



VNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Treball Fi de Grau - Curs 2017/ 2018

Homologia Simplicial i la seua aplicació a l'anàlisi musical

Autor/a: **Jorge Luján Mora**

Tutor/a: RAÚL OSET SINHA

Índex

Introducció	5
1 Complexos simplicials	7
1.1 Els simplexs	7
1.2 Simplexs orientats	9
1.3 Els complexos simplicials	10
2 Grups d'homologia	13
2.1 Alguns preliminars sobre grups abelians	13
2.2 Cadenes, cicles i vores	17
2.3 Grups d'homologia	20
2.4 Un exemple: la banda de Möbius	23
3 Invariància per homotopia	27
3.1 Aplicacions simplicials	27
3.2 Subdivisions baricèntriques i aproximacions simplicials	29
3.3 Homomorfismes induïts	33
3.4 Invariància per subdivisions estel·lars	37
3.5 Aplicacions simplicials contigües	40
3.6 Invariància per homotopia	43
4 Homologia cel·lular	47
4.1 CW-complexos	48
4.2 Construcció inductiva d'un CW-complex	49
4.3 Cadenes, orientacions i grups d'homologia	49
4.4 L'axiomàtica d'Eilenberg-Steenrod	50
4.5 Un exemple: el tor	51
5 La seqüència de Mayer-Vietoris	53
5.1 Seqüències exactes i escissió	53
5.2 La seqüència de Mayer-Vietoris	55
5.3 Un exemple d'aplicació	58

6	Aplicació a l'anàlisi musical	61
6.1	L'estructura matemàtica del sistema cromàtic	61
6.2	El Tonnetz	61
6.3	Construcció de complexos simplicials a partir d'acords	63
6.4	Possible rellevància dels grups d'homologia	64
6.5	Conclusió	66
	Bibliografia	69

Introducció

En topologia, l'homologia és una ferramenta molt útil que ens permet diferenciar entre distints espais topològics. La idea és associar a cada espai (X, \mathcal{T}) un grup en cada dimensió n , anomenat *n-èsim grup d'homologia de X* que, intuïtivament, mesura els “forats n -dimensionals” de l'espai. En aquest sentit, es tracta d'un enfoc alternatiu al que ofereixen els *grups d'homotopia* (com el *grup fonamental* $\pi_1(X)$) que ja es va estudiar a l'assignatura de Topologia) sobre aquesta mateixa qüestió.

Existeixen diverses teories d'homologia que s'apliquen a diferents classes d'espais. En aquest treball presentarem una de les més senzilles i intuïtives: l'homologia simplicial. L'objectiu és que aquest text pugui servir d'introducció a la matèria, i per tant ha sigut escrit amb la idea que siga comprensible sense més requisits que haver cursat l'assignatura de Topologia del Grau de Matemàtiques. Com a referència per als conceptes d'eixa assignatura que hi apareixen es recomana consultar el llibre [10] de la bibliografia.

Al primer capítol es presenten els espais amb els que treballa l'homologia simplicial: els complexos simplicials. Al segon s'expliquen tots els conceptes bàsics de la teoria. El tercer és més tècnic i s'encarrega de provar la invariància dels grups d'homologia per homeomorfismes i homotopies. Moltes de les demostracions d'aquest capítol podrien ometre's en una primera lectura. El capítol 4 dona una breu introducció superficial a una altra teoria d'homologia, l'homologia cel·lular, així com una idea general de com es relacionen les diverses teories entre sí i la utilitat d'aquesta relació. Finalment, el capítol 5 presenta un dels resultats comuns a totes les teories d'homologia més coneguts: la seqüència de Mayer-Vietoris.

L'últim capítol d'aquest treball té un caràcter completament diferent. En ell, després d'exposar la utilitat que han tingut els complexos simplicials en la teoria de la música, es proposa una aplicació dels grups d'homologia en aquest context que encara no ha estat provada. A diferència dels anteriors, per a la completa comprensió d'aquest capítol sí que són recomanables certs coneixements previs d'harmonia i anàlisi musical bàsiques.

Capítol 1

Complexos simplicials

En aquest capítol definirem els objectes principals amb què treballarem al llarg d'aquest text: els complexos simplicials.

1.1 Els símplexs

Definició 1.1

Siguen $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$, $n \geq 1$. Es diu que aquests $n + 1$ punts són *afinment independents* si $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ són linealment independents en \mathbb{R}^N . Per conveni, si $n = 0$ el punt v_0 és sempre afinment independent.

Observem que aquesta definició equival a dir que els $n + 1$ punts no estan dins d'un subespai afí de dimensió menor que n , és a dir: si són dos, que no són el mateix punt; si són tres, que no són colineals; si són quatre, que no són coplanaris; etc.

El nostre objectiu immediat és generalitzar la idea de triangle 2-dimensional a qualsevol dimensió, per tal d'emprar aquests nous objectes com a "blocs de construcció" per als nostres espais. Per tal de fer-ho, introduïm el següent concepte:

Definició 1.2

Siguen $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ punts afinment independents. Anomenarem *n -símplex* de vèrtexs v_0, \dots, v_n i denotarem per (v_0, \dots, v_n) al conjunt de punts:

$$\left\{ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \wedge \lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

Observem que aquest conjunt coincideix amb allò que es denomina *clausura convexa* dels $n + 1$ vèrtexs, és a dir, el menor subconjunt convex d' \mathbb{R}^N que els conté a tots. Açò en el cas $n = 0$ és el propi vèrtex v_0 ; en el cas $n = 1$ ens dóna el segment entre els dos vèrtexs; i en el cas $n = 2$ ens recupera,

tal i com volíem, el triangle pla. El següent pas, quan $n = 3$, correspon a un tetraedre massís. A partir d'aquest punt, la intuïció comença a fallar-nos, ja que no és possible trobar més de quatre punts afinitment independents en \mathbb{R}^3 i, per tant, no podem imaginar símplexs de dimensió major que 3 en un espai tridimensional.

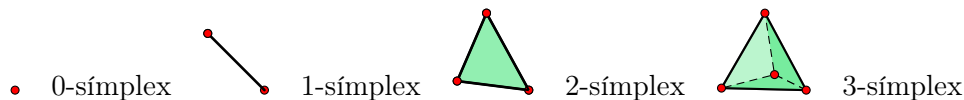


FIGURA 1.1: Exemples de n -símplexs de dimensions baixes ($n = 0, 1, 2, 3$).

Val la pena notar que, donat un punt de l' n -símplex, els coeficients λ_i que el determinen són únics i se'ls denomina **coordenades baricèntriques** del punt. En efecte, vegem que aquest és el cas:

Lema 1.1

Siga x un punt de l' n -símplex (v_0, \dots, v_n) tal que $x = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_i v_i$, els coeficients λ_i són únics.

Dem: Suposem que $\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$, de manera que els μ_i també verifiquen les condicions exigides per la definició ($\mu_i \geq 0$ i $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$)¹. Llavors:

$$0 = \sum_{i=0}^n (\lambda_i v_i - \mu_i v_i) = \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i.$$

D'altra banda, de les condicions $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ deduïm també que $\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) = 0$. Si multipliquem per v_0 als dos costats d'aquesta segona igualtat i la restem a la primera obtenim:

$$0 = \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) v_i - \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) v_0 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) (v_i - v_0).$$

Ara bé, per ser els v_i afinitment independents, tenim que els vectors $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ són linealment independents en \mathbb{R}^N i, per tant, necessàriament $\lambda_i - \mu_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Finalment, només ens queda que $\lambda_0 v_0 = \mu_0 v_0$, d'on deduïm $\lambda_0 = \mu_0$. ■

Definició 1.3

Donat un n -símplex $s_n = (v_0, \dots, v_n)$, una **k -cara** de s_n és un k -símplex s_k els vèrtexs del qual són un subconjunt dels vèrtexs de s_n . És a dir, $s_k = (v_{i_0}, \dots, v_{i_k})$ on $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\}$. Açò es representa mitjançant la notació $s_k < s_n$.

¹Una combinació lineal d'aquest tipus, és a dir, que verifica aquestes dues propietats, s'anomena **combinació lineal convexa** o simplement **combinació convexa**. D'ara en avant emprarem aquest terme per a evitar escriure les condicions cada vegada.

Notem que un n -símplex qualsevol s_n sempre té una única n -cara: el propi s_n . Qualsevol cara de s_n que no siga aquesta s'anomena **cara pròpia**. La unió de totes les cares pròpies s'anomena **vora** de s_n . Tots els punts de s_n que no es troben en la seua vora conformen el seu **interior**.

Observem que els punts que es troben en la vora de s_n sempre tenen alguna coordenada baricèntrica zero. En efecte, donat un punt qualsevol de la vora, sabem que ha d'existir una cara pròpia que el continga. Així, el punt s'haurà de poder escriure com a combinació lineal convexa dels vèrtexs de dita cara, que per ser pròpia no poden ser tots els vèrtexs de s_n . Per tant, existirà almenys un vèrtex de s_n que no estarà en la cara i com a conseqüència no apareixerà en la combinació lineal. Ara bé, aquesta és una combinació convexa de vèrtexs de s_n i, pel lema 1.1, podem afirmar que és única. Així, les coordenades baricèntriques del punt que corresponen als vèrtexs de s_n que no estiguen en la cara en qüestió seran totes zero.

Recíprocament, si un punt de s_n té alguna coordenada baricèntrica zero, aquest es troba en la $(n - 1)$ -cara que s'obté eliminant el vèrtex que apareix amb coeficient zero en la combinació convexa (ja que tenim el punt expressat com a combinació convexa dels vèrtexs restants). Per tant, el punt es troba en la vora.

D'aquesta manera, podem afirmar també que l'interior d'un n -símplex està format pels punts del mateix que tenen totes les coordenades baricèntriques estrictament positives. Aquest interior coincideix amb l'interior topològic només si l' n -símplex es troba en \mathbb{R}^n amb la topologia usual, cas en què la vora també coincideix amb la frontera topològica.

1.2 Símplex orientats

En lloc de considerar cada símplex només com un conjunt de punts de l'espai \mathbb{R}^N , estem interessats en dotar-lo d'una **orientació**. Açò ens facilitarà la construcció que volem fer posteriorment (encara que també es pot definir una teoria d'homologia simplicial considerant únicament símplexs sense orientar).

El primer pas en aquest sentit és considerar una **ordenació** dels vèrtexs del símplex, que no és altra que l'ordre en què els escrivim. Per exemple, un 3-símplex (v_0, v_1, v_2) vist com a conjunt de punts pot donar lloc a sis 3-símplexs ordenats diferents:

$$\begin{array}{cc} (v_0, v_1, v_2) & (v_0, v_2, v_1) \\ (v_1, v_2, v_0) & (v_2, v_1, v_0) \\ (v_2, v_0, v_1) & (v_1, v_0, v_2) \end{array}$$

Tanmateix, nosaltres no volem distingir entre tots ells, i per això introduïm la següent definició:

Definició 1.4

Direm que dos n -símplexs ordenats defineixen la mateixa **orientació** si existeix una permutació parella que envia els vèrtexs del primer als del segon. És a dir, si un dels n -símplexs és (v_1, \dots, v_{n+1}) podem trobar $\pi \in \Sigma_{n+1}$ parella de manera que l'altre és $(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n+1)})$.

Un **n -símplex orientat** és un parell format per un n -símplex i una de les seues possibles orientacions (això és, una de les seues possibles ordenacions de vèrtexs i totes les permutacions parelles de la mateixa).

En el 3-símplex de l'exemple anterior, les tres ordenacions de la columna esquerra defineixen una orientació i les tres restants una altra.

Es verifica que per a qualsevol símplex de dimensió major que 0 sempre hi ha dos orientacions possibles (fixada una ordenació, les permutacions parelles d'aquesta donarien una i les imparelles l'altra). Aquestes dues orientacions s'interpreten com a orientacions "contràries" u "oposades". Així, si σ_n és un n -símplex orientat, escrivim $-\sigma_n$ per referir-nos al mateix n -símplex amb l'altra orientació possible. En els casos en els que tenim intuïció gràfica, aquestes dues orientacions representen:

- Els dos sentits en què es pot recórrer un segment (1-símplex)
- Els dos sentits en què es pot recórrer la vora del triangle (horari o antihorari) (2-símplex)
- Les dues maneres en què es poden orientar les cares del tetraedre de manera coherent, induint mitjançant la regla de la mà dreta una orientació cap a l'interior o cap a l'exterior del sòlid (3-símplex)

En el cas d'un 0-símplex, l'única permutació possible del seu únic vèrtex és la identitat, que és parella, i per tant només podem definir una única orientació.

1.3 Els complexos simplicials

Ara ja estem en condicions de presentar els complexos simplicials, que no són sinó col·leccions de símplexs que satisfan unes certes condicions.

Definició 1.5

Un **complex simplicial** és un conjunt finit K de símplexs d' \mathbb{R}^N que verifica:

- (1) Si $s \in K$ i $t < s$ aleshores $t \in K$.
- (2) Si $s, t \in K$ aleshores $s \cap t = \emptyset$ o bé $s \cap t$ és una cara comú de s i t .

Notem que la primera condició assegura que si un símplex pertany a un determinat complex simplicial, totes les seues cares també, mentre que la segona és una condició d'intersecció semblant a la que exigíem als triangles en les triangulacions de superfícies compactes. Assenyalem també que considerarem els símplexs d'un complex simplicial orientats amb només una de les orientacions possibles, però en cap moment exigirem que les cares d'un símplex estiguen orientades coherentment amb aquest.

Direm que un complex simplicial té **dimensió** n si el símplex amb més vèrtexs que conté és un n -símplex. Al conjunt de punts d' \mathbb{R}^N que pertanyen a algun dels símplexs de K (és a dir, a la unió de tots els símplexs de K vistos com a conjunts de punts) se'l denota per $|K|$ i se l'anomena **espai subjacent** o **poliedre** de K .

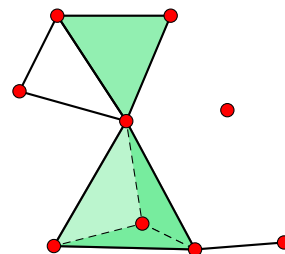


FIGURA 1.2: Exemple d'un complex simplicial de dimensió 3, amb un 3-símplex, cinc 2-símplexs, dotze 1-símplexs i nou 0-símplexs.

El lector que es trobe per primera vegada amb aquesta definició potser la trobe estranya, però probablement ja conega exemples de complexos simplicials. Per exemple, un graf és un complex simplicial de dimensió 1 (és a dir, només conté 0-símplexs -els vèrtexs- i 1-símplexs -les arestes-).

Un altre context en què els ha pogut trobar anteriorment és en les triangulacions de superfícies compactes de què parlàvem anteriorment. Aquestes s'obtenen considerant complexos simplicials de dimensió 2 en la següent definició, més general:

Definició 1.6

Una **triangulació** d'un espai topològic (X, \mathcal{T}) és un complex simplicial K junt amb un homeomorfisme $h : |K| \rightarrow X$.

Un **subcomplex** d'un complex simplicial K és qualsevol subconjunt L de K que verifiqui les condicions per a ser ell mateix un complex simplicial. Com la condició (2) se satisfà automàticament per ser L un subconjunt de K , açò equival a dir que donat un símplex de L , totes les seues cares també estan en L . El **r -esquelet** de K és el subcomplex format per tots els símplexs de dimensió menor o igual que r . Efectivament, es verifica que aquest subconjunt és un subcomplex ja que donat un símplex de dimensió menor o igual que r , les seues cares tindran sempre dimensió menor que r i, per tant, es trobaran també en l' r -esquelet.

Direm que un complex és **connex** si el seu 1-esquelet és un graf connex, és a dir, donats dos vèrtexs existeix un camí d'arestes que els uneix. Una **component connexa** és un subcomplex maximal que verifica aquesta propietat. Així, és fàcil veure que K és la unió disjunta de les seues components connexes, i és connex si i només si té una única component connexa.

Per a finalitzar aquest capítol, anem a introduir un tipus especial de complexos simplicials, els *cons*, que ens seran útils més avant.

Definició 1.7

Siga K un complex simplicial qualsevol i $v \in \mathbb{R}^N$ un punt afíment independent als vèrtexs de cada símplex de K . El **con** sobre K amb vèrtex v , CK , és el complex format per v , els símplexs de K , i els símplexs resultants d'afegir a cadascun d'aquests últims el vèrtex v . A K se l'anomena **base** del con.

Notem que la condició exigida al punt v ens garanteix que quan l'afegim a cada símplex de K el resultat és també un símplex i, per tant, CK està ben definit. Observem també que quan diem que $v \in CK$, realment ens estem referint al 0-símplex (v). A sovint identificarem d'aquesta manera els punts d' \mathbb{R}^N amb els 0-símplexs corresponents, per simplificar la notació.

Capítol 2

Grups d'homologia

En aquest capítol anem a construir els *grups d'homologia* d'un complex simplicial K . Per tal de fer-ho, primer hem de recordar algunes coses sobre teoria de grups.

2.1 Alguns preliminars sobre grups abelians

Tots els grups que apareixeran en aquest text són *abelians*, és a dir, la seua operació (que denotarem per $+$) és commutativa. Recordem la definició completa:

Definició 2.1

Un *grup abelià* és un conjunt A junt amb una operació binària $+$ sobre A que verifica:

- (1) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in A$ (*propietat associativa*)
- (2) Existeix un element $0 \in A$ que verifica que $a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in A$ (*element neutre*)
- (3) Per a cada $a \in A \exists b \in A$ (que denotarem per $-a$) que verifica que $a + b = b + a = 0$ (*element oposat*)
- (4) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in A$ (*propietat commutativa*)

Subgrups i grups quotient

Donat un grup $(A, +)$ i un subconjunt $B \subset A$ direm que B és un *subgrup* de A ¹ si té estructura de grup amb l'operació $+$ restringida a ell. Denotem aquesta relació $B \leq A$. Notem que si A és abelià, és immediat veure que B també ho és.

Per comprovar si un subconjunt B de A és un subgrup, és prou comprovar que és tancat per a la suma i que l'oposat d'un element qualsevol de B està també dins de B . Una condició equivalent és que $b_1 - b_2 \in B \quad \forall b_1, b_2 \in B$.

¹Per tal d'estalviar notació, moltes vegades ens referirem al grup $(A, +)$ simplement com A , ja que al llarg d'aquest text l'operació binària sempre es denotarà per $+$, per tant, no hi ha risc de confusió.

Prenem ara $B \leq A$, donat un element $a \in A$ podem considerar el subconjunt $a+B = \{a+b / b \in B\}$ anomenat *classe* de a mòdul B . Notem que dos elements $a_1, a_2 \in A$ tenen la mateixa classe si i només si $a_1 - a_2 \in B$. Així, tenim la següent definició:

Definició 2.2

Donat un grup abelià $(A, +)$ i un subgrup $B \leq A$. El conjunt de totes les classes d'elements de A mòdul B es denota:

$$A/B := \{a + B / a \in A\}.$$

i té estructura de grup amb l'operació induïda per la suma en A :

$$(a_1 + B) + (a_2 + B) = (a_1 + a_2) + B \quad \forall (a_1 + B), (a_2 + B) \in A/B.$$

A aquest grup se l'anomena *grup quocient* de A per B .

La raó per la que A/B té estructura de grup és que hereta les propietats d'associativitat, neutre, oposat i inclús commutativitat de la suma de A . Aquesta construcció ens serà útil perquè ara $\forall b \in B$ tenim que $b + B = 0 + B$, és a dir, hem fet iguals a zero tots els elements de B , d'alguna manera "eliminant" eixe subgrup del grup A .

Homomorfismes de grups

Definició 2.3

Donats dos grups A i B , una aplicació $f : A \rightarrow B$ és un *homomorfisme de grups* si es verifica:

$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in A.$$

Observem que aquesta definició implica que $f(0) = 0$:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

i que $f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in A$:

$$f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0) = 0.$$

A més, podem definir:

$$\ker f = \{a \in A / f(a) = 0\} \leq A \text{ (*nucli* de } f)$$

$$\text{Im } f = \{f(a) / a \in A\} \leq B \text{ (*imatge* de } f)$$

Que aquests dos conjunts són subgrups, respectivament, de A i B és també senzill de comprovar. En efecte, si $a_1, a_2 \in \ker f$ aleshores $f(a_1 - a_2) = f(a_1) - f(a_2) = 0 - 0 = 0$ i $a_1 - a_2 \in \ker f$. Per altra banda, si $b_1, b_2 \in \text{Im } f$ aleshores $\exists c_1, c_2 \in A / f(c_1) = b_1$ i $f(c_2) = b_2$. Com que $c_1 - c_2 \in A$ per ser A un grup i $f(c_1 - c_2) = f(c_1) - f(c_2) = b_1 - b_2$, tenim que $b_1 - b_2 \in \text{Im } f$.

Un homomorfisme es diu *injectiu* si el seu nucli és zero, i *suprajectiu* si la seua imatge és tot B . Si compleix ambdues condicions és *bijectiu* i se l'anomena *isomorfisme*. Dos grups A i B són *isomorfs* si existeix un isomorfisme entre ells, i es denota $A \cong B$. Quan dos grups són isomorfs tenen exactament la mateixa estructura i propietats, així que bàsicament són el mateix grup amb els elements representats amb símbols diferents.

Un resultat útil sobre homomorfismes és el següent:

Lema 2.1

Si $f : A \rightarrow B$ és un homomorfisme de grups, aleshores $A/\ker f \cong \text{Im } f$.

Dem: Siga $h : A/\ker f \rightarrow \text{Im } f$ amb $h(x + \ker f) = f(x)$. Evidentment, h està ben definida ja que no depèn del representant. En efecte, si $x + \ker f = y + \ker f$, aleshores $x - y \in \ker f$. Així, $f(x) - f(y) = f(x - y) = 0$ i per tant $h(x + \ker f) = f(x) = f(y) = h(y + \ker f)$. A més, també és verifica que és un homomorfisme:

$$\begin{aligned} h((x + \ker f) + (y + \ker f)) &= h((x + y) + \ker f) = f(x + y) = \\ &= f(x) + f(y) = h(x + \ker f) + h(y + \ker f). \end{aligned}$$

Finalment, és injectiu ja que $h(x + \ker f) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f \Rightarrow x + \ker f = 0 + \ker f$ i és suprajectiu ja que $\forall y \in \text{Im } f \exists x \in A / f(x) = y$ i així $h(x + \ker f) = f(x) = y$. Per tant, h és un isomorfisme de grups i $A/\ker f \cong \text{Im } f$. ■

Suma directa

El concepte de suma directa té dues accepcions en el context de la teoria de grups. Les presentem a continuació, i després justificarem per què són, en cert sentit, equivalents.

Definició 2.4

Donats A_1, \dots, A_n grups abelians. La **suma directa** $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ és el conjunt de totes les n -tuples (a_1, \dots, a_n) on $a_i \in A_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Junta a l'operació suma definida per:

$$(a_1, \dots, a_n) + (a'_1, \dots, a'_n) = (a_1 + a'_1, \dots, a_n + a'_n)$$

té estructura de grup abelià.

Definició 2.5

Siguen A i B dos subgrups d'un mateix grup C de manera que $A \cap B = \{0\}$. La **suma directa interna** $A \oplus B$ és el subgrup de C donat per:

$$A \oplus B = \{a + b / a \in A, b \in B\}.$$

Observem que si en aquest segon cas considerem A i B , no com a subgrups de C , sinó com a grups en sí mateixos, podem considerar la suma directa d'ambdós també com en la primera definició. Tanmateix, açò no suposa cap problema ja que els grups resultants d'ambdues definicions són isomorfs. En efecte, podem considerar l'homomorfisme $(a, b) \rightarrow a + b$ que va de la suma directa a la suma directa interna. Aquesta aplicació és un isomorfisme gràcies a que hem exigint que $A \cap B = \{0\}$ (que està ben definida i és suprajectiva és immediat, i la injectivitat es dedueix d'aquesta condició, ja que $a + b = 0 \Rightarrow a = -b \in A \cap B \Rightarrow a = b = 0$).

Grups abelians finitament generats i lliures

Si $n \in \mathbb{Z}$ i a és un element del grup, agafarem el següent conveni:

$$na := \begin{cases} \overset{(n \text{ voltes})}{a + \dots + a} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ \underset{(-n \text{ voltes})}{(-a) + \dots + (-a)} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Anomenarem **ordre** de a al menor natural no nul que verifica $na = 0$, en cas que aquest existisca. En cas contrari, diem que a té **ordre infinit**.

Definició 2.6

Donat $(A, +)$ un grup abelià, direm que és **finitament generat (f.g.)** si $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ (anomenats **generadors**) de manera que qualsevol $a \in A$ es pot escriure com:

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \text{ amb } \lambda_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Si, a més, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, es diu que A és **lliure** i que els seus generadors formen una **base** de A . En eixe cas, n és el **rang** de A .

Notem que la condició exigida per als grups lliures és equivalent a dir que tot element $a \in A$ es pot escriure de manera única com a \mathbb{Z} -combinació lineal dels elements de la base. En efecte, si existiren dues combinacions lineals diferents $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ i $\sum_{i=1}^n \mu_i a_i$ que representaren el mateix element, la seua diferència seria zero, i per tant $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) a_i \Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0$, d'on obtenim que $\lambda_i = \mu_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Dir que un grup és finitament generat és més general que dir que és finit. Evidentment, tot grup finit és finitament generat amb generadors tots els seus elements, però també podem trobar grups infinits finitament generats. Per exemple, \mathbb{Z} és un grup infinit f.g. i, a més, es lliure amb base l'element 1 (o l'element -1).

Així mateix, podem trobar grups finitament generats no lliures, com ara \mathbb{Z}_k amb k qualsevol sencer estrictament positiu, on $k \cdot 1 = 0$ encara que 1 siga un generador i k distint de 0.

Donat un conjunt finit qualsevol, podem definir un grup abelià f.g. i lliure associat de la següent manera:

Definició 2.7

Siga $X = x_1, \dots, x_n$ un conjunt finit qualsevol. El conjunt de totes les sumes formals de la forma $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ amb $\lambda_i \in \mathbb{Z} \forall i \in \{1, \dots, n\}$ té estructura de grup abelià f.g. i lliure amb l'operació:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) x_i$$

i s'anomena **grup abelià lliure sobre X** .

Efectivament, podem comprovar que aquesta definició té sentit. Denotem per x_i la suma formal que té tots els coeficients zero excepte el de x_i , que és 1 (és a dir, $x_i := 0x_1 + \dots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \dots + 0x_n$). Aleshores és evident que el grup resultant és f.g. i lliure considerant la base formada pels elements $\{x_1, \dots, x_n\}$, ja que dues sumes formals es consideren iguals si i només si tenen exactament els mateixos coeficients.

2.2 Cadenes, cicles i vores

A continuació, anem a aplicar aquesta última definició als nostres complexos simplicials:

Definició 2.8

Donat un complex simplicial K , el **grup de p -cadena** $C_p(K)$ és el grup abelià lliure sobre el conjunt dels p -símplexs de K .

Així, si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ són els p -símplexs de K , els elements de $C_p(K)$ seran de la forma $\lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_n \sigma_n$ amb $\lambda_i \in \mathbb{Z} \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Usualment s'omiteixen els p -símplexs amb coeficient zero a l'hora d'escriure una p -cadena. La cadena amb tots els seus coeficients zero és el neutre del grup i, com a tal, es denota senzillament per 0. Altre conveni que s'empra habitualment és denotar per σ_i la cadena que té tots els coeficients zero excepte el de σ_i que és 1, identificant d'aquesta manera el p -símplex de K amb la cadena de $C_p(K)$ corresponent.

L'últim conveni que anem a introduir té a veure amb l'orientació dels símplexs. Recordem que, com hem vist en la secció 1.2, a cada símplex no orientat de dimensió major que 1 li corresponen dos símplexs orientats diferents, i si un d'ells és σ , l'altre es pot representar com $-\sigma$. Tanmateix, només un d'aquests pertany a K (pel comentari sobre orientació de complexos simplicials posterior a la definició 1.5). Així, si en l'expressió d'una p -cadena apareix un p -símplex σ que no pertany a K , però que amb orientació contrària sí, s'entén que aquest terme fa referència al p -símplex $-\sigma$ de K amb el mateix coeficient que té σ però signe contrari. És a dir, $\lambda(-\sigma) = (-\lambda)\sigma$.

D'aquesta manera, tenint en compte els convenis anteriors, donada una permutació imparella $\pi \in \Sigma_{p+1}$, $(v_1, \dots, v_{p+1}) = -(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+1)})$ tant si els considerem com a símplexs orientats com si els vegem com a p -cadena de $C_p(K)$.

Finalment, observem que si K és un complex simplicial de dimensió n , el conjunt de p -símplexs de K és buit $\forall p < 0$ i $\forall p > n$, de manera que per a aquests valors de p , $C_p(K) = 0$.

Notem que les cadenes no tenen per què tenir un sentit geomètric clar. Per exemple, un camí d'un graf es pot expressar com a 1-cadena escrivint-lo com la suma de les arestes per les què passa. Però no totes les 1-cadenes són d'aquest tipus, és a dir, no tenen per què poder-se recórrer com una successió d'arestes adjacents. De fet, inclús l'ordre en què s'escriuen les arestes o 1-símplexs en la cadena és irrellevant.

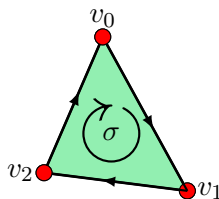


FIGURA 2.1: Representació gràfica de la 2-cadena σ i la seua vora.

El que volem fer a continuació és definir la *vora* d'una p -cadena. Abans de fer-ho, anem a observar el que ocorre amb una 2-cadena per a tindre una idea intuïtiva de a què ens referim. Agafem, per exemple, la formada per un únic 2-símplex $\sigma = (v_0, v_1, v_2)$, que podem observar a la figura 2.1. Voldríem associar com a vora del 2-símplex σ la 1-cadena formada per les seues 1-cares orientades de manera coherent amb l'orientació de σ . Així la vora seria $(v_0, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_0)$ o, per a preservar l'ordre ascendent dels vèrtexs, $(v_0, v_1) - (v_0, v_2) + (v_1, v_2)$.

Notem que com els $C_p(K)$ són grups f.g. i lliures, per a definir un homomorfisme h sobre un d'ells només cal determinar les imatges dels elements de la base (en aquest cas, els p -símplexs de K) i estendre l'aplicació per tal que siga un homomorfisme, és a dir, de manera que $h(\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i h(\sigma_i)$. Per això, anem a generalitzar l'exemple anterior per definir la vora d'un p -símplex qualsevol i, estenent aquesta definició a totes les p -cadenes, obtindrem un homomorfisme entre $C_p(K)$ i $C_{p-1}(K)$:

Definició 2.9

Donat un p -símplex orientat $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ de K amb $p > 0$, la seua **vora** és la $(p-1)$ -cadena:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p)$$

on $(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p)$ representa el $(p-1)$ -símplex que s'obté eliminant el vèrtex v_i de l'expressió de σ . La **vora** d'un 0-símplex qualsevol es defineix com a 0.

El **p -èsim homomorfisme vora** $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ es defineix com:

$$\partial_p \left(\sum \lambda_i \sigma_i \right) = \sum \lambda_i \partial(\sigma_i).$$

Com que no hi ha possibilitat de confusió, ja que cada homomorfisme ∂_p actua sobre cadenes de símplexs de dimensió diferent, a sovint cometrem l'abús de notació de representar-los tots de la mateixa manera, mitjançant el símbol ∂ . Notem també que la definició de l'homomorfisme té sentit inclús quan $p = 0$ ja que havíem definit $C_{-1}(K) = 0$ i en eixe cas ∂ és l'homomorfisme nul.

Com ja hem vist en la secció 2.1, $\ker \partial_p$ i $\text{Im } \partial_p$ són subgrups de $C_p(K)$ i $C_{p-1}(K)$, respectivament. Aquests subgrups seran fonamentals per a definir els grups d'homologia i els denotarem de la següent manera:

Definició 2.10

El **grup de p -cicles de K** és el subgrup de $C_p(K)$ format per les p -cadenes la vora de les quals és zero:

$$Z_p(K) := \ker \partial_p.$$

El **grup de p -voraes de K** és el subgrup de $C_p(K)$ format per les p -cadenes que són vora d'alguna $(p+1)$ -cadena:

$$B_p(K) := \text{Im } \partial_{p+1}.$$

Teorema 2.1

La composició $\partial \circ \partial = \partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$ és sempre l'homomorfisme nul.

Dem: De nou, com que $C_p(K)$ és un grup f.g. i lliure amb base els p -símplexs de K , és prou provar que $\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = 0$ per a tot p -símplex σ de K . A més, el resultat és trivial per a $p < 2$ i $p > n$, així que podem suposar que $2 \leq p \leq n$. Així doncs, prenem $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ un p -símplex qualsevol de K .

$$\begin{aligned} \partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) &= \partial_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \partial_{p-1} \text{ és homomorfisme}}}{=} \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) = \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) + \sum_{j=i+1}^p (-1)^{j-1} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_p) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) + \sum_{i=0}^p \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j-1} (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_p) \end{aligned}$$

Observem que cada $(p-2)$ -cara de σ $(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_p)$ apareix dues vegades en l'expressió, una en cada doble sumatori: en el primer amb signe $(-1)^{i+j}$ i en el segon amb signe $(-1)^{j+i-1}$. Per tant, els signes són oposats i el coeficient resultant de cada $(p-2)$ -símplex és 0. Així, hem comprovat que $\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = 0$ per a tot p -símplex σ de K i $\partial_{p-1} \circ \partial_p \equiv 0$. ■

El que ens diu aquest últim teorema és que $\text{Im } \partial_{p+1} \subset \ker \partial_p$, i per tant, tenim que:

$$B_p(K) \leq Z_p(K) \leq C_p(K)$$

Dit d'una altra manera, tota p -vora és un p -cicle. Tanmateix, el recíproc no és cert: no tot cicle és vora d'alguna cadena.

2.3 Grups d'homologia

Precisament el nostre propòsit és estudiar aquests cicles que no són vora de cap cadena, que intuïtivament són els “forats p -dimensionals” del complex K . Com volem “eliminar” o “fer zero” en $Z_p(K)$ tots aquells cicles que sí son vores (és a dir, que estan en el subgrup $B_p(K)$), la idea és fer un grup quocient tal i com hem vist en la secció 2.1. Seguint aquesta intuïció arribem a la definició principal d'aquest text, la de *grup d'homologia*.

Definició 2.11

Donat un complex simplicial K , el **p -èsim grup d'homologia de K** és el grup quocient:

$$H_p(\mathbf{K}) := Z_p(K)/B_p(K).$$

Donat $z \in Z_p(K)$, l'element $z + B_p(K) \in H_p(K)$ s'anomena **classe d'homologia** del cicle z i es denota per $[z]$. Dos cicles $z_1, z_2 \in Z_p(K)$ que pertanyen a la mateixa classe (és a dir, tals que $z_1 - z_2 \in B_p(K)$) s'anomenen **homòlegs** i aquesta relació es denota $z_1 \sim z_2$.

$H_p(K)$ continua sent un grup f.g. (ja que està generat, per exemple, per les classes dels cicles que generaven $Z_p(K)$) però ja no té per què ser lliure (un d'aquests generadors pot tindre ordre finit). Tanmateix, tot grup abelià finitament generat pot escriure's com a suma directa de dos subgrups: un d'ells lliure i l'altre format pels elements d'ordre finit. Aquesta propietat és fàcil de comprovar, només cal agafar un sistema generador del grup i considerar el subgrup generat pels elements d'ordre infinit d'aquest sistema i el subgrup generat pels elements d'ordre finit del mateix. Aplicant aquest resultat als grups d'homologia, obtenim la següent definició.

Definició 2.12

Si escrivim $H_p(K) = F \oplus T$ amb F lliure i T format només per elements d'ordre finit, anomenem a F **part lliure** i a T **grup de torsió** de $H_p(K)$.

El **nombre de Betti** d'ordre p de K , $\beta_p(\mathbf{K})$, és el rang de la part lliure de $H_p(K)$.

A continuació, veurem alguns resultats interessants que ens donen interpretacions d'alguns grups d'homologia.

Teorema 2.2

Donat un complex simplicial K qualsevol, $H_0(K)$ és un grup abelià lliure amb rang igual al nombre de components connexes² de K .

²Notem que la noció de connexió que emprarem és la que definírem en el capítol anterior, és a dir, dos 0-símplexs estan en la mateixa component connexa si existeix una seqüència de 1-símplexs adjacents que els uneix. És més senzill treballar amb aquest concepte que amb el de connexió de l'espai topològic subjacent $|K|$, i es pot comprovar que ambdós són equivalents en aquest context.

Dem: Començarem per observar que, com que la vora de qualsevol 0-cadena és 0, tenim que $Z_0(K) = C_0(K)$ i, per tant, $H_0(K) = C_0(K)/B_0(K)$. Així, $H_0(K)$ està generat per les classes de tots els 0-símplexs de K .

Ara, si prenem v i w dos 0-símplexs de K , volem provar que $v \sim w \Leftrightarrow v$ i w estan en la mateixa component connexa de K . En efecte, si v i w estan en la mateixa component, existirà una seqüència d'1-símplexs adjacents que unirà els dos vèrtexs. Si orientem aquests 1-símplexs de manera adequada i els sumem obtindrem una 1-cadena amb vora $v - w$ i, per tant, $v - w \in B_0(K)$ i $v \sim w$. Recíprocament, si $v \sim w$, tenim que $v - w \in B_0(K)$ i existeix una cadena $c \in C_1(K) / \partial c = v - w$. Aquesta cadena és la successió d'1-símplexs adjacents que busquem (sabem que són adjacents perquè no apareix cap altre 0-símplex en la vora, i això vol dir que la resta de cares d'1-símplexs de la cadena, en cas d'existir, s'han cancel·lat a parells).

Així, doncs, si triem un 0-símplex de cada component connexa de K , les seues classes continuen formant un sistema generador de $H_0(K)$. Vegem ara que és una base. Suposem que $\{[v_1], \dots, [v_n]\}$ és l'esmentat sistema generador, amb n el nombre de components connexes de K , i considerem $\lambda_1[v_1] + \dots + \lambda_n[v_n] = [\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n] = [0] \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \partial c$ per a algun $c \in C_1(K)$. Podem escriure $c = c^1 + \dots + c^n$ on cada c^i conté els 1-símplexs de c que estan en la component K_i . Com ∂ és un homomorfisme, $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \partial c = \partial c^1 + \dots + \partial c^n$. A més, sabem que ∂c^i només contindrà 0-símplexs en K_i , de manera que necessàriament $\partial c^i = \lambda_i v_i$.

Considerem ara l'homomorfisme $\varepsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ que associa a cada 0-cadena la suma dels seus coeficients. Com la vora de cada 1-símplex està formada per dos 0-símplexs amb coeficients 1 i -1, respectivament, el resultat d'aplicar ε a la vora d'una cadena és sempre 0. Així, $0 = \varepsilon(\partial c^i) = \varepsilon(\lambda_i v_i) = \lambda_i$ i hem comprovat que necessàriament $\lambda_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$. ■

Bàsicament, aquest resultat el que ens indica és que $H_0(K)$ mesura el nombre de components connexes del complex K , i que aquest nombre és precisament $\beta_0(K)$. El següent resultat és menys general, però també relaciona un concepte topològic estudiat en el grau amb els grups d'homologia, en aquest cas, l'orientabilitat de superfícies compactes.

Teorema 2.3

Siga K un complex simplicial que triangula una superfície compacta. Aleshores $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$ si la superfície és orientable i $H_2(K) \cong 0$ si és no orientable.

Dem: Observem que, com estem parlant de superfícies compactes, K no contindrà cap 3-símplex, és a dir, $C_3(K) = 0$ i $B_2(K) = \partial(C_3(K)) = 0$. Així, $H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = Z_2(K)/0 = Z_2(K)$.

Suposem que $|K|$ és orientable. Per simplificar la demostració, suposarem que els 2-símplexs de K estan ja orientats de manera coherent. Considerem un cicle $z \in Z_2(K)$ diferent de 0. Existeix almenys un 2-símplex $t \in K$ que té coeficient $\lambda \neq 0$ en z . Donat qualsevol altre 2-símplex $t' \in K$ podem trobar una seqüència de triangles adjacents que uneixen t i t' . Aquest fet és conseqüència d'una de les condicions que exigim a les superfícies compactes triangulades: que

la família de triangles que contenen un vèrtex qualsevol formava una cadena tancada. Com cada 1-símplex és cara d'exactament dos triangles (altra de les condicions exigides), necessàriament dos triangles consecutius de la seqüència han de tindre el mateix coeficient en z per a que es verifiqui que $\partial z = 0$ (ja que estem suposant que les orientacions dels 2-símplexs són coherents i, per tant, induiran orientacions oposades en l'1-símplex que compartixen). Així, arribem a que t' també té coeficient λ en z . Com ho hem provat per a un $t' \in Z_2(K)$ qualsevol, tots els 2-símplexs de K tenen el mateix coeficient en z i per tant z és un múltiple de la cadena formada per la suma de tots. És a dir, $H_2(K) = Z_2(K)$ és f.g. i lliure de rang 1 i, per tant, isomorf a \mathbb{Z} .

Suposem ara que $H_2(K) \neq 0$ i considerem $z \in Z_2(K)$ distint de zero. Pel mateix raonament que abans, tots els 2-símplexs han de tindre necessàriament el mateix coeficient, a excepció del signe (perquè ara ja no estem suposant que els triangles de K estiguen coherentment orientats). Simplement hem de canviar l'orientació als 2-símplexs que tinguen coeficient negatiu per a trobar una orientació coherent de K , i per tant K és orientable. Açò conclou la demostració. ■

Finalment, $H_1(K)$ es pot relacionar amb el grup fonamental $\pi_1(|K|)$. Recordem que $\pi_1(|K|)$ no era un grup abelià com els que estem tractant al llarg d'aquest text. Per tant, si considerem el **commutador** de $\pi_1(|K|)$ com el mínim subgrup que conté el subconjunt $\{aba^{-1}b^{-1} / a, b \in \pi_1(|K|)\}$, aquest subgrup és no nul. A més, es pot comprovar que té sentit fer el quocient per aquest subgrup³ i al grup resultant se'l denomina **abelianitzat** de $\pi_1(|K|)$. Doncs bé, el resultat conegut com a Teorema de Hurewicz afirma que aquest abelianitzat coincideix amb $H_1(K)$. Una prova d'aquest fet es pot trobar al llibre d'Armstrong ([1]).

A banda d'aquests resultats d'interpretació dels grups d'homologia, anem a presentar un últim, en el qual calcularem els d'un con qualsevol.

Teorema 2.4

Siga CK el con sobre un complex simplicial K amb vèrtex v . Aleshores:

$$H_0(CK) \cong \mathbb{Z} \text{ i } H_p(CK) \cong 0 \quad \forall p > 0.$$

Dem: En primer lloc, observem que CK és connex. En efecte, donat un vèrtex $w \in CK$, $w \neq v$, per com definíem el con sabem que $(w, v) \in CK$. És a dir, tot vèrtex distint de v pot unir-se a ell mitjançant un 1-símplex de CK . Així, podem aplicar el teorema 2.2 per a concloure que $H_0(CK) \cong \mathbb{Z}$.

A continuació, per a cada $p > 0$ definim un homomorfisme $d : C_p(CK) \rightarrow C_{p+1}(CK)$ que

³Notem que en 2.2 només hem definit el grup quocient per a grups abelians. En el cas de grups no abelians cal exigir una condició sobre el subgrup: que siga **normal**. Una de les propietats del commutador és que sempre és normal i, per tant, té sentit fer el quocient.

actua sobre cada p -símplex σ de la següent manera:

$$d(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \text{ és vèrtex de } \sigma \\ (v, v_0, \dots, v_p) & \text{si } \sigma = (v_0, \dots, v_p) \text{ i } v_i \neq v \ \forall i \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$$

Com, efectivament, $d(-\sigma) = -d(\sigma)$, aquesta definició s'estén a un homomorfisme en $C_p(CK)$.

Comprovem ara que $\partial(d(\sigma)) = \sigma - d(\partial\sigma)$ per a tot p -símplex σ . En el cas en què v no és vèrtex de $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ tenim:

$$\partial(d(\sigma)) = \partial(v, v_0, \dots, v_p) = (v_0, \dots, v_p) + \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) = \sigma - d(\partial\sigma)$$

Per altra banda, en el cas en què v és vèrtex de σ , podem suposar, fent una permutació parella, que $\sigma = (v, v_1, \dots, v_p)$. Així:

$$\begin{aligned} \sigma - d(\partial\sigma) &= (v, v_1, \dots, v_p) - d\left((v_1, \dots, v_p) + \sum_{i=1}^p (-1)^i (v, v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p)\right) = \\ &= (v, v_1, \dots, v_p) - (v, v_1, \dots, v_p) = 0 = \partial(0) = \partial(d(\sigma)) \end{aligned}$$

Com d i ∂ són homomorfismes, l'afirmació és certa per a qualsevol cadena en $C_p(CK)$, no només per als p -símplexs. Així, si considerem $z \in Z_p(CK)$, podem prendre $d(z) \in C_{p+1}(CK)$ de manera que $\partial(d(z)) = z - d(\partial z) = z - d(0) = z$ i $z \in B_p(CK)$. Per tant:

$$H_p(CK) = \frac{Z_p(CK)}{B_p(CK)} \cong 0 \quad \forall p > 0.$$

■

2.4 Un exemple: la banda de Möbius

Per a finalitzar aquest capítol calcularem, a mode d'exemple, els grups d'homologia del complex simplicial K de la figura 2.2, que triangula l'espai topològic conegut com a banda de Möbius. Notem que aquesta figura mostra només una representació plana del mateix, per a obtindre el complex simplicial caldria identificar els dos 1-símplexs marcats amb l'etiqueta e_1 , així com les seues vores (formades pels 0-símplexs v_0 i v_1).

Comencem per $H_0(K)$. Com, evidentment, K té una única component connexa, podem aplicar el teorema 2.2 per concloure que es tracta d'un grup abelià lliure de rang 1 i, per tant, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

El cas de $H_1(K)$ no és tan senzill. Primer, hem de determinar el grup $Z_1(K)$. Notem que tant el grup de cadenes $C_p(K)$ com el subgrup de cicles $Z_p(K)$ depenen únicament del p -esquelet del complex K . Per tant, considerar els 1-cicles de K és equivalent a considerar els cicles del seu 1-esquelet, vist com a graf orientat. Així doncs, podem aplicar conceptes coneguts de teoria de grafs. En concret,

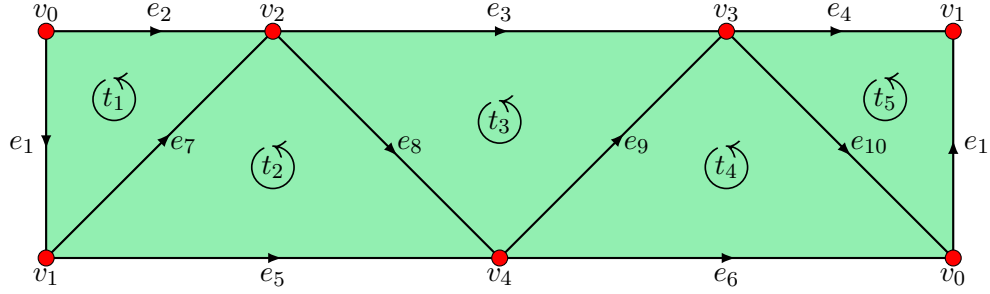


FIGURA 2.2: Representació plana del complex simplicial K que triangula la banda de Möbius.

recordem que un **arbre** era un graf connex que no contenia cap cicle⁴. Donat un graf qualsevol G , anomenàvem **arbre maximal** a un element maximal del conjunt de subgrafs de G que eren arbres, és a dir, un subgraf de G que és un arbre i verifica que si li afegim qualsevol altra aresta de G deixa de ser-ho.

En el nostre cas, un arbre maximal de l'1-esquelet de K podria ser, per exemple, el format per les arestes e_7, e_8, e_9 i e_{10} . Ara, si afegim qualsevol de les arestes e_i restants es formarà un cicle z_i en el subgraf resultant. Tot cicle en l'1-esquelet serà combinació d'aquests "cicles bàsics". Per tant, si considerem els z_i com a 1-cadenes (orientant els seus símplex de manera coherent de manera que e_i tinga coeficient $+1$, per exemple), aquestos elements generen $Z_1(K)$. En el nostre cas:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= e_1 + e_7 + e_8 + e_9 + e_{10} \\
 z_2 &= e_2 + e_8 + e_9 + e_{10} \\
 z_3 &= e_3 - e_9 - e_8 \\
 z_4 &= e_4 + e_7 + e_8 + e_9 \\
 z_5 &= e_5 - e_8 - e_7 \\
 z_6 &= e_6 - e_{10} - e_9
 \end{aligned}$$

Ara, hem de determinar $B_1(K)$. Recordem que aquest subgrup estava generat per les vores dels 2-símplexs de K :

$$\begin{aligned}
 \partial t_1 &= e_1 + e_7 - e_2 = z_1 - z_2 \\
 \partial t_2 &= e_5 - e_8 - e_7 = z_5 \\
 \partial t_3 &= -e_3 + e_8 + e_9 = -z_3 \\
 \partial t_4 &= e_6 - e_{10} - e_9 = z_6 \\
 \partial t_5 &= e_1 - e_4 + e_{10} = z_1 - z_4
 \end{aligned}$$

Així, tenim que $[z_1], \dots, [z_6]$ generen $H_1(K)$ i, com hem de fer zero les classes dels elements de $B_1(K)$, obtenim les següents relacions (una de cadascun dels generadors de $B_1(K)$ anteriors):

⁴El concepte de cicle en grafs es defineix de manera un poc diferent: es tracta d'un camí (una seqüència de vèrtexs adjacents, junt amb les arestes que els uneixen) que comença i acaba en el mateix vèrtex. Tanmateix, és fàcil comprovar que aquesta definició és completament equivalent a la construïda per a complexos simplicials. Només cal considerar la 1-cadena suma de les arestes que formen part del camí.

$$\begin{aligned}
[z_1 - z_2] = 0 &\Rightarrow [z_1] = [z_2] \\
[z_5] &= 0 \\
[-z_3] = 0 &\Rightarrow [z_3] = 0 \\
[z_6] &= 0 \\
[z_1 - z_4] = 0 &\Rightarrow [z_1] = [z_4]
\end{aligned}$$

Per tant, els generadors $[z_3]$, $[z_5]$ i $[z_6]$ es poden llevar perquè són 0. Els tres restants són, de fet, el mateix: $[z_1] = [z_2] = [z_4]$. Així, $H_1(K)$ està generat per un element d'ordre infinit, $[z_1]$, i per tant és isomorf a \mathbb{Z} . Notem que aquest generador és un cicle que “dóna una volta” al voltant de la banda de Möbius. Si considerem qualsevol altre cicle, serà homòleg a un múltiple d'aquest. Per exemple, si considerem l'única “vora” de la banda, representada pel cicle $e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$, podem comprovar que és homòloga a dos vegades el generador:

$$[e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6] = [z_2] + [z_3] + [z_4] + [z_5] + [z_6] = [z_1] + 0 + [z_1] + 0 + 0 = 2[z_1]$$

Finalment, anem a calcular $H_2(K)$. Com que K no conté cap 3-símplex, $B_2(K) = 0$, així que $H_2(K) \cong Z_2(K)$. Ara, considerem $c \in C_2(K)$ de manera que $\partial c = 0$. Com c és una 2-cadena, té la forma $c = \sum \lambda_i t_i$, i com ∂ és un homomorfisme, tenim:

$$0 = \partial c = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \partial t_i$$

Ara bé, el 2-símplex e_2 només apareix en ∂t_1 , així que, per a que tinga coeficient zero, l'única opció és que $\lambda_1 = 0$. El mateix passa amb e_5 en ∂t_2 , e_3 en ∂t_3 , e_6 en ∂t_4 i e_4 en ∂t_5 . Concloem doncs que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ i, per tant, $c = 0$. Així, l'únic 2-cicle de K és 0 i $H_2(K) \cong Z_2(K) \cong 0$.

Capítol 3

Invariància per homotopia

Al final de l'últim capítol hem calculat els grups d'homologia d'un complex simplicial que triangulava la banda de Möbius. Tanmateix, podem dir que eixos són els grups d'homologia de la banda de Möbius? Recordem que un mateix espai topològic pot triangular-se de moltes maneres, i ningú ens ha assegurat (de moment) que els complexos simplicials d'aquestes triangulacions compartisquen els grups d'homologia d'aquella que triem. L'objectiu principal d'aquest capítol és precisament eixe: garantir que els grups d'homologia són un invariant topològic, és a dir, es conserven per homeomorfismes.

3.1 Aplicacions simplicials

Definició 3.1

Siguen K, L dos complexos simplicials. Una aplicació $s : |K| \rightarrow |L|$ es diu **simplicial** si duu cada símplex de K linealment a un símplex de L . És a dir, verifica:

(1) $\sigma \in K \Rightarrow s(\sigma) \in L$ (la imatge de tot símplex és un símplex)

(2) $x \in (v_0, \dots, v_k), x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \Rightarrow s(x) = \sum_{i=0}^k \lambda_i s(v_i)$ (s és "lineal" sobre cada símplex)

Notem que s ha de dur símplexs a símplexs, però no necessàriament de la mateixa dimensió. Això és perquè, donat $(v_0, \dots, v_k) \in K$, pot passar que $s(v_i) = s(v_j)$ amb $i \neq j$ i per tant, la dimensió de $s(v_0, \dots, v_k)$ ser menor que la del símplex de partida. Un exemple extrem és l'aplicació constant que associa a tot 0-símplex de K (i, per extensió mitjançant la segona condició, a tot punt de K) el mateix 0-símplex de L .

El que no pot passar mai és que $s(\sigma)$ tinga dimensió més gran que σ . Açò és degut a que, una vegada donades les imatges dels vèrtexs de σ , la imatge de la resta de punts del símplex queda determinada per linealitat, de manera que cap d'elles pot ser un punt afíndent independent als anteriors, fet que ens permetria tindre un símplex de dimensió major.

Per altra banda, és clar que una aplicació simplicial és sempre contínua, ja que, per l'expressió de la condició (2), és contínua sobre cada símplex, i els símplexs formen una partició per tancats de $|K|$.

Considerem ara una aplicació (no necessàriament simplicial) $f : |K| \rightarrow |L|$. Donat un punt $x \in |K|$, $f(x)$ es trobarà en l'interior¹ d'un únic símplex de L . A aquest símplex se l'anomena el **portador** de $f(x)$. Emprant aquest concepte, podem "aproximar" f mitjançant una aplicació simplicial de la següent manera:

Definició 3.2

Una aplicació simplicial $s : |K| \rightarrow |L|$ és una **aproximació simplicial** de $f : |K| \rightarrow |L|$ si $s(x)$ pertany al portador de $f(x) \forall x \in |K|$.

Però, en quin sentit és açò una aproximació? Doncs en el sentit de la homotopia: si s és una aproximació simplicial de f , f i s són homotòpiques. En efecte, només cal considerar la homotopia:

$$F : |K| \times [0, 1] \longrightarrow |L|$$

$$(x, t) \longmapsto (1 - t)s(x) + tf(x)$$

Aquesta aplicació està ben definida perquè donat $x \in |K|$, sabem que $f(x)$ i $s(x)$ pertanyen al portador de $f(x)$, i com aquest és convex (per ser un símplex), el segment entre ambdós punts pertany també a dit símplex i, per tant, a $|L|$.

Tanmateix, no tota aplicació entre poliedres de complexos simplicials admet una aproximació simplicial. Vegem un exemple:

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto x^2$$

Si considerem aquesta aplicació amb els complexos simplicials de la figura 3.1, que tenen per espai subjacent l'interval $[0, 1]$, no es pot trobar cap aproximació simplicial de f .

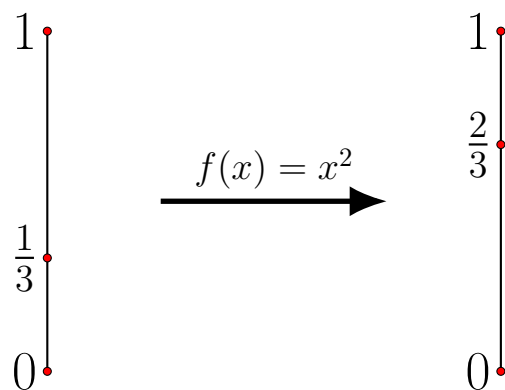


FIGURA 3.1: *L'aplicació f no admet aproximació simplicial.*

Anem a comprovar-ho. Suposem que s és una aproximació simplicial de f . En primer lloc, $f(0) = 0$ i, per tant, el portador de $f(0)$ és el 0-símplex 0. Així, necessàriament $s(0) = 0$. El mateix passa amb

¹Recordem que quan parlem de l'interior d'un símplex no ens referim al seu interior topològic, sinó als punts que no formen part de la seua vora. Així, per exemple, l'interior d'un 0-símplex és ell mateix, mentre que l'interior topològic en \mathbb{R}^N seria el buit si $N > 0$.

$f(1) = 1$. El seu portador és el 0-símplex 1 i, per tant, cal que $s(1) = 1$. Ara, observem el que succeeix amb el 0-símplex $\frac{1}{3}$. La seua imatge és $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$, que pertany a l'1-símplex $(0, \frac{2}{3})$. Per tant, $s(\frac{1}{3})$ ha de ser un dels 0-símplexs de la seua vora: 0 o $\frac{2}{3}$.

Suposem que $s(\frac{1}{3}) = 0$. Aleshores, com que s és una aplicació simplicial tenim que, per la condició (2), $s(\frac{1}{3}, 1) = (0, 1)$. Però açò contradiu la condició (1), ja que $(0, 1) \notin L$. Així, tenim que $s(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ i, com que hem determinat la imatge de tots els vèrtexs, tenim unívocament determinada l'aplicació simplicial s .

Considerem ara el punt $\frac{1}{2}$. El portador de la seua imatge per f és l'1-símplex $(0, \frac{2}{3})$, ja que $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Però $s(\frac{1}{2}) = s(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} \cdot s(1) + \frac{3}{4} \cdot s(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \notin (0, \frac{2}{3})$. Açò és una contradicció amb el fet que s siga una aproximació simplicial de f .

Açò ens presenta un problema evident, ja que donada una aplicació qualsevol, no podem assegurar que existisca una aproximació simplicial de la mateixa per a les estructures simplicials triades dels espais d'eixida i arribada. Per a tractar d'esmenar aquest problema farem una lleugera modificació en l'estructura simplicial del primer espai.

3.2 Subdivisions baricèntriques i aproximacions simplicials

Definició 3.3

El **baricentre** d'un n -símplex $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$ és el punt $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1}(v_0 + \dots + v_n) \in \sigma$.

Donat un complex simplicial K , la **primera subdivisió baricèntrica** de K , que denotem per K^1 , és el complex simplicial resultant de substituir, en ordre de dimensió creixent, cada símplex $\sigma \in K$ pel con sobre la seua vora amb vèrtex el seu baricentre $\hat{\sigma}$. Si repetim el procés sobre K^1 obtenim la **segona subdivisió baricèntrica** K^2 i així successivament. D'aquesta manera podem definir la **m -ésima subdivisió baricèntrica** de manera inductiva com $K^m := (K^{m-1})^1$.

Per il·lustrar millor aquesta idea, en la figura 3.2 tenim un exemple d'obtenció de la primera subdivisió baricèntrica pas a pas. La idea és començar subdividint els símplexs de dimensió menor i repetir el procés en cada dimensió.

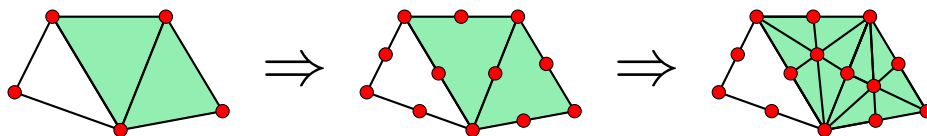


FIGURA 3.2: Procés d'obtenció de la primera subdivisió baricèntrica d'un complex simplicial de dimensió 2. En el pas n es substitueixen els símplexs de dimensió n pels cons corresponent.

Observem que podríem considerar el "pas zero" on es substitueixen els 0-símplexs pels cons de la seua vora sobre el baricentre. Notem, però, que la vora d'un 0-símplex és sempre zero i el seu baricentre ell mateix, raó per la qual el con resultant és el propi 0-símplex. Així, aquest pas inicial ens deixa el complex inalterat. A continuació, en el primer pas es subdivideixen tots els 1-símplexs del complex pel seu punt mig. Açò és perquè, per definició, el baricentre d'un 1-símplex és el punt mig del segment

entre els seus vèrtexs. Per tant, el con estarà format per dos 1-símplexs que tenen per vèrtexs aquest punt mig i un dels extrems de l'1-símplex original. En el segon pas, subdividim cada 2-símplex en sis afegint el baricentre del triangle com a vèrtex a tots els símplexs que tenim ara en la vora: cada 0-símplex ens donarà lloc a un 1-símplex i cada 1-símplex a un 2-símplex. Com la dimensió del complex d'aquest exemple es 2, el procés acaba en aquest pas, però en un cas més general continuaria fins que arribàrem als símplexs de major dimensió.

Pareix prou evident que, en efecte, aquest procés només “subdivideix” el complex simplicial, deixant intacte el seu espai subjacent. En efecte, es pot comprovar per inducció sobre el nombre de símplexs de K que K^1 verifica les condicions per a ser un complex simplicial i, a més, $|K| = |K^1|$. Una prova detallada d'aquest fet es pot trobar en el lema 6.4 de [1].

Tanmateix, quin és l'interès de considerar aquestes subdivisions del complex inicial? La idea és que, tot i que ara tenim més símplexs en el complex, aquestos són “més menuts”. Formalitzarem aquesta idea mitjançant els següents conceptes.

Definició 3.4

Definim el **diàmetre** d'un símplex σ com el suprem de les distàncies entre punts de σ , és a dir, **diam** $\sigma = \sup_{x,y \in \sigma} d(x,y)$ on d és la mètrica de l'espai ambient \mathbb{R}^N .

La **mallà** d'un complex simplicial K és el màxim dels diàmetres dels seus símplexs, i es representa per $\mu(K)$.

Lema 3.1

Siga K un complex simplicial de dimensió n . Aleshores:

$$\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K).$$

Dem:

Notem que dos baricentres $\hat{\sigma}_1$ i $\hat{\sigma}_2$ són vèrtexs d'un mateix símplex de K^1 si i només si $\sigma_1 < \sigma_2$ o $\sigma_2 < \sigma_1$ (és a dir, si un dels símplexs de K dels quals són baricentres és cara de l'altre). Açò és conseqüència immediata del fet que els símplexs de K^1 es generen afegint un baricentre $\hat{\sigma}$ com a vèrtex a un símplex de la vora de σ .

Observem ara que el diàmetre d'un símplex és la longitud del seu costat més llarg (perquè és un subconjunt convex i tancat, i per tant el suprem de les distàncies s'abasta entre dos dels seus vèrtexs). Així, $\mu(K^1)$ també serà la longitud de l'1-símplex més llarg de K^1 .

Prenem, doncs, un 1-símplex qualsevol e de K^1 i considerem els seus vèrtexs $\hat{\sigma}_1$ i $\hat{\sigma}_2$, amb $\sigma_2 < \sigma_1$. Per tant, e es troba dins de $\sigma_1 = (x_0, \dots, x_k)$ i un dels extrems és el seu baricentre.

$$\|\hat{\sigma}_1 - x_0\| = \left\| \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=0}^k x_i \right) - x_0 \right\| \underset{x_0 = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x_0}{=} \frac{1}{k+1} \left\| \sum_{i=1}^k (x_i - x_0) \right\| \leq \frac{k}{k+1} \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i - x_0\|$$

En aquest raonament es pot substituir x_0 per qualsevol altre vèrtex de σ_1 , de manera que tenim que $\|\hat{\sigma}_1 - x_i\| \leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma_1$ per a tot $0 \leq i \leq k$. Si considerem qualsevol altre punt de σ_1 , $\sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$ amb $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$:

$$\left\| \hat{\sigma}_1 - \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i \right\| \underset{\hat{\sigma}_1 = (\sum_{i=0}^k \lambda_i) \hat{\sigma}_1}{=} \left\| \sum_{i=0}^k \lambda_i (\hat{\sigma}_1 - x_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^k \lambda_i \|\hat{\sigma}_1 - x_i\| \leq \sum_{i=0}^k \lambda_i \left(\frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma_1 \right) = \frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma_1$$

Així, hem provat que la distància de qualsevol punt de σ_1 al seu baricentre és menor que $\frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma_1$. Per tant:

$$\text{diam } e \leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma_1 \leq \frac{n}{n+1} \text{diam } \sigma_1 \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$$

i d'ací concloem que $\mu(K^1) \leq \frac{n}{n+1} \mu(K)$. ■

Ara que ja hem examinat les propietats bàsiques de les subdivisions baricèntriques, podem emprar aquest nou concepte per a garantir l'existència d'una aproximació simplicial d'una aplicació contínua qualsevol $f : |K| \rightarrow |L|$, només subdividint el complex d'eixida. Observem que aquesta operació no altera la aplicació f , ja que $|K| = |K^m|$. Per a provar aquest resultat, conegut com a *Teorema d'aproximació simplicial*, farem ús d'un parell de lemes.

Definició 3.5

Siga K un complex simplicial i $v \in K$ un 0-símplex, es defineix la **estrella oberta** de v en K i es denota per $\text{star}(v, K)$ a la unió dels interiors dels símplexs de K que tenen a v com a vèrtex.

Lema 3.2

Donats $v_0, \dots, v_k \in K$, aquests són els vèrtexs d'un k -símplex de K si i només si la intersecció de les seues estrelles obertes és no buida.

Dem: Si v_0, \dots, v_k són els vèrtexs d'un k -símplex $\sigma \in K$, aleshores l'interior de σ pertany a $\text{star}(v_i, K) \forall i \in \{0, \dots, k\}$ i, per tant, a la intersecció de totes elles.

Recíprocament, si aquesta intersecció és no buida, podem trobar $x \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(v_i, K)$. Considerem, doncs, el portador de x , és a dir, el símplex $\sigma \in K$ que conté x al seu interior. Per definició d'estrella oberta, v_i ha de ser un vèrtex de $\sigma \forall i \in \{0, \dots, k\}$ i, així, el símplex engendrat pels vèrtexs v_0, \dots, v_k és una k -cara de σ . ■

Lema 3.3

Siga X un espai mètric compacte i \mathcal{F} un recobriment per oberts de X . Aleshores, existeix un nombre real $\delta > 0$ de manera que cada subconjunt de X de diàmetre menor que δ està contingut en un element de \mathcal{F} .

Dem:

Provarem el resultat per reducció a l'absurde. Suposem que podem trobar A_1, A_2, A_3, \dots una seqüència de subconjunts de X , cap d'ells contingut en cap element de \mathcal{F} , de manera que els seus diàmetres tendeixen a zero. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ podem triar un punt $x_n \in A_n$. Aleshores, o bé la successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ conté només un nombre finit de punts, i en eixe cas almenys un d'ells es repeteix infinites vegades; o bé conté infinits punts, i aleshores la successió té límit per ser X un espai mètric compacte (i per tant complet). Anomenem p al límit de la successió o a un punt que es repeteix infinites vegades, i triem un element $U \in \mathcal{F}$ que el continga. Agafem també un $\varepsilon > 0$ de manera que $B(p, \varepsilon) \subseteq U$.

Aleshores podem trobar un $N \in \mathbb{N}$ suficientment gran per a que el diàmetre d' A_N siga menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ i $x_N \in B(p, \frac{\varepsilon}{2})$. Si p és el límit de la successió, açò és obvi ja que tant el diàmetre dels A_n com la distància dels x_n a p tendeixen a zero quan la n creix. Quan p és un punt que es repeteix infinites vegades, només hem de triar N de manera que $x_N = p$ i es verifiqui la condició sobre el diàmetre.

Així, tenim que $d(x_N, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $d(x, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in A_N$. Per tant, $d(x, p) \leq d(x, x_N) + d(x_N, p) < \varepsilon \forall x \in A_N$. Això implica que $A_N \subseteq B(p, \varepsilon) \subseteq U$, contradint la nostra suposició inicial. ■

Al nombre real $\delta > 0$ del lema anterior se l'anomena *nombre de Lebesgue* del recobriment \mathcal{F} .

Teorema 3.1: Teorema d'Aproximació Simplicial

Si $f : |K| \rightarrow |L|$ és una aplicació contínua entre els poliedres de dos complexos simplicials K i L , podem trobar $m \in \mathbb{N}$ tal que existeix $s : |K^m| \rightarrow |L|$ aproximació simplicial de $f : |K^m| \rightarrow |L|$.

Dem:

Considerarem primer el cas particular en què $\forall u \in K \exists v \in L / f(\text{star}(u, K)) \subseteq \text{star}(v, L)$. En aquest cas, no cal subdividir cap vegada el complex K , és a dir, prenem $m = 0$. Definim s de manera que a cada vèrtex $u \in K$ li associa un $v \in L$ que verifica la condició anterior.

Pel lema 3.2 tenim que, si u_0, \dots, u_k són els vèrtexs d'un k -simplex de K , $\bigcap_{i=0}^k \text{star}(u_i, K) \neq \emptyset$.

Per tant:

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^k f(\text{star}(u_i, K)) \subseteq \bigcap_{i=0}^k \text{star}(s(u_i), L)$$

i de nou podem aplicar el lema per a afirmar que $s(u_0), \dots, s(u_k)$ són els vèrtexs d'un k -símplex de L . D'aquesta manera, podem estendre s de manera lineal sobre cada símplex de K .

Comprovem ara que, en efecte, l'aplicació s que acabem de definir és una aproximació simplicial de f . Siga, doncs, un punt $x \in |K|$ i (u_0, \dots, u_k) l'únic símplex que conté x al seu interior. Aleshores:

$$x \in \bigcap_{i=0}^k \text{star}(u_i, K) \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^k f(\text{star}(u_i, K)) \subseteq \bigcap_{i=0}^k \text{star}(s(u_i), K)$$

Això vol dir que el portador de $f(x)$ té els 0-símplexs $s(u_0), \dots, s(u_k)$ com a vèrtexs. D'aquesta manera, com que $s(x) \in s(u_0, \dots, u_k) = (s(u_0), \dots, s(u_k))$ i aquest últim símplex és una k -cara del portador de $f(x)$, acabem de comprovar que, en efecte, s és aproximació simplicial de f .

Passem ara al cas general. La idea és substituir K per una subdivisió baricèntrica adient de manera que es verifiqui la inclusió exigida en el cas anterior.

És clar que les estrelles obertes dels vèrtexs de L formen un recobriment per oberts de $|L|$ (pel fet que tot punt de $|L|$ es troba a l'interior d'algun símplex, i aquest interior estarà contingut en les estrelles obertes dels seus vèrtexs). Per ser f contínua, les imatges inverses per f d'aquestes estrelles obertes també formen un recobriment per oberts de $|K|$. Ara, com el poliedre d'un complex simplicial és un subconjunt tancat i fitat de \mathbb{R}^N , és un espai mètric compacte i podem aplicar el lema 3.3. Així, podem considerar δ el nombre de Lebesgue d'aquest recobriment de $|K|$.

Ara, pel lema 3.1 tenim que $\mu(K^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, i per tant podem triar $m \in \mathbb{N}$ de manera que $\mu(K^m) < \frac{\delta}{2}$. Així, donat un vèrtex $u \in K^m$, el diàmetre de la seua estrella oberta és menor que δ (ja que és, com a molt, dos vegades el diàmetre del major símplex) i, per tant, està inclòs en un dels oberts del recobriment. És a dir, existeix $v \in L$ de manera que $\text{star}(u, K^m) \subseteq f^{-1}(\text{star}(v, L))$. Açò implica que $f(\text{star}(u, K^m)) \subseteq \text{star}(v, L)$ i, com se satisfà la condició del primer cas, podem construir una aproximació simplicial tal i com hem detallat abans. ■

En el cas de l'aplicació f presentada en la secció anterior, cal considerar la segona subdivisió baricèntrica de K per a poder trobar una aproximació simplicial. L'aproximació en qüestió és l'aplicació s tal que $s(0) = s(\frac{1}{12}) = s(\frac{1}{6}) = s(\frac{1}{4}) = s(\frac{1}{3}) = s(\frac{1}{2}) = 0$, $s(\frac{2}{3}) = s(\frac{5}{6}) = \frac{2}{3}$, $s(1) = 1$ i s'estén linealment sobre els 1-símplexs de K^2 . A la figura 3.3 representem els complexos simplicials que intervenen per facilitar la visualització.

3.3 Homomorfismes induïts

En aquesta secció, donada una aplicació simplicial $s : |K| \rightarrow |L|$, començarem per induir un homomorfisme s_p entre els grups de cadenes $C_p(K)$ i $C_p(L) \forall p \in \mathbb{N}$. Recordem que, com ja hem vist, per a definir un homomorfisme sobre un grup de p -cadenes només cal especificar la imatge de cada p -símplex, ja que aquestos formen una base.

Com que s és una aplicació simplicial, recordem que la imatge de cada p -símplex $\sigma \in K$ és també

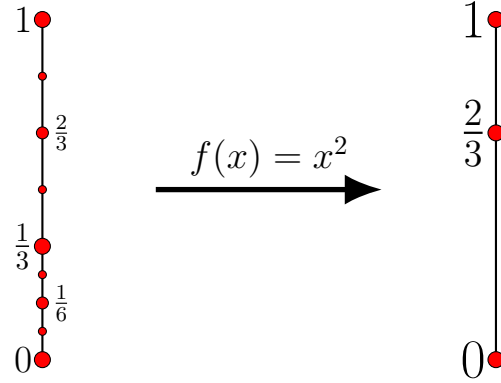


FIGURA 3.3: L 'aplicació f admet aproximació simplicial si substituïm K per la seua segona subdivisió baricèntrica.

un símplex de L , però no necessàriament de dimensió p . En cas que dos o més vèrtexs de σ tinguen la mateixa imatge, el símplex de L resultant és de dimensió estrictament menor que p (i per tant no pertany a $C_p(L)$). Així, per a definir el nostre homomorfisme induït haurem de considerar dos casos:

$$s_p(v_0, \dots, v_p) := \begin{cases} (s(v_0), \dots, s(v_p)) & \text{si } s(v_i) \neq s(v_j) \forall i \neq j \\ 0 & \text{si } s(v_i) = s(v_j) \text{ per a algun } i \neq j \end{cases}$$

És immediat que es verifica que $s_p(-\sigma) = -s_p(\sigma)$, així que efectivament podem estendre aquesta definició a un homomorfisme $s_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$. Anem ara a comprovar que aquests homomorfismes es comporten bé respecte a l'operador vora.

Lema 3.4

$\partial \circ s_p = s_{p-1} \circ \partial$, és a dir, el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{array}{ccc} C_p(K) & \xrightarrow{s_p} & C_p(L) \\ \downarrow \partial & \circlearrowleft & \downarrow \partial \\ C_p(K) & \xrightarrow{s_{p-1}} & C_p(L) \end{array}$$

Dem: Com sempre, comprovarem que el resultat es verifica que a qualsevol p -símplex $\sigma = (v_0, \dots, v_p) \in K$. Suposem, en primer lloc, que $s(v_i) \neq s(v_j) \forall i \neq j$. En eixe cas, tenim:

$$(s_{p-1} \circ \partial)(\sigma) = s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i s_{p-1}(v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p) =$$

$$= \sum_{i=0}^p (-1)^i \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_i)}, \dots, s(v_p) \right) = \partial \left(s(v_0), \dots, s(v_p) \right) = (\partial \circ s_p)(\sigma)$$

Considerem ara el cas en què $\exists j < k$ tal que $s(v_j) = s(v_k)$. En aquest cas, per definició, $s_p(\sigma) = 0$ i $(\partial \circ s_p)(\sigma) = 0$. Per altra banda,

$$(s_{p-1} \circ \partial)(\sigma) = s_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p) \right) = \sum_{i=0}^p (-1)^i s_{p-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p)$$

com en el cas anterior. Tanmateix, sempre que $i \neq j, k$, $(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p)$ continua tenint dos vèrtexs amb la mateixa imatge per s i, per tant, $s_{p-1}(v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p) = 0$. Així:

$$(s_{p-1} \circ \partial)(\sigma) = (-1)^j \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_j)}, \dots, s(v_p) \right) + (-1)^k \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_p) \right)$$

Ara bé, els dos símplexs de la cadena anterior estan formats pels mateixos vèrtexs, però ordenats de manera diferent. Per a transformar el primer en el segon, només cal moure el vèrtex $s(v_k)$ (que es troba en la posició $k-1$) a la posició j mitjançant $k-j-1$ transposicions. Com una transposició és una permutació imparella, cadascuna d'elles canvia l'orientació (i per tant el signe) del símplex en la cadena. D'aquesta manera:

$$\begin{aligned} (s_{p-1} \circ \partial)(\sigma) &= (-1)^j (-1)^{k-j-1} \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_p) \right) + (-1)^k \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_p) \right) = \\ &= (-1)^{k-1} \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_p) \right) + (-1)^k \left(s(v_0), \dots, \widehat{s(v_k)}, \dots, s(v_p) \right) = 0 \end{aligned}$$

Així, també en aquest cas $(s_{p-1} \circ \partial)(\sigma) = (\partial \circ s_p)(\sigma)$. ■

A continuació veurem que, gràcies a la propietat anterior, aquestes aplicacions indueixen homomorfismes entre els grups d'homologia de K i L de la següent manera:

$$\begin{aligned} s_{p*} : H_p(K) &\longrightarrow H_p(L) \\ [z] &\longmapsto [s_p(z)] \end{aligned}$$

Per comprovar que aquest homomorfisme està ben definit només hem de comprovar que s_p duu cicles a cicles i vores a vores. En efecte, donat $z \in Z_p(K)$, $\partial z = 0$ per definició. Aplicant el lema, $\partial(s_p(z)) = s_{p-1}(\partial z) = s_{p-1}(0) = 0$ i $s_p(z) \in Z_p(L)$. De la mateixa manera, si $b \in B_p(K)$ existeix $c \in C_{p+1}(K)$ de manera que $b = \partial c$. Si prenem $s_{p+1}(c) \in C_{p+1}(L)$, $\partial(s_{p+1}(c)) = s_{p+1}(\partial c) = s_p(b)$ i $s_p(b) \in B_p(L)$.

De fet, aquest mateix raonament es pot fer amb qualsevol conjunt d'homomorfismes que verifiqui la propietat del lema 3.4. Per això, presentem la següent definició per a referir-nos a aquest tipus d'estructures de manera general.

Definició 3.6

Anomenem *complex de cadenes de K* i representem per $C(K)$ a la col·lecció de grups i homomorfismes:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Una família d'homomorfismes $\phi_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ que verifica $\partial_p \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p \forall p \in \mathbb{N}$ s'anomena *aplicació de cadenes* i es denota per $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$.

Així, tota aplicació de cadenes $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$ indueix homomorfismes $\phi_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(L) \forall p \in \mathbb{N}$ definits mitjançant $\phi_{p*}([z]) = [\phi_p(z)]$. El següent lema presenta una propietat d'aquests homomorfismes induïts que ens serà útil més tard.

Lema 3.5

Siuen $\phi : C(K) \rightarrow C(L)$ i $\psi : C(L) \rightarrow C(M)$ aplicacions de cadenes. Aleshores $\psi \circ \phi : C(K) \rightarrow C(M)$ és una aplicació de cadenes i $(\psi \circ \phi)_{p} = \psi_{p*} \circ \phi_{p*} \forall p \in \mathbb{N}$.*

Dem: Per comprovar que $\psi \circ \phi$ és una aplicació de cadenes, només cal emprar que $\partial_p \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p$ i $\partial_p \circ \psi_p = \psi_{p-1} \circ \partial_p \forall p \in \mathbb{N}$ junt amb l'associativitat de la composició d'aplicacions per a provar:

$$\begin{aligned} \partial_p \circ (\psi \circ \phi)_p &= \partial_p \circ (\psi_p \circ \phi_p) = (\partial_p \circ \psi_p) \circ \phi_p = (\psi_{p-1} \circ \partial_p) \circ \phi_p = \psi_{p-1} \circ (\partial_p \circ \phi_p) = \\ &= \psi_{p-1} \circ (\phi_{p-1} \circ \partial_p) = (\psi_{p-1} \circ \phi_{p-1}) \circ \partial_p = (\psi \circ \phi)_{p-1} \circ \partial_p \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

La segona afirmació és conseqüència directa de com es defineixen els homomorfismes induïts. En efecte, per a tot $p \in \mathbb{N}$, donat $[z] \in H_p(K)$:

$$(\psi_{p*} \circ \phi_{p*})([z]) = \psi_{p*}(\phi_{p*}([z])) = \psi_{p*}([\phi_p(z)]) = [\psi_p(\phi_p(z))] = [(\psi \circ \phi)_p(z)] = (\psi \circ \phi)_{p*}([z])$$

Notem que totes les expressions tenen sentit gràcies a que una aplicació de cadenes sempre duu cicles a cicles i vores a vores, pel raonament anterior a la definició. ■

Repassem el progrés que hem fet fins al moment en aquest capítol. Donada una aplicació qualsevol entre els espais subjacents de dos complexos simplicials K i L , hem aconseguit aproximar-la per una aplicació simplicial. Aquesta aplicació induïa homomorfismes sobre els grups de cadenes que, al seu torn, induïen homomorfismes sobre els grups d'homologia. Tanmateix, pel camí hem hagut de substituir K per una subdivisió baricèntrica del mateix, K^m , de manera que els homomorfismes que hem induït no són, en principi, entre els grups de K i L , sinó de K^m i L .

Així, el nostre pròxim objectiu serà provar que els grups d'homologia de K i K^m són, de fet, els mateixos, de manera que el canvi que hem hagut de fer no representa cap inconvenient. Per tal de fer-ho, dividirem el procés d'obtenció d'una subdivisió baricèntrica en operacions més senzilles anomenades *subdivisions estrel·lars*.

3.4 Invariància per subdivisions estel·lars

Definició 3.7

Siga K un complex simplicial i σ un símplex de K . El complex simplicial K' obtingut per *subdivisió estel·lar* de K en σ es construeix de la següent manera:

- Els símplexs de K que no tenen a σ com a cara es mantenen inalterats.
- Per a cada símplex $\tau \in K$ que té a σ com a cara, considerem L el subcomplex de la vora de τ format pels símplexs que no tenen a σ com a cara, i substituïm τ pel con sobre L amb vèrtex el baricentre $\hat{\sigma}$.

Ara, si prenem un complex simplicial K i anem aplicant subdivisions estel·lars en tots els seus símplexs, en ordre de dimensió decreixent, obtenim la primera subdivisió baricèntrica. L'ordre en que subdividim els símplexs dins d'una mateixa dimensió no importa. Per suposat, repetint el procés podem obtindre qualsevol subdivisió baricèntrica K^m .

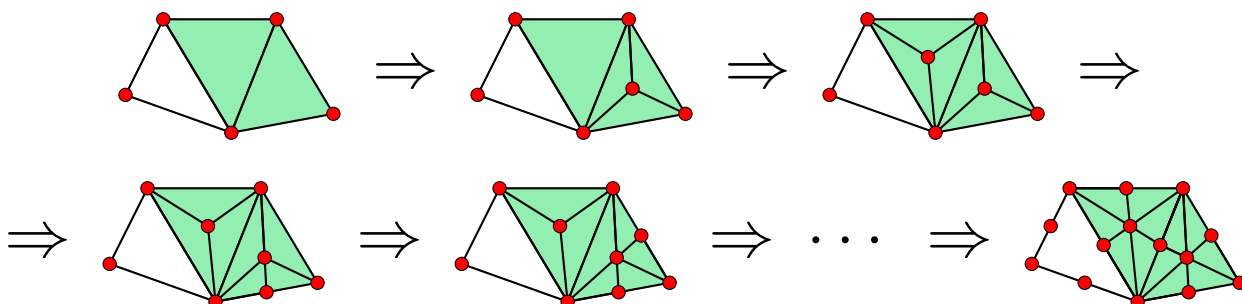


FIGURA 3.4: Procés d'obtenció de la primera subdivisió baricèntrica d'un complex simplicial de dimensió 2 mitjançant subdivisions estel·lars successives.

En la figura 3.4 podem observar aquest procediment pas a pas, aplicat al mateix exemple que havíem emprat per il·lustrar la definició de subdivisió baricèntrica en la figura 3.2. D'aquesta manera podem observar que, en efecte, els complexos resultants són iguals. Per què, doncs, introduïm aquest nou mètode? La resposta és que les "operacions senzilles" descrites en la definició no donen, en general, un complex simplicial com a resultat. Per exemple, el diagrama del mig en la figura 3.2 no representa un complex simplicial. Per tant, hem de fer tots els passos de colp per a que el procés tinga sentit.

En canvi, cada subdivisió estel·lar ens dóna un complex simplicial perfectament definit, de manera que podem veure la subdivisió baricèntrica com una aplicació successiva d'aquest tipus d'operació. D'aquesta manera, si demostrem que els grups d'homologia són invariants per subdivisió estel·lar, també ho seran per subdivisió baricèntrica.

Teorema 3.2

Siga K un complex simplicial i $\sigma \in K$. Si K' s'obté per subdivisió estel·lar de K en σ , aleshores $H_p(K) \cong H_p(K') \forall p \in \mathbb{N}$.

Dem: La idea de la demostració és construir una aplicació de cadenes $\chi : C(K) \rightarrow C(K')$ de manera que els homomorfismes induïts sobre els grups d'homologia siguin isomorfismes. Com sempre, només caldrà especificar la imatge de cada símplex, comprovant que $\chi_p(-\sigma) = -\chi_p(\sigma)$, per a tindre perfectament determinat cada homomorfisme.

Siga $\sigma = (v_0, \dots, v_k)$ i v el baricentre de σ , definim:

$$\chi_p(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{si } \sigma \text{ no és cara de } \tau \\ \sum_{i=0}^k (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) & \text{si } \tau = (v_0, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) \end{cases}$$

Observem que si σ és cara de τ , sabem que sempre podem escriure τ com $(v_0, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p)$ fent una permutació parella dels vèrtexs. En aquest cas, la imatge per χ de τ consisteix en sumar tots els símplexs resultants de substituir en τ cadascun dels vèrtexs de σ pel baricentre v . Aquests són exactament els p -símplexs en els que queda dividit τ després de la subdivisió estel·lar, amb les orientacions induïdes per la de τ .

Per altra banda, χ_p deixa inalterats els símplexs que no tenen a σ com a cara, i per tant $\chi_p = \text{id}$ sempre que $p < k$.

Provarem ara que χ és una aplicació de cadenes, és a dir, que $(\partial_p \circ \chi_p)(\tau) = (\chi_{p-1} \circ \partial_p)(\tau)$ per a tot p -símplex $\tau \in K$ i per a tot $p \in \mathbb{N}$. El resultat és evident si σ no és cara de τ , ja que en aquest cas tampoc és cara de cap dels símplexs de la seua vora, i $(\partial_p \circ \chi_p)(\tau) = \partial_p(\tau) = (\chi_{p-1} \circ \partial_p)(\tau)$.

En el cas en què $\tau = (v_0, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p)$, tenim:

$$\begin{aligned} \partial_p \circ \chi_p(\tau) &= \partial_p \left(\sum_{i=0}^k (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^k (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + \sum_{j=k+1}^p (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_p) \right) \end{aligned}$$

on el primer i el tercer sumand dins del parèntesi es cancel·len a parells, per un argument ja emprat en el lema 3.4. Per tant, l'expressió queda:

$$\partial_p \circ \chi_p(\tau) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + \sum_{j=k+1}^p (-1)^j \sum_{i=0}^k (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_p)$$

Per altra banda:

$$\begin{aligned} \chi_{p-1} \circ \partial_p &= \chi_{p-1} \left(\sum_{j=0}^k (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + \sum_{j=k+1}^p (-1)^j (v_0, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_p) \right) = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + \sum_{j=k+1}^p (-1)^j \sum_{i=0}^k (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_p) \end{aligned}$$

Efectivament, ambdues expressions coincideixen. Així doncs, χ és una aplicació de cadenes i podem considerar els homomorfismes induïts $\chi_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(K')$.

Prenem ara l'aplicació simplicial $\theta : |K'| \rightarrow |K|$ tal que $\theta(v) = v_0$ i que manté fixos tota la resta de vèrtexs. Considerem l'aplicació de cadenes induïda $\theta : C(K') \rightarrow C(K)$. Provarem que $\theta_{p*} : H_p(K') \rightarrow H_p(K)$ és l'aplicació inversa de $\chi_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(K')$.

Per un costat, tenim que si τ és un p -simplex de K del qual σ no és cara:

$$(\theta_p \circ \chi_p)(\tau) = \theta_p(\chi_p(\tau)) = \theta_p(\tau) = \tau$$

mentre que si σ és cara de τ , $\tau = (v_0, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p)$ i:

$$\begin{aligned} (\theta_p \circ \chi_p)(\tau) &= \theta_p(\chi_p(\tau)) = \theta_p \left(\sum_{i=0}^k (v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) \right) = \\ &= \theta_p(v, v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) + \sum_{i=1}^k \theta_p(v_0, \dots, \widehat{v}_i, v, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) \end{aligned}$$

on el segon sumatori desapareix perquè $\theta(v_0) = v_0 = \theta(v)$ i per tant tots els simplexs que hi apareixen tenen dos vèrtexs amb la mateixa imatge per θ . Així, ens queda:

$$(\theta_p \circ \chi_p)(\tau) = \theta_p(v, v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) = (v_0, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_p) = \tau$$

Per tant, hem provat que $(\theta \circ \chi)_p = \theta_p \circ \chi_p = \text{id}$ i, per tant, els homomorfismes induïts $(\theta \circ \chi)_{p*} = \text{id}$. Així, podem aplicar el lema 3.5 per a concloure que $\theta_{p*} \circ \chi_{p*} = \text{id}$.

Per altra banda, si denotem per L el subcomplex de K' format pels simplexs de K' que tenen a v com a vèrtex, junt amb totes les seues cares, tenim que L és un con amb vèrtex v . Donat $z \in Z_p(K')$, podem considerar $z - (\chi_p \circ \theta_p)(z) \in Z_p(K')$, ja que $\partial(z - (\chi_p \circ \theta_p)(z)) = \partial z - (\chi_p \circ \theta_p)(\partial z) = 0$. Notem ara que si τ és un p -simplex de K' que no té a v com a vèrtex, aleshores:

$$(\chi_p \circ \theta_p)(\tau) = \chi_p(\theta_p(\tau)) = \chi_p(\tau) = \tau$$

perquè $\sigma \notin K'$ i, per tant, τ no pot tindre a σ com a cara. Així, tots els simplexs de $z - (\chi_p \circ \theta_p)(z)$ tenen a v com a vèrtex, ja que tots els que no el tenen es cancel·len en l'expressió. Per tant, $z - (\chi_p \circ \theta_p)(z) \in Z_p(L)$. Però com L és un con, sabem pel teorema 2.4 que $H_p(L) \cong 0$ si $p > 0$. Així, en aquest cas, $z - (\chi_p \circ \theta_p)(z)$ és la vora d'una $(p+1)$ -cadena en L , i per tant en K' . És

a dir, $z - (\chi_p \circ \theta_p)(z) \sim 0$ en $H_p(K')$ i, en conseqüència, $[z] = [(\chi_p \circ \theta_p)(z)] \forall p > 0$. En el cas $p = 0$ també és cert: com tots els símplexs que no tenien a v com a vèrtex es cancel·laven en $z - (\chi_p \circ \theta_p)(z)$, i estem parlant de 0-símplexs, l'únic restant és el propi v . Així:

$$z - (\chi_p \circ \theta_p)(z) = v - (\chi_p \circ \theta_p)(v) = v - \chi_p(\theta_p(v)) = v - \chi_p(v_0) = v - v_0 \sim 0$$

perquè $v - v_0 = \partial(v_0, v) \in C_1(K')$.

Aleshores tenim que $(\chi_{p*} \circ \theta_{p*})([z]) = [(\chi_p \circ \theta_p)(z)] = [z] \forall [z] \in H_p(K')$ i $\forall p \in \mathbb{N}$. En conclusió, $\chi_{p*} \circ \theta_{p*} = \text{id}$ per a cada p i hem provat que θ_{p*} és l'aplicació inversa de χ_{p*} . Així, χ_{p*} és bijectiva i, per tant, un isomorfisme, de manera que:

$$H_p(K) \cong H_p(K') \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

■

Corol·lari 3.1

Siga K un complex simplicial, $m > 0$. Aleshores, $H_p(K) \cong H_p(K^m) \forall p \in \mathbb{N}$.

Dem: Com hem vist que la m -èsima subdivisió baricèntrica de K , K^m , es pot obtindre mitjançant una successió finita de subdivisions estel·lars, i cadascuna d'aquestes conserva els grups d'homologia pel teorema 3.2, el resultat és immediat. ■

Donada una subdivisió baricèntrica K^m , considerem la successió de subdivisions estel·lars que s'han fet per obtindre-la. A l'aplicació de cadenes resultant de compondre les aplicacions χ del teorema 3.2 corresponents a totes elles la denotem també per $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$ i se l'anomena **aplicació subdivisió**. Així mateix, si composem totes les θ , obtenim $\theta : |K^m| \rightarrow |K|$, que anomenem **aplicació simplicial estàndard**. Notem que aquesta última no és única degut a que depèn de l'ordre triat dels vèrtexs de cada símplex.

3.5 Aplicacions simplicials contigües

Definició 3.8

Direm que $s, t : |K| \rightarrow |L|$ aplicacions simplicials són **contigües** si per a cada símplex $\sigma \in K$ podem trobar un símplex $\tau \in L$ tal que $s(\sigma)$ i $t(\sigma)$ són ambdós cares de τ . Al menys dels símplexs que verifiquen la mateixa condició que τ se l'anomena **portador**² de σ per s i t .

²No confondre amb el portador d'un punt x , que ja havíem definit com l'únic símplex que té x al seu interior.

Lema 3.6

Si $s, t : |K^m| \rightarrow |L|$ són dues aproximacions simplicials de $f : |K^m| \rightarrow |L|$, s i t són aplicacions simplicials contigües.

Dem: Donat $\sigma \in K^m$, prenem un punt x que estiga a l'interior de σ . Per ser aproximacions simplicials, tant $s(x)$ com $t(x)$ han de pertànyer al portador de $f(x)$. Així, $s(\sigma)$ i $t(\sigma)$ han de ser necessàriament cares d'aquest portador i hem comprovat que es verifica la definició d'aplicacions simplicials contigües. ■

Lema 3.7

Si $s, t : |K| \rightarrow |L|$ són aplicacions simplicials contigües, aleshores $s_{p*} = t_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(L) \forall p \in \mathbb{N}$.

Dem: La idea de la demostració és construir una família d'homomorfismes $d_q : C_q(K) \rightarrow C_{q+1}(L)$ de manera que $d_{q-1} \circ \partial + \partial \circ d_q = t_q - s_q : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$. Una col·lecció així s'anomena una **homotopia de cadenes** entre s i t . Procedirem a construir-la per inducció.

Siga $\sigma = v \in C_0(K)$, definim:

$$d_0(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(v) = t(v) \\ (s(v), t(v)) & \text{si } s(v) \neq t(v) \end{cases}$$

Comprovem que verifica la condició demanada. Com que d_{-1} és l'homomorfisme trivial (perquè $C_{-1}(K) = C_{-1}(L) = 0$), aquesta es redueix a $\partial \circ d_0 = t_0 - s_0 : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$. En efecte, si $s(v) = t(v)$:

$$\partial d_0(v) = \partial 0 = 0 = t(v) - s(v) = (t_0 - s_0)(v)$$

mentre que si $s(v) \neq t(v)$:

$$\partial d_0(v) = \partial(s(v), t(v)) = t(v) - s(v) = (t_0 - s_0)(v).$$

Si considerem $\tau \in L$ el portador de σ per s i t , es verifica que $d_0(\sigma)$ és una cadena en el subcomplex simplicial format per τ i totes les seues cares, que denotem per $\bar{\tau}$. Efectivament, com $s(v)$ i $t(v)$ són vèrtexs d'un mateix símplex per la definició d'aplicacions simplicials contigües, el portador de σ és precisament l'1-símplex $(s(v), t(v))$.

Suposem ara que hem construït $d_i : C_i(K) \rightarrow C_{i+1}(L)$ per a cada $0 \leq i \leq q-1$ verificant les dos condicions anteriors, és a dir, $d_{i-1} \circ \partial + \partial \circ d_i = t_i - s_i$ i $d_i(\sigma)$ és sempre una cadena en el subcomplex $\bar{\tau}$. Tractarem ara de construir d_q .

Per a començar, observem que, donat σ un q -símplex de K :

$$\begin{aligned} \partial(t_q(\sigma) - s_q(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma)) &= \partial(t_q - s_q)(\sigma) - \partial d_{q-1}(\partial\sigma) \stackrel{\uparrow}{=} \partial(t-s)_q(\sigma) - (t-s)_{q-1}(\partial\sigma) + d_{q-2}(\partial\partial\sigma) \\ &\quad \partial \circ d_{q-1} = t_{q-1} - s_{q-1} - d_{q-2} \circ \partial \end{aligned}$$

Ara, aplicant que $\partial \circ \partial = 0$ i que $t - s$ és una aplicació de cadenes i, per tant, commuta amb l'homomorfisme vora:

$$\partial(t_q(\sigma) - s_q(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma)) = \partial(t-s)_q(\sigma) - (t-s)_{q-1}(\partial\sigma) + d_{q-2}(0) = (t-s)_{q-1}(\partial\sigma) - (t-s)_{q-1}(\partial\sigma) = 0$$

Comprovem que $t_q(\sigma) - s_q(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma)$ és una cadena en el subcomplex $\bar{\tau}$. Per un costat, $t_q(\sigma)$ i $s_q(\sigma)$ són cares de τ per definició de portador. Per altre, $\partial\sigma$ és suma de $(q-1)$ -cares de σ i, per hipòtesi inductiva, les imatges per d_{q-1} d'aquestes es troben en els subcomplexos formats per totes les cares del portador de les mateixes. Aquest portador, però, és sempre una cara de τ , el portador de tot σ , de manera que $d_{q-1}(\partial\sigma)$ també és una q -cadena en $\bar{\tau}$.

Ara bé, $\bar{\tau}$ es pot veure com el con sobre una de les cares de τ amb vèrtex el 0-símplex oposat. Pel teorema 2.4, tot q -cicle en $\bar{\tau}$ és una q -vora, és a dir, existeix $c \in C_{q+1}(\bar{\tau})$ de manera que $t_q(\sigma) - s_q(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma) = \partial c$. Així, podem definir $d_q(\sigma) = c$. És clar, per la construcció anterior, que d_q verifica les dos condicions exigides.

Només ens queda provar que l'existència d'una homotopia de cadenes com la construïda garanteix que els homomorfismes induïts sobre els grups d'homologia coincideixen. Per a cada $p \in \mathbb{N}$, donat un $[z] \in H_p(K)$, tenim:

$$\begin{aligned} t_{p*}([z]) - s_{p*}([z]) &= (t-s)_{p*}([z]) = [(t-s)_p(z)] = [(d_{p-1} \circ \partial + \partial \circ d_p)(z)] = \\ &= [d_{p-1}(\partial z) + \partial d_p(z)] = [d_{p-1}(\partial z)] = d_{(p-1)*}([\partial z]) = d_{(p-1)*}(0) = 0 \end{aligned}$$

Així, $t_{p*}([z]) = s_{p*}([z]) \forall [z] \in H_p(K)$ i $t_{p*} = s_{p*} \forall p \in \mathbb{N}$. ■

Lema 3.8

Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ són aplicacions homotòpiques podem trobar una subdivisió bari-cèntrica K^m i una col·lecció d'aplicacions simplicials $s_1, \dots, s_n : |K^m| \rightarrow |L|$ tals que s_1 és aproximació simplicial de f , s_n és aproximació simplicial de g i s_i i s_{i+1} són contigües per a cada $1 \leq i < n$.

Dem: Siga $F : |K| \times I \rightarrow |L|$ una homotopia entre f i g , amb $I = [0, 1]$. Denotem $f_t(x) = F(x, t)$ i $d(f_t, f_s) = \sup\{d(f_t(x), f_s(x)) \mid x \in |K|\}$.

Considerem ara el recobriment per oberts de $|L|$ format per les estrelles obertes dels seus vèrtexs, així com el seu nombre de Lebesgue δ_L . Per la continuïtat de F , podem trobar un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $d(f_{\frac{r}{n}}, f_{\frac{r+1}{n}}) < \delta_L$ per a cada $0 \leq r < n$. Així, per a cada $x \in |K|$, $d(f_{\frac{r}{n}}(x), f_{\frac{r+1}{n}}(x)) < \delta_L$ i, pel lema 3.3, existeix un vèrtex $v_0 \in L$ verificant que $f_{\frac{r}{n}}(x), f_{\frac{r+1}{n}}(x) \in \text{star}(v_0, L)$. Dit d'altra manera, $x \in (f_{\frac{r}{n}})^{-1}(\text{star}(v_0, L)) \cap (f_{\frac{r+1}{n}})^{-1}(\text{star}(v_0, L))$.

Conseqüència directa d'aquest fet és que els conjunts $(f_{\frac{r}{n}})^{-1}(\text{star}(v, L)) \cap (f_{\frac{r+1}{n}})^{-1}(\text{star}(v, L))$ amb v un vèrtex de L formen un recobriment per oberts de $|K|$. En efecte, són intersecció de les antiimatges de dos oberts per funcions contínues, i hem provat que cada punt $x \in |K|$ està

dins d'un d'ells.

De nou, podem prendre el nombre de Lebesgue δ_K d'aquest recobriment. Com vegèrem al lema 3.1, $\mu(K^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ i, per tant, podem triar $m \in \mathbb{N}$ de manera que $\mu(K^m) < \frac{\delta_K}{2}$. D'aquesta manera, donat un vèrtex $u \in K^m$, $\text{diam}(\text{star}(u, K^m)) < 2\frac{\delta_K}{2} = \delta_K$ i existeix $v_1 \in L$ de manera que $\text{star}(u, K^m) \subseteq (f_{\frac{r}{n}})^{-1}(\text{star}(v_1, L)) \cap (f_{\frac{r+1}{n}})^{-1}(\text{star}(v_1, L))$. Això vol dir que se satisfan les inclusions $f_{\frac{r}{n}}(\text{star}(u, K^m)) \subseteq \text{star}(v_1, L)$ i $f_{\frac{r+1}{n}}(\text{star}(u, K^m)) \subseteq \text{star}(v_1, L)$. Gràcies a aquest fet, podem definir $s_{r+1}(u) = v_1$ i repetir el raonament de la demostració del teorema 3.1 per tal d'estendre $s_{r+1} : |K^m| \rightarrow |L|$ de manera que siga una aplicació simplicial i, a més, provar que és aproximació simplicial de $f_{\frac{r}{n}}$ i $f_{\frac{r+1}{n}}$.

Només queda verificar que les aplicacions simplicials s_1, \dots, s_n que acabem de definir verifiquen les condicions demanades. Per un costat, s_1 és una aproximació simplicial de $f_0 = f$, i s_n és una aproximació simplicial de $f_{\frac{n}{n}} = f_1 = g$. I per altra banda, tant s_i com s_{i+1} són aproximacions simplicials de $f_{\frac{i}{n}}$, així que podem aplicar el lema 3.6 per afirmar que són contigües. ■

3.6 Invariància per homotopia

Ja estem en condicions de provar el resultat més important d'aquest capítol: la invariància per homotopia de l'homologia simplicial. La idea és que si dos complexos simplicials tenen espais subjacents amb la mateix tipus d'homotopia, els seus grups d'homologia seran isomorfs.

Teorema 3.3

Tota aplicació contínua $f : |K| \rightarrow |L|$ indueix un homomorfisme $f_{p} : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ per a cada $p \in \mathbb{N}$.*

Dem: Pel teorema 3.1, sabem que existeix $s : |K^m| \rightarrow |L|$ aproximació simplicial de $f : |K^m| \rightarrow |L|$ per a algun $m > 0$. Per altra banda, podem prendre l'aplicació subdivisió $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$ de manera que $\chi_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(K^m)$ és un isomorfisme per a cada $p \in \mathbb{N}$. Així, considerant els homomorfismes induïts per s tal i com els hem definit a la secció 3.3, per a cada p tenim:

$$H_p(K) \xrightarrow{\chi_{p*}} H_p(K^m) \xrightarrow{s_{p*}} H_p(L)$$

Per tant, podem definir $f_{p*} = s_{p*} \circ \chi_{p*}$ que, en efecte, és un homomorfisme.

Tanmateix, l'aproximació simplicial de f no té per què ser única, així que hem de justificar que f_{p*} no depèn de l'aproximació triada. Suposem que tenim $s : |K^m| \rightarrow |L|$ i $t : |K^n| \rightarrow |L|$ dos aproximacions simplicials de f amb $n \geq m$. Considerem $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$ i $\psi : C(K^m) \rightarrow C(K^n)$ aplicacions subdivisió i $\theta : |K^n| \rightarrow |K^m|$ una aplicació simplicial estàndard. Per a provar que f_{p*} no depèn de si fem s o t per aproximar f , volem veure que:

$$s_{p*} \circ \chi_{p*} = t_{p*} \circ \psi_{p*} \circ \chi_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$$

Observem, en primer lloc, que $s \circ \theta : |K^n| \rightarrow |L|$ és aproximació simplicial de f . Recordem que θ enviava els simplexes en què quedava dividit cada $\tau \in K^m$ després de la subdivisió baricèntrica a cares del propi τ . Donat $x \in |K^n|$ existeix un k -simplex $\sigma_1 \in K^n$ de manera que x està a l'interior de σ_1 . A més, també $x \in |K^m|$ i estarà a l'interior de σ , el k -simplex la subdivisió del qual ha donat lloc a σ_1 . Per ser s aproximació simplicial, sabem que $s(x)$ pertany al portador de $f(x)$ i, per tant, $s(\sigma)$ ha de ser una cara de dit portador. Ara bé, hem dit que $\theta(\sigma_1) < \sigma$, de manera que tenim que $s(\theta(x)) \in s(\theta(\sigma_1)) < s(\sigma)$ que al seu torn és cara del portador de $f(x)$. Així, $s(\theta(x))$ pertany al portador de $f(x)$ i $s \circ \theta$ és aproximació simplicial de f .

Així $s \circ \theta, t : |K^n| \rightarrow |L|$ són dos aproximacions simplicials de f i, pel lema 3.6, han de ser contingües. Pel lema 3.7, això implica que $s_{p*} \circ \theta_{p*} = t_{p*} : H_p(K^n) \rightarrow H_p(L) \forall p \in \mathbb{N}$. Com, vists com a aplicacions de cadenes, θ era la inversa de ψ , podem aplicar el lema 3.5 per a afirmar que θ_{p*} també és la inversa de $\psi_{p*} \forall p \in \mathbb{N}$. Per tant, $t_{p*} \circ \psi_{p*} \circ \chi_{p*} = s_{p*} \circ \theta_{p*} \circ \psi_{p*} \circ \chi_{p*} = s_{p*} \circ \chi_{p*}$, tal i com volíem. ■

Teorema 3.4

*Si $f : |K| \rightarrow |K|$ és l'aplicació identitat, aleshores $f_{*p} : H_p(K) \rightarrow H_p(K)$ és l'homomorfisme identitat per a cada $p \in \mathbb{N}$. Si $f : |K| \rightarrow |L|$, $g : |L| \rightarrow |M|$ són dos aplicacions, aleshores $(g \circ f)_{*p} = g_{*p} \circ f_{*p} : H_p(K) \rightarrow H_p(M)$ per a cada $p \in \mathbb{N}$.*

Dem: Per a la primera part, quan f és l'aplicació identitat no cal fer cap subdivisió baricèntrica, ja que ella mateixa és una aplicació simplicial i, per tant, és la seua pròpia aproximació simplicial. Donada $[z] \in H_p(K)$, $f_{*p}([z]) = \text{id}_{p*}([z]) = [\text{id}_p(z)] = [z]$ i f_{*p} és l'homomorfisme identitat per a cada $p \in \mathbb{N}$.

Per a la segona, triem $t : |L^n| \rightarrow |M|$ una aproximació simplicial de $g : |L^n| \rightarrow |M|$ i $s : |K^m| \rightarrow |L^n|$ una de $f : |K^m| \rightarrow |L^n|$. Siguen $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$ i $\psi : C(L) \rightarrow C(L^n)$ aplicacions subdivisió i $\theta : |L^n| \rightarrow |L|$ una aplicació simplicial estàndard.

Comprovem que $\theta \circ s$ és aproximació simplicial de $f : |K^m| \rightarrow |L|$. Com s és aproximació simplicial de f , per a cada $x \in |K^m|$ tenim que $s(x)$ pertany al portador de $f(x)$ en L^n , és a dir, a l'únic simplex $\sigma_1 \in L^n$ que conté a $f(x)$ al seu interior. Recordem, però, que σ_1 s'ha obtingut subdividint baricèntricament un simplex $\sigma \in L$, i per tant σ també tindrà $f(x)$ al seu interior. A més, $\theta(\sigma_1)$ és sempre una cara d'aquest simplex σ . Així, $\theta(s(x))$ pertany a σ , que és el portador de $f(x)$ en L .

Comprovem també que $t \circ s$ és aproximació simplicial de $g \circ f : |K^m| \rightarrow |M|$. De nou, donat $x \in |K^m|$, sabem que $s(x)$ pertany a σ , el portador de $f(x)$. Com $t(f(x))$ ha de pertànyer a τ , el portador de $g(f(x))$, i $f(x) \in \sigma$, $t(\sigma)$ ha de ser una cara de τ . Per tant, $t(s(x)) \in t(\sigma) < \tau$ i hem provat que $(t \circ s)(x)$ pertany al portador de $(g \circ f)(x)$.

Ara, només cal fer ús d'aquests fets i de que θ_{p*} és l'homomorfisme invers de ψ_{p*} :

$$g_{*p} \circ f_{*p} = (t_{*p} \circ \psi_{*p}) \circ (\theta_{*p} \circ s_{*p} \circ \chi_{*p}) = t_{*p} \circ s_{*p} \circ \chi_{*p} = (t \circ s)_{*p} \circ \chi_{*p} = (g \circ f)_{*p} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

■

Teorema 3.5

Si $f, g : |K| \rightarrow |L|$ són aplicacions homotòpiques aleshores $f_{p*} = g_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ per a cada $p \in \mathbb{N}$.

Dem: Com f i g són homotòpiques, podem aplicar el lema 3.8 i prendre una subdivisió baricèntrica K^m i una col·lecció d'aplicacions simplicials $s_1, \dots, s_n : |K^m| \rightarrow |L|$ tals que s_1 és aproximació simplicial de f , s_n és aproximació simplicial de g i s_i i s_{i+1} són contigües per a cada $1 \leq i < n$. Considerem l'aplicació subdivisió $\chi : C(K) \rightarrow C(K^m)$ i, aplicant el lema 3.7:

$$f_{p*} = s_{1p*} \circ \chi_{p*} = s_{2p*} \circ \chi_{p*} = \dots = s_{np*} \circ \chi_{p*} = g_{p*} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

■

Corol·lari 3.2

Si K i L són dos complexos simplicials de manera que els seus espais subjacents $|K|$ i $|L|$ tenen el mateix tipus d'homotopia, aleshores $H_p(K) \cong H_p(L) \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Dem: Com que $|K|$ i $|L|$ tenen el mateix tipus d'homotopia, existirà una equivalència d'homotopia $f : |K| \rightarrow |L|$. Açò vol dir que existeix $g : |L| \rightarrow |K|$ de manera que $f \circ g \sim \text{id}_{|K|}$ i $g \circ f \sim \text{id}_{|L|}$. Així, aplicant els teoremes anteriors:

$$f_{p*} \circ g_{p*} = (f \circ g)_{p*} = (\text{id}_{|K|})_{p*} = \text{id}_{H_p(K)} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$g_{p*} \circ f_{p*} = (g \circ f)_{p*} = (\text{id}_{|L|})_{p*} = \text{id}_{H_p(L)} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Així, tenim que g_{p*} és l'homomorfisme invers de f_{p*} i, per tant, $f_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ és un isomorfisme per a cada $p \in \mathbb{N}$. ■

Corol·lari 3.3

Si K i L són dos complexos simplicials de manera que els seus espais subjacents $|K|$ i $|L|$ són homeomorfs, aleshores $H_p(K) \cong H_p(L) \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Dem: Aquest resultat és conseqüència immediata de l'anterior, ja que el tipus d'homotopia és un invariant topològic. Tanmateix, també es pot provar independentment, sense fer cap referència a conceptes d'homotopia, substituint en la demostració anterior l'equivalència d'homotopia f per un homeomorfisme i g per l'homeomorfisme invers, de manera que $f \circ g = \text{id}_{|K|}$ i $g \circ f = \text{id}_{|L|}$. ■

Capítol 4

Homologia cel·lular

Al capítol anterior, hem comprovat que dos complexos simplicials que triangulen el mateix espai topològic tenen els mateixos grups d'homologia associats, ja que en eixe cas ambdós són homeomorfs. Per tant, podem parlar dels *grups d'homologia d'un espai topològic triangulable* per a fer referència als grups d'homologia de qualsevol triangulació del mateix.

Aquesta llibertat a l'hora de triar la triangulació de l'espai és, sens dubte, un avantatge a l'hora de calcular els seus grups d'homologia, però no tan gran com podria parèixer a primera vista. Per exemple, pensem en el cas del tor. La triangulació més senzilla del mateix (la que té un menor nombre de símplexs) és la següent:

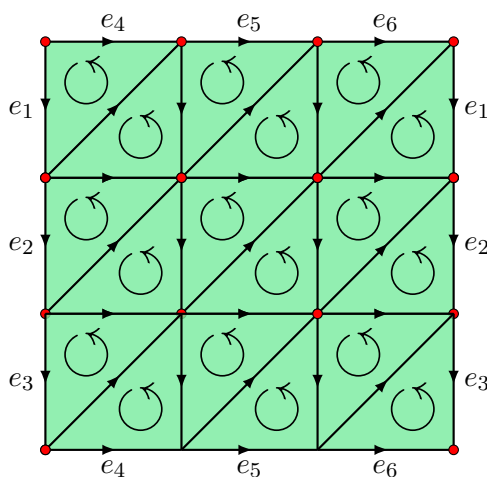


FIGURA 4.1: *Representació plana del complex simplicial més senzill que triangula el tor. Per a obtindre el complex simplicial s'han d'identificar els 1-símplexs etiquetats amb el mateix nom.*

Si recordem el treball que haguérem de fer a la secció 2.4 per tal de calcular els grups d'homologia de la banda de Möbius, la triangulació de la qual era molt més senzilla que aquesta, ens adonarem que repetir el mateix procés amb el tor seria una tasca llarga i costosa. En aquest capítol presentarem un enfoc alternatiu per abordar el càlcul dels grups d'homologia d'un espai, i conclourem aplicant-lo a aquest exemple.

4.1 CW-complexos

En aquesta secció presentarem un altre tipus d'estructures, anomenades *CW-complexos* o *complexos cel·lulars*, similars al complexos simplicials.

Definició 4.1

Siga (X, \mathcal{T}) un espai topològic. Una ***n*-cèl·lula** en X és un subconjunt $e \subseteq X$ que és homeomorfa a $B^n(0, 1)$, la bola oberta de centre 0 i radi 1 en \mathbb{R}^n .

Aquestes n -cèl·lules seran els blocs de construcció dels nostres complexos cel·lulars, en el mateix sentit que els símplexs ho eren dels complexos simplicials.

Definició 4.2

Un ***CW-complex*** o ***complex cel·lular*** és un espai X i un conjunt de cèl·lules $E = \{e_\alpha / \alpha \in A\}$, amb A un conjunt d'índexs qualsevol, que verifiquen:

- (1) X és Hausdorff.
- (2) $\bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha = X$ i $e_\alpha \cap e_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha \neq \beta$.
- (3) Per a cada n -cèl·lula $e_\alpha \in E$, existeix una aplicació contínua $f : \overline{B^n(0, 1)} \rightarrow \overline{e_\alpha}$, anomenada ***aplicació característica*** de e_α , tal que $f|_{B^n(0, 1)} : B^n(0, 1) \rightarrow e_\alpha$ és un homeomorfisme i la imatge de $f(B^n(0, 1))$ es troba dins d'una unió finita de cèl·lules de E , totes de dimensió menor que n .
- (4) Un subconjunt $C \subseteq X$ és tancat en X si i només si $C \cap \overline{e_\alpha}$ és tancat en $\overline{e_\alpha} \quad \forall \alpha \in A$.

Es diu que el CW-complex és ***finit*** quan el conjunt E ho és.

El nom de CW-complexos deriva de la condició (3), que rep el nom de condició de clausura finita (“*closure-finiteness*”), i de la (4), ja que quan es verifica es diu que X té la topologia débil (“*weak topology*”) respecte a la col·lecció $\{\overline{e_\alpha} / \alpha \in A\}$.

És interessant assenyalar que en el cas dels CW-complexos finits, la condició (4) és redundant i, per tant, es pot ometre de la definició. Al llarg d'aquest text treballarem exclusivament amb aquest tipus de complexos.

Observem que, en efecte, aquesta és una generalització del concepte de complex simplicial. Només cal prendre com a n -cèl·lules els interiors dels n -símplexs per comprovar que tot complex simplicial es pot veure com un CW-complex. Per tant, podem generalitzar molts dels conceptes presentats al primer capítol a aquest tipus de complexos.

Direm que un CW-complex té ***dimensió* n** si la cèl·lula de dimensió major que conté és una n -cèl·lula. A l'espai X se l'anomena ***espai subjacent*** del complex. Un subcomplex és un subconjunt de cèl·lules de E que, junt amb el seu espai subjacent, verifiquen les condicions per a ser un CW-complex. Al subcomplex format per les cèl·lules de dimensió menor o igual que n se l'anomena ***n-esquelet*** i es

representa per X^n .

Les cèl·lules que intersequen amb la imatge de l'aplicació característica d'una n -cèl·lula e_α s'anomenen **cares** de e_α . Com en el cas simplicial, la pròpia n -cèl·lula e_α és cara de si mateixa. Qualsevol altra cara s'anomena **cara pròpia** i el conjunt de cares pròpies és la **vora** de e_α .

4.2 Construcció inductiva d'un CW-complex

En aquesta secció presentem una altra manera de veure els CW-complexos, que a sovint s'empra com a definició alternativa. Per a fer-ho, primer hem de recordar el concepte d'*espai d'adjunció*.

Definició 4.3

Siguen (X, \mathcal{T}) i (Y, \mathcal{T}') dos espais topològics, $A \subset X$ un subconjunt i $f : A \rightarrow Y$ una aplicació contínua. Definim l'*espai d'adjunció* de X i Y al llarg de f com l'espai quocient:

$$X \cup_f Y := \frac{X \sqcup Y}{\sim}$$

on \sqcup representa la unió disjunta de X i Y i \sim és la relació d'equivalència donada per $x \sim y \Leftrightarrow x \in A \wedge y = f(x)$.

Bàsicament, la idea és "apegar" els dos espais identificant A amb la seua imatge. D'aquesta manera, podem construir un CW-complex finit sobre un espai de Hausdorff X de la manera següent:

- Comencem amb un subespai X^0 de X que tinga la topologia discreta. Aquest serà el 0-esquelet (el conjunt de les 0-cèl·lules).
- Per a cada $n > 0$, obtenim X^n mitjançant l'adjunció de clausures de n -cèl·lules al llarg de la seua vora. És a dir, considerem $\{e_1, \dots, e_{k_n}\}$ un conjunt d' n -cèl·lules i $h_i : fr(e_i) \rightarrow X^{n-1}$ una aplicació per a cada $1 \leq i \leq k_n$, i adjuntem successivament cada \bar{e}_i a X^{n-1} al llarg de h_i .
- Repetim el procés fins obtenir una successió de subespais tancats $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots \subseteq X^m$ de manera que $\bigcup_{i=0}^m X^i = X$.

El procediment es pot generalitzar a CW-complexos infinits, afegint la possibilitat de que a cada pas s'adjunten un nombre infinit de cèl·lules i de que la successió de subespais $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots$ no siga finita, però aleshores cal afegir la condició (4) de la definició original.

4.3 Cadenes, orientacions i grups d'homologia

Donat un complex cel·lular $K = (X, E)$, podem definir, igual que en el cas simplicial, el **p -èssim grup de cadenes $C_p(K)$** com el grup lliure sobre el conjunt de les p -cèl·lules de E .

Orientar les cèl·lules d'un complex no és tan senzill com en el cas simplicial, però és un pas necessari per a poder definir l'homomorfisme vora. Per això, tractarem de donar una idea general, sense aprofundir en els detalls tècnics.

Definició 4.4

Donat un complex cel·lular $K = (X, E)$, una **funció d'incidència** és una funció $\alpha : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$ que a cada parell ordenat de cèl·lules (σ, τ) els associa un sencer del conjunt $\{-1, 0, 1\}$ de manera que es verifiquen:

- (1) $\alpha(\sigma, \tau) \neq 0$ si i només si τ és una $(k-1)$ -cara de la k -cèl·lula σ .
- (2) Si σ és una 1-cèl·lula i la seua vora està formada per les 0-cèl·lules $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, aleshores $\sum_{i=1}^n \alpha(\sigma, \tau_i) = 0$.
- (3) Si ρ és una $(k-2)$ -cara de la k -cèl·lula σ i $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ són les $(k-1)$ -cèl·lules que verifiquen $\rho < \tau_i < \sigma^1$, aleshores $\sum_{i=1}^n \alpha(\sigma, \tau_i) \cdot \alpha(\tau_i, \rho) = 0$.

Anomenem a $\alpha(\sigma, \tau)$ **nombre d'incidència** del parell (σ, τ) i el denotem per $[\sigma : \tau]$. Diem també que α defineix una **orientació** en (X, E) .

Es pot provar a partir de les condicions exigides fins al moment que, donat un CW-complex K , sempre existeix una funció d'incidència. Açò ens permet, triada una orientació (una funció d'incidència), definir el **p -èssim homomorfisme vora** com l'homomorfisme $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ que a cada p -cèl·lula σ li assigna la $(q-1)$ -cadena $\partial_p(\sigma) = \sum_{\tau \in E} [\sigma : \tau] \tau$.

En vista d'aquesta manera de definir l'homomorfisme vora és quan cobra sentit la definició de funció d'incidència. La condició (1) ens assegura que $\partial_p(\sigma)$ és una cadena formada per les $(p-1)$ -cèl·lules de la vora de σ , amb un signe que depèn de l'orientació. La condició (2) generalitza la idea de que cada "aresta" (1-cèl·lula) ha de tindre un origen (amb coeficient -1) i un extrem (amb coeficient 1). La condició (3) serveix per a garantir que $\partial \circ \partial = 0$. Inclús les interpretacions geomètriques que férem a 1.2 continuen tenint sentit, de manera que continuarem representant les orientacions mitjaçant fletxes.

D'aquesta manera, aquesta construcció no és més que una generalització de la que férem per a complexos simplicials, i verifica totes les mateixes propietats que ja provàrem aleshores. Igual que en aquell cas, definim $Z_p(K) := \ker \partial_p$ i $B_p(K) := \text{Im } \partial_{p+1}$, i es verifica que $B_p(K) \leq Z_p(K) \leq C_p(K)$. Finalment, el **p -èssim grup d'homologia** es defineix com $H_p(K) := \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$.

4.4 L'axiomàtica d'Eilenberg-Steenrod

L'homologia simplicial i la cel·lular no són les úniques teories d'homologia existents. Històricament, la simplicial va ser la primera en desenvolupar-se, però a mesura que va anar passant el temps, sorgiren d'altres que s'aplicaven a diferents classes d'espais. Aquestes teories partien d'idees similars i donaven els mateixos resultats quan s'aplicaven a espais comuns a aquestes classes.

Això dugué a Samuel Eilenberg i Norman Steenrod a axiomatitzar el concepte de *teoria d'homologia*. És a dir, formularen uns axiomes que tota teoria d'homologia havia de verificar per a poder considerar-se com a tal, i provaren resultats comuns a totes elles (fent ús únicament d'aquests axiomes, i no de les característiques particulars de cadascuna). Alguns d'aquests resultats comuns són la invariància per homotopia (que hem estudiat al capítol anterior) i la seqüència de Mayer-Vietoris (que introduïrem al

¹Al igual que en el cas simplicial, emprem la notació $\tau < \sigma$ per a indicar que τ és cara de σ .

capítol pròxim). No presentarem els axiomes ací perquè fan ús de conceptes que no hem introduït en aquest treball, principalment el d'*homologia relativa*.

Un dels resultats que es deriven d'aquests axiomes és una espècie de “teorema d'unicitat de teories d'homologia”, que afirma que, si un mateix espai es pot tractar des del punt de vista de més d'una d'aquestes teories, els resultats obtinguts amb teories diferents són sempre els mateixos. Per exemple, en el nostre cas, podem dotar d'estructura de CW-complex a un complex simplicial i afirmar que els grups d'homologia cel·lular i els grups d'homologia simplicial coincideixen.

4.5 Un exemple: el tor

Quin avantatge presenta l'ús de l'homologia cel·lular per al càlcul dels grups d'homologia d'un espai? Per tal d'il·lustrar aquesta qüestió recuperarem l'exemple del tor, presentat al principi del capítol.

Les cèl·lules són objectes molt més flexibles i menys “rígids” que els símplexs. Això ens permet obtenir, per a un espai donat, estructures cel·lulars més senzilles que qualsevol estructura simplicial del mateix. Observem, per exemple, la següent estructura de CW-complex del tor, que consta d'una única 0-cèl·lula v , dos 1-cèl·lules a i b , i una 2-cèl·lula σ .

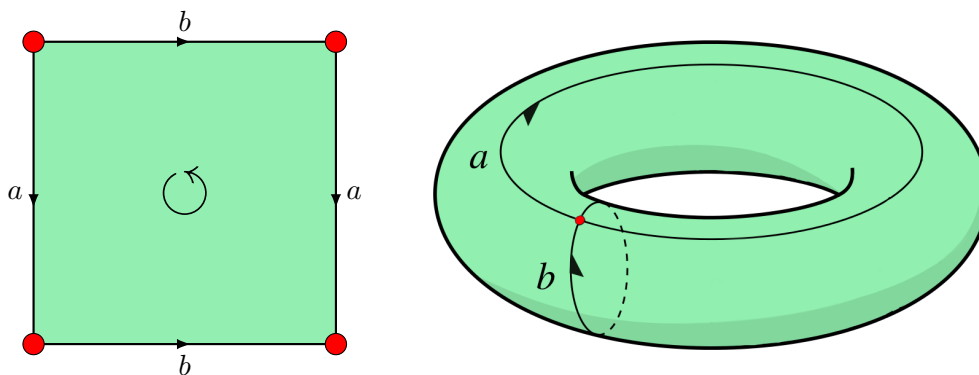


FIGURA 4.2: A l'esquerra, representació plana d'un complex cel·lular l'espai subjacent del qual és el tor. Per a obtenir el complex s'han d'identificar les 1-cèl·lules etiquetades amb el mateix nom, així com tots els vèrtexs. El resultat s'il·lustra en la imatge de la dreta².

A continuació anem a comprovar com de senzill és el càlcul dels grups d'homologia del tor emprant aquest CW-complex K . Com sempre, $Z_0(K) = C_0(K)$ ja que la vora de tota 0-cèl·lula és sempre 0.

Com $B_0(K)$ és la imatge de l'homomorfisme ∂_1 , està generat per les imatges de les 1-cèl·lules a i b . Però $\partial_1(a) = \partial_1(b) = v - v = 0$, així que $B_0(K) = 0$. Per tant, $H_0(K) = \frac{C_0(K)}{0} \cong C_0(K) = \langle v \rangle \cong \mathbb{Z}$. Notem que aquest resultat coincideix amb el resultat que ens donaria el teorema 2.2, ja que el tor és connex.

Com hem vist al paràgraf anterior que tota 1-cèl·lula té vora 0, de nou tenim que $Z_1(K) = C_1(K)$. Així mateix, la imatge de l'única 2-cèl·lula per ∂_2 generarà $B_1(K) = \text{Im } \partial_2$. Però $\partial_2(\sigma) = a + b - a - b = 0$, així que $B_1(K) = 0$ i $H_1(K) = \frac{C_1(K)}{0} \cong C_1(K) = \langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

²Imatge basada en la publicada per Guy Inchbald sota llicència Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International a <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Toruscycles1.svg>.

Finalment, com $B_2(K) = 0$ perquè no hi ha cap 3-cèl·lula en el complex i, a més, hem vist que l'única 2-cèl·lula σ té vora 0, $H_2(K) = \frac{C_2(K)}{0} \cong C_2(K) = \langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}$. Açò també coincideix amb el teorema 2.3, ja que el tor és una superfície orientable.

La resta de grups d'homologia són tots 0.

Ara és el moment d'aplicar tots els resultats mencionats a l'apartat anterior. Pel resultat d'invariància per homeomorfismes de l'homologia cel·lular, podem afirmar que els grups d'aquest CW-complex coincideixen amb els del CW-complex associat a la triangulació presentada al principi del capítol. Així mateix, sabem que els resultats obtinguts amb l'homologia cel·lular per a aquesta triangulació coincidirán amb els de la simplicial, i per tant hem aconseguit sol·lucionar el nostre problema inicial.

Aquest és un procediment habitual: com totes les teories d'homologia donen els mateixos resultats, per al càlcul pràctic es tria en cada cas la que ens permeta computar els grups d'homologia de manera més fàcil.

Capítol 5

La seqüència de Mayer-Vietoris

La seqüència de Mayer-Vietoris és un resultat que, en la majoria dels casos, ens permet calcular els grups d'homologia d'un complex simplicial K a partir dels de dos subcomplexos L_1, L_2 (no necessàriament disjunts) que verifiquen $L_1 \cup L_2 = K$.

5.1 Seqüències exactes i escissió

Comencem aquest capítol amb alguns conceptes sobre grups abelians, partint dels que ja presentàrem a la secció 2.1.

Definició 5.1

Una *seqüència* és una col·lecció de grups abelians i homomorfismes de la forma:

$$\dots \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow \dots$$

Aquesta seqüència es diu *exacta en B* si $\text{Im } f = \ker g$. Una seqüència es diu *exacta* si és exacta en cada grup que no estiga en un extrem de la mateixa.

Una *seqüència exacta curta* és una seqüència exacta de la forma:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

on el primer homomorfisme és la inclusió i l'últim l'homomorfisme trivial.

Notem que en una seqüència exacta curta $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$, g sempre ha de ser suprajectiu. En efecte, per a que es verifiqui l'exactitud en C la imatge de g ha de coincidir amb el nucli de l'homomorfisme trivial, que és tot C . Així mateix, f ha de ser injectiu, perquè per a que es verifiqui l'exactitud en A el nucli de f ha de coincidir amb la imatge de la inclusió de 0 en A , que és 0 .

A continuació presentem un lema que ens resultarà útil quan tractem amb seqüències exactes curtes.

Lema 5.1: Lema d'escissió

Siga $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ una seqüència exacta curta. Aleshores:

- (i) *Si existeix un homomorfisme $h : C \rightarrow B$ de manera que $g \circ h = \text{id}_C$, aleshores $B = \text{Im } f \oplus \text{Im } h \cong A \oplus C$. Diem que h és un homomorfisme d'escissió i que la seqüència s'escindeix.*
- (ii) *Si C és lliure i finitament generat, la seqüència sempre s'escindeix.*

Dem: Per a provar el primer apartat, suposem que existeix un h com el de l'enunciat. Aleshores, per a cada $b \in B$ tenim:

$$g((h \circ g)(b)) = g(b) \Rightarrow g(b - (h \circ g)(b)) = g(b) - g((h \circ g)(b)) = 0 \Rightarrow b - (h \circ g)(b) \in \ker g$$

Com la seqüència és exacta, tenim que $\ker g = \text{Im } f$. Així, $b = (b - (h \circ g)(b)) + (h \circ g)(b)$, i per tant pot escriure's com a suma d'un element de $\text{Im } f$ i un de $\text{Im } h$.

Només ens queda veure que $\text{Im } f \cap \text{Im } h = \{0\}$. Suposem que $b \in \text{Im } f \cap \text{Im } h$. Aleshores $b = f(a)$ per a algun $a \in A$ i $b = h(c)$ per a algun $c \in C$. Si fem la imatge per g de b , aplicant l'exactitud de la seqüència i la condició sobre h obtenim:

$$0 = (g \circ f)(a) = g(b) = (g \circ h)(c) = c$$

I d'aquesta manera, per ser h un homomorfisme, $b = h(c) = h(0) = 0$. Així, hem provat que $B = \text{Im } f \oplus \text{Im } h$.

Ara bé, pel comentari anterior a aquest lema, sabem que f ha de ser injectiva i, per tant, el seu nucli és 0. Així, fent ús del lema 2.1, $\text{Im } f \cong \frac{A}{\ker f} = \frac{A}{0} \cong A$. De la mateixa manera, com $g \circ h = \text{id}_C$ i la identitat és injectiva, h també ho serà i $\text{Im } h \cong \frac{C}{\ker h} = \frac{C}{0} \cong C$. Per tant, hem provat que $B \cong A \oplus C$.

En quant al segon apartat, si C és lliure i finitament generat, existirà una base de C $\{c_1, \dots, c_n\}$. Com g és suprajectiva per l'exactitud de la seqüència, per a cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existeix un $b_i \in B$ tal que $g(b_i) = c_i$. Donat un $c \in C$ qualsevol, c es pot expressar de manera única com a combinació lineal d'elements de la base. Així, podem definir:

$$\begin{aligned} h : \quad C &\longrightarrow B \\ \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n &\longmapsto \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \end{aligned}$$

D'aquesta manera, si $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$, tenim que:

$$(g \circ h)(c) = g(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 g(b_1) + \dots + \lambda_n g(b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n = c$$

i, per tant, $g \circ h = \text{id}_C$. ■

5.2 La seqüència de Mayer-Vietoris

Considerem un complex simplicial K i dos subcomplexos L_1, L_2 de manera que $L_1 \cup L_2 = K$. Denotem $L := L_1 \cap L_2$. Observem que, per a cada p , $C_p(L)$ és un subgrup tant de $C_p(L_1)$ com de $C_p(L_2)$, que al seu torn són subgrups de $C_p(K)$.

A continuació presentarem els homomorfismes que formaran part de la seqüència.

El primer és l'homomorfisme ϕ , que es defineix de la següent manera:

$$\begin{aligned} \phi : H_p(L) &\longrightarrow H_p(L_1) \oplus H_p(L_2) \\ [z]_L &\longmapsto ([z]_{L_1}, -[z]_{L_2}) \end{aligned}$$

Notem que afegim un subíndex a cada classe d'homologia per a indicar en quin grup d'homologia estem treballant. Aquest homomorfisme està ben definit perquè, per ser L un subcomplex de L_1 i de L_2 , tot cicle en $C_p(L)$ és també un cicle en $C_p(L_1)$ i $C_p(L_2)$. Per tant, té sentit considerar les classes d'homologia de z en L_1 i L_2 . Hem de comprovar, per altra banda, que la definició no depèn del representant. En efecte, si $[z_1]_L = [z_2]_L$, existeix $c \in C_{p+1}(L)$ de manera que $z_1 = z_2 + \partial c$. Però $C_{p+1}(L)$ és un subgrup de $C_{p+1}(L_1)$ i $C_{p+1}(L_2)$, de manera que $[z_1]_{L_1} = [z_2]_{L_1}$ i $[z_1]_{L_2} = [z_2]_{L_2}$.

El següent homomorfisme és ψ :

$$\begin{aligned} \psi : H_p(L_1) \oplus H_p(L_2) &\longrightarrow H_p(K) \\ ([z_1]_{L_1}, [z_2]_{L_2}) &\longmapsto [z_1 + z_2]_K \end{aligned}$$

De nou, si z_1 és un cicle en $C_p(L_1)$ i z_2 un cicle en $C_p(L_2)$, també seran cicles en $C_p(K)$ i, per tant, la suma dels dos serà un cicle en $C_p(K)$. Vegem que la definició no depèn dels representants triats. Si $[z_1]_{L_1} = [z'_1]_{L_1}$ i $[z_2]_{L_2} = [z'_2]_{L_2}$, existeixen $c_1 \in C_{p+1}(L_1)$ i $c_2 \in C_{p+1}(L_2)$ de manera que $z_1 = z'_1 + \partial c_1$ i $z_2 = z'_2 + \partial c_2$. Així, $z_1 + z_2 = z'_1 + z'_2 + \partial(c_1 + c_2)$. Com $c_1 + c_2 \in C_{p+1}(K)$, $[z_1 + z_2]_K = [z'_1 + z'_2]_K$.

Finalment, definirem l'homomorfisme Δ . Considerem un cicle $z \in Z_p(K)$. Aleshores, com $L_1 \cup L_2 = K$, podem escriure $z = c_1 + c_2$ amb $c_1 \in C_p(L_1)$ i $c_2 \in C_p(L_2)$. Així, $0 = \partial z = \partial c_1 + \partial c_2$ i, aïllant, $\partial c_1 = -\partial c_2 \in C_{p-1}(L_1) \cap C_{p-1}(L_2) = C_{p-1}(L)$. A més, com que $\partial \circ \partial = 0$, $\partial c_1 \in Z_{p-1}(L)$. D'aquesta manera, podem definir:

$$\begin{aligned} \Delta : H_p(K) &\longrightarrow H_{p-1}(L) \\ [z]_K &\longmapsto [\partial c_1]_L \end{aligned}$$

Vegem, com sempre, que la definició no depèn del representant. Suposem que tenim $[z]_K = [z']_K$ amb $z = c_1 + c_2$ i $z' = c'_1 + c'_2$; $c_1, c'_1 \in C_p(L_1)$ i $c_2, c'_2 \in C_p(L_2)$. Aleshores, $z = z' + \partial c$ amb $c \in C_{p+1}(K)$. Podem escriure $c = c_3 + c_4$ amb $c_3 \in C_{p+1}(L_1)$ i $c_4 \in C_{p+1}(L_2)$. D'aquesta manera, $c_1 + c_2 = c'_1 + c'_2 + \partial(c_3 + c_4)$ i, separant als dos costats les cadenes de L_1 i L_2 , respectivament, obtenim $c_1 - c'_1 - \partial c_3 = -c_2 + c'_2 + \partial c_4 \in C_p(L_1) \cap C_p(L_2) = C_p(L)$. Si prenem la imatge per ∂ :

$$\partial(c_1 - c'_1 - \partial c_3) = \partial c_1 - \partial c'_1 \in B_p(L) \Rightarrow [\partial c_1]_L = [\partial c'_1]_L$$

A continuació, anem a construir una seqüència amb aquests homomorfismes, que anomenem la **seqüència de Mayer-Vietoris**, i provarem que és exacta.

Teorema 5.1

Siga K un complex simplicial de dimensió n , L_1 i L_2 dos subcomplexos tals que $L_1 \cup L_2 = K$ i $L = L_1 \cap L_2$. Aleshores la següent seqüència és exacta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_n(L) & \xrightarrow{\phi} & H_n(L_1) \oplus H_n(L_2) & \xrightarrow{\psi} & H_n(K) & \xrightarrow{\Delta} \\
 & & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(L) & \xrightarrow{\phi} & H_{n-1}(L_1) \oplus H_{n-1}(L_2) & \xrightarrow{\psi} & H_{n-1}(K) & \xrightarrow{\Delta} \\
 & & \xrightarrow{\Delta} & \dots & \xrightarrow{\phi} & H_0(L_1) \oplus H_0(L_2) & \xrightarrow{\psi} & H_0(K) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Dem: Començarem provant l'exactitud en $H_n(L)$. Com ja hem vist, açò és equivalent a dir que $\phi : H_n(L) \rightarrow H_n(L_1) \oplus H_n(L_2)$ és injectiva. Per a provar-ho, prenem $[z]_L \in H_n(L)$ de manera que $\phi([z]_L) = ([z]_{L_1}, -[z]_{L_2}) = (0, 0)$. Aleshores $[z]_{L_1} = 0$ i, per tant, $z \in B_n(L_1)$. Però com la dimensió de L_1 és menor o igual que n (per ser subcomplex de K) tenim que $C_{n+1}(L_1) = 0$ i, en conseqüència, $B_n(L_1) = 0$. Així, $z = 0$ i $[z]_L = 0$.

Així mateix, l'exactitud en $H_0(K)$ equival a la suprajectivitat de $\psi : H_0(L_1) \oplus H_0(L_2) \rightarrow H_0(K)$. Com ψ és un homomorfisme, bastarà provar que la classe de cada 0-símplex $v \in K$ té antiimatge. Considerem $[v]_K \in H_0(K)$. Com $L_1 \cup L_2 = K$, tenim que $v \in L_1$ o $v \in L_2$ (o ambdues, però almenys una de les dos condicions es verifica). En el primer cas, $\psi([v]_{L_1}, [0]_{L_2}) = [v + 0]_K = [v]_K$, mentre que en el segon $\psi([0]_{L_1}, [v]_{L_2}) = [0 + v]_K = [v]_K$.

Provarem ara l'exactitud en $H_p(K)$ per a $0 \leq p < n$. Prenem primer $z \in Z_{p+1}(K)$. Podem escriure $z = c_1 + c_2$ amb $c_1 \in C_{p+1}(L_1)$ i $c_2 \in C_{p+1}(L_2)$. Així:

$$\begin{aligned}
 \phi(\Delta([z]_K) = \phi([\partial c_1]_L) = ([\partial c_1]_{L_1}, -[\partial c_1]_{L_2}) &= ([\partial c_1]_{L_1}, [\partial c_2]_{L_2}) = (0, 0) \\
 &\quad \uparrow \\
 &0 = \partial z = \partial c_1 + \partial c_2
 \end{aligned}$$

Per tant, tenim que $\text{Im } \Delta \subseteq \ker \phi$. Per altra banda, prenem $u \in Z_p(L)$ tal que $\phi([u]_L) = (0, 0)$. En eixe cas, $[u]_{L_1} = 0$ i $[u]_{L_2} = 0$ i per tant existeixen $x_1 \in C_{p+1}(L_1)$ i $x_2 \in C_{p+1}(L_2)$ de manera que $u = \partial x_1 = \partial x_2$. Aleshores $\partial(x_1 - x_2) = 0$ i $x_1 - x_2 \in Z_p(K)$. Com $\Delta([x_1 - x_2]_K) = [\partial x_1]_L = [u]_L$, tenim que $\ker \phi \subseteq \text{Im } \Delta$ i hem provat la igualtat.

A continuació ens ocuparem de l'exactitud en $H_p(L_1) \oplus H_p(L_2)$ per a cada $0 \leq p \leq n$. Si prenem $z \in Z_p(L)$, aleshores $\psi(\phi([z]_L)) = \psi([z]_{L_1}, -[z]_{L_2}) = [z - z]_K = 0$, de manera que $\text{Im } \phi \subseteq \ker \psi$. Per altra banda, prenem $([u_1]_{L_1}, [u_2]_{L_2}) \in H_p(L_1) \oplus H_p(L_2)$ de manera que $\psi([u_1]_{L_1}, [u_2]_{L_2}) = [u_1 + u_2]_K = 0$. Aleshores, sabem que $u_1 + u_2 = \partial x$ per a algun $x \in C_{p+1}(K)$. Considerem ara els homomorfismes $\rho_i : C_{p+1}(K) \rightarrow C_{p+1}(L_i)$ per a $i = 1, 2$ que canvien el coeficient de cada $(p+1)$ -símplex que no estiga en L_i a 0 i la resta els deixen fixes. Observem que cada $(p+1)$ -símplex de x està o bé en L_1 o bé en L_2 , de manera que cada terme de x apareix com a mínim una vegada en $\rho_1(x) + \rho_2(x)$. Així, els únics símplex que queden amb coeficient distint de zero en $x - \rho_1(x) - \rho_2(x)$ són els que estan al mateix temps en L_1 i L_2 , perquè els termes corresponents es resten dos vegades. Podem concloure, doncs, que $x - \rho_1(x) - \rho_2(x) \in C_{p+1}(L)$ i, per tant, $\partial x - \partial \rho_1(x) - \partial \rho_2(x) \in B_p(L)$. Si substituïm l'expressió de ∂x i agrupem, tenim que $(u_1 - \partial \rho_1(x)) + (u_2 - \partial \rho_2(x)) \in B_p(L)$, amb $u_1 - \partial \rho_1(x) \in C_p(L_1)$ i $u_2 - \partial \rho_2(x) \in C_p(L_2)$. Tanmateix, cap d'aquests dos sumands pot tindre símplex que

no estiguen en L amb coeficient distint de 0, ja que en eixe cas la suma d'ambdós no podria estar en $B_p(L)$. A més, tenim que u_1 i u_2 són cicles per definició, i $\partial\rho_1(x)$ i $\partial\rho_2(x)$ són cicles per ser vores, de manera que concloem que $u_1 - \rho_1(x) \in Z_p(L)$ i $u_2 - \rho_2(x) \in Z_p(L)$. Així, com $[(u_1 - \partial\rho_1(x)) + (u_2 - \partial\rho_2(x))]_L = 0$, es té que $[u_1 - \partial\rho_1(x)]_L = -[u_2 - \partial\rho_2(x)]_L$ i, en conseqüència, $[u_1 - \partial\rho_1(x)]_{L_2} = -[u_2 - \partial\rho_2(x)]_{L_2}$. Així mateix, $[u_i - \partial\rho_i(x)]_{L_i} = [u_i]_{L_i}$ per a $i = 1, 2$. Aplicant tot açò:

$$\phi([u_1 - \partial\rho_1(x)]_L) = ([u_1 - \partial\rho_1(x)]_{L_1}, -[u_1 - \partial\rho_1(x)]_{L_2}) = ([u_1]_{L_1}, [u_2 - \partial\rho_2(x)]_{L_2}) = ([u_1]_{L_1}, [u_2]_{L_2})$$

Així, $\ker \psi \subseteq \text{Im } \phi$ i hem provat la igualtat.

Només ens resta provar l'exactitud en $H_p(K)$ per a cada $0 < p \leq n$. Per un costat, donat un $([z_1]_{L_1}, [z_2]_{L_2}) \in H_p(L_1) \oplus H_p(L_2)$:

$$\Delta(\psi([z_1]_{L_1}, [z_2]_{L_2})) = \Delta([z_1 + z_2]_K) = [\partial z^1]_L = 0$$

per ser z_1 un cicle. Així, $\text{Im } \psi \subseteq \ker \Delta$. A més, si prenem $u \in Z_p(K)$ amb $\Delta([u]_K) = 0$, podem escriure $u = c_1 + c_2$ amb $c_1 \in C_p(L_1)$ i $c_2 \in C_p(L_2)$. D'aquesta manera, $0 = \Delta([u]_K) = [\partial c_1]_L$ i $\partial c_1 = \partial x$ per a algun $x \in C_p(L)$. Açò implica que $\partial(c_1 - x) = 0$ i $c_1 - x \in Z_p(L_1)$. Com $u = c_1 - x + c_2 + x \in Z_p(K)$, aleshores això implica que $c_2 + x \in Z_p(L_2)$. Així, podem considerar $\psi([c_1 - x]_{L_1}, [c_2 + x]_{L_2}) = [c_1 + c_2]_K = [u]_K$ i $\ker \Delta \subseteq \text{Im } \psi$, d'on s'obté la igualtat. ■

Presentem com a corol·lari un dels casos més senzills possibles: quan la intersecció de L_1 i L_2 és buida.

Corol·lari 5.1

Siga K un complex simplicial i L_1 i L_2 dos subcomplexos de manera que $K = L_1 \cup L_2$ i $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Aleshores:

$$H_p(K) \cong H_p(L_1) \oplus H_p(L_2) \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Dem: Evidentment, si la dimensió de K és n , $H_p(K) = 0 = H_p(L_1) \oplus H_p(L_2)$ per a cada $p > n$.

Considerem, doncs $0 \leq p \leq n$. Tots els grups d'homologia de L que apareixen en la seqüència de Mayer-Vietoris seran nuls i, per tant, podem extreure una seqüència exacta curta:

$$0 = H_p(L) \xrightarrow{\phi} H_p(L_1) \oplus H_p(L_2) \xrightarrow{\psi} H_p(K) \xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(L) = 0 \longrightarrow 0$$

on l'últim homomorfisme és la identitat. Notem que aquesta seqüència té sentit inclús en el cas $p = 0$, amb el conveni que els grups negatius d'homologia són tots zero.

Com $H_{p-1}(L) = 0$ i, en particular, és lliure i finitament generat (el conjunt buit és una base), podem aplicar el segon apartat del lema d'escissió (5.1) per afirmar que la seqüència s'escindeix, i el primer apartat per a concloure que $H_p(K) = H_p(L_1) \oplus H_p(L_2) \oplus 0 = H_p(L_1) \oplus H_p(L_2)$. ■

5.3 Un exemple d'aplicació

Per tal d'il·lustrar com es poden determinar els grups d'homologia d'un complex fent ús de la seqüència de Mayer-Vietoris, anem a detallar el següent exemple. Considerem dos cilindres L_1 i L_2 i els "apeguem" per les seues vores. Depenent de com es faça la identificació, podem obtenir un tor (si ambdues s'identifiquen en el mateix sentit) o una botella de Klein (si identifiquem una de les vores de manera que les orientacions siguin coherents i l'altra de manera contrària). Observem que $L = L_1 \cap L_2$ està format, en ambdós casos, per dos circumferències. Així, amb aquest exemple comprovarem que els grups d'homologia de K no depenen només dels subcomplexos L_1 i L_2 i de la seua intersecció L , sinó també de la manera en què es relacionen totes tres.

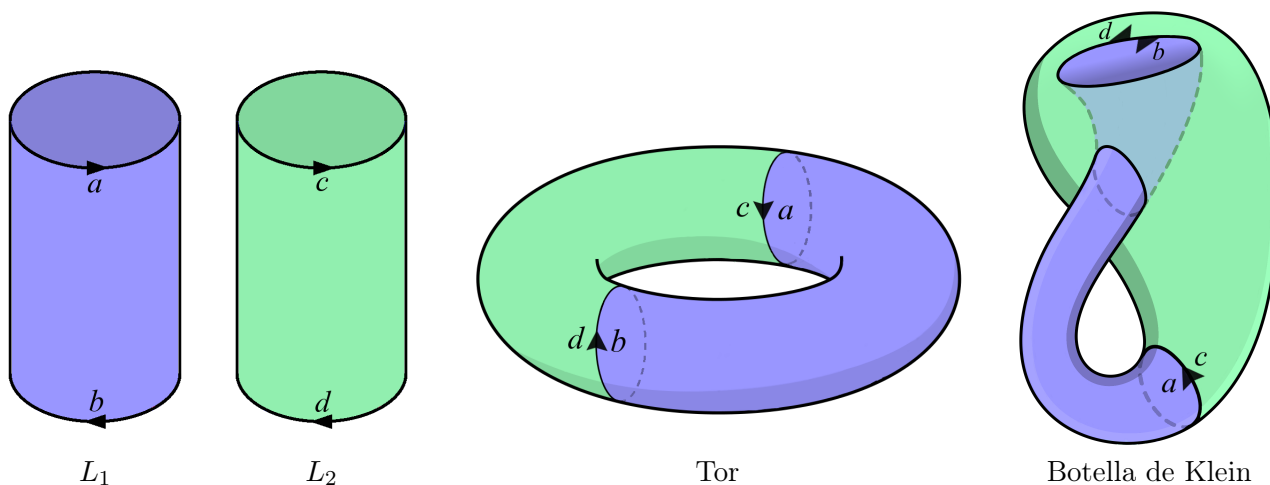


FIGURA 5.1: Representació gràfica dels espais que intervenen a l'exemple.

El primer que farem serà calcular els grups d'homologia de L_1 , L_2 i L mitjançant homologia cel·lular. A la figura 5.2 tenim representats els CW-complexos corresponents.

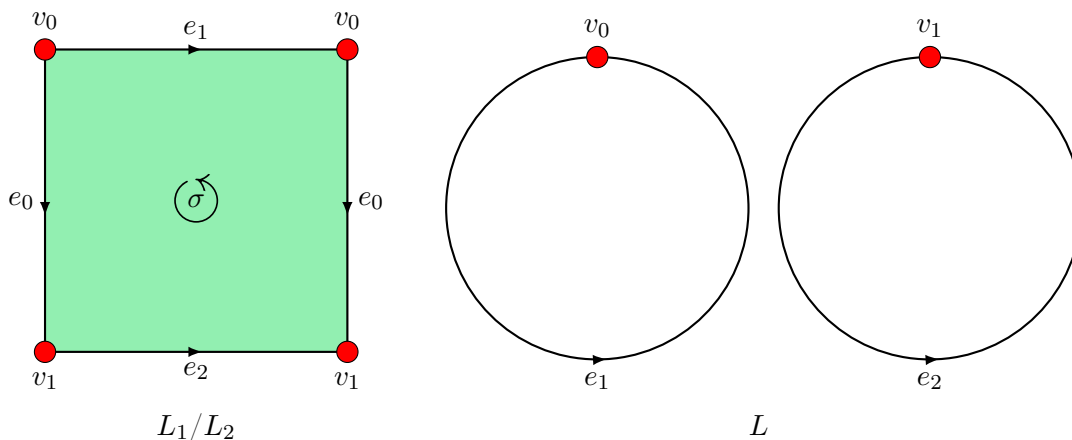


FIGURA 5.2: Complexos cel·lulars corresponents al cilindre (L_1 i L_2) i a les dos circumferències (L).

Començarem pels grups d'homologia de L_1 i L_2 . Òbviament, el cilindre és connex, així que pel teorema 2.2 tenim que $H_0(L_i) \cong \mathbb{Z}$. Per altra banda, $Z_1(L_i) = \langle e_1, e_2 \rangle$ i $B_1(L_i) = \langle \partial\sigma \rangle = \langle e_1 + e_0 - e_2 - e_0 \rangle = \langle e_1 - e_2 \rangle$, de manera que $[e_1]_{L_i} = [e_2]_{L_i}$ i $H_1(L_i) = \langle [e_1]_{L_i} \rangle \cong \mathbb{Z}$. Observem que els generadors e_1 i e_2 corresponen a a i b en L_1 i a c i d en L_2 . Finalment, $Z_2(L_i) = 0$ i per tant $H_2(L_i) = 0$. Val la pena comentar, arribats a aquest punt, que aquests són els mateixos grups d'homologia que obtinguérem per a la banda de Möbius en la secció 2.4. Així, hem provat que el recíproc del corol·lari 3.3 no és cert: existeixen espais no homeomorfs amb els mateixos grups d'homologia. És a dir, els grups d'homologia no caracteritzen l'espai.

Considerem ara L . De nou, podem aplicar el teorema 2.2 per a concloure que, com L té dues components connexes, $H_0(L) \cong \mathbb{Z}^2$. Per altra banda, com $Z_1(L) = \langle e_1, e_2 \rangle$ i $B_1(L) = 0$, $H_1(L) = \langle [e_1]_L, [e_2]_L \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Com en el cas anterior, els generadors e_1 i e_2 corresponen a $a = c$ i $b = d$ en el tor i a $a = c$ i $b = -d$ en la botella de Klein.

A continuació, anem a tractar de trobar els grups d'homologia del tor i de la botella de Klein fent ús de la seqüència de Mayer-Vietoris.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_2(L) \xrightarrow{\phi_2} H_2(L_1) \oplus H_2(L_2) \xrightarrow{\psi_2} H_2(K) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(L) \xrightarrow{\phi_1} H_1(L_1) \oplus H_1(L_2) \xrightarrow{\psi_1} \\ \xrightarrow{\psi_1} H_1(K) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(L) \xrightarrow{\phi_0} H_0(L_1) \oplus H_0(L_2) \xrightarrow{\psi_0} H_0(K) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Substituint els grups que coneixem, la seqüència queda:

$$0 \xrightarrow{\phi_2} 0 \xrightarrow{\psi_2} H_2(K) \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_1} H_1(K) \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi_0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_0} H_0(K) \longrightarrow 0$$

Ara, la idea és emprar l'exactitud de la seqüència i les propietats dels homomorfismes per tal d'esbrinar els grups que desconeixem. Tanmateix, no existeix un mètode general que puguem aplicar sempre, haurem de fer ús de les particularitats de cada cas per intentar obtindre informació a partir del que ja sabem. De fet, es pot donar el cas que la seqüència de Mayer-Vietoris no ens done prou informació per calcular els grups d'homologia de K , i hauríem de recórrer a altres tècniques.

Comencem per $H_2(K)$. Podem partir del resultat del lema 2.1, dient que $H_2(K)/\ker \Delta_2 \cong \text{Im } \Delta_2$. Per l'exactitud de la seqüència tenim que $\ker \Delta_2 = \text{Im } \psi_2 = \psi_2(0) = 0$. Per tant, $H_2(K) \cong H_2(K)/0 \cong \text{Im } \Delta_2 = \ker \phi_1$. Com de ϕ_1 sí coneixem tota la informació, anem a calcular el seu nucli. Sabem que $\phi_1 : H_1(L) \rightarrow H_1(L_1) \oplus H_1(L_2)$, amb $H_1(L) = \langle [e_1]_L, [e_2]_L \rangle$ i $H_1(L_1) \oplus H_1(L_2) = \langle ([e_1]_{L_1}, 0), (0, [e_1]_{L_2}) \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. Recordem, a més, que $e_1 = a = c$ i en el cas del tor $e_2 = b = d$ mentre que en la botella de Klein $e_2 = b = -d$. Així:

$$\begin{aligned} \phi_1([a]_L) &= ([a]_{L_1}, -[a]_{L_2}) = ([a]_{L_1}, -[c]_{L_2}) = \alpha_1 - \alpha_2 \\ \phi_1([b]_L) &= ([b]_{L_1}, -[b]_{L_2}) = ([b]_{L_1}, \pm[d]_{L_2}) = \alpha_1 \pm \alpha_2 \end{aligned}$$

on el signe de la segona imatge depèn de si considerem el tor o la botella de Klein. En el cas del tor, $[b]_{L_2} = [d]_{L_2}$ i $\phi_1[b]_L = \alpha_1 - \alpha_2$. Per tant, $\ker \phi_1 = \langle [a - b]_L \rangle$ i $H_2(K) \cong \mathbb{Z}$. En el cas de la botella de Klein, $[b]_{L_2} = [-d]_{L_2}$, de manera que $\phi_1[b]_L = \alpha_1 + \alpha_2$. Com en aquest cas, les imatges dels dos generadors són linealment independents, $H_2(K) \cong \ker \phi_1 = 0$. Com sempre, açò coincideix amb l'establert al teorema 2.3, perquè el tor és orientable i la botella de Klein no.

Passem ara a $H_1(K)$. En aquest cas considerarem la seqüència exacta curta:

$$0 \longrightarrow \text{Im } \psi_1 \xrightarrow{i} H_1(K) \xrightarrow{\Delta_1} \text{Im } \Delta_1 \longrightarrow 0$$

on i és l'homomorfisme inclusió. A més, per l'exactitud de la seqüència de Mayer-Vietoris, tenim que $\text{Im } \Delta_1 = \ker \phi_0$, amb $\phi_0 : H_0(L) \rightarrow H_0(L_1) \oplus H_0(L_2)$. Com que $H_0(L) = \langle [v_0]_L, [v_1]_L \rangle$ i tenim que $[v_0]_{L_1} = [v_1]_{L_1}$ i $[v_0]_{L_2} = [v_1]_{L_2}$:

$$\phi_0([v_0]_L) = ([v_0]_{L_1}, -[v_0]_{L_2}) = ([v_1]_{L_1}, -[v_1]_{L_2}) = \phi_0([v_1]_L)$$

i, per tant, $\ker \phi_1 = \langle [v_0 - v_1]_L \rangle \cong \mathbb{Z}$. Així, $\text{Im } \Delta_1 = \ker \phi_1$ és lliure i finitament generat i la seqüència s'escindeix. Pel lema d'escissió, $H_1(K) \cong \text{Im } \Delta_1 \oplus \text{Im } \psi_1 = \mathbb{Z} \oplus \text{Im } \psi_1$. Calculem, doncs, $\text{Im } \psi_1$. Com abans, podem emprar el lema 2.1 i l'exactitud per a afirmar $\text{Im } \psi_1 \cong \frac{H_1(L_1) \oplus H_1(L_2)}{\ker \psi_1} = \frac{H_1(L_1) \oplus H_1(L_2)}{\text{Im } \phi_1}$. Com hem vist que $H_1(L_1) \oplus H_1(L_2) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ i $\text{Im } \phi_1 = \langle \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 \pm \alpha_2 \rangle$ tenim que, en el cas del tor, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ i així $\text{Im } \phi_1 = \langle [\alpha_1] \rangle \cong \mathbb{Z}$. En el cas de la botella de Klein, a més, $[\alpha_1] + [\alpha_2] = 0$, la qual cosa implica que $2[\alpha_1] = 0$ i $\text{Im } \phi_1 = \langle [\alpha_1] \rangle \cong \mathbb{Z}_2$. En conclusió, $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$ per al tor i $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ per a la botella de Klein.

Finalment, per a $H_0(K)$ emprarem el fet que ψ_0 és suprajectiva per l'exactitud de la seqüència. Així, $H_0(K) = \text{Im } \psi_0$. Com $H_0(L_1) \oplus H_0(L_2) = \langle ([v_0]_{L_1}, 0), (0, [v_0]_{L_2}) \rangle$:

$$\begin{aligned} \psi_0([v_0]_{L_1}, 0) &= [v_0 + 0]_K = [v_0]_K \\ \psi_0(0, [v_0]_{L_2}) &= [0 + v_0]_K = [v_0]_K \end{aligned}$$

i $H_0(K) = \text{Im } \psi_0 = \langle [v_0]_K \rangle \cong \mathbb{Z}$, resultat que torna a coincidir amb el del teorema 2.2 perquè tant el tor com la botella de Klein són connexos.

Capítol 6

Aplicació a l'anàlisi musical

En aquest capítol tractarem d'aplicar els conceptes presentats en aquest treball a l'àmbit musical. Començarem amb alguns conceptes bàsics i un poc de context històric.

6.1 L'estructura matemàtica del sistema cromàtic

L'*altura* d'un so (és a dir, com n'és de greu o agut) és una magnitud relacionada amb la freqüència de l'ona que el genera i, com a tal, pot prendre un rang continu de valors. Tanmateix, en música es discretitza aquest rang de possibles valors a unes poques freqüències donades, que anomenem *notes*.

La majoria de la música occidental, des del barroc fins als nostres dies, fa servir un sistema de 12 notes anomenat *sistema cromàtic*. En ell, s'empren dotze freqüències fixades i els productes d'aquestes per totes les potències de 2 (positives i negatives). Tanmateix, tots aquestos productes s'identifiquen amb la freqüència original per a obtenir el què es denomina una *classe d'altures* o, per abús de notació, simplement *nota*. Així, l'espai resultant és un conjunt bijectiu amb \mathbb{Z}_{12} . Per a referir-nos als elements d'aquest conjunt, farem ús del sistema de notació americà, que empra lletres majúscules, començant per la *A* per a la nota que coneixem com a *la*, de la següent manera:

$$\{A, A\sharp = B\flat, B, C, C\sharp = D\flat, D, D\sharp = E\flat, E, F, F\sharp = G\flat, G, G\sharp = A\flat\}$$

Els *acords* són conjunts (no ordenats) de notes que sonen al mateix temps. Per exemple, $\{C, E\flat, G\}$ és un acord de tres notes.

6.2 El Tonnetz

Aplicar els conceptes estudiats en capítols anteriors en aquest context pot semblar una idea un poc arbitrària, però en realitat ve motivada per un treball que va publicar el propi Leonhard Euler. En el seu tractat de 1739 "*Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*" va introduir un diagrama, que denominà **Tonnetz** (en alemany, *xarxa tonal*), que representava les relacions intervàliques entre les notes.

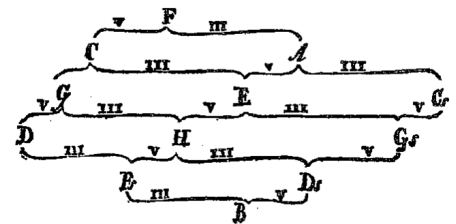


FIGURA 6.1: El Tonnetz tal i com el presentà Euler.

Els musicòlegs del segle XIX, entre ells Hugo Riemann¹, recuperaren aquesta idea per tal de visualitzar i estudiar moviments harmònics al llarg d'una peça. El *Tonnetz* que empraven ja era més paregut als complexos simplicials que hem presentat al primer capítol, amb la diferència que el nombre de símplex no era finit. El concebien com una triangulació d'un pla infinit, on els vèrtexs representaven notes i les arestes seguien tres eixos que corresponien als intervals de quinta justa, tercera major i tercera menor, tal i com es mostra en la figura 6.2.

Aquell grup de teòrics musicals alemanys empraven un sistema d'afinació conegut com a *temperament just*, en el qual la nota *la* a la que s'arriba després d'aplicar un d'aquests tres intervals de manera repetida a un altre *la* mai és exactament un producte d'una potència de 2 per aquesta última². Per tant, encara que dos vèrtexs tingueren l'etiqueta *A*, no s'identificaven perquè no pertanyien a la mateixa classe d'altures.

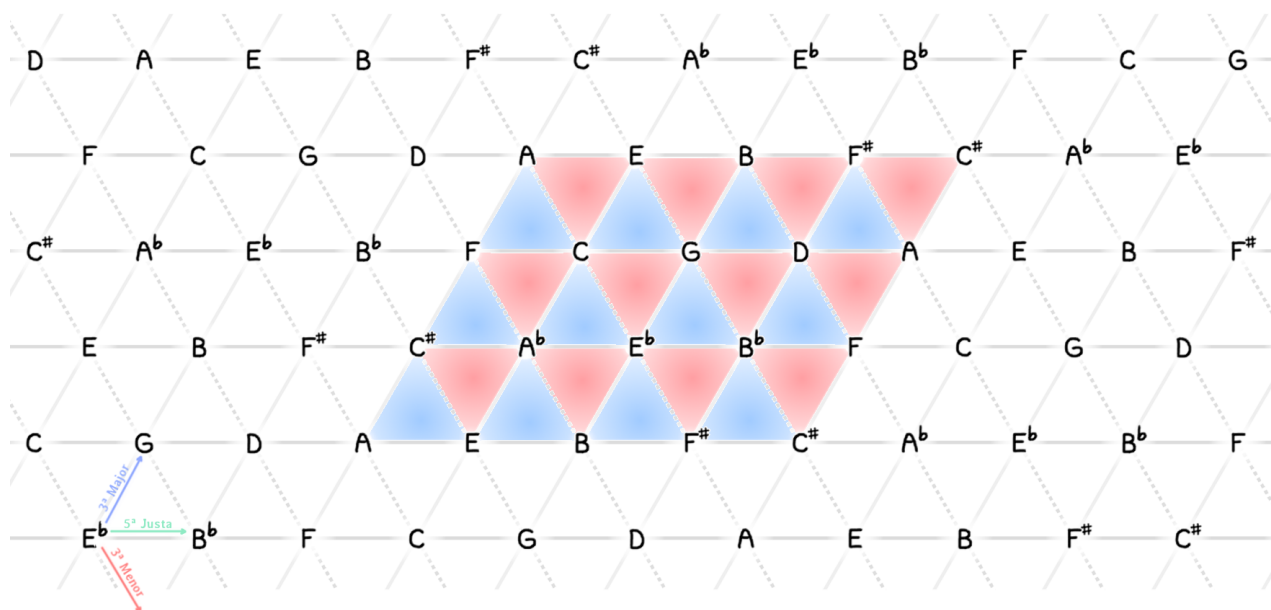


FIGURA 6.2: El Tonnetz del s. XIX i, en color, una representació plana del Tonnetz neo-riemannianà. Per a obtenir el tor cal identificar els costats oposats del paral·lelogram, primer els horitzontals i després els altres dos, fent coincidir les etiquetes dels vèrtexs.

Ja durant el segle XX, els teòrics musicals coneguts com a *neo-riemannians* tornaren a renovar l'interès pel *Tonnetz*. Tanmateix, en aquesta versió, gràcies a la generalització del *temperament igual*³, tots els vèrtexs etiquetats amb la mateixa lletra pertanyen a la mateixa classe d'altures. Identificant-

¹No confondre amb el matemàtic Georg Friedrich Bernhard Riemann.

²Per exemple, una cinquena justa a partir d'una nota es calculava multiplicant la seua freqüència per $\frac{3}{2}$, i és ben clar que una potència d'aquest nombre mai serà potència de 2.

³En aquest sistema d'afinació, per a calcular una cinquena justa a partir d'una nota es multiplica la seua freqüència per $2^{\frac{7}{12}}$, de manera que després de 12 cinquenes es torna a la classe d'altures original. El mateix passa amb la tercera major ($2^{\frac{4}{12}}$) i la tercera menor ($2^{\frac{3}{12}}$).

los, s'obté un complex simplicial finit homeomorf a un tor, que és el *Tonnetz* que s'estudia encara actualment. Els 0-símplexs corresponen a notes, els 1-símplexs a intervals (o acords de dos notes) i els 2-símplexs a acords de tres notes (concretament, tríades majors i menors, en blau i en roig en la figura 6.2 respectivament).

El *Tonnetz* ha sigut un objecte molt útil per a l'estudi i visualització de les anomenades *operacions neo-riemanniànes* que corresponen a simetries d'un 2-símplex respecte alguna de les seues arestes o vèrtexs. Per a una explicació detallada es pot consultar [5]. La ferramenta principal utilitzada per a estudiar-les, des del punt de vista matemàtic, ha sigut la teoria de grups. La topologia entrà en joc quan alguns autors proposaren la generalització del *Tonnetz* a altres estructures basades en intervals i acords diferents. Una classificació dels espais resultants es pot trobar a [4].

6.3 Construcció de complexos simplicials a partir d'acords

Dins d'aquest context, Louis Bigo *et al.* han ideat un mètode per construir complexos simplicials de manera senzilla a partir d'acords. Va ser presentat per primera vegada de manera més general en l'article [2] i, posteriorment, particularitzat a complexos simplicials en [3] i posteriors.

El procediment és el següent. Donat un conjunt d'acords qualsevol, cada acord de n notes es representa per un $(n - 1)$ -símplex els vèrtexs del qual s'etiqueten amb els noms de les notes que el formen. Es considera el conjunt de símplexs format pels símplexs resultants i totes les seues cares. A continuació, s'aplica un mètode conegut com a *autoacoblament* ("self-assembly"). En ell, es comença identificant els 0-símplexs que comparteixen la mateixa etiqueta i , en ordre de dimensió creixent, es van identificant els símplexs que comparteixen les mateixes cares.

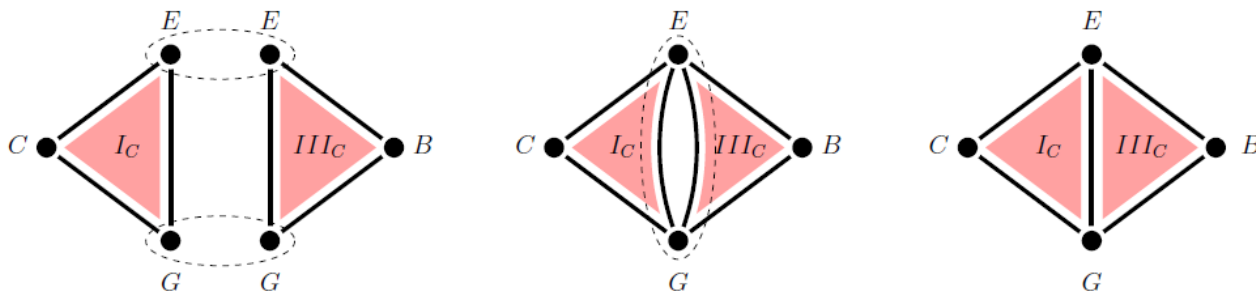


FIGURA 6.3: Imatge extreta de [2] que il·lustra el procés d'autoacoblament. En ella, aquest s'aplica als 2-símplexs corresponents a dues tríades majors, $I_C = (C, E, G)$ i $III_C = (E, G, B)$. Primer s'identifiquen els 0-símplexs amb el mateix nom i , a continuació, l'1-símplex que els té com a extrems.

D'aquesta manera, cada nota i cada acord apareixen representats una única vegada en el complex. Quan es modelitza una seqüència d'acords o un fragment musical mitjançant un complex simplicial emprant aquest mètode, informació com la duració de cada acord o l'ordre dels mateixos es perd.

Mitjançant aquest procés podem recuperar el *Tonnetz* neo-riemannià presentat a la secció anterior considerant el conjunt de totes les possibles tríades majors i menors. Així mateix, podem deduir altres estructures interessants, com ara la següent, que va ser introduïda per Guerino Mazzola: si considerem

les tríades construïdes sobre els graus d'una escala major o menor, el complex resultant és una banda de Möbius.

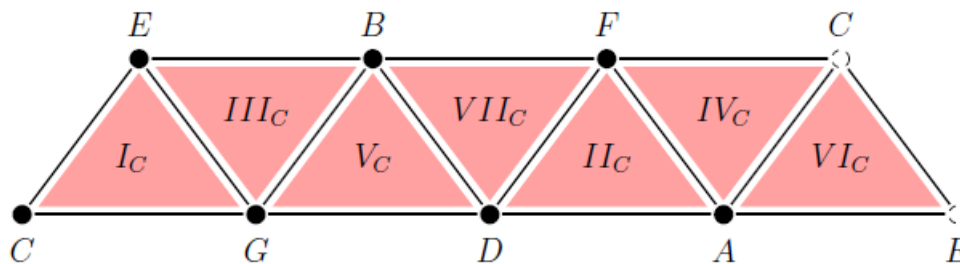


FIGURA 6.4: Representació plana de la banda de Mazzola, construïda a partir de l'escala de do major. Un fet interessant és que els 0-símplexs apareixen en la seua única vora seguint l'ordre de l'anomenat “cercle de quintes” ($F - C - G - D - A - E - B$). Imatge extreta de [2].

6.4 Possible rellevància dels grups d'homologia

Els autors d'aquesta construcció l'han emprada en diversos articles, però en cap d'ells han plantejat la possibilitat que els grups d'homologia dels complexos resultants tinguin alguna significació. En aquesta secció anem a estudiar aquesta possibilitat, examinant alguns exemples.

La idea és la següent. Donada una peça musical, podem fer un anàlisi harmònic de la mateixa i obtenir la seua seqüència d'acords. A continuació, podem aplicar el mètode presentat a la secció anterior al conjunt dels acords trobats i computar els grups d'homologia del complex resultant. La hipòtesi que plantegem és que aquests grups d'homologia ens donen, en algun sentit, una mesura de la “complexitat harmònica” de la peça.

Com que els complexos que s'obtenen es podem complicar prou, tant en nombre com en dimensió dels símplexs, emprarem un *software* específic per al càlcul dels grups d'homologia, anomenant CHomP (*Computational Homology Project*). El programa es pot descarregar gratuïtament a <http://chomp.rutgers.edu>.

Per començar, volem posar a prova la nostra hipòtesi en un cas on l'harmonia siga molt senzilla. L'èxit “*Despacito*”, de Luis Fonsi, és el primer en vindre a la ment. Aquesta cançó, últimament gairebé omnipresent, deu gran part de l'acollida que ha tingut a la seua extrema senzillesa. Harmònicament, el tema està construït en la tonalitat de *re* major, i fa ús de només quatre acords en els seus quasi quatre minuts de duració. Aquests quatre acords formen una progressió que ha sigut àmpliament explotada en la música comercial de les últimes dècades ($vi - IV - I - V$).

El complex simplicial resultant es pot observar a la figura 6.5. Tots els acords són tríades, i per tant el complex és només de dimensió 2. És també digne de remarcar que el vèrtex que pertany a més símplexs és precisament el corresponent a la nota *re*, que és la tònica de la tonalitat.

Evidentment, els grups d'homologia d'aquest complex són tots 0 excepte H_0 que és \mathbb{Z} . En efecte, aquest és el resultat més simple que podíem obtenir, ja que pel teorema 2.2 H_0 només és 0 si el complex simplicial és buit. Així, almenys en aquest cas, la senzillesa dels grups d'homologia reflecteix la senzillesa harmònica de la peça.

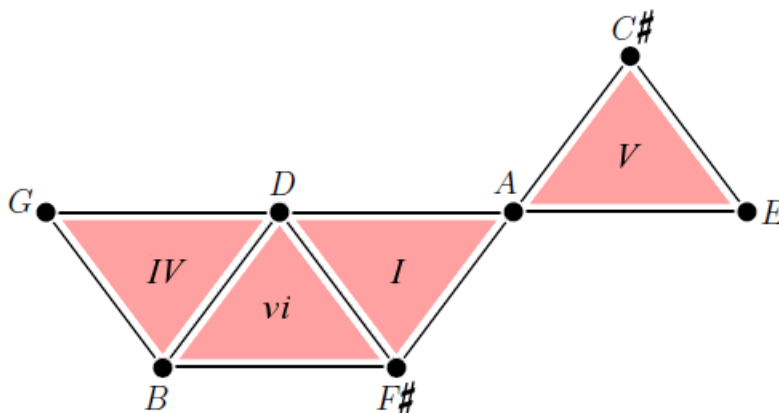


FIGURA 6.5: *Complex simplicial associat al tema “Despacito” de Luis Fonsi.*

A continuació, examinarem els resultats que s’obtenen quan es consideren dos coneguts estàndards de jazz: “*Autumn Leaves*” de Joseph Kosma i la bossa-nova “*Desafinado*” d’Antonio Carlos Jobim. L’harmonia del primer es basa principalment en una progressió coneguda com a *cercle de quartes*, també clàssica però més el·laborada que la de “*Despacito*”. El segon ha estat triat perquè té una harmonia molt més complexa i rica. Els acords d’ambdós temes es poden consultar a la figura 6.6.

Els complexos simplicials resultants són ja massa difícils de visualitzar. El jazz fa ús abundant dels acords de quatre notes, donant lloc a un elevat nombre de 3-símplexs que a sovint fa impossible representar els complexos en \mathbb{R}^3 sense autointerseccions. El tema “*Desafinado*” utilitza, inclús, diversos acords de cinc notes, de manera que el complex que s’obté és de dimensió 4.

<i>Autumn Leaves</i>	<i>Desafinado</i>
$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$	$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$
$H_1(K) \cong \mathbb{Z}^2$	$H_1(K) \cong \mathbb{Z}$
$H_2(K) \cong 0$	$H_2(K) \cong 0$
$H_3(K) \cong 0$	$H_3(K) \cong 0$
$H_4(K) \cong 0$	$H_4(K) \cong 0$

TAULA 6.1: *Grups d’homologia dels complexos simplicials associats als temes de jazz analitzats.*

Si computem directament els grups d’homologia, obtenim els resultats de la taula anterior. Observant-los, pareix que els d’“*Autumn Leaves*” són lleugerament més complexos que els de “*Desafinado*”. Per què?

Arribats a aquest punt, hem d’assenyalar un inconvenient d’aquest mètode. Per a facilitar la seua comprensió, considerarem ara el complex simplicial associat a una peça, no com un objecte estàtic, sinó com la successió de complexos que s’obtenen partint del subcomplex associat al primer acord i afegint successivament els acords en l’ordre en què apareixen en la peça. El nombre de 0-símplexs del complex és sempre 12 com a màxim, ja que eixe és el nombre de notes del nostre sistema. Així, com que el nombre de possibles vèrtexs per als símplexs és tan limitat, quan el nombre d’acords és molt elevat els nous símplexs que s’introdueixen tendeixen a “plenar” els forats del complex, de manera que

els cicles que generaven els grups d'homologia van convertint-se en vores. És a dir, quant major siga el nombre d'acords, major és la probabilitat que els grups d'homologia siguen trivials.

Per tal d'evitar aquest fenomen, quan comparem dos peces emprant aquest mètode, convé triar seccions d'aquestes de longitud similar, tan curtes com siga possible, però de manera que tinguen sentit harmònic complet.

Observem que açò no era un problema en el cas de “*Despacito*”, degut a l'homogeneïtat de l'harmonia al llarg de la peça. El complex associat a una secció (per exemple, la tornada) era idèntic a l'associat a la cançó completa, perquè la mateixa seqüència d'acords es repetia cada quatre compassos. Tanmateix, sí que ho és en aquest cas. Si observem la figura 6.6, comprovem el nombre d'acords distints de “*Desafinado*” és molt més elevat que el d’“*Autumn Leaves*”, de manera que la primera està sofrint el fenomen descrit.

Hem repetit els càlculs amb els complexos associats als primers 16 compassos dels dos temes, que formen en ambdós casos la primera exposició de la secció A. Els resultats es mostren a la següent taula:

<i>Autumn Leaves</i>	<i>Desafinado</i>
$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$	$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$
$H_1(K) \cong \mathbb{Z}$	$H_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$
$H_2(K) \cong 0$	$H_2(K) \cong \mathbb{Z}^2$
$H_3(K) \cong 0$	$H_3(K) \cong 0$
$H_4(K) \cong 0$	$H_4(K) \cong 0$

TAULA 6.2: Grups d'homologia dels complexos simplicials associats als 16 primers compassos dels temes de jazz analitzats.

Comprovem que, en aquest cas, sí s'observa clarament que els grups d'homologia associats a “*Desafinado*” són més complexos que els associats a “*Autumn Leaves*”, tal i com esperàvem.

6.5 Conclusió

En vista dels resultats obtinguts, no es pot descartar que la nostra hipòtesi siga certa. Ara bé, el fet que en aquests exemples haja funcionat bé no ens garanteix que sempre vaja a ser així. Per tal de provar que els grups d'homologia considerats donen, en efecte, una informació rellevant sobre l'harmonia de la peça, hauríem de trobar un significat als cicles que els generen.

Cal remarcar que els complexos simplicials obtinguts depenen d'una anàlisi harmònica prèvia de la peça en qüestió. L'harmonia no és una ciència exacta i, per tant, és possible que una mateixa seqüència de sons pugui admetre diverses interpretacions vàlides. Els complexos associats, per suposat, es poden veure afectats per aquesta classe de tries.

Tanmateix, els avanços recents en el reconeixement d'acords per ordinador ens fan pensar que, de comprovar-se la nostra hipòtesi, en un futur llunyà podria trobar aplicació (junt a altres tècniques) en algorismes de classificació i recomanació de música, per exemple, per a plataformes de música en línia.

Autumn Leaves				Desafinado (Original)	
(Medium Swing)		Joseph Kosma		(Bossa Nova)	Antonio-Carlos Jobim
A	4/4	C _{m7}	F ₇	B ^b _{Δ7}	E ^b _{Δ7}
		A _{∅7}	D _{7b13}	G _{m6}	%
		B	A _{∅7}	D _{7b13}	G _{m6}
		C _{m7}	F ₇	B ^b _{Δ7}	E ^b _{Δ7}
		C	A _{∅7}	D _{7b13}	G _{m7} G ^b ₇ F _{m7} E ₇
		A _{∅7}	D _{7b13}	G _{m6}	%
		A	E _{Δ7}	%	F [#] _{7#11}
		F [#] _{m7}	G [#] _{7b9}	C [#] ₇	C [#] _{7b9}
		F [#] _{m7}	G [#] _{7b9}	%	F _{Δ7}
		F [#] _{m7}	G [#] _{7b9}	C [#] _{m7}	D [#] _{7#9}
		G [#] _{Δ7}	A _{∅7}	A [#] _{m7}	D [#] ₇
		G [#] _{Δ7}	A _{∅7}	A [#] _{m7}	D [#] ₇
		B _{Δ7}	C _{∅7}	C [#] _{m7}	F ₇
		B _{Δ7}	C _{∅7}	C [#] _{m7}	F [#] _{m7}
		E _{Δ7}	%	F [#] _{7#11}	%
		A _{Δ7}	A _{m6}	E _{Δ7}	C [#] _{m7}
		A _{Δ7}	A _{m6}	E _{Δ7}	C [#] _{m7}
		F [#] ₇	F [#] _m	B ₇	G [#] _{∅7}
		F [#] ₇	F [#] _m	B ₇	G [#] _{∅7}
		E ₆	B ₇	%	F _{Δ7}
		E ₆	B ₇	%	F _{Δ7}

FIGURA 6.6: *Acords dels temes de jazz analitzats.*

Bibliografia

- [1] M. A. Armstrong. *Basic topology*. Undergraduate texts in mathematics. Springer, 1983.
- [2] Louis Bigo, Jean-Louis Giavitto i Antoine Spicher. “Building Topological Spaces for Musical Objects”. A: *Mathematics and Computation in Music*. Ed. de Carlos Agon et al. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, pàg. 13-28.
- [3] Louis Bigo et al. “Computation and visualization of musical structures in chord-based simplicial complexes”. A: *International Conference on Mathematics and Computation in Music*. Springer. 2013, pàg. 38-51.
- [4] M. J. Catanzaro. “Generalized Tonnetz”. A: *ArXiv e-prints* (des. de 2016). arXiv: 1612.03519.
- [5] Richard Cohn. “Neo-Riemannian Operations, Parsimonious Trichords, and Their “Tonnetz” Representations”. A: *Journal of Music Theory* 41.1 (1997), pàg. 1-66.
- [6] George E. Cooke i Ross L. Pinney. *Homology of Cell Complexes*. Princeton University Press, 1967.
- [7] Peter Giblin. *Graphs, Surfaces and Homology*. 3a ed. Cambridge University Press, 2010.
- [8] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.
- [9] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984.
- [10] F. Mascaró Bonín; J. Monterde García-Pozuelo; J. J. Nuño i R. Sivera. *Introducció a la topologia*. 2a ed. Universitat de València, 2011.
- [11] M^a del Carmen Romero Fuster. *Apuntes de Homologia*.