no tienen datos tampoco (parejas 1, 6 y 8). Además, podemos observar que en este ítem hay alumnos que consideran la longitud como sinónimo de alargamiento (parejas 1, 2, 3, 5 y 7). No obstante, los únicos que, por cómo han tomado las referencias, tendría sentido que lo hicieran son los alumnos de la pareja 3 ya que toman las referencias en Video Physics para que así sea. Destaca también el caso de la pareja 2 que parecen ser conscientes de que ellos no toman como referencia la longitud del muelle sino el alargamiento al afirmar que la longitud mínima del muelle será la propia de este y no calcularla por no tener datos. No obstante, cuando les preguntamos por la longitud máxima substituyen el valor de la variable independiente en la fórmula por 8, considerando así que alargamiento y longitud son equivalentes.

Por otro lado, en cuanto al apartado c), les preguntamos si piensan que podrán calcular la distancia del vaso al suelo cuando hemos introducido 4 canicas en el vaso. Por cómo han tomado las referencias los alumnos en Video Physics y como han considerado la función, solo la función de las alumnas de la pareja 8 proporcionará la distancia del vaso al suelo cuando x sea 4. No obstante, parece que estas se basen más en cómo conciben que es la función (que por cada canica introducida en el vaso, el muelle se alarga la mitad) que en cómo han tomado realmente las referencias. De hecho, conciben que lo que les da la función es el alargamiento. Tenemos que solo las alumnas de la pareja 1 indican que no pueden calcular la distancia al suelo porque no pueden fijar las referencias como quieren en Video Physics, el resto de parejas indican que sí (aunque los de la 4 explican que en su experimento no lo podrían hacer por cómo han tomado las referencias en Video Physics). Por otro lado, de las parejas que afirman que pueden calcular dicha distancia, tenemos que los alumnos de la pareja 2 explican en general que lo harían restándole a la distancia del listón al suelo la longitud inicial del muelle y el alargamiento, los de la pareja 3 que sería restándole la distancia total al alargamiento para 4 canicas dado por la función, los de la pareja 5 indican que no sabrían cómo hacerlo y los de la 6 dicen que sería midiendo en Video Physics pero tampoco calculan el valor ni explican cómo lo harían.

Por último, tenemos que en el apartado d) les pedimos que expliquen cómo creen que cambiaría la función si en lugar de estudiar la variable alargamiento del muelle estudiáramos la distancia. En primer lugar, muchos de los alumnos parece que conciben que cambiaría la orientación de la recta que representaría la relación, esto es, que si en la relación entre número canicas y alargamiento esta es creciente, si estudiáramos la relación entre número de canicas y distancia al suelo sería decreciente, o viceversa. Parece que esta idea es la que tienen la mayoría de ellos ya que algunos indican que la nueva función sería descendiente o con pendiente negativa (alumnos parejas 1, 2 y 4) y otros, que parece que no son conscientes de que su función no mide el alargamiento ni es decreciente, indican que sería del tipo $y = x$ o que a sería positiva, probablemente considerando que en este caso el valor que multiplica a x sería positivo porque hasta ahora era negativo (alumnos parejas 5 y 8). Por último, tenemos los alumnos que hacen referencia a otro tipo de aspectos. Los de la pareja 3 por ejemplo indican que deberían fijar el eje OX en otra posición en Video Physics para poder estudiar dicha relación, los de la pareja 6 que la función sería muy similar porque en realidad el experimento es el mismo, y los alumnos de la pareja 7 que indican que los valores serían mayores para la distancia que los obtenidos para el alargamiento en este experimento.

4.3.3.3. Resumen de resultados

Al igual que en la lección anterior, en este apartado incluimos un resumen de los resultados observados a lo largo del experimento del muelle y que no se incluyen ni en los resultados presentados alumno por alumno relativos a cada item ni en el resumen de los resultados presentados de cada uno de los ítems.

Antes que nada, hay que destacar que, debido al funcionamiento de la app Video Physics, que obliga a los alumnos a que elijan dónde tomar las referencias (el lugar donde marcan los puntos y dónde fijan los ejes), y al hecho de que no impone muchas restricciones sobre cómo tomarlas[36], en algunos de los resultados obtenidos apareceran un gran número de casos diferentes, que presentaremos tratando de agruparlos de la forma en la que consideremos más relevante para la investigación.

<u>Efecto del análisis cualitativo en la gestión y el control del proceso de modelización</u>

Hemos observado que, al igual que en el experimento de la pelota, en el del muelle el análisis previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones influye no solo en la gestión y el control del proceso de modelización una vez han tomado los datos los alumnos, sino también durante la realización del propio estudio cualitativo. Por ello, a continuación explicamos de qué forma influye este en cada uno de estos momentos.

Por un lado, tenemos que durante el análisis cualitativo previo, los alumnos se basan en lo que hacen en ítems anteriores para responder. En particular, hemos observado que para elegir la fórmula de la familia de funciones que mejor representará el fenómeno estudiado en el ítem 3, la mayoría de alumnos se basan en la forma de la función que han representado gráficamente en ítems anteriores y también en la posición. Por ejemplo, los alumnos de las parejas 1, 2, 3, 4 y 5 que representan rectas eligen la fórmula $y = ax + b$ o $y = ax$, dependiendo de si la gráfica que han representado pasa por el origen de coordenadas y de si conciben que el parámetro b puede tomar el valor 0 o no. También podemos observar esto en los alumnos de la pareja 2 que, debido a que representan una curva que tiende a estabilizarse (ya que ven que al aumentar el número

[36] Una restricción podría ser el hecho de que la app no permite que se giren los ejes de coordenadas 360° sino solo 90° en sentido horario o antihorario.

de canicas llegará un momento en el que el muelle no se estire más), eligen la fórmula de la familia de funciones logarítmica porque conciben que esta cumple esta propiedad (como afirma el alumno 2.1 durante la entrevista que le realizamos y que se describe en el capítulo siguiente).

Por otro lado, como decíamos, hemos observado que este análisis de las propiedades cualitativas que realizan los alumnos previamente influye *a posteriori* en la gestión y el control que hacen los alumnos del proceso de resolución una vez ya han tomado los datos. En particular, hemos observado que parece que los alumnos se basen en este estudio previo a la hora de decidir qué función representará mejor el fenómeno. En concreto, tenemos que en el ítem 4 les preguntamos a los alumnos si, de las gráficas proporcionadas por Video Physics después de tomar las referencias, hay alguna que represente la relación estudiada. Por ello, hay alumnos que inicialmente indican que sí, que sería la que representa la relación entre “time(s)” y “Y(m)” puesto que tiene forma de recta como la gráfica que ellos representan en el estudio cualitativo. No obstante, en este caso los alumnos no solo deben fijarse en el análisis cualitativo ya que en ese caso podrían caer en errores. Por ejemplo, tenemos que al interpretar el significado de las variables relacionadas en dicha gráfica hay alumnos que deciden descartarlas (los de las parejas 1 y 5) ya que, a pesar de tener la forma que creen que debería tener (porque tiene una forma similar a la que ellos dibujan: de recta), no relaciona las variables que están estudiando (alumnos parejas 1 y 5). En cambio, hay otros (los de la pareja 6) que por fijarse solo en la forma de la gráfica no se dan cuenta de que esta no sería correcta.

Además, también hemos observado que los alumnos se basan en el estudio cualitativo realizado cuando les pedimos que representen los puntos en la app Desmos para tratar de buscar una función que ajuste a estos, ya que hay algunos alumnos que copian alguna coordenada mal (alumnos pareja 2), por lo que la gráfica no tiene la forma esperada (que sería la que representan en los ítems 1 o 2 de la lección), cosa que les hace revisar los datos y corregir las coordenadas que habían copiado mal. Del mismo modo, esto sirve para validar las respuestas en el caso de los alumnos que conciben la relación estudiada como proporcional directa ya que, al representar los puntos y ver que tienen “forma de recta”, se aseguran de que lo que están haciendo es correcto. No obstante, esto supone un inconveniente para los alumnos de la pareja 1 puesto que, se equivocan al elegir las coordenadas de la variable independiente (eligen el tiempo en vez del número de canicas) pero al ser la relación entre esta variable y el alargamiento del muelle también gráficamente una recta, no se dan cuenta de que han considerado los valores incorrectos.

Por otro lado, parece que este estudio cualitativo también haya influido en el ítem 6 a la hora de determinar el tipo de función que ajustará a los puntos representados en Desmos ya que algunos los alumnos explican que la función que ajuste será lineal probablemente por basarse en el estudio cualitativo que han realizado previamente ya que en este caso, a diferencia de lo que sucedía en el experimento de la pelota, la app Video Physics no proporciona la gráfica con la relación estudiada, por lo que algunos de ellos se basan en la que representan en el ítem 1 o 2 para hacer tal afirmación. Sin embargo, también el hecho de que se basen en el análisis cualitativo aquí puede llevarles a cometer errores en el caso de que no hayan considerado una función correcta o adecuada a lo que estudian en el experimento realizado en clase. Este es el caso de los alumnos de la pareja 2, que al concebir que la función es una curva que tiende a estabilizarse y de haber elegido anteriormente la función logarítmica como la que mejor representa el fenómeno estudiado, tratan de ajustarla a los puntos representados en Desmos (a pesar de que en el vídeo del experimento ven que se comporta de forma lineal). No obstante, posteriormente indican que la función no será esta sino una recta "porque se ajusta a los datos obtenidos" y "solo consideramos un pequeño espacio de tiempo", haciendo referencia al análisis cualitativo y poniendo de manifiesto que se han basado en este en primer lugar para tratar de buscar el tipo de función que ajustaría a los puntos representados. No obstante, *a priori* podemos pensar que este análisis cualitativo también puede suponer un impedimento a la hora de concebir cómo será la gráfica del fenómeno puesto que algunos dibujan gráficas crecientes en los ítems 1 y 2 y los puntos representados en Desmos tienen forma de recta decreciente. No obstante, es probable que esto también les haya podido servir para reflexionar sobre el funcionamiento de la app y la implicación que tiene el hecho de tomar las referencias de una forma determinada.

Por otro lado, cabe destacar que puede que este estudio de las propiedades del fenómeno y de las familias de funciones haya influido también en la forma de tomar las referencias en la app Video Physics, ya que hay alumnos que intentan hacerlo de modo que el alargamiento inicial del muelle sea nulo fijando el eje OX en el primer punto marcado. Además, también puede que haya servido de ayuda a algunos alumnos a la hora de responder otro tipo de preguntas en las que pretendemos que relacionen su experimento con otro para ver cómo conciben la relación entre ambas variables. Esto lo hemos observado en el apartado d) del ítem 9 cuando les preguntamos cómo cambiaría la función si en vez de considerar la variable y como el alargamiento del muelle consideraran la variable distancia al suelo, puesto que los alumnos de la pareja 1 indican que en este caso la gráfica sería descendiente, basándose probablemente en la gráfica que dibujan en los ítems 1 y 2 que es creciente y no en la que obtienen usando la app que no lo es.

<u>El significado de los parámetros</u>

En cuanto al significado que dan los alumnos a los parámetros, hemos analizado las respuestas de estos al ítem 3, en el que les preguntamos por su significado antes de realizar el experimento en clase y tomar los datos, y las respuestas al ítem 6, en el que les pedimos que expliquen el significado de estos después de tratar de ajustar la gráfica de la función a los datos obtenidos con la app Desmos mediante la manipulación de los valores numéricos correspondientes a los diferentes parámetros de la familia de funciones lineal.

Cabe destacar que, en general, hemos observado que existe variedad en las respuestas de los alumnos en cuanto al tipo de significado que otorgan a los parámetros, probablemente por ser esta una función que ya han estudiado ampliamente en cursos previos y en la misma forma canónica que aquí de modo que, anteriormente ya eran capaces de dotar de significado los parámetros de la fórmula usada en relación con la gráfica correspondiente como hemos visto en el ítem 3, pero al usar la app parece que son capaces de otorgarles otros significados además de los mencionados como hemos visto en el ítem 6. Con ello, no estamos afirmando que después de usar la app vean que los parámetros ya no tienen el significado que les otorgaban anteriormente ni asegurando que antes no les otorgaran el significado que indican que tienen ahora, sino que parece que ahora sean capaces de verlos de otra forma distinta a la anterior, reelaborando y ampliando así la definición que tenían previamente.

En concreto, cuando les preguntamos por el significado de los parámetros en el ítem 3, la mayoría de estudiantes o bien no explica el significado de los parámetros en relación con la fórmula, posiblemente porque no se acuerdan o no lo saben, o bien dan explicaciones escasas o incorrectas, incluso algunos relacionando los parámetros con el significado en relación con el fenómeno y no con la gráfica, a pesar de que se les indica explícitamente. Además, el tipo de significado que dan a los parámetros es más bien de característica concreta de la familia de funciones lineales, por ejemplo las alumnas de la pareja 1 indican que no eligen $y = ax + b$ sino $y = ax$ porque la gráfica pasa por (0,0) asociando por tanto que la aparición de un valor b significa que la gráfica pasa por el origen de coordenadas.

En cambio en el ítem 6, todos son capaces de encontrar la función que ajusta a los puntos usando la fórmula $y = ax + b$, con a y b reales, manipulando los parámetros de la fórmula y al relacionar sus acciones sobre esta con los movimientos de la función gráficamente. Por ello, todos son capaces de dar sentido a los parámetros de la fórmula en relación con lo observado gráficamente, e incluso algunos relacionando estos también con características del fenómeno estudiado (alumnos pareja 3). En concreto, aparecen significados de tipo dinámico ("b sube y baja [la función]", según la pareja 8), aunque también de tipo estático ("b es la altura", según la pareja 1) o relacionados con características concretas de la familia de funciones estudiada ("b es el punto de corte con el eje OY", pareja 4). Además, ahora son capaces de especificar para qué valores, en general, la gráfica sería de una forma u otra, por ejemplo los alumnos de la pareja 1 que también otorgan a b un significado dinámico aparte de estático ya que indican que la función se mueve hacia arriba "sumándole un número positivo a x" y hacia abajo "sumándole uno negativo". Además, algunos alumnos hacen la distinción entre el significado del valor numérico del parámetro a y el de su signo (parejas 1,4, 5 y 7), probablemente porque en la hoja de ayuda que les proporcionábamos en la lección anterior les preguntábamos por el significado de del parámetro a de $y = a(x - c)^2 + d$ distinguiendo entre el del valor numérico y el del signo por separado.

En definitiva, a pesar de que los alumnos ya habían estudiado esta función previamente y el significado de los parámetros en relación con la gráfica, parece que el hecho de trabajar con un modelo de enseñanza con unas características concretas, en el que se incluye el uso de tecnología, les ha permitido ampliar la definición que tenían de estos aunque, como decíamos, tendremos que complementar la información aquí obtenida con lo que se desprenda del análisis de las entrevistas para poder realizar tal afirmación.

Las variables número de canicas y peso[37]

Durante el análisis de las propiedades cualitativas de las familias de funciones y del fenómeno estudiado (ítems 1, 2 y 3) hemos observado que no solo los alumnos hacen referencia a la variable cuya relación con el alargamiento deberán estudiar, sino que también mencionan la variable peso de las canicas. Esto se debe a que la relación entre las variables estudiadas no es directa puesto que al aumentar el número de canicas introducidas en el vaso, el peso que este contiene será mayor y, por tanto, hará que el muelle se alargue más. Por ello, muchos alumnos consideran el peso como una variable "auxiliar" que les ayuda a relacionar de forma más directa alargamiento y número de canicas. No obstante, en el análisis de las respuestas de los estudiantes a los diferentes ítems hemos observado que consideran la variable independiente: 1. Como número de canicas y peso indistintamente, es decir, de modo que esta tenga los dos significados aunque por separado (parejas 3, 4 y 5); y/o 2. Como número de canicas en el sentido de peso (parejas 1, 6 y 7).

[37] Usamos peso aquí en sentido informal siguiendo las interpretaciones de los alumnos que hablan de peso refiriéndose a la masa, esto es, a la magnitud física que expresa la cantidad de materia de un cuerpo y que se mide en kilogramos en el sistema internacional, no a la fuerza con la que la Tierra atrae a los cuerpos que sería el peso y que se mediría en newtons.

Por ejemplo, los alumnos de la pareja 4 consideran como variable independiente en el ítem 2 las “canicas” y la usan indistintamente como “número de canicas” y “masa de las canicas”. En la respuesta al apartado b) de dicho ítem se refieren a la variable “número de canicas” porque explican que “por ejemplo, cuando tiene la primera canica, [el muelle] se estabiliza y no se estira más hasta que no ponemos otra”. Es decir, representan el introducir una nueva canica en el vaso con un cambio en el alargamiento del muelle. En cambio, en el apartado c) se refieren a “masa de las canicas” ya que cuando les preguntamos qué unidades de medida sería conveniente usar para cada variable explican que “la masa en gramos que es peso adherido para cada canica”. También podemos observar un comportamiento similar en los alumnos de la pareja 5 que escriben “peso = cantidad de canicas” en su respuesta al apartado a) del ítem 1. Además, para representar la gráfica usan como variable tanto “número de canicas” como “peso” ya que, como se puede escuchar en las grabaciones, usan los valores naturales de x como número de canicas para representarlos y que sirvan de guía para saber cómo será la función pero, no obstante, en el eje apuntan que esta variable se mide en gramos y en sus explicaciones usan el término “peso” en vez de la expresión “número o cantidad de canicas” para referirse a la variable independiente.

Por otro lado, tenemos que otros alumnos usan el término número de canicas en el sentido de peso. Por ejemplo, los alumnos de la pareja 6 indican en la gráfica del ítem 2 que el eje OX representa la cantidad de canicas y que esta se mide en gramos, por lo que se están refiriendo al peso no al número de canicas en sí. O por ejemplo, los de la pareja 1, que indican en el ítem 2b que “el alargamiento del muelle (y) depende del peso (número de canicas)” considerando también como variable independiente el peso.

Cabe destacar que, en general, hemos observado además que cuando los alumnos hablan de la variable peso de las canicas no parece que estén pensando en el peso que tendrá cada canica de un experimento en concreto sino en que la variable peso puede tomar todos los valores reales ya que al representar gráficas con dominio $[0,\infty]$, no la están considerando como una variable discreta que toma ciertos valores reales, sino que los toma todos a la vez. Esto es, como si hubieran representando infinitos casos concretos del fenómeno estudiado a la vez, independientemente de que ellos lo conciban así o no. En cambio, cuando se refieren a la variable número de canicas (distinta al peso), parece que conciben que solo puede tomar valores naturales ya que indican que se mide en números naturales o enteros, por lo que la ven como discreta.

<u>Tendencia a representar más de una variable en la gráfica de la función</u>

Cabe destacar que, como ya hemos comentado en apartados anteriores, durante el estudio de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones (ítems 1 y 2) hemos podido observar que parece que los alumnos hayan tenido en consideración el uso de otras variables distintas de las aquí estudiadas (número de canicas y alargamiento del muelle) a la hora de representar gráficamente la relación entre estas.

En concreto, hemos observado este aspecto en los alumnos de las parejas 3, 4 y 5. Por ejemplo, los alumnos de la parejas 3 dibujan una gráfica escalonada y comentan que “el número de canicas no es fraccional”, indicando que consideran la variable número de canicas de forma que sólo puede tomar valores naturales. Pero además, añaden que “al aumentar el número de canicas asciende directamente la longitud del muelle, no progresivamente” para justificar por qué tiene esta forma de modo que parece que estén considerando de forma implícita la variable tiempo o peso ya que hasta que no se introduce la siguiente canica en el vaso, este no se alarga más. Lo mismo sucede para los alumnos de la pareja 4 que dibujan una gráfica escalonada y explican que tiene esta forma porque “por ejemplo cuando tiene la primera canica se estabiliza y no estira más hasta que introducimos la siguiente”, por lo que parece que estén considerando de forma implícita también las variables tiempo o peso ya que están tratando de representar que el muelle no se vuelve a alargar hasta que se le introduce la siguiente canica, que hará que el vaso aumente de peso y no de forma progresiva. Por otro lado tenemos a los alumnos de la pareja 5 que comentan que se refieren a la variable x como una cantidad entera positiva haciendo referencia al número de canicas y así la usan para representar puntos en la gráfica. No obstante, después unen los puntos representados porque, tal como comentan durante la sesión, están considerando el peso de las canicas y ven esta variable como continua[38]. También los alumnos de la pareja 8 parece que obtienen la gráfica de la función en el ítem 1 a partir de considerar que el número de canicas tomará valores naturales, pero después unen dichos puntos de modo que así la variable independiente toma valores reales positivos, aunque en este caso no parece que lo hagan porque estén pensando en la variable peso, sino por inercia de como ellos actúan en clase normalmente cuando se les pide que representen la gráfica de una función a partir de una fórmula, que dan valores concretos a la variable independiente generando una tabla de valores que les permite representar gráficamente los puntos y unirlos para obtener la gráfica de una función.

En definitiva, hemos observado una cierta tendencia a considerar variables externas a las estudiadas en la representación gráfica de la relación entre estas de modo que parece que estas nuevas variables alteran la forma que debería tener la gráfica representada. Además, hemos planteado que esto se puede deber a dos posibles motivos: el primero de ellos sería el hecho de atribuir un doble significado a la variable número de canicas[39]y el segundo el de usar la variable tiempo o peso, probablemente como consecuencia de haber sido una de las que estudiaban en el experimento anterior.

El “número de canicas”: coherencia a lo largo del experimento

En relación con este ítem, hay que considerar la tabla 20.3 del Anexo 20 que muestra cómo consideran los alumnos la variable número de canicas a lo largo del experimento. En concreto, en esta tabla incluímos qué término usan estos para referirse a esta variable, si usan otra en vez de número de canicas (como por ejemplo los alumnos de la pareja 5 que se refieren a peso y no a cantidad de canicas) y qué tipo de valores puede tomar (por ejemplo los alumnos de la pareja 2 consideran en el ítem 2 que puede tomar valores del 0 al 8, aunque no descartan que pueda tomar un número decimal de canicas). Cabe destacar que en la tabla hemos querido resaltar tres partes bien diferenciadas: lo que consideran los alumnos antes de tomar los datos del experimento en base a sus respuestas (ítems 1 y 2), durante la toma de datos y el cálculo de la función (ítems 4, 5, 6 y 7) y después (ítems 8 y 9). Lo que indicamos en los ítems 4, 5, 6 y 7 son: los valores considerados para la variable x por cómo toman las referencias en la app Video Physics (ítem 4), qué consideran por primera coordenada de los puntos que les pedimos (ítem 5), los valores relativos al número de canicas usados para calcular la función en Desmos y que, en este caso, son los mismos que antes para todos los casos analizados (ítem 6) y, por último, los valores relativos a la variable y usados para calcular la función en

[38] Cabe destacar que, aunque el peso es una magnitud continua porque puede tomar todos los valores reales positivos, el peso de un conjunto de canicas no lo es.

[39] Ya que, de hecho, son aquellos alumnos que le otorgan este significado a la variable x (alumnos de las parejas 3, 4 y 5) en los que precisamente hemos observado esta tendencia a considerar el uso de variables distintas a las estudiadas a la hora de representar gráficamente la relación.

Graphical Analysis (ítem 7). Por otro lado, lo que indicamos en los ítems 8 y 9 es lo que deducimos que han interpretado en este ítem, no cómo lo consideran para la función usada en los cálculos realizados en cada uno de los ítems. Por último, conviene señalar que en las respuestas en las que no podemos deducir lo que han considerado los alumnos, asumimos que continuan concebiendo las variables igual que en el ítem anterior puesto que no encontramos evidencia de que piensen lo contrario.

Ahora sí, pasamos a comentar como conciben los alumnos la variable número de canicas a lo largo del experimento y si son coherentes o no. Para ello, nos centraremos en los tipos de valores que piensan los alumnos que puede tomar la variable, concretamente, en los valores inicial y final del experimento y en si conciben que el número de canicas puede tomar valores naturales, reales, etcétera.

En primer lugar, antes de la toma de datos tenemos que todos los alumnos consideran que el número inicial de canicas será cero puesto que todos dibujan la gráfica de modo que empieza en el origen de coordenadas, aunque solo los alumnos de la pareja 2 hacen referencia a que llegará un momento en el que el muelle no se alargará más porque se romperá, por lo que consideran que el experimento tendrá sentido para una cantidad p determinada de canicas. Ahora bien, como hemos mencionado antes, por el tipo de respuestas que dan los alumnos *a priori* parece que la mayoría de ellos considera que la variable número de canicas puede tomar valores reales ya que representan gráficamente una función continua, independientemente de si la consideran como peso o no. No obstante, parece que al menos los alumnos de las parejas 3, 4, 5 y 8 no sean conscientes de que de este modo están considerando la variable continua. Por ejemplo, los alumnos de las parejas 3 y 4 explican que dibujan la gráfica escalonada porque, como ya hemos comentado, hasta que no se introduce la siguiente canica el muelle tiene la misma longitud y no se alarga por lo que parece que conciben la variable número de canicas como discreta y que toma números naturales. También lo consideran así los alumnos de las parejas 5 y 8 que usan que los valores de la variable son naturales para representar gráficamente la función, aunque posteriormente los unen. Por último, tenemos los alumnos de la pareja 2 que, a pesar de dibujar una gráfica continua, indican que la variable número de canicas se medirá en unidades.

A continuación cabe destacar que durante la parte del experimento relativa a la toma de datos y al cálculo de la función mediante Desmos y Graphical Analysis, hemos observado que ya todos los alumnos consideran que la variable independiente es el número de canicas y no el peso[40]. Cabe destacar, además, que esta variable no viene dada directamente por la app Video Physics, por lo que no será relevante dónde fijen las referencias en esta. No obstante, sí que lo será el cuándo las fijen en relación al número de canicas introducidas en el vaso. Esto es, los alumnos tendrán que ser conscientes de cuándo marcan el primer punto en la app, si bien cuando el vaso no contiene canicas o bien cuando este contiene una, ya que este dato será esencial para asociar el primer valor del alargamiento al número de canicas correspondiente de forma correcta y, a partir de este, obtener el resto de valores para la variable sumando 1 al anterior. Es evidente que los valores que tomará la variable número de canicas serán 0, 1,..., 8 y, consecuentemente, la variable será discreta. No obstante, al ajustar los puntos usando una función lineal, los alumnos tienen que ser conscientes de que la función que modeliza el fenómeno será la lineal restringida al conjunto de puntos $\{0, 1, ..., 8\}$. Por

[40] Aunque es cierto que inicialmente en el ítem 5 las alumnas de la pareja 1 consideran como primera coordenada de los puntos la variable x por la app, posteriormente se dan cuenta y rectifican su elección considerando que estos son los números naturales empezando desde el 0 y terminando en 8.

tanto, habrá que ver los valores que piensan los alumnos que puede tomar la variable para ver si son coherentes con el hecho de considerar el número de canicas como variable.

Por último, en la parte relativa a la interpretación de las características de la función en relación con el fenómeno, tenemos que todos los alumnos consideran que el valor que toma la variable número de canicas inicialmente será 0 (incluidos los alumnos 5 y 6 que marcaban el primer punto cuando el vaso ya contenía una canica, cosa que probablemente hacen porque no están pensando en cómo han tomado las referencias en su experimento concreto). También tenemos que hay alumnos que consideran que la máxima longitud del muelle se alcanzará cuando el vaso contenga 8 canicas (alumnos parejas 2, 4 y 5) o 9 (alumnos pareja 7, que aparentemente no recuerdan que introducíamos 8 canicas como máximo, no 9), basándose en los datos de su experimento concreto; aunque otros consideran un experimento genérico ya que afirman que la máxima longitud del muelle se alcanzará cuando el vaso toque al suelo (alumnos parejas 1, 3, 6 y 8). Por otro lado, por lo que respecta a los valores que consideran que puede tomar la variable tenemos que solo los alumnos de las parejas 1, 7 y 8 parece que vean la función como discreta ya que afirman que no tiene sentido calcular la imagen de 2,5 canicas en el apartado c) del ítem 8. En cambio, los alumnos de las parejas 1 y 6 no indican que calcular la imagen de 2,5 no tenga sentido, lo que probablemente se deba a que están fijándose en la función que es continua y no en cómo es la variable número de canicas.

<u>El "alargamiento del muelle": variables consideradas y coherencia a lo largo del experimento</u>

Al igual que antes, en el Anexo 20 se muestra una tabla (Tabla 20.4) en la que se recoge cómo han considerado los alumnos la variable alargamiento a lo largo del experimento. En particular, incluímos en esta el nombre que le dan a la variable y los tipos de valores que puede tomar. Hay que resaltar que, al igual que en la Tabla 20.3 para la variable número de cancias, hemos diferenciado diferentes partes: lo que consideran los alumnos antes de tomar los datos del experimento (ítems 1 y 2) y después (ítems 1, 5, 6, 7, 8 y 9) pero ahora en relación a la variable y. Cabe destacar que, como antes, lo que indicamos en los ítems 8 y 9 es lo que deducimos que han interpretado al realizar los cálculos en relación con la variable estudiada, no cómo interpretan la función considerada para realizar los cálculos. Por ejemplo, los alumnos de la pareja 4 usan como variable y de la función: $d_{p,x} - A$ pero, no obstante, son conscientes de que esto no representa el alargamiento como podemos ver en el ítem 9. Por ello, en la casilla correspondiente de la tabla para la pareja 4 en el ítem 9 indicaremos cómo conciben el alargamiento, no el valor obtenido mediante la función (que no representa el alargamiento).

Ahora sí, pasamos a ver cómo conciben los alumnos la variable alargamiento del muelle a lo largo del experimento. Pero, antes de nada, cabe señalar cómo se definen algunos de los conceptos que usaremos, puesto que es esencial saber a qué nos referimos para analizar las respuestas de los alumnos. Cabe destacar que, definimos la longitud del muelle como la medida que va desde la parte más alta del muelle a la más baja de este en línea recta cuando este se encuentra colgado de un soporte, definimos alargamiento del muelle como la longitud que toma este con respecto a la longitud que poseía inicialmente, antes de haber introducido ninguna canica en el vaso que cuelga de este[41] (por lo que el alargamiento del muelle tomará siempre valores positivos e inicialmente

[41] Por tanto, estamos considerando como longitud del muelle la longitud inicial más el alargamiento que se produce.

será cero). En este caso, para analizar las actuaciones de los estudiantes no solo hemos tenido en cuenta la definición de alargamiento que acabamos de dar sino también como consideran los alumnos esta variable en sus experimentos y si realmente son coherentes a lo largo de este.

En particular, de los ítems 1 y 2 se desprende cómo han considerado los alumnos esta variable antes de trabajar con los datos del experimento. En estos ítems, hemos podido observar que, efectivamente y a pesar de usar variables diferentes para denominar el alargamiento del muelle como "deformación", "longitud" o "altura", la mayoría de alumnos considera que esta variable será positiva y creciente (para un mayor número de cancias, mayor será el alargamiento del muelle) y, además, que inicialmente valdrá cero (ya que dibujan la gráfica de la función que representará la relación partiendo del origen de coordenadas considerado como (0,0)). Esto lo consideran todos los alumnos menos los de la pareja 3 que parece que entiendan el término "alargamiento" como "longitud total del muelle", es decir, como la longitud que tiene el muelle en cada momento sin restarle la longitud inicial ya que dibujan la gráfica de la función en el ítem 2 a una altura m distinta de cero.

Después, durante la toma de referencias en Video Physics hemos observado que, a diferencia de lo que sucedía en el experimento de la pelota, parece que todos los alumnos son consicentes de que la forma en la que tomen las referencias influirá en los valores que tomará la variable y ya que usan argumentos basados en las variables estudiadas para justificar sus respuestas. Por ejemplo, los alumnos de la pareja 6 indican que fijan el eje OX en el primer punto para estudiar cómo se alarga el muelle o los de la pareja 4 que indican que lo hacen en el último punto para obtener un alargamiento positivo siempre. No obstante, esto no implica que la variable que esten considerando para y sea el alargamiento ni tampoco que sean conscientes de cómo funciona la app, esto es, de cómo interpreta esta las acciones que ellos realizan durante la toma de referencias). En concreto, como podemos ver en la Tabla 20.1 del Anexo 20, los alumnos de las parejas 1, 2 (que después realizan operaciones para que el alargamiento sea positivo) y 6 toman las referencias de modo que lo que obtienen es $-A$ siendo el alargamiento inicial cero y negativo siempre. Por otro lado, tenemos los de la pareja 3, que toman como alargamiento la longitud más el alargamient en negativo. Por último los de las parejas 4, 5 6 y 7 que consideran como alargamiento la variable $d_{p,x} - A$.

Ahora bien, en el ítem 5, cuando les pedimos que escriban las coordenadas de los puntos la mayoría de alumnos copia los valores obtenidos para y en Video Physics, solo los alumnos de la pareja 2 los copian cambiados de signo tratando de obtener la variable alargamiento como variable positiva. No obstante, a pesar de que el resto de alumnos no consideran como variable el alargamiento, hay alumnos que durante la interpretación de la función son coherentes con cómo han tomado las referencias en Video Physics. Por ejemplo, los alumnos de las parejas 1 y 6, que consideran el alargamiento negativo durante la toma de referencias, así lo conciben posteriormente al interpretar la función. También los alumnos de la pareja 3, que aunque consideren la variable longitud, la consideran como sinónimo de alargamiento a la largo de todo el experimento. Por último, también hay otros alumnos que, a pesar de no considerar la variable alargamiento, son coherentes con cómo la han definido. Este es el caso de los alumnos de la pareja 4, que consideran la distancia del punto al suelo y son conscientes de que cuando les preguntamos por alargamiento no podrán usar la función obtenida para proporcionarlo.

En cambio, hay alumnos que, aunque tratan de tomar las referencias pensando en los valores que tomará el alargamiento, parecen no ser conscientes de cómo funciona la app ya que no son coherentes en sus respuestas (alumnos parejas 5, 7 y 8). En este caso, todos ellos fijan las referencias de modo que lo que les proporciona la app es $d_{p,x} - A$, sin embargo durante la interpretación de la función en relación con su experimento, hemos podido observar que no son conscientes de ello ya que piensan que lo que les proporciona la función es el alargamiento del muelle en relación con el número de canicas introducidas en el vaso.

4.3.4. LECCIÓN 4. EL ENFRIAMIENTO DE UN LÍQUIDO

4.3.4.1. Por parejas

Tal como hemos hecho en las lecciones anteriores, empezaremos el estudio analizando las actuaciones de los estudiantes organizándolas según los ítems a los que hacen referencia y relacionando sus actuaciones, siempre que lo creamos conveniente, con las actuaciones de los propios estudiantes en las lecciones anteriores.

<u>Pareja 1</u>

Ítem 1. En primer lugar cabe destacar que las alumnas de esta pareja no describen la relación estudiada con sus propias palabras sino que tratan de buscar cuál es la gráfica de la función, por lo que parece que les resulta más fácil expresar así dicha relación. En concreto dibujan unos ejes de coordenadas en el primer apartado de modo que indican que el eje OX representa “x (tiempo)” y el eje OY representa “y (temperatura)” pero no dibujan ninguna gráfica. No obstante en el apartado b) vuelven a indicar que los ejes OX y OY representan el tiempo y la altura respectivamente pero ya tratan de esbozar la relación, que la expresan mediante una recta creciente que parte del origen de coordenadas, aunque no explican su respuesta.

Ítem 2. En este segundo ítem parece que las alumnas cambian de opinión. A pesar de que inicialmente dibujan la misma gráfica que en el ítem anterior, posteriormente indican que esta no sería la correcta, la tachan y dibujan otra gráfica con una recta descendiente que parte de un punto del eje OY hacia el eje OX sin traspasar en ningún caso ninguno de los dos ejes. Cabe destacar que en este caso los ejes representan las mismas variables pero ahora los han segmentado, cosa que parece indicar que han pensado en que las variables tomen unos valores concretos y, por consiguiente, en un experimento en concreto. Por tanto, puede que el haber pensado sobre un caso concreto de experimento haya hecho que piensen que la gráfica que representaría el fenómeno es decreciente. Hay que añadir también que parece que solo se fijan en la relación entre las variables en cuanto a su comportamiento general, esto es, qué le pasa a la variable dependiente al aumentar la independiente, pero no en el tipo de relación exacta entre estas (lineal, cuadrática, etcétera) ya que en el apartado b) explican que “cuanta más temperatura, tardará más en enfriarse el líquido” para justificar la forma de la función. Por otro lado, indican que los ejes representan el tiempo y la temperatura, que se miden en s y en ºC, refiriéndose a segundos y grados Celsius, medidas en las que habitualmente miden las alumnas estas variables. Sin embargo, cuando les pedimos que expliquen por qué dibujan la gráfica en esa posición, indican que “porque cada tiempo que pasa va enfriándose más”, cosa que no justifica la posición en la que dibujan la gráfica pero que parece reafirmar la hipótesis que habíamos formulado sobre que parece que las alumnas se fijen en la relación entre las variables en general, no tanto en el tipo de relación.

Ítem 3. Como podemos observar en las respuestas de las alumnas, en este ítem eligen la familia de funciones $y = ax + b$ ya que es la familia de funciones lineales, por el tipo de gráfica que han dibujado. Parece que dudan con la función $y = ax$ que también es lineal pero finalmente eligen $y = ax + b$ e indican que a representa la pendiente y b la altura de la función y su función, basándose en la gráfica del ítem 2 que tiene una altura distinta de cero. Además, todo apunta a que las alumnas dan esta respuesta como influencia de lo que han observado en el estudio del experimento anterior en el que usaban la fórmula de una función lineal para ajustar una gráfica a la nube de puntos obtenida en Video Physics y concluían que a era la pendiente y b la altura de la gráfica, con lo que parece que le otorgan un sentido estático a los parámetros. En el apartado b) indican que eligen esta familia de funciones porque "los grados pueden ser negativos", probablemente pensando en que la pendiente de la gráfica es negativa, por lo que el valor de alguna de las variables será negativo. Además, también indican que, "dependiendo de la velocidad a la que se enfría [el líquido] tendrá más o menos pendiente", refiriéndose a la forma de la gráfica de la función en comparación con el parámetro a.

Ítems 4 y 5. Una vez realizado el experimento siguiendo las instrucciones del ítem 4 y habiendo obtenido la nube de puntos que muestran la relación entre el tiempo y la temperatura, les pedimos a los alumnos que elijan una serie de puntos y que justifiquen su respuesta. Las alumnas de la pareja 1 explican que deciden tomar los puntos de forma que estén igualmente espaciados y que cubran todo el eje OX. Por ello, indican que como hay un total de 150 puntos y tienen que elegir 10, los han elegido de 15 en 15.

Ítem 6. En cuanto al ítem 6 tenemos que las alumnas no indican qué tipo de función es la que ajustará a los puntos después de haberlos representado. Entonces piden la ayuda y, tal como les indicamos, parten de la exponencial $y = e^x$ para tratar de encontrar la fórmula de la función que mejor ajuste. Probando con la app Desmos y siguiendo las pistas/preguntas de la hoja de ayuda, consiguen obtener una gráfica de modo que esta está en la orientación adecuada, cosa que consiguen "negando el exponente de e" (y después de probar añadiendo signos negativos delante de e y delante de e y x a la vez), y también que la gráfica esté a la altura del primer punto, tal como podemos observar en la Figura 4.18.

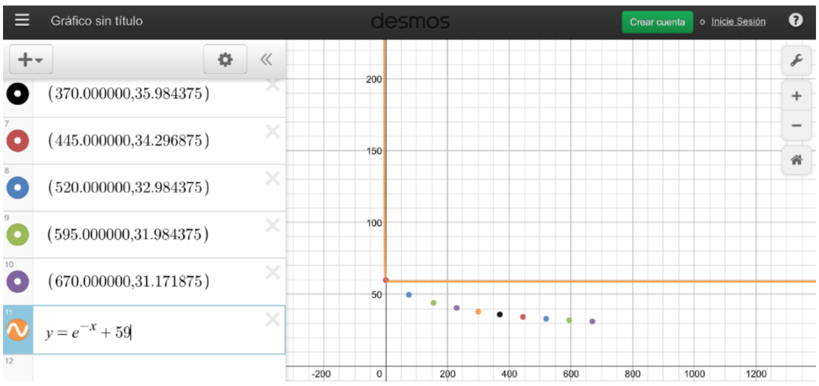

Figura 4.18. Búsqueda función de ajuste a puntos en Desmos (pareja 7, lección 3)

Las alumnas comentan que para mover la gráfica a lo largo del eje OX tienen que sumar y restar. No obstante, se quedan ahí puesto que no saben dónde sumar y restar. Prueban con expresiones como $y = e^{-x}(-8x) + 5$, tal como podemos ver en las capturas de pantalla que realizan pero no consiguen mover la gráfica. Además, no parecen ser conscientes de que tal vez no sea necesario mover lateralmente la gráfica sino cambiar su forma.

Ítem 7. En el ítem 7 las alumnas obtienen la fórmula de la función siguiendo las instrucciones de la app pero indican que no las pueden comparar porque en el ítem 6 obtienen una función que no ajusta a los puntos, por lo que usan la que obtienen en el 7 a partir de este momento.

Ítem 8. En el primer apartado de este ítem les pedimos a las alumnas que calculen las imágenes de unos cuantos puntos, algunos de los cuales están fuera del dominio. En este caso eligen la función del ítem 7 y realizan los cálculos correctamente. Cabe destacar que la función muestra la relación entre el tiempo (segundos) y la temperatura (ºC) y el dominio y recorrido de esta son [0, 725] y [30.6718, 59.92] respectivamente, por lo que no tendrá sentido calcular $f(10000)$ ya que 10000 está fuera del dominio. No obstante, las alumnas indican que sí que tiene sentido calcular todas las imágenes puesto que "cuanto más tiempo pasa, menos temperatura", por lo que parece que no tienen esto en cuenta. Tampoco indican qué significado tiene lo que han calculado, aunque parece que sí que son conscientes de que su función les da la relación entre tiempo y temperatura. Por último, les preguntamos si piensan que la función les puede ayudar a predecir lo que pasará cuando el tiempo tiende a infinito y responden que "llegará un momento en el que el agua se quedará a temperatura ambiente", por lo que piensan en el fenómeno en sí, no en que la función se ha definido para un intervalo concreto, aunque en este caso tanto los valores para las imágenes de la función como la temperatura del fenómeno tenderán a estabilizarse.

Ítem 9. Para finalizar, en el ítem 9 les preguntamos cuál es la temperatura máxima que alcanza el agua, cuál es la mínima y cuánto tiempo tardará en pasar de la temperatura máxima a la mínima. Las alumnas indican que la máxima será de 59,92ºC y esto sucede en 0 segundos "porque cuando lo apartas de la fuente de calor es cuando empieza a contar que es cuando empieza a disminuir [la temperatura del agua]" y la mínima será de 30,67ºC, a los 726s de haber empezado. Además, tal como ellos indican, estos son los valores puesto que "lo hemos observado en la tabla". Por último, afirman que el líquido tardará 718,501 segundos en pasar de la máxima temperatura a la mínima "porque a partir de ahí la temperatura ya se muestra constante" aunque en este caso no parece que lo hayan obtenido observando los valores de la tabla porque no hay ningún punto cuya coordenada primera sea este valor.

Pareja 2

Ítem 1. En este primer ítem los alumnos empiezan explicando que "la temperatura bajará de forma constante hasta llegar a un punto en el que la temperatura empezará a estabilizarse y se formará una constante a la temperatura ambiente", por lo que ven que la relación entre ambas variables no es la misma en los diferentes instantes sino que es constante al principio y al final de modo que tiende a estabilizarse cuando el agua alcanza la temperatura ambiente. En cuanto al segundo apartado, hay que destacar que los alumnos dibujan unos ejes (el horizontal representando el "tiempo (s)" y el vertical la "temperatura (ºC)") y una gráfica, en particular, una curva que decrece muy rápidamente al inicio y poco a poco de forma más lenta hasta llegar a estabilizarse. Además, indican en el eje OY que la temperatura ambiente es de 20ºC de modo que la gráfica que dibujan no desciende más de esta temperatura. Cabe destacar que estos alumnos consideran que la temperatura mínima será la temperatura ambiente, probablemente refiriéndose a la temperatura de la habitación en la que se ha realizado el experimento y considerándola igual a la temperatura del agua al final del experimento.

Ítem 2. En este segundo ítem los alumnos vuelven a dibujar la misma gráfica que en el ítem anterior, aunque en este indican que el tiempo se mediría en minutos no en segundos, cosa que parecen indicar después de preguntarles en qué medida piensan que se mediría cada una de las variables y reflexionar sobre el fenómenos ya que primero habían indicado que el tiempo se mide en segundos y luego lo tachan e indican que en minutos. Además, describen que la gráfica tiene esta forma de curva decreciente que se estabiliza puesto que "al empezar, la temperatura disminuirá progresivamente hasta que nos acerquemos a la temperatura ambiente. A partir de este momento la gráfica no experimentará variaciones porque habremos llegado a un punto constante". Por último, indican que dibujan la gráfica en esta posición con respecto a los ejes "para que salgan los resultados en positivo" y porque "la temperatura no puede bajar más de la constante que es positiva" porque equivale a la temperatura ambiente.

Ítem 3. Cuando les pedimos que elijan una familia de funciones de las dadas en la tabla, estos alumnos indican que sería $y = a/x^n + b$. Sin embargo, indican que piensan "que no es ninguna de estas porque no hay ninguna que en un momento determinado se mantenga constante pero antes haya sido una curva proporcional", es decir, no ven que ninguna de las expresiones represente la gráfica que han representado, aunque la exponencial sí que lo haría pero como ya vimos en sus respuestas al cuestionario inicial, los dos alumnos de esta pareja indican que no la conocen. No obstante, indican que eligen la fórmula $y = a/x^n + b$ donde $n = 1$ y $b = 20$ que sería la temperatura ambiente, probablemente por la influencia de los experimentos anteriores en los que son capaces de atribuir un significado al parámetro independiente.

Ítems 4 y 5. Después de haber realizado el experimento en clase siguiendo las instrucciones proporcionadas en el ítem 4 y habiendo obtenido la nube de puntos, les pedimos a los alumnos que elijan 10 puntos. Estos deciden elegirlos aleatoriamente de modo que cubran todo el eje OX. Cabe destacar que a continuación dividen la primera coordenada de cada punto por 60 e indican que pasan los puntos a "m.", refiriéndose a minutos, según ellos, "por comodidad al trabajar".

Ítem 6. Una vez representados los puntos elegidos en Desmos y al preguntarles explícitamente qué tipo de función creen que ajustará a los datos obtenidos explican que será "una función exponencial, porque decrece muy rápidamente en muy poco tiempo", fijándose en la forma de los puntos representados gráficamente. No obstante, no saben cómo proceder para obtener una fórmula concreta de una función cuya gráfica ajuste a los puntos, por lo que piden la hoja de ayuda. Entonces, parten de la función $y = e^x$ pero no identifican la letra e como el número 2,71828 sino como una incógnita que, según ellos, para que la función sea decreciente tiene que tomar un valor entre 0 y 1. Además, indican que al mover la función en el eje de las y, esta sube y baja y que para ello hay que "variar el número que es la b". A continuación, indican que para mover la gráfica en el eje OX tienen que "variar la c poniéndole + o –". Al final escriben la expresión $y = a^{(x+c)} + b$ y en concreto $y = 0{,}7^{(0{,}77x-0{,}95)} + 30$, función que habrán encontrado tratando de ajustar los valores a los puntos y que ajusta a estos, aunque no podemos determinar qué proceso han seguido para encontrarla.

Ítem 7. En el ítem 7 los alumnos indican que la fórmula de la función es $y = 28{,}546e^{0{,}294x} + 30{,}795$, función que obtienen siguiendo las instrucciones que les facilitamos. Por otro lado, en cuanto les pedimos que comparen esta función y la obtenida en el ítem anterior, los alumnos explican que la del ítem 6 les resultaría más fácil de ajustar a los puntos porque no tiene "incógnita" como en el caso de la del ítem 7, que tiene "e elevado a alguna cosa". Es decir, interpretan la letra e como algo no conocido y no como un número cuyo valor es 2,71828. No obstante, añaden que esta decisión se basa en una opinión personal.

Ítem 8. A continuación les pedimos a los alumnos que calculen las imágenes de algunos de los puntos, en concreto $f(100)$, $f(500)$, $f(600)$ y $f(10\,000)$, donde los valores del dominio representan la variable tiempo que se mide en segundos por cómo se han tomado los datos. No obstante, como ellos han calculado la función del ítem 6 a partir de las coordenadas de los puntos cuya variable temporal viene dada en minutos, deciden pasar los valores cuyas imágenes tienen que calcular de segundos a minutos teniendo que calcular así $f(1{,}6)$ $f(8{,}3)$, $f(10)$ y $f(166{,}6)$, por lo que la función proporcionará las imágenes correspondientes a los valores que queríamos que calcularan. Sin embargo, podríamos pensar que al cambiar de unidad de medida los alumnos tienen en cuenta el dominio (de 0 a 12 minutos) para ver si tiene sentido o no calcular las imágenes pero tampoco es así y afirman que las respuestas obtenidas "tienen bastante sentido porque llega un momento en el cual la temperatura no variará prácticamente", esto es, piensan en el fenómeno en sí, sin tener en cuenta el intervalo para el que se ha definido la función. Por último, en el apartado d) explican que "cuando el tiempo tiende a infinito la gráfica se encuentra en un punto en el cual no variará de ninguna forma porque tiende a un número concreto", aunque no sabemos si con esta respuesta tratan de justificar que la función ayuda a predecir lo que pasa en el futuro o no.

Ítem 9. Por último, les pedimos que realicen algunos cálculos más para interpretar su función en relación con el fenómeno descrito. En primer lugar, les pedimos que calculen la temperatura máxima (apartado a)) y la mínima (apartado b)). Estos indican que serán de 59,92ºC, "en el primer instante" porque "a partir de ese momento la temperatura es la máxima posible" refiriéndose a que a partir de ese instante la temperatura desciende, y la mínima será la del ambiente, "porque toda la materia tiende a igualar su temperatura", en concreto indican que esto sucede "después de pasar 15min aproximadamente", por lo que parece que hacen tal afirmación intentando recordar el tiempo que tardaron en realizar el experimento (que era de 12min), sin consultar ninguna fuente. Por último, indican que para pasar de la temperatura máxima a la mínima se tardaran 15min, aunque no explican en qué se basan para realizar esta afirmación.

Pareja 3

Ítem 1. En el primer ítem los alumnos de la pareja 3 explican que "con el paso del tiempo, la temperatura desciende y al mismo tiempo también disminuye la velocidad con la que se enfría". Es por ello que en el apartado b) dibujan una gráfica que inicialmente desciende muy rápido y luego lo hace más lentamente. Es más, parece que en su dibujo representan una función de proporcionalidad inversa, cosa que probablemente se deba a que, como en los experimentos anteriores han visto que los experimentos se pueden estudiar mediante funciones elementales, han tratado de buscar una que encajara con estas características de las que ya conocían por haberlas estudiado en cursos previos. Cabe destacar también que los alumnos indican que el origen de coordenadas es 0, aunque en este caso no parece que hayan hecho uso de este valor concreto con la finalidad de ayudarse a dibujar la gráfica de la función sino más bien de por costumbre.

Ítem 2. En este segundo ítem los alumnos vuelven a dibujar la gráfica de la función tal como lo hacían en el ítem anterior y de nuevo justifican su respuesta explicando que "con el paso del tiempo, la T desciende y ahora también disminuye la velocidad con la que se enfría". Además, indican que los ejes representan el tiempo y la temperatura que se medirían en segundos y en grados Celsius o Kelvin, aunque en el dibujo indican que lo harían en Celsius. Por otro lado, no podemos saber por qué dibujan la gráfica en esta posición puesto que cuando les preguntamos indican que esto es "porque el tiempo (x) es independiente y la temperatura (y) es dependiente".

Ítem 3. Debido a cómo conciben la gráfica de la función con respecto al fenómeno, los alumnos explican que las familias de funciones que podrían describirlo serían $y = a/x^2$ o $y = a/x^n + b$ pero indican que tienen dudad de cuál de estas sería, probablemente porque las ven como disjuntas y no saben cuál de las dos elegir.

Ítems 4 y 5. Una vez obtenida la nube de puntos que muestran la relación entre el tiempo y la temperatura del experimento, les pedimos a los alumnos que elijan una serie de puntos y que justifiquen su respuesta. Los alumnos de esta pareja los eligen igualmente espaciados y de modo que cubran todo el eje OX ya que explican que como tienen que elegir 10 puntos y x llega hasta 725 (refiriéndose a la primera coordenada de cada punto), deberán escoger aquellos cuya coordenada primera vaya de 70 en 70 (ya que 725:10≈70).

Ítem 6. Después de haber representado gráficamente los puntos en Desmos, los alumnos indican que la función es una exponencial y escriben la fórmula $y = ae^{cx} + b$, probablemente tratando de recordar la fórmula que aparecía en el ítem 3, aunque no es la misma porque en la tabla aparecía con un signo negativo delante del parámetro c. Además, añaden que la fórmula concreta es $2y = 2^{-0{,}01x+5{,}9} + 60$, fórmula que han encontrado después de pedir la hoja de ayuda, seguir las instrucciones e ir probando valores para los diferentes parámetros, tal como se puede deducir de las respuestas a los siguientes apartados. Por otro lado, en el apartado b) les pedimos que traten de ajustar al máximo la función a los puntos y que expliquen el proceso que han seguido para llegar a obtener una fórmula que ajuste a ellos. Estos indican que lo que hacen en primer lugar es escribir $y = 2^x + 60$, a continuación "poner la x negativa", después "dar valor a y" y, por último, "modificar los números para que se ajusten más a la función". No obstante, es natural pensar que este no es el proceso que realmente han seguido y que lo que han hecho es ir modificando los números tratando de ajustar más la gráfica a los puntos y al final, han redactado la respuesta dada tratando de recordar el proceso seguido. Por último, en el apartado c) los alumnos explican el significado que para ellos tienen los valores numéricos que aparecen en la fórmula. En concreto, indican que "aumentando y la función desciende y la curva se abre", refiriéndose al movimiento de la gráfica cuando aumentan el valor del parámetro que multiplica a y. También explican que "aumentando a aumenta el punto del eje de las x donde la curva se cierra notablemente", refiriéndose a que sube el punto de corte. Y, por último, indican que "si hacemos positivo x, la curva se encuentra en el segundo cuadrante", refiriéndose a que si el parámetro que multiplica a x es positivo y "si modificamos b, modificamos la altura de la función en el eje de las y", refiriéndose a que si varían el valor del parámetro independiente, aumenta o disminuye la altura a la que se encuentra la función.

Ítem 7. En este ítem los alumnos calculan la fórmula de la función usando la app Graphical Analysis y obtienen que es $y = 27{,}983e^{-0{,}004x} + 29{,}679$. No obstante, al copiarla a la app Desmos para comparar cuál ajusta mejor a los datos, esta o la obtenida anteriormente, se equivocan en el valor del exponente y escriben $y = 27{,}983e^{-0{,}04x} + 29{,}679$, función que no ajusta tanto a los puntos como la del ítem 6, cosa que hace que elijan la otra.

Ítem 8. En este ítem los alumnos calculan las imágenes de los puntos usando la función del ítem 6. No obstante, no continúan respondiendo al resto de apartados porque se termina el tiempo dedicado a la sesión.

Ítem 9. En este ítem tampoco dan ningún tipo de respuesta por falta de tiempo.

Pareja 4

Ítem 1. Los alumnos de esta pareja describen la relación como “proporcionalmente indirecta”, es decir, “cuanto más tiempo pase, la temperatura irá disminuyendo”. No obstante no describen qué tipo de relación exacta existe entre estas, cosa que se puede observar claramente en la gráfica de la función que representan al pedirles que dibujen la relación estudiada (ver Anexo 24). En concreto estos representan dos segmentos de rectas en el primer cuadrante: uno descendiente y otro constante que empieza justo cuando termina el que es descendiente, tratando de representar como varía la temperatura con el tiempo.

Ítem 2. En este ítem los alumnos vuelven a representar una gráfica de la función con la misma forma de modo que explican que “a medida que va pasando el tiempo, disminuye la temperatura”. Además, indican que el eje OX representa el tiempo y el eje OY la temperatura que se miden en segundos y grados Celsius respectivamente porque “el tiempo sería más exacto en segundos” y “la temperatura que nosotros usamos son los Celsius”. En cuanto a la posición con respecto a los ejes, los alumnos especifican que el primer punto lo han dibujado en el eje OY “porque antes de que pase el tiempo la temperatura ya es elevada” justificando así por qué dibujan una gráfica partiendo de un valor positivo para y y también explican que “después al tener temperatura ambiente no es completamente 0, por tanto no toca el eje OX”, justificando de este modo por qué no dibujan solo una recta descendiente y añaden una segunda recta que es constante.

Ítem 3. En este tercer ítem los alumnos señalan la familia de funciones lineales $y = ax + b$ “porque es la que más se ajusta a la relación disminución entre la temperatura y el tiempo”. Por tanto, parece que eligen esta por haber representado mediante una recta descendiente la relación entre las variables inicialmente. Además, indican que a representa “la inclinación de la recta, es decir, cuanto mayor es el número más se aproxima al eje OY y cuando menor es al eje OX”. Por otro lado, indican que b “es el punto donde corta el eje OY cuanto mayor es el valor, más alto está en el eje OY y cuanto menor más se acerca al 0”, dándole un significado de característica particular de la gráfica. Cabe destacar que parece que los alumnos hacen esta afirmación basándose en lo que obtenían en el experimento anterior ya que daban respuestas similares.

Ítems 4 y 5. Una vez realizado el experimento siguiendo las instrucciones del ítem 4 y habiendo obtenido la nube de puntos que muestran la relación entre el tiempo y la temperatura, en el ítem 5 les pedimos que elijan 10 de estos puntos y que justifiquen su respuesta. En este caso, los alumnos escogen el primer punto, el del medio y el último, y el resto “compensando de números a cada lado” refiriéndose a que toman puntos de modo que cubran todo el eje OX.

Ítem 6. Una vez introducidos los puntos en la app Desmos, los alumnos indican que la función que ajustaría a estos es una función exponencial “porque a medida que pasa el tiempo, baja la temperatura”, a pesar de que con la descripción que dan solo indican que la gráfica sería descendiente y no la forma que tendría. Cabe destacar que escriben la fórmula de la función en el apartado a), aunque la tachan porque se dan cuenta después de que esto es lo que les pedimos en el apartado b). En este, los alumnos indican que la fórmula de la función de ajuste es $y = -1{,}155x^{\frac{1}{2}} + 59{,}921875$ que la obtienen “probando los números hasta que ajustan a los puntos”. *A priori* no podemos saber cómo han llegado a obtener esta función porque estos alumnos no piden la hoja de ayuda, no obstante puede que por influencia de cómo obtienen las fórmulas en experimentos anteriores hayan seguido un proceso similar. Además, por las capturas de pantalla también podemos saber que antes de obtener esta fórmula, que no ajusta a los puntos exactamente tal o podemos ver en la Figura 4.19, prueban con las fórmulas $y = -x^{\frac{1}{2}} + 60$, $y = -1{,}2x^{\frac{1}{2}} + 59{,}21875$, $y = -x^{\frac{1}{2}} + 59{,}921875$ y $y = -1{,}155073466x^{\frac{1}{2}} + 59{,}921875$. Cabe destacar que, probablemente consideran el valor correspondiente al parámetro independiente, 59,921875, puesto que este es el valor de la segunda coordenada del primer punto.

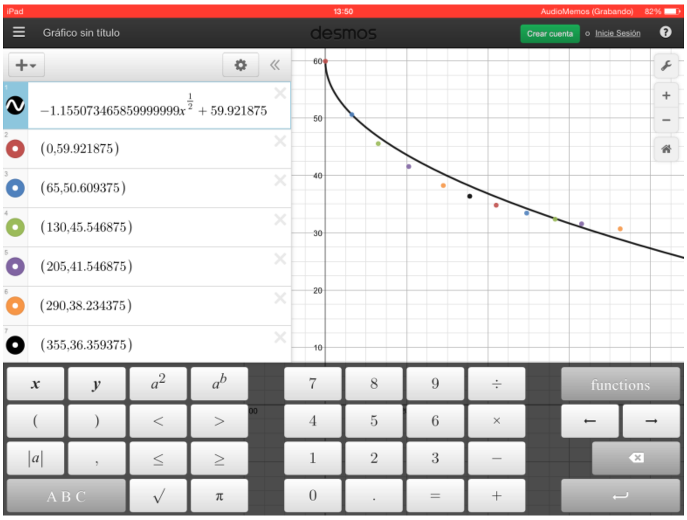

Figura 4.19. Gráfica función obtenida en Desmos (pareja 4, lección 4)

Por otro lado, en el apartado c) indican que “parámetro A: cambia la curvatura de la función” (sentido estático), “parámetro B: cambia el punto de corte con el eje OY” (sentido estático o de característica de una familia de funciones) y “parámetro C: le da más o menos inclinación a la función” (sentido estático), haciendo referencia a los parámetros de la fórmula $y = Ae^{-Cx} + B$, mientras que en d) proporcionan la función $y = 28{,}160e^{-0{,}004x} + 29{,}786$. Cabe destacar que este cambio de función con respecto a la que proporcionan en el apartado b) se debe a que calculan la fórmula mediante la app Graphical Analysis, cosa que se pide que hagan en el ítem posterior.

Ítem 7. En este ítem los alumnos copian de nuevo la fórmula de la función que habían escrito en el apartado d) del ítem anterior pero considerando como base de la potencia el parámetro que ellos han llamado A y no e. Esto hace que al representar la función no ajuste a los puntos e inicialmente indiquen que la que más ajusta es la obtenida con Desmos. No obstante, al ver que no ajusta nos preguntan y les indicamos que han olvidado copiar la e que aparece en la fórmula, por lo que al reescribirla de nuevo obtienen una gráfica que ahora sí ajusta a los puntos e incluso más que la que ellos obtienen con Desmos y que consideraban que ajustaba mejor que la del ítem 6.

Ítem 8. A pesar de considerar que la función que mejor ajusta es la del ítem 7, para responder las preguntas de este usan la del ítem 6, seguramente debido a una confusión. En este ítem los alumnos calculan correctamente las imágenes de los puntos que les pedimos e indican que estas expresan la relación entre el tiempo y la temperatura, relación que conciben como inversamente proporcional ya que afirman que “a más temperatura más segundos tardará en resfriarse [el agua]”. Por otro lado, en cuanto les preguntamos si las respuestas obtenidas tienen sentido afirman que no “porque no se puede alcanzar esa temperatura”. Parece ser que ven que la función, al ser una exponencial decreciente, decrecerá pero sin llegar a alcanzar el valor de la temperatura ambiente. No obstante, no parece que les llame la atención el hecho de que uno de los valores cuya imagen les pedimos que calculen esté fuera del dominio sino que realizan dicha interpretación basándose en cómo conciben la función y el fenómeno en general, no en si tiene sentido calcular imágenes de valores fuera del dominio de definición de esta. Por el mismo motivo, justifican que la función no puede ayudar a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito.

Ítem 9. Para finalizar, los alumnos indican que la temperatura máxima es de 59,921875ºC, cosa que pasa al inicio porque es la temperatura "de salida", y la mínima de 30,671875ºC, "porque es el final", cosa que hacen mirando las coordenadas segundas del primer y último punto representados en la app Desmos, que coinciden con el primer y el último punto que proporciona la app Graphical Analysis. Además, explican que se tardan 725s en pasar de la temperatura máxima a la mínima, lo que sucede "porque es la duración del experimento".

Pareja 5

Ítem 1. Los alumnos explican que la relación entre las variables estudiadas será inversamente proporcional puesto que comentan que "cuanto más tiempo pase la temperatura será más baja" y cuando les pedimos que dibujen la relación entre las variables representan la gráfica de una función proporcional inversa. Conviene señalar, además, que dibujan los ejes escalados, probablemente para representar la curva de forma simétrica y la representan totalmente contenida en el primer cuadrante.

Ítem 2. En este segundo ítem indican que la gráfica sería la que dibujan en el ítem anterior ya que "a medida que el tiempo pasa, la temperatura baja", razonamiento que también usan para tratar de justificar la posición de la gráfica respecto a los ejes. Justifican que el eje OX representa el tiempo que se mide en segundos, porque es la unidad del sistema internacional, y el eje OY la temperatura que se mide en ºC, porque es la medida que habitualmente se usa.

Ítem 3. Los alumnos eligen las familias de funciones $y = ax$ y $y = ax^b$ porque según ellos lo han comprobado en Desmos, a pesar de que no tienen datos concretos, por lo que todo apunta que han usado la app de modo que, sustituyendo los parámetros de algunas de las familias de funciones dadas por valores concretos, han visto que la forma que tiene la gráfica será similar a la que han dibujado (aunque esto solo será así cuando b tenga un exponente negativo, a lo que no hacen referencia). Además, indican que el único parámetro será a y que "cuando es negativo gira hacia la izquierda y cuando es positivo, hacia la derecha".

Ítems 4 y 5. Después de haber realizado el experimento y habiendo obtenido la nube de puntos, los alumnos de la pareja 5 indican que eligen "los puntos que hemos querido" y "separados para que se note la diferencia". Esto es, toman los puntos aleatoriamente pero de modo que cubran todo el eje OX.

Ítem 6. Los alumnos de esta pareja son incapaces de encontrar la fórmula de una función que ajuste a los puntos representados usando la app Desmos, ni siquiera con la hoja de ayuda, aunque sí que son capaces de dar sentido a algunos de los cambios sobre la fórmula en relación con movimientos de la gráfica puesto que afirman que para que la función $y = e^x$ sea decreciente tienes que "negar e" y para mover la gráfica en el eje OY "añadir algo a la y", refiriéndose a sumar un valor a toda la fórmula.

Ítem 7. En cuanto a la app Graphical Analysis, tenemos que los alumnos obtienen como función $y = 28{,}110e^{-0{,}004x} + 29{,}786$ e indican que usaran esta puesto que en el ítem anterior no han conseguido encontrar ninguna función que ajustara a los puntos realizando cambios sobre la fórmula.

Ítem 8. No obstante, en este ítem no usan dicha función para calcular las imágenes que les pedimos o no lo hacen rectamente porque obtienen unos valores para las imágenes que no son correctos. Por ello, cuando les preguntamos si creen que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre explican que "no, porque la temperatura tiene que estar a temperatura ambiente", aunque esto solo se daría cuando han pasado los 12 minutos de haber empezado el experimento aproximadamente puesto que los valores para las imágenes transcurrido este tiempo son semejantes. No obstante, aquí parece que se refieran por "temperatura ambiente" a que los valores para la temperatura del agua deberían ser otros no iguales a la temperatura ambiente durante todo el experimento. Además, cabe destacar para realizar dicha afirmación se fijan en el recorrido de la función, no en el dominio ya que no indican nada acerca de calcular las imágenes de valores que están fuera del dominio de definición de la función. Por último, indican que la función sí que podría ayudarles a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito "porque llegará a la temperatura ambiente", comparando probablemente el hecho de que la función tiende a estabilizarse y la temperatura del agua tiende a ser constante conforme se acerca a la del ambiente.

Ítem 9. Para terminar, les pedimos que indiquen temperatura máxima del líquido y el tiempo cuando se alcanza, temperatura mínima y el tiempo cuando se alcanza y tiempo que tarda en pasar de la máxima a la mínima. Estos indican que la máxima temperatura es de 59,922ºC que se alcanza para tiempo igual a 0s, la mínima de 30,67ºC a los 726s y el tiempo que tardará en pasar de la máxima a la mínima de 726s "porque es la diferencia entre el primer y el último punto", de donde podemos deducir que miran los valores correspondientes a las coordenadas primera y segunda del primer y último punto de la tabla.

Pareja 6

Ítem 1. En este primer ítem los alumnos describen la relación entre las variables como proporcional inversa ya que explican que "cuanto más aumenta la temperatura más descenderá el tiempo". A continuación, les pedimos que dibujen la relación entre las variables lo que hace que representen los ejes de coordenada de modo que en el eje OX escriben "tiempo (s)" y en el OY "temperatura (ºC)" pero no representan ninguna gráfica, probablemente porque no sepan cómo hacerlo.

Ítem 2. En cambio, en este segundo ítem sí que son capaces de representarla y dibujan una recta descendiente partiendo de un valor positivo de y de modo que conforme se acerca al eje OX va tendiendo a una recta horizontal. No obstante los alumnos no justifican por qué la han dibujado de esta forma, solo su posición, que indican que la dibujan en esta "porque empieza en una temperatura elevada hasta que se enfría pero sin llegar a congelarse", por lo que parece que no tienen en cuenta que la temperatura del agua no se enfriará más que la del ambiente. Además, añaden que el tiempo se mediría en segundos y la temperatura en grados centígrados.

Ítem 3. En cuanto a la familia de funciones que mejor representa el fenómeno, los alumnos señalan tanto las funciones $y = ax$ como $y = ax + b$, probablemente porque en el ítem anterior han dibujado dos rectas unidas mediante una curva. En concreto explican que se trata de "una función simple porque no implica parábolas ni funciones de ese tipo". Por otro lado, indican de forma errónea que los parámetros de las familias de funciones son x e y, es posible que por el hecho de que no tengan claro el significado del término parámetro.

Ítems 4 y 5. Los alumnos de esta pareja indican los puntos que eligen en el ítem 5, después de haber obtenido la nube de puntos siguiendo las instrucciones del ítem 4, pero no dan ningún tipo de justificación. No obstante, observando los puntos que escogen podemos deducir que hacen su elección tratando de tomar puntos de modo que el eje OX quede cubierto y así poder determinar la forma de la gráfica.

Ítem 6. Durante la sesión los alumnos de esta pareja indican que no saben qué tipo de función ajustaría a los puntos y nos piden la hoja de ayuda. Como tampoco se acuerdan del nombre nos lo preguntan y les indicamos que se trata de una exponencial. A continuación, tratan de encontrar una gráfica que ajuste a los puntos siguiendo las preguntas de la hoja de ayuda y dan como respuesta la función $y = e^{4,1} - 0{,}1015x$ que no es exponencial sino lineal pero, como podemos ver en la imagen de la Figura 4.20, ajusta a los puntos debido a la escala en la que aparecen los ejes de coordenadas.

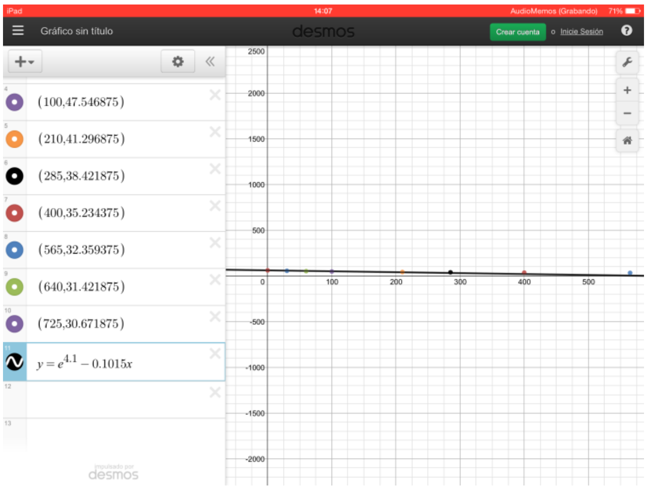

Figura 4.20. Gráfica función obtenida en Desmos (pareja 6, lección 4)

Ítem 7. En cuanto a la función obtenida en Graphical Analysis, tenemos que sí que consiguen encontrar una que ajuste a los puntos, $y = 28{,}110\, exp(-0{,}004x) + 29{,}786$ e indican que esta ajusta más que la del ítem 6 “porque pasa mejor por los puntos”.

Ítem 8. En este ítem los alumnos deben calcular las imágenes de los puntos usando una de las funciones anteriores. No obstante, estos alumnos dan como respuesta unos valores erróneos que coinciden con los que da la pareja 5, lo que nos hace pensar que compartieron información durante la sesión. Además, estos indican que las respuestas sí que muestran lo que verdaderamente ocurre “porque va estabilizándose gradualmente” refiriéndose a la gráfica de la función obtenida en Graphical Analysis y explican en el apartado d) que la gráfica sí que puede ayudarles a predecir lo que sucede cuando el tiempo tiende a infinito porque “ya no baja más”.

Ítem 9. Por último, los alumnos indican que la temperatura máxima se alcanza a los 57ºC y la mínima a los 30ºC pero no explican para qué tiempos se alcanzan dichas temperaturas ni por qué. Indican también que se tardarán 726s en pasar de la máxima temperatura a la mínima “porque los puntos dados coinciden ahí”, probablemente porque el último punto tiene como segunda coordenada 726, aunque esto no es del todo cierto puesto que el valor es 725.

<u>Pareja 7</u>

Ítem 1. En primer lugar, los alumnos explican que “a medida que pasa el tiempo el agua irá disminuyendo de temperatura hasta ser una constante ya que acabará igualándose con la temperatura ambiente debido al equilibrio térmico”, esto es, tienen en cuenta que

la temperatura del agua se estabilizará cuando alcance la del ambiente hasta ser constante. Sin embargo, cuando les pedimos que dibujen la relación entre las variables no son capaces de hacerlo aunque sí que conciben la relación como una función ya que dibujan los ejes de coordenadas que representan el tiempo, x, y la temperatura, y.

Ítem 2. En este ítem sí que son capaces de representar una gráfica para describir la relación estudiada. En concreto dibujan una curva que parte de un valor positivo del eje OY de modo que desciende muy rápidamente al inicio y conforme va avanzando en el tiempo de forma más lenta hasta estabilizarse en $y = 20$ que los alumnos toman como un ejemplo de lo que podría valer la temperatura ambiente, tal como ellos mismos indican. Además, justifican la forma en la que dibujan la gráfica "porque como punto 0 tomamos el momento en el que empieza a enfriarse [el agua], por tanto la temperatura es alta y desciende rápido, pero como después tiende a igualarse con la temperatura ambiente, ya no desciende tanto". Por otro lado, explican que el tiempo se mediría en minutos "porque este proceso no tarda segundos" y "los minutos nos servirán mejor", mientras que la temperatura se medirá en ºC "porque es la unidad en la que medimos [la temperatura]", refiriéndose a que es la medida que usan habitualmente. Sin embargo, cuando les preguntamos por qué representan la gráfica en dicha posición respecto a los ejes, explican que "porque la temperatura desciende hasta hacerse constante y por ese motivo la función es descendiente", refiriéndose a la forma en vez de a la posición.

Ítem 3. En este ítem los alumnos eligen la familia de funciones $y = ax^b$ "porque es la que más se parece a la que creemos" ($y = xa^x$) y "pensamos que es la mejor". Además señalan que "es esa porque en estas funciones, los valores crecen o decrecen de forma muy rápida y después tienden a igualarse", por lo que parece que ven la función como una exponencial. No obstante, indican que los parámetros serían x e y, seguramente porque confunden el término parámetro con variable y explican en general que estos harían que la gráfica fuera creciente o decreciente.

Ítems 4 y 5. Después de obtener la nube de puntos que muestran la relación entre el tiempo y la temperatura del experimento, les pedimos que elijan una serie de puntos y que justifiquen su respuesta. En este caso, los alumnos los eligen, según ellos, "aleatoriamente, menos el primero y el último", con lo que parecen indicar que no tienen ningún propósito concreto a la hora de elegir los puntos pero que sí que lo tienen al escoger el primero y el último ya que posiblemente lo hacen por saber cuál es el punto inicial y cuál el final.

Ítem 6. En el siguiente ítem les preguntamos qué tipo de función creen que podría ajustar a los puntos y les pedimos que traten de encontrarla. No obstante estos explican que "no la hemos podido ajustar" y tampoco piden la hoja de ayuda. Además, añaden que "hemos vuelto a intentar ajustarla y tampoco hemos podido" puesto que se quedan intentando encontrar la función durante la primera sesión y durante el inicio de la segunda vuelven a intentarlo pero tampoco saben cómo hacerlo.

Ítem 7. Sin embargo, en el ítem 7 sí que proporcionan la fórmula de una función: $y = 27{,}909e^{-0{,}004x} + 29{,}617$ obtenida con Graphical Analysis de modo que indican que eligen esta puesto que no pueden comparar con la otra ya que no han sido capaces de encontrarla.

Ítem 8. En este ítem los alumnos calculan las imágenes de algunos de los puntos, aparentemente sin fijarse en si tiene sentido o no calcular las imágenes de estos valores ya que indican que "las soluciones son coherentes", afirmación que realizan probablemente al ver que las imágenes de los valores son los esperados. Además, indican también que la función puede ayudarles a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito porque “la temperatura es constante”.

Ítem 9. Para finalizar les preguntamos cuál es la temperatura máxima que alcanza el agua, cuál es la mínima así como los tiempos para los cuáles se alcanza dichas temperaturas y el tiempo que tardará en pasar de la máxima a la mínima. Los alumnos indican que la máxima temperatura será de 60ºC y que esto sucede en 0 segundos “porque nos lo dice la gráfica” y la mínima será de 30ºC “que será la temperatura ambiente” e indican que esto sucede “a partir de los 700s” ya que “ya empieza a tender a 30ºC”. Además, afirman que el líquido tardará 700 segundos en pasar de la máxima temperatura a la mínima “porque si empieza en 0s y en 700s empieza a tender, es obvio”.

Pareja 8

Ítem 1. Las alumnas de esta pareja empiezan describiendo la relación como proporcional inversa en el sentido de que cuando una variable aumenta su valor la otra lo disminuye, en concreto explican que “cuanto más tiempo haya pasado, más fría estará el agua”. Por otro lado, representan la relación que ellos creen que existiría entre las variables mediante una gráfica con forma de línea recta descendiente, por lo que parece que no parece que conciban que la temperatura irá disminuyendo más lentamente conforme pase el tiempo. Además, cabe destacar que en los ejes escriben “Tiempo (min)” y “Tª (ºC)”, además de que los dibujan escalados, lo que probablemente hacen para poder representar la gráfica. Concretamente, escriben 10, 20, 30, 40, 50 y 60 en el eje OX cada 3 rallas para indicar los minutos ya que así han expresado que se mediría el tiempo; y escriben 100ºC en la parte más alta del eje OY, desde donde parte la gráfica de la función, indicando de este modo que la temperatura inicial de esta sería de 100ºC, posiblemente porque saben que la temperatura de ebullición del agua es de 100ºC y como máximo será esta si está en estado líquido.

Ítem 2. En este segundo ítem las alumnas vuelven a representar la gráfica de la función pero ahora no representan valores concretos en el eje OX como hacían antes, aunque continúan dibujando los ejes escalados. Esto probablemente se deba a que ahora ya no usan la escala de los ejes para representar la gráfica sino que intentan dibujar una gráfica semejante a la que han dibujado antes. No obstante, sí que indican que el punto del que parte la gráfica de la función es, de nuevo, $y = 100$ºC. Ahora bien, para justificar la forma y la posición de la gráfica indican que “está en la parte positiva [de los ejes OX y OY] y es descendiente porque va bajando la temperatura hasta mantenerse en una temperatura ambiente”, además, indican que “es diagonal”, probablemente refiriéndose a que la gráfica tiene forma de recta decreciente con pendiente igual a -1. Añaden también que “la x representa el tiempo” y se mide en minutos “porque pasa el tiempo”, mientras que “la y representa la Tª a la que se encuentra el agua en cada instante” que se mide en ºC.

Ítem 3. Las alumnas indican que la gráfica que mejor representaría la relación estudiada sería $y = ax + b$, además, indican que la que piensan que mejor se adapta es $y = ax - b$, por lo que puede que vean que al ser el parámetro b negativo, la gráfica tiene pendiente negativa, cosa que no es cierto. Señalan también que los parámetros serían “la a y la c”.

Ítems 4 y 5. Una vez realizado el experimento partiendo de las indicaciones proporcionadas en el ítem 4 y habiendo obtenido la nube de puntos que muestran la relación estudiada, las alumnas tienen que escoger 10 puntos de los obtenidos. En este caso, lo hacen “alternativamente” de modo que “no estén ni muy separados ni muy juntos". Por ello, los eligen tratando de que haya puntos a lo largo de todo el eje OX y de modo que así les sea fácil ver la forma de la función.

Ítem 6. A continuación les pedimos que encuentren una función que ajuste a los puntos usando la app Desmos y observando cómo cambia la gráfica de una función al variar algunos aspectos en su fórmula correspondiente. Estas indican que se trata de una función exponencial del tipo $y = e^x$, probablemente después de haber visto la hoja de ayuda. En el apartado b) indican que la función que ajustaría a los puntos es $y = 2^{-10x} + 40$, aunque como podemos ver en la Figura 4.21 no ajusta a estos. Tampoco podemos conocer como han llegado a obtener dicha función puesto que no describen los pasos realizados, aunque sí cómo cambia la gráfica al cambiar los valores de la fórmula. En particular, indican que "cambiando el 40 sube y baja", refiriéndose a que al cambiar el valor relativo al término independiente la gráfica de la función se mueve a lo largo del eje de las y. También explican que "cambiando el $-10x$ cambia hacia la derecha y hacia la izquierda" refiriéndose a que cuando cambian el signo de dicha expresión cambia la orientación de la gráfica. Por último, afirman que "cambiando el 2, no cambia nada" lo que no es cierto, aunque puede que realicen tal afirmación debido a que al tener la imagen a una escala reducida no se aprecia ningún cambio al variar el valor correspondiente a la base del exponente.

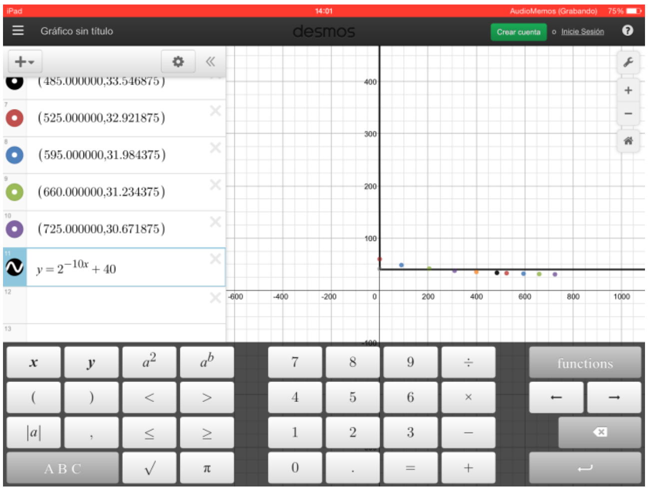

Figura 4.21. Gráfica función obtenida en Desmos (pareja 8, lección 4)

Ítem 7. En cuanto a la función obtenida con la app Graphical Analysis, las alumnas explican que es $y = 27{,}603 \cdot e^{-0{,}004x} + 29{,}364$ y que se ajusta más que la obtenida anteriormente "porque pasa por el centro de todos los puntos".

Ítem 8. A continuación les pedimos que calculen las imágenes de algunos puntos y, teniendo en cuenta el intervalo de tiempo para el cual se ha definido la función, tendría sentido calcular todas las imágenes de los puntos menos la de 10.000 puesto que les pedimos que estudien el enfriamiento de un líquido hasta los 12 minutos. Cabe destacar que las imágenes que calculan las alumnas son erróneas y no corresponden a las imágenes de los puntos a través de ninguna de las dos funciones obtenidas anteriormente. Sin embargo, estas no parecen darse cuenta de ello ya que indican que no saben si las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre. Por otro lado, afirman que la función sí que puede ayudarlas a predecir lo que sucede cuando el tiempo tiende a infinito pero no dan ningún tipo de justificación.

Ítem 9. En este último ítem, indican que la temperatura máxima será de 60ºC, porque es "en el momento en el que apartamos el recipiente de agua de la fuente de calor", y la mínima será de 30ºC porque es "cuando está a temperatura normal" y lo hace a los

725s. Además indican que se basan en la gráfica de Desmos para dar dichas respuestas. Por último, afirman que para pasar de la temperatura máxima a la mínima se tardaran 725s, cosa que deducen “mirando la gráfica de la función que hemos hecho [...] en la app Desmos”.

4.3.4.2. Por ítems

A continuación, realizamos un análisis desde el punto de vista de los tipos de actuaciones observadas en las diferentes parejas relativas a los diferentes ítems

Ítem 1 (Anexo 18, Tabla 18.1)

En cuanto al primer apartado, hemos podido observar dos tipos diferentes de interpretaciones por lo que respecta a la descripción de la relación entre las variables tiempo y temperatura. El primero de ellos es el de los alumnos que describen la relación entre las variables en detalle indicando que inicialmente la temperatura descenderá más rápido y después tenderá a estabilizarse hasta llegar a la temperatura ambiente (parejas 2 y 7) y los alumnos que describen el tipo de relación entre ambas variables como indirectamente proporcional sin dar detalles de cómo será esta relación, esto es, indicando que cuando la variable tiempo aumenta, la temperatura disminuye (parejas 3, 4, 5, 6 y 8). Los alumnos de la pareja 1 no dan ningún tipo de descripción escrita sino que dibujan unos ejes de coordenadas.

En el segundo apartado les pedimos que dibujen la relación entre las variables y todos los alumnos son conscientes de que la mejor forma de expresar gráficamente esta relación es mediante la gráfica de una función. No obstante, los alumnos de las parejas 6 y 7 dibujan los ejes pero no la gráfica. En cuanto al tipo de representaciones que realizan podemos observar diferentes tipos: los que conciben la relación como que no se estabiliza y dibujan una recta con pendiente negativa (parejas 1 y 8) y los que ven que llega un momento en el que se estabiliza. De entre estos últimos distinguimos tres tipos de gráficas: los que dibujan un segmento de recta decreciente unido a uno con pendiente 0 (pareja 4), los que dibujan una función de proporcionalidad inversa de modo que la función se estabiliza en $y = 0$ o cerca de este valor (parejas 3 y 5) y los que ven la relación como una curva que decrece rápidamente al inicio y de forma más lenta después hasta alcanzar la temperatura del ambiente (pareja 2). Por lo que respecta al modo de representar las gráficas, parece ser que algunos alumnos piensan en un experimento en concreto con valores concretos para representar la gráfica de la función. En particular, los alumnos de las parejas 2 y 3 usan valores concretos en la gráfica que han representado (los primeros para indicar que la temperatura ambiente en su caso sería de 20ºC y los segundos para indicar que el origen de coordenadas es 0) y los alumnos de las parejas 5 y 8 escalan los ejes, lo que parece servirles de ayuda para representar la gráfica, aunque los de la pareja 5 no escriben ningún número en estos mientras que los de la pareja 8 indican que la temperatura máxima será de 100ºC e indican 10, 20... 60 en el eje OX para referirse a los minutos que transcurren.

Ítem 2 (Anexo 18, Tabla 18.2)

En este ítem los alumnos vuelven a representar las gráficas que habían dibujado en el ítem anterior a diferencia de los alumnos de las parejas 6 y 7 que antes no habían sabido representar la relación entre las variables y ahora sí, no sabemos por qué motivo. En este ítem los alumnos de la pareja 6 representan un conjunto de rectas tal y como hacían los de la pareja 4 pero uniendo ambas rectas mediante una curva mientras que los alumnos de la pareja 7 actúan de forma similar a los de la pareja 2, que dibujan una curva que decrece muy rápido al inicio y poco a poco disminuye la velocidad con la que decrece tendiendo a un valor constante igual a 20 que, tal como explican, es la temperatura del ambiente. Por lo que respecta al uso de valores concretos tenemos que los usos que hacen los alumnos son los mismos que hemos indicado en el apartado anterior, a diferencia de que ahora aquellos alumnos que usaban los valores para ayudarse a representar la gráfica de la función parece que vuelven a escribir los valores pero porque tratan de copiar lo que ya han representado antes, no para ayudarse a representar la gráfica de nuevo (como ya habíamos observado que sucedía en las lecciones anteriores).

En cuanto a la descripción que dan para justificar la forma de la gráfica, encontramos que algunos alumnos sí que son conscientes de que la gráfica se estabilizará en un momento determinado. Como hemos dicho, los alumnos de las parejas 2 y 7 consideran la gráfica como una curva decreciente que se estabiliza a una temperatura ambiente de 20ºC, por otro lado los de la pareja 4 indican que la gráfica “no toca el eje de las x” porque “la temperatura ambiente no es completamente 0” y, por último, los de la pareja 6 que comentan que la temperatura no es menor de 0 grados “porque [el agua] no llega a congelarse”. No sabemos si el resto de alumnos considera que la gráfica se estabiliza ya que no encontramos evidencia de ello ni en la forma en la que dibujan la gráfica ni en la explicación que dan de la forma de esta.

En relación con las medidas de referencias todos los alumnos consideran la variable temperatura como la variable dependiente que se mide en ºC y la variable tiempo como la independiente que se mide en segundos, menos los alumnos de las parejas 2 y 8 que consideran más adecuado que se mida en minutos.

Por último, en cuanto a la justificación que dan de la posición en la que dibujan la gráfica con respecto a les ejes, encontramos dos tipos de razonamientos: los alumnos que explican por qué no traspasa la función el eje OX (parejas 4 y 6) y los que indican que dibujan la gráfica en esta posición “para que salgan resultados positivos” (pareja 2). El resto de alumnos no dan una justificació de la posición de la gráfica sino de nuevo de la forma de esta.

<u>Ítem 3</u> (Anexo 18, Tabla 18.3)

En este ítem encontramos gran variedad por lo que respecta al tipo de familias de funciones que han elegido los alumnos debido, probablemente a dos factores: a la variedad de representaciones gráficas que han realizado y al hecho de que en algunos casos no se acuerdan o no saben qué tipo de función podría ajustar a la gráfica que han representado. En primer lugar cabe destacar que los alumnos que conciben la gráfica de la función como una recta decreciente o un conjunto de rectas (parejas 1, 4, 6 y 8) eligen las familias de funciones $y = ax + b$ que es una familia de funciones de rectas, incluso los de la pareja 6 eligen esta y $y = ax$ que también es una familia de funciones de rectas, aunque en este caso de rectas que pasan por el origen de coordenadas. Por otro lado tenemos que algunos de los alumnos que representan una curva, tanto los que dibujan una curva que se estabiliza (pareja 2) como los que dibujan una de la forma proporcional inversa (pareja 3) eligen las familias de funciones $y = a/x^n + b$ o $y = a/x^2$. Por último tenemos los alumnos de la pareja 5 que, a pesar de dibujar una curva con la forma de una función de proporcionalidad inversa indican que las familias de funciones que podrían representarlas son $y = ax$ o $y = ax^b$ o los de la pareja 7 que indican que sería $y = ax^b$, probablemente por desconocimiento del tipo de representación gráfica que da lugar este tipo de familias de funciones.

Por otro lado, la mayoría de alumnos sí que son capaces de identificar cuáles son los parámetros, menos los de las parejas 6 y 7 que indican que son x e y, probablemente porque no sepan a qué nos referimos por parámetros, no porque no sepan su significado. Además, los alumnos que eligen las familias de funciones $y = ax$ o $y = ax + b$ son capaces de determinar el significado de los parámetros en relación con la gráfica por influencia de lo que sucedía en los experimentos anteriores. En concreto, los alumnos de la pareja 1 indican que a es la pendiente de la función y b la altura, los de la pareja 4 que a es la inclinación de la recta y b el punto de corte llegando incluso a especificar qué sucede con la gráfica dependiendo del tipo de valores que tomen los parámetros tal como hacen también los de la pareja 5 que comentan que si el parámetro a de $y = ax$ es negativo gira hacia la izquierda y si es positivo hacia la derecha. Por otro lado, cabe destacar que los alumnos de la pareja 2, que eligen $y = a/x^n + b$ indican que el parámetro b será la temperatura ambiente, que ellos han considerado como 20, probablemente porque han visto que en experimentos anteriores el parámetro b indica la altura de la gráfica, tratando de establecer una especie de paralelismo.

<u>Ítems 4 y 5</u> (Anexo 18, Tabla 18.4)

Como ya hemos comentado, en el ítem 4 les damos instrucciones a los alumnos de cómo deben realizar el experimento y como obtendrán los datos con los que trabajaran en el ítem siguiente, por lo que analizamos los ítems 4 y 5 de forma conjunta. Una vez realizado el experimento y habiendo obtenido la nube de puntos que muestran la relación entre el tiempo y la temperatura, les pedimos a los alumnos que elijan una serie de puntos y que justifiquen su respuesta. En la tabla correspondiente del Anexo 18 se pueden observar los puntos elegidos por los alumnos de forma gráfica así como el motivo que pensamos que ha guiado su elección, basándonos en los tipos de puntos elegidos y en los tipos de justificaciones que dan los alumnos.

Por ello, hemos encontrado diferentes de respuestas. En primer lugar, hemos podido constatar que los alumnos tratan de escoger los puntos de modo que estos cubran todo el eje OX, esto es, de modo que haya puntos representados a lo largo de todo el eje OX porque así les será más fácil a la hora de ajustar la función a estos. Por tanto, puede que piensen en el tipo de forma de la gráfica concreta que representa el fenómeno (y que han podido observar mientras obtenían los datos cuando realizaban el experimento) pero no en las características concretas de esta o en que no es necesario escoger muchos puntos del final puesto que estos tendrán como segunda coordenada un valor semejante. Además, más en concreto hemos podido observar dos tipos de respuestas en los alumnos: aquellos que eligen los puntos de forma que cubran todo el eje OX pero aleatoriamente (parejas 2, 4, 5, 6, 7 y 8) y aquellos que los eligen igualmente espaciados (parejas 1 y 3). Cabe destacar que los alumnos de la pareja 2 deciden pasar las coordenadas temporales de segundos a minutos para trabajar con valores más pequeños.

<u>Ítem 6</u> (Anexo 18, Tabla 18.5a y 18.5b)

En el Anexo 18 podemos observar las tablas relativas a los resultados del ítem 6. En la primera de ellas hemos incluído el tipo de función que los alumnos consideran que ajusta a los puntos, si cambian o no con respecto a la que habían considerado en el análisis cualitativo previo, en el qué parece que se basan para hacer tal afirmación, si piden la hoja de ayuda o no y si consiguen encontrar una función que ajuste a los puntos considerados. Por otro lado, en la segunda tabla, al igual que en las dos lecciones anteriores, representamos 1. el proceso seguido por los alumnos para encontrar la fórmula que ajuste a los puntos, 2. el tipo de significado que atribuyen a los parámetros en cada momento en base a sus respuestas y 3. el efecto del uso de la ficha de ayuda correspondiente en sus actuaciones.

En cuanto al tipo de función que eligen cabe destacar que la mayoría de ellos indica que es una exponencial por lo que cambian de función con respecto a la que habían considerado en el análisis cualitativo previo, menos los alumnos de la pareja 7 que parece que tienen dificultad al relacionar la forma de los puntos con esta función porque no dan ningun tipo de respuesta y tampoco piden la hoja de ayuda. No obstante, los alumnos de las parejas 1 y 5 no indican que se trata de una función exponenial sino que tratan de ajustar dicha función después de pedir la hoja de ayuda por lo que probablemente tampoco la reconocieran antes de pedir la ayuda. Además, parece que tienen dificultades a la hora de ajustar dicha función a los puntos puesto que todos menos los alumnos de las parejas 4 y 7 piden la hoja de ayuda. No obstante, finalmente solo consiguen encontrar una función que ajuste los de las parejas 2, 3 y 4, también los de la pareja 6 aunque solo visualmente porque en realidad la función parece que ajuste a los puntos debido a la escala en la que aparecen los ejes de coordenadas.

Por el tipo de función que consideran los alumnos para realizar el ajuste podemos distinguir entre raíz cuadrada, polinómicas y exponenciales. En el primer caso tenemos a los alumnos de las parejas 4, que consideran una raíz cuadrada, que tiene una forma parecida a la de los puntos pero no pasa por encima de estos). En el segundo, tenemos a los alumnos de la pareja 6 que consideran una función lineal que ajusta pero solo visualmente. Por último, de los alumnos que han considerado la función exponencial tenemos los que consideran una exponencial de base e (parejas 1 y 5), probablemente por la influencia de las pistas que se les proporcionan mediante la hoja de ayuda y que en ninguno de los casos ha servido para que encuentren una función que ajuste a los puntos, y los que han considerado una exponencial con base distinta a e (parejas 2, 3 y 8), de modo que algunos consiguen obtener la fórmula de una función que sí que se aproxime (parejas 2 y 3).

En cuanto al significado que atribuyen a los parámetros, tenemos que en esta lección los alumnos no explicitan en detalle ni el proceso por el cual han llegado a obtener la fórmula de la función ni las acciones que han realizado sobre esta para que su gráfica tenga la posición, forma y orientación que tiene, de modo que no disponemos de mucha información que nos permita interpretar el significado que otorgan a los parámetros. Esto probablemente se debe a que los alumnos no han trabajado tanto esta función en cursos previos o a que la variable x en este caso se encuentra en el exponente. No obstante, hemos podido observar que otorgan distintos tipos de significados a los parámetros, esto es, estático, dinámico y de característica de una gráfica concreta aunque hará falta complementar esta información con los datos que se desprendan del estudio de casos. En concreto, tenemos que hay alumnos que no han considerado como función la exponencial pero que tampoco explican el significado de los parámetros. No obstante, aquellos que tratan de ajustar una exponencial, tanto de base e como no, indican que el parámetro d de la fórmula $y = a'e^{kx} + d$ puede tener sentido dinámico (parejas 1, 2 y 8) o de característica de la gráfica si lo consideran como el punto de corte con el eje OY (pareja 3), que el signo negativo de a' y de k indican la orientación por lo que tiene sentido estático (parejas 5 y 8 respectivamente) y el valor numérico de a' sentido dinámico puesto que "Aumentando, la función desciende y la curva se abre" (pareja 3). Además, algunos de estos alumnos distinguen varios parámetros en el exponente y consideran la forma canónica $y = ae^{e^{bx+c}} + d$ de modo que interpretan que c indica el movimiento de la gráfica en el eje OX (sentido dinámico, pareja 2) y b el desplazamiento de la curva a otro cuadrante (sentido dinámico, pareja 3).

Ítem 7 (Anexo 18, Tablas 18.6)

En este ítem hemos observado que con la ayuda de Graphical Analysis los alumnos sí que han sido capaces de encontrar una función que ajuste a los puntos y que es una exponencial de base e. Cabe destacar que, no obstante, no todos los alumnos consideran esta como la que mejor ajusta y, por consiguiente, la que usaran en los siguientes ítems, solo los alumnos de las parejas 1, 4, 5, 6, 7 y 8. Los alumnos de la pareja 2 prefieren considerar la función que obtienen en Desmos porque para ellos la suya es más fácil ya que es "sin incógnita", refiriéndose a que en la que les proporciona Graphical Analysis aparece una letra como base de la potencia. No obstante, acaban concluyendo que se trata de una opinión y que también podrían considerar la que obtienen en este ítem. Por otro lado, los alumnos de la pareja 3 que también obtienen una función que ajusta a los puntos, aunque no del todo, indican que ajusta mejor la que calculan con Desmos, sin justificar su respuesta. Sin embargo esto parece ser debido a que representan ambas en Desmos para comprobar si ajustan y se equivocan al copiar la del ítem 7 ya que escriben como exponente -0,04 en vez de -0,004, por lo que no ajusta tanto como la otra.

Ítem 8 (Anexo 18, Tablas 18.7)

En relación con el primer apartado, les pedimos a los alumnos que calculen las imágenes de unos cuantos puntos usando una de las funciones obtenidas anteriormente. Estos usan las fórmulas que indican que ajustan mejor a los datos en el ítem anterior, menos los alumnos de la pareja 4 que eligen la del ítem 6 y habían afirmado anteriormente que ajustaba mejor la del 7. En base a ello tenemos que todos ellos calculan las imágenes de forma correcta, menos los de las parejas 5 y 6 que obtienen los mismos resultados pero en ningún caso son las imágenes de los puntos correspondientes por ninguna función. Cabe destacar que, como los alumnos de la pareja 2 habían considerado una función de modo que la variable independiente correspondiente al tiempo se medía en minutos en vez de en segundos, deciden pasar los valores cuyas imágenes les pedimos que calculen también de segundos a minutos teniendo que calcular así $f(1{,}6)$ $f(8{,}3)$, $f(10)$ y $f(166{,}6)$.

En el apartado b), todos ellos indican, de forma explícita o implícita, que lo que obtienen al calcular las imágenes de los valores es la temperatura del agua en un instante determinado.

En cuanto al apartado c) y teniendo en cuenta el intervalo de tiempo en el que tiene sentido el experimento, tenemos que el dominio de la función es [0, 725] (independientemente de si consideran una función u otra), por lo que no tendrá sentido calcular $f(10000)$ ya que 10000 está fuera del dominio. No obstante, cuando les preguntamos a los alumnos si creen que las respuestas obtenidas muestran lo que verdaderamente ocurre, observamos diversidad de respuestas. Tenemos que los alumnos de las parejas 1, 2, 6 y 7 responden que sí que tienen sentido aludiendo a que a más tiempo menor temperatura (pareja 1), la temperatura tiende a estabilizarse (parejas 2 y 6) y las respuestas son coherentes (pareja 7). Por otro lado, los alumnos de las parejas 4 y 5 responden que no tienen sentido, los de la 4 "porque no se puede alcanzar esa temperatura" (refiriéndose a la imagen de 10000 que la han calculado mal y les da -55,58) y los de la 5 "porque la temperatura tiene que estar a temperatura ambiente", porque al calcular las imágenes de forma errónea obtienen valores que no se corresponden con la realidad. Los de las parejas 3 y 8 no responden el apartado, los primeros por falta de tiempo. En definitiva, cabe destacar que todo apunta a que la mayoría de alumnos piensan en el fenómeno en sí para justificar su respuesta (tanto si encuentran sentido a los valores como si no), sin tener en cuenta el intervalo para el que se ha definido la función.

Por último, en el apartado d) los alumnos miran de nuevo el fenómeno en sí para justificar que la función sí que puede ayudar a predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito porque en este caso tanto los valores para las imágenes de la función como la temperatura del fenómeno tenderán a estabilizarse, aunque de nuevo no parecen tener en cuenta que la función se define en un intervalo concreto y no tiene por qué tener sentido fuera de este.

Ítem 9 (Anexo 18, Tablas 18.8)

En los apartados a) y b) de este ítem les pedimos a los alumnos que calculen la temperatura máxima i mínima del agua y los valores del tiempo para los cuales se alcanzan dichas temperaturas. Tenemos que la mayoría de alumnos da como respuesta que la máxima temperatura es aproximadamente de 60ºC y se alcanza al inicio, mientras que la mínima es de aproximadamente 30ºC y se alcanza al final del experimento, a los 725s. Por lo que respecta a la forma de encontrar las respuestas tenemos que algunos se basan en la tabla de puntos proporcionada por Graphical Analysis (parejas 1 y 5), otros en la tabla y en cómo conciben el fenómeno (pareja 2) y otros en la gráfica bien de Desmos o de Graphical Analysis y en los valores de las coordenadas de los puntos (parejas 4, 7 y 8). Cabe destacar que los alumnos de la pareja 3 no dan ningún tipo de respuesta por falta de tiempo. Por lo que respecta a las justificaciones tenemos que los alumnos justifican que la máxima temperatura se alcanza al inicio, cuando se aparta el líquido de la fuente de calor. Por otro lado, justifican que se alcanza la mínima temperatura en el último punto (parejas 4, 5, 6 y 8) o bien se fijan en que la función tiende a un valor concreto y se alcanza la mínima a partir de un valor concreto (parejas 1, 2 y 7).

Por último, les pedimos que calculen el tiempo que tardará el agua en pasar de la máxima a la mínima temperatura. La mayoría explica que esto sucederá después de 725s aproximadamente (parejas 4, 5, 6, y 8) que es el valor del tiempo para el cual se alcanza la mínima temperatura y que coincide con la primera coordenada del último punto, mientras que la pareja 1 indica que a los 718s y la 7 a partir de los 700s (el mismo valor que han considerado como temperatura mínima) porque a partir de estos valores ya consideran la temperatura constante.

4.3.4.3. Resumen de resultados

Al igual que en la lección anterior, en este apartado incluimos un resumen de los resultados observados a lo largo del experimento del enfriamiento de un líquido y que no se incluyen ni en los resultados presentados alumno por alumno relativos a cada item ni en el resumen de los resultados presentados de cada uno de los ítems.

Efecto del análisis cualitativo en la gestión y el control del proceso de modelización

Al contrario que en los experimentos de las dos lecciones anteriores, en este nos ha resultado complicado detectar la influencia del estudio cualitativo a lo largo de la realización del experimento. Esto es debido al hecho de que los alumnos presentan dificultades a la hora de representar gráficamente la relación estudiada (ítem 2) y de identificar el tipo de gráfica con la familia de funciones exponenciales (ítem 3), probablemente por el hecho de haberla estudiado en menor profundidad en cursos previos. Este hecho se puede constatar también en las respuestas de los alumnos al ítem 6, cuando les pedimos que encuentren una función que ajuste a los puntos representados puesto que, a pesar de que al representar dichos puntos se puede apreciar la forma que debería tener la gráfica de la función, la mayoría de ellos la reconoce como una exponencial solo después de pedir la hoja de ayuda en la que se indica que transformen la función $y = e^x$ para conseguir que ajuste a los puntos (también puede que no sean capaces de reconocerla por el hecho de que la posición en la que se suele presentar la función exponencial es la análoga a la de $y = e^x$).

No obstante, sí que podemos afirmar que, aunque las funciones que los alumnos representan en el ítem 2 no son exponenciales, podemos observar como la mayoría de ellos se basan en dichas gráficas para tratar de determinar el tipo de familia de funciones que representa el fenómeno en el ítem 3, aunque no siempre de forma correcta. Por ejemplo, los alumnos de la pareja 2 que en el ítem 2 representan una función exponencial, indican que para ellos "no es ninguna de estas" (refiriéndose a que no encuentran ninguna familia de funciones en el ítem 3 que represente la gráfica) "porque no hay ninguna [en la lista de expresiones dadas] que en un momento determinado se mantenga constante pero que antes haya sido una curva proporcional" y acaban eligiendo $y = a/x^n + b$.

<u>El significado de los parámetros</u>

Cabe destacar que, como hemos hecho en las lecciones anteriores, para determinar el significado de los parámetros de las familias de funciones a las que aluden los alumnos en esta lección, analizaremos sus actuaciones en el ítem 3, antes de realizar la toma de datos, y en el ítem 6, cuando tratan de encontrar la función que ajusta a los puntos mediante la app Desmos. En concreto tenemos que en este caso la mayoría de alumnos no encuentra dificultades a la hora de otorgar significado a los parámetros durante el análisis cualitativo previo pero encontramos que no explican el significado de estos durante el ítem 6. Esto se debe a que inicialmente conciben el fenómeno, no como una relación que pueda expresarse mediante una función exponencial sino mediante una función lineal, cuadrática o proporcional inversa y, al tomar los datos y pedir la hoja de ayuda se dan cuenta de que la función es exponencial, función que no han trabajado tanto previamente.

En concreto, en el análisis cualitativo previo vemos que son capaces de otorgar significado a los parámetros en el ítem 3 y que, además, aparecen significados de varios tipos. Por ejemplo, los alumnos que eligen familias de funciones lineales como $y = ax$ o $y = ax + b$ conciben que a y b tienen un significado estático puesto que indican que a es la pendiente de la función y b la altura (pareja 1) o que a es la inclinación de la recta y b el punto de corte, otorgando así a b un significado de característica particular de la gráfica (pareja 4). Además, incluso en algun caso son capaces de explicar las características de la gráfica dependiendo del tipo de valores que tomen los parámetros tal como hacen también los de la pareja 5, que comentan que si el parámetro a de $y = ax$ es negativo gira hacia la izquierda y si es positivo hacia la derecha. Por otro lado, los alumnos de la pareja 2 que eligen la familia de funciones $y = a/x^n + b$ son capaces de dotar de significado el parámetro b a pesar de que esta función no ha sido estudiada en las dos lecciones anteriores. En concreto indican que b será la temperatura ambiente, que para ellos toma el valor 20 tal como indican en la gráfica, probablemente porque han visto que en experimentos anteriores el parámetro b indica la altura de la gráfica, tratando de establecer una especie de paralelismo.

Por otro lado, en el ítem 6 dan escasas explicaciones del significado de los parámetros, probablemente por el hecho de que tienen dificultades para encontrar la función que ajusta a los puntos. Aun así, hemos podido identificar significados de varios tipos. Aquellos alumnos que tratan de ajustar una exponencial, tanto de base e como no, indican que el parámetro d de la fórmula $y = a'e^{kx} + d$ es el movimiento de la gráfica en la dirección del eje OY (sentido dinámico, parejas 1, 2 y 8) o el punto de corte con el eje OY (sentido de característica de la gráfica, pareja 3), que el signo negativo del parámetro a' indica la orientación de la gráfica (sentido estático, pareja 5, que considera que este parámetro es negativo) y el valor como aumenta o disminuye el grado de apertura de la gráfica (sentido dinámico, pareja 3) y que el signo negativo de k indica también un cambio de orientación (sentido estático, pareja 8). Además, algunos de estos alumnos distinguen varios parámetros en el exponente y consideran la forma canónica $y = ae^{e^{bx+c}} + d$ de modo que interpretan que c indica el movimiento de la gráfica en el eje OX (sentido dinámico, pareja 2) y b el desplazamiento de la curva a otro cuadrante (sentido dinámico, pareja 3). Por lo que respecta a los alumnos que no han considerado como función la exponencial tenemos que ninguno de ellos explica el significado de los parámetros.

Conviene señalar que, al igual que en el resto de experimentos, complementaremos la información relativa al significado que otorgan los alumnos a los parámetros en el estudio de casos, en el que se analizará este aspecto con más detalle.

5. Estudio de casos

En el presente capítulo abordaremos la parte del modelo de actuación del MTL relativa al estudio de casos de modo que describiremos las actuaciones de los estudiantes durante las entrevistas con enseñanza que tuvieron lugar después de la realización del estudio del grupo. Ahora bien, debido a la extensión del análisis que llevamos a cabo, no incluiremos aquí el análisis de los datos en sí (que se podrá consultar en detalle en los Anexos 25, 26, 27 y 28) sino un resumen de las actuaciones de los estudiantes y de los resultados obtenidos.

En concreto, empezaremos indicando la finalidad con la que se realizó el estudio así como la forma en la que se llevó a cabo (sección 5.1). A continuación, describiremos con detalle la técnica que utilizamos para obtener los datos y realizar el análisis de estos (sección 5.2). Seguiremos con la descripción de las características de los estudiantes seleccionados para la realización del estudio de casos (sección 5.3), basándonos en sus actuaciones en el estudio de grupo. Y, por último, presentaremos una descripción de los casos estudiados (sección 5.4) en la que incluiremos, para cada caso, un resumen de las actuaciones de los estudiantes, una tabla con la descripción del proceso realizado por estos para la obtención de la función de ajuste a los datos del experimento y también un resumen de los resultados más importantes observados en sus actuaciones.

5.1. FINALIDAD DEL ESTUDIO

En general, este análisis se realizará con el objetivo de mejorar el modelo de enseñanza en base a las tendencias cognitivas observadas y, de este modo, poder incorporar en el modelo de actuación aquellos fenómenos que no han sido descritos anteriormente.

En concreto, la finalidad del estudio de casos será la de analizar las actuaciones de los estudiantes al enfrentarse a un último experimento: el calentamiento de un cuerpo. Por ello, realizaremos entrevistas con enseñanza a cada uno de los casos analizados en las que también incluiremos partes que tendrán un carácter de diagnóstico. Como ya hemos mencionado anteriormente, en esta parte nos interesará conocer en detalle aquellos aspectos que no hemos podido observar en las actuaciones de los estudiantes durante el estudio del grupo debido al tipo de metodología empleada y a la naturaleza de los instrumentos de recogida de datos usados. En especial, nuestro objetivo será el de determinar las tendencias cognitivas de los estudiantes a partir de las observaciones empíricas en relación con dos aspectos: 1. El análisis cualitativo del fenómeno estudiado y de las familias de funciones y 2. La forma de dotar de significado a los parámetros de una familia de funciones determinada en una forma canónica concreta y mediante el uso de tecnología.

5.2. LA TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE DATOS

Como mencionábamos en el capítulo 1, al posicionarnos en el marco teórico y metodológico de los MTL no nos centraremos sólo en analizar aquellos aspectos que nos permitan dar respuesta a las preguntas de investigación sino también en describir las actuaciones que nos podrán ayudar a reelaborar el MC y determinar tendencias cognitivas en los estudiantes.

En primer lugar, nuestra intención será la de obtener el protocolo escrito a partir del protocolo visual, esto es, como explica Puig (1996, p.74), "segmentar el protocolo oral y trasladar lo que los resolutores dicen y hacen a lenguaje escrito". Para ello, empezaremos extrayendo los datos de los instrumentos de recogida de datos mencionados en el capítulo 4.2.4 de modo que en una primera columna incluiremos la transcripción de las intervenciones tanto de la investigadora como del alumno, y en una segunda columna la descripción de los gestos y actuaciones acompañados de imágenes de notas que toman los alumnos, capturas de pantalla de la grabación en vídeo, capturas de pantalla de la tableta y comandos que introducen en la tableta (como por ejemplo los puntos y las expresiones). Y, por último, en una tercera columna realizaremos lo que Puig (1996) llama una reconstrucción racional, es decir, una narración basada en las actuaciones de los estudiantes con el propósito de dar sentido a la situación de enseñanza y aprendizaje. Por último, organizamos los resultados observados para cada alumno por tipos de actuaciones o tendencias cognitivas.

Al igual que hemos comentado en el estudio del grupo, mostraremos las tendencias cognitivas observadas a lo largo de todo el estudio de casos (y si lo consideramos necesario, relacionándolas con las obtenidas en el estudio de grupo) en el capítulo 7.

Además, cabe destacar que, como comentábamos en el capítulo anterior, aquello que vamos obteniendo en cada paso ya son resultados en sí, aunque estén en diferentes niveles de organización (empezamos obteniendo resultados menos organizados o más "en bruto", que serían aquellos que se obtienen como resultado de la obtención del protocolo escrito, y terminamos con un resumen de los resultados observados que se agrupan según tendencias cognitivas observadas).

5.3. CARACTERÍZACIÓN DE LOS PARTICIPANTES

A continuación, describimos las características de los alumnos que participaron en las entrevistas en base a sus actuaciones en el estudio del grupo. Es importante resaltar que, debido a que en el estudio del grupo los alumnos trabajaron por parejas, la descripción que realizamos se hará en base a las actuaciones observadas sin discernir si pertenecen a un miembro de la pareja u al otro puesto que se presupone que dichas actuaciones son resultado de un consenso entre ambos. Los alumnos que participaron en el estudio de casos son 1.2, 2.1, 4.1 y 5.1, que de ahora en adelante pasamos a llamar IG, DC, JL y AB, respectivamente. Por tanto, señalaremos con estas siglas las intervenciones de los alumnos a lo largo de todo el estudio y con las siglas MO las de la investigadora.

Pareja 1 (IG)

En cuanto a la lección del experimento de la pelota, hemos observado que estas alumnas tienen dificultades a la hora de representar el fenómeno estudiado gráficamente, incluso a la hora de identificar cuál es la variable dependiente (ítem 2). Además conciben que los valores para el tiempo y la altura deben ser positivos, y parece que necesiten pensar en valores concretos para poder representar la gráfica de la función, probablemente porque están acostumbrados a hacer representaciones gráficas pasando primero por representar algunos puntos de esta mediante una tabla de valores. Además, observamos dificultades a la hora de interpretar las familias de funciones puesto que confunden $y = ax$ con $y = a/x$. Por otro lado, tienen dificultades para ajustar la parábola a los puntos y solo consiguen representar "en sentido contrario" la gráfica y "hacerla más amplia y estrecha", pero después de proporcionarles la ficha con la ayuda, consiguen mover horizontalmente y verticalmente la gráfica hasta encontrar la fórmula de la función que ajusta a los puntos, de modo que esta se desplaza tantas unidades como indican las coordenadas del vértice, por lo que otorgan un significado dinámico a los parámetros pero también de características concretas de la familia de funciones cuadráticas (en el caso de los parámetros c y d). En cuanto a las transformaciones canónicas, cabe resaltar que a pesar de que los cálculos que realizan son correctos los hacen sin ninguna finalidad puesto que al final no comparan la fórmula obtenida después de pasarla a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$ con la que han obtenido en Desmos. Por último, a pesar de tomar el suelo como referencia (ya que fijan el eje OX en el suelo), interpretan que este toma valores distintos de cero (ítem 9 apartado a)) e iguales a la altura de la pelota en el suelo (valor que sí que interpretan de forma adecuada).

En relación con el experimento del muelle, tenemos que las alumnas conciben que la relación que tienen que estudiar es entre la cantidad de canicas y el alargamiento del muelle, aunque parece que conciben la primera como el peso ya que así lo indican en el ítem 2: "$x =$ número de canicas (peso)". Además, conciben la gráfica como lineal y continua, cosa que parece que hacen al considerar que esta variable es el peso y verlo no como el peso de cada canica de un experimento concreto sino de forma general puesto que la variable peso puede tomar todos los valores reales. En cuanto a la forma canónica considerada, cabe destacar que eligen $y = ax$ puesto que han dibujado la gráfica partiendo del eje de coordenadas pero posteriormente no tienen problema en considerar $y = ax + b$ ya que, por cómo han tomado las referencias, su gráfica no pasa exactamente por el origen de coordenadas. En cuanto al significado que otorgan a los parámetros, antes de usar la app indican que a es la pendiente de la recta y b el parámetro que hace que esta pase o no por el (0,0), de modo que parece que le otorguen un significado estático y de características concretas de la familia de funciones lineales respectivamente, porque así la han estudiado previamente en clase. No obstante, después de trabajar con Desmos, indican que a cambia la inclinación de la gráfica y b cambia la altura, con lo que parece que les otorgan un significado dinámico. Además, distinguen entre el valor numérico de a y el signo ya que explican que este último indicará que la recta es decreciente si es negativo y que es creciente si es positivo. En cuanto a la toma de referencias, cabe destacar que estos marcan los puntos en la base del vaso, en el mismo sitio en el que fijan el eje OX. Parecen conscientes de que lo que hagan influirá en los valores que tome la variable alargamiento y también de qué forma influirá. De hecho, inicialmente querían girar los ejes de coordenadas para que la variable y tomara valores positivos y fuera creciente pero debido a que la app no permite que estos giren más de 90°, deciden cambiar la concepción que tienen de la variable y asumir que será cero inicialmente y que tomará valores negativos. Cabe destacar que a la hora de construir las coordenadas de los puntos para encontrar una función que ajuste a estos, se equivocan y consideran como variable independiente el tiempo, que es la variable x que viene dada directamente por la app. No obstante, se dan cuenta de ello cuando calculan la fórmula de la función en Graphical Analysis y rectifican, considerando esta última como la fórmula de a función en los ítems posteriores.

Por último, en cuanto al experimento del enfriamiento del agua, tenemos que inicialmente las alumnas conciben la gráfica como una recta decreciente, puesto que ven la relación de modo que al aumentar los valores para una variable (tiempo), los valores de la otra disminuyen (temperatura), aunque van más allá en la explicación que dan puesto que afirman que "cuanta más temperatura, más tardará en enfriarse" pero no lo expresan gráficamente. Al concebir la gráfica de este modo, eligen la familia de funciones $y = ax + b$ como aquella que mejor describe el fenómeno e indican que a es la pendiente y b la altura de la función, probablemente influenciadas por lo que han visto en el experimento anterior. Sin embargo, una vez representados los puntos gráficamente en Desmos y después de ver que una recta no es la función que mejor ajuste a estos, piden la hoja de ayuda y tratan de ajustar una función exponencial de base e a estos sin éxito. Finalmente, consiguen encontrar una función que ajuste a los puntos usando Graphical Analysis e interpretan que tanto la temperatura como la función que han usado para modelizar el fenómeno se mantendrán constantes a partir de un determinado instante.

Pareja 2 (DC)

En relación con la lección del experimento de la pelota, estos alumnos sí que conciben la relación estudiada como parabólica pero además ven el tiempo como absoluto, es decir, consideran que el tiempo vale cero justo cuando la pelota toca el suelo por primera vez, a pesar de presentarse el fenómeno como en un contexto más amplio. Por lo que respecta a las formas canónicas de las funciones, podemos ver que identifican la parábola con la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ pero no con $y = a(x - c)^2 + d$, cosa que parece ocasionarles dificultades a la hora de ajustar la gráfica a los puntos en Desmos puesto que llegan a obtener $y = ax^2 + c$ a falta de desplazar la gráfica horizontalmente pero tratan de añadirle un término bx para conseguirlo sin obtener el resultado deseado (cabe destacar que durante el ajuste los alumnos buscan que los parámetros hagan el "movimiento" deseado, no intentan ver qué tipo de "movimiento" hacen). En relación con el significado que atribuyen a los parámetros tenemos que antes de realizar el experimento solo son capaces de dar sentido al parámetro a de $y = ax^2 + bx + c$, que explican que es negativo por ser la gráfica convexa. Luego, al trabajar con la app explican el resto; y con el uso de la hoja de ayuda (ya que con la pista no saben hacer mucho más de lo que hacen con la app) y la nuestra, son capaces de dar sentido a todos los parámetros de $y = a(x - c)^2 + d$. En cuanto a las formas canónicas, tenemos que los alumnos realizan las operaciones que les pedimos sin ninguna finalidad, no con la de que las comparen ya que transforman la función obtenida en Desmos a forma canónica polinómica y la obtenida en Graphical Analysis a la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$. Por otro lado, en estos alumnos hemos observado una cierta tendencia a considerar el suelo como referencia puesto que así lo consideran en los ítems 1 y 2 cuando esbozan la gráfica y así lo consideran posteriormente, a pesar de que no toman las referencias de modo que así sea. De hecho, cuando toman las referencias en Video Physics no son conscientes de la repercusión que tendrá esto a la hora de interpretar los datos posteriormente ya que dan razones que poco tienen que ver con la relación estudiada para justificar su elección. Además, conciben que la altura de la pelota en el suelo es cero también pero, aunque esto es cierto por como toman las referencias, parece que lo afirman porque así lo hacen habitualmente, no como resultado de reflexionar sobre su experimento en concreto. Por último, cabe destacar que al usar la fórmula de una función que no es correcta, se dan cuenta de que los resultados que obtienen no tienen sentido con el experimento pero, en vez de centrarse en continuar buscando en qué se han equivocado, prefieren responder las preguntas (que precisamente son preguntas de interpretación de la función en relación con su experimento) aunque la función no lo represente, lo que nos lleva a hacernos una idea de la importancia que le otorgan los alumnos al hecho de interpretar los datos en relación con la realidad.

En la siguiente lección, podemos ver que inicialmente los alumnos conciben la relación como una curva creciente que tiende a estabilizarse, explicando que esto corresponde a que a mayor número de canicas, mayor será el alargamiento pero llegará un punto en el que el muelle no se alargará más y se romperá. Además, usan el término "deformación del muelle" como sinónimo de alargamiento. Tenemos que, por cómo han considerado el fenómeno estudiado y la forma de la gráfica que han dibujado, eligen la fórmula de la familia de funciones logarítmica, aunque durante la sesión indican que no están seguros de que sea la que se indican en la tabla puesto que no saben si será logaritmo neperiano. No obstante, al tomar los datos no tienen ningún problema en interpretar que la función con la que trabajaran será una lineal "porque solo consideramos un pequeño espacio de tiempo". Cabe destacar que, estos alumnos también toman las referencias siendo muy conscientes de que lo que quieren obtener para la segunda variable es el alargamiento y teniendo en consideración como procesa la app sus acciones para conseguirlo. Para ello, fijan el eje OX en el primer punto marcado, en la parte baja del muelle y, cuando les pedimos que indiquen las coordenadas de los puntos que mostraran la relación entre número de canicas y alargamiento del muelle, cambian de signo los valores obtenidos para la variable dependiente y así conseguir que esta valga cero inicialmente (aproximadamente) y sea siempre positiva (aunque no cambian todos los valores de signo sino todos menos el primero que ya es positivo). En cuanto a la interpretación de las variables consideradas, los alumnos de esta pareja sí que son coherentes con cómo han tomado las referencias. No obstante, cabe destacar que solo no lo son en su respuesta al apartado b) del ítem 9, ya que dan como longitud máxima del muelle el resultado de substituir la x por 8 en la fórmula de la función, que da el alargamiento no la longitud.

En relación con el último experimento, tenemos que los alumnos de conciben inicialmente el fenómeno como una función cuya gráfica decrece muy rápido inicialmente y se estabiliza hasta alcanzar la temperatura ambiente, que consideran de 20ºC. Sin embargo, parece que no son capaces de identificar que la familia de funciones que describe este tipo de gráficas es una exponencial ya que indican que ninguna de las que se les proporcionan describiría este tipo de gráfica y acaban eligiendo $y = a/x^n + b$ con $n = 1$ y $b = 20$ por ser la que tiene una forma más semejante. No es hasta el ítem 6 al facilitarles la hoja de ayuda, cuando se dan cuenta de que la función que ajusta será una exponencial, de modo que, manipulando los valores numéricos de la fórmula y observando los cambios que ello provoca sobre la gráfica, consiguen encontrar una fórmula que ajusta a los puntos y que es una exponencial. Sin embargo, estos interpretan que la e que aparece en la fórmula de la función $y = e^x$ es un parámetro, por lo que le asignan un valor numérico distinto al propio y ajustan la función $y = 0{,}7^{(0{,}77x-9{,}5)} + 30$. En cuanto al significado de los parámetros, tenemos que conciben que el valor que toma "e" (visto como base de la potencia) es el que proporciona la orientación de la gráfica, el parámetro que resta en el exponente el que mueve la gráfica en la dirección del eje OX y el término independiente el que lo mueve en dirección del eje OY. Cabe destacar que estos alumnos deciden pasar los valores que toma la variable tiempo, que vienen dados en segundos, a minutos para trabajar con valores más pequeños, cosa que provoca que calculen la función con una variable independiente distinta a la de sus compañeros y que tengan que cambiar a minutos los valores cuyas imágenes les pedimos que calculen posteriormente.

Pareja 4 (JL)

Estos alumnos conciben el fenómeno del bote de la pelota inicialmente como una parábola, tal como lo representan en los ítems 1 y 2 y, además conciben también el tiempo como absoluto. Por lo que respecta a la altura, ya podemos ver que en estos ítems consideran el suelo como referencia puesto que dibujan la parábola empezando y terminando del eje OX. No obstante, cuando la app Video Physics requiere que tomen ciertas referencias, no lo hacen así y no son conscientes de las implicaciones que esto tiene puesto que en los ítems 8 y 9 podemos ver cómo sí que consideran el suelo como referencia, basándose en sus concepciones y no como resultado de reflexionar sobre cómo han tomado las referencias en la app. Además, realizamos también dicha afirmación porque cuando los alumnos explican por qué han marcado los puntos en el centro de la pelota y el eje también, dan razones poco relacionadas con la relación que deben estudiar. Por lo que respecta a las formas canónicas, tenemos que, al igual que los alumnos de la pareja 2, consideran que la función que modeliza el fenómeno estudiado es $y = ax^2 + bx + c$ pero no $y = a(x - c)^2 + d$. Sin embargo, cuando tratan de ajustar una gráfica a los puntos representados en Desmos, estos alumnos empiezan usando la forma canónica polinómica y dando valores sin llegar a obtener la fórmula pero cuando les facilitamos la hoja con la ayuda sí que son capaces de hacerlo, proporcionándoles un poco de ayuda de nuestra parte, y no tienen problema al ver que tienen que escribir un número "antes de elevar al cuadrado la x", a pesar de considerar que la fórmula de la función era la dada en la forma canónica polinómica y no en la otra. Asimismo, antes de usar la app veíamos que solo eran capaces de atribuir un significado al parámetro c de $y = ax^2 + bx + c$ y de característica concreta de la familia de funciones ya que explican que "c representa el lugar del eje OY donde corta la parábola". Sin embargo, al usar la app vemos que ven los parámetros con un significado dinámico, aunque como hemos dicho en repetidas veces en ningún caso estamos asumiendo que no atribuyan otro tipo de significado. Más en concreto antes de proporcionarles dicha ayuda explican que el signo negativo en la a hace que la gráfica gire, que "el número que no tiene x" se mueva hacia arriba o abajo y "el que multiplica a la x" que se mueva en diagonal. En cambio, después de proporcionarles la pista y obtener ya la función en la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$ explican que el valor correspondiente a c hace que se mueva horizontalmente tantas unidades como la primera coordenada del vértice y el d verticalmente pero añade que tantas unidades como la segunda coordenada de este. Posteriormente y por lo que respecta a las transformaciones entre formas canónicas, vemos que no usan la ficha de ayuda 2 con las indicaciones para saber el tipo de operaciones que deben realizar entendiendo el significado de estas, sino que parece que la usan sin dar sentido a lo que hacen, de forma mecanizada y, además, se equivocan con los cálculos. Así también, una vez obtenida la fórmula no la usan para comparar con la de Desmos, sino que usan la obtenida en Graphical Analysis sin previamente haber sido transformada, por lo que parece que realizan los cálculos porque es algo que les hemos pedido, no con ninguna otra finalidad.

En cuanto al experimento del muelle, tenemos que los alumnos conciben el fenómeno como una función escalonada, ya que para ellos la variable número de canicas es discreta y solo toma valores naturales. No obstante, no dibujan puntos sino segmentos, tratando de plasmar la idea que tienen de que el muelle no se estira más hasta que se le introduce la siguiente canica, por lo que parece que de forma implícita estén representando una tercera variable en la gráfica: el tiempo o el peso. Cabe destacar que, por cómo consideran la gráfica del fenómeno tienen dificultades a la hora de elegir la fórmula de la familia de funciones y así nos lo hacen saber en clase. No obstante, indican que "ninguna se ajusta a la gráfica obtenida ya que al ser función discontinua no tiene fórmula, pero que si eligiéramos solo los puntos que representa cuando dejamos caer la canica formaría una ecuación de primer grado ($y = ax$)". Además, indican que cuando aumentamos o disminuimos el valor del parámetro a, la gráfica se acerca más al eje de las x o de las y. Por otro lado, tenemos que estos toman las referencias en Video Physics de modo que fijan los puntos en la parte baja del muelle y el eje OX en el último punto marcado, para obtener que todos los valores para el alargamiento sean positivos por lo que consideran como variable y la que da la relación $d_{p,x} - A$ siendo $d_{p,x}$ la distancia del primer punto marcado al eje OX y A el alargamiento. *A priori* podemos pensar que estos son conscientes de que la forma en la que tomen las referencias en la app influirá en los valores que tomará la variable pero no de qué forma lo hará ya que de este modo no estarán considerando la variable adecuada para calcular la relación que quieren estudiar. No obstante, parece que los alumnos sí que son conscientes de ello y que, a pesar de que la función que calculan no proporciona la relación estudiada, interpretan la variable alargamiento correctamente en los ítems 8 y 9.

Por último, los alumnos de esta pareja conciben que la gráfica que describiría el fenómeno del enfriamiento del agua sería la formada por una recta decreciente y a continuación una recta constante, por lo que indican que la familia de funciones que ajustaría mejor a esta es $y = ax + b$. Posteriormente, al observar los puntos escogidos gráficamente se dan cuenta de que la función que ajusta a ellos es una curva de modo que, sin pedir la hoja de ayuda encuentran una gráfica que no es exponencial y tampoco ajusta a los puntos, aunque sí que se aproxima bastante a estos: $\mathrm{y} = -1{,}155\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + 59.921875$. Sin embargo, aunque son capaces de obtener una función que ajusta con Graphical Analysis, usan la anterior para responder las cuestiones del resto de la lección por lo que, como ellos indican, esta función no les servirá para predecir lo que pasa cuando el tiempo tiende a infinito puesto que es una función que no se estabiliza y la temperatura del agua tiende a la del ambiente.

<u>Pareja 5 (AB)</u>

En cuanto a la lección del bote de la pelota, los alumnos de esta pareja representan una parábola en los ítems 1 y 2, aunque inicialmente en 1 hacen un dibujo de cómo creen que será la relación entre el tiempo y la altura de la pelota. Es cierto que ven dicha relación como una parábola, pero parece que lo ven así puesto que conciben que esta es la trayectoria que hace la pelota ya que explican que "los botes caen ondulados, no en picado", lo que ya observamos en las respuestas de estos al cuestionario inicial. Conciben el tiempo como absoluto y la referencia como el suelo. Además, parece que se basan en un experimento concreto para representar la función puesto que escalan los ejes con la intención de dibujar la gráfica con más precisión, cosa que podría ser debido a que habitualmente en clase los alumnos representan gráficas de funciones a partir de puntos o de datos concretos, no en general. En cuanto a la fórmula elegida, eligen la lineal $y = ax + b$ "porque a y b serían gravedad y peso", por lo que no se basan en la forma de la gráfica para determinar el tipo de familia de funciones que mejor ajustaría a esta sino en las variables que ellos creen que influirían en cómo sería un fenómeno concreto. No obstante, cuando les pedimos que encuentren la fórmula de la función cuya gráfica ajuste a los puntos representados en Desmos, los alumnos proporcionan una función cuadrática y no una lineal, aunque todo apunta a que esto se debe a que lo primero que les sugerimos en la hoja de ayuda es que empiecen representando la gráfica $y = x^2$. En cuanto al ajuste, cabe destacar que consiguen obtener la fórmula de la función en la forma canónica $y = a(x - c)^2 + d$ usando la hoja de ayuda y siguiendo nuestras sugerencias. En particular, consiguen dar un significado a los parámetros en relación con la gráfica (en contraste con lo que sucedía en el ítem 3). Por ejemplo, explican que "si a es negativo va hacia abajo y si es positivo va hacia arriba", refiriéndose a la concavidad y convexidad de la gráfica en relación con el signo negativo del parámetro a o "si le pones más algo a la parábola sube y si le pones menos la parábola baja", refiriéndose al parámetro independiente. Por tanto, atribuyen tanto significados estáticos como dinámicos a los parámetros. Además, parece que identifican c y d con las coordenadas del vértice de la parábola. En cuanto a las transformaciones de formas canónicas, no son capaces de pasar la función obtenida con Graphical Analysis a la otra forma canónica siguiendo la hoja de ayuda, probablemente porque no saben interpretar las instrucciones que les hemos proporcionado o no saben cómo aplicarlas. Por tanto, no consiguen obtener la función en dicha forma canónica y, por consiguiente, tampoco comparar ambas. Asimismo, estos consideran el suelo como referencia, "el suelo se encuentra a 0 metros" (ítem 9), a pesar de no haberlo hecho así en la app Video Physics ya que fijan el eje OX en el primer punto marcado y este en el centro de la pelota. Además, se fijan en los valores negativos de las imágenes en el ítem 8, relativos a la altura, para indicar qué valores no tienen sentido para su experimento.

En relación con la lección del experimento del muelle tenemos que inicialmente al pedirles que representen la relación entre las variables estudiadas realizan un dibujo del muelle y no una función, cosa que hacen solo cuando se lo pedimos explícitamente en el ítem 2. En esta gráfica podemos ver que los alumnos han considerado como variables la longitud (aunque como sinónimo de alargamiento ya que consideran que inicialmente esta variable vale 0) y el peso, aunque parece que también consideran esta variable como el número de canicas ya que al representar la gráfica de la función consideran que esta tomará valores naturales (0, 1, 2...) y posteriormente unen los puntos, probablemente porque consideran la variable peso y que esta puede tomar todos los valores reales (por lo que parece que usen la variable independiente con un doble significado). Además, eligen la familia de funciones $y = ax + b$ como aquella que mejor ajustaría a los puntos, a pesar de que dibujan que pasa por el origen de coordenadas, pero puede que sea porque conciben que b puede ser 0 en este caso aunque no lo indican. Posteriormente ya usando la app Desmos obtienen la fórmula de la función en la misma forma canónica sin ayuda de ninguna pista y en ese momento sí que indican que el signo de a representa la inclinación (es negativa porque va decreciendo), que el valor de a hace que la gráfica gire y la b que suba y baje, otorgando un significado dinámico a las variables a y b, probablemente como influencia del uso de la app. En cuanto a la toma de referencias en la app Video Physics tenemos que fijan los puntos en la base del vaso y el eje OX en el último punto marcado de modo que lo que obtienen como variable dependiente es la relación $d_{p,x} - A$. Por tanto, al igual que los alumnos de la pareja 4 no obtendrán la fórmula de la función que muestra la relación estudiada por no considerar una variable adecuada. Pero además, y a diferencia de los alumnos de la pareja 4, estos no parecen conscientes de ello ya que en los ítems 8 y 9 cuando les pedimos que calculen el alargamiento del muelle en algunos instantes, lo hacen usando esta función e interpretando que los resultados obtenidos corresponden con el alargamiento del muelle, cosa que no es cierto.

Por último, en el experimento del enfriamiento los alumnos de esta pareja conciben la gráfica de la función como una proporcional inversa e indican que las familias de funciones que podrían describir esta gráfica serían $y = ax$ y $y = ax^b$, por lo que parece que no identifican la primera como una recta y que identifican la segunda con una proporcional inversa, cosa que sucedería solo para valores negativos de b y que en ningún momento indican. Tampoco son capaces de encontrar una fórmula que ajuste a los puntos con Desmos después de facilitarles la hoja de ayuda pero sí que lo consiguen con Graphical Analysis, lo que les permite continuar trabajando en el resto de ítems. Cabe destacar que se equivocan a la hora de calcular las imágenes de los puntos que les pedimos y al interpretar los resultados en términos del fenómeno descrito se dan cuenta de que no tienen sentido puesto que los valores mínimos para la temperatura deberían ser los de la temperatura ambiente.

5.4. DESCRIPCIÓN DE LOS CASOS

En esta sección mostraremos un resumen de las actuaciones de los alumnos durante las entrevistas (el análisis completo se puede consultar en los Anexos 25 26, 27 y 28).

			Alumnos			
			JL	**IG**	**DC**	**AB**
Partes de la entrevista	**0. Introducción**		**[1]-[8]**	**[1]-[10]**	**[1]-[16]**	**[1]-[10]**
	1. Recordatorio otros experimentos[42]		**[9]-[70]**	**[11]-[83]**	**[17]-[98]**	**[11]-[117]**
		Pelota	[9]-[26]	[11]-[24]	[17]-[38]	[11]-[50]
		Muelle	[27]-[32]	[25]-[42]	[39]-[83]	[51]-[75]
		Enfriamiento	[33]-[70]	[42]-[83]	[84]-[98]	[76]-[116]
	2. Antes de usar datos recogidos con iPad		**[71]-[181]**	**[83]-[250]**	**[99]-[273]**	**[117]-[247]**
		Interpr. enunciado[43]	[71]-[94]	[83]-[116]	[99]-[126][44]	[117]-[150]
		Repr. gráfica	[94]-[159]	[116]-[180]	[127]-[186]	[151]-[202]
		Elecc. fórmula	[160]-[181]	[181]-[250]	[187]-[273]	[203]-[247]
	3. Después de usar datos recogidos con iPad		**[182]-[384]**	**[251]-[576]**	**[274]-[543]**	**[248]-[536]**
		Interpr. gráfica	[182]-[218]	[251]-[300]	[274]-[297]	[248]-[278]
		Elecc. puntos	[219]-[236]	[301]-[337]	[298]-[328]	[279]-[303]
		Ajuste	[237]-[349]	[338]-[552]	[320]-[449]	[304]-[500]
		Recopilatorio	[350]-[384]	[553]-[577]	[450]-[543]	[501]-[536]

Tabla 5.1. Resumen intervenciones durante las entrevistas

[42] En esta parte de la entrevista, dentro de cada experimento preguntamos por 4 aspectos: 1. En qué consistió el experimento (pelota, muelle, etc.), 2. Qué estudiaban (relación entre...), 3. Cómo era la gráfica que representaba el experimento, 4. Qué formula describía el experimento.

[43] Aquí también consideramos el primer ítem ya que la finalidad de este es ver si entienden el enunciado y ver que hay que estudiar la relación entre dos variables.

[44] Aquí ya habla de la gráfica de la función ya que describe la relación (o lo que ha interpretado del enunciado) realizando un dibujo de cómo sería la gráfica.

En concreto, organizaremos la sección por alumnos de modo que para cada alumno presentaremos: un resumen de sus actuaciones organizadas según las partes de la entrevista a las que hacen referencia sus intervenciones (esto es, un esquema de la reconstrucción racional), unas tablas con las actuaciones relativas al ajuste de la función a los puntos y, por último, un resumen de los resultados observados a lo largo del estudio de cada caso. Además, en la Tabla 5.1 mostramos el resumen de las intervenciones relativas a las diferentes partes de la entrevista de los alumnos.

Asimismo, conviene señalar que las tablas en las que se presentan las actuaciones para cada uno de los estudiantes en relación con el ajuste de la función a los puntos se elaboran con dos objetivos: el de facilitar el análisis de los datos y el de mostrar las actuaciones de cada alumno de una forma más clara y organizada. En estas explicaremos: con qué intención general realizan cada transformación en la gráfica (columna 1), cuáles fueron sus actuaciones con respecto a los cambios de valores en los parámetros (columnas 2-5) y, en algún caso, qué factores parece que han influido en dichas actuaciones (columna 6). Es importante destacar que todos los alumnos llegan a obtener la fórmula de la exponencial en la forma canónica $y = a'^{e^{kx}} + d$ por lo que en las columnas 3, 4 y 5 indicamos los valores que toma cada parámetro en cada caso. Pasamos ahora a estudiar cada caso en particular.

5.3.1. EL CASO DE JL

A continuación mostramos las actuaciones para el caso del alumno JL, que fue el primero que participó en el estudio de casos.

5.3.1.1. Resumen de actuaciones JL

0. Introducción [1]-[8]

En esta parte explicamos al alumno cuál será el objetivo de la entrevista, en concreto, le indicamos la estructura de la entrevista: primero realizaremos un repaso de los experimentos analizados en clase y después deberá estudiar un último fenómeno (que es el calentamiento de un cuerpo) del mismo modo que el resto.

1. Recordatorio de otros experimentos [9]-[70]

[9]-[26] Bote de la pelota

En el experimento de la pelota, el alumno concibe la función como una relación entre dos variables, la gráfica como un “tipo” concreto de parábola y la expresión algebraica como una función cuadrática, cuya principal característica es que x está elevada al quadrado.

[27]-[32] Alargamiento muelle

En este experimento, el alumno indica que calculan la relación entre la cantidad de canicas y el alargamiento del muelle pero cuando el vaso para de moverse, haciendo referencia a cuando trabajan ya con los datos del experimento. Además, añade que ven que la función sería un conjunto de puntos, discontinua, pero que cuando se unían los puntos se comportaba como una función lineal.

[33]-[70] Enfriamiento agua

En cuanto al experimento del enfriamiento del agua, el alumno tiene claro cuál es la gráfica del fenómeno estudiado y que su característica principal es que es una curva que desciende muy rápido al inicio y muy lentamente después, llegando a estabilizarse cuando el agua alcanza la temperatura del ambiente. Sin embargo, indica que no se acuerda del nombre ni tampoco de la fórmula de la función. De hecho, como vimos ya en el experimento, la función que ajusta a los puntos en Desmos es $y = -1{,}155x^{\frac{1}{2}} + 59{,}921875$, que confunden con una exponencial porque "exponente en la x sí que tiene" (intervención 54), a pesar de que al final del experimento terminan dándose cuenta de que lo que hace que sea exponencial es que la x aparece en el exponente (cuando la app Graphical Analysis les proporciona la fórmula de la función).

2. Antes de usar datos recogidos con iPad [71]-[181]

A continuación pasamos al estudio del experimento del calentamiento de un cuerpo.

[71]-[94] Interpretación del fenómeno a partir del enunciado

Antes de proporcionarle los datos, le pedimos que lea y explique el enunciado del fenómeno que tiene que estudiar. Al principio, se confunde e interpreta el fenómeno como que tiene que enfriar un sensor y después ponerlo en un recipiente donde hay agua que irá calentando pero le explicamos que no es así, que el agua está a temperatura ambiente y se debe enfriar el sensor e introducirlo en el agua. Además, le preguntamos cómo cree que será el tipo de relación y habla de que la función será proporcional directa en el sentido de que cuando aumenta el tiempo aumenta la temperatura pero que la relación no tiene por qué ser lineal, en sus palabras "es proporcional pero no exacta" (intervención 91).

[94]-[159] Representación del fenómeno gráficamente a partir del enunciado

Después, cuando le pedimos que dibuje la gráfica que relacionaría las dos magnitudes que queremos estudiar, parece que inicialmente tiene una concepción de que, dependiendo de los datos que tenga, esto es, de cómo suba la temperatura, la función será de una forma u otra (en particular, dibuja una lineal y una cuadrática para justificar su razonamiento). Además, según él, depende de los datos crecerá más rápido o menos (cosa que sí es cierta). Le indicamos que piense en el experimento para que se dé cuenta de que este fenómeno no puede dar lugar a diferentes familias de funciones según los datos que tenga y, al reflexionar, JL indica que la gráfica será una exponencial. No obstante, primero dibuja una exponencial que inicialmente crece más lento y después más rápidamente hasta llegar a la temperatura ambiente que se mantendría constante pero, después de pedirle que vuelva a reflexionar sobre el fenómeno, ya dibuja una gráfica exponencial de modo que crece más rápido al inicio y se estabiliza progresivamente hasta llegar a la temperatura ambiente (intervenciones 107-125).

En cuanto le preguntamos por la posición, afirma que la función no puede tomar valores para un tiempo negativo y la temperatura puede tomar valores tanto positivos como negativos o cero.

A continuación le preguntamos por la expresión algebraica que mejor describiría el fenómeno pero este responde haciendo alusión a la gráfica. Llama la atención que cuando le preguntamos por la exponencial dibuja una exponencial decreciente y que tiende a estabilizarse para x grandes (ver Figura 13 del Anexo 25), por lo que parece tener una concepción de esta muy ligada a la gráfica del experimento del enfriamiento de un líquido.

> 144. MO. ¿Para ti qué es la exponencial?
>
> 145. JL. Es la que [...] hace así (representa una función exponencial como la del experimento del enfriamiento). O sea, empezaba de un punto que estaba muy cerca del eje de las y [...] y después llegaba a otro punto que estaba muy cerca del cero en el eje de las x.

> 146. MO. ¿Y ves que se estabiliza en algún momento?
>
> 147. JL. [...] Aquí sí que se estabilizaría (señalando la parte final de la gráfica que ha dibujado).

Por ello, después le preguntamos si piensa que la exponencial continúa siéndolo al girar la función (ya que en este experimento no tiene esta forma) y responde que sí, no solo girarla sino también podría desplazarla en dirección vertical (aunque la exponencial en su forma normal para él es la del experimento del enfriamiento).

> 156. MO. [...] ¿Pero dependiendo de...? ¿Tú la exponencial la puedes cambiar, girar... y todo eso?
>
> 157. JL. Sí, y podría bajarla más abajo, ¿no? Pero esa es, por decirlo de alguna forma, "la primogénita", ¿no?
>
> 159. JL. [...] La que te han enseñado siempre... que es la que aplicas de normal.

[160]-[181] Elección de expresión algebraica

Ahora sí, cuando le preguntamos por la fórmula, trata de buscar una expresión algebraica que describa la gráfica. Sabe que la función será una exponencial pero, no obstante, no es consciente de que su fórmula será la misma que en el experimento del enfriamiento (porque está cambiada de orientación) y que la orientación de la gráfica dependerá de los valores que les dé a los parámetros. Por ello, le recordamos que en otros experimentos es posible cambiar la orientación de las funciones, lo que hace que finalmente se decante por la fórmula $y = a \cdot e^{-cx} + b$.

> 173. JL. Supongo que será más la exponencial.
>
> 175. JL. [...] pero no me queda claro porque cuando yo la hago va siempre de un eje al otro. Nunca ha sido de que empiece de un eje a un punto que no tiene ningún eje...
>
> 176. MO. [...] Ya pero no sé si te acordarás que cuando estudias las funciones a veces [...] puedes variar la función...
>
> 177. JL. Ah sí, pues sería también la exponencial (refiriéndose a la fórmula $y = a \cdot e^{-cx} + b$) porque como hicimos en el otro problema (el del enfriamiento) también daba igual. O sea, había un momento en el que se estabilizaba la gráfica, así que más o menos...

<u>3. Después de usar datos recogidos con iPad [182]-[384]</u>

Pasamos ahora a estudiar el experimento del calentamiento con datos concretos. Para ello, le explicamos a JL que no hará falta que realice el experimento sino que nosotros le proporcionamos dichos datos directamente. Por este motivo, le pedimos que explique el significado de la gráfica del experimento E1, así como también para poner énfasis en los valores concretos del experimento con la intención de, posteriormente, ver si es capaz de relacionarlos con los valores de los parámetros de la fórmula que ajuste a los puntos.

[182]-[218] Interpretación de la gráfica

Empieza la descripción comparando la gráfica con el esbozo que él ha dibujado previamente puesto que observa que la forma es la misma pero no esperaba que la temperatura inicial fuera de 14ºC. También indica que prácticamente se estabiliza la función (se acerca a un valor concreto) cuando pasan 30 segundos aunque llegaría a estabilizarse después del intervalo en el que estudiamos el experimento. Además, explica que esto lo hace a los 27 grados de temperatura que equivale a la temperatura ambiente.

[219]-[236] Elección de puntos en tabla de valores y representación en Desmos

Después de interpretar la gráfica, le proporcionamos en una hoja dividida en valores de puntos organizados en tres bloques de modo que cada uno de estos contiene dos columnas dónde aparecen dos valores: los relativos al tiempo y a la temperatura. Le pedimos que escoja 8 puntos y elije casi todos del principio ya que, según él, después la función se estabiliza porque el valor de la segunda coordenada es casi el mismo. Elije otro del final y finalmente uno del medio para coger un punto cuya temperatura no pase de 24,92 a 26,92 directamente.

[237]-[349] Ajuste gráfica función a puntos mediante manipulación de fórmula

A continuación, JL copia los puntos en Desmos e intenta ajustar una gráfica mediante la manipulación de los parámetros de una expresión algebraica de modo que obtiene la fórmula $y = a'e^{kx} + d$, donde a', k y d son valores concretos. El proceso de ajuste se puede observar en la tabla del apartado 5.3.1.2 que contiene las actuaciones de los estudiantes referidas al ajuste de la función a los puntos. Dividiremos los tipos de actuaciones en varias partes según la finalidad con la que el alumno realiza las acciones.

[237]-[277] En primer lugar, el alumno empieza escribiendo la fórmula tal cual está en la expresión algebraica que ha elegido pero enseguida decide usar un valor concreto, 14, para el parámetro a', valor que toma la temperatura inicialmente cuando empieza el experimento. Después escribe en el exponente x pero como la función no es como esperaba escribe $0{,}05x$. Luego dice que para que la gráfica tenga la forma de los puntos tiene que poner valores positivos mayores que 1 multiplicando a x y nunca valores negativos porque esto cambiaría la orientación de la función:

> 254. JL. Tendría que ser, positiva... o sea, más de 1, porque en negativo creo que no saldría.

No obstante, cuando le da los valores 1,5 y luego 1,6 ve que tampoco obtiene el resultado que esperaba. Le decimos que haga la pantalla más pequeña para que se dé cuenta de que así la función no está en la orientación adecuada. Entonces, lo que hace es escribir un menos delante de toda la función, $-14e^{(1{,}6x)}$ (intervención 260), y después lo quita y lo pone en el exponente, $14e^{(-1{,}6x)}$ (intervención 262) para cambiar de orientación de nuevo. De esta forma, la función queda contenida en el primer cuadrante y parece que, aunque no está en la orientación adecuada, JL piensa que sí por estar contenida una parte en el primer cuadrante (ver Figura 15 Anexo 25) y que lo que deberá hacer es cambiarla de forma para que se ajuste a los puntos, no de orientación. Piensa que para conseguir dicho cambio de forma deberá cambiar los valores de k. Primero prueba valores más pequeños que 1, por lo que la función se dilata, y luego mayores que 1, lo que hace que se contraiga. Sin embargo, no llega a cambiar de forma como él quiere. Para ello deberá cambiarla a otra orientación. Sin embargo, el alumno no lo concibe como un cambio de orientación (por eso no usa los negativos) sino como un cambio de forma que conseguirá cambiando los valores de k.

> 267. MO. ¿Qué hacemos para girar las funciones? ¿Qué hacemos de normal?
>
> 268. JL. Cambiar los valores, pero no sé cuáles (refiriéndose a que no sabe qué valores de k tiene que considerar para que tenga la forma de los puntos).

Hasta aquí le dejamos libertad para que siga el camino que él ha elegido. No obstante, al no ser capaz de avanzar intervenimos para recordarle que cuando trabajaban las otras funciones añadían o quitaban signos negativos para cambiar de orientación y hacer que se dé cuenta que necesita añadir un signo negativo a a' para que la función tenga la orientación adecuada. En concreto, le recordamos que antes ha tecleado un menos delante de e y ha cambiado de orientación y, a continuación, la ha dejado como estaba y ha añadido un menos en el exponente, lo que ha vuelto a cambiar de orientación la función (en este caso en otro sentido). No obstante, no piensa en añadir un signo negativo a a' puesto que piensa que si vuelve a escribir un “menos” en la base de $14e^{(-50,6x)}$ se volverá a quedar con la misma orientación que estaba (puede que porque lo relaciona con la multiplicación de números enteros, ya que “menos por menos es más”).

> 269. MO. Pero de normal, siempre, ¿qué hacías para girar una función o cambiarla de orientación o lo que sea? Ponías un menos como tú has dicho antes, ¿no?
>
> 270. JL. Sí.
>
> 271. MO. Has puesto un menos ahí (señalando el valor del parámetro a') y ha cambiado de orientación. Y has puesto ahí (señalando el valor del parámetro k) un menos y ha cambiado de orientación otra vez.
>
> 272. JL. Lo que queremos es que gire ahí (pasando el dedo por encima de los puntos representados imitando su forma).
>
> 273. MO. Y como podemos hacer para que vuelva a girar?
>
> 274. JL. Pues es que... Que vuelva a girar, volver a cambiar el signo o algo.
>
> 276. JL. Pero es que [...] se iría hacia abajo (refiriéndose a que volvería a la misma posición que tenía inicialmente).

No obstante, prueba a escribir “$-14e^{(-50,6x)}$” y entonces la gráfica se transforma de modo que ahora sí que está en la orientación adecuada, aunque no se da cuenta de ello hasta que la investigadora no reduce el tamaño de la imagen lo que hace que se fije en la gráfica en general.

[278]-[287] Ahora que la función está en la orientación correcta se dispone a situarla en la posición adecuada, aunque esta todavía no tiene la forma correcta. Primero dice que hay que subirla (intervención 278), aunque decide hacerlo a la altura del primer punto, no del último, por lo que suma 14 como término independiente.

[288]-[297] Ahora parece que trata de ajustar mejor la función a los puntos cambiando su curvatura, por lo que empieza a realizar cambios en los parámetros para ver qué sucede. Para ello, cambia a' y d por -1 y 15 respectivamente de forma que la función queda “$-1e^{(-50,6x)} + 15$” y ajusta más pero al no cambiar la curvatura, decide volverla a dejar como estaba, “$-14e^{(-50,6x)} + 14$”. Entonces dice que tiene que ser el parámetro del exponente que multiplica a x. Probando, observa que cuanto más cerca está de cero más redondeada es la función, por lo que la deja como “$-14e^{(-0,6x)} + 14$” e indica que después tendrá que subirla.

> 289. MO. Vale, ¿y ahora porqué estás cambiando...?
>
> 290. JL. Estoy probando a ver. A lo mejor el 50 este (refiriéndose al valor de k) es el que hay que cambiar también, para que no esté tan... para hacerla más redondeada (mientras borra el 5 del exponente y se queda -0,6).
>
> 292. JL Y después hacerla... O sea, subirla.

Entonces explica que al dejar -0,6 en el exponente la gráfica “se quita del eje OY” (intervención 294) y se ha hecho más redondeada pero no está todavía en la forma que quiere.

[298]-[329] Por tanto, habrá que hacer que se pegue al eje OY y que tenga la curvatura adecuada. Entonces cambia a' de 14 a 1, "$-1e^{(-0,6x)}+14$" (porque antes lo había relacionado con el primer punto de la gráfica), y observa que la gráfica corta en 13. Después cambia el valor numérico de d a 15, "$-1e^{(-0,6x)}+15$", y observa que la función corta el eje de las y en 14. Entonces dice que ya entiende la relación entre los valores de los parámetros y el significado en la gráfica. Explica que si el valor numérico de a' es 1 (notemos que solo se fija en el valor numérico, no hace referencia al experimento), al restar lo que vale a d se obtiene el punto donde corta la función el eje OY.

> 298. JL. Vale, ahora ya entiendo la relación. Si este es -1 (el parámetro a') tienes que restarle eso (el parámetro d) y pasa por el punto (refiriéndose al primer punto).
>
> 303. JL. [...] O sea, la relación entre estos dos (señalando los parámetros a' y d que son -13 y 27 respectivamente) da el punto por el que pasa primero.
>
> 305. JL. Que, el 27 si le resto 13 da el punto por donde corta el eje de las y.

Por tanto, JL descubre que si hace $a+d$ (aunque dice restar seria sumar), obtiene donde corta la función el eje OY. Entonces, lo que ha hecho ha sido ajustar la función que tiene al primer punto, aunque esta no está ni en la altura ni en la forma adecuada pero ha sido capaz de darse cuenta de qué parámetros hay que cambiar de valor para subirla (d), para ajustar al primer punto (a' y d) y para cambiar la forma (k).

Ahora, a pesar de que ya ha subido la función, concretamente hasta el primer punto, considera que hay que subirla más arriba. Para ello considera, de forma errónea, que hay que modificar los parámetros a' y, en consecuencia d (por estar relacionado con a'). Para ello empieza probando con el valor -18 en a' y empieza a darle valores a d aleatoriamente (130 y después 132), al parecer sin tener en cuenta la relación entre ambos de la que había hablado antes. Por ello, le indicamos que reduzca la pantalla para poder ver la gráfica en general, lo que hace que le dé el valor -14 a a' y 28 a d, teniendo en cuenta, ahora sí, la relación anterior.

Después, le pedimos que reduzca la imagen de la pantalla para que se dé cuenta de que la gráfica no ajusta a la forma que tienen los puntos. Por ello, cambia el valor del exponente para hacerla más redondeada. Al darle valores muy próximos a cero (-0,002) gráficamente se transforma casi en una recta en el intervalo que se observa en pantalla (ver Figura 25 Anexo 25). Le comentamos que los valores que le ha dado son muy pequeños, por lo que empieza a darle valores más grandes y entonces indica que de este modo "más o menos pasa por el punto que queremos (el último) pero aún no es la curva que le tocaría" (intervención 323).

[330]-[349] Sin embargo, aunque la función ya ajusta a los puntos bastante, le indicamos que faltaría bajar la función un poco para que ajustara al último punto bien[45], por lo que modifica el parámetro d con un poco de reticencia porque sabe que si cambia el valor de d tendrá que cambiar a' y, según él, la gráfica ya no pasará por 14.

> 332. MO. ¿Cómo hacías que bajara?
>
> 333. JL. Cambiando de aquí (mientras señala el valor del parámetro d).
>
> 335. JL. Pero ya no pasaría por 14 exacto...

[45] Aunque la función ya ajusta bastante, esto lo hacemos con una doble intención: hacer que la función ajuste mejor y hacer que se de cuenta de que el parámetro a' no es la temperatura inicial aunque sí que está relacionado con esta.

En concreto, empieza aumentando un poco d pero como sube decide ir disminuyendo poco a poco hasta 27 (que es la temperatura ambiente pero no se da cuenta, ni tampoco que es el valor de la imagen del último punto). Entonces le decimos que, ahora que ajusta al último punto tiene que ajustar también todo lo otro ya que se ha desajustado. Empieza cambiando a' de -14 a -13 para que ajuste al primer punto y después cambia los valores del exponente para que ajuste a los puntos, siguiendo la regla de que para valores más próximos a cero se abre más y para más lejanos se cierra hasta que ajusta la forma también.

[350]-[384] Recopilatorio con el objetivo de ver como relaciona gráfica con expresión algebraica y con aspectos concretos del contexto del experimento estudiado

Para finalizar, realizamos un recopilatorio de los aspectos relacionados con los parámetros. Empezamos preguntándole la relación entre estos valores y la gráfica. Le preguntamos qué significado tiene cada parámetro e indica, de nuevo, que existe una relación entre los parámetros a' y d de modo que "al 27 si le restas el 13 da el punto por dónde corta el eje OY" (intervención 353). Por otro lado, indica que k es "la curvatura que tiene la función" (intervención 355), que "hace que se haga más pronunciada o menos" (intervención 361). A continuación, le preguntamos qué significado tiene el número 13 para ver si responde que es la diferencia entre temperatura ambiente y temperatura inicial ya que antes ha visto que existe una relación entre estos y la gráfica. Para ello, JL explica el significado de a' en dos partes: primero habla del signo y después del valor numérico. En cuanto al signo, dice que cuando es positivo la función tiene una orientación y cuando es negativo otra. En cuanto al número, explica que si en la fórmula de la función no hubiera término independiente, este valor daría el punto de corte de la función con el eje OY.

> 365. JL. Y el número pues... Si no le sumáramos nada sería el punto por dónde pasa.
>
> 366. MO. ¿Qué quieres decir si no le sumáramos nada?
>
> 367. JL. Si no le sumáramos c, o sea, la b (refiriéndose al parámetro que nosotros hemos llamado d) que es 27, pasaría por 13.

Por último, le preguntamos si encuentra alguna relación entre el valor 13 y el experimento estudiado para ver si se da cuenta que es diferencia entre temperatura ambiente e inicial pero JL indica que este valor es casi la temperatura inicial, 14. Sin embargo, no da tiempo de más y concluimos la entrevista. Además, por lo que respecta al parámetro d, que es 27, sí que indica que es la temperatura a la que llega y 0,11, k, no sabe lo que es y le comentamos que es difícil de ver.

5.3.1.2. Tablas ajuste función a puntos JL

En el siguiente apartado presentamos una tabla con las actuaciones paso a paso del alumno en relación con el ajuste de la función a los puntos hasta la obtención de la fórmula $y = -13e^{(-0{,}11x)} + 27$.

Ajuste gráfica función a puntos JL					
Objetivo general actuaciones JL	**Actuaciones JL**				**Objetivo concreto actuaciones JL**
	Fórmula	***a'***	***k***	***d***	
Escribir fórmula como la del ítem 2 pero con valores concretos para los parámetros mientras comprueba en la gráfica qué va pasando. Como no cuadran de momento los parámetros no escribe el término d. **[242]-[254]**	$y = a$	a			Escribe un parámetro que llama a tratando de copiar lo que recuerda de la fórmula que había elegido en el ítem 2.
	$y = 14$	14			Porque la gráfica empieza en (0,14) o porque la temperatura inicial es 14, no lo especifica.
	$y = 14e(x)$ $y = 14e(5x)$ $y = 14e(-x)$ $y = 14e(0{,}01x)$ $y = 14e^{(0{,}05x)}$		1 5 -1 0,01 0,05		Parece que esté copiando la expresión algebraica $y = ae^{-cx} + b$ que aparece en el apartado j del ítem 2b de la ficha mientras da valores concretos a los parámetros tratando de ajustar la gráfica a los puntos. Sin embargo no escribe los valores en el exponente, sino multiplicados a e. Le indicamos que para escribir el número en el exponente tiene que pulsar la tecla a^b.
Hacer que la gráfica de la función tenga una forma similar a la de los puntos. Para ello, tratamos de hacerle ver que primero tiene que conseguir que la gráfica tenga la orientación adecuada ya	$y = 14e^{(1{,}5x)}$ $y = 14e^{(1{,}6x)}$		1,5 1,6		Dice que el valor de k tiene que ser positivo porque quiere que la función tenga más o menos la forma descrita por los puntos, aunque en la imagen solo ve los puntos centrales y no los de los extremos. Primero da valores menores que 1 y como no tiene la forma que espera, da valores mayores que 1 pero cerca de este, probablemente para que

que al principio trata de no moverla ni cambiarla mucho cuando se acerca a los puntos. **[254]-[277]**					la función no cambie mucho de forma.
	Reduce la imagen				Le sugerimos que reduzca la imagen ya que se queda pensando sin saber qué puede hacer y pensamos que así se dará cuenta de que la función no ajusta a los puntos de los extremos para que se dé cuenta de que primero hay que darle la orientación adecuada a la función.
	$y = -14e^{(1,6x)}$ $y = 14e^{(1,6x)}$	-14 14			Al preguntarle qué haría para que ajustara a todos los puntos, decide añadir un signo menos al parámetro a' que era 14 pero al obtener que el cambio de orientación no es el deseado, lo deja como estaba inicialmente. Sin embargo, cabe destacar que asocia el signo menos al cambio de orientación, como influencia de lo que ha hecho en otros experimentos.
	$y = 14e^{(-1,6x)}$ $y = 14e^{(-0,6x)}$ $y = 14e^{(-14,6x)}$ $y = 14e^{(-50,6x)}$		-1,6 -0,6 -14,6 -50,6		Ahora prueba a usar el signo menos pero en el exponente y vuelve a cambiar la gráfica de orientación, aunque no es la adecuada. No obstante, al estar contenida en el primer cuadrante piensa que es adecuada así y que lo que tiene que hacer es cambiar el valor numérico del parámetro k para que se adapte a la forma de los puntos. Primero da valores más cerca de cero y luego más alejados sin obtener el resultado esperado ya que explica que esto hace que la función se haga más pronunciada y lo que él quería es cambiarla

					de forma, por lo que no lo ve como un cambio de orientación como lo vemos nosotros.
	$y = -14e^{(-50,6x)}$	-14			Al comentarle que en otros casos para cambiar la orientación de la función ha añadido signos negativos, añade un signo negativo al valor de a' consiguiendo así que la función esté en la orientación adecuada (aunque al principio no añade otro signo negativo aparte del de el exponente porque ve que si la gráfica cambia de orientación volverá a estar como inicialmente).
	Reduce la imagen				Porque se lo decimos nosotros para que se dé cuenta de que así la gráfica tiene la orientación adecuada.
Sube la función hasta la altura que tiene el primer punto representado. **[278]-[287]**	$y = -14e^{(-50,6x)} + 5$ $y = -14e^{(-50,6x)} + 14$			5 14	Sabe de otros experimentos que para subir hay que sumarle a la expresión un número positivo. Luego ve que al sumarle 5, la función ha subido 5 unidades, por lo que suma 14 para hacer que pase por el punto inicial.
	Amplía la imagen				Amplia la imagen para ver que, efectivamente, coincide con el primer punto.
Hacer que la gráfica de la función se despegue del eje de las y y que tenga una curvatura más suave y más parecida a la que describen los puntos	$y = -1e^{(-50,6x)} + 14$	-1			Entonces empieza cambiando el valor del parámetro a', de -14 a -1, cambio que no observa de forma significativa en la gráfica. A continuación decide cambiar el parámetro independiente, de 14 a 15, para "probar", es decir, para ver si eso provoca algun cambio
	$y = -1e^{(-50,6x)} + 15$ $y = -1e^{(-50,6x)} + 14$			15 14	

representados. Lo hace pero no lo consigue del todo. **[288]-[297]**	$y = -14e^{(-50,6x)} + 14$	-14			en la curvatura pero como lo que hace es subir la función una unidad, decide dejar la fórmula como estaba inicialmente.
	$y = -14e^{(-5,6x)} + 14$ $y = -14e^{(-0,6x)} + 14$		-5,6 -0,6		Como antes ha visto que cambiando los valores numéricos para k cambia la forma de la función, prueba cambiando 50,6 por 5,6 y después, al observar que la función se despega del eje de las y y la la curvatura se hace más suave, por 0,6, que es más pequeño todavía que 5,6. De esta forma, la función pasa a tener una curvatura más suave, aunque todavía no la que debería tener para poder ajustar a los puntos. Escribe 5,6 y 0,6 aprovechando los dígitos del 50,6.
Hacer que la gráfica se despegue del eje de las y más, que tenga una curvatura aún más suave pero que pase por el punto (0,14). Encuentra que los parámetros a' y d estan relacionados y explica que $\lvert d\rvert - \lvert a'\rvert = 14$ tiene que ser el punto de corte de la función con el eje y. **[298]-[330]**	Reduce la imagen				Para ver la función en general y donde corta.
	$y = -1e^{(-0,6x)} + 14$	-1			Para hacer que cambie el punto de corte en el eje de las y. Vé que si a' es -1 y d es 14, la gráfica corta en 13. Entonces, cambia 14 por 15 ya que, tal como explica, ha encontrado una relación: si al valor numérico de d le quitas el de a' te da el punto de corte de la función con el eje y. Para explicarlo cambia 15 por 17 y dice que entonces corta en (0,16) y luego vuelve a dejar la fórmula como estaba.
	$y = -1e^{(-0,6x)} + 15$ $y = -1e^{(-0,6x)} + 17$ $y = -1e^{(-0,6x)} + 15$			15 17 15	
	$y = -18e^{(-0,6x)} + 15$	-18			Ahora que ya ha visto la relación, dice que quiere que la función vaya hacia arriba y explica que esto lo conseguirá haciendo que se pegue más al eje de las y, por lo que
	$y = -18e^{(-0,6x)} + 1$ $y = -18e^{(-0,6x)} + 132$ $y = -18e^{(-0,6x)} + 32$			1 132 32	

	$y = -14e^{(-0,6x)} + 32$	-14			aumenta el valor de a' y cambia los valores de d para que se mantenga la relación que acaba de encontrar y hacer que la gráfica pase por (0,14). Escribe 18 por probar y luego cambia d para que valga 32. Como ve que la gráfica queda muy arriba todavía, cambia 18 por 14 y, por consiguiente, 32 por 28.
	$y = -14e^{(-0,6x)} + 28$			28	
	Reduce la imagen				Le decimos que reduzca la pantalla para ver que la función tiene que bajar todavía un poquito más. Sin embargo, para él no es que tenga que bajar más sino que tiene que cambiar la forma. Esto puede ser debido a que piensa que si cambiara 28 por otro número más pequeño, tendría que cambiar a' y piensa que a' es 14 por pasar por el punto (0,14). Por eso va probando diferentes valores para k. Primero prueba con -0,02 pero como la curvatura es demasiado suave da valores menos próximos a cero hasta que consigue tener la curvatura deseada.
	$y = -14e^{(-0,02x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,05x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,051x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,0512x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,06x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,07x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,09x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,096x)} + 28$ $y = -14e^{(-0,0961x)} + 28$		-0,02 -0,05 -0,051 -0,0512 -0,06 -0,07 -0,09 -0,096 -0,0961		
Ajustar mejor la función a los puntos. **[330]-[349]**	$y = -14e^{(-0,0961x)} + 28,5$ $y = -14e^{(-0,0961x)} + 26$ $y = -14e^{(-0,0961x)} + 27,9$ $y = -14e^{(-0,0961x)} + 27,7$ $y = -14e^{(-0,0961x)} + 27,5$ $y = -14e^{(-0,0961x)} + 27$			28,5 26 27,9 27,7 27,5 27	Para él ya está bastante ajustada. Le decimos que mire el último punto y que necesita que baje la función un poco para que ajuste mejor, por lo que decide cambiar el valor de d por valores un poco más pequeños (al ver que los valores más grandes hacen que suba, decide dar valores más pequeños). Entonces dice que si cambia el valor de d no pasaria por 14 exacto, por eso antes no ha querido

					cambiar ese valor antes.
	$y = -13e^{(-0{,}0961x)} + 27$	-13			Al escribir 27, cambia 14 por 13 por la relación entre a' y d para que corte en el primer punto.
	$y = -13e^{(-0{,}096x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}099x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}0999x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}09999x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}1x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}2x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}11x)} + 27$		-0,096 -0,099 -0,0999 -0,09999 -0,1 -0,2 -0,11		Continúa cambiando el exponente para que la curvatura ajuste mejor a los puntos.

5.3.1.3. Resumen de resultados JL

En el siguiente apartado mostramos un resumen de los resultados según las tendencias cognitivas observadas a lo largo de las actuaciones de JL en la entrevista.

Efecto del análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones

En primer lugar, hemos podido observar que JL hace referencia al estudio previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones en diferentes momentos de la entrevista.

En primer lugar, hemos observado que el alumno se basa en la gráfica que realiza en el propio estudio cualitativo para elegir la fórmula de la familia de funciones que mejor representaría el fenómeno estudiado. Esto sucede porque se basa en la forma de la gráfica para saber que se trata de una exponencial, puesto que crece o decrece muy rápido pero después se estabiliza. Sin embargo, el proceso mediante el cual el alumno llega a determinar que la fórmula de esta función es $y = a \cdot e^{-cx} + b$ no es inmediato y requiere de la guía de la investigadora. Esto se debe a que para él la forma en la que se presenta la exponencial en este caso no es la habitual y la que es habitual es la del experimento del enfriamiento y no concibe que la fórmula de la función sea la misma para ambos casos. Esto es, no es consciente de que la orientación de la función depende de los valores que tomen los parámetros de la familia sino que piensa que esto también depende de la forma canónica. Finalmente, el alumno acaba eligiendo la fórmula $y = a \cdot e^{-cx} + b$ al recordarle que en otros experimentos se podía cambiar la orientación de una gráfica añadiendo simplemente un signo negativo a algún parámetro. Conviene señalar que esta concepción del alumno puede que se deba al hecho de que concibe los parámetros de las familias de funciones como positivos de modo que al no aparecer un signo negativo delante de a, no ve que pueda tomar valores negativos.

Por otro lado, tenemos que este estudio de las propiedades cualitativas también influye durante la interpretación de la gráfica en la app Graphical Analysis una vez le proporcionamos los datos al alumno. En particular, hemos visto como el alumno, después de proporcionarle los datos en forma de gráfica, empieza justificando que no había dibujado la gráfica empezando en (0,14) sino en (0,0) porque no conocía la temperatura inicial. Por lo que en este momento el estudio cualitativo ha servido para validar la idea que tenía de la gráfica del fenómeno (la forma coincide y la idea de que la gráfica se estabiliza es correcta) y para hacer énfasis en ciertas características de este, como por ejemplo la temperatura en la que empezamos a tomar los datos, que sí que dependen de los datos concretos de cada experimento.

También tenemos que el alumno tiene en cuenta la gráfica de la función para la elección de los puntos puesto que toma más puntos del principio. En concreto, JL afirma que elige todos los puntos del principio, uno del medio y otro del final porque la segunda coordenada de estos últimos será la misma. Cabe destacar que con esto no estamos afirmando que se basen en la gráfica del estudio cualitativo sino que se basan en su gráfica, que podría ser la que les pedimos que realicen durante dicho estudio.

Por último, se basa en la fórmula de la exponencial que elige en el apartado a) del ítem 2 para empezar a probar valores para los parámetros durante el ajuste de la gráfica a los puntos, a pesar de que en otros experimentos vistos en clase les indicamos a través de la hoja de ayuda que para realizar el ajuste deben partir de la función más simple de la familia, en este caso, de $y = e^x$.

Además, este análisis cualitativo también nos sirve para darnos cuenta de las concepciones del alumno. En concreto vemos que al pedirle que dibuje la gráfica de la función, a pesar de que sabe que será creciente y que llegará un momento en el que se estabiliza, lo hace de formas distintas (ver Figura 12 del Anexo 25) puesto que concibe que la forma de la gráfica de la función dependerá de los datos concretos de cada experimento concreto.

Los parámetros: tipos de significados en relación con la gráfica y con el fenómeno y modo de otorgar significado

A lo largo del estudio de casos hemos observado varios tipos de actuaciones de JL en relación con los parámetros.

En primer lugar, llama la atención la forma que tiene JL de concebir los movimientos de la gráfica al cambiar los valores de los parámetros en la fórmula puesto que JL imagina que para ajustar la gráfica a estos debe realizar ciertos movimientos (que a veces no es viable realizar) y trata de buscar los parámetros que lo hacen. Por ejemplo, esto sucede cuando al inicio el alumno cambia de orientación la función escribiendo un signo negativo delante de 14 en la expresión $y = 14e^{1,6x}$ y luego borra el signo y lo coloca delante del 1,6 (obteniendo la fórmula $y = 14e^{-1,6x}$). Sin embargo, aunque así la gráfica todavía no está en la orientación adecuada, JL considera que está suficientemente cerca de los puntos (ver Figura 15 del Anexo 25) y que lo que debe hacer ahora es cambiarla de forma que ajuste a estos. Esta reticencia a mover la función cuando esta está cerca de los puntos aparece documentada en Puig (2015). Para resolver esta situación, le pedimos al alumno que reduzca la imagen de la pantalla para así tener una imagen global de cómo es la función y para que se dé cuenta de que, aunque está cerca de unos cuantos puntos, debe cambiarla de orientación porque del resto está muy lejos. Además, concibe que los movimientos de la gráfica de una forma peculiar y, en algunos casos, distinta a cómo en realidad se comporta la gráfica punto a punto. Por ejemplo, para él el parámetro k del exponente hace que la gráfica sea más o menos "redondeada" (intervención 290), refiriéndose a que este parámetro cambia la curvatura de la función, y también que este parámetro hace que "se pegue la primera parte de la gráfica al eje de las y" (intervención 296). Esto es debido a que al observar la gráfica se ve el movimiento de esta globalmente, y no punto a punto como ya avanzábamos en capítulos anteriores.

Por otro lado, en cuanto al significado de los parámetros en relación con la gráfica tenemos que la mayoría de veces les otorga sentido dinámico, de movimiento respecto a la gráfica anterior. Esto lo podemos observar por ejemplo cuando indica que el parámetro d lo que hace es subir la función (intervenciones 281-284), movimiento que sabe qué hace antes de probar a cambiar el valor de dicho parámetro por influencia de experimentos anteriores. O por ejemplo cuando explica que el valor k del exponente hace que la gráfica sea más redondeada o menos y se pegue o despegue del eje de las y. No obstante, también hemos observado que otorgan otro tipo de significados. Por ejemplo, atribuyen un significado estático al signo de a' y de k porque ve que esto implica que la gráfica tenga una orientación u otra. Además, tanto inicialmente cuando relaciona el parámetro a' con el punto de corte de la función, aunque de forma errónea (intervención 244), como cuando lo relaciona con d y con el punto de corte de la función con el eje (intervenciones 298 a 305), entiende el parámetro como una característica de la gráfica particular de la familia de funciones.

Otro aspecto que hemos observado y que llama la atención es cierta reticencia a modificar los valores de los parámetros una vez el alumno ya cree que tienen el valor adecuado. Esto sucede cuando el alumno identifica el valor de a' (de forma errónea) con la temperatura inicial que es 14, pero también con el hecho de que este valor está relacionado con d que mueve la gráfica en dirección vertical, de modo que durante las intervenciones 332 a 335 el alumno es consciente de que debe bajar la función usando el parámetro d pero se muestra reticente a hacerlo puesto que esto implicará que cambie el valor de a' que, según él, es 14. Este hecho se debe a cómo concibe los parámetros el alumno y al doble significado del que hablaba Puig (2015).

También hemos visto que el hecho de que la app permita modificar las expresiones en la propia fórmula en todo momento, ha hecho que al eliminar algún número de la expresión para introducir otro, se aprecie el cambio como un movimiento en la función que les puede ayudar a dotar de significado los parámetros. Por ejemplo, esto sucede al eliminar el número 5 de $y = -14e^{-50,6x}$, la expresión queda como $y = -14e^{-0,6x}$y gráficamente el alumno observa que la gráfica se hace redonda y se despega del eje OY (intervención 290). O cuando elimina el 4 del parámetro a' de la expresión $y = -14e^{-0,6x} + 14$ quedando $y = -1e^{-0,6x} + 14$, que este indica que la gráfica sube del principio y hace que corte en otro sitio (intervención 298).

Por último, hemos observado que el alumno es capaz de relacionar los valores de algunos parámetros con características del experimento. Por ejemplo, indica que el parámetro d es 27 que es la temperatura ambiente y el a' es 13, casi la temperatura inicial, cosa que afirma a pesar de que sabe que existe una relación entre ambos parámetros.

5.3.2. EL CASO DE IG

Pasamos a mostramos las actuaciones para el caso de la alumna IG.

5.3.2.1. Resumen de actuaciones IG

<u>0. Introducción [1]-[10]</u>

Empezamos comentando a la alumna en qué consistirá la entrevista y que lo que haremos será primero de todo hacer un repaso de los experimentos vistos en clase y, a continuación, estudiar un último experimento. Le pedimos que trate de explicar con el mayor detalle posible todo lo que piensa o quiere hacer y que lo haga en voz alta para que la grabadora lo pueda registrar. Después le indicamos cuál es el material del que dispone y que puede utilizar.

<u>1. Recordatorio de otros experimentos [11]-[83]</u>

Continuamos realizando un recordatorio de los experimentos estudiados en clase.

[11]-[24] Bote de la pelota

En el experimento de la pelota comenta que tenían que estudiar una relación entre dos variables y habla de que estudiaron "la distancia que recorría" la pelota, refiriéndose a la altura, y el tiempo que tardaba en hacerlo. Además, explica que la gráfica era una parábola y la fórmula tenía x elevada al cuadrado (por lo que se fija en las características propias de la fórmula), aunque no se acuerda exactamente de cómo era.

[25]-[42] Alargamiento muelle

En el experimento del muelle IG sí que explica explícitamente que existe una relación entre las variables estudiadas ya que dice que estudiaban como se estiraba el muelle en función del peso que introducíamos en el vaso, refiriéndose al número de canicas. Además explica que la función era la lineal con fórmula $y = mx + n$.

[42]-[83] Enfriamiento agua

En el último experimento, la alumna indica que tenían que estudiar cómo se enfriaba el agua después de haberla calentado. Sin embargo, cuando le pedimos que explique cómo era la gráfica de la función dibuja dos rectas: una decreciente que luego se une a otra constante o con pendiente cero, justificándolo con que llega un momento en el que la temperatura se estabiliza (cabe destacar que esta no es la función que dibujan en el ítem 2 de la lección, allí dibujan una única recta decreciente). Al preguntarle si tiene esa forma se acuerda de que era una función exponencial pero explica que primero, durante el análisis cualitativo del fenómeno, la dibujaron “a grandes rasgos” y después con la app Graphical Analysis pudieron ver cuál era la forma exacta como indica IG:

> 71. MO. [...] No tenía así forma de recta como la has dibujado tú, ¿no?
>
> 72. IG. No, no, no. Porque nosotros primero lo hacíamos más así, por encima, y después ya al verlo en las aplicaciones ya vimos cómo se deformaba.

Esto probablemente puede ser debido a que no sabían cómo dibujarla en los ejes, no a que lo hicieran a grandes rasgos. No obstante, parece que en este caso el análisis cualitativo les sirve de guía para hacerse una idea de cómo será la función en general y después con la app ya se dan cuenta de cuál será la forma exacta. Además, añade que la fórmula que representa la función contenía una e, aunque se equivoca y dice que se llama logarítmica, no exponencial, cosa que refleja que esta función no ha sido trabajada con tanto detalle. También se pueden observar dificultades a la hora de trabajar con la función exponencial puesto que la alumna indica que “esa era más rara que las otras” (intervención 74) o “nos costó más de sacar porque esa no la sabíamos bien” (intervención 80). Además, indica que esta función solo la habían trabajado en ecuaciones, cosa que no es cierto porque en el repaso inicial vieron cómo era su representación puesto que así lo habían estudiado durante el curso anterior.

2. Antes de usar datos recogidos con iPad [83]-[250]

A continuación pasamos al estudio del fenómeno del calentamiento de un cuerpo.

[83]-[116] Interpretación del fenómeno a partir del enunciado

Inicialmente la alumna relaciona el fenómeno con el del enfriamiento de un cuerpo pero se da cuenta de que ahora tiene que estudiar cómo se calienta el cuerpo, el sensor, y no el agua. Al principio se confunde y piensa que hay que estudiar cómo se calienta el sensor mientras le proporcionamos calor pero le pedimos que vuelva a revisar el enunciado y se da cuenta de que hay que enfriarlo y estudiar cómo se calienta al introducirlo en un recipiente con agua que se encuentra a temperatura ambiente. Sin embargo, cuando le pedimos que explique con sus palabras como será la relación entre las dos variables estudiadas, vuelve a dudar de como es exactamente el experimento. Entonces se lo explicamos nosotros mismos mientras nos pregunta si se enfría y queremos que vuelva otra vez a la temperatura ambiente, cosa que hace con la intención de verificar que ha entendido el enunciado y para saber cómo será la forma global de la gráfica, es decir, si crece o decrece.

[116]-[180] Representación del fenómeno gráficamente a partir del enunciado

Después de pedirle que dibuje la gráfica que relaciona las dos variables estudiadas, IG dibuja una curva ascendente hasta llegar a la temperatura ambiente pero que después desciende un poco. Ella explica que esto es porque la temperatura del sensor va aumentando hasta adaptarse a la temperatura del ambiente:

> 118. IG. "Si el tiempo aumenta... la temperatura... a medida que aumenta el tiempo, aumenta la temperatura. No, a lo mejor no tan rápido, está claro, pero también sería en forma de onda, ¿no? Porque si vuelve a... tiene que aproximarse a la temperatura ambiente. Entonces habrá un momento en el que irá a lo mejor bajando y variando hasta que encuentre el punto de la temperatura ambiente, ¿no? Y se iguale".

Sin embargo, al pedirle que piense bien en el fenómeno insistiendo en porqué la ha dibujado de modo que sube y después baja, rectifica la gráfica dibujando ahora una función creciente (ver Figura 5.1 del Anexo 26) justificando su forma como sigue "hay un momento en el que crece más rápido y hay un momento que va adaptándose hasta que llega a un punto que es ya la temperatura ambiente" (intervención 142). Por ello, ve que llega un momento en el que la temperatura se estabiliza, cuando alcanza la temperatura del ambiente.

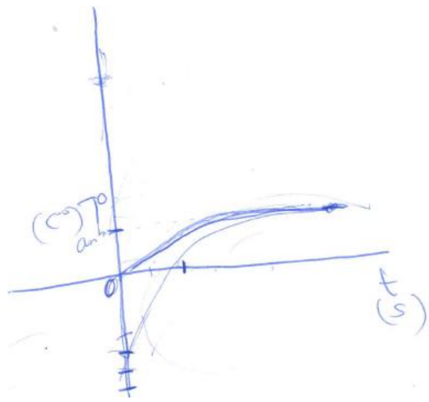

Figura 5.1. Dibujo gráfica experimento calentamiento de un cuerpo (alumna IG)

Por lo que respecta a la posición, le preguntamos por qué dibuja la función partiendo del origen de coordenadas y al inicio lo justifica diciendo que esto se debe a que la temperatura no puede ser inferior a cero porque el agua se congelaría, por lo que parece que no se da cuenta de que lo que está estudiando es la temperatura del sensor. Sin embargo, al recordárselo, admite que puede ser que el sensor se enfríe hasta una temperatura inferior a cero y que no sabe a qué temperatura se congelaría este. Después le preguntamos si la función podría estar en el segundo y tercer cuadrante y dice que no ya que "el tiempo no es negativo" (intervención 178), por lo que considera que (0,0) es el origen de coordenadas y el tiempo cero es justo cuando se ha enfriado el sensor y se empiezan a tomar datos.

[181]-[250] Elección de expresión algebraica

En cuanto le preguntamos qué expresión algebraica de las de la lista representaría mejor el fenómeno, actúa descartando aquellas que piensa que no ajustarían. Esto lo hace fijándose, no en las características propias de cada función (si es una recta x no tendrá exponente, si es una parábola x estará elevada a 2, etc.) sino al dar valores concretos tanto a los parámetros como a las variables. Empieza descartando la fórmula $y = ax$ al darle valor 2 al parámetro a y ver que la función crece hacia más infinito para tiempos muy grandes ya que la que ella ha dibujado se acerca cada vez más a un valor determinado. A continuación, descarta $y = ax^2 + bx + c$ ya que todavía crece más rápido que la anterior, aunque en este caso lo dice porque sabe que la representación gráfica de una función cuadrática es una parábola. Después dice que la función que ajustaría es $y = ax^b$ porque, según ella, tiene la misma forma en la parte final que la gráfica que ella ha dibujado; pero al preguntarle por qué, da valores a parámetros y variables y concluye que al final tampoco crecería tan rápido (lo que concluye al darle el valor 2 a los parámetros a y b):

> 202. IG. Esta parte, si tú dices que a es 2 y b es 2 también, y x es... no sé cuáles les he dado. No pues x también 2. Entonces, 2 por 2, 4, y elevado a 2, 16. Entonces, si este vale 16, o sea, ahí vale 16 también pero x vale 2, no 16. Ah vale, esta tampoco, ¡esta aún menos!

Luego le pedimos que mire el resto de funciones y que piense cómo eran las que utilizaron en los otros experimentos para ver si así se fija en la exponencial. Sin embargo, se centra en la función $y = a(x - b)^2 + c$ y dice que será esa ya que tiene forma de parábola, probablemente porque se ha fijado en la curva de la Figura 4 (Anexo 26) y no en la de la Figura 7 (Anexo 26) que es la que había decidido que era la que mejor representaba el experimento estudiado. Por eso, le volvemos a pedir que mire el resto de fórmulas y, por un momento decide escoger $y = ax$, que la había descartado previamente pero no ve la función como una recta, sino como la que más lentamente crece, por eso decide escoger esa aunque es consciente de que no ajusta. Por este motivo, le preguntamos de forma más explícita si en los otros experimentos había alguna función que podría ser, lo que le hace reflexionar e indicar que podría ser la exponencial porque, aparte de relacionar las mismas variables (tiempo y temperatura) la función del experimento del enfriamiento también llegaba un momento que no decrecía más:

> 247. MO. Pero, ¿la eliges porque son las mismas variables? ¿O por qué piensas que podría ser?
>
> 248. IG. Hombre, porque está relacionado con lo mismo. El tiempo y lo que sea... Y da... Y encima era casi igual la gráfica, en plan, varía la temperatura hasta que llega a un punto que se queda ahí. Entonces elegimos esa.

Al hacer esta afirmación parece que vea la gráfica de la función como en dos partes: la primera la inicial cuando crece muy rápido y la segunda cuando se estabiliza. Esto puede ser debido a la influencia de la función que dibujan cuando hemos hecho el recordatorio del análisis cualitativo del experimento del enfriamiento, en el que inicialmente las alumnas de la pareja 1 ven la gráfica como dos rectas.

3. Después de usar datos recogidos con iPad [251]-[577]

Pasamos ahora a trabajar con los datos del experimento. Le indicamos que en este caso no tendrá que realizar el experimento sino que le facilitaremos los datos nosotros de un experimento que hemos realizado. Por ello, antes de pedirle que encuentre la función usando Desmos, le pedimos que interprete los datos del experimento (también para poner énfasis en ciertos valores para ver si es capaz posteriormente de relacionarlos con los parámetros de la función).

[251]-[300] Interpretación de la gráfica

Le preguntamos qué podría decirnos de la gráfica y comenta que es parecida a la que ella ha dibujado, que inicialmente cambia muy rápido la temperatura y más tarde ya cambia más despacio hasta que llega a la temperatura del agua que está a la misma que la del ambiente. A continuación le pedimos que se fije en valores concretos en los que la gráfica hace algunas cosas particulares. Entonces dice que el valor máximo que alcanza la temperatura será aproximadamente 27, aunque al principio no interpreta de forma correcta los valores en el eje. Después dice que el experimento empieza a una temperatura de 14 grados, aunque al principio no se lo termina de creer y pregunta si se puede mover la imagen para ver cuándo empieza. Esto puede que sea debido a que concibe que la temperatura es demasiado alta para un experimento en el que inicialmente “enfriamos” un cuerpo. Por lo que respecta al tiempo, afirma que mientras que en los 20 primeros segundos aumenta 12 grados la temperatura, después a partir de los 30 segundos no ha aumentado casi. Añade también que el experimento tardará un minuto en llevarse a cabo.

[301]-[337] Elección de puntos en tabla de valores y representación en Desmos

Después de esto, le damos una hoja dividida en 3 bloques de números de forma que cada uno de estos contiene dos columnas dónde aparecen dos valores: los relativos al tiempo y a la temperatura. Le comentamos que estos valores corresponden a los que aparecen en las dos columnas en Graphical Analysis pero que los hemos escrito en tres bloques porque de otro modo no cabrían en la hoja. A continuación, le indicamos que deberá elegir 8 puntos y los deberá copiar a la app Desmos para tratar de buscar una función que ajuste a estos. La alumna decide elegir el primero punto y el último, y el resto de puntos más del principio ya que indica que los valores de más al final tendrán casi la misma altura o, lo que es lo mismo, el valor de la segunda coordenada casi el mismo.

> 313. IG. Pues yo elijo el primero seguro, porque tengo que ver de dónde sale.
>
> 315. IG. I el último para ver dónde llega. Y después más o menos aquí. ¿Cuántos tengo que elegir?
>
> 316. MO. 8, más o menos.
>
> 317. IG. Vale, entonces elijo de estos que son cuando está empezando...
>
> 319. IG. Es que aquí ya va casi todo igualándose, por tanto... elijo solo unos pocos.
>
> 320. MO. Vale. Es decir, estás eligiendo más del principio porque después más o menos son todos iguales.
>
> 321. IG. Sí, para ver más el cambio, porque después ya verás que se igualan.

[338]-[576] Ajuste gráfica función a puntos mediante manipulación de fórmula

IG intenta ajustar una gráfica a los puntos mediante la manipulación de los parámetros de una expresión algebraica concreta durante esta parte de la entrevista de modo que la forma canónica que obtiene es $y = a'e^{kx} + d$. Por ello, a partir de ahora utilizaremos los nombres que hemos dado a los parámetros de la forma canónica en esta expresión para referirnos a ellos. En 5.3.2.2 se puede observar una tabla con las actuaciones de los estudiantes referidas al ajuste de la función a los puntos.

[338]-[361] Al principio la alumna trata de acordarse de la fórmula de la familia de funciones que había elegido en el ítem 2, $y = a \cdot e^{-cx} + b$, pero la escribe sin mirar la fórmula ni lo que pasa en la gráfica mientras la va introduciendo en Desmos (escribe $y = l \cdot e^{2 \cdot 2}$). Además, empieza escribiendo la fórmula sin x por lo que se lo indicamos y le pedimos que piense dónde deberá introducirla. Entonces prueba a ponerla sumando a e y luego multiplicando para acabar poniéndola en el exponente, después de preguntarle cuál es la característica de toda función exponencial (que tiene x en el exponente). A continuación, una vez ha obtenido $y = e^x$, escribe restando a e los valores 2 y luego 5 (tratando de dar valores al parámetro que aparece como término independiente en la fórmula del ítem 2) pero finalmente decide dejarla como estaba.

[362]-[406] Después, le pedimos que reduzca la imagen de la pantalla para que se dé cuenta de que gráficamente la función no tiene la orientación adecuada y la cambie. Le preguntamos qué hacíamos para cambiar la orientación de la parábola y entonces

recuerda que añadían un signo negativo delante de la expresión, por lo que escribe $y = -e^{x}$, consiguiendo cambiar la orientación de esta, aunque no sea todavía la correcta. A continuación, indica que hay que subirla, pero no en el sentido de subir toda la función sino refiriéndose a que hay que subir la parte derecha de la gráfica (para que de este modo ajuste a los puntos), por lo que la alumna está pensando en realizar un movimiento que no es posible hacer manipulando los parámetros. En un intento de conseguir lo que se propone, escribe un 2 multiplicando la expresión, $y = -2e^{x}$, que lo escribe y lo vuelve a borrar algunas veces para observar lo que esto provoca en la gráfica. Esto hace que la función se acerque más al eje de las y, por lo que decide hacer lo mismo pero para valores más grandes y así observar mejor lo que sucede: que la función pasa a la parte negativa del eje de las x. Como vemos que su estrategia no le conduce a ningún sitio, le sugerimos que pruebe a girarla otra vez, para que se centre en cambiar la gráfica de orientación. Como asigna un cambio de orientación a un cambio de signo en el parámetro a', lo quita y al ver que vuelve a tener la orientación que tenía inicialmente decide poner el signo negativo a la x del exponente para volverlo a girar. Al no girar hasta la posición que ella esperaba, vuelve a escribir el signo negativo delante de e, obteniendo así una gráfica que sí que está en la posición deseada.

[407]-[417] Ahora intenta subir la función a la altura del último punto. Como sabe de otros experimentos que para subir hay que sumarle a la expresión un número positivo, empieza sumando 5 (intervención 407). Sin embargo, al ver que la función ha subido 5 unidades se da cuenta de que el número que escriba deberá ser el mismo que la temperatura ambiente, altura a la que se encuentra la gráfica. Por ello, mira la hoja en la que había estado escribiendo los datos para saber el valor de la temperatura ambiente y escribe el valor 27 sumando a la expresión que tenía.

[418]-[508] A continuación, la idea de IG es hacer que la gráfica tenga la curvatura más parecida a la forma determinada por la posición de los puntos en la gráfica y baje hacia donde están el resto de puntos por los que no pasa. Para ello, dividimos las actuaciones de IG en tres partes:

<u>Parte I.</u> IG trata de recordar de nuevo cómo era la fórmula que había elegido en el ítem 2 pero y escribe una l sumando delante de la expresión, $y = l - e^{-x} + 2$, pero al ver lo que sucede en la gráfica la borra. A continuación escribe un 3 sumando en el exponente a $-x$. Esto hace que la gráfica se desplace lateralmente y como dice que no es lo que ella quiere, lo borra y deja la expresión tal cual estaba. Esto no sería del todo incorrecto porque sí que se podría ajustar la gráfica a los puntos haciendo uso de dicho parámetro pero parece que IG no ve que la gráfica deba hacer este movimiento para ajustar a los puntos. Después, le preguntamos qué otras cosas podría hacer y responde que "multiplicar". Primero escribe un 2 que multiplica al parámetro independiente pero al observar que esto sube la función el doble de lo que estaba lo deja como antes. Después escribe el -2 que hay multiplicando a $-e$ también sin éxito. Por último, prueba a multiplicar el exponente por 2, lo que hace que la gráfica cambie de forma. Para verlo de un modo más claro da un valor mayor, $y = -e^{-20x} + 27$ (intervención 444), cosa que hace que visualmente la gráfica tenga una forma de línea creciente casi vertical y luego una línea casi horizontal, en forma de "L" invertida (┌). Una vez en esta posición parece que, para ella, bastaría con bajar la parte de la gráfica inicial cambiando su forma para que pase por el primer punto, esto es, busca que la gráfica haga un movimiento determinado en vez de explorar los tipos de movimientos que hacen los parámetros y adaptarse a estos para tratar de ajustar la gráfica a los puntos. No obstante, ve que no puede conseguir el movimiento que desea modificando los parámetros y comenta que es imposible ajustar la función:

446. IG. Ahora... Ahora quiero que baje (entendiendo por "bajar" mover la parte inicial de la gráfica en sentido vertical hacia abajo).

447. MO. ¿Quieres que baje para qué?

448. IG. Para empezar de ahí (señalando el primer punto representado).

449. MO. Para empezar... ¿para bajarla ahí? A ver, tú piensa que si la bajas ahí, ya no ajustará a esos puntos (entendiendo por "bajar" bajar toda la gráfica y señalando los puntos del final).

450. IG. Ya, pero es que entonces es imposible.

Parte II. Después de esto, lo que se dispone a hacer IG es bajar la parte de la gráfica donde cambia de dirección hasta ajustarla a los puntos. Como hemos dicho, no lo consigue porque no puede hacer este tipo de movimiento cambiando el valor de los parámetros. En concreto, empieza cambiando el valor del parámetro a' por -5 y luego por -55 pero finalmente deja la expresión como estaba, $y = -e^{-20x} + 27$, por no apreciarse de forma visual los cambios en la gráfica ya que el valor numérico correspondiente al parámetro k del exponente es demasiado grande (intervenciones 446 a 451).

Parte III. Después de esto, tratamos de que la alumna se dé cuenta de los movimientos que hace cada parámetro para que, jugando con estos, ajuste la función a los puntos. Por ello, cuando la alumna indica que lo que quiere hacer es que la función "baje pero que se abra, pero en plan hacia arriba" (intervención 454), lo que tratamos de hacer es que pruebe qué hacen los parámetros en la gráfica hasta que encuentre aquel parámetro que hace que "se abra" y otro que haga que "baje" (en el sentido en el que usa ella el término). Por ello, para hacerle ver cómo "se abre" la gráfica, empezamos pidiéndole que cambie los valores del exponente y observe qué pasa gráficamente. Empieza escribiendo -2 y le comentamos que antes ya ha hecho esto, tenía un -1 y al escribir un -2 se ha cerrado, por tanto, le preguntamos qué tendrá que hacer si lo que quiere es que se abra y entonces se da cuenta de que deberá considerar un valor menor que 1.

455. MO. ¿Que se abra?

456. IG. Sí.

457. MO. Por tanto, si teníamos un 1...

458. IG. Que se abra y que baje.

459. MO. Si teníamos un 1, hemos puesto un 2 antes y se ha cerrado, si queremos que se abra...

462. IG. Pues tendrá que ser uno más pequeño.

Empieza probando con -0,75 y luego con -0,2 para finalmente dejar -0,6 y, aunque la gráfica no tiene la forma deseada, IG dice que lo que quiere hacer en ese momento es bajar la gráfica (intervención 467). Parece que IG no se ha dado cuenta todavía de que el único parámetro que puede cambiar la curvatura de la gráfica es k, por lo que queremos que trate de ajustar primero la curvatura y después mover la parte izquierda de la gráfica de modo que se acerque más a los puntos. Por ello, le insistimos en que lo que debe hacer primero es conseguir que la gráfica tenga la curvatura deseada y, después, moverla. Esto hace que empiece a dar los valores -0,4, -0,3, etc. al parámetro k hasta que finalmente deja el valor -0,075 por ser el que hace que la gráfica tenga la curvatura deseada, quedando la fórmula como $y = -e^{-0{,}075x} + 27$. Una vez conseguido esto, da valores a a' para "bajar" la función hacia los puntos (o pegarla más al eje, como decía JL). Empieza con 25 y luego va probando con valores menores hasta que, finalmente, decide escribir 14 porque era el valor de la temperatura inicial, obteniendo la función $y = -14e^{-0{,}075x} + 27$ que ajusta aproximadamente a los puntos.

[509]-[552] Por último, trata de ajustar mejor la función a los puntos cambiando los valores de los parámetros. Empieza cambiando los valores del parámetro k para hacer que la curvatura no sea tan suave. Escribe el valor 0,085 en el exponente, $y = -14e^{(-0{,}085x)} + 27$, lo que hace que la gráfica tenga una curvatura más parecida a la forma de los puntos. Después, indica que tiene que subir un poco la curva en la parte izquierda, por lo que se dispone a cambiar el valor numérico del parámetro a'. Sin embargo, al aumentar el valor de a' en vez de disminuirlo (borra el 14 y escribe 15 y luego 16) lo que hace es bajar más la gráfica (probablemente empieza probando a aumentar el valor porque quiere subir la gráfica y asocia "subir" con "aumentar"). Como ve que no consigue lo que quiere prueba ahora a cambiar el valor de d, lo que hace que varíe la altura de toda la función y deje la función como estaba inicialmente. Entonces, decide cambiar de nuevo los valores del exponente y da valores más grandes hasta conseguir una apertura parecida a la forma de los puntos con $y = -16e^{(-0{,}13x)} + 27$. Finalmente, cambia el valor del parámetro a' y, después de unos cuantos intentos, acaba asignándole el valor 13 (puesto que al ver que si le da valores más pequeños, la gráfica sube). Por último, cambia el valor numérico de k para ajustar mejor la curvatura de la gráfica a los puntos obteniendo la fórmula $y = -13e^{(-0{,}1x)} + 27$.

[553]-[577] Recopilatorio con el objetivo de ver como relaciona gráfica con expresión algebraica y con aspectos concretos del contexto del experimento estudiado

Al final, le pedimos que interprete los valores correspondientes a los parámetros en la fórmula en relación con los movimientos que estos realizan sobre la gráfica de modo que la alumna es capaz de interpretar algunos de ellos en relación con los valores concretos del fenómeno, pero no queda mucho tiempo, por lo que no podemos continuar profundizando.

5.3.2.2. Tablas ajuste función a puntos IG

En este apartado mostramos una tabla con las actuaciones paso por paso de IG por lo que respecta al ajuste de la función a los puntos hasta obtener la fórmula $y = -13e^{(-0,1x)} + 27$. Añadimos en esta, además, el objetivo general y especifica con los que realiza dichas acciones.

<table>
<tr><th colspan="6">Ajuste gráfica función a puntos IG</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Objetivo general actuaciones IG</th><th colspan="4">Actuaciones IG</th><th rowspan="2">Objetivo concreto actuaciones IG</th></tr>
<tr><th>Fórmula</th><th>a'</th><th>k</th><th>d</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Escribir fórmula como la del ítem 2 pero con valores concretos para los parámetros pero intentando acordarse de la fórmula de memoria y sin mirar lo que pasa en la gráfica. [338]-[361]</td><td>$y = l$</td><td>l</td><td></td><td></td><td>Empieza escribiendo un parámetro al que llama l.</td></tr>
<tr><td>$y = l \cdot e^2$
$y = l \cdot e^{2 \cdot 2}$
$y = l \cdot e$</td><td></td><td>2
2·2
1</td><td></td><td>Continúa escribiendo la e de la función exponencial pero con exponente un valor: el 2. Parece que recuerda que aparecía un producto en el exponente por lo que decide multiplicar por 2. Le comentamos que si en vez de 2 quiere escribir otro valor en el exponente tiene que pulsar la tecla a^b, por lo que borra el exponente.</td></tr>
<tr><td>$y = l \cdot e + x$</td><td></td><td></td><td>x</td><td rowspan="3">Entonces le comentamos que tiene que aparecer una x en algun lado de la expresión. Después de escribirla sumando y multiplicando a e, le preguntamos cuál es la característica principal de la función exponencial, cosa que hace que escriba x en el exponente.</td></tr>
<tr><td>$y = xe$</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$y = e^x$</td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>$y = e^x - 2$
$y = e^x - 5$
$y = e^x$</td><td></td><td></td><td>-2
-5
0</td><td>Escribe los valores 2 y 5 restando a e^x tratando de imitar la expresión algebraica que había elegido en el ítem 2 pero como la imagen de la pantalla está demasiado ampliada no consigue ver con claridad lo que</td></tr>
</table>

					pasa, decide que no es correcto y deja la expresión como estaba inicialmente.
Hacer que la gráfica de la función tenga una forma similar a la de los puntos. Para ello, primero trata de conseguir que la gráfica tenga la orientación adecuada. **[362]-[406]**	Reduce la imagen				Le sugerimos que reduzca la imagen para que se dé cuenta de que gráficamente la función no tiene la orientación adecuada.
	$y = 2e^x$ $y = e^x$	2 1			Como al principio IG no ve que hay que hacer un cambio de orientación sino que quiere cambiar la forma de la función, escribe 2 pero lo borra enseguida al no conseguir el resultado deseado.
	$y = -e^x$ $y = -2e^x$ $y = -e^x$ $y = -2e^x$ $y = -e^x$ $y = -100e^x$ $y = -e^x$ $y = -900000e^x$ $y = -e^x$	-1 -2 -1 -2 -1 -100 -1 -900000 -1			Le preguntamos qué hacíamos para cambiar la orientación de la parábola y entonces recuerda que añadían un signo negativo delante de la expresión, por lo que lo escribe también, consiguiendo cambiar la orientación de la gráfica aunque no sea todavía la correcta: para x cuando tiende a $-\infty$, la función tiende a una asíntota horizontal y para valores positivos de x, ésta decrece exponencialmente. Por tanto, ahora dice que hay que subirla, refiriéndose a que hay que subir la parte de la gráfica que tiende a $-\infty$ (parece que está pensando en realizar un movimiento que no es posible hacer con los parámetros conforme está definiendo la forma canónica). Por eso escribe un 2, que lo escribe y lo vuelve a quitar para observar el cambio que provoca en la gráfica. Esto hace que la función se acerque más al eje de las x.

					Después decide hacer lo mismo pero para valores más grandes y así observar mejor lo que hace: pasar a la parte negativa del eje de las x.
	$y = e^{x}$	1			Le comentamos que igual deberíamos probar a girarla otra vez, lo que hace que quite el signo negativo puesto que asocia el signo con un cambio de orientación.
	$y = e^{-x}$		-1		Como ha quitado el signo de delante lo pone en el exponente para que gire.
	$y = -e^{-x}$	-1			Al no girar hasta la posición que ella esperaba, vuelve a escribir el signo negativo delante de e, obteniendo así una gráfica que sí que está en la posición deseada.
Sube la función hasta la altura que tiene el último punto representado. **[407]-[417]**	$y = -e^{-x} + 5$ $y = -e^{-x} + 27$			5 27	Sabe de otros experimentos que para subir hay que sumarle a la expresión un número positivo. Luego ve que al sumarle 5, la función ha subido 5 unidades, por lo que relaciona la altura de la gráfica con la temperatura ambiente y mira la hoja en la que había estado escribiendo los datos para saber que esta era 27, por lo que el parámetro d será 27.
	Amplía y vuelve a reducir la imagen				Amplía la imagen para ver que los puntos del final sí que ajustan aunque no los del principio. Luego vuelve a reducir la imagen para dejarla como estaba.
Hacer que la gráfica de la función tenga una	$y = l - e^{-x} + 27$ $y = -e^{-x} + 27$			l 1	Como los puntos del principio no ajustan decide que hay que cambiar más cosas de la

curvatura más parecida a la de los puntos y baje hacia donde están estos (como indica IG, "que se abra y baje"). Dividimos las actuaciones en tres partes. **[418]-[508]** **<u>Parte I.</u>** Consigue que la gráfica tenga una forma de ┌, por lo que para ella bastaría con bajar la parte de la gráfica donde cambia de dirección hasta ajustarla a los puntos. Sin embargo, no hay ningún parámetro que haga que esto cambie en esa dirección. **[418]-[445]**	$y=-e^{-x}+3+27$ $y=-e^{-x}+27$			3 1	fórmula pero no sabe cuáles. Al principio coloca el cursor delante de la y y pregunta si puede cambiar algo en ese lado de la igualdad pero al decirle que normalmente una función se define como $y=$ algo decide cambiar cosas en el otro lado. Escribe un parámetro que llama l intentando recordar, de forma errónea, cómo era la fórmula que había elegido en el ítem 2 pero desaparece la gráfica y aparece un deslizador en la pantalla, por lo que decide borrarlo y escribir un valor concreto, 3. Sin embargo lo borra también ya que explica que no lo quería escribir ahí sino en el exponente de e.
	$y=-e^{(-x+3)}+27$* $y=-e^{-(x)}+27$		1		Ahora escribe un 3 en el exponente pero sumando a $-x$. Esto hace que la gráfica se desplace lateralmente y como dice que no es lo que ella quiere, lo borra y deja la expresión tal cual estaba. Esto no sería del todo incorrecto porque sí que se podría ajustar la gráfica a los puntos haciendo uso de dicho parámetro, aunque depende del tipo de movimiento que visualice IG que tiene que hacer la gráfica para adaptarse a los puntos.
	$y=-e^{-(x)}+27\cdot 2$ $y=-e^{-(x)}+27$			27·2 27	Le preguntamos qué otras cosas podría hacer y responde "multiplicar". Primero escribe un 2 que multiplica al parámetro independiente pero al observar que esto sube la función el
	$y=-2(-e)^{-x}+27$ $y=-2e^{-x}+27$	2 -2			

	$y = -100e^{-x} + 27$ $y = -10e^{-x} + 27$ $y = -50e^{-x} + 27$ $y = -45e^{-x} + 27$ $y = -e^{-x} + 27$	-100 -10 -50 -45 -1			doble de lo que estaba lo deja como antes. Después escribe el -2 multiplicando a –*e* con paréntesis pero se hace un lío con los signos y decide dejar -2 multiplicando a e. Como no se aprecia muy bien qué ha pasado al dar el valor de 2, decide dar valores más grandes. Sin embargo, esto hace que la gráfica baje demasiado por lo que vuelve a dar valores más pequeños. Finalmente como ve que no consigue ajustarla a los puntos decide dejarla como estaba al inicio. Por último, prueba a multiplicar el exponente. Primero escribe 2 y luego para observar cómo cambia la gráfica de forma más clara da un valor mayor, cosa que hace que visualmente ésta sea una línea creciente casi vertical y luego una línea casi horizontal, en forma de “ ┌”.
	$y = -e^{-2x} + 27$ $y = -e^{-20x} + 27$		-2 -20		
<u>Parte II.</u> Intentar bajar la parte de la gráfica donde cambia de dirección hasta ajustarla a los puntos. No lo consigue porque no puede hacer este tipo de movimiento cambiando el valor de los parámetros con los que está trabajando y lo deja como estaba. **[446]-[450]**	$y = -5e^{-20x} + 27$ $y = -55e^{-20x} + 27$ $y = -e^{-20x} + 27$	-5 -55 -1			Ahora decide cambiar el valor del parámetro *a’* ya que para ella la gráfica es correcta así, solo hace falta bajarla, refiriéndose a bajar la curva. Sin embargo, al tener el exponente un valor numérico tan alto no se aprecian los cambios por lo que decide dar un valor más alto todavía. Finalmete, como tampoco se aprecia ninguna transformación en la gráfica, decide dejar la fórmula como estaba inicialmente. Dice que es imposible ajustarla. A partir de este momento, intentamos hacer que se dé cuenta del movimiento que hacen cada uno de los parámetros para que,

					modificando los valores de estos, la función ajuste a los puntos. El problema es que todavía no se ha dado cuenta e intenta que la gráfica haga los movimientos que ella quiere.
<u>Parte III.</u> Conseguir que la gráfica tenga una curvatura parecida a la de los puntos (según ella, que "se abra") y después bajar la función hacia estos (mirar intervención 454). **[451]-[508]**	$y=-e^{-2x}+27$ $y=-e^{x}+27$ $y=-e^{3x}+27$ $y=-e^{-3x}+27$ $y=-e^{-0,75x}+27$ $y=-e^{-0,2x}+27$ $y=-e^{-0,6x}+27$ $y=-e^{-0,4x}+27$ $y=-e^{-0,3x}+27$ $y=-e^{-0,2x}+27$ $y=-e^{-0,1x}+27$ $y=-e^{-0,075x}+27$		-2 1 3 -3 -0,75 -0,2 -0,6 -0,4 -0,3 -0,2 -0,1 -0,075		Cambia los valores del exponente porque le comentamos que pruebe a cambiarlos y observe qué pasa gráficamente. Esto lo hacemos con la finalidad de que observe qué significado gráfico tienen los parámetros e intente, basándose en éste, encontrar la fórmula que ajuste a los puntos. Empieza escribiendo -2 y le comentamos que antes ya ha hecho esto, tenía un -1 y al escribir un -2 se ha cerrado, por tanto, le preguntamos qué tendrá que hacer si lo que quiere es que se abra. Entonces IG borra el -2 quedando x en el exponente y luego escribiendo un 3 pero al ver que la orientación cambia dice que tendrá que ser un número negativo seguro. Por tanto, dice que tendrá que ser un valor numérico más pequeño que 1. Empieza probando con -0,75 y luego con -0,2 para finalmente dejar -0,6 y, aunque no tiene la misma forma IG dice que ahora la quiere bajar. Parece que IG no se ha dado cuenta todavía de que el único parámetro que puede cambiar la curvatura de la gráfica es k, por lo que tratamos de que ajuste primero la curvatura y después que mueva la parte izquierda de la gráfica de modo que la

					gráfica se acerque más a los puntos. Por ello, le decimos que lo primero que tiene que hacer es hacer que la gráfica tenga la misma curvatura que la de los puntos y después ya la moverá. Por ello, empieza a dar los valores -0,4, -0,3, etc. a los puntos hasta que finalmente deja -0,075.
	$y=-2e^{-0,075x}+27$ $y=-25e^{-0,075x}+27$ $y=-23e^{-0,075x}+27$ $y=-22e^{-0,075x}+27$ $y=-20e^{-0,075x}+27$ $y=-14e^{-0,075x}+27$	-2 -25 -23 -22 -20 -14			Ahora que ya tiene la curvatura adecuada, da valores para "bajar" la función hacia los puntos. Empieza con 25 y luego va bajando hasta que, finalmente, decide escribir 14 porque era el valor de la temperatura inicial.
Ajustar mejor la función a los puntos. **[509]-[552]**	$y=-14e^{(-0,065x)}+27$ $y=-14e^{(-0,055x)}+27$ $y=-14e^{(-0,045x)}+27$ $y=-14e^{(-0,085x)}+27$		-0,065 -0,055 -0,045 -0,085		Para ella ya está bastante ajustada. Sin embargo, le decimos que trate de ajustarla más y decide cambiar los valores del parámetro k. Aunque necesitaría dar valores mayores a k para que la curvatura no fuera tan suave, da valores más pequeños. Entonces, le comentamos que así está haciendo que la función se abra más, por lo que decide dar valores numéricos más grandes y le da el valor 0,85.

	$y = -15e^{(-0,085x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,085x)} + 27$	-15 -16			Con 0,085 en el exponente la gráfica ya tiene una curva más parecida a la forma de los puntos por lo que decide que hay que subir un poco la curva en la parte izquierda, por lo que cambia el valor numérico del parámetro a'. Sin embargo, lo que hace es aumentar el valor numérico, probablemente porque asocia subir con aumentar, pero hay que tener en cuenta el signo negativo por lo que lo que tendría que hacer es disminuir en vez de aumentar.
	$y = -16e^{(-0,085x)} + 25$ $y = -16e^{(-0,085x)} + 27$			25 27	Como eso ha hecho que bajara y no que subiera, decide tocar el parámetro d para subir toda la función.
	$y = -16e^{(-0,05x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,065x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,09x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,095x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,0955x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,098x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,09999x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,1x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,11x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,112x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,12x)} + 27$ $y = -16e^{(-0,13x)} + 27$		-0,05 -0,065 -0,09 -0,095 -0,0955 -0,098 -0,09999 -0,1 -0,11 -0,112 -0,12 -0,13		Sin embargo, al ver que esto empeora el ajuste lo deja como estaba y decide continuar cambiando el valor numérico del parámetro k. Primero empieza disminuyendo pero cuando ve que esto abre más la curva, decide dar valores más grandes hasta conseguir la apertura parecida a la forma de los puntos.
	Amplía la imagen				Para ver si la función pasa por el punto de corte porque le decimos que no pasa por este

					para intentar hacerle ver que el valor del parámetro a' estará relacionado de alguna forma con el punto de corte del eje de las y. En concreto le comentamos que el punto de corte está dos o tres puntos más arriba de donde está en ese momento la gráfica. Esto lo hacemos ya que vemos que, incidiendo en el significado gráfico dinámico del parámetro a' no consigue el ajuste deseado, entonces intentamos probar guiándola hacia un significado de característica de una gráfica concreta.
	$y = -15e^{(-0{,}13x)} + 27$ $y = -14e^{(-0{,}13x)} + 27$ $y = -14{,}9e^{(-0{,}13x)} + 27$ $y = -14e^{(-0{,}13x)} + 27$ $y = -13e^{(-0{,}13x)} + 27$	-15 -14 -14,9 -14 -13			Empieza disminuyendo los valores numéricos correspondientes al parámetro a' para subir la parte izquierda de la función. Después de escribir 14,9 y de comentarle que de 14 a 14,9 baja y lo que quiere es subirla, decide escribir 13. Sin embargo, aunque al principio relaciona el valor del parámetro con la temperatura inicial, no hay indicios de que se haya dado cuenta de qué tipo de relación hay entre ambos.
	$y = -13e^{(-0{,}1x)} + 27$		-0,1		Cambia el valor numérico de k para ajustar mejor la curvatura de la gráfica a los puntos.

5.3.2.3. Resumen de resultados IG

A continuación presentamos un resumen de los resultados organizados según las tendencias cognitivas observadas a lo largo de las actuaciones de IG.

<u>Efecto del análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones</u>

A lo largo de la entrevista, hemos podido observar que la alumna hace referencia al estudio previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones en diferentes momentos durante el estudio del fenómeno.

En primer lugar, vemos que la alumna se apoya sobre la gráfica que realizan en el apartado b) del ítem 1 de las fichas de las entrevistas (ver Anexo 14) para elegir la fórmula de la familia de funciones que mejor representa el fenómeno del calentamiento del cuerpo. En concreto, indica que la familia de funciones que mejor lo representa será $y = a \cdot e^{-cx} + b$ puesto que era la que eligieron para el experimento del enfriamiento (y en este se relacionan las mismas variables) pero, sobre todo, porque aquí también "varía la temperatura hasta que llega un momento que se queda ahí". Esto es, como ve que la gráfica se estabiliza, al igual que la del enfriamiento, decide que la función que ajuste será la misma. Además, llama la atención que ve la función como en dos partes: la parte inicial en la que la función desciende y la parte última en la que se estabiliza, puede que debido a la influencia del análisis cualitativo del experimento del enfriamiento, en el cual representan la gráfica como la unión de dos rectas: una decreciente y otra de pendiente cero.

Por otro lado, después de proporcionarle los puntos del experimento a IG con la app Graphical Analysis e interpretar la gráfica, esta indica que le parece extraño que la temperatura empiece a los 14ºC, lo que nos lleva a pensar que compara esta gráfica con la que ella ha representado en el apartado b) del ítem 1 para verificar y reflexionar si tiene o no sentido.

Además, la alumna tiene en cuenta la forma de la gráfica también durante la elección de puntos que deben representar en la app puesto que toma más puntos del principio ya que, según ella, los valores de más al final tendrán casi la misma altura y, por consiguiente, no le aportaran mucha más información sobre cómo será la función.

Por último, también hemos observado que la alumna trata de recordar de memoria la fórmula de la familia de funciones exponenciales que ha elegido en el apartado a) del ítem 2 para empezar el ajuste de la gráfica a los puntos. Esta trata de copiarla tal cual la recuerda dando valores concretos en algunos casos y en otros no (puede que porque no se fija en la gráfica ya que cuando asigna letras a lo que serían parámetros no aparece ninguna gráfica), a pesar de que en los otros experimentos vistos en clase les indicamos que para realizar el ajuste es mejor partir de la función más simple de la familia (en este caso, $y = e^x$) y después ir realizando operaciones sobre esta para ir moviéndola.

Además, también hemos observado que esta se refiere al análisis cualitativo durante el recordatorio de los experimentos de las lecciones anteriores. En concreto, habla de este cuando le preguntamos por el tipo de gráfica que dibujan en el ítem 2 de la lección 4 (enfriamiento de un líquido) puesto que explica que la dibujan sin fijarse en la forma concreta sino en las propiedades globales de esta (si crece, decrece, se estabiliza, etc.) y que después, al observar la gráfica en la app Graphical Analysis, comprueban cuál es exactamente su forma. Por tanto, parece que usa dicho estudio cualitativo como base para hacerse una idea general de cómo será la gráfica de la función para este experimento.

<u>Los parámetros: tipos de significados en relación con la gráfica y con el fenómeno y modo de otorgar significado</u>

Durante la entrevista de IG hemos observado diferentes actuaciones relacionadas son los parámetros.

En primer lugar hemos notado que, aunque en algunos momentos la alumna empieza viendo cómo afecta a la gráfica el cambio de valores relativos a algún parámetro para poder ajustar la gráfica a los puntos, en otros la alumna actúa de modo que busca que dichos parámetros hagan un movimiento determinado. Este es el caso de cuando tiene la gráfica de la Figura 5.2.a (ver Anexo 26), que la alumna indica que lo que tiene que hacer es subir la parte derecha de la gráfica para que ajuste a los puntos e intenta buscar un parámetro que haga dicho movimiento, sin éxito alguno. También actúa del mismo modo cuando tiene la gráfica de la Figura 5.2.b (ver Anexo 26), que explica que lo que tiene que hacer es que baje (solo la parte izquierda de la gráfica) y se abra pero, al no encontrar ningún parámetro que realice este movimiento indica que “es imposible” (intervención 450). Esta situación se resuelve al hacerle ver que debe probar qué hace cada parámetro y ver si hay alguno que hace que la gráfica “se abra” y después otro que baje (la parte izquierda) hasta el primer punto. Estas dificultades aparecen debido al hecho de que la alumna espera que los parámetros hagan unos movimientos determinados aunque, para conseguir el ajuste lo que tiene que hacer es observar qué implica el cambio de cada valor de los parámetros y tratar de buscar una combinación válida de movimientos que le permita ajustar la gráfica a los puntos. Además, el hecho de concebir los movimientos como que “se abre” o “baja una parte de la función” se debe al hecho de que los movimientos que hace la gráfica se observan de forma global y no punto a punto.

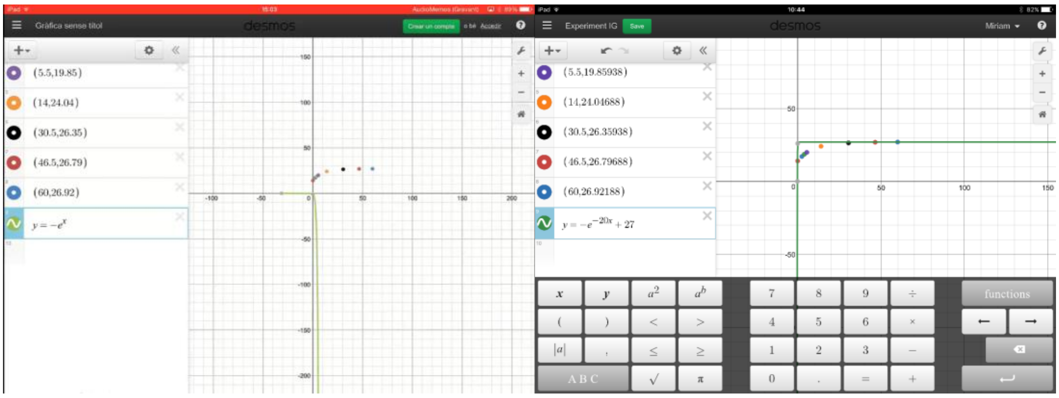

Figura 5.2. a) Gráfica de la función $y = -e^x$ (izquierda); b) Gráfica de la función $y = -e^{-20x} + 27$ (derecha)

Por otro lado, por lo que respecta al significado que otorga la alumna a los parámetros en relación con la gráfica tenemos que en la mayoría de casos los concibe como movimientos, esto es, les otorga un significado dinámico. Por ejemplo cuando habla de que el valor que multiplica a e sube una parte de la función o cuando indica que el término independiente sube o baja toda la función. No obstante, en algún caso les otorga un significado estático, cuando concibe que el signo negativo (tanto el del parámetro a' como el de k) implica que la gráfica tenga una orientación determinada, o de característica de la gráfica particular de la familia de funciones cuando habla de que el valor del parámetro a' está relacionado con el punto de corte de la gráfica con el eje OY, aunque no parece darse cuenta de qué relación existe exactamente entre estos.

Por último, por lo que respecta al significado que otorga IG a los parámetros en relación con el fenómeno tenemos que hace referencia o usa los valores del experimento para determinar el valor del parámetro d, cuya altura coincidirá con el valor de la temperatura ambiente, y el valor del parámetro a', que lo relaciona con la temperatura inicial (o con la coordenada segunda del primer punto). No obstante, aunque no es capaz de encontrar la relación existente entre el parámetro a' y la temperatura inicial, concibe que existe una relación entre estos y al final de la entrevista trata de justificarlo indicando que el parámetro es 13 porque al multiplicar por e (que según ella es un número que vale un poco más de la unidad), da como resultado el valor de la temperatura inicial, que es 14.

5.3.3. EL CASO DE DC

El siguiente alumno al que realizamos la entrevista fue a DC. En este apartado mostramos un resumen de sus actuaciones a lo largo de la entrevista haciendo referencia, en caso de que sea necesario, a las intervenciones del alumno.

5.3.3.1. Resumen de actuaciones DC

0. Introducción [1]-[16]

Para empezar, le comentamos que lo que haremos en la entrevista será estudiar un cuarto experimento pero centrándonos solo en las partes que nos interesen.

1. Recordatorio de otros experimentos [17]-[98]

Entonces, empezamos a recordar qué tres experimentos estudiaron en clase con la ayuda del alumno.

[17]-[38] Bote de la pelota

En el experimento de la pelota, el alumno explica que tenían que estudiar la relación entre la altura de la pelota desde que pega el primer bote hasta el segundo en relación con el tiempo. Además, indica que la gráfica era una parábola y escribe en la hoja en blanco que la fórmula era $ax^2 + bx + c = 0$. Añade que el vértice de la parábola podría encontrarse en $-b/2a$, cosa que sabe del estudio de la función cuadrática en cursos previos. Al preguntarle por qué escribe la expresión igualada a cero (ya que durante la parte de los experimentos de clase también lo hace así) borra la parte final e indica que es cierto que no es así.

[39]-[83] Alargamiento muelle

En cuanto al experimento del alargamiento del muelle, DC explica que existe una relación entre las variables número de canicas y alargamiento del muelle, además parece que entiende que existe una relación entre el número de canicas y el peso. Cuando le pedimos que explique cómo era la gráfica, no dibuja una recta sino una función curva que va estabilizándose. Esto, tal como explica, se debe a que considera que llegará un momento en el que el muelle perderá elasticidad y no se estirará como antes. Debido a que en el experimento que se hace no se tienen en cuenta estos factores, le recordamos cuál fue la gráfica obtenida con Graphical Analysis y se la enseñamos en la app de modo que se acuerda de que era una recta porque con los datos consideraban un intervalo concreto, no todo el experimento. A continuación le preguntamos por la fórmula que describe dicha relación e indica que es $y = mx + n$.

[84]-[98] Enfriamiento agua

Por lo que respecta al último experimento, el alumno dice que tenían que estudiar la relación entre la temperatura, que iba disminuyendo, y el tiempo, que representaban en el eje OY y OX respectivamente. Además, indica que la temperatura iba bajando al inicio muy rápido y después más lentamente (mientras esboza la gráfica sobre el papel como podemos ver en la Figura 6 del Anexo 27). Después le preguntamos por la fórmula pero no se acuerda de la fórmula concreta, por lo que le pedimos que nos diga qué caracteriza las funciones exponenciales y nos comenta que tienen x elevado a algo pero enseguida rectifica y dice que la característica de las funciones exponenciales es que tienen la x en el exponente y le recordamos que la fórmula de la función que calcularon con la app Graphical Analysis tenía de base el número e.

2. Antes de usar datos recogidos con iPad [99]-[273]

Ahora, continuamos con el estudio del fenómeno del calentamiento de un cuerpo.

[99]-[126] Interpretación del fenómeno a partir del enunciado

Inicialmente le presentamos el enunciado y después de leerlo y pedirle que lo interprete observamos que no termina de entender el fenómeno que debe estudiar por no saber qué es el cloruro de etilo, por lo que se lo explicamos y entonces lo interpreta correctamente. Añade que la temperatura a la que baja el sensor será menor que la temperatura ambiente, que la considera de 20 grados a pesar de que en el enunciado no le proporcionamos ningún dato. Además, aunque no se lo pedimos, dibuja la gráfica de la función que describiría la relación estudiada (ver Figura 8 del Anexo 27) como una función creciente que parte de 0ºC y termina en 20ºC. No obstante, añade que no sabe si será así, refiriéndose a que no sabe si tendrá una forma convexa o más bien cóncava, por lo que parece que al dibujarla está pensando en el fenómeno en general, no en momentos concretos.

[127]-[186] Representación del fenómeno gráficamente a partir del enunciado

A continuación, le pedimos que se centre en la gráfica y explique su significado. Este explica que tiene forma de curva creciente de modo que inicialmente crece muy rápido y después más lentamente va tendiendo a una constante. Explica que lo ha hecho así ya que al aplicar el cloruro de etilo al sensor la temperatura bajará y justo después irá aumentando gradualmente: durante los primeros 10 o 15 segundos la gráfica será muy inclinada porque la temperatura subirá muy rápidamente pero posteriormente irá inclinándose menos debido a que la temperatura ya no aumentará tan rápido. Añade que la gráfica tocará la constante ya que la temperatura irá acercándose más a la temperatura del entorno y que la alcanzará a los 2 o 3 minutos.

> 128. DC. [...] Cuando introducimos el cloruro de etilo, la temperatura dará un bajón impresionante y llegará a una temperatura concreta que será inferior a la temperatura normal, y después irá subiendo, o sea, irá aumentando la temperatura gradualmente.
>
> 130. DC. No aumentará toda de golpe, aumentará gradualmente. En los primeros segundos aumentará bastante, y después alrededor de [...] los 10 o 15 segundos la función irá adquiriendo un poco [...] menos de inclinación, irá inclinándose mucho menos.
>
> 132. DC. Hasta que llegue a eh... Llegue a tocar un poco la constante, y hasta que ya consigue otra vez [...] mantener la temperatura exactamente igual a la temperatura...
>
> 140. DC. No inmediatamente, sino al cabo de dos tres minutos o... no sé.

Cabe destacar que DC da valores concretos en diferentes momentos para representar la gráfica, por lo que parece que esté pensando en un caso concreto para tratar de adivinar la forma de esta. Este hecho puede ser debido a que habitualmente cuando se les pide a los alumnos que representan gráficas, lo hacen o bien a partir de tablas de puntos o a partir de valores concretos, no a partir de enunciados en los que no se les proporcionan más datos.

Cuando le preguntamos por la forma de la gráfica duda un momento y dice que también podría ser que tuviera una forma más cóncava (y dibuja la gráfica de la Figura 11 del Anexo 27) pero inmediatamente se da cuenta de qué esto no tendría sentido porque implicaría que la temperatura se mantendría constante al inicio, luego aumentaría y por último volvería a ser constante (aunque añade que tendría que hacer el experimento para asegurarse).

> 148. DC. A ver...
>
> 150. DC. Podrían... intuyo que podrían haber dos formas. Una que fuera así (mientras dibuja la gráfica de la Figura 11).
>
> 152. DC. [...] Sería que la función hiciera algo así, que es un poco extraño que pase pero bueno.
>
> 153. ¿Por qué ves extraño que pase eso?
>
> 154. DC. Eh... Es extraño porque eso nos estaría diciendo que la temperatura durante [...] un momento se mantendría constante a esa temperatura. Después subiría bastante para volver a mantenerse constante a temperatura ambiente.

Con respecto a la posición de la gráfica respecto a los ejes, explica que la ha dibujado exactamente ahí para facilitar los cálculos posteriores pero que podría haberla dibujado en otra posición, aunque rectifica y dice que en la parte en la que el tiempo es negativo no ya que eso no es posible. Explica que lo que sí que da igual es que la temperatura inicial sea 0, como él ha dibujado, que sea 10 o 20, ya que "tendría la misma forma aunque eso la exageraría un poco más" (intervención 175). Además, cuando le preguntamos también ve posible que la temperatura inicial tome valores negativos.

[187]-[273] Elección de expresión algebraica

Después le preguntamos qué fórmula de las de la tabla podría ser la que mejor representara el fenómeno estudiado. Para responder, se basa en la forma de la gráfica y empieza descartando funciones: descarta la función lineal por tener forma de recta y la cuadrática porque su gráfica no es una parábola (intervención 188). Pero justo después, piensa en el experimento del enfriamiento e indica que al estar estudiando el proceso contrario al del enfriamiento y la fórmula que representaba este era una exponencial, esta debería ser una logarítmica de base e.

> 188. DC. [...] A ver, yo intuyo que si estamos estudiando el proceso contrario al enfriamiento y sabemos que la que... o sea, cuando hacíamos lo contrario salía una exponencial, entonces si hacemos lo contrario en teoría debería de salir una logarítmica, porque lo contrario de la exponencial es la logarítmica. Por tanto, lo más lógico sería decir que es una logarítmica de base e [...].

Además, fijándose ahora de nuevo en la gráfica, indica que debe ser logarítmica por la forma que tiene (probablemente porque la compara con la forma de $y = \log x$ que es similar y tiene una imagen de la función logarítmica muy ligada a esta) ya que estas suben muy rápido al inicio y después ya van acercándose a un valor concreto, cosa que no es cierto.

> 194. DC. Sí, a ver, tiene sentido que sea una logarítmica, porque [...] las logarítmicas empiezan en un sitio concreto, y después [...] suben muy rápidamente al principio y después ya van acercándose a un determinado valor [...].

Como veremos a continuación, el alumno no tiene clara la idea de que son las funciones exponenciales las que tienen asíntotas horizontales, no las logarítmicas. Inicialmente, le pedimos que piense de nuevo en la gráfica para hacerle ver que debe fijarse no solo en la forma sino en que la temperatura va tendiendo a una cierta temperatura y, por tanto, la gráfica tendría una asíntota horizontal y no podría ser una función logarítmica. Sin embargo, parece que para él la logarítmica también tiende a un valor determinado cuando x tiende a infinito. En concreto, cuando le preguntamos nos indica que no solo la logarítmica tiende a un valor concreto sino también la exponencial, por lo que no sabe qué diferencia hay entre ambos tipos de funciones.

> 195. MO. Vale. Realmente, o sea, ¿la función que se acerca a un valor tú piensas que es la logarítmica?
>
> 196. DC. No solo la logarítmica, hay otras funciones que también se acercan a un valor.
>
> 197. MO. ¿Cuáles?
>
> 198. DC. Por ejemplo la exponencial también se acerca a un valor.
>
> 199. MO. Vale, entonces, ¿qué diferencia hay entre la exponencial y la logarítmica?
>
> 200. DC. Una buena pregunta. Muy buena pregunta a la que no tengo respuesta.

Le pedimos que piense y dibuja la gráfica de la función exponencial $y = e^x$, según él, el caso más básico (intervención 202). Después, dibuja la logarítmica $y = \log x$ en la misma gráfica (ver Figura 14 del Anexo 27). El alumno indica que la dibuja en esta posición porque "si pudiéramos doblarla (la gráfica por la recta $y = x$), coincidirían porque son inversas" (intervención 216). Además, añade que la exponencial tiene una asíntota horizontal, por lo que a partir de esta idea de doblar la gráfica DC acaba dándose cuenta que la logarítmica no tendrá una asíntota horizontal sino vertical; y como la gráfica del experimento que está estudiando tiene una asíntota horizontal será una exponencial.

<u>3. Después de usar datos recogidos con iPad [274]-[546]</u>

A continuación, pasamos a estudiar el experimento con datos concretos. Le comentamos a DC que en este caso, a diferencia de los experimentos de clase, le proporcionamos nosotros los datos del experimento que ya hemos realizado (el experimento E1). Después de mostrárselos, le pedimos que explique el significado de la gráfica del experimento E1.

[274]-[297] Interpretación de la gráfica

En primer lugar, DC empieza explicando que después de aplicar el sensor la temperatura ha bajado hasta 14 grados y que después ha aumentado muy rápidamente hasta finalmente llegar sobre los 27 grados que es la temperatura ambiente. Además, indica que a los 20 segundos se puede observar como la gráfica ya va estabilizándose ya que la temperatura va acercándose a la temperatura ambiente y a los 30 segundos ya prácticamente se podría decir que la temperatura se ha estabilizado. Comenta también que habríamos estado tomando datos durante unos 60 segundos, cada dos o tres segundos, y que esperaba que el experimento "tardara más" (intervención 292), puede que porque el experimento del enfriamiento tardó más tiempo en realizarse que este. Por otro lado, añade que la gráfica está contenida en el primer cuadrante, tal como esperaba, y que no tendría sentido que estuviera en la parte negativa de y.

[298]-[328] Elección de puntos en tabla de valores y representación en Desmos

Después de interpretar la gráfica, le facilitamos las coordenadas de los puntos en una hoja (ver la hoja de puntos de E1 en el Anexo 14) y le explicamos que en esta aparecen números divididos en 3 bloques y en cada uno de estos hay dos columnas con los valores relativos al tiempo y a la temperatura y que corresponden a los datos del experimento que proporciona Graphical Analysis. Al pedirle que elija 8, decide escoger el primer punto, "para ver qué pasa cuando corta (el eje OY)" (intervención 303); el último punto i después el resto más del principio "porque son los que más van a indicarme como hace la función" (intervención 307) y porque los del final "tienen la misma constante ya que la función va acercándose a la asíntota" (intervención 305), por lo que decide escoger solo el último. Por tanto, como en los casos anteriores, se basa en la forma de la gráfica para elegir los puntos.

[320]-[449] Ajuste gráfica función a puntos mediante manipulación de fórmula

Una vez copiados los puntos, DC se dispone a intentar ajustar una gráfica a los puntos mediante la manipulación de los parámetros de una expresión algebraica de modo que obtiene la fórmula $y = a'e^{kx} + d$, con a', k y d valores reales. El proceso de ajuste se puede observar en la tabla del siguiente apartado (apartado 5.3.3.2) y contiene las actuaciones de los estudiantes referidas al ajuste de la función a los puntos.

[320]-[343] Primero empieza sustituyendo por valores los parámetros de la expresión algebraica del apartado a) del ítem 2, la expresión $y = ae^{-cx} + b$. Copia la expresión de modo que sustituye el parámetro a que aparece en la fórmula por 2, luego el c por 2 también y el b por 13,98, por ser la segunda coordenada del primer punto (intervención 329) y por ser "la altura en el eje de las y" (intervención 331) ya que piensa que esto hará que la función corte por el primer punto. Cabe destacar que, aunque la altura a la que tiene que subir la función no es esta, ya sabe que este parámetro le permite subir la función tantas unidades como indica el número introducido.

[344]-[346] A continuación, dice que la función no está en la orientación adecuada, por lo que añade un signo negativo delante del valor 2 correspondiente al parámetro a, "para poder girarla o que cambie de sentido" (intervención 346).

[347]-[384] A partir de este momento, DC trata de probar valores para los distintos parámetros con la finalidad de ver qué tipo de movimientos sobre la gráfica hace cada uno de éstos y poder, de este modo, ajustarla a los puntos. Por ello, lo que hace es cambiar los valores de éstos y observar qué sucede en la gráfica para así poder ajustar esta a los puntos representados. Conviene señalar que este alumno hace el proceso inverso al que hacía IG que buscaba, de alguna forma, que al variar los valores de los parámetros la gráfica hiciera unos movimientos concretos. El alumno empieza cambiando el valor correspondiente al parámetro a' (a partir de aquí usamos la notación para los parámetros relativa a la fórmula $y = a'e^{kx} + d$) y observa gráficamente qué sucede. Comenta que esto hace que cambie la obertura, en concreto al pasar de -2 a -5 "lo que ha hecho es incrementar lo que es la obertura" (intervención 350) pero después le da al parámetro un valor más grande e indica que parece que lo que hace la gráfica es "desplazase en el eje de las y (intervención 360)". Por ello, como no le queda claro decide probar a ver qué hace otro parámetro.

Ahora decide cambiar el valor del parámetro k y ver qué pasa. Borra el 2 de $-2x$ y escribe un 6 observando lo que va haciendo la gráfica también cuando pasa por $-x$. DC comenta que ha empeorado, aunque ahora la curvatura es más redonda y parecida a la forma que tienen los puntos. Sin embargo, él concibe como que lo que ha hecho al cambiar el valor del parámetro es "desplazar lo que es el punto donde hace la asíntota" (intervención 367), refiriéndose a que la gráfica se ha desplazado en dirección diagonal hacia arriba desde el punto donde la curvatura es mayor. Como queremos que vea que con este parámetro lo que puede conseguir es cambiar la forma o curvatura de la gráfica para que ajuste a los puntos le preguntamos si también observa que ha cambiado la forma de la gráfica al haber cambiado el valor de k y responde que sí.

372. MO. Vale. Y realmente, ¿qué ha pasado?¿Cambia un poco la forma también no?

373. DC. Sí, bastante.

Cabe destacar que nosotros entendemos que "desplazarse en diagonal", como indica DC, implica hacer una traslación en este sentido (movimiento que no se refleja en los parámetros de la forma canónica considerada). No obstante, cuando el alumno habla de desplazarse en diagonal parece que entiende que también se produce un cambio de forma. Por tanto, notemos que hay una diferencia entre como describe DC el movimiento que hace la gráfica y como entendemos nosotros lo que nos explica. Además se puede apreciar que el hecho de que gráficamente el cambio de valores en los parámetros se vea globalmente y no punto a punto puede dar lugar a diferentes interpretaciones como hemos visto en los otros casos analizados. Por último, DC quiere ver qué sucede para valores positivos del exponente, por lo que escribe el número 2 entre paréntesis con un menos delante de modo que el resultado es un número positivo (esto lo hace porque parece que se ha basado en la función de la forma canónica $y = ae^{-cx} + b$ y no quiere cambiar la forma de la expresión). Al ver que esto cambia de orientación la gráfica, decide dejarlo cómo estaba inicialmente.

376. DC. ¿Y si pongo un número positivo? (mientras pasa de la expresión "-69·e^{-x}+13.98" a "-69·$e^{-(-2)x}$+13.98") [...] Me cambia el sentido (refiriéndose a que cambia de orientación).

A continuación, como ya ha probado a mover los parámetros anteriores, prueba ahora a cambiar el valor del parámetro d a 1 pero como se da cuenta de que este cambia la altura lo vuelve a dejar como estaba, copiando la segunda coordenada del primer punto.

Por último, cambia el valor del parámetro a' para tratar de ver con más claridad qué tipo de movimiento hace y comenta que "el parámetro este hace alguna cosa rara", probablemente porque no ha visto este tipo de movimiento en las otras familias de funciones estudiadas.

[385]-[397] Después de esto, hacemos un repaso del significado que para el alumno tienen los parámetros y se replantea, en base a estos, qué debe hacer. Lo primero que quiere es subir la gráfica más arriba, a la altura del último punto (por lo que ha cambiado de opinión con respecto a cómo pensaba antes que quería subirla hasta el primer punto), probablemente debido a que ve que no hay forma de ajustar a los puntos que están a una altura más alta y de este modo cree que lo conseguirá. Por ello, cambia el parámetro b a 27, puesto que sabe que es la altura de la gráfica ya que es la temperatura ambiente, como había dicho antes (esto lo hace fijándose en la gráfica ya que si se hubiera fijado en la segunda coordenada del último punto habría escrito 26,86).

392. DC. [...] La pregunta es, ¿lo que yo quiero conseguir que es? Vale, entonces vamos a variar este valor (señalando el valor del parámetro d que es 13,98) y vamos a ver si lo subimos a 27.

394. DC. Vale [...] eso es lo que yo busco. Y a partir de ahí ya iremos cuadrando los puntos.

[398]-[404] Ahora DC indica que lo que quiere es que la gráfica baje de la parte izquierda para ajustarse a los puntos del principio. Para ello, decide cambiar el valor del parámetro k de -2 a -8 de forma que cambia la curvatura de la gráfica pero el punto de corte continúa siendo el mismo. Sin embargo, al pasar de -2 a -8 borra el número y ve que con exponente $-x$ la gráfica tiene una curvatura más parecida a la de los puntos. Observa que para valores numéricos más grandes (sin tener en cuenta el signo) la curvatura es mayor y para valores numéricos más cerca de 1 es más suave, que es lo que quiere. Por tanto, decide centrarse en adaptar la curvatura a la de los puntos usando el parámetro k. Nos dice que quiere que la gráfica tenga una curvatura más suave todavía. Inicialmente dice que tendrá que ser un número negativo (ya que, aunque aparezca un signo negativo ya en el exponente, este se refiriere solo al valor numérico) pero le decimos que negativo ya es, por lo que dice que positivo pero que así no puede ser ya que se girará la función. Entonces decide cambiar los valores del parámetro a' para ver qué pasa.

Tratando de reconducir la situación y hacer que vuelva a cambiar los valores del parámetro k, le comentamos que entre los positivos y -1 hay otros números, por lo que decide probar con números decimales y cambia el -1 por -0,4.

> 415. MO. [...] Si le pones un positivo cambia (de orientación) pero entre los positivos y el -1 hay otros números también, ¿no?
>
> 416. DC. Sí... un número decimal, ¿por ejemplo? (mientras escribe -0,4 en el exponente)

Luego prueba con -0,1 y con -0,9, que le parece más adecuado, aunque no lo es. Comenta que todavía no tiene la gráfica en la forma que quiere pero que ahora quiere bajar la gráfica del principio.

> 420. DC. [...] Ahora lo único que me falta es bajar esto (señalando el punto en el que la gráfica corta el eje OY), o sea, aproximadamente, tampoco lo tengo conforme yo quiero.

Le decimos que primero ajuste la curvatura, por lo que va disminuyendo valores hasta el -0,2. No llega al -0,1 porque antes le ha parecido que la gráfica no tenía la forma adecuada con ese valor. Lo instamos a que continúe probando con valores más pequeños y acaba dejando -0,1 en el exponente.

[429]-[445] Al tener más o menos ajustada la curvatura, pretende ahora conseguir que la gráfica tenga la misma forma que los puntos. Prueba con a' por descarte ya que anteriormente dice que a' hace movimientos extraños pero ya ha visto que la curvatura o "obertura" como él lo llama, viene determinada por k y la altura por d. Le da el valor 8 por probar y continua aumentando el valor ya que así se parece más a la forma que debería tener.

Como ahora la gráfica está más cerca de los puntos, trata de hacer que la curvatura se parezca más a la de los puntos cambiando de nuevo k, por lo que escribe -0,12 y luego -0,13 pero como esto hace que la curvatura sea menos suave decide dejarlo todo como al inicio.

Le comentamos que el valor que multiplica a x en el exponente cambia la curvatura pero no el punto de corte con el eje de las y, ya que necesita cambiar éste para mover la función y que se adapte a los puntos. Por ello, vuelve al parámetro a' y, al hablarle de punto de corte, decide escribir el valor de la coordenada del segundo punto. Empieza escribiendo 13, que es la parte entera de la segunda coordenada del primer punto (que es 13,98), mientras observa qué sucede en la gráfica de modo que ve que con el valor 13 ya ajusta bastante bien (esto se debe a que 13 es la diferencia entre 26,92 y 13,98). Sin embargo, cuando escribe el valor exacto de esta, 13,98, la gráfica se mueve y decide dejar la fórmula con un 13.

Finalmente ajusta un poco los números hasta obtener la fórmula $y = -13 \cdot e^{-0,11x} + 27$.

[450]-[543] Recopilatorio con el objetivo de ver como relaciona gráfica con expresión algebraica y con aspectos concretos del contexto del experimento estudiado

Al final, le pedimos que interprete los valores correspondientes a los parámetros en la fórmula en relación con los movimientos que estos realizan sobre la gráfica.

Indica que la d es el valor que establece "dónde se estabiliza (la temperatura)", "donde va adquiriendo el valor constante" (intervención 457). Por lo que respecta al valor de a', indica que es el que lo "ayuda a desplazar el punto donde se encontrará lo que es la asíntota" (haciendo un movimiento con la mano cóncava en diagonal de arriba abajo, refiriéndose a dónde corta la gráfica con el eje). Y, por último, le preguntamos por el parámetro relativo a k, que vale -0,11, correspondiente a k, si tiene alguna relación con la gráfica. Comenta que ese era un poco más difícil de ver pero que tenía que ser un número negativo ya que sino la gráfica tendría otra orientación porque el signo negativo hacía que se invirtiera.

Después le pedimos que interprete los parámetros en relación con los datos del experimento E1. Explica que 27 es la temperatura ambiente, -0,11 no sabe relacionarlo con el fenómeno y, después de proporcionarle ayuda a través de preguntas y de darle los datos de otro supuesto experimento, descubre que -13 es la diferencia entre temperatura inicial y temperatura ambiente. En concreto, el alumno intuye que existe una relación entre el valor de la temperatura ambiente y el parámetro a' (tal como comentamos en la intervención 495). Por ello, le comentamos que en este caso la temperatura inicial era 14 y el parámetro 13, pero que si la temperatura inicial fuera 10 el parámetro sería 17, de donde deduce que dicha relación.

5.3.3.2. Tablas ajuste función a puntos DC

A continuación, presentamos una tabla con las actuaciones paso a paso del alumno en relación con el ajuste de la función a los puntos hasta la obtención de la fórmula $y = -13e^{(-0{,}11x)} + 27$.

Ajuste gráfica función a puntos DC					
Objetivo general actuaciones DC	**Actuaciones DC**				**Objetivo concreto actuaciones DC**
	Fórmula	***a'***	***k***	***d***	
Escribir fórmula como la del ítem 2 pero con valores concretos para los parámetros copiando la fórmula del ítem 2a, $y = a \cdot e^{-cx} + b$, y mirando lo que sucede en la gráfica. El único valor que escribe sabiendo lo que provoca en la gráfica es el correspondiente a d. **[320]-[343]**	$y = 2 \cdot e$	2			Empieza substituyendo el parámetro a que aparece en la fórmula del ítem 2a por 2 y lo multiplica a e.
	$y = 2 \cdot e^{-2x}$		-2		Continua escribiendo el exponente de e y decide que será $-2x$, siguiendo la función del ítem 2a y substituyendo lo que allí aparece como c por 2 por probar con un valor. Cabe destacar que el signo negativo lo escribe porque así aparece en la fórmula.
	$y = 2 \cdot e^{-2x} + 13{,}98$			13,98	Siguiendo la fórmula, substituye el parámetro b por el valor 13,98 ya que, tal como explica, será la segunda coordenada del primer punto, es decir, la altura por la que la función corta el eje de las y. Cabe destacar que, aunque la altura a la que tiene que subir la función no es esta, ya sabe que este parámetro le permite determinar la altura de la función de modo que el valor del parámetro indica el valor de la altura.
Cambiar de orientación la gráfica. **[344]-[346]**	$y = -2 \cdot e^{-2x} + 13{,}98$	-2			Como quiere cambiar de orientación la gráfica, añade un signo negativo delante del parámetro a', ya que esto hacía que la gráfica

					cambiara de orientación las funciones de otros experimentos.
Probar qué tipo de movimientos sobre la gráfica hace cada uno de los parámetros. Por eso, decide cambiar los valores de éstos y observar qué sucede para después ajustar la función a los puntos (al contrario que hacía IG) **[347]-[384]**	Reduce la imagen				Reduce la imagen porque le comentamos que puede hacer más pequeña la pantalla para ver mejor toda la función.
	$y=-5\cdot e^{-2x}+13{,}98$ $y=-2\cdot e^{-2x}+13{,}98$ $y=-5\cdot e^{-2x}+13{,}98$	-5 -2 -5			Decide que el único valor que no es correcto es el correspondiente al parámetro a' por lo que decide cambiar los valores y observar gráficamente qué sucede. Cambia de -2 a -5 y luego de nuevo ya que los cambios no se aprecian con claridad, entonces dice que esto hace que cambie la obertura.
	Mueve la imagen hacia arriba				Le sugerimos que mueva la imagen hacia arriba para que así vea el punto de corte ya que conforme tenía la imagen anteriormente, al aparecer el teclado en la pantalla lo tapaba. Esto lo hacemos para ver si se da cuenta de que al cambiar a' también cambia el punto de corte.
	$y=-69\cdot e^{-2x}+13{,}98$ $y=-9\cdot e^{-2x}+13{,}98$ $y=-69\cdot e^{-2x}+13{,}98$	-69 -9 -69			Da valores más diferentes entre sí para observar mejor los cambios gráficamente. Entonces comenta que en vez de cambiar la obertura, lo que hace a' es como si se hubiera desplazado hacia la derecha más cerca del eje OY. Aunque le preguntamos si hace alguna cosa más, dice que no.
	$y=-69\cdot e^{-x}+13{,}98$ $y=-69\cdot e^{-6x}+13{,}98$ $y=-69\cdot e^{-x}+13{,}98$		-1 -6 -1		Por ello, decide cambiar el valor de otro parámetro y ver qué pasa. Borra el 2 y escribe un 6 observando lo que va haciendo

	$y = -69 \cdot e^{-8x} + 13{,}98$ $y = -69 \cdot e^{-x} + 13{,}98$ $y = -69 \cdot e^{-(2)x} + 13{,}98$ $y = -69 \cdot e^{-(-2)x} + 13{,}98$ $y = -69 \cdot e^{-2x} + 13{,}98$		-8 -1 -(2) -(-2) -2		la gráfica también cuando pasa por $-x$. DC comenta que ha empeorado, aunque ahora la curvatura es más redonda y parecida a la forma que tienen los puntos. Sin embargo, él concibe como que la función se ha desplazado en diagonal (aunque se refiere a que se ha desplazado en diagonal y ha cambiado su forma). Por ello, vuelve a comprobar lo que hace con otros valores: quita el -6 y escribe un -8. No obstante, nosotros entendemos que desplazarse en diagonal es solo hacer una traslación, por lo que le comentamos que también cambia la forma. Después, DC decide probar con valores positivos en el exponente, cosa que hace que la gráfica cambie de orientación y vuelva a escribir un signo negativo. Para escribir un número positivo, escribe un paréntesis y el signo negativo dentro ya que es así como estaba la fórmula del ítem 2a, con un menos en el exponente.
	$y = -69 \cdot e^{-2x} + 1$ $y = -69 \cdot e^{-2x} + 13{,}98438$			1 13,98438	Como ya ha probado a mover los parámetros anteriores, prueba ahora a cambiar el valor del parámetro independiente d a 1 pero como se da cuenta de que este cambia la altura lo vuelve a dejar como estaba, copiando la segunda coordenada del primer punto.
	$y = -9 \cdot e^{-2x} + 13{,}98438$ $y = -e^{-2x} + 13{,}98438$ $y = -5 \cdot e^{-2x} + 13{,}98438$	-9 -1 -5			Cambia el valor del parámetro a' para ver si ve con más claridad qué tipo de movimiento hace y comenta que hace unos movimientos

					extraños.
Subir la gráfica más arriba, a la altura del último punto. **[385]-[397]**	$y = -5 \cdot e^{-2x} + 27$			27	Probablemente, debido a que ve que no hay forma de ajustar a los puntos que están a una altura más alta, decide que hay que subir más la función, por eso cambia de 13,98438 a 27. Además, escribe 27 porque se fija en la altura aproximada de la representación gráfica del último punto (no lo mira en la coordenada del punto ya que si no habría escrito 26,86).
	Reduce la imagen				Le pedimos que reduzca la imagen para hacerse una visión global de cómo es la función.
	Mueve la imagen hacia la derecha				Para comprobar que ajusta al punto del final.
	Mueve la imagen hacia la izquierda				Para visualizar los puntos del inicio que son los que faltan por ajustar.
Hacer que la función baje de la parte izquierda. **[398]-[404]**	$y = -5 \cdot e^{-x} + 27$ $y = -5 \cdot e^{-8x} + 27$ $y = -5 \cdot e^{-x} + 27$		-1 -8 -1		Quiere bajar la parte izquierda de la función. Por ello, decide cambiar el valor del parámetro k de -2 a -8 de forma que cambia la curvatura de la gráfica pero el punto de corte continúa siendo el mismo. Sin embargo, al pasar de -2 a -8 borra el número y ve que con exponente $-x$ la gráfica tiene una curvatura más parecida a la de los puntos. Observa que para valores numéricos más grandes (sin tener en cuenta el signo) la curvatura es mayor y para valores numéricos más cerca de 1 es más suave, que es lo que quiere.
Conseguir que la gráfica	$y = -1 \cdot e^{-x} + 27$	-1			Por lo que acaba de ver, decide ahora

tenga una forma o curvatura parecida a la de los puntos. **[405]-[428]**					centrarse en adaptar la curvatura a la de los puntos. Comenta que quiere que la gráfica tenga una curvatura más suave todavía. Inicialmente dice que tendrá que ser un número negativo (ya que, aunque aparezca un signo negativo ya en el exponente, estamos refiriéndonos al valor numérico) pero le decimos que negativo ya es, por lo que dice que positivo pero que así no puede ser ya que se girará la función. Entonces decide cambiar los valores del parámetro a' para ver qué pasa.
	$y = -1 \cdot e^{-0{,}4x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}1x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}9x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}8x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}7x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}5x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}4x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}2x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}25x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}2x} + 27$ $y = -1 \cdot e^{-0{,}1x} + 27$		-0,4 -0,1 -0,9 -0,8 -0,7 -0,5 -0,4 -0,2 -0,25 -0,2 -0,1		Tratando de reconducir la situación y hacer que vuelva al parámetro k, le comentamos que entre los positivos, que harían que la gráfica cambiara de orientación y -1 hay otros números, números decimales, por lo que decide probar a cambiar el -1 por -0,4. Luego prueba con -0,1 y con -0,9, que le parece más adecuado, aunque no lo es. Comenta que todavía no tiene la gráfica en la forma que quiere pero que ahora quiere bajarla. Le decimos que primero trate de obtener la curvatura adecuada, por lo que va disminuyendo valores hasta el -0,2. No llega al -0,1 porque antes le ha parecido que la gráfica no tenía la forma adecuada con ese valor. Lo instamos a que continúe “un poco más” refiriéndonos a hacer la curva “un poco más suave”, pero lo entiende mal y aumenta

					el valor del exponente a -0,25. Al ver que esto hace el efecto contrario decide darle el valor de -0,1 y dejarlo así.
	Reduce la imagen				Reduce la imagen para comprobar que, efectivamente, la gráfica tiene la curvatura o forma adecuada.
Conseguir que la gráfica tenga la misma forma que los puntos. Prueba con a' por descarte ya que la curvatura, determinada por k, ya es parecida y la altura, determinada por d, también. **[429]-[445]**	$y=-8\cdot e^{-0{,}1x}+27$ $y=-10\cdot e^{-0{,}1x}+27$ $y=-111\cdot e^{-0{,}1x}+27$ $y=-11\cdot e^{-0{,}1x}+27$	-8 -10 -111 -11			Una vez ha visto qué hacen los valores de los parámetros k y d y decide que ya tienen un valor adecuado, decide que hay que cambiar el valor de a'. Aunque antes ha dicho que mueve la gráfica “hacia la derecha”, acercándose al eje OY, ahora dice que hace movimientos extraños. Le da el valor 8 por probar y continua aumentando el valor ya que así se parece más a la forma que debería tener. Sin embargo, da un valor numérico muy alto, 111, y retrocede para dejar un 11.
	$y=-11\cdot e^{-0{,}12x}+27$ $y=-11\cdot e^{-0{,}13x}+27$ $y=-11\cdot e^{-0{,}1x}+27$		-0,12 -0,13 -0,1		Como ahora la gráfica está más cerca de los puntos, trata de hacer que la curvatura se parezca más a la de los puntos por lo que escribe 0,12 y luego 0,13 en el exponente pero como esto hace que la curvatura sea menos suave decide dejarlo todo como al inicio de nuevo.
	$y=-13\cdot e^{-0{,}1x}+27$ $y=-13{,}98\cdot e^{-0{,}1x}+27$ $y=-13\cdot e^{-0{,}1x}+27$	-13 -13,98 -13			Le comentamos que el valor que multiplica a x en el exponente cambia la curvatura pero no el punto de corte con el eje de las y, ya que necesita cambiar éste para mover la función y que se adapte a los puntos. Por

					ello, vuelve al parámetro a' y, al hablarle de punto de corte, decide escribir el valor de la coordenada del segundo punto. Empieza escribiendo la parte entera de esta coordenada. 13, ya que lo hace de memoria, y ajusta bastante bien (ya que 13 es la diferencia entre 26,92 y 13,98). Sin embargo, cuando escribe el valor exacto de esta, 13,98, la gráfica se mueve y ajusta menos, por lo que decide dejar la fórmula con un 13.
Ajustar mejor la función a los puntos. **[446]-[449]**	$y = -13 \cdot e^{-0,11x} + 27$		-0,11		Como la función ajusta al primer punto y al último, decide cambiar el valor del parámetro k para que la gráfica se adapte mejor a la curvatura de los puntos.

5.3.3.3. Resumen de resultados DC

En el siguiente apartado presentamos un resumen de los resultados observados a lo largo de la entrevista en las actuaciones de DC.

<u>Efecto del análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones</u>

En cuanto al análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones, hemos observado que, al igual que el resto de sus compañeros, el alumno hace referencia a este en diferentes momentos de la entrevista.

En primer lugar hemos notado que para determinar la fórmula de la familia de funciones que representa la gráfica de la función el alumno se basa inicialmente en la forma de la gráfica y descarta la función lineal y la cuadrática por tener forma de recta y de parábola respectivamente. Sin embargo, aunque el alumno tiene la idea de que la función exponencial se estabiliza, al observar que el fenómeno estudiado es el proceso contrario al del enfriamiento y la fórmula que representaba este era una exponencial, indica que en este caso la función será una logarítmica de base e, por ser la función inversa de la exponencial y que, para él, también tiene una asíntota horizontal. No obstante, esta situación se resuelve usando la idea que él mismo propone de que la función logarítmica $y = \log x$ es la inversa de la exponencial $y = e^x$ porque, si pudiéramos doblar la gráfica por la recta $y = x$, una se solaparía encima de la otra. Por ello, como sabe que la exponencial tiene una asíntota horizontal, se da cuenta que el tipo de asíntota que tendrá la logarítmica será vertical no horizontal, por lo que en este caso la función que mejor representa el fenómeno también será una exponencial ya que la temperatura del sensor se estabiliza cuando va acercándose a la temperatura ambiente, aunque con una orientación distinta. Por tanto, elije la familia de funciones $y = ae^{-cx} + d$.

También hemos notado que, después de proporcionarle los datos al alumno y observar la gráfica del experimento con datos concretos, este alude a la gráfica del análisis cualitativo para validar que su idea de cómo era la gráfica del fenómeno era correcta porque la forma coincide y la gráfica se estabiliza: "vale, sí que sale así" (intervención 277). Además, parece que el hecho de haberle preguntado por la posición de la gráfica durante dicho análisis hace que comente que, tal como había explicado ya antes, la gráfica "será siempre positiva, nunca podremos irnos a la otra parte del eje de las y porque no tiene sentido hablar de negativos" (intervención 284).

Por otro lado tenemos que el alumno también se basa en este análisis cualitativo, en concreto en la gráfica de la función, durante la elección de los puntos que da la app Graphical Analysis puesto que al pedirle que elija 8 escoge aquellos que le permitirán hacerse una idea mejor de cómo deberá ser la gráfica. Este comenta que elige el primero "para ver qué sucede cuando corta (el eje OY)" (intervención 303), del final solo el último porque el resto "tiene la misma constante ya que la función va acercándose a la asíntota" (intervención 305) y los otros puntos los toma del principio "porque son los que más van a indicarme como hace la función" (intervención 307).

Por último, también hemos observado que el alumno se basa en la expresión algebraica de la función exponencial que elige en el apartado a) del ítem 2 para empezar a realizar el ajuste de la gráfica a los puntos. De hecho el propio alumno así lo indica y, además, escribe un signo negativo en el exponente, tal como aparece en la fórmula de la expresión, $y = ae^{-cx} + b$.

Además, el hecho de pedirle que durante el estudio cualitativo realice un esbozo de la gráfica que mejor representaría el fenómeno estudiado y nos explique cómo lo ha hecho nos permite conocer en qué se basa para representar dicha gráfica, qué proceso sigue y cuáles son sus concepciones sobre dicha función. Concretamente, hemos observado que para determinar la gráfica durante el estudio cualitativo del fenómeno, primero piensa en general cómo sería la función, lo que lo conduce a deducir que será creciente, aunque no sabe si tendrá una forma más bien cóncava o convexa. Después de ello, piensa en cómo será en momentos concretos y decide que la forma será más bien convexa, que al principio crecerá muy rápido y poco a poco irá creciendo menos hasta adquirir un valor constante. Esto lo hace dando valores concretos a momentos del fenómeno (dice que a los 10 o 15 segundos la gráfica será muy inclinada, la temperatura del sensor se acercará a la temperatura ambiente a los 2 o 3 minutos, etc.). Además, explica que dibuja la gráfica en esa posición con la intención de simplificar los cálculos, pero que de todos modos la temperatura podría ser negativa o incluso positiva y valer 10 o 20 pero en ese caso la forma de la gráfica no sería tan pronunciada. Sin embargo, dice que el tiempo no podría ser negativo ya que no tendría sentido, por lo que toma como origen de coordenadas el momento en el que empieza el experimento, cuando se ha enfriado el sensor. Por otro lado, esto también nos ha permitido conocer sus concepciones sobre la función logarítmica, como ya hemos comentado, y hacer que este se dé cuenta de que, a pesar de que podemos encontrar una función logarítmica cuya forma general se asemeje a la gráfica representada, esta no se estabiliza cuando x tiende a infinito, que esto solo sucede en las funciones exponenciales.

<u>Los parámetros: tipos de significados en relación con la gráfica y con el fenómeno y modo de otorgar significado</u>

A lo largo del estudio de casos hemos observado diversos tipos de actuaciones de DC en relación con los parámetros.

Aunque durante las sesiones de clase hemos observado que el alumno trata de buscar que los parámetros hagan un movimiento determinado (por ejemplo, en el experimento de la pelota), durante la entrevista no es el caso. De hecho, la forma de actuar del alumno consiste en ir probando valores distintos para cada parámetro con la finalidad de ver qué cambios provocan en la gráfica y, en base a ello, tratar de ajustar la gráfica a los puntos. En concreto primero busca qué hace a', luego k y finalmente d. Por tanto, en este modo de actuar se distingue de lo que hacía IG en algunos momentos, que trataba de buscar que los parámetros hicieran unos movimientos determinados.

Por otro lado, hemos observado que a pesar de que en muchos momentos el alumno sabe qué significado tienen los parámetros en relación con la gráfica, decide ir ajustando esta a los puntos poco a poco en vez de ir probando hasta encontrar el valor del parámetro que hace que la gráfica tenga, por ejemplo, la forma o posición deseada y después ya continuar con otro parámetro. Esto es, cuando el alumno sabe qué significado tiene cada parámetro en relación con la gráfica, lo deja aproximadamente en la posición deseada y se dispone a averiguar qué hace el resto. Este hecho se puede observar, por ejemplo, en la intervención 420, cuando el alumno ya sabe qué hace el parámetro k y lo tiene más o menos ajustado que comenta que lo que quiere ahora es bajar la gráfica de la parte izquierda (para lo que posteriormente usa el parámetro a').

> 420. DC. Entonces, vamos a probar el 0,1 (mientras escribe -0,1 en el exponente)... Vale, 0,9... Vale, más o menos ya tengo lo que busco, ahora lo único que me falta es bajar esto, o sea, aproximadamente, tampoco lo tengo conforme yo quiero (refiriéndose a que ya tiene el exponente aproximadamente como quiere).

También, como en los dos casos anteriores analizados, podemos observar que el alumno concibe los movimientos de la gráfica de una forma peculiar distinta, en algunos casos, a cómo en realidad se comporta la gráfica punto a punto. Por ejemplo, para él el parámetro k del exponente hace que la gráfica se desplace en diagonal desde donde más pronunciada es la curva (intervención 367) o que el parámetro a' se acerque o aleje del eje de las y (intervención 362). Esta forma de concebir los parámetros se debe al hecho de que al observar la gráfica el movimiento de esta se aprecia de forma global, y no punto a punto.

Además, como hemos observado también en otros casos, el hecho de que la app Desmos permita modificar los valores de las expresiones en la propia expresión de la función y sea posible observar en la misma pantalla los cambios sobre la gráfica han ayudado al alumno a dar sentido a algunos parámetros. Por ejemplo, al pasar del exponente $-2x$ a $-8x$, el alumno borra el 2 quedando $-x$ y después escribe el 8. Al observar que cuando el exponente es $-x$ la curvatura es más similar a la forma de los puntos, decide dejar esta expresión en el exponente.

Por otro lado, en relación con los tipos de significados que otorga el alumno al observar la gráfica tenemos que la mayoría son de tipo dinámico y algunos de estos ya intuye previamente qué efecto tendrán sobre la gráfica de la función como consecuencia del estudio de experimentos anteriores. Por ejemplo, el alumno atribuye sentido dinámico a d antes de empezar a probar cuando cambia el valor de este parámetros y explica que lo que quiere es “ver si subimos (la gráfica) a 27” (intervención 392). Posteriormente, también atribuye significado dinámico a a' cuando indica que “lo que ha hecho (este parámetro) es incrementar lo que es la obertura” (intervención 350) y “desplazarse en el eje de las y” (intervención 362) o cuando indica que k sirve para “desplazar lo que es el punto que hace la asíntota” (intervención 367). No obstante, también atribuye significado estático a otros parámetros, como por ejemplo al signo negativo de a' que dice que hace que la gráfica tenga otra orientación o a d que da “la altura en el eje de las y” (intervención 331), parámetros cuyo significado ya conoce de experimentos previos puesto que sabe lo que hacen incluso antes de probar valores para estos en la app. Además, también hemos identificado que concibe los parámetros como características concretas de la gráfica en algunos casos, por ejemplo en el caso de a' que inicialmente lo ve como la segunda coordenada del primer punto representado (donde corta la gráfica con el eje OY) o cuando indica que d “vamos a establecerlo como el primer punto” (intervención 329).

Por último, en relación con el experimento, tenemos que el alumno es capaz de relacionar d con la temperatura ambiente y a' con la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura inicial, cosa que consigue ver después de proporcionarle los datos de un segundo experimento y guiarlo a través de preguntas y sugerencias.

5.3.4. EL CASO DE AB

Por último, presentaremos los resultados relativos a la entrevista del último alumno. En primer lugar, mostraremos un esquema de la reconstrucción racional de las actuaciones de AB durante la entrevista, cosa que presentaremos de forma esquemática y haciendo referencia en cada momento a las intervenciones relativas a cada parte de dicha entrevista. Después mostraremos una tabla con un resumen de sus actuaciones. Y, por último, un resumen de los resultados más importantes observados.

5.3.4.1. Resumen de actuaciones AB

0. Introducción [1]-[10]

En esta parte explicamos al alumno que lo que haremos en la entrevista será estudiar un último experimento. Le explicamos cuál será la estructura de la entrevista y le pedimos que hable en voz alta y que explique todo lo que está pensando en cada momento. Además, le indicamos que puede usar material para realizar apuntes así como también consultar las hojas de los experimentos que ha estudiado en clase.

1. Recordatorio de otros experimentos [11]-[112]

A continuación empezamos a hacer un recordatorio de los experimentos estudiados.

[11]-[50] Bote de la pelota

Por lo que respecta al experimento de la pelota, el alumno explica que tenían que estudiar la relación entre la altura de la pelota desde el primer bote al segundo, ya que concibe que un bote es cuando la pelota toca el suelo, no el tramo desde que toca el suelo hasta que lo vuelve a tocar. Sin embargo, al principio no se acuerda bien y dice que tenían que estudiar el tiempo y la distancia ya que la pelota no saltaba verticalmente, probablemente porque no se acordaba exactamente del experimento. Luego dice que la gráfica era una parábola pero de la fórmula no se acuerda ya que empieza comentando que era $x = a + b$ o algo similar. Al decirle que las funciones cuyas gráficas son paràboles tienen una peculiaridad comenta que esta es que x està elevada a 2.

[51]-[75] Alargamiento muelle

En cuanto al experimento del muelle, inicialmente indica que estudiaban las variables tiempo y longitud del muelle, por lo que decidimos volver a explicarle en qué consistía el experimento y entonces reconoce que las variables estudiadas eran el alargamiento y el peso (aunque lo que realmente estudiaban no era el peso sino el número de canicas introducidas en el vaso). Cuando le preguntamos por la gráfica, nos comenta que era ascendente. Tratando de que dé más detalles sobre su forma le preguntamos si era curva o recta y dice que cree recordar que era una recta. Parece que lo que hace no es pensar en el fenómeno para decidir qué forma tenía la gráfica sino que trata de recordar la forma que obtuvieron. Por último, le preguntamos por la fórmula y, aunque no se acuerda demasiado de esta (indica que era $y = x + a$) tiene claro que es una lineal, por lo que le acabamos mostrando cuál era su forma canónica: $y = ax + b$.

71. MO. [...] Y la fórmula de esa, ¿te acuerdas?

72. AB. Eh... y igual a x más a, más o menos.

73. MO. Sí, tenía la x, sin elevar a nada.

74. AB. Sí, sí.

75. MO. En concreto, era $y = ax + b$.

[76]-[116] Enfriamiento agua

Para finalizar, pasamos a recordar el último experimento, del que dice no acordarse: “de ese no me acuerdo de nada” (intervención 77). Por ello le explicamos en qué consistió y dice que tenían que estudiar las variables tiempo y temperatura y que esta descendía. Por lo que respecta a la gráfica, primero dibuja una curva ascendiente que tiende a estabilizarse para x grandes (ver la Figura 1 del Anexo 28). Sin embargo, al reflexionar sobre cómo es el fenómeno dice que la forma no sería esa sino simétrica, por lo que dibuja una curva descendiente que tiende a cero cuando x tiende a infinito (ver la Figura 2 del Anexo 28). Le preguntamos si tiene que estabilizarse en cero y explica que no, que depende de la temperatura a la que se encuentre el agua, que será la temperatura ambiente. Por último, le preguntamos por el nombre de la función pero al no acordarse le comentamos que era la exponencial y que se caracterizaba por el hecho de que x

aparece en el exponente de un número que, en el caso de este experimento, era el número e.

2. Antes de usar datos recogidos con iPad [117]-[247]

A continuación pasamos al estudio del experimento del calentamiento de un cuerpo.

[117]-[150] Interpretación del fenómeno a partir del enunciado

Empezamos pidiéndole a AB que lea el enunciado y que lo interprete. Entonces explica que inicialmente tenemos un cuerpo a temperatura ambiente que aumentará de temperatura mediante una especie de aparato que lo calentará. Por ello, decidimos explicarle que el aparato se trata de un espray que al aplicarlo sobre el sensor, que es una especie de termómetro, lo enfriará y será entonces cuando tendría que introducirlo en un vaso con agua. Le preguntamos qué pasará entonces y AB explica que el sensor "irá calentándose hasta llegar a la temperatura del agua, la del ambiente" (intervenciones 134 y 136). Le preguntamos qué variables tiene que estudiar y explica que el tiempo y la temperatura. Le preguntamos cómo cree que será dicha relación no solo con la intención de que nos explique cómo concibe el fenómeno en detalle sino también de que reflexione sobre momentos concretos de este (cómo sería el fenómeno al principio, cómo sería al final, etc.) para que, posteriormente, le resulte más fácil representar la gráfica de la función. Sin embargo, aunque insistimos, AB explica el fenómeno de forma genérica diciendo que "a medida que el tiempo avanza, la temperatura iría aumentando hasta llegar a la temperatura ambiente" (intervenciones 145 y 147), por lo que finalmente decidimos que represente la gráfica que expresaría la relación entre las variables estudiadas para ver como lo concibe.

[151]-[202] Representación del fenómeno gráficamente a partir del enunciado

Inicialmente dibuja la gráfica como una curva creciente pero de forma que inicialmente crece muy lento y posteriormente crece muy rápido hasta que llega un momento en el que para de crecer de repente. Probablemente ha representado la gráfica de este modo porque piensa el fenómeno de forma global: a medida que pasa el tiempo, la temperatura aumenta. Le preguntamos por qué la ha representado así para que reflexione sobre cómo sería la curva para momentos concretos del experimento, lo que hace que dibuje otra curva de forma semejante (ver Figura 4 del Anexo28) pero ahora empezando desde la parte negativa del eje de las y (ya que, como él dice, el cuerpo está frío), de modo que va creciendo hasta que se estabiliza a 0ºC de temperatura, que considera como la temperatura ambiente.

> 157. AB. Sería...Imaginemos que el cuerpo está frío, pues subiría... hasta llegar a cero y después iría, como si dijéramos, hacia la temperatura ambiente.

Por tanto, podemos observar que ahora ya ha pensado en momentos concretos del fenómeno ya que dibuja la curva de forma que al final va tendiendo a la temperatura ambiente cuando x tiende a infinito. Añade que ha supuesto que la temperatura inicial es negativa y que la temperatura ambiente es cero pero que no tiene porqué.

Sin embargo, al dibujar la parte inicial de la gráfica de forma que crece más lentamente que justo después, tratamos de hacerle preguntas para ver si se da cuenta de que al inicio la gráfica crecería más rápido y luego más lentamente. No obstante, el alumno explica que la dibuja así porque para él inicialmente la temperatura crece muy lentamente, por lo que aunque concibe de forma errónea el fenómeno es coherente con la gráfica.

> 162. MO. Vale, ¿y por qué has dibujado esto (repasando la parte inicial de la curva que ha dibujado) así [...]?

165. AB. Porque al ser temperatura va... va poco a poco, no va rápido enseguida [...]

169. AB. [...] Irá poco a poco subiendo des de la temperatura normal.

Ahora le preguntamos por la posición y, según lo que nos comenta, deducimos que para él tiene sentido que la gráfica esté en la parte positiva de las x pero no en la negativa ya que no concibe que el tiempo pueda ser negativo. En concreto, al preguntarle si la gráfica podría estar en el tercer cuadrante indica que “no, porque los segundos pasarían a ser negativos” (intervención 201), lo que para él no tendría sentido. Sin embargo, sí que ve que la temperatura pueda tomar tanto valores negativos como positivos.

[203]-[247] Elección de expresión algebraica

A continuación, le preguntamos cuál de las fórmulas de la tabla describiría mejor el fenómeno. Para ello, AB empieza a descartar funciones pensando en cómo sería su representación gráfica y comparándolas con la gráfica que acaba de dibujar. Primeramente, descarta $y = ax$ ya que dice que sería una recta. Sin embargo, después explica que sería $y = ax + b$ “porque es así, más ondulada” (intervención 206) ya que es como la anterior pero “le sumas otro número” (intervención 210). Por ello, deducimos que no ve que $y = ax$ y $y = ax + b$ pertenezcan a una misma familia de funciones, probablemente porque no se ha fijado en las características concretas de $y = ax + b$ (que x no està elevada a nada) sino en la forma general que tiene que puede que le recuerde a alguna gráfica “ondulada”, tal como él describe. Le recordamos que esa función era la que usaban en el experimento del muelle y entonces se acuerda de que tenía forma de recta, por lo que decide descartarla también. Descarta también la cuadrática por el hecho de ser la del bote de la pelota ya que la gráfica no tiene la misma forma que la que él ha dibujado.

Al observar las dificultades del alumno a la hora de relacionar las fórmulas de las familias de funciones con los tipos de gráficas, le sugerimos que vea las letras como números porque pensamos que puede que este tenga dificultades por este hecho, pero no es así.

223. MO. A ver, si a, b y c fueran números, ¿te imaginas las gráficas más fácilmente?

227. MO. [...] Si fueran números, si yo tuviera ahí $2(x-3)^2+1$... ¿Tú esa función, más o menos, sabrías cómo es?

228. No me acuerdo mucho.

Decidimos entonces que continúe mirando el resto de familias de funciones para ver cómo las concibe. A continuación, descarta $y = a/x$ también ya que dice que será como $y = ax$ pero “hacia otro lado” (intervención 230), esto es, probablemente la ve como una recta pero con pendiente negativa. Por este motivo, le comentamos que si hay alguna función que no conoce que nos lo diga y le preguntamos, de las que no ha señalado, si hay alguna que le sugiera que puede ser. Entonces descarta $y = a/x^n + b$ y $y = a \cdot ln\, bx$ e indica que la exponencial, $y = a \cdot e^{-cx} + b$, le resulta conocida pero la acaba descartando también por ser la que usa en el experimento del enfriamiento. Esto hace que le comentemos que hay funciones que pueden describir diferentes experimentos, con la finalidad de que se dé cuenta de que esta es la función que busca. Además, usamos la idea que ha mencionado antes de que la gráfica de este experimento era más o menos la del enfriamiento pero “al revés” (intervención 94), lo que hace que finalmente se decida a elegir la familia de funciones exponenciales como la que mejor describe el fenómeno.

234. AB. [...] Esa me suena (mientras señala la exponencial y la tacha).

237. MO. [...] Esa, ¿por qué no?

238. AB. Porque es la del enfriamiento [...]

239. MO. Pero esa fórmula, al igual que esa y esa, se pueden utilizar para muchas cosas, ¿no?

240. AB. Sí.

241. MO. [...] tú mismo me has dicho antes que era esa (señalando la gráfica del enfriamiento) pero al revés.

242. AB. Sí, sí, vale. Entonces sí que sería.

3. Después de usar datos recogidos con iPad [248]-[536]

Pasamos a continuación a estudiar el experimento del calentamiento de un cuerpo. Para ello, le explicamos a AB que le proporcionamos los datos de un experimento que ya hemos hecho nosotros y le pedimos que, en primer lugar, interprete el significado de la gráfica del experimento.

[248]-[278] Interpretación de la gráfica

El alumno empieza explicando que, por lo que puede ver en la gráfica, la temperatura del sensor sería de 14 grados en el momento en el que se introduce el sensor en el agua y que en este experimento la temperatura no es negativa ya que él antes había considerado que al enfriar el sensor e introducirlo en el agua, la temperatura sería negativa.

256. MO. [...] ¿Qué punto sería el de inicio?

258. MO. [...] ¿Podrías decirme a qué temperatura está?

259. AB. Sería 14, ¿no?

261. AB. [...] no es negativa...

Además, añade que después ha aumentado la temperatura muy rápidamente en los 30 primeros segundos hasta finalmente llegar sobre los 26 grados que es la temperatura ambiente, por lo que la gráfica le hace darse cuenta de que inicialmente la temperatura crece muy rápido (y no cómo él había considerado) por ser la diferencia entre temperaturas muy grande. Explica que después ya crece más lento porque la diferencia de temperaturas entre sensor y agua ya no es tan grande.

263. MO. ¿Y después qué pasa?

264. AB. Que se calienta más rápido (señalando la parte inicial de la curva) y después hay un momento en el que tarda más en calentarse (señalando la parte final).

268. AB. [...] por el contacto del frío con el calor.

270. MO. [...] y después, ¿qué va pasando?

271. AB. Que tarda más en calentarse.

273. AB Porque ya es casi la misma temperatura.

Por último, comenta que el experimento termina a los 60 segundos.

[279]-[303] Elección de puntos en tabla de valores y representación en Desmos

Después de interpretar la gráfica, le proporcionamos al alumno la hoja con los puntos y le explicamos que en esta aparecen tres bloques de números de forma que cada uno de estos contiene dos columnas dónde aparecen dos valores: los relativos al tiempo y a la temperatura. Le comentamos que estos valores corresponden a los que aparecen en las dos columnas en Desmos pero que los hemos escrito en tres bloques para que cupieran en una misma hoja. Le pedimos que escoja 8 puntos y este decide escoger el primer punto y después 7 más de forma que la diferencia entre las coordenadas temporales es de 10 y coge puntos de toda la hoja. Probablemente hace esto con la intención de considerar puntos repartidos a lo largo de toda la gráfica que le permitan conocer cómo es la función en todo su dominio. Finalmente decide coger también el último punto.

[304]-[500] Ajuste gráfica función a puntos mediante manipulación de fórmula

Después de copiar los puntos en Desmos, el alumno intenta ajustar una gráfica mediante la manipulación de los parámetros de una expresión algebraica de modo que obtiene la fórmula $y = a'e^{kx} + d$, donde a', k y d son valores concretos.

[304]-[343] Para empezar, AB explica que lo que quiere hacer es intentar ajustar una gráfica a los puntos mediante la manipulación de los parámetros de la expresión algebraica del apartado a) del ítem 2: $y = ae^{-cx} + b$, que tiene como peculiaridad que el parámetro c del exponente aparece negativo. Antes de escribir nada comenta que ya sabe los valores que tomarán a y b y serán las coordenadas del primer punto. Como el primero que aparece en la lista de la izquierda de la pantalla (debido a que no caben todos los puntos en la imagen) es (25, 25.92), se dispone a substituir a y b por 25 y 25,92. Antes de esto, le comentamos que el primer punto no es este sino (0, 13.98), por lo que escribe $y = 0 + 13.98$. Al representar la función y obtener gráficamente una recta horizontal, decide escribir la parte de la fórmula que contiene a e, aunque no la había escrito porque “como es cero (el parámetro a'), sería cero más...” (intervención 337). Mientras la está escribiendo se da cuenta de que no sabe qué valor tomará el parámetro c del exponente, por lo que no sabe qué hacer.

[344]-[483] Como disponemos de poco tiempo, decidimos recordarle a AB que en otros experimentos empezaban el ajuste por la función más simple de la familia y que en el caso del enfriamiento de un cuerpo, que también usaban una función exponencial, empezaban por e^x, por lo que este la introduce en la app. A partir de este momento guiamos al alumno para que realice una serie de acciones que le permitan llegar a encontrar la función que ajuste a los puntos, actuaciones que mostramos divididas en las siguientes partes.

[352]-[375] Lo primero que queremos es que la gráfica esté en la orientación adecuada. Entonces, lo que hacemos es preguntarle a AB si tiene la gráfica como quiere y este responde que no ya que “está cerca de x y después sube por el eje de las y” (intervención 349). Por ello, le preguntamos cómo puede cambiar la orientación y, aunque en un principio piensa en sumarle algún valor a la expresión, después se acuerda de que “si le ponías un signo menos, salía hacia abajo” (intervención 357). Por tanto, prueba primero en escribir un signo negativo delante de y y luego delante de e^x, obteniendo el mismo resultado en ambos casos. Como no obtiene la orientación que desea, lo borra i escribe ahora el menos en el exponente aunque tampoco obtiene una gráfica con la orientación que quiere (sino una que viene de más infinito y tiende a cero cuando x tiende a más infinito).

Le preguntamos si es la orientación que desea y el alumno responde que tampoco, por lo que decide escribir un número multiplicando a esta expresión, $y = 4e^{-x}$ de modo que la parte izquierda, la que viene de más infinito, se pega más al eje de las y (ver imágenes 9 y 10 del Anexo 29) y el alumno comenta que “así ya va acercándose” (intervención 365) por lo que concibe que ahora la gráfica está más cerca de los puntos. Parece que ve que si continúa aumentando el valor relativo a a', la gráfica se acercará cada vez más a los puntos quedando en forma de "U" tumbada (aunque esto no sería función). Podemos identificar aquí que AB, al igual que sus otros compañeros, tiene dificultades a la hora de identificar los movimientos que provocan los cambios en los parámetros ya que visualmente parece que hagan una cosa y en la realidad hacen otra. Por ello, insistimos en hacerle ver que lo que debe hacer es cambiar la orientación. Para ello le comentamos que la gráfica no está en la orientación adecuada y que antes había añadido signos negativos para cambiar la orientación. Le preguntamos qué tiene que hacer para cambiar la orientación otra vez y, entonces, piensa en sumar algún valor en el exponente, probablemente porque sumar es lo contrario de restar y quiere cambiar la orientación otra vez. Sin embargo no se muestra muy convencido y al preguntarle si así cambiará la orientación responde que no y lo deja todo igual. Entonces piensa en poner un signo menos delante de la expresión, $y = -4e^{-x}$, obteniendo de este modo la orientación adecuada.

366. MO. [...] fíjate en la orientación, que no es la misma. [...] para cambiar de orientación antes has puesto un menos ahí arriba (señalando el valor del exponente), ¿no?

367. AB. Sí, sí.

368. MO. Y un menos lo has probado también ahí delante. Para cambiarla otra vez de orientación entonces, ¿qué podemos hacer?

369. AB. Sumar ahí arriba...

370. MO. ¿Así cambiarás la orientación?

371. AB. No, ya.

372. MO. Si el menos del exponente ha cambiado la orientación, ¿qué podemos hacer para volver a cambiarla?

373. AB Ponerle un menos a... (Mientras escribe un menos delante de la expresión)

[376]-[400] Ahora el alumno indica que lo que quiere es "subirla" (intervención 377) y le preguntamos cómo lo hacía en los otros experimentos estudiados. El alumno no se acuerda y empieza probando cosas. Primero prueba a escribir un número multiplicando la x del exponente, por lo que indica que esto no es porque hace que "se vaya hacia abajo" (intervención 383) en el sentido de que la parte inicial de la gráfica se pega más al eje OY. Después parece acordarse e indica que la gráfica subía "si sumábamos algo creo que era" (intervención 385) y escribe $y = -e^{-x} + 6$. Al ver que esta "ha subido" (intervención 387) decide darle un valor mayor para que suba, 22 y, al darse cuenta de que tiene que subir hasta la altura del último punto escribe como parámetro la segunda coordenada de este, 26,92 (aunque primero escribe 60 que es la primera coordenada del último punto).

[401]-[476] Después de esto, le preguntamos qué nos falta hacer y el alumno indica que falta ajustar la gráfica a la forma de los puntos. Para ello, decide probar con otros parámetros, por lo que multiplica $-e^{-x}$ por 4 de forma que la expresión queda $y = -4e^{-x} + 26.92$. Explica que lo que esto hace es mover la parte inicial de la función hacia la derecha, por lo que le otorga un carácter dinámico. Al preguntarle si esto es lo que pretende hacer responde que no. Sin embargo, continúa dando otros valores a este parámetro, puede que porque no ve que dando otros valores lo que hará es el mismo "movimiento" pero más acentuado o menos dependiendo de si el valor es más grande o más pequeño. A continuación da valores mayores que 4: prueba con 9, después con 96 y finalmente deja el 9 ya que es el que más se parece, puesto que con 96 la gráfica se ha movido demasiado hacia la derecha. Explica, haciendo uso de un ejemplo (dando el

valor 955 al parámetro), que cuanto más grande es este valor, más a la derecha se va la gráfica (ver Figura 17 del Anexo 28). Ahora va borrando el número poco a poco observando cómo afecta esto a la gráfica de modo que esta se desplaza hacia la izquierda. Después escribe -60, probablemente porque es la primera coordenada del último punto pero decide dejar la expresión como estaba al inicio, como $y = -e^{-x} + 26.92$, porque ajusta más.

Como vemos que ha vuelto donde estaba, le comentamos que con esto la forma no cambia por lo que decide pasar a multiplicar números a la variable x, esto es, a modificar los valores de k. Empieza con 4, $y = -e^{-4x} + 26.92$, y entonces dice que la gráfica "se ha acercado más arriba" (intervención 428), refiriéndose a que la curva se ha hecho más pronunciada. Le pedimos que dé valores más diferentes, por lo que borra el 4 y escribe un 66. Ahora decide probar con otros más pequeños ya que lo que él quiere es que la curvatura sea menor, por lo que borra el número pero también el signo negativo, dando lugar a una gráfica cuya orientación no es la adecuada. Por ello, vuelve a escribir el signo negativo y como quiere probar con números más pequeños, prueba a poner fracciones en el exponente. Sin embargo, escribe otra x en el denominador de la fracción, por lo que obtiene una gráfica muy diferente a lo previsto y decide dejar un número entero, -9 y finalmente -1. Como quiere que se "haga más ondulada" (intervención 451), el alumno sabe que debe "poner menos número (en el exponente)" (intervención 459), esto es, que debe considerar un número menor que 1. Además, sabe que no puede eliminar el signo negativo porque cambia de orientación, por lo que le sugerimos que busque números entre 0 y -1, por lo que hace que pruebe a cambiarlo por números decimales, en concreto cambia -1 por -0,2 de modo que al observar la gráfica esta ya se parece más a la forma de los puntos.

> 461. AB. Es que claro, ¿no se puede eliminar el menos? Sería...
>
> 462. Claro, no puedes quitar el menos, si pones positivos...
>
> 463. AB. Cambia de lado
>
> 464. MO. Cambia de lado, exacto. Pero entre -1 y los números positivos hay más números, ¿no?
>
> 466. MO. Claro, si le pones 0 solo es como si no hubiera x (entonces AB escribe -0,2 en el exponente) [...].

Como quiere que sea más "ondulada" todavía, disminuye el valor 0,2 y lo deja en 0,1, por lo que la fórmula queda $y = -e^{-0.1x} + 26.92$.

[477]-[483] Por último, el alumno indica que "ahora sería desplazar" (intervención 477), refiriéndose a que quiere desplazar hacia la derecha la parte inicial de la curva, cosa que hace aumentando el valor relativo al parámetro a'. Primero empieza dando el valor 4, como antes, pero como no se mueve lo suficiente la gráfica le da el valor 10, luego 11 y finalmente 12, con el que da por finalizado el ajuste.

[484]-[500] Aunque ya ha obtenido la fórmula de una función que ajusta bastante a los puntos, le pedimos que amplíe la imagen para que vea que todavía no está lo bastante ajustada y continue modificando los valores de los parámetros para hacer que esta ajuste mejor (ya que de este modo la gráfica no pasa por el primer punto). Para ello, le preguntamos qué haría para mover la parte inicial un poco más a la derecha, cosa que hace que cambie el valor del parámetro del exponente y escriba -0,2 de nuevo (aunque acaba de ver que no es este parámetro el que hace ese movimiento), quedando la expresión como $y = -12e^{-0.2x} + 26.92$. Por eso, cuando ve lo que le sucede a la gráfica decide dejarla como estaba al inicio. Por descarte, cambia el valor numérico

correspondiente al parámetro a' de 12 a 11.9 y después escribe 113 de forma que lo que hace es alejarse más la curva del primer punto (aunque parece que lo que quería era escribir 13), que es lo que hace a continuación, dando así por terminado el ajuste y obteniendo como función resultante $y = -13e^{-0.1x} + 26.92$.

[501]-[536] Recopilatorio con el objetivo de ver como relaciona gráfica con expresión algebraica y con aspectos concretos del contexto del experimento estudiado

Para terminar, le pedimos que explique brevemente, ya que no disponemos de mucho tiempo, el significado de los valores correspondientes a los parámetros de la fórmula en relación con los movimientos que estos realizan sobre la gráfica. Explica en general que el valor que se le da a d sirve para "subirla o bajarla" (intervención), por lo que le atribuye sentido dinámico. Por otro lado, indica que el valor relativo a k "es la curvatura" (intervención 506) y, por último, explica que el valor de a' sirve para "acercarse más o menos" (intervención 508), esto es, mover hacia la derecha o hacia la izquierda la parte inicial de la curva.

Para finalizar le preguntamos si piensa que los valores que les ha dado a los parámetros tienen alguna relación con el experimento. En un primer momento no habla de los valores de la fórmula sino que relaciona la segunda coordenada del último punto con la máxima altura de la gráfica, por lo que volvemos a insistir y comenta que esto correspondería a la "temperatura ambiente" (intervención 519). Al preguntarle por el parámetro a', que es -13, lo que hace es cambiar 13 por 13,98 que es la segunda coordenada del primer punto y la temperatura inicial para ver si ajusta mejor pero sin embargo no es así y lo deja como estaba, por lo que vemos que trata de relacionarlo con la temperatura inicial pero ve que no es así. Finalmente comenta que no encuentra ninguna relación entre el valor del exponente y los datos del experimento.

5.3.4.2. Tablas ajuste función a puntos AB

En el siguiente apartado presentamos una tabla con las actuaciones paso a paso del alumno en relación con el ajuste de la función a los puntos hasta la obtención de la fórmula $y = -13e^{(-0{,}11x)} + 26{,}92$.

Ajuste gráfica función a puntos AB					
Objetivo general actuaciones AB	**Actuaciones AB**				**Objetivo concreto actuaciones AB**
	Fórmula	***a'***	***k***	***d***	
Escribir fórmula como la del ítem 2 pero con valores concretos para los parámetros copiando la fórmula del ítem 2a, $y = a \cdot e^{-cx} + b$ (sin observar la gráfica, comenta que a y b equivaldrían a la primera y segunda coordenada del primer punto). **[304]-[343]**	Reduce la imagen				Quiere observar todos los puntos para ver la forma global de la función.
	$y = 0$	0			Antes de escribir nada comenta que, como a, elegiría el valor 25 y, como b, el 25,92 que son las coordenadas primera y segunda del primer punto que se puede ver en la lista de la izquierda de la pantalla (debido a que es el primero que se muestra ya que no caben todos en la imagen), aunque no el primero que ha introducido. Le preguntamos si su elección ha sido aleatoria y dice que no, que debería escoger el primero, por lo que se da cuenta y ahora se fija en (0, 13.98) que es el primer punto que ha copiado y escribe 0 como a'.
	$y = 0 + 13.98$			13,98	Siguiendo el razonamiento anterior, substituye el parámetro b por el valor 13,98 ya que, tal como explica, será la segunda coordenada del primer punto.
	$y = 0 \cdot e + 13.98$ $y = 0 \cdot e - +13.98$				Como la gráfica es una recta horizontal, escribe la exponencial y cuando trata de escribir el exponente escribe un menos pero

					como no ha pulsado la tecla a^b, lo escribe abajo. Le preguntamos qué valor le daría al parámetro c del exponente y comenta que no lo sabría.
Empezar por la familia de funciones más básica. **[344]-[347]**	$y = e^x$				Como no disponemos de mucho tiempo restante, decidimos recordarle que en otros experimentos empezaban a ajustar la gráfica a los puntos con la función más simple de la familia de funciones, por lo que escribe la exponencial $y = e^x$.
Cambiar de orientación la gráfica. **[348]-[375]**	$y = e^x + 4$ $y = e^x$			4 0	Como AB explica que la gráfica no está como él quiere le preguntamos cómo cambiaría la orientación y prueba sumándole un valor.
	$-y = e^x$ $y = e^x$ $y = -e^x$ $y = e^x$	-1 1 -1 1			Sin embargo, enseguida se acuerda de que en otros experimentos usaban el signo negativo para cambiar la orientación. Primero prueba a escribir un signo negativo delante de y y luego delante de e^x, obteniendo el mismo resultado en ambos casos.
	$y = e^{-x}$		-1		Como no obtiene la orientación que desea, lo borra i escribe ahora el menos en el exponente aunque tampoco obtiene una gráfica con la orientación que desea.
	$y = 4e^{-x}$ $y = -4e^{-x}$	4 -4			Como todavía no tiene la orientación adecuada, le comentamos que debería volver a cambiar de orientación. Sin embargo, en vez de volver a escribir un signo menos, escribe ahora un número multiplicando a la

					expresión, de forma que la parte izquierda, la que proviene de más infinito, se pega más al eje de las y. AB comenta que ahora ve que está más cerca de los puntos, por lo que le comentamos que no está en la orientación adecuada. Le recordamos que antes para cambiar de orientación ha puesto un menos delante de la expresión, por lo que ahora escribe también un menos y obtiene la orientación adecuada.
Subir la gráfica. **[376]-[400]**	$y = -e^{-x}$	-1			Borra el 4 que ha escrito antes ya que no ha servido para cambiar la orientación.
	$y = -e^{-4x}$ $y = -e^{-x}$		-4 -1		Le preguntamos qué hacía en otros experimentos para subir la función y prueba con el exponente, sin éxito, por lo que vuelve a dejar la función como estaba.
	$y = -e^{-x} + 6$ $y = -e^{-x}$ $y = -e^{-x} < +6$ $y = -e^{-x}$ $y = -e^{-x} + 6$ $y = -e^{-x}$ $y = -e^{-x} + 22$ $y = -e^{-x}$ $y = -e^{-x} + 60$ $y = -e^{-x}$ $y = -e^{-x} + 26.92$			6 0 <+6 0 6 0 22 0 60 0 26.92	Ahora dice recordar que en otros experimentos la gráfica subía al sumarle algún valor a la expresión subía. Sin embargo pulsa un botón que hace que se oculte la gráfica, por lo que parece que haya desaparecido al sumarle 6 y decide borrarlo. Solucionamos el problema y vuelve a escribir +6 pero equivocándose y pulsando una tecla que no era, por lo que vuelve a borrar la expresión y, ahora sí, escribe un 6. Al ver que sube dice que hay que subir más y

					escribe +22. Mira las coordenadas del último punto para ver a qué altura habría que subirla pero en vez de mirar la segunda coordenada mira la primera y escribe 60, por lo que la vuelve a borrar y finalmente escribe 26,92.
Ajustar la curva a la forma de los puntos. **[401]-[476]**	$y=-4e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$ $y=-9e^{-x}+26.92$ $y=-96e^{-x}+26.92$ $y=-9e^{-x}+26.92$ $y=-955e^{-x}+26.92$ $y=-95e^{-x}+26.92$ $y=-9e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$ $y=-60e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$	-4 -1 -9 -96 -9 -955 -95 -9 -1 -60 -1			Para cambiar la forma de la curva, decide probar con otros parámetros, por lo que multiplica $-e^{-x}$ por 4. Explica que esto mueve la parte inicial de la función hacia la derecha y, al preguntarle, explica que esto no es lo que quiere hacer. Sin embargo, continúa dando otros valores a este parámetro, puede que porque no ve que dando otros valores lo que hará es el mismo "movimiento" pero más acentuado o menos. Da valores más grandes: prueba con 9, después con 96 y finalmente deja el 9 ya que es el que más se parece puesto que con 96 la gráfica parece que se haya movido demasiado hacia la derecha. Explica, haciendo uso de un ejemplo (955), que cuanto más grande es este valor, más a la derecha se va la gráfica. Ahora va borrando el número poco a poco observando cómo afecta esto a la gráfica. Después escribe -60, probablemente porque es la primera coordenada del último punto pero decide dejar la expresión como estaba al inicio

	$y=-e^{-4\cdot x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-66x}+26.92$ $y=-e^{x}+26.92$ $y=-e^{-\frac{9}{\ }x}+26.92$ $y=-e^{-9x}+26.92$ $y=-e^{-\frac{9}{x}x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-9x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-9x}+26.92$ $y=-e^{-x}+26.92$ $y=-e^{-0x}+26.92$ $y=-e^{-0.2x}+26.92$ $y=-e^{-0.1x}+26.92$		-4 -1 -66 1 $-9/$ -1 $-9/x$ -1 -9 -1 -9 -1 -0 -0.2 -0.1		Le comentamos que con esto la forma no cambia por lo que decide pasar a multiplicar números a la variable x. Entonces dice que se ha acercado más a arriba, refiriéndose a que la curvatura ha disminuido y la parte más curva de la gráfica se ha hecho más pronunciada. Le pedimos que dé valores más diferentes, por lo que borra el 4 y escribe un 66. Ahora decide probar con valores más pequeños ya que lo que él quiere es que la curvatura sea menor, por lo que borra el número pero también el signo negativo, dando lugar a una gráfica cuya orientación no es la adecuada. Como lo que quiere ahora es probar con valores más pequeños, decide volver a escribir el signo negativo y probar con fracciones, sin embargo, escribe otra x en el denominador de la fracción, por lo que obtiene una gráfica muy diferente a lo previsto y decide dejar un número entero, -9. Vuelve a escribir -1 y dice que ahora está más "ondulada" que es lo que él quiere, por lo que tendrá que introducir un número más pequeño. Le comentamos que entre -1 y los positivos hay más números y prueba con cero, obteniendo una recta horizontal. Después escribe -0.2 y ve que ya se parece más a la forma de los puntos. Como quiere que sea más "ondulada" todavía, disminuye el valor y lo deja en -0.1.

Desplazar hacia la derecha la parte inicial de la curva. **[477]-[483]**	$y = -4e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -10e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -11e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -12e^{-0.1x} + 26.92$	-4 -10 -11 -12			Como antes ha visto que al multiplicar la exponencial por 4 se desplazaba la parte inicial hacia la derecha, que es lo que quiere hacer ahora, vuelve a multiplicar por 4. Como no se mueve lo suficiente le da el valor 10, luego 11 y finalmente 12.
Ajustar mejor la función a los puntos. **[484]-[500]**	Amplia la imagen				Le pedimos que amplíe la imagen para que vea que todavía no está lo bastante ajustada.
	Mueve la mueve hacia la derecha y hacia la izquierda				Mueve la imagen para ver cómo de ajustados están todos los puntos.
	$y = -12e^{-0.2x} + 26.92$ $y = -12e^{-0.1x} + 26.92$		-0.2 -0.1		Le preguntamos qué haría para mover la parte inicial un poco más a la derecha, cosa que hace que cambie el valor del parámetro del exponente, aunque acaba de ver que no es este el que hace ese movimiento. Por eso, cuando ve lo que le sucede a la gráfica decide dejarla como estaba al inicio.
	$y = -11e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -11.9e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -11e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -113e^{-0.1x} + 26.92$ $y = -13e^{-0.1x} + 26.92$	-11 -11.9 -11 -113 -13			Por descarte, cambia el valor correspondiente a a'. Cambia 12 por 11.9 y después escribe 113 de forma que lo que hace es alejarse más la curva del primer punto (aunque parece que lo que quería era escribir 13), que es lo que hace a continuación.
	Reduce la imagen y la mueve hacia un lado y hacia el otro				Ahora reduce la imagen y la mueve hacia la derecha y hacia la izquierda para comprobar que todos los puntos ajustan.

5.3.4.3. Resumen de resultados AB

En el siguiente apartado mostramos un resumen de los resultados según las tendencias cognitivas observadas a lo largo de las actuaciones de JL en la entrevista.

<u>Efecto del análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones</u>

Cabe destacar que, al igual que en el resto de casos estudiados, hemos observado que el alumno hace referencia al análisis previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y de las familias de funciones en diferentes momentos de la entrevista.

En primer lugar, para determinar la fórmula que representa la gráfica de la función, AB se basa en la forma de la gráfica y va descartando funciones. En primer lugar descarta la función lineal $y = ax$ por ser una recta, aunque ve que $y = ax + \mathrm{b}$ es ondulada. Sin embargo la descarta porque le decimos que es la del muelle y se acuerda de que esta era una recta. Descarta también la cuadrática por ser la del bote de la pelota ya que esta gráfica no tenía la misma forma que la que él representa. Después descarta $y = a/x$ también ya que dice que será como $y = ax$ pero “hacia el otro lado” (intervención 230). Le comentamos que si hay alguna función que no conoce que nos lo diga y señala unas cuantas, entre ellas la exponencial por lo que le explicamos que esa la usaron para el experimento del enfriamiento y él añade que entonces tampoco será. Sin embargo, esta situación se resuelve puesto que le comentamos que las fórmulas pueden ayudar a describir muchos experimentos y, como indica que la gráfica sería como la del enfriamiento pero “al revés” (intervención 94) acaba eligiendo la exponencial como aquella que describe el experimento del calentamiento.

Además, también hemos podido observar que el alumno se basa en la gráfica de la función a la hora de interpretar la gráfica con los datos que le proporcionamos del experimento E1 puesto que al describirla el alumno pone énfasis en aquellos aspectos que son diferentes respecto a la gráfica que él mismo ha esbozado durante el análisis cualitativo. Concretamente, comenta que “se calienta más rápido y después hay un momento en el que tarda más en calentarse” (intervención 264), afirmación que hace comparando esta gráfica con la que ha dibujado que inicialmente crece “poco a poco”. Asimismo, también comenta que la temperatura inicial es 14, por lo que “no es negativa” (intervención 260) tal como él había considerado en su gráfica.

Por otro lado, tenemos que a la hora de elegir los puntos que deberá representar en Desmos el alumno se basa en escogerlos de modo que cubran todo lo que sería la gráfica de la función. Probablemente el alumno sí que está pensando en la forma de la gráfica de la función pero, a diferencia de sus compañeros, no los elije de forma que le permitan obtener más información de donde la gráfica varía más.

Por último, notemos que el hecho de haber realizado el análisis cualitativo también ha influido a la hora de ajustar la función a los puntos, en concreto a la hora de elegir el tipo de forma canónica usada y el modo de empezar a realizar el ajuste (puesto que el alumno busca la fórmula del apartado a) del ítem 2, $y = a'e^{-cx} + b$, para sustituir los parámetros en esta en vez de empezar por la más simple de la función como les sugeríamos en la hoja de ayuda en las lecciones 2, 3 y 4). En particular, observamos que inicialmente lo que pretende es usar la fórmula del análisis cualitativo sustituyendo los parámetros a y b por las coordenadas del primer punto (cuya primera coordenada es cero, por lo que la gráfica le sale una recta horizontal). Sin embargo, al ver que aparece un tercer parámetro, y no sabe qué número escribir descarta esta opción por lo que le sugerimos que empiece el ajuste con la función más simple de la familia, $y = e^x$, tal como hacía en el experimento del enfriamiento.

Por otro lado, el análisis de las propiedades cualitativas también ha servido para detectar las concepciones de los alumnos y poder corregirlas. En concreto, al pedirle al alumno que esboce la gráfica que mejor representaría al fenómeno durante el estudio cualitativo hemos podido observar que concibe el fenómeno de modo que inicialmente al introducir el sensor en el agua la temperatura irá aumentando poco a poco y luego ya más rápido hasta llegar a alcanzar la temperatura ambiente (puesto que representa la función de modo que crecería muy lentamente al inicio, luego más rápido y al final lentamente tendiendo a un valor constante), por lo que presenta dificultades al relacionar esta gráfica con la exponencial. Sin embargo, después al proporcionarle la gráfica de la función en la app Graphical Analysis y darse cuenta de que la curva no es esta, explica que al principio la función crece muy rápido debido a que la diferencia entre la temperatura del sensor y la del agua es muy grande. Por otro lado, el hecho de pedirle al alumno que elija una familia de funciones de las de la lista dada nos ha permitido observar que el alumno tiene dificultades a la hora de relacionar fórmulas con gráficas (como hemos comentado al principio), cosa que inicialmente pensábamos que era debido al uso de parámetros en vez de valores concretos en las fórmulas pero que posteriormente hemos visto que no es así.

Los parámetros: tipos de significados en relación con la gráfica y con el fenómeno y modo de otorgar significado

A lo largo de la entrevista hemos podido observar diferentes tipos de actuaciones del alumno en relación con los parámetros y que presentamos a continuación.

Primero de todo, hemos notado que la tendencia a la hora de actuar de AB es de observar qué hace cada parámetro en relación con la gráfica y, a partir de ello, actuar en consecuencia tratando de ajustar la gráfica a los puntos. No obstante, del mismo modo que JL, en algunos momentos este alumno observa la gráfica, concibe que esta debe hacer unos movimientos determinados y busca los parámetros que los hagan (y que, en este caso, no son posibles con los parámetros de la forma canónica considerada). Hablamos, por ejemplo, de que cuando el alumno tiene la función $y = e^{-x}$ considera que ya está en la orientación adecuada y que lo que debe hacer ahora es moverla para ajustarla más a los puntos. Por ello da el valor 4 al parámetro a' de modo que la gráfica se acerca más a los puntos pero no es consciente de que de esta forma no se ajustará a ellos, aunque él piensa que sí (intervención 365), probablemente porque concibe que si da valores más grandes a a' la gráfica irá acercándose a los puntos en forma de "U" tumbada, lo que no daría lugar a una función. Esta situación se resuelve insinuándole al alumno que la gráfica no tiene la orientación adecuada todavía y recordándole que cuando ha puesto un signo negativo a a' la gráfica ha cambiado de orientación y lo mismo para k, por lo que decide escribir un signo negativo delante de a' también, quedando la expresión $y = -4e^{-x}$.

Por otro lado, y al igual que el resto de sus compañeros, hemos podido identificar momentos en los que AB concibe de una forma peculiar los movimientos de la gráfica, lo que viene siendo consecuencia de que al observar la gráfica de forma global, esta parece que se comporte de un modo distinto a lo que realmente sucede "punto a punto". Ejemplos de este tipo de movimientos son los descritos por DC cuando, por ejemplo, indica que "(la gráfica) se va hacia abajo" (intervención 383) al multiplicar el valor del exponente por 4 o cuando indica que al borrar el valor 4 de $y = -4e^{-x} + 26.92$ "(la gráfica) se ha desplazado hacia la derecha" (intervención 412).

También hemos podido observar que debido a que la app Desmos permite modificar la expresión con la que se está trabajando sobre esta misma en todo momento y muestra por pantalla las consecuencias que ello tiene sobre la gráfica ha supuesto un elemento de ayuda a la hora de dar sentido a algunos parámetros. Por ejemplo, esto lo hemos observado cuando el alumno está probando valores para el parámetro a' que, al escribir un número muy alto obteniendo la expresión $y = -955\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + 26.92$, decide borrarlo y dejar uno más pequeño, cosa que hace eliminando las cifras de este número poco a poco (pasa de $-955x$ a $-95x$, después a $-9x$ y, finalmente, a $-x$) y observando que esto provoca que la gráfica se desplace hacia la izquierda.

En cuanto al tipo de significados que atribuye el alumno a los parámetros en relación con la gráfica, tenemos que en la mayoría de casos les otorga un significado dinámico. Por ejemplo, explica que el valor numérico relativo a a' (sin tener en cuenta el signo) sirve "para acercarse o alejarse más o menos (del eje OY)" (intervención 508) o que al cambiar el valor numérico relativo a k, "(la gráfica) se ha acercado más a arriba" (intervención 427), refiriéndose a que la curva se ha hecho más "puntiaguda". Sin embargo, en ocasiones también hemos podido identificar que el alumno da otro tipo de sentido a los parámetros. Por ejemplo cuando habla de la orientación, que concibe que el signo negativo provoca que la gráfica tenga una orientación determinada. Además, cabe destacar que el alumno ya sabe qué movimientos pueden realizar los parámetros sobre la gráfica como consecuencia del estudio de experimentos anteriores. No obstante, no se acuerda con facilidad de cuál eran los parámetros que hacían esto. Por ejemplo, esto sucede cuando AB indica que quiere subir la gráfica (intervención 377), que sabe que es posible realizar este movimiento en la gráfica pero no se acuerda de qué valor debe modificar para que esto ocurra. De hecho empieza modificando el valor relativo a k y, después de observar que la gráfica no realiza el movimiento esperado, se acuerda de que el parámetro que debía cambiar era d.

Por último, hemos observado que el alumno relaciona los valores de los parámetros con características del experimento. Concretamente, el alumno indica que el valor relativo a d es la temperatura ambiente (por lo que probablemente copia el valor de la coordenada del último punto por este motivo). Y, por otro lado, cuando le preguntamos si cree que el valor de a' tiene alguna relación con algún valor del fenómeno, trata de relacionarlo con la temperatura inicial. De hecho cambia el parámetro 13 por 13,98, pero al hacer, de este modo, que la gráfica ajuste menos a los puntos vuelve a dejar la expresión con 13, por lo que al final afirma que no ve que tenga relación con el experimento.

6. Conclusions and discussion

In this chapter, the results of the research from both the study of the group and the case study will be presented and discussed[46]. The results explained in previous chapters will not be included here. Specifically, the results presented will be those found in several lessons of the study of the group, those found in several students in the case study and those found as a consequence of analysing both the study of the group and the case study. Besides, it will not only be presented the results related to the students' performances regarding the use and the features of the technology and the incorporation of a qualitative analysis, but also those related to the students' performances regarding other elements of the teaching model, the obstacles observed and the difficulties found.

This chapter will be organised according to the results that refer to the students' performances regarding the use and the features of the technological instruments used (section 6.1) and the incorporation of a previous analysis of the qualitative properties of the phenomenon and the families of functions (section 6.2). In addition, it will be also presented a students' tendency of basing their answers on their prior conceptions instead on of the data obtained from the experiment (section 6.3). Besides, difficulties related to the description of the phenomena and the exponential function will be shown (section 6.4). Likewise, the results obtained from this research work and the observations done during the implementation of the material will be possible to redesign the teaching material, which will be also presented as a result of the study (section 6.5). Finally, a section of future lines of work will be included (6.4).

6.1. PERFORMANCES RELATED TO THE USE AND THE FEATURES OF THE TECHNOLOGY

During the teaching experiment, students' performances in relation to the use of the technological tool and conditioned by its features were found. Specifically, the apps Graphical Analysis and Desmos allowed the students to focus on the central actions of the tasks, making calculations or representing graphs for them or even avoiding that

[46] The Spanish version of this chapter can be found in Annex 30.

they had to reflect on the process for obtaining the function that fit the data (as will be described in subsection 6.1.1). Another result found was that the app Video Physics made the students reflect on aspects that are normally settled for them, such as the reference-taking and the definition of variables. As Artigue (2002) points out, the features of the technological tool conditioned the students' way of understanding the tasks, so students had to transform a tool into an instrument. In our case, in the first experiment, when students dealt with the app Video Physics, they did not seem to be fully aware that the way they take the references will affect the values of the variable 'height', neither in which way their actions will affect them. However, in the second experiment, most of the students were aware that the way in which they take the references will influence the variables and also in which way they will affecte them because the students were coherent when interpreting the function in relation to the variables they had chosen (subsection 6.1.2). Finally, it was found that the use and the features of the several apps let students redefine some mathematical concepts, in particular regarding the meaning of the parameters (subsection 6.1.3).

6.1.1. THE FEATURES OF THE APPS AS ELEMENTS OF HELP

As Puig and Monzó (2013) pointed out, some uses of the technology make that some of the competences that students should develop to face a task in a successful way derive from the students to the technology. This exempts students from having to do some actions that are not really the core of the task, allowing them to focus on the aspects that really matter. It has been noted, for instance, when students use the apps for representing functions or calculating their images, actions that are made by the apps allowing the students to focus on the aspects that are really interesting for the task.

In addition, the use of technology also exempted the students from having to reflect on some aspects of the tasks because these aspects were given to them by the apps. For example, the app Graphical Analysis provides the formula of the function that fits the data directly so the students who were not be able to find this function using the app Desmos could obtain the function this way, without having to find the formula changing the values for the parameters and trying to fit a graph to the points (what allowed them to continue working on the rest of the items in the lesson). The same happened for the app Graphical Analysis. The app shows the graphic representation of the function only in the studied domain, what made that in some cases students did not need to reflect on this aspect to answer some questions, exempting them from performing certain calculations. For instance, in lesson 2, students of group 1 used the graph provided by Graphical Analysis to obtain the values of the time when the ball touches the ground (item 9.a)) just looking the values of time for the first point and the last one.

6.1.2. THE FEATURES OF THE APPS AS ELEMENTS THAT REQUIRE THE STUDENTS' REFLECTION ON THE REFERENCE-TAKING AND THE DEFINITION OF VARIABLES

The features of the apps used during the teaching experiment can be, apart from an element of help or support for the students, also an element that requires them to reflect on aspects that are normally given to them and to face problems that otherwise would not have appeared (which make the students have to develop other types of strategies to deal with them in a successful way). In this study, the features of the apps made the students reflect on the meaning of 'taking references' and on the process of definition of the variables 'height' and 'lengthening'. However, as will be shown below, in case that students are not aware of the functioning of the apps or they are not aware that they must change the way of conceiving these variables, the tasks required by the app come of additional difficulties and lead the students m to be unsuccessful finding the solution.

As it was indicated in previous chapters, the app Video Physics requires the students to take a series of references during the mathematization of the phenomenon[47]. In particular it required them: 1) to set the referential axes in one of the photographs, 2) to locate a referential measure by marking a segment in one of the photographs and introducing its real value into the app and 3) to mark a point on the object that is changing its trajectory in each photograph of the video. Therefore, it will be necessary for the students to understand what means to perform these actions and which consequences will have on their experiment to act accordingly. That is, they should know, not only that the references they take will influence the values of the variables, but also in which way the reference-taking will influence their experiment (i.e., how the app works) because it will be decisive to be consistent with their decisions during the interpretation of the function in relation to the experiment.

On the one hand, in the experiment of the bounce of a ball, students had to study the relation between time and height of a ball. As it is the app itself that provides the video already divided into photographs and the students do not have the possibility to decide how to do it, the only variable in which the students' performances will influence will be the variable height. In particular, the aspects that will be decisive to determine the type of values that the height will take are: 1) the place where they set the x-axis in relation to some element of the photograph, 2) the place where they mark the points in relation to the ball and 3) the position of the points with respect to the x-axis[48]. Therefore, it is important for the students to understand the meaning of their actions in the app in relation to the height and, as a consequence, they redefine and extend (in the sense used by Freudenthal, 1983) the concept of height taking into account the features of the app: that the variable y gives the position of the points with respect to the x-axis.

In particular, during the mathematization phase, specifically during the reference-taking with the app Video Physics, students did not seem to be aware of the meaning of their actions in the app neither of the implications of their actions in relation to the concept of height. When they were taking references in Video Physics and they were asked to set the axes and mark the points, some students gave justifications that do not have much to do with the relation studied[49]. For instance, some explained they marked the points on the centre of the ball because it is 'the centre of gravity' (group 4), 'the symmetrical place' (group 5) or 'where it is easier to mark the points' (group 6). Regarding the x-axis, there are students who explained that they set it at the centre of the ball 'so that it comes out proportional' (group 2) or 'because it is what we are measuring' (group 5). Besides, some students also pointed out where they had set the y-axis, probably because they were not aware that the place where they set the y-axis would not influence the variables studied in the experiment. However, although some students seemed to be aware that the places where they set the x-axis and marked the point would influence the variable height, they were not aware of how the combination of these elements

[47] This result is explained in lessons 2 and 3. We will not refer here to lesson 4 because in the experiment of the cooling of a liquid, the app used to collect the data is Graphical Analysis, not Video Physics. Besides, in this experiment the references were already given: the variable x (time) was zero just when the data collection started and the variable y (temperature) was zero just when the temperature was 0 °C.

[48] Obviously, the way in which the students mark the reference measure in the app will also influence the data of the experiment, as well as the precision in which this reference is marked because it will make them obtain the data with more or less accuracy. However, it will not influence so much the type of interpretations that the students will do later.

[49] Although, as it was discussed in Chapter 4, we have observed a tendency to set the x-axis on the ground.

would influence their answers. That is, the students did not seem to understand how the app worked, because they based their answers more on their conceptions about the concept of height than on interpreting what they had done on their experiment. In particular, they conceived that the ground was the reference and, therefore, both the height of the ground and the height of the ball on the ground were zero, as will be shown in section 6.3).

On the other hand, in the experiment of the lengthening of a spring, the students had to study the relation between the number of marbles introduced into a plastic cup and the lengthening of the spring[50]. In this case, the studied variables cannot be obtained directly by the app. In particular, to obtain the variable number of marbles is not necessary for the students to pay attention on how or where they take the references in the app, but when they have marked the points (if they do it when the plastic cup has 0 marbles or 1). This aspect has to be taken into account later on to be coherent when the students define the coordinates of the points. However, regarding the variable lengthening of the spring, the students have to take into account certain aspects when they take the references: the position of the points marked with respect to the x-axis. In this case, it will not be possible to obtain the variable lengthening of the spring directly with the app, conceived as a positive variable that is zero when the plastic cup does not contain any marble. Despite this, it is possible to take the references so that later on it will be possible to obtain the lengthening from the variable y provided by the app performing a series of calculations (such as changing the sign of the values for the variable or subtracting the length of the spring).

In this case, it was observed that students seemed to be more aware than in the experiment of the bounce of a ball that the reference-taking would influence the data later on because the students' answers to item 4 of this lesson referred to elements that directly affected the relation studied. For instance, the students of group 4 marked the points in the lower part of the spring 'because from that point the lengthening will be 0 on the y-axis' and the students of group 2 indicated that they set the axes in the last point 'to consider the deformation of the spring', referring to the lengthening. In addition, it has been possible to observe the intentions of some students (groups 1 and 3) of rotating the axes, trying to place them so that the positive part of the y-axis was in the downward direction to obtain a positive lengthening which was greater each time. However, it could not be done since the app does not allow rotating the axes more than 90° in each direction.

Nevertheless, even though the students had the possibility to operate with the values of the variable y provided by Video Physics to obtain the variable 'lengthening', they did not do it (only the students of group 2 did some calculations, although they did not do it in a proper way completely as it was explained in Annex 20). However, although the students did not consider the variable lengthening, most of the students were coherent with how they had taken the references throughout the experiment (unlike what happened in the experiment of the bounce of a ball). For example, the students of groups 1 and 6, considered a negative lengthening during the references-taking but also during the interpretation afterwards. The students of group 3, who conceived the variable y as the length plus the lengthening (but in negative values) instead of just the lengthening, were coherent throughout the whole experiment with the way they had considered y. The students of group 4 neither changed the way of conceiving the

[50] The lengthening is understood as a positive magnitude which is zero when no marbles are introduced into the plastic cup that hangs from the spring.

lengthening but they were aware that the function they obtained (which gave the distance from the points to the x-axis instead of the lengthening) did not represent the relation studied. In particular, when they were asked to calculate the lengthening in item 9, they did not use their function but they did some calculations on the values for the variable y. On the other hand, regarding the variable number of marbles, all of the students were coherent: if they marked the first point when there were no marbles in the plastic cup, they considered the first coordinate of the first point as 0, and if they did it when a marble was already introduced into the cup, they considered it as 1.

Therefore, in the experiment of the lengthening of the spring most of the students already understand the functioning of the app and what they do is to consider the features of the app and change the way in which they conceive the experiment adapting themselves to the possibilities given by the app during the reference-taking.

To sum up, the features of the app Video Physics conditioned the way in which students understood the tasks, so they must make an instrument from the tool and be coherent with their actions in order to be successful with the tasks. However, in the first experiment using the app, the students did not seem to be fully aware that their actions in Video Physics would affect the values of the variable height, neither in which way their actions would affect them (because it seems they did not completely understand the functioning of the app). Subsequently, they acted basing their answers more on their conceptions about the concept of height than on how they had taken the references. In contrast, in the second experiment was found an evolution with respect to the first one. In the experiment of the lengthening of a spring it seems that most of the students were aware that the way in which they had taken the references would influence the variables and, of these, many were already aware of the functioning of the app because they were coherent when interpreting the function with how they has considered the variables. This evolution may be due to the fact that in the experiment of the lengthening of the spring the students were more familiar with the use of the app and their functioning, what made them more aware of the importance of paying attention on the reference-taking in Video Physics since this would influence on how the variables obtained would be later on and, consequently, the function. Therefore, the use of technological tools could be useful to help the students to reflect on aspects that are normally given to them and to make decisions to which they are not used to.

6.1.3. THE FEATURES OF THE APPS AS ELEMENTS THAT PROMOTE THE REDEFINITION OF CONCEPTS: THE MEANING OF THE PARAMETERS

As we have shown, the fact that the Video Physics app requires the students to take references during the mathematization of the phenomena make the students have to redefine and extend the concepts of ‘height’ and ‘lengthening’ taking into account the implications of ‘taking references’ for these concepts to be successful when dealing with the tasks.

However, including the use of apps during the teaching experiment not only had an effect on the redefinition of concepts conditioned by the reference-taking, but also when the students were asked to find a function that fit the points using the app Desmos during the mathematization of the phenomenon. In particular, the use of technology influenced the meaning that students gave to the parameters in relation to the graph, specifically, the type and the amount of meanings they give, as will be shown next. However, it has to be taken into account that this result may not only be due to the use of the app Desmos, but also to the use of the sheets of help provided to the students during the experiment, in which they were guided to obtain the function with Desmos (among other characteristics of the teaching model).

There are several features of the app Desmos that may have contributed to the redefinition of the meaning the students attribute to the parameters. One of them is that the app shows on the same screen the coordinates of the points, the graphic representation and the algebraic expression; what makes students give meaning to the parameters by relating these different elements. Another feature of this app that could have influenced in the giving of meaning is the colour of the points because when introducing the coordinates of the points in the app, they are assigned a colour so that their representation in the graph is done with the same colour as the corresponding coordinates of the point. It emphasizes the relation between graph and coordinates of the points and it may have made the students to give meaning to the parameters based on the values of their coordinates. In addition, this app allowed the students to change the type of algebraic expression or the values of the parameters in the same expression and observe the intermediate steps when changing one expression to another. As a consequence, it can have favoured the students to give a dynamic meaning to most of the parameters. For instance, to pass from the expression $y = x + 6$ to $y = x + 8$, the students have to delete $+6$ obtaining $y = x$ and then, they have to add $+8$. It makes the students can observe the graph and interpret the independent parameter as the one that makes the function move upwards 8 units with respect to the most elementary function of the family: $y = x$. Finally, the app also has the possibility to represent the parameters using sliders as happens in other softwares such as GeoGebra. It may also have encouraged students to give a dynamic meaning to the parameters when observing the transformation between graphs as a movement.

Next, students' performances in relation to the meaning of the parameters after having used the app will be described in more detail. It should be noted that, initially, during the questionnaire of the lesson 1 and during the previous analysis of the qualitative properties of the phenomenon and the families of functions of each experiment, students were not able to make sense of almost any parameter and the meanings they gave them were mostly static (as a consequence of to the type of teaching they had received in previous years). For instance, the student 7.1 indicated that the parameter a of $y = ax$ 'is 2' after having seen that the graph has slope 2 (item 6 of lesson 1). The students of group 2 pointed out that the negative sign of a in $y = ax^2 + bx + c$ means that the graph is convex (lesson 2). In contrast, throughout the course of the teaching experiment, in which the use of the app Desmos is taken into account in several occasions, it was found an evolution in the students' performances. In particular, after using the app, we found that: 1) the students were able to give meaning to more parameters in the different families of functions, 2) they gave different types of meanings to the same parameter[51], and 3) the use of the app encouraged students to give dynamic meaning to the parameters but also other kinds of meaning. Therefore, in 6.1.3.1 we will show a classification of the types of meanings observed throughout the teaching model, what allowed us to redefine the definition of the types of parameters given by Puig (2015). As a result of the case study, different types of students' performances were observed regarding the way of giving meaning to the parameters in relation to the graph. Moreover, it was also found that students had a peculiar

[51] In some specific cases, we observed that, as Puig (2015) pointed out, the fact that students give more than a meaning to the parameter led the students to a reluctance to change the values that the parameters can take.

conception of the movements made by the graph in relation to the parameters. Both results will be presented later on in 6.1.3.2.

6.1.3.1. Types of meanings of the parameters in relation to the graph

It is reasonable to think that the features of the app Desmos and the type of work carried out by the students to fit the function to the points make them give a dynamic meaning to the parameters[52]. This is, among others because the changes of the values of the parameters are seen as movements or transformations in the graph. During the whole teaching experiment, and more specifically during the case study, we have observed that, indeed, the students give a dynamic meaning to most of the parameters. However, although the teaching model emphasizes this kind of meaning, it does not imply that students cannot interpret them in a different way, as we have observed in their performances.

Specifically, during the analysis of the data we have been able to identify several ways to give meaning to the parameters of a family of functions when using the canonical form $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ (and the canonical form $y = a'e^{kx} + d$ in the case study), in which the values for the parameters are related to graphic transformations. These different ways of giving meaning to the parameters by the students led us to redefine the definitions provided by Puig (2015) and to establish a classification that will be presented below. During the analysis we distinguish 3 different ways of giving meaning: parameter as a transformation between two graphs (dynamic sense); parameter as a position, an orientation or a concrete shape of the graph (static sense); or parameter as a characteristic of a particular graph (sense of characteristic of a particular graph). Next, the different types of meaning will be described in more detail with examples of the students' performances.

<u>Dynamic meaning</u>. It is the type of meaning that is given to the parameters when they are conceived as a transformation from one graph to another of the same family, which Puig (2015) defined as parameters, in the sense of an operator (addition or multiplication). For instance, 'the graph has gone up d'. This can be observed during the interview of the student JL who, after testing different values for the parameter d in the app, conclude that they should add a numerical value to the expression $y = -14e^{(-50{,}6x)}$ to move the graph upwards.

> 281. MO. Let's see, tell me everything you are doing.
>
> 282. JL. I'm adding a d.
>
> 283. MO. For what purpose?
>
> 284. JL. To make the graph goes up.

Puig distinguishes between parameters that are multiplicative operators ($\times\ a$ and $\times\ b$) and additives (+c and $+d$). According to this classification, in the case of additive parameters it is possible not only to talk about transformations in the qualitative sense

[52] The teaching model is designed taking into account a dynamic approach to the parameters because, for instance, in the sheets of help and during the interviews, the students are expected to observe the transformations produced in the graph by making changes in the values of the parameters. It should be noted that this is not the kind of approach students usually learn in the classroom, but the static or the one that relates parameters to characteristics of the graph of a specific family of functions. For example, they usually study the parameters m and n of the function $y = mx + n$ as the slope of the graph and the y-intercept. In the case of the quadratic functions, they are usually taught to identify the vertex of the parabola from the values for the parameters of the family of functions $y = ax^2 + bx + c$.

but also to attribute them a quantitative meaning. The students gave quantitative meaning to an additive parameter when they realize that the parameter moves the graph as many units of measure as the value of the parameter indicates. This can be also seen in the performances of JL, when he decides to add 14 to the expression $y = -14e^{(-50,6x)}$ so that the graph go upwards 14 units, because 14 is the height at which the first point is represented (interventions 286-288). It should be noted that it is also possible to talk about quantitative meaning when students see that the graph moves a certain number of units with respect to the previous one, (not necessarily the one which value for the parameter is 0). For example, during the interview of JL, he decided to change the expression $y = -14e^{(-0,6x)} + 32$ to $y = -14e^{(-0,6x)} + 28$ subtracting 4 units because he knew that, this way, the function would go downwards exactly 4 units (intervention 312).

<u>Static meaning</u>. It is the kind of meaning that is given to the parameters when they refer to a position, an orientation or a concrete form of the graph they have just obtained, without conceiving the value of the parameter as a transformation from one graph to another but conceiving it as an intrinsic property of the graph itself. For instance, it can be seen during the interview of the student DC, who pointed out that he considers the parameter d 'as the height on the y-axis' (intervention 331).

<u>Meaning of the characteristic of a specific graph</u>. It is the kind of meaning that is given to the parameters when the students refer to them as a specific characteristic of the graph. Two types can be differentiated: 1) those that refer to characteristics of an specific family of functions (for example, '(c, d) is the vertex of the parabola' or '$y = d$ is an asymptote of the function') and 2) those that refer to all the families of functions expressed in the canonical form $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ (for example, '$(0, d)$ is the intersection point with the y-axis' or 'the function intersect the y-axis in d'). For instance, the student DC indicates that 'we are going to establish the parameter d as the first point' (intervention 329), meaning that he is going to take the second coordinate of the first point as the value for the parameter d and, therefore, $(0, d)$ is the intersection point between the graph and the y-axis. In the case that students take some coordinate of a point as a value for a parameter, we say that they use the point as a parametric indicator (Infante, 2016).

It should be noted that, although in most cases students gave a dynamic meaning to the parameters, we have observed a certain tendency to use the points as parametric indicators in the case of some parameters. For example, the student AB started to fit the function to the points (during the case study) replacing the values of a and b of the expression $y = ae^{-cx} + b$ with the coordinates of the first point.

> 329. AB, For a I would take the value 25 and b would be 25.92 (although it gets confused and takes the coordinates of the first point that appears on the screen, which is not 'the first point').
>
> 332. MO. The first point?
>
> 333. AB. Yes.

In addition, during the case study, almost all the students ended up relating the parameters a' and d of $y = a'e^{kx} + d$ with coordinates of the points. Specifically, at the beginning of the fitting, all the students related the parameter a' to the second coordinate of the first point, 13.98. This may be because they saw that the graph started from this first point and tried to establish a kind of parallelism between the formula and the graph (they related the first point that appeared on the graph with the first parameter that appeared on the formula). Moreover, during the fitting some students related the parameter d with the second coordinate of the last point. The tendency of relating the coordinates of the points with the values of the parameters can be a consequence of how they had been instructed in their previous experience, in which the students were taught to use the coordinates of the points to calculate the values of the parameters. For instance, in the study of the linear function $y = mx + n$, they were taught to find the values of the parameters m and n by substituting the variables x and y for the first and the second coordinates of two points of the function and, afterwards, solving the system of the two equations where the m and n are unknown.

6.1.3.2. Ways of giving meaning to the parameters

In the case study, different ways of giving meaning to the parameters by the students were observed, in particular, during the process whereby the students tried to fit the graph to the points. In this subsection, we will show these different ways of giving meaning to the parameters and also the way in which the students conceived the graphical transformations of the parameters due to the fact that these were seen as global transformations instead of transformations points by point.

Two types of performances according to the way the students give meaning to the parameters were identified.

Type I. The first type of giving meaning to the parameters is due to the app Desmos shows the graphic representation and the formula in the same screen and the transformation of the graphs while testing several values for the parameters can be observed. This type of performances consists of: first, give values to the parameters in the formula and, after observing the consequences graphically, change the values taking into account the type of transformation observed to fit the graph to the points. This type of performances could be observed, for instance, during the interview of DC, who first tested different values for each parameter in order to see how changes the graph and, based on his observations, he tried to fit the graph to the points. In particular, he first tested several values for a', then several more for k and finally more values for d. After having found the kind of transformations in the graph for each parameter, he looked for the concrete values that would make the graph fit the points, considering the transformations just observed.

Type II. This second way of giving meaning to the parameters consists on: first observe the graph and think what kind of transformations can be done to fit the function to the points and, after that, try to find the parameters that make the types of transformations desired, which is not always possible because maybe does not exist a parameter that can make these transformation. This could be observed at some students' performances in specific moments. For example, when the student JL had the graph of which formula was $y = 14e^{-1,6x}$ (see Figure 14 in Annex 25), he had to change the orientation by writing a negative sign before 14. However, the student conceived that what he should do was to change the shape of the graph from concave to convex shape. Therefore, he tried to look for a parameter that allowed him to do this transformation, which was not possible because it could not be done with any of the parameters considered in the formula he was using. We could also find similar performances when the student IG was working on the graph of Figure 6.1.b) (see Annex 25). IG explained that she had to make that the left part of the graph went down and opened it, but how she could not find any parameter that made these movements, she told that 'it is impossible' (intervention 450).

Besides, regarding the way in which the students conceived the graphical transformations of the parameters, we have observed that, in some cases, they conceived them in a peculiar way, different from how the graph actually behaves point by point. For instance, the student JL indicates that the parameter k of the exponent changes the shape of the graph, making it more or less 'rounded' (intervention 290). He means that this parameter changes the curvature of the function, and also makes that 'the first part of the graph is closed to the y-axis '(intervention 296). Another example is found in the interview of the student AB, who says that '(the graph) goes down' (intervention 383) when multiplying the value of the exponent by 4. He also says that '(the graph) has gone to the right' (intervention 412) when he deleted the value 4 from the expression $y = -4e^{-x} + 26.92$. This is due to what Puig (2015) says about the way in which the graphs are seen: globally, not point by point. However, although students do not know and do not have to know the behaviour of the graph point by point, the way in which they conceived the transformation of the graph allowed them anyway to obtain a graph that fit the points with no problem.

6.2. PERFORMANCES RELATED TO THE INCORPORATION OF A QUALITATIVE ANALYSIS IN THE TEACHING MATERIAL

As we already mentioned in chapter 1, Puig and Monzó (2013) point out the importance of carrying out an analysis of the qualitative properties of the phenomenon and the families of functions on the management and control of the modelling process, understood as a particular case of the problem solving process.

In the previous study of this work (Ortega, 2013), it was already analysed the incorporation of a qualitative study in the teaching material itself and it was found that this analysis was a key element in the management and control of the modelling process because the students were based on it to make decisions and to justify their answers. In particular, it was found that the qualitative analysis was key in two moments: when the students had to choose the function used as a model and when they were interpreting the function in terms of the experiment.

In this investigation, it was designed a teaching model with similar characteristics to those of the previous study. In this material it was also included a previous study of the qualitative properties of the phenomena and the families of functions. However, the teaching model differs slightly from the one used in the previous study (as we discussed in Chapter 3). For instance, the teaching material is not exactly the same and in the case study of the current work, we conduct teaching interviews instead of interviews to review what they have done during the lessons in class. After analysing the data, we found that the qualitative analysis influenced the students' performances in different moments of the teaching experiment. In particular it influences during the qualitative study itself and after it. Below, we will describe in which moments the qualitative analysis has influenced the students' performances and in which way it did it, results mainly found in the case study because it was when we could observe in detail the students' performances during the solving process.

On the one hand, the qualitative analysis have influenced the students' performance during the qualitative analysis itself, mainly when students were asked to choose the family of functions that best represented the studied phenomenon in item 3 because most of them based their answer on the shape of the graph they had drawn in previous items to discard some formulas and to choose the family of functions based on the peculiarities of the graph ('the parabola is the one that has x^2', ' exponential is the one that has e^x', etcetera.). For example, during the interview of DC, he discarded the linear function and the quadratic one because, as he mentioned, the graphs of these functions had a shape of a straight line and a shape of a parabola, respectively. The same happened for the students of group 1, who explained in item 3.b) that they chose the formula of the function $y = a/x$ because the graph is ‘a straight line’ (although this is not correct), based their answer on the graph they had drawn in the previous item, which was a straight line.

Moreover, the qualitative analysis has also let us detect some misconceptions of the students in relation to the phenomena and the families of functions and correct them. For example, DC was not clear about the difference between the exponential and the logarithmic function and JL considered that the concrete shape of the graph, and consequently the type of family of functions that represented the phenomenon, would depend on the concrete data of the experiment.

On the other hand, we have observed that after the qualitative analysis, the students also referred to it in different moments. Once they took the references with the app Video Physics in the lessons 2 and 3, the students were asked to see the graphs that the app showed on the screen (item 4.d)) and to choose the one that best represented the relation between the variables studied. In this moment, the students took into account the type of graph that they drew in item 2 to choose which one of these is the correct graph. It should be noted that in the case of the experiment of the lengthening of the spring (lesson 3) none of the graphs showed the relation studied, which was a straight line, so that in this case students should not only look at the form of the graph but also consider the variables represented to avoid falling into errors. Moreover, in the case study, in which data were provided to the students directly so that they did not have to perform the experiment in classroom, we noticed that they were based again on the graph of item 2 to interpret the new graph, the one we provided to them. In particular, the students interpreted the new graph focusing on the aspects which were different from the graph they drew in item 2 to verify if their ideas about the phenomenon in item 2 were correct or not. For example, the student AB explained that in the new graph the sensor ‘heats up faster and then it takes longer to heat up’ (intervention 264) because he had represented the graph of item 2 so that initially the temperature went up slowly and then faster, which is the opposite of what happened in this graph.

After that, in both the study of the group and the case study, we observed how the students were based on the shape of the graph of the function to choose the points they should represent in the app Desmos. In particular, in the experiment of the bounce of a ball, many students chose the vertex of the parabola or the highest point of the function, because, as they explained, it was a relevant point to know the height of the parabola. The same for the experiment of the heating of an object, in which most of the students chose more points from the beginning because the others ‘will be more or less the same’ (intervention 320 of the IG interview) or because the points from the end ‘have the same constant because the function is reaching the asymptote ‘(intervention 305 of the DC).

We have also noticed that the qualitative analysis helped the students to verify if what they were doing was correct or not. For example, when they were asked to represent the points in the app Desmos to try to find a function that fit them, some students copied some coordinate of the points which were wrong. However, after representing them in the app, they saw that the shape of the points was not the expected one (which should be similar to the shape expected for the graph), what made them review the data and modified the wrong coordinates for the correct ones.

Finally, students also refer to the qualitative study when they were trying to find a formula of a function that fit the points because they tried to remember the formula of the family of functions they had chosen in item 3. This fact was not only observed in item 6 of the classroom lessons (in which the students were asked to say the type of function that would fit the data obtained) but also in the case study, in which all the students tried to remember the formula of the function they had chosen from the ones given in the table (which was $y = ae^{-cx} + b$) and gave concrete values to the parameters a, b and c.

However, we have observed that if students do not carry out a good analysis of the qualitative properties of the phenomenon and the families of functions or do not take into account other elements apart from the qualitative study, it can lead them to find difficulties or to make mistakes. This happened, for example, in item 4.d) when the students were asked to choose the graph, from the ones given by Video Phsics, that represented the phenomenon of the lengthening of a spring. In this item if the students only take into account the shape of the graph and not the variables that are related, they can make the mistake of considering that the right graph is the one that relates time to lengthening because it has the same shape as the one of the relation studied (as happend for the students of group 6). They also can make mistakes when they were asked to copy the chosen points to the app Desmos because if they have not taken into account that the variables related have to be the number of marbles (instead of time) and the lengthening of the spring, they can represent the points graphically, obtaining the same shape as with the right variables and not realizing that the variables are wrong (as happened to the students of group 1). Besides, if the students are not aware of how the app Video Physics works, they may find a contradiction between the graph they drew in the qualitative analysis and the data they obtained. This can also be seen in lesson 3 since the relation between number of marbles and lengthening is decreasing so it is represented with a straight line of negative slope. For this reason, during this lesson several groups indicated that they believed their data were wrong because when representing them in the app they did not find the shape expected.

6.3. TENDENCY TO BE BASED ON PRIOR CONCEPTIONS INSTEAD ON THE DATA FROM THE EXPERIMENT

As we have seen in different moments of the teaching experiment, the students tend to base their answers in their prior conceptions instead on verifying whether or not what they think is true for the data of the experiment. Specifically, we found two types of conceptions: those that refer to how students conceive the phenomenon in general (6.3.1) and those that refer to how they conceive some of the physical magnitudes studied (6.3.2).

6.3.1. CONCEPTIONS ABOUT THE PHENOMENA

These conceptions were found on items 8 and 9, in which students were asked to interpret some aspects of the function in relation to their experiment. In these items, we observed that some students interpreted these aspects thinking about the phenomenon in general instead of looking on the data of the experiment they had done in class.

For instance, in item 8 of lesson 2, some students answered if the values for the images made sense thinking about the phenomena in general instead of checking on the data of their own experiment. In this experiment, the domain of the function for all students was [0.9017, 2.07] so the only value which image would make sense to calculate was 1.1. However, the students of group 7 explained that calculating the image of 100 would not make sense 'because in 100s the height would be 0m' but they did not say anything of the rest of the data, probably because they think the experiment could make sense for the values 0,11s and 0,76s, although that did not happen in their experiment.

On the other hand, in the experiment of the lengthening we observed the same idea. For example, when the students were asked to calculate the maximum lengthening of the spring in item 9, instead of using the data from their experiment to calculate the lengthening when the plastic cup had 8 marbles, they explained that the spring would reach the maximum length when the plastic cup touched the ground (and the same for the students of groups 1, 3, 6 and 8). The same happened in item 8 when they were asked to calculate the images of certain values. Only the students of groups 3 and 7 pointed out that calculating the image of 100 would not make sense. The rest of the students made this calculation because for them it would make sense, probably because they thought in the experiment in general.

This kind of students' performances could be due to they did not know that the intention of these items was to validate if the obtained function was correct or not in relation to their experiment. Therefore, this issue will be taken into account in the final design of the material, as we will present later on.

6.3.2. CONCEPTIONS ABOUT THE MAGNITUDES HEIGHT AND LENGTHENING

Conceptions about the magnitudes height and lengthening were also found. In particular, we observed that the students' answers were more based on their prior conceptions about the values that these physical magnitudes could take than in the values they obtained in their experiment (conditioned to how they had taken the references in Video Physics).

On the one hand, in the experiment of the bounce of a ball, students conceived that the values taken by the variable height could not be negative because it would not make sense (students of groups 4, 5, 6, and 8) or because the ball could not go through the floor (students of groups 2 and 3), even when in the experiments of some groups (groups 3, 7 and 8), negative values could appear due to how they had taken the references in Video Physics. However, they did not check if these negative values would make sense in their experiments but they answered based on what they thought about negative values for the height.

Regarding the concept of height, we have also identified that some students confused the terms 'height of the ball on the ground' and 'height of the ground' because they used them in an indistinct way. However, when the students used the app Video Physics, they should have been aware that the height of the ball would depend on where they set the x-axis in the app and where they marked the points in relation to the ball. In particular, the height of the ball on the ground would depend on where they set the x-axis and where they marked the first point (or the last point). The height of the ground would depend on where they set the x-axis with respect to the 'ground' (understood as the horizontal line located in the lowest part of the ball when it touches the ground). Therefore, in terms of the app, students who considered the height of the ball on the ground and the height of the ground indistinctly, should have fixed the first point marked on the ground, that is, in the lowest part of the ball, independent of where they had set the x-axis (see Figure 6.1), which only the students of group 3 did. However, despite not taking the references in that way, some students conceived that both heights were the same during the interpretation of the characteristics of the function in relation to the experiment, instead of checking if this was true or not in their experiment. For instance, when students of group 8 were asked to calculate the values of time in which the ball touched the ground, they looked at the intersection point of the graph with the

x-axis, considering that the height of the ball on the ground was zero. Moreover, when they were asked in an explicit way for the height of the ground in item 9, they indicated that this was also zero, which was not true either.

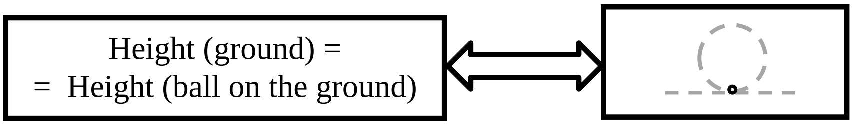

Figure 6.1. Definition of height of the ground when it coincides with height of the ball on the ground

Finally, it could also be observed that some students considered the ground as the reference (which means that the height of the ground is zero) despite how they had taken the references in Video Physics. Those who took the ground as the reference should have set the x-axis just in the 'ground', independent of where they had marked the points (see Figure 6.2), which only happened for the students of groups 1 and 6. Therefore, the height of the ground would be zero but the height of the ball on the ground not necessarily would have to be zero. However, we can find students who indicated that the height of the ground was zero despite not having set the x-axis just in the lowest part of the ball when it is on the ground. For example the students of group 5 pointed out that 'the floor is 0 meters' which is not true in their experiment, so they answered basing on their conception, not in the data of their experiment.

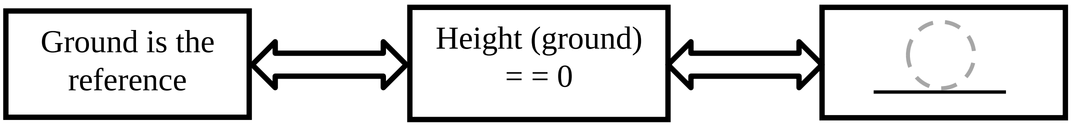

Figure 6.2. Definition of ground as the reference

On the other hand, in the experiment of the lengthening of the spring the students were already more aware of the functioning of the apps (as it was explained in 6.1.2) because many of them were coherent when interpreting the variables in relation to how they had taken the references. However, despite being aware that taking references in Video Physics would influence the variable lengthening, still some of the students (students of groups 5, 7 and 8) were not aware of the functioning of the app because they were not coherent with the reference-taking in their answers to items 8 and 9.

For example, the students of group 8 set the references so that the variable y provided by the app is $d_{p,x} - A$, where $d_{p,x}$ is the distance from the first point marked to the x-axis (which they set in the ground) and A is the lengthening of the spring. In this case, students considered a function that fit the points which first coordinate was the number of marbles and which second coordinate was the variable $d_{p,x} - A$. However, during the interpretation of the function in relation to their experiment, they were asked to find the lengthening of the spring when the plastic cup had 4 marbles and they used this function to calculate it. Therefore, they were not aware of the functioning of the app because they answered the question thinking that the function would give them the lengthening of the spring.

To sum up, in some moments of the experiment the students based more on their prior conceptions than on the data they obtained from the experiments because they did not use their data to answer. This might be due to different reasons. It could be a consequence of the students were not used to having to make decisions like taking references, or even to they were not used to verifying their calculus or answers in relation to the concrete aspects of the context of the tasks.

6.4. DIFICULTIES FOUND DURING THE TEACHING EXPERIMENT

6.4.1. DESCRIPTION OF PHENOMENA: WORDS VS. GRAPHIC REPRESENTATIONS

In general, in all the lessons we found that students had difficulties when describing with precision the studied phenomenon so they usually gave more details of how they conceived it using the graphic representation than by describing it with words. For example, the students of group 2, described the relation between the number of marbles and the deformation of the spring as increasing without giving more details (item 1.a) lesson 3). However, it was not until seeing the graph they represented in item 1.b) when we could see how they conceived the relation between the variables exactly. The same happened in the case study, in which some students explained that it was easier for them to describe the phenomenon by drawing a graph.

Nevertheless, we also observed that when they use the graphic representation of the function, they sometimes represent something that does not seem to be exactly what they conceive. For instance, it is the case of the students of groups 1 and 5, who in item 2 of lesson 3 drew continuous graphs although they conceived the variable ‘number of marbles’ as discrete. A similar thing can be found in the answers of the students of groups 3 and 4 to the same item, who drew step graphs considering an extra variable (time or weight) when they were asked to represent the relation between number of marbles and lengthening. Interpreting their graphs, someone could think that: they conceived that the number of marbles could take real values and the spring had not been lengthened while the glass contained between n (being n a natural number) and $n+1$ marbles (which is not what they conceived).

6.4.2. THE EXPONENTIAL FUNCTION: DIFFICULTIES AND DECISION-MAKING

During all the teaching experiment, students have found difficulties in relation to the exponential functions; even though they had already studied this function in previous years, as their teacher told us and can be seen in the notes of a student during the previous sessions to the teaching experiment (see Annex 3).

These difficulties were already found in lesson 1, in which none of the students indicated to know the functions $y = a \cdot e^{-cx} + b$ and $y = a \cdot d^{-cx} + b$ (item 1) and, therefore, none of them were able to relate the formula of the exponential function to the corresponding graphs (item 5). For that reason, at the end of last session of lesson 1, we made the decision of correcting the students’ answers to the questionnaire, focusing on the aspects in which the students presented difficulties (as it was mentioned in 3.2.3.1). In this, we also review the characteristics of the exponential function because it would be the function they would have to use during the experiment of the cooling of a liquid later on. Specifically, we mainly explained that: 1) the main characteristic of the formula of the exponential function is that the independent variable appears in the exponent, and 2) the graph of an exponential function becomes stabilized when x tends to infinity. We also reminded the students that this function had been studied during the sessions previous to the teaching experiment.

However, difficulties when recognizing this type of function were found also after this session. Specifically, in item 2 of lesson 4, the students who conceived the graph of the function as an exponential also had difficulties in relating it to the correct formula in item 3. This was the case of students of groups 2 and 7, who saw the graph as a decreasing curve that became stabilized for large values of x. However, they chose the algebraic expressions $y = a/x^n + b$ (group 2) and $y = ax^b$ (group 2) as those that best represented the studied phenomenon. Besides, we also observed that the students had difficulties finding a function that fit the points in item 6 of the same lesson, even after being asked for the sheet of help (in which the students were told to start the fitting with the function $y = e^x$). Only the students of group 2 were able to find an exponential function that fit the points ($y = -0{,}7^{(0{,}77x-9{,}5)} + 30$). The students of group 3 also used an exponential function after using sheet of help but they were not able to find a formula that fit to the points ($2y = 2^{(-0{,}01x+5{,}9)} + 60$). The same happened for the students of group 8, who did not achieve to modify the curvature of the graph to continue working with the fitting ($y = 2^{-10x} + 40$) (see images of Figure 6.3). Besides, none of these students considered an exponential function of base e and all of them confused e with a parameter. This was probably because e is the next letter to d (considered as a parameter in the teaching material) in the alphabet and because of the influence of the type of exponential function worked in the previous sessions, in which they studied the exponential function of base 2 (as was considered by the students of groups 3 and 8). On the other hand, they obtained the formula in the canonical form $y = a \cdot e^{-cx} + d$, which was the one that appeared in the list given in item 3.

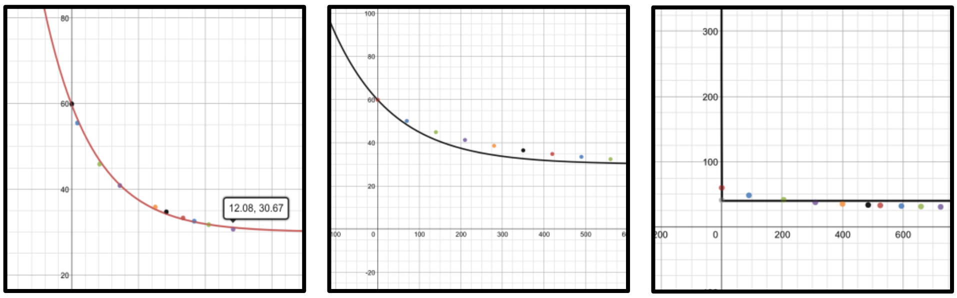

Figure 6.3. Graphs obtained with the app Desmos (groups 2, 3 and 8, lesson 4)

Finally, difficulties in relation to the exponential function were also observed during the interviews. Before starting with the experiment of the heating of an object, we already noticed that some students had difficulties recognizing the characteristics of the function. In particular, difficulties were found first when the students were asked to talk about some aspects of the experiment of the cooling of a liquid. For example, in the interview of IG, the student commented that this function 'had a name that I do not remember' (intervention 68). Difficulties were also found in the interview of JL, who initially did not remember the characteristics of the formula of the exponential function and started to say that the exponential function was the one in which 'x was elevated to something' (intervention 58 of JL), like DC did in his corresponding interview.

> 90. MO. Very well [...] what formula did we used in this experiment?
>
> 91. DC. Uff... That one...
>
> 92. MO. More or less, what characterizes the exponential function?
>
> 93. DC. That it had a x elevated to something... Sorry, it had a number, let's call it n, elevated to an exponent that would be an x plus any m.

On the other hand, also during the interviews we were able to detect some erroneous or incomplete conceptions regarding that kind of function. For example, JL identified the exponential function only with the exponential function that had a certain orientation, or DC who did not have clearly defined ideas about the difference between the graphs of an exponential and a logarithmic function.

Finally, we also observed that the students presented a peculiar behaviour (and similar in all the studied cases) in relation to the fitting of the function to the points. First, all the students started trying to fit a graph to the points by using the formula of the exponential function chosen during the previous qualitative study, which made that students experienced difficulties when determining the meaning of each parameter. Therefore, we made the decision to guide them to start from the simplest function of the family of functions, in this case $y = e^x$, and then, little by little, make them try to fit the function to the points. Second, all the students who participated in the case study obtained a formula in the canonical form $y = a'e^{kx} + d$ instead of the $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ in which f would be an exponential function. This was probably due to the fact that the first formula was the one that appeared in the list of functions that we provided them in item 2 (see Annex 14) and due to the type of methodology of the interviews (explained in section 4.2.2.2), in which we let the student follow the course of the resolution he had undertaken, whether or not it was appropriate. Therefore, although we observed the students were not on the way to obtain the formula in the initially expected canonical form, we made the decision to guide them towards the obtaining of the function in the canonical form $y = a'e^{kx} + d$ because it could be considered as a subfamily of the otherone.

6.5. NEW DESIGN OF THE TEACHING MATERIAL

The results obtained from this research work and the observations done during the implementation of the material made possible to redesign the teaching material, which is also a result of the study. Therefore, in this section we will indicate the changes we made to the material and the elements that we incorporated. The new teaching material with the changes already incorporated can be found in Annex 29.

Regarding the previous questionnaire, some statements were reformulated in order to make clearer the purpose of each question and the meaning of some concepts. In the first place, we included a comment in the statement of item 3.c) in which we specified that the stone is thrown in a vertical direction, to avoid that the students misunderstood it and identified graphs with trajectories. In item 5 we indicated that the formulas the students had to relate with the graphs were families of functions so that the students could associate several graphs to the same formula and vice versa. In item 6 we added a definition of what we consider as 'parameters' of a certain family of functions in the specific context in which they we are working. It was done because during lesson 1 most of the students were not able to answer this question because they did not know what a parameter was. We also reformulated the statement of item 7 to indicate that the three algebraic expressions represent the same graph because during the implementation some students made calculation to compare the expressions because they thought that only one of them was correct. Finally, we wrote an only statement for item 8 in which the students would be asked to write the three algebraic expressions as a perfect square and, if this was not possible, they transformed them into an algebraic expression like $a(x - b)^2 + c$.

Next, we will explain which are the changes made and the elements that we incorporated in relation to the study of the experiments. It will be done reviewing items by item and indicating, if necessary, the specific changes for any of the experiments. Before conducting this experiment, we decided to include item 1.a) in order that students described in their own words how they conceived the studied relation and also to make the students reflect on how the phenomenon behaves at different moments. However, sometimes the students gave short explanations and, as in the case study, when they were asked to reflect on specific moments of the phenomenon (what happens initially, what happens next, etc.) they were able to outline the shape of the graph in a more precise way. Therefore, we decided to reformulate the statement of the question in the new material to ask the students to explain the relation between the variables in more detail. In addition, we eliminated the question of item 1.b), which was initially proposed to see if the students were able to conceive the relation as a function or not. It was eliminated because, since they were asked to answer the questions of the previous questionnaire (related to the families of functions), the students would probably know that they were going to work with functions in these lessons as well. Besides, we already asked them in item 2 to represent the graph of the relation in an explicit way.

Regarding the item 2, we changed the order in which the questions were formulated so they would be first asked for the axes of coordinates and the units of measurement, then for the shape of the graph and, finally, for the position. We changed the order of the questions because some students gave a similar answer to the questions about shape and position of the graph.

On the other hand, in item 4.a) of the experiment of the lengthening of the spring, we reformulated the statement and, instead of asking the students to mark the points 'that show the position in which the plastic cup is located at every moment' we asked them to mark the points 'that show how the spring is lengthening'. This was done to give more freedom to the students to mark the points where they wished (on the spring, in the lower part of the plastic cup, etcetera.) and, therefore, did not condition their way of understanding the variable lengthening.

With regard to the item 6, we found a problem during the analysis of the data: we could not guess if the students found the function that fit the data before or after using the sheet of help because during the experiment the students kept both sheets, the one with the questions of the item and the sheet of help. However, if we want to use the material with research purposes, it would be convenient to remove the sheet of help during the implementation of the material and to reformulate the questions in order to the students can indicate if they have used the sheet of help or not and, in case they used them, they can continue answering the questions of the item in the sheet of help. Besides, in the sheet of help we grouped the questions that refer to the same parameters in the same section and we add a section in which it is asked to write down the formula.

In relation to item 7, we observed that in some cases students transformed the algebraic expressions into the same canonical form but later they compared the functions graphically, not using the formulas. It seems that they did not realise that we asked them to calculate the formulas in the same canonical form with the purpose of comparing the functions using the formulas. Therefore, we changed the statement of the question and instead of asking them to compare the functions and to explain which one would fit better to the data, we asked them to compare the formulas of the functions in order to analyse their similarities and to say if both of them would be appropriate.

Finally, in items 8 and 9, many students did not seem to realize that we asked them the questions to make them interpret the function using the concrete data of their experiments because many times they answered in a general way. Therefore, in both items we added a note in which we indicated that the questions of these items refer to the specific data of their experiments. Moreover, in item 9.b) of the experiment of the lengthening of the spring, we added a question asking them to calculate the maximum and the minimum length of the spring, in case it is possible, with the purpose they check if they can calculate them with their data and do not do it in a general way.

In addition, at the time in which the teaching experiment was carried out, most of the students did not seem to have the necessary knowledge about the exponential function to address certain aspects. For example, in the study of the experiment of the cooling of a liquid, some students conceived the studied relation as a graph in which initially the temperature went down faster and then slowly until it becomes stabilized. However, they were not able to relate this graph to the formula of the exponential function in item 3 (which is $y = a \cdot e^{-cx} + b$). During the case study, we also observed some students who have restricted ideas about this function. For instance, JL conceived that the graph of the exponential function was the one obtained in the experiment of cooling a liquid and any graph of exponential function would have the same shape and orientation of it. Also during the case study, we observed that DC confused the exponential function with the logarithmic function due to the fact that visually their graphs could have a similar shape (without taking into account the fact that exponential functions have horizontal asymptotes and logarithmic functions have vertical asymptotes). Therefore, before implementing the teaching material in the classroom, it would be interesting to make a more extensive review of the characteristics of each family of functions previously studied so that the students were able to model the phenomena with exit.

6.6. FINAL CONSIDERATIONS AND FUTURE LINES OF WORK

In conclusion, the results of the investigation shows, as was already pointed out by Arcavi *et al.* (2017), that the appropriate use of digital tools in the classroom is more an evolution than a revolution. In particular, we found that the students' use of the technological instrument throughout the teaching experiment: 1) can exempt the students from having to do some actions that are not really the core of the tasks, 2) can make students reflect on aspects that they are not used to reflect on, 3) can help them to redefine and extent some mathematical concepts. However, it is essential for the students to understand the functioning of the apps and to take into account the effect of the decisions they make when using them to be able to act in a coherent way afterwards. Along these lines, the role of the teacher is key to making the students aware of the need to reflect on certain aspects of the functioning of the apps and the consequences of their use. Regarding the analysis of the qualitative properties of the phenomena and the families of functions, we observed that, as we pointed out in previous studies (Puig and Monzó, 2013, Ortega and Puig, 2015), this is a key element in the management and control of the modelling process throughout all the teaching experiment. In particular, it influenced the students' decision-making and helped them to verify that what they were doing was correct. Besides, the qualitative analysis also let us detect some misconceptions of the students in relation to the phenomenon and the families of functions and correct them. On the other hand, we also identified some difficulties and some conceptions of the students linked to their prior knowledge about the phenomena and the physical magnitudes, which allowed us to reflect on the need of redesign the teaching material used in this work, as well as to reconsider certain elements that will be taken into account in the competence model for future experiments.

Finally, this research has opened several lines of work in which we will continue working in the future. In the first place, it would be interesting to extend the teaching model including the study of other types of functions through different physical phenomena (in which data collection is done using the app Video Physics or other types of sensors) and observe the students' performances in relation to the use and the features of technology and to the incorporation of a qualitative analysis in the teaching material itself. Likewise, we could design a teaching model to study different experiments by using functions expressed in the canonical form $y = af\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ and analyse if the students are able to realize that the parameters of the different algebraic expressions have an analogous meaning in terms of transformations of the graph. Besides, it would be interesting to analyse the students' performances when they study the same type of experiment but with small variations in their data and to study the way in which the students relate the parameters with the carried-out experiments and the corresponding graphs. Finally, regarding the technology, it would be convenient to implement the teaching material in a group of students who usually use technological tools in class to see if we observe the same type of performances in relation to the reference-taking. Moreover, it could also be interesting to implement the teaching material in a group, changing the order in which lessons 2 and 3 are presented. This way, we could obtain information about the reasons that lead the students to consider the ground as a reference in the lesson of the experiment of the bounce of a ball to see if this is due to their strong prior conceptions or due to their inexperience using apps in class that make them reflect on aspects that are usually given to them.

7. Referencias bibliográficas

Arcavi, A., Drijvers, P., y Stacey, K. (2016). *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities*. Londres: Routledge.

Ärlebäck, J.B. y Doerr, H.M. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM*, 50(1-2), 187-200. doi: 10.1007/s11858-017-0881-5.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra. Mathematics education Library* (pp. 177-189). Dordrecht: Springer.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, 15-30. New York: Springer.

Blum, W. y Niss, M (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37-68.

Boyer, C. G. (2007). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brown, J. P. (2015). Visualisation tactics for solving real world tasks. En G. A. Stillman, W. Blum, y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Cham: Springer.

Búa Ares, J. B., Fernández Blanco, T., y Salinas Portugal, M. (2015). Una modelización matemática como medio de detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función: alargamiento de un muelle sometido a un peso. *Educación matemática, 27*(1), 91-122.

Butts, T. (1980). Posing problemas properly. En S. Krulik, y R. Reyes (Eds.), *Problem solving school mathematics* (pp. 23-33). Reston, VA: NCTM.

Chomsky, N. (1965). *Aspects of the Theory of Syntax*. Cambridge, MA: MIT Press.

Chomsky, N. (1968). *Language and Mind.* New York: Harcourt Brace & World.

Consellería d'Educació (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el cual se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en al Comunitat Valenciana. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, 5562, 30402-30587.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW & OC.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria* (tesis doctoral). Valencia: Universitat de València Estudi General.

Filloy, E. (1988). *Theoretical Aspects of PME Algebra Research*. Manuscrito no publicado. Institute of Education, University of London, London.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). En J. Moser (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI: PME.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F., y Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference? En Da Ponte, J. P., y Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the eighteenth international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 368–375). Lisboa: University of Lisbon.

Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 305-314). Dordrecht: Springer.

Geiger, V., Faragher, R., y Goos, M. (2010). CAS-enabled technologies as 'agents provocateur, in teaching and learning mathematical modelling in secondary classrooms'. *Mat*hematics Education Research Journal, 22 (2), 48–68. doi: 10.1007/BF03217565.

Gibson, J. J. (1966). *The senses considered as perceptual systems*. Boston: Houghton Mifflin.

Godement, R. (1971). *Álgebra*. Tecnos: Madrid.

González-Calero, J.A. (2014). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente* (tesis doctoral). Valencia: Universitat de València Estudi General.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, 39(1-3), 111-129. doi: 10.1023/A:1003749919816.

Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling – Overview. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, *ICTMA 14* (pp.301-304). Dordrecht: Springer.

Greefrath, G., y Rieß, M. (2013). Reality based test tasks with digital tools at lower secondary. En G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 445-456). Dordrecht: Springer.

Grigoraş, R., Garcia, F. J., y Halverscheid, S. (2011). Examining mathematising activities in modelling tasks with a hidden mathematical character. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 85-95). Dordrecht: Springer.

Grupo Cero (1978). *Matemáticas de Bachillerato. Volumen segundo*. Valencia: Roberto Guillén, editor.

Grupo Cero (1981). *Matemáticas de Bachillerato. Curso 1.* Valencia: Roberto Guillén, editor.

Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *ZDM*, *34*(5), 204-211. doi: 10.1007/BF02655823

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Henn, H.-W. (2007). Modelling pedagogy—overview. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 321-324). New York: Springer.

Infante, F. (2016). *La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de GeoGebra en un primer curso de ciencias administrativas y económicas en Colombia* (tesis doctoral). Valencia: Universitat de València Estudi General.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments.* (tesis doctoral). Nottingham: University of Nottingham.

Jennings, M. y Adams, P. (2013). Mathematics and the pharmacokinetics of alcohol. En G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J.P. Brown, *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 597-606). Springer Netherlands.

Juan, M. A. (2012). *Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización* (trabajo de fin de máster). Valencia: Universitat de València.

Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 503-510). New York: Springer.

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302–310. doi: 10.1007/BF02652813.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 274-287. doi: 10.2307/749516.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 2-8, pp. 102-119). London: John Murray.

Lovell, K. (1971). Some aspects of growth of the concept of a function. En M. F. Rosskopf, L. P. Steffe, y S. Taback (Eds.), *Piagetian cognitive development research and mathematical education* (pp.12-33). Washington D,C: National Council of Teachers of Mathematics.

Maaβ, K. (2006). What are modelling competencias? *ZDM*, *38*(2), 113-142. doi: 10.1007/BF02655885.

Marmolejo, E. (2014). *Análisis del aprendizaje del concepto y uso de parámetro* (tesis doctoral). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2016). Una actividad de modelización en el entorno informático de las tabletas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas 72*, pp. 67-74.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to action: executive summary. Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

Navarro, M. (2012). *Del álgebra a la geometría. La sistematización de las coordenadas cartesianas y la representación gráfica de funciones en la Introductio in Analysin Infinitorum de Euler y en el Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral y en el Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie de Lacroix* (trabajo de fin de máster). Valencia: Universitat de València.

Navarro, M.T., Puig, L. y Monzó, O. (2015). Un estudio sobre modelización en la iniciación de la función seno en secundaria. En P.A. Sánchez (Ed.), *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015* (pp. n128, 1-27). Cartagena: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia. Recuperado el 24 de marzo de 2016 de http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n128.pdf.

Oliveira, A. M. P., y Barbosa, J. C. (2013). Mathematical modelling, mathematical content and tensions in discourses. En G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J.P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 67-76). Dordrecht: Springer.

Ortega, M. (2013). *Un estudi exploratori sobre el procés de modelització amb dades reals en l'entorn informàtic dels iPads* (trabajo de fin de máster). Valencia: Universitat de València.

Ortega, M. y Puig, L. (2017). Using Modelling and Tablets in the Classroom to Learn Quadratic Functions. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (p. 565-575). Springer: Cham. doi: 10.1007/978-3-319-62968-1_47

Ortega, M., Puig, L. y Albarracín, Ll. (en prensa). The influence on the Mathematical Modelling of Physical Phenomena. En G. Stillman y J. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. Cham: Springer.

Pierce, R., y Stacey, K. (2010) Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(1), 1-20. doi: 10.1007/s10758-010-9158-6.

Pierce, R., Stacey, K., y Wander, R. (2010). Examining the didactic contract when handheld technology is permitted in the mathematics classroom. *ZDM, 42*(7), 683-695. doi: 10.1007/s11858-010-0271-8.

Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE. ISBN 84-85840-65-8

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México D.F.: CINVESTAV.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, *2*(3), 87-107.

Puig, L. (2015). Modelización con datos reales. En G. Frontera, J. Perelló y D. Ruiz-Aguilera (Eds.), *Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. JAEM 2013.* CD-ROM. Palma de Mallorca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas.

Rabardel, Pierre (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Radford, L. (2009). No! He starts walking backwards!: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM*, *41*(4), 467-480. doi: 10.1007/s11858-009-0173-9

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra. Un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad* (tesis doctoral). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Roth, W. M., y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. New York: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schukajlow, S., Kaiser, G., y Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM, 50*(1-2), 5-18. doi: 10.1007/s11858-018-0933-5.

Stein, M. K., y Leinhardt, G. (1989). *Interpreting graphs: An analysis of early performance and reasoning*. Manuscrito no publicado, University of Pittsburgh, Learning Research and Development Center, PA. Pittsburg.

Stillman, G. (2007). Implementation case study: sustaining curriculum change. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 497-502). New York: Springer.

Stillman, G., Blum, W., y Kaiser, G. (2017). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*. Cham: Springer.

Stillman, G. Blum, W., y Salett-Biembengut, M. (2015). Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences. Cham: Springer.

Stillman, G. y Brown, J. (en prensa). *Lines of inquiry in Mathematical Modelling Research in Education.* Cham: Springer

Stillman, G., Brown, J., y Galbraith, P. (2008). Research into the teaching and learning of applications and modelling in Australasia. En H. Forgasz, A. Barkatsas, A. Bishop, B. Clarke, S. Keast, W. T. Seah, et al. (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2004–2007* (pp. 141–164). Rotterdam: Sense.

Shell Centre Team, M. (1985). *The language of functions and graphs*. Nottingham: Shell Centre & Joint Matriculation Board.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education, the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Treffers, A. y Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education, the Wiskobas Program. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference For the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 97-121). Utrecht: OW & OC.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus d'apprentissage dans un environnment des calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 239-264. doi: 10.1023/A:1003939314034.

Ursini, S., y Trigueros, M. (2004). How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the Inter*national Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 4, pp.361-368). Bergen: PME.

Villa-Ochoa, J. A., y Berrío, M.J. (2015). Mathematical modelling and culture: An empirical study. En G.A. Stillman, W, Blum, y M.S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 241-250). Cham: Springer.

Youschkevitch, A. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*,*16*(1), 37-85.