

Apunts de Matemàtiques per a Ciències i Enginyeries

Rafael López Machí

Javier Pastor Murcia

Índex

Capítol I: Introducció a MatLab	3
1.1 Comandaments bàsics. Variables	4
1.1.1 Vectors, matrius i polinomis	6
1.1.2 Funcions	12
1.1.3 Càlcul simbòlic	13
1.2 Gràfics en MatLab	14
1.2.1 Gràfiques de funcions $y = f(x)$	14
1.2.2 Gràfiques en 3D	18
1.3 Arxius d'instruccions. Programació amb MatLab	20
1.3.1 Control del flux. Bucles	21
1.3.2 Entrada de valors des de teclat	22
1 Càlcul Numèric	23
Capítol II: Solució numèrica d'equacions no lineals	25
2.1 Introducció	25
2.2 Mètode de la bisecció	26
2.3 Mètode de regula falsi	27
2.4 Mètode de la secant	27
2.5 Mètode de Newton-Raphson	29
2.6 Mètode del punt fix	29
Capítol III: Mètodes numèrics per a la resolució de sistemes d'equacions lineals	31
3.1 Mètodes directes	32
3.1.1 Factorització LU	33
3.1.2 La factorització $PA = LU$	34
3.2 Mètodes iteratius	35

3.2.1	Generació de mètodes iteratius	35
3.2.2	Mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel	36
3.2.3	Convergència dels mètodes iteratius	37
Capítol IV: Polinomis d'interpolació		41
4.1	Interpolació polinòmica	41
4.2	Polinomi interpolador de Lagrange	43
4.3	Polinomi interpolador de Newton	43
4.4	Error d'interpolació	44
4.5	Interpolació segmentària	45
4.5.1	Error en la interpolació segmentària	46
4.5.2	Interpolació d'Hermite	47
4.5.3	Interpolació per splines	48
Capítol V: Integració numèrica		51
5.1	Fórmula del rectangle	52
5.2	Fórmula del punt mitjà	52
5.3	Fórmula dels trapezis	52
5.4	Fórmula 1/3 de Simpson	53
5.5	Fòrmules compostes	53
5.6	Integració numèrica d'equacions diferencials	57
5.6.1	Mètode d'Euler	57
5.6.2	Procediment d'Euler-Cauchy millorat	58
5.6.3	Algorismes de Runge-Kutta	58
2	Probabilitat i estadística	61
Capítol VI: Teoria elemental del mostreig estadístic		63
6.1	Introducció	63
6.2	Paràmetres mostrals	63
6.3	Probabilitat	64
6.4	Variables aleatòries	68
6.4.1	Funcions de distribució i de densitat	68
6.5	Distribucions de probabilitat	70
6.5.1	Distribucions discretes	70
6.5.2	Distribucions contínues	74

Índex	3
6.6 Tractament d'errors	77
6.6.1 Tractament estadístic d'errors experimentals	77
6.7 Interval de confiança	80
6.7.1 Interval de confiança per a la mitjana μ d'una distribució normal	81
6.7.2 Interval de confiança per a la variància d'una distribució normal	82
6.7.3 Interval de confiança per a una proporció	82
6.7.4 Interval de confiança per a la diferència de mitjanes de distribucions normals	83
6.7.5 Interval de confiança per al quocient de dues variàncies de distribucions normals	83
6.7.6 Interval de confiança per a la diferència de dues proporcions	84
6.8 Contrast d'hipòtesis	84
6.8.1 Contrast d'una mitjana d'una distribució normal	85
6.8.2 Contrast d'una variància d'una distribució normal	86
6.8.3 Contrast del paràmetre p d'una distribució binomial	87
6.8.4 Comparació de dues mitjanes de distribucions normals	87
6.8.5 Comparació de dues variàncies	88
6.8.6 Comparació de dos percentatges	89
6.8.7 El test χ^2 de bondat d'ajustament	89
Capítol VII: Anàlisi de regressió	91
7.1 Recta de regressió	91
7.2 Interval de confiança	94
7.2.1 Interval de confiança per als paràmetres	95
7.2.2 Prediccions	96
7.3 Ajustaments per mínims quadrats	96
7.3.1 Ajust d'una recta	96
7.3.2 Ajust d'una paràbola	97
7.3.3 Ajust hiperbòlic	97
7.3.4 Ajust potencial	98
7.3.5 Ajust d'una funció exponencial	98
Capítol VIII: Taules de probabilitat	99
8.1 Taula per a la normal tipificada	100
8.2 Taula per a la χ^2 de Pearson	101
8.3 Taula per a la t de Student	102

8.4	Taules per a la f de Snedecor a 0.95 i 0.99	103
-----	---	-----

Introducció

El text que es presenta en aquests *Apunts* representa un resum, tant dels principals conceptes teòrics com dels formularis corresponents, dels temes que conformen els continguts de les matèries de matemàtiques en diversos graus de la Universitat de València.

En particular, estan adaptats al temari de les assignatures de Matemàtiques II del grau de Química i a les assignatures Matemàtiques III dels diversos graus en Enginyeries, que comparteixen aproximadament el mateix temari i continguts.

Així, s'ha inclòs una introducció al programari MatLab, ja que aquest és el més utilitzat, si no l'únic, en els apartats de pràctiques de laboratori dels graus esmentats.

S'han dividit posteriorment els continguts en dues grans parts:

Una primera de càlcul numèric, que inclou els temes que conformen aquesta part del temari, tant de les Matemàtiques III de les Enginyeries com de la part de mètodes numèrics de Matemàtiques II de Química: Solució numèrica d'equacions no lineals, Mètodes numèrics per a sistemes d'equacions lineals, Interpolació polinòmica i Integració numèrica, tant d'integrals definides com d'equacions diferencials.

Una segona part, més detallada, dedicada a l'estudi de la teoria de la probabilitat, les distribucions discretes i contínues, les estimacions de paràmetres puntuals i per interval i el contrast d'hipòtesis. També s'inclou en aquesta part el contingut corresponent a l'anàlisi de regressió i les diferents classes d'ajustaments que es fan utilitzant el mètode de mínims quadrats.

S'ha de tenir en compte que, com hem dit al principi, es tracta d'un resum de continguts teòrics i formulari, que es posa a l'abast dels estudiants, per a tenir un model unificat a l'hora d'emprar-lo tant en el desenvolupament habitual de les classes com perquè servisca de material de consulta que l'alumne pot utilitzar en els examens en aquelles assignatures que ho permeten.

Capítol I

Introducció a MatLab

MatLab és un sistema interactiu per a càlcul científic. El nom ve de la abreviatura de MATrix LABoratory, ja que en realitat treballa amb matrius.

La sintaxi de MatLab és prou elemental, de manera que amb un mínim de coneixements es poden començar a resoldre problemes numèrics relativament senzills. A més, permet fer representacions gràfiques amb molta facilitat.

MatLab disposa d'una gran quantitat de funcions ja definides (incorporades), amb les quals es poden cobrir els aspectes més generals del càlcul matemàtic i científic. A més, en disposar de codi propi, MatLab es programable, és a dir, es poden definir i emprar com a funcions pròpies algorismes de programació definits pel mateix usuari.

Els fitxers d'ordinador on s'emmagatzemen les funcions que es programen amb MatLab tenen l'extensió `.m`

Una funció convenient és `diary`, seguida del nom d'un fitxer amb l'extensió `.dia`. Això guarda en el fitxer especificat tota la sessió que fem amb MatLab fins que donem l'ordre `diary off`. MatLab guarda per defecte els fitxers generats en un directori canònic del sistema que s'estiga utilitzant (Els meus documents, etc.). Si es vol canviar aquest directori s'ha de buscar en el menú corresponent de la interfície d'usuari i definir la ruta completa al directori nou.

És important recordar que MatLab fa distinció entre majúscules i minúscules, és a dir, una ordre o una variable són diferents si tenen noms diferents o, amb els mateixos caràcters, alguns són diferents quant a majúscules o minúscules. Les ordres internes predefinides en MatLab sempre s'escriuen amb minúscules.

També té una forma fàcil d'accedir a l'ajuda en línia: simplement teclejant `help` dona una llista de tots els comandaments. Si volem l'ajuda per a una ordre particular és suficient teclejar `help` amb el nom de l'ordre, per exemple, `help sin`.

1.1 Comandaments bàsics. Variables

Comencem amb l'aritmètica bàsica. MatLab té incorporats la majoria de símbols matemàtics amb els quals treballem habitualment. Entre ells les operacions bàsiques: suma (+), diferència (-), producte (*), quocient (/) i potència (^).

Les ordres s'escriuen a continuació del 'prompt', >>, és a dir

```
>> 2^3
```

i s'executen quan es prem 'intro' en el teclat numèric.

Es poden utilitzar les funcions matemàtiques habituals, per exemple, per a calcular l'arrel quadrada de 2 farem:

```
>> sqrt(2)
ans =
    1.4142
```

Les operacions s'avaluen per ordre de prioritats: primerament les potències, després multiplicacions i quocients i finalment sumes i restes. Les operacions d'igual prioritats s'avaluen en l'ordre en què estan escrites d'esquerra a dreta. Aquest ordre pot canviar-se amb l'ús dels parèntesis. Vegem-ne uns quants exemples:

```
>> 2+5/2
ans =
    4.5000
```

```
>> 2/5+2
ans =
    2.4000
```

```
>> 2+5^2
ans =
    27
```

Els resultats anteriors no s'assignen a cap variable en concret, però la darrera resposta es pot recuperar amb l'ordre `ans` (de l'anglès, *answer*). No obstant això, si assignem el càlcul a una variable, el resultat queda emmagatzemat sota el seu nom:

```
>> resultat=3+2^5
resultat =
    35
```

Per a recuperar el valor d'una variable n'hi ha prou amb escriure'n el nom:

```
>> resultat*2
ans =
    70
```

Si afegim un punt i coma (;) darrere de qualsevol instrucció, no es retornarà cap resposta, però no per això es deixa d'executar la instrucció:

```
>> x=3*sqrt(12);
>> x
x =
    10.3923
```

També hi ha variables amb un valor predeterminat, però es perden si s'assigna qualsevol altre valor:

```
>> pi
ans =
    3.1416
>> pi=2; pi
pi =
    2
```

L'usuari pot controlar el nombre de decimals amb què apareixen els valors de les variables, cosa que no està relacionada amb la precisió amb què s'obtenen, només es tracta de la seua representació en pantalla. Per a canviar la representació del valor s'utilitza l'ordre `format`, o bé en la interfície gràfica `Preferences --> Numeric --> Format`. Els formats disponibles més usuals són: `format long`, `format short`, `format long e`, `format short e`, `format rat`. El format per defecte és el format `short` de quatre xifres decimals. Encara que, com hem dit, la representació interna del valor sempre és la mateixa (format de doble precisió).

```
>> z=sqrt(2)
z =
    1.4142
>> format long; z
z =
    1.414213562373095
```

```
>> format long e; z
z =
    1.414213562373095e+00
```

Per a evitar errors o confusions amb els noms de les variables i els seus valors assignats, a vegades és convenient que MatLab les “oblidi”. Açò s’aconsegueix mitjançant l’ordre `clear` en la forma `clear z`, si volem “oblidar” la variable `z` o també `clear all` si volem “oblidar” totes les variables definides anteriorment. D’aquesta manera, els valors de les variables predefinides recuperen el seu valor inicial.

1.1.1 Vectors, matrius i polinomis

Per a definir un vector fila n’hi ha prou amb introduir les seues components, separades per espais (o comes), entre claudàtors:

```
>> v=[1 2 3]
v =
     1     2     3
```

Per a definir una matriu ho farem escrivint les seues files separant cadascuna amb el signe ;

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6]
A =
     1     2     3
     4     5     6
```

D’aquesta manera, si es vol introduir un vector directament com a vector columna escriurem les seues components separades per ;

```
>> w=[3; 4; 6]
w =
     3
     4
     6
```

L’operador `'` s’utilitza per a transposar vectors i matrius, de manera que també podem definir vectors columna amb `w'`.

```
>> v',A',
ans =
```

```

1
2
3
ans =
1     4
2     5
3     6

```

(Si alguna component del vector o la matriu fóra complex, també el canviaria pel seu conjugat).

De vegades resulta útil poder definir vectors o matrius que tenen totes les seues components nul·les, o formades per uns:

```

>> w=zeros(1,4),v=zeros(4,1), u=ones(1,3),
w =
0     0     0     0
v =
0
0
0
0
u =
1     1     1

```

També podem definir de manera directa la matriu identitat de qualsevol ordre amb la funció `eye`:

```

>> eye(4)
ans =
1     0     0     0
0     1     0     0
0     0     1     0
0     0     0     1

```

Si volem definir una matriu que té com a diagonal principal un cert vector, farem

```

>> v=[1 2 3]; M=diag(v),
M =
1     0     0
0     2     0
0     0     3

```

Inversament, la funció `diag` aplicada a una matriu retorna el vector de la seua diagonal principal.

```
>> diag(M)
ans =
     1
     2
     3
```

L'ordre `diag` permet també de treballar amb altres diagonals de una matriu.

Per a recuperar les components individuals d'un vector o una matriu, utilitzarem el nom de l'objecte i la posició que volem recuperar:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9], A(2,3),
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
ans =
     6
```

També podem accedir a una matriu com si totes les seues columnes formaren una única columna. Així:

```
>> A(1:5)
ans =
     1     4     7     2     5
```

O bé també podem accedir a qualsevol submatriu. Per a extraure la segona columna farem:

```
>> A(:,2)
ans =
     2
     5
     8
```

Per a obtenir, per exemple, la submatriu formada pels elements que hi ha entre les files segona i tercera i d'aquestes els que hi ha en les columnes primera i tercera farem

```
>> A(2:3,[1,3])
ans =
     4     6
     7     9
```

Una característica important és que es poden definir vectors amb components igualment espaiades de manera automàtica. Per exemple, si volem un vector de manera que la primera component siga 0, la darrera 20 i estiguen espaiades de dos en dos, farem:

```
>> v1=0:2:20
v1 =
     0     2     4     6     8    10    12    14    16    18    20
```

De manera equivalent, si sabem que la primera component del vector és 0, la darrera 20 i que n'hi ha onze en total, farem:

```
>> v2=linspace(0,20,11)
v2 =
     0     2     4     6     8    10    12    14    16    18    20
```

Les operacions habituals entre vectors es representen amb els operadors habituals, així com les funcions matemàtiques habituals:

```
>> v=[1 2 3]; w=[4 5 6]; v+w, v/2, sqrt(w),
ans =
     5     7     9
ans =
    0.5000    1.0000    1.5000
ans =
    2.0000    2.2361    2.4495
```

Una excepció és la potènciació, per a la qual hem d'utilitzar la funció `power`:

```
>> power(v,2)
ans =
     1     4     9
```

No obstant això, per a la potènciació, així com també per a altres operacions amb vectors i matrius, es pot utilitzar una notació particular que "adverteix" que la variable és vectorial. Afegint simplement un punt (.) l'operació es fa sobre cada element de la variable vectorial. Així, encara que v^2 retornaria un error perquè v és un vector, l'operació

```
>> v.^2
ans =
     1     4     9
```

actua de la mateixa manera que `power(v, 2)`.

Amb matrius, si indiquem la matriu i l'operació potència, retorna el resultat de multiplicar la matriu per ella mateixa tantes vegades com s'indica en la potència, com a operació matricial.

```
>> A^2
ans =
    30    36    42
    66    81    96
   102   126   150
```

Ara bé, si indiquem la matriu seguida del punt (`.`), el resultat és la matriu formada per la potència indicada sobre cada element de la matriu.

```
>> A.^2
ans =
     1     4     9
    16    25    36
    49    64    81
```

De la mateixa manera com ho faria l'ordre `power`

```
>> power(A,2)
ans =
     1     4     9
    16    25    36
    49    64    81
```

També les versions vectorials dels operadors multiplicació i divisió, s'escriuen amb `.*` i `./`.

També es poden utilitzar les operacions en definir el vector (o la matriu):

```
>> v=(0:0.2:1)*pi
v =
     0     0.6283     1.2566     1.8850     2.5133     3.1416
```

Finalment, també es pot calcular el nombre d'elements, `length`, el màxim de les seues components, `max`, la seua suma, `sum`, el producte escalar, `dot`, el vectorial, `cross`, etc. Com que una matriu es considera com un vector de vectors disposats en columnes, la funció `length` retorna el nombre de columnes. Per a saber la dimensió utilitzarem la funció `size`


```
>> A=[1 2 3;4 5 6];v=[1 2 3];w=[4 5 6]; length(v), length(A), dot(v,w),
cross(v,w), size(A),
ans =
     3
ans =
     3
ans =
    32
ans =
    -3     6    -3
ans =
     2     3
```

(Notem que l'ordre `size` retorna un vector).

De la mateixa manera que definim un vector, també podem definir un polinomi, si donem els valors dels seus coeficients. Així, per a definir el polinomi $p = x^4 + 2x^3 - 3x + 2$ faríem:

```
>> p=[1 2 0 -3 2]
p =
     1     2     0    -3     2
```

i per a avaluar-lo per a un cert valor de x , per exemple $x = -2$, utilitzarem la funció `polyval`:

```
>> polyval(p,-2)
ans =
     8
```

Les arrels s'obtenen amb la funció `roots`:

```
>> roots(p)
ans =
   -1.6449 + 0.9988i
   -1.6449 - 0.9988i
    0.6449 + 0.3523i
    0.6449 - 0.3523i
```

També es pot calcular el producte de dos polinomis i el seu quocient, amb les funcions `conv` i `deconv`:

```
>> p=[2 0 1];q=[3 -1 2];prod=conv(p,q),deconv(prod,q),
prod =
     6     -2     7     -1     2
ans =
 2.0000         0  1.0000
```

1.1.2 Funcions

MatLab disposa de les funcions matemàtiques habituals i el seu ús és també l'habitual: el nom de la funció i entre parèntesi el valor sobre el qual actua.

```
>> cos(pi), tan(pi/4), log(1),exp(1),sqrt(5),sqrt(-4),
ans =
 -1.0000
ans =
 1.0000
ans =
 0
ans =
 2.7183
ans =
 2.2361
ans =
 0 + 2.0000i
```

Funcions definides per l'usuari L'usuari pot definir les seues pròpies funcions i assignar-los el nom que desitge. La manera més simple consisteix a crear un fitxer que tinga el nom de la funció i continga la definició d'aquesta. Per exemple

```
function y=fsincos(x)
    y=sin(2*x).*cos(5*x);
end
```

fsincos és el nom que donem a la funció (que serà el mateix del fitxer en què guardem aquest codi). Així podrem avaluar el valor d'aquesta funció en el punt o els punts que necessitem, i també dibuixar-ne la gràfica (vegeu la secció següent). En l'expressió de la funció utilitzem l'operador .* perquè pugua actuar sense errors també sobre variables vectorials i matricials.

Per a definir funcions de manera directa en mode línia es pot utilitzar l'expressió `@(x)` per a definir la variable i a continuació la funció. Així

```
fsincos=@(x)sin(2*x).*cos(5*x)
```

produiria el mateix resultat que la funció anterior.

Així mateix, hi ha altres mètodes, com l'ús de `inline` que es poden utilitzar per a definir una funció dintre d'un determinat context.

```
>> h=inline('2*x*y','x','y')
h =
    Inline function:
    h(x,y) = 2*x*y
>> h(2,3)
ans =
    12
```

Es poden definir també funcions que facen diversos càlculs diversos. Per exemple

```
function [m,s] = medesv(x)
    n = length(x);
    m = sum(x)/n;
    s = sqrt(sum((x-m).^2)/n);
end
```

retorna la mitjana i la desviació típica dels elements del vector `x` en les variables `m` i `s`.

1.1.3 Càlcul simbòlic

Si del que es tracta és de definir una funció per a, a més d'obtenir valors numèrics o representació gràfica, efectuar diversos càlculs, com ara derivació, integració, etc., es fa necessari indicar explícitament a MatLab quina és la variable que intervé en la funció i respecte de la qual es farà el càlcul.

Així, cal indicar la variable simbòlica mitjançant l'ordre `syms`, per a posteriorment poder operar respecte d'aquesta variable. Per exemple, per a obtenir la derivada respecte a la variable `x` en la funció `fsincos` definida anteriorment, faríem

```
>> syms x; diff(fsincos(x),x)
ans =
    2*cos(2*x)*cos(5*x) - 5*sin(2*x)*sin(5*x)
```

1.2 Gràfics en MatLab

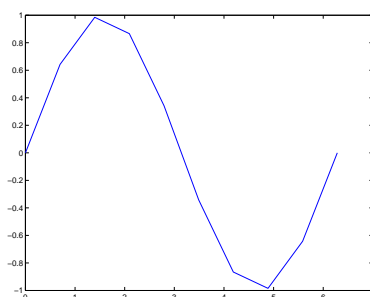
MatLab té un gran potencial a l'hora d'utilitzar ferramentes gràfiques.

1.2.1 Gràfiques de funcions $y = f(x)$

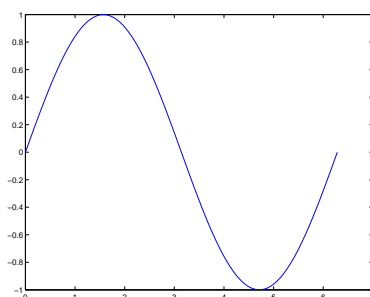
Si volem representar, per exemple, la funció $y = \sin x$, primerament definirem els valors de la variable x . Això ho podem fer definint x com un vector de valors igualment espaiats entre dos donats. Després avaluarem la funció sobre els elements del vector i finalment farem la gràfica.

```
x=linspace(0,2*pi,10);y=sin(x);plot(x,y)
```

El resultat serà una gràfica com aquesta:



que ens deixa un poc decebuts pel seu aspecte. És clar que només 10 punts en l'interval $[0, 2\pi]$ és insuficient per a obtenir una corba "suau". Si utilitzem 100 punts:



obtenim un resultat acceptable. Podrem fer la gràfica més completa amb diferents opcions que anirem veient.

El mateix resultat anterior el podem aconseguir de manera directa amb la funció `fplot`:

```
>> fplot('sin(x)', [0,2*pi])
```

que proporciona de manera directa la gràfica de la funció. Com que `sin` és una funció ja definida en l'entorn de MatLab, no seria necessari especificar la variable, és a dir, `fplot('sin',[0,2*pi])` proporciona el mateix resultat.

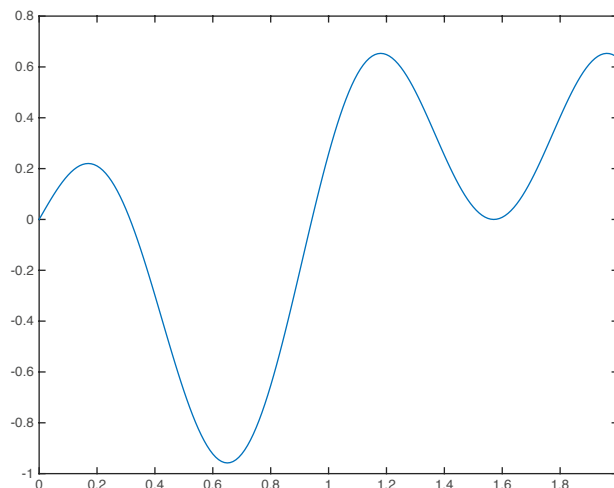
Per a fer la gràfica de la funció `fsincos` que havíem definit abans podem fer:

```
>> x=0:0.01:5; y=fsincos(x); plot(x,y)
```

o bien

```
>> fplot('fsincos',[0,2])
```

lo que produce la gráfica

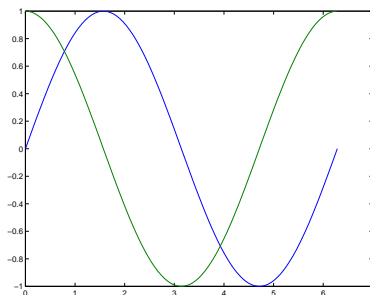


O també, si hem definit la funció f mitjançant l'operador $@(x)$, podem fer directament `fplot(f,[0, 2*pi])`.

Cada vegada que fem un gràfic, MatLab el presenta en una finestra addicional. Si volem anar superposant diferents gràfics en la mateixa finestra, haurem d'activar `hold on`. Així

```
>> hold on  
>> fplot('sin(x)',[0,2*pi])  
>> fplot('cos(x)',[0,2*pi])
```

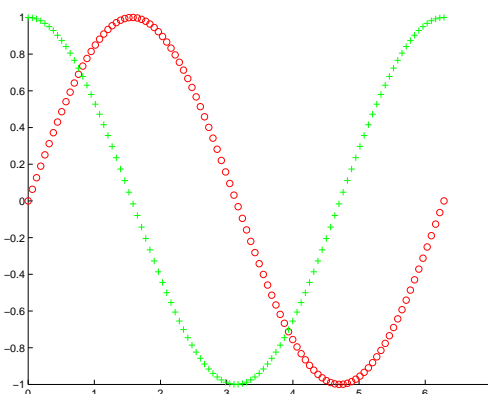
ens mostrarà els dos gràfics.



També podríem haver obtingut el mateix resultat si dibuixarem les dues gràfiques en una mateixa comanda plot:

```
x=linspace(0,2*pi,100); y=sin(x); z=cos(x); plot(x,y,x,z)
```

Per a fer els gràfics més “agradables” podem utilitzar un bon grapat d'opcions. Si voleu saber-les totes, entreu `help plot` i podreu fer, per exemple:



Per a modificar els eixos que apareixen per defecte, utilitzarem l'ordre `axis`, per exemple,

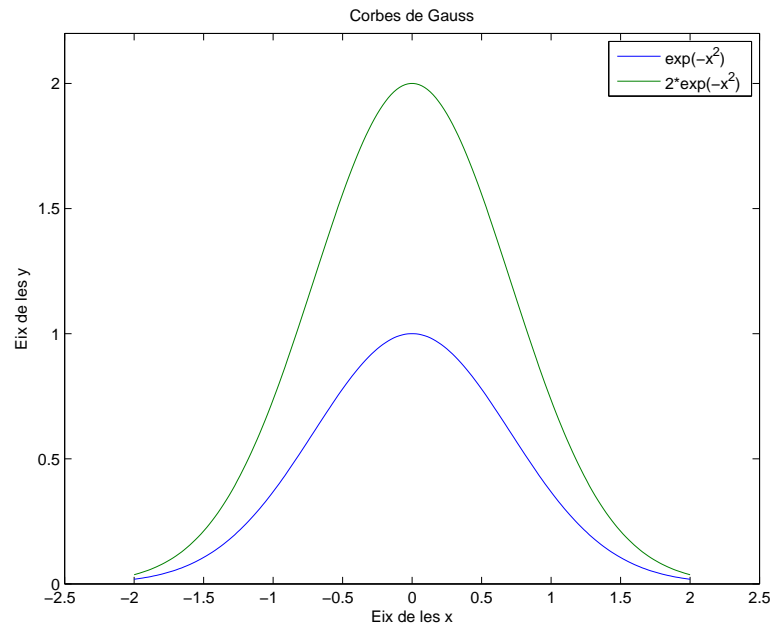
```
>> axis([0 6.5 -1.2 1.2])
```

i perquè tornen a la posició inicial `axis auto`.

Si volem posar “etiquetes” en els gràfics, tenim les opcions `title`, `xlabel` i `ylabel`. Per exemple,

```
>> x=linspace(-2,2,200);y=exp(-x.^2);z=2*exp(-x.^2);plot(x,y,'-',x,z,'-'),
>> axis([-2.5,2.5,0,2.2]),title('Corbes de Gauss')
>> xlabel('Eix de les x'),ylabel('Eix de les y'),
>> legend('exp(-x^2)', '2*exp(-x^2)'),
```

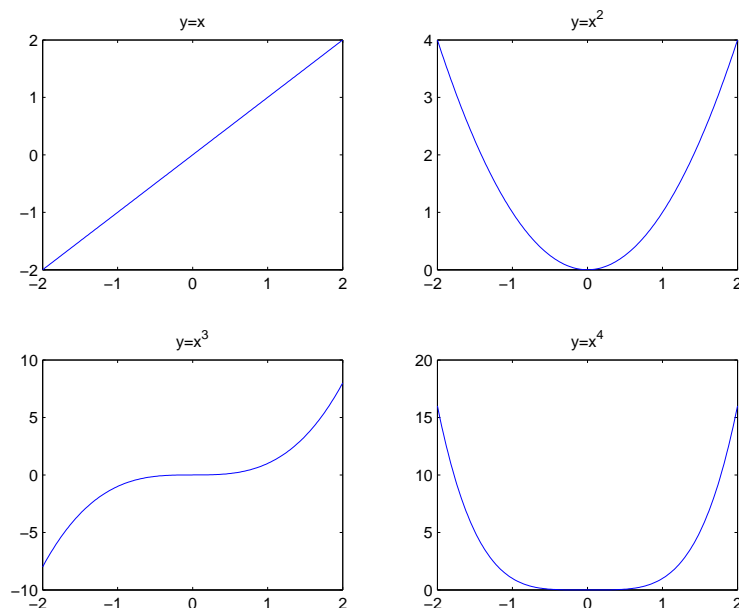
produeix



Si volem representar diverses gràfiques cadascuna per separat però en un mateix gràfic, utilitzarem l'ordre subplot:

```
>> y1=x;y2=x.^2;y3=x.^3;y4=x.^4;  
>> subplot(2,2,1), plot(x,y1), title('y=x'),  
>> subplot(2,2,2), plot(x,y2), title('y=x^2'),  
>> subplot(2,2,3), plot(x,y3), title('y=x^3'),  
>> subplot(2,2,4), plot(x,y4), title('y=x^4'),
```

produeix



L'ordre `ezplot` produeix gràfics de manera més immediata, ja que genera automàticament els valors de la variable independent i treballa en funcions implícites:

```
>> ezplot('x^2+y^2-1', [-1.2 1.2 -1.2 1.2])
```

proporciona una circumferència de radi 1, amb centre a l'origen.

Aquesta ordre `ezplot` també es pot utilitzar per a fer gràfiques amb funcions definides mitjançant càlcul simbòlic. Per exemple,

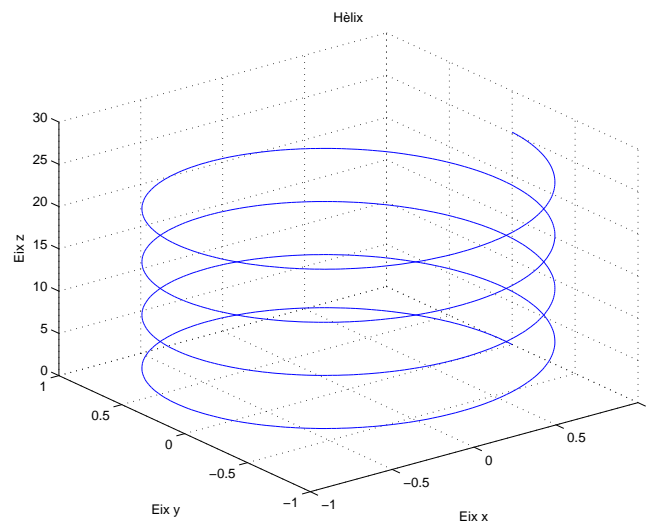
```
>> syms x; ezplot(fsincos(x), [0, 2*pi])
```

1.2.2 Gràfiques en 3D

Per a dibuixar en tres coordenades utilitzarem la comanda `plot3`. Per exemple, suposem que volem dibuixar en \mathbb{R}^3 la corba que té per equacions paramètriques $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ amb $t \in [0, 8\pi]$. Farem

```
>> t=linspace(0,8*pi,1000); plot3(cos(t), sin(t), t), grid on,  
>> xlabel('Eix x'),ylabel('Eix y'),zlabel('Eix z'), title('Hèlix'),
```

per obtenir



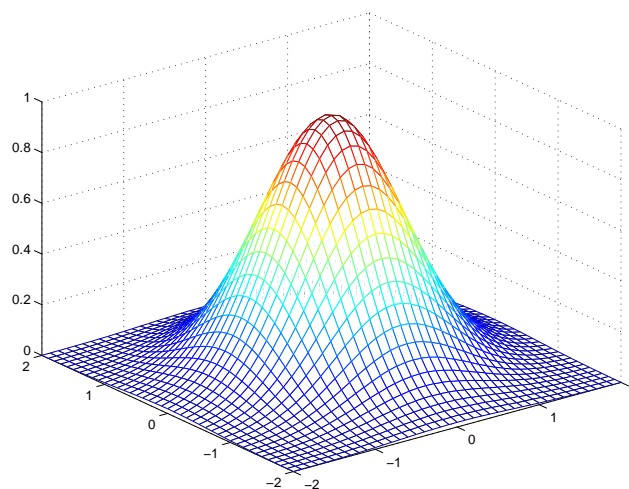
També podem utilitzar l'ordre directa `ezplot3('cos(t)', 'sin(t)', 't', [0,8*pi])` per a obtenir un gràfic semblant.

Per a dibuixar superfícies de la forma $z = f(x, y)$ utilitzarem també l'ordre `plot3`, però també podem utilitzar `mesh` o `surf`.

Primerament haurem de generar una xarxa de valors per a x i y :

```
>> [x,y] = meshgrid(-2:0.1:2)
```

després, avaluar la funció `>> z=exp(-x.^2-y.^2)`, i, finalment dibuixar. Per exemple, amb `mesh(x,y,z)` tindriem



1.3 Arxius d'instruccions. Programació amb MatLab

Els programes (cadena d'instruccions que efectuen un càlcul complex) s'emmagatzemen en fitxers de text amb extensió `.m`. Això es pot fer amb qualsevol editor de textos o amb el propi editor incorporat en la interfície de MatLab.

Per a crear el fitxer se selecciona l'opció `New`, dintre del menú `File` i es tria l'opció `Script`. Una vegada emplenat cal executar la comanda `Save` per a guardar-lo (encara que és molt convenient anar guardant el fitxer parcialment segons es va escrivint).

Per exemple, escrivim un fitxer que anomenem `prova1.m` amb les instruccions:

```
disp('Hola')
x=2;y=3;
x+y
```

i l'executem entrant el nom `prova1` obtenim

```
Hola
```

```
ans =
     5
```

També podem utilitzar fitxers d'aquesta manera per a programar funcions. En aquest cas la primera instrucció ha de contenir la sintaxi

```
function[arguments d'eixida] = nomdefuncio(arguments d'entrada)
```

Així, per exemple, definirem una funció `sumanat(n)` que retorne la suma dels n primers nombres naturals. Un possible codi seria:

```
function s = sumanat( n )
% Càlcul de la suma dels n primers nombres naturals
s=sum(1:n)
end
```

Si executem la funció `sumanat` sobre diversos arguments, tenim:

```
>> sumanat(2),sumanat(5),
ans =
     3
ans =
    15
```

1.3.1 Control del flux. Bucles

Dins de l'entorn de treball de MatLab, les ordres s'executen de manera seqüencial tal com es van escrivint, però dins d'un programa l'ordre d'execució es pot canviar, i això dóna lloc al que s'anomena el **flux** del programa.

Açò es pot fer principalment de dues maneres:

- a) **Condicionals**, que canvien l'ordre d'execució segons alguna condició, i
- b) **Bucles**, que permeten executar blocs determinats d'instruccions de manera repetitiva.

Els condicionals s'obtenen amb l'ordre `if` i l'estructura: condició-instruccions-end

Per exemple,

```
>> if a>2
b=a+5
end
```

També es pot utilitzar una forma més complexa utilitzant alternatives, per exemple,

```
>> if a>2
b=a+5
else
b=a+3
end
```

i també afegir més condicions:

```
>> if a>7
b=a+5
elseif a>2
d=a+3
else
b=a
d=a
end
```

També és molt útil la comanda `switch`, que permet dirigir el flux segons el valor d'alguna variable:

```
% Estructura de switch segons el valor de n
switch(n)
case(1)
x=b^1
case(2)
x=b^2
otherwise
x=b
end
```

Els bucles conformen conjunts d'instruccions que s'executen diverses vegades segons algun comptador. Tenen una estructura també molt simple: variable comptador-instruccions-end. Per exemple,

```
for i=1:10
a(i)=i+2;
end
```

això proporciona el vector $a = (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$.

També es poden executar bucles amb condicions amb l'ordre `while` i l'estructura: condició-instruccions-end. Per exemple,

```
a=1; b=0;
while b<10;
    b=b+a;
end
```

Es poden crear estructures condicionals més complexes amb l'ús dels operadors lògics `and (&)` i `or (|)`.

1.3.2 Entrada de valors des de teclat

Una característica interessant és poder entrar valors des del teclat per a fer els càlculs. Açò es pot fer de manera senzilla amb l'ordre `input`, per exemple,

```
n = input('Entra el valor de n ');
```

Part 1

Càlcul Numèric

Capítol II

Solució numèrica d'equacions no lineals

2.1 Introducció

Considerem una funció $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'objectiu consisteix a determinar els valors $\alpha \in]a, b[$ de manera que $f(\alpha) = 0$. En aquest cas direm que α és un **zero** de f o que α és una solució de l'equació $f(x) = 0$.

Si f es contínua en $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$, aleshores existeix $\alpha \in]a, b[$ tal que $f(\alpha) = 0$ (Teorema de Bolzano).

Si la funció f és estrictament monòtona (creixent o decreixent) en $[a, b]$, aleshores f té com a molt un zero en l'interval $[a, b]$. En particular, això passa si f és derivable en $[a, b]$ i la seua derivada no s'anul·la en cap punt de $[a, b]$.

Quan de l'equació $f(x) = 0$ no es pot aïllar la variable per a determinar els valors α que la verifiquen, s'ha de recórrer a altres tècniques. Entre les més efectives hi ha els *mètodes iteratius* per a aproximar el valor d'un zero α de f i que es basen a obtenir una successió de nombres reals $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$.

A partir d'una tal successió, els valors x_k anirien acostant-se al valor de α per a k prou gran. Un possible criteri per a determinar en quin valor de k ens podem aturar, consisteix en: fixada una certa tolerància $\varepsilon > 0$, prou menuda, ens aturem en el primer valor x_k que verifiqui

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon |x_{k-1}|.$$

En la descripció dels mètodes clàssics que s'expliquen a continuació suposarem que f és contínua en $[a, b]$ i que té un únic zero $\alpha \in]a, b[$.

2.2 Mètode de la bisecció

En les condicions anteriors, suposarem a més que $f(a)f(b) < 0$. Així, tenim que $\alpha \in [a, b] = [a_0, b_0]$. Com a primera aproximació al valor buscat α considerarem el punt mitjà de l'interval $[a_0, b_0]$ i tindrem un primer valor

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

És evident que

$$|\alpha - x_0| \leq \frac{b - a}{2}.$$

Ara, en cas que $f(x_0) = 0$ ja hauríem trobat el zero de f i aturariem el procés. Si no, pot passar que $f(x_0)f(a_0) < 0$ i prendrem l'interval $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$, o bé, en cas contrari $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$. Així, en ambdós casos tindrem segur que $\alpha \in [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$.

Repetim el procés amb el nou interval $[a_1, b_1]$ prenent

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Es té ara que

$$|\alpha - x_1| \leq \frac{b - a}{2^2}.$$

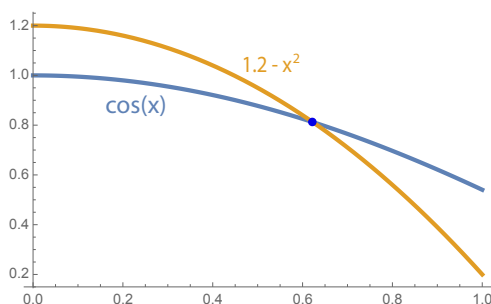
Comparant ara els valors $f(x_1)$ i $f(a_1)$ determinem com abans un interval $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ al qual pertanyerà α . Tenim així un procés iteratiu que ens genera una successió de números $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ que verifica

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

la qual cosa demostra que aquesta successió obtinguda convergeix a α .

Com que la fita de l'error absolut es redueix a la meitat entre una etapa i la següent, solem dir que la convergència del mètode de la bisecció és *lineal*.

Exemple 2.1 Les funcions $h(x) = \cos(x)$ i $g(x) = -x^2 + 1.2$ es tallen en un punt entre 0 i 1 (vegeu figura). Trobarem el valor de x en aquest punt de tall amb un error més petit de 0.005



El problema és equivalent a trobar el zero de la funció $f(x) = \cos(x) + x^2 - 1.2$.

Aplicant el mètode exposat, per a un error més menut que 0.005, la successió d'aproximacions al valor buscat és

$$\{0.5000, 0.7500, 0.6250, 0.5625, 0.5938, 0.6094, 0.6172, 0.6211\}$$

que proporciona el valor de l'arrel α de $f(x)$ amb un error més menut que el requerit. Observem que $f(0.6211) = 0.000996$.

2.3 Mètode de regula falsi

Aquest és un mètode iteratiu semblant al de bisecció, però en lloc de triar en cada etapa el punt mitjà de l'interval, és a dir, la mitjana aritmètica dels extrems de l'interval, es considera una mitjana ponderada dels extrems en base als valors que pren la funció en aquests extrems, i el procés es continua tal com s'ha descrit en el mètode de bisecció.

Suposem, doncs, que $f(a)f(b) < 0$. Tenim $\alpha \in [a, b] = [a_0, b_0]$. Considerem, com a primera aproximació de α , el punt de tall amb l'eix $y = 0$ de la recta que uneix $(a_0, f(a_0))$ amb $(b_0, f(b_0))$ (Figura 2.1), és a dir,

$$x_0 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0).$$

Ara si $f(x_0) = 0$, ja haurem trobat el zero de f i acaba el procés. D'altra banda, si $f(x_0)f(a_0) < 0$, prenem l'interval $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$, o bé, altrament, $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$. Així, en ambdós casos tenim que $\alpha \in [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$. Repetim el procés amb el nou interval $[a_1, b_1]$ per a determinar una nova aproximació x_1 de α . La repetició d'aquest procés determina una successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ que convergeix a α , i aquesta convergència és lineal.

Notem que la longitud dels intervals on tenim localitzat el zero de la funció no tendeix necessàriament a 0 en anar avançant el procés, cosa que sí que passava en el mètode de bisecció.

2.4 Mètode de la secant

Per al mètode que anomenem *de la secant* considerem dues aproximacions, $x_0, x_1 \in [a, b]$, de α . Calculant el punt de tall amb l'eix $y = 0$ de la recta que passa per $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$, obtenim una nova aproximació x_2 de α que ve donada per l'expressió

$$x_2 = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0).$$

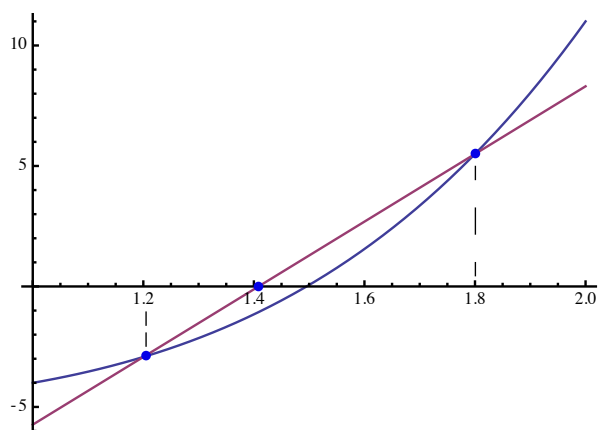


Figura 2.1: Primera iteració del mètode de regula-falsi.

Ara a partir de x_1 i x_2 repetim el procés per a obtenir

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_1).$$

La reiteració d'aquest procés determina una successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, que va convergint al zero α de f , determinada per la següent fórmula de recurrència:

$$x_0, x_1 \in [a, b]; \quad x_{k+1} = x_{k-1} - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Aquest mètode no sempre resulta convergent, però quan ho fa és més ràpid que els anteriors, ja que es pot demostrar que el seu ordre de convergència és $(1 + \sqrt{5})/2$ en lloc de 1, com tenen els dos mètodes anteriors.

Notem que, a diferència dels mètodes de bisecció i de regula falsi, no es requereix ni canvi de signe de la funció en els extrems de l'interval $[a, b]$, ni es van obtenint intervals dintre dels quals tenim localitzat el zero de la funció. Això mateix passa amb el mètode que introduïm a continuació.

Exemple 2.2 En l'anterior exemple 2.1, la successió que es genera és:

$$\{0.3702, 0.5449, 0.6460, 0.6209, 0.6226\}$$

sent ja $f(0.6226) = -0.000004224$.

2.5 Mètode de Newton-Raphson

Suposem que la funció f és derivable. Considerem una aproximació $x_0 \in [a, b]$ de α . Obtenim una nova aproximació x_1 de α calculant el punt de tall de la recta tangent a f en x_0 amb l'eix $y = 0$, és a dir, calculant el zero d'aquesta recta, que obtenim per l'expressió

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

S'ha de donar que $f'(x_0) \neq 0$, ja que altrament la recta tangent seria paral·lela a l'eix de les x i no tindria un altre punt de tall. Repetim el procés per a determinar una nova aproximació x_2 de α començant ara amb x_1 . Així,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Repetint aquest procés es determina una successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, que hauria de convergir al zero α de f i que ve determinada per la següent fórmula de recurrència:

$$x_0 \in [a, b]; \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Quan es té que $f'(\alpha) \neq 0$ i es tria una aproximació inicial x_0 prou a prop de α , es pot assegurar la convergència de la successió a α i l'ordre de convergència és almenys 2, per la qual cosa es tracta d'un mètode clarament més ràpid que els anteriors.

Exemple 2.3 *Volem trobar el valor de l'arrel real α del polinomi $x^5 - 2x^3 + 4x - 5$.*

Una gràfica d'aquest polinomi al voltant de l'origen ens mostra que hi ha una arrel real única en l'interval $[1, 2]$ (figura 2.2).

Aplicant la iteració de Newton a partir del valor inicial $x_0 = 2$ s'obté la següent successió de valors:

$$\{2.0000, 1.6833, 1.4730, 1.3742, 1.3545, 1.3538\}$$

2.6 Mètode del punt fix

Un *punt fix* d'una funció $g(x)$ és un punt x^* del seu domini que verifica $g(x^*) = x^*$. Aleshores, el mètode del punt fix consisteix a transformar l'expressió $f(x) = 0$ en un altra equivalent de la forma $g(x) = x$.

Considerem, doncs, equacions de la forma

$$g(x) = x, \tag{2.1}$$

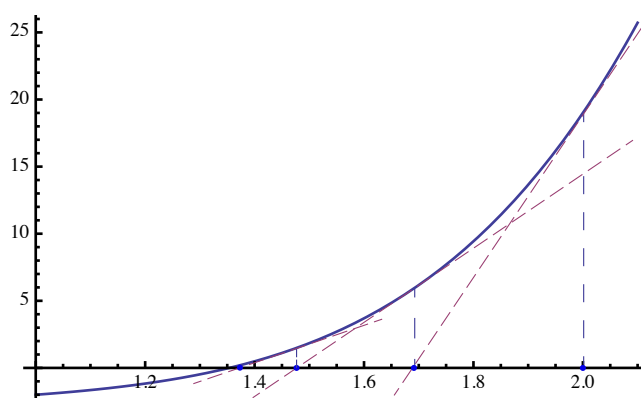


Figura 2.2: Mètode de Newton-Raphson

on $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

El mètode d'aproximació del punt fix consisteix a generar la successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ mitjançant la següent fórmula de recurrència: triar una aproximació inicial x_0 del punt fix α i anar iterant per

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Notem que el mètode de Newton-Raphson es pot interpretar com un mètode de tipus punt fix associat a la funció $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Si g és prou regular i $|g'(\alpha)| < 1$, aleshores si es tria una aproximació inicial x_0 prou a prop del punt fix α , es pot assegurar la convergència de la successió generada d'aquesta manera a α . L'ordre de convergència del mètode coincideix amb l'ordre de la primera derivada de g que no s'anul·la en α . Així, si $g'(\alpha) \neq 0$, aleshores la convergència és lineal i si $g'(\alpha) = 0$ i $g''(\alpha) \neq 0$, la convergència és quadràtica o d'ordre 2.

Capítol III

Mètodes numèrics per a la resolució de sistemes d'equacions lineals

Un sistema d' n equacions lineals amb n incògnites és un sistema de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

que es pot escriure en forma matricial $Ax = b$, on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

amb $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regular i $b \in \mathbb{R}^n$, l'única solució del qual denotem per $x \in \mathbb{R}^n$.

La tècnica de resolució de sistemes d'equacions mitjançant la tècnica de Cramer resulta en la pràctica habitual inviable a causa de l'enorme nombre de càlculs que involucra fins i tot per a sistemes no excessivament grans. Per això, estudiarem mètodes de resolució alternatius, que podem classificar en directes i iteratius.

Entre els mètodes directes veurem el mètode d'eliminació de Gauss (MEG) i el de factorització coneguda com a LU, que en realitat és una conseqüència del mètode MEG.

En la segona part del capítol introduïrem els mètodes iteratius de resolució de (3.1) més clàssics, com ara Jacobi o Gauss-Seidel, i analitzarem aspectes com la convergència, la rapidesa, els criteris de parada, etc.

3.1 Mètodes directes

El cas més simple de (3.1) correspon al d'una matriu diagonal en el qual obtenim la solució fent n divisions.

El cas següent en complexitat és el d'una matriu triangular la solució de la qual s'obté fàcilment resolent les equacions des de l'última a la primera en el cas d'una matriu triangular superior (pujada), o des de la primera fins a l'última en el cas de matrius triangulars inferiors (descens).

El MEG consisteix a realitzar sobre les equacions del sistema (3.1) dos tipus d'operacions bàsiques que transformen el sistema en un de nou equivalent, és a dir, que tots dos tenen una única solució i aquesta coincideix. Si sobre la matriu ampliada $W^{(0)} = [A, b]$, les files de la qual representen les equacions del sistema, es fan les següents operacions:

- (i) Intercanviar dues files entre si,
- (ii) substituir una fila per la combinació d'ella mateixa més un múltiple d'una altra fila,

clarament el sistema d'equacions obtingut és equivalent al de partida. L'essència del MEG és combinar aquestes operacions de files per a aconseguir que el sistema resultant tinga una matriu de coeficients triangular superior, i llavors aplicar la tècnica de pujada per a obtenir la seua solució. Descriurem el procés per etapes.

Primera etapa: Si l'element que ocupa la posició $(1, 1)$ en $W^{(0)}$ és nul, s'intercanvia la primera fila de $W^{(0)}$ amb una fila posterior, el primer element de la qual siga no nul. Açò és sempre possible perquè la matriu A és regular. Si ja tenim aquest element no nul en la posició $(1, 1)$, al qual anomenarem *pivot de la primera etapa*, ara fem nuls els elements de la primera columna de $W^{(0)}$ per sota de la diagonal principal mitjançant l'operació (ii). Per a fer-ho, en cada fila i -èsima, $2 \leq i \leq n$, multipliquem la fila primera per $-w_{i1}^{(0)}/w_{11}^{(0)}$, factor que anomenarem *multiplificador de la primera etapa* per a la fila i -èsima, i la sumarem a la i -èsima. Així obtenim un sistema equivalent a l'original en el qual tots els elements de la primera columna són nuls, excepte el primer, la matriu ampliada del qual denotem per $W^{(1)}$.

Segona etapa: Si l'element que ocupa ara la posició $(2, 2)$ en $W^{(1)}$ és nul, s'intercanvia la segona fila de $W^{(1)}$ amb una fila posterior, el segon element de la qual siga no nul. Aquest element no nul, que serà el *pivot de la segona etapa*, ens permetrà anul·lar els elements de la segona columna per sota de la diagonal. Així es conserva l'estructura obtinguda en la primera etapa. Per a això, en cada fila i -èsima, $3 \leq i \leq n$, multipliquem

la fila segona per $-w_{i2}^{(1)}/w_{22}^{(1)}$, factor que anomenarem *multiplicador de la segona etapa* per a la fila i -èsima, i la sumarem a la i -èsima. El sistema obtingut és de nou equivalent a l'original i en el qual tots els elements per sota de la diagonal principal, de la primera i la segona columnes, són nuls, la matriu ampliada de la qual denotem per $W^{(2)}$.

Quan s'han fet $n - 1$ etapes, seguint les indicacions esmentades, s'obté un sistema triangular superior equivalent al de partida, amb matriu ampliada $W^{(n-1)}$.

Si es volen resoldre diversos sistemes que tenen la mateixa matriu de coeficients i diversos termes independents coneguts, es pot considerar una matriu ampliada de treball formada per la matriu de coeficients i ampliada amb columnes formades per cadascun dels termes independents. S'aplica la tècnica descrita per a convertir la matriu ampliada en triangular superior i després es resol cada un mitjançant pujada.

3.1.1 Factorització LU

La qüestió que ens plantejem ara consisteix en la possibilitat d'escriure una matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en la forma $A = LU$ amb $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular inferior i $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ triangular superior. Una factorització d'aquest tipus juntament amb la propietat que L tinga uns en la seua diagonal principal l'anomenem factorització LU .

Resoldre el sistema $Ax = b$, sent $A = LU$ en las condicions esmentades, resulta equivalent a resoldre el sistema $Ly = b$ per pujada, i posteriorment el sistema $Ux = y$ per descens.

El fet de disposar d'aquesta factorització de la matriu de coeficients és útil en situacions en què s'hagen de resoldre diversos sistemes d'equacions amb la mateixa matriu de coeficients i amb termes independents no coneguts a priori.

Es pot provar que la factorització LU d'una matriu regular és única, i que aquesta existeix si, i solament si, el MEG no requereix intercanvi de files o, d'una altra manera, si en cada etapa del MEG el pivot natural és no nul. Per tant, l'obtenció de matrius que no són factoritzables LU és molt simple. N'hi ha prou, per exemple, que l'element que ocupa la posició $(1, 1)$ siga nul.

Les matrius regulars amb diagonal principal dominant o les simètriques definides positives sí que són factoritzables LU .

Vegem com obtenir la factorització LU de A quan aquesta existeix. Suposem, doncs, que quan apliquem el MEG a A (ací no tenim matriu ampliada, ja que de moment no hi ha terme independent per a considerar) no cal fer obligatòriament cap canvi de files. Prenem com a U la matriu triangular superior que s'obté després d'aplicar tot el procés. Per a obtenir L

construïm una matriu triangular inferior amb diagonal nul·la, l'entrada (i, j) , de la qual per a $1 \leq j < i \leq n$, és el multiplicador, canviat de signe, corresponent a l'etapa j -èsima i associat a la fila i -èsima, és a dir, $l_{ij} = w_{ij}^{(j-1)} / w_{jj}^{(j-1)}$. Així, finalment obtenim L sumant-li la matriu identitat de grandària n a la matriu L descrita abans. Es pot provar que, en efecte, $A = LU$.

Cal destacar que els càlculs aritmètics necessaris per a obtenir la factorització LU , quan aquesta existeix, són els mateixos que els que requereix aplicar MEG.

3.1.2 La factorització $PA = LU$

Recordem que una permutació de $\{1, \dots, n\}$ és una aplicació bijectiva $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. La denotarem per $\sigma \in \mathcal{S}_n$ i $\sigma \equiv [\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)]$, és a dir, identifiquem la permutació mitjançant la seua imatge escrita com a vector fila.

Una matriu de permutació de files $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és aquella que s'obté intercanviant les files de la matriu identitat de grandària n d'acord amb una permutació $\sigma \in \mathcal{S}_n$, és a dir, la primera fila de P és la que ocupava la posició $\sigma(1)$ en la matriu identitat (serà, per tant, el vector $\sigma(1)$ -èsim de la base canònica de \mathbb{R}^n escrit com una fila), la segona de P és la que ocupava la posició $\sigma(2)$ en la matriu identitat i així successivament.

El resultat més important d'aquesta secció és que per a tota matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, existeix una matriu permutació de files $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que PA és factoritzable LU .

Vegem com es pot obtenir aquesta factorització. Apliquem el MEG a la matriu A tenint en compte els possibles canvis de fila per a triar els pivots no nuls com segueix. Considerem en principi una matriu de treball L amb totes les seues entrades nul·les, i la matriu P com la matriu identitat de grandària n .

Si en la primera etapa cal canviar la fila primera per una de posterior, ho fem, i també fem el mateix canvi de files en P . Altrament, saltem aquest pas. Finalitzem l'etapa de la manera habitual de fer zeros en la part estrictament per sota de la diagonal principal en la primera columna de la matriu de coeficients. Guardem en la primera columna de L els multiplicadors utilitzats en la primera etapa, canviats de signe.

Passem a la segona etapa. Si cal fer un canvi de files per a triar un pivot no nul per a aquesta etapa, fem simultàniament els canvis de files tant en la matriu, com en P i en L . Altrament, aquesta fase la saltem. Completem l'etapa en la manera habitual per a fer zeros els elements de la segona columna de la matriu estrictament per sota de la diagonal principal, i guardem els multiplicadors de l'etapa segona, canviats de signe, en la segona columna de la matriu L .

En fer $n - 1$ etapes seguint aquestes instruccions s'obté una matriu triangular superior U (l'obtinguda pel MEG), una matriu L que s'obté sumant-li la matriu identitat a la matriu

L obtinguda en finalitzar totes les etapes i una matriu de permutació de files P . Es pot comprovar que es verifica $PA = LU$.

Evidentment, aquesta classe de factorització no és única. L'avantatge d'aquesta factorització enfront de la factorització LU és que aquesta sempre existeix.

Si disposem de la factorització $PA = LU$, aleshores resoldre el sistema $Ax = b$ és equivalent a resoldre els sistemes triangulars

$$Ly = Pb, \quad Ux = y,$$

per descens i pujada, respectivament. En la pràctica el càlcul de Pb no el fem mitjançant el producte de matriu per vector, sinó que canviem les components de b , d'acord amb els canvis de files que han produït la matriu P , la qual cosa és més econòmic en termes computacionals.

3.2 Mètodes iteratius

Els mètodes iteratius per a aproximar la solució α del sistema d'equacions (3.1) consisteixen a construir una successió de vectors $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ de manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$, en què la convergència de successions de vectors és la convergència de cada successió coordinada a la corresponent component del vector límit, és a dir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(i) = \alpha(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sol triar-se un mètode iteratiu enfront d'un mètode directe quan es treballa amb matrius molt grans amb gran nombre de zeros, com per exemple matrius tridiagonals. Aquest tipus de matrius apareixen, per exemple, en la discretització de problemes de contorn associats a equacions diferencials.

3.2.1 Generació de mètodes iteratius

La idea general per a generar els mètodes iteratius de tipus punt fix que presentem ací consisteix a descompondre la matriu de coeficients en la forma $A = M - N$, amb M regular, i reescriure el sistema d'equacions $Ax = b$ com a

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

Si definim $B = M^{-1}N$ i $c = M^{-1}b$, el sistema s'escriu finalment com a

$$x = Bx + c,$$

de manera que el vector α i el vector $B\alpha + c$ coincideixen (es diu que α és un punt fix de la transformació $x \mapsto Bx + c$).

Anomenarem matriu associada al mètode iteratiu a la matriu $B = M^{-1}N$. És important notar que en principi no s'obté la matriu B ni el vector c amb vista a generar la successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$. Evidentment, la matriu M es triarà de manera que resoldre un sistema d'equacions amb M com a matriu de coeficients no siga excessivament costós. La situació típica és que M siga una matriu triangular.

En la pràctica, el mètode iteratiu associat a la descomposició $A = M - N$ consisteix a generar una successió de vectors $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ determinada per la fórmula de recurrència

$$M x_{k+1} = N x_k + b, \quad k = 0, 1, \dots,$$

començant amb un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on, en cada iteració es resoldria un sistema d'equacions amb M com a matriu de coeficients, amb la qual cosa evitem haver de calcular la inversa de la matriu M i el producte d'aquesta per N .

3.2.2 Mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel

Suposarem, sense perdre generalitat, que les entrades de la diagonal principal de A són no nul·les (altrament, gràcies al fet que A és regular, sempre existeix un canvi previ de files que ens porta a aquesta situació).

El mètode de Jacobi consisteix a prendre $M = M_J(A)$ en l'esquema anterior com la matriu diagonal, la diagonal principal de la qual coincideix amb la diagonal principal de la matriu A i $N = N_J(A) = M_J(A) - A$. Així, la fórmula de recurrència corresponent al mètode de Jacobi és: prendre $x_0 \in \mathbb{R}^n$, i per a $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots$, anar calculant

$$x_{k+1}(i) = \left(b(i) - \sum_{j=1}^{i-1} A(i, j)x_k(j) - \sum_{j=i+1}^n A(i, j)x_k(j) \right) / A(i, i).$$

Notem que cada iteració del mètode requereix $n(2n - 1)$ flops (operacions aritmètiques en punt flotant). A més, si A és una matriu tridiagonal, aquesta nombre es redueix a $5n$ flops en cada iteració del mètode, que es compara molt eficientment amb els mètodes directes del tipus eliminació de Gauss.

El mètode de Gauss-Seidel s'obté prenent $M = M_G(A)$ com la matriu triangular inferior la diagonal principal de la qual i totes les diagonals que estan per sota d'aquesta coincideixen amb les corresponents diagonals de la matriu A , i prendre $N_G(A) = M_G(A) - A$. Així, la fórmula de recurrència per a aquest mètode és la següent: agafem $x_0 \in \mathbb{R}^n$, i per a

$i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots$, anem calculant

$$x_{k+1}(i) = \left(b(i) - \sum_{j=1}^{i-1} A(i, j)x_{k+1}(j) - \sum_{j=i+1}^n A(i, j)x_k(j) \right) / A(i, i).$$

Les matrius associades als mètodes iteratius de Jacobi i de Gauss-Seidel són $B_J(A) = M_J(A)^{-1}N_J(A)$ i $B_G(A) = M_G(A)^{-1}N_G(A)$, respectivament.

3.2.3 Convergència dels mètodes iteratius

Per a l'anàlisi dels mètodes iteratius necessitem disposar d'alguna manera de mesurar o quantificar la proximitat entre vectors i entre matrius. Aquest paper el jugaran les normes vectorials i les normes matricials, respectivament.

Les normes vectorials més utilitzades en \mathbb{R}^n són

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x(i)|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

especialment en els casos $p = 1, 2$, i l'anomenada norma infinit ($p = \infty$)

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x(i)|.$$

Encara que la grandària d'un vector depèn de la norma triada, la noció de convergència d'una successió de vectors es correspon sempre amb la convergència component a component, independentment d'aquesta norma. Aquesta propietat es resumeix dient que les normes vectorials en espais de dimensió finita són equivalents.

Per les seues propietats, les normes matricials més utilitzades són les anomenades normes matricials subordinades a las normes vectorials $\|\cdot\|_p$ introduïdes més amunt, i són determinades mitjançant

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Es pot provar a partir de la definició que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|A(:, j)\|_1,$$

i

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|A(i, :)\|_1,$$

resultats que fan molt més simple el càlcul d'aquestes dues normes, ja que poden obtenir-se directament a partir de les entrades de la matriu A .

El radi espectral de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es defineix com a

$$r(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \text{ és un valor propi de } A \}.$$

Es verifica que

$$\|A\|_2 = \sqrt{r(A^T A)},$$

on A^T representa la matriu transposada de A .

Les següents importants propietats de les normes matricials subordinades permeten obtenir fitacions:

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n,$$

i

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aquesta darrera propietat es coneix com a submultiplicativitat.

El mètode iteratiu determinat pel parell (B, c) consisteix a construir la successió

$$x_0 \in \mathbb{R}^n; \quad x_{k+1} = Bx_k + c, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Es diu que el mètode iteratiu determinat pel parell (B, c) és convergent, si per a tot $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existeix el límit de la successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generada mitjançant la fórmula de recurrència (3.2). És immediat que si el mètode és convergent, el límit de la successió és sempre el vector buscat α .

Es pot provar que el mètode iteratiu determinat pel parell (B, c) és convergent si, i solament si, $r(B) < 1$. A més, la convergència serà més ràpida com més a prop siga $r(B)$ de 0.

Per inducció sobre k és fàcil comprovar que

$$\|x_k - \alpha\|_p \leq \|B\|_p^k \|x_0 - \alpha\|_p, \quad k = 0, 1, \dots$$

Per tant, si $\|B\|_p < 1$, per a algun $p = 1, 2, \infty$, el mètode iteratiu és convergent. Si triem x_0 com el vector nul, aleshores podem assegurar que l'error relatiu comès respecte de la norma p en aproximar α mitjançant x_k , és més menut que certa quantitat $\varepsilon > 0$, si prenem k com el primer natural que verifiqui

$$k > \log(\varepsilon) / \log(\|B\|_p).$$

Si $\|B\|_p < 1$, aleshores també es verifica que

$$\|x_k - \alpha\|_p \leq \frac{\|B\|_p}{1 - \|B\|_p} \|x_k - x_{k-1}\|_p,$$

i si tenim a més que $\|B\|_p \leq 1/2$, es té

$$\|x_k - \alpha\|_p \leq \|x_k - x_{k-1}\|_p.$$

Aquestes relacions suggereixen que, en general, és un bon criteri de parada del mètode iteratiu quedar-se amb x_k com a aproximació de α quan assolim la condició que $\|x_{k+1} - x_k\|_p$ és prou menut. Si treballem amb errors relatius, quan es tinga que

$$\|x_{k+1} - x_k\|_p < \varepsilon \|x_k\|_p.$$

En general, els mètodes de Gauss-Seidel i de Jacobi poden convergir o no per a una certa matriu A , de tal manera que poden convergir tots dos mètodes, només un o cap. Com ja sabem, la convergència dependrà dels radis espectrals de les matrius $B_J(A)$ i $B_G(A)$.

No obstant això, per a certes classes de matrius es pot assegurar la convergència de tots dos mètodes.

Una matriu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ direm que té diagonal *estrictament dominant per files* si

$$|A(i, i)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |A(i, j)|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

i que té diagonal estrictament dominant per columnes si A^T compleix la corresponent propietat per files.

Si la matriu A té diagonal estrictament dominant per files, es compleix

$$\|B_G(A)\|_\infty \leq \|B_J(A)\|_\infty < 1,$$

i això assegura la convergència de tots dos mètodes iteratius per a aquesta classe de matrius. Els mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel són convergents també per a matrius amb diagonal estrictament dominant per columnes.

Capítol IV

Polinomis d'interpolació

4.1 Interpolació polinòmica

La interpolació polinòmica intenta resoldre el problema de trobar un polinomi adequat que passe per un conjunt donat de punts. De vegades els punts provenen directament de l'observació i en altres casos es generen a partir d'una funció coneguda $f(x)$, que volem aproximar per un polinomi per a tenir-ne una aproximació en una forma senzilla.

El problema de la interpolació es pot definir de la manera següent:

Siguen $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$, parells de valors que representen punts en \mathbb{R}^2 , amb la condició que $x_j \neq x_i$ si $j \neq i$.

Es planteja el problema de si existeix alguna funció $y = g(x)$, que passe per tots aquests punts, és a dir,

$$g(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Geomètricament, això vol dir trobar una corba $y = g(x)$ que passe pel conjunt de punts donat $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$.

Trobar valors d'una funció $f(x)$ desconeguda per a valors x dintre de l'interval de les abscisses de les dades s'anomena **interpolar**.

El problema de trobar la funció $f(x)$ que interpola les dades rep el nom de **problema de la interpolació**.

En un plantejament general, el problema pot tenir fins i tot infinites solucions o potser no en té cap.

El problema particular de la **interpolació polinòmica** es planteja quan la funció g que es busca ha de ser obligatòriament un polinomi $P_n(x)$, com tenim en la figura 4.1. En aquest cas el problema queda definit així:

En un interval $[a, b]$ es donen $n+1$ punts distintes $\{x_0, \dots, x_n\}$ i els valors d'una certa funció desconeguda, $f(x)$, en aquests punts $f(x_0) = y_0, \dots, f(x_n) = y_n$.

Volem obtenir un polinomi $P_n(x)$ de grau no superior a n que passe per aquests punts, és a dir,

$$P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad P_n(x_n) = y_n.$$

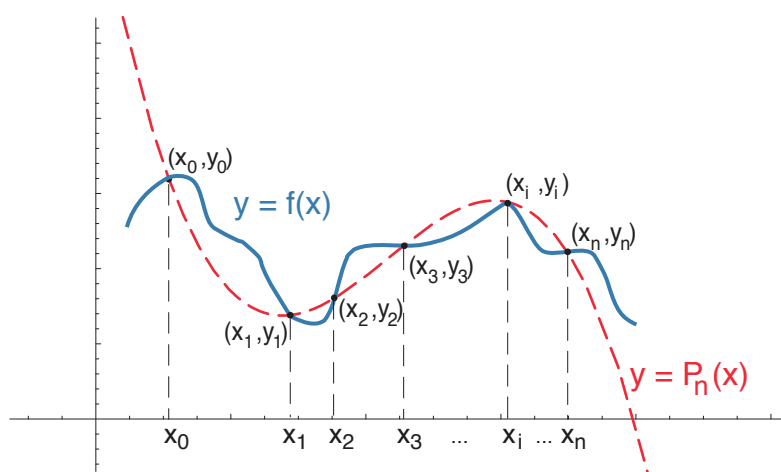


Figura 4.1: Funció i polinomi d'interpolació.

L'existència i la unicitat del polinomi interpolador ve establida en el següent

Teorema 4.1 *Existeix un únic polinomi $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, de grau com a molt n , tal que*

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Per a trobar els coeficients de P_n és suficient resoldre el sistema

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= y_n \end{aligned}$$

que, en les condicions generals plantejades, sempre té solució i és única.

El polinomi $P_n(x)$ rep el nom de **polinomi interpolador** associat als punts $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$.

4.2 Polinomi interpolador de Lagrange

Volem trobar un polinomi $P_n(x)$, de grau com a molt n , i que tinga per als punts donats x_k els valors donats y_k , és a dir, que verifiqui

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

És fàcil veure que un polinomi general $P_n(x)$ que satisfaci aquestes condicions serà de la forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

si els polinomis $L_i(x)$ verifiquen

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La forma de construir els polinomis L_i perquè verifiquen aquesta condició és la següent:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

D'aquesta manera, els polinomis $L_i(x)$ són de grau com a molt n i quan prenem el polinomi en el punt x_i (és a dir, l'índex del polinomi coincideix amb el del punt) prenem el valor 1, però si agafem qualsevol altre punt x_j d'entre els x_k donats, llavors prenem el valor 0.

El polinomi $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$ construït d'aquesta manera s'anomena **forma de Lagrange del polinomi interpolador**.

4.3 Polinomi interpolador de Newton

El polinomi interpolador de Newton, en la seua forma general, s'expressa per

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = \\ &= f[x_0] + \sum_{k=1}^n \left(f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

en la qual els coeficients que cal determinar s'obtenen mitjançant les fórmules de recurrència

$$f[x_i] = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Aquests coeficients $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ s'anomenen *diferències dividides* d'ordre k .

La seua obtenció pràctica es pot organitzar amb facilitat en una taula:

x_i	$f[\cdot]$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$	\dots	$f[\overbrace{\cdot, \dots, \cdot}^{n+1}]$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$\rightarrow f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_2	$f[x_2]$	$\rightarrow f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\rightarrow f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$\rightarrow f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$\rightarrow f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$	$\rightarrow \dots$	
x_n	$f[x_n]$	$\rightarrow f[x_{n-1}, x_n]$	$\rightarrow f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\rightarrow \dots$	$f[x_0, \dots, x_n]$

de manera que els coeficients buscats són els elements que van quedant en la diagonal.

A més, aquesta forma del polinomi d'interpolació permet afegir amb comoditat dades addicionals a partir del càlcul ja fet, sense necessitat de refer la taula, és a dir, si afegim la dada (x_{n+1}, y_{n+1}) , aleshores tindrem un polinomi en la forma

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

4.4 Error d'interpolació

En el cas que els punts en què interpolem provenen d'una funció donada f , ens interessarà també, a més del polinomi P_n , un criteri per a "mesurar la proximitat" d'aquest a la funció.

És a dir, d'alguna manera poder determinar quin és l'error que es comet en estimar el valor de la funció mitjançant el polinomi interpolador en punts diferents dels donats per al seu càlcul.

Teorema 4.2 Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ i $x_k \in [a, b], k = 0, \dots, n$, aleshores per a qualsevol altre $x \in [a, b]$ es té la següent expressió

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

on ξ_x depèn de x i pertany a l'interval mínim que conté les abscisses x_0, \dots, x_n i x .

Aquesta fórmula ens permet fitar l'error d'interpolació. Si notem $M_{n+1} = \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|$, obtenim la següent fitació de l'error absolut

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|,$$

per a qualsevol $x \in [a, b]$.

4.5 Interpolació segmentària

Quan interpolem amb un polinomi de grau elevat amb nodes igualment espaiats es pot produir l'anomenat *fenòmen d'oscil·lació de Runge* als extrems de l'interval. Aquest comportament del polinomi interpolador posa de manifest que no sempre és aconsellable treballar amb polinomis de grau elevat i particions uniformes de l'interval de treball. Una manera simple d'evitar això és emprar la interpolació a trossos amb polinomis de grau inferior i també altres mètodes interpoladors com els splines que veurem més endavant.

Considerem l'anomenada funció de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Prentem una partició uniforme de l'interval $[-1, 1]$ en 10 subintervalls, i interpolant utilitzant els corresponents punts de la funció f per un polinomi de grau més menut o igual que 10, s'obté un polinomi que podem comparar amb f (figura 4.2).

Notem l'oscil·lació del polinomi en els punts extrems de l'interval d'interpolació.

En canvi, si agafem els nodes i de dos en dos interpolem polinomis de grau 1 tenim una aproximació que anomenarem **interpolació segmentària lineal**, que aplicada a l'exemple anterior ens proporciona una aproximació poligonal de f (Figura 4.3).

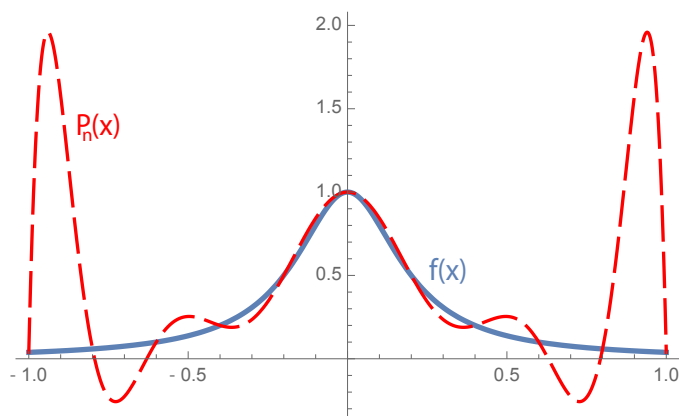


Figura 4.2: Funció de Runge i polinomi d'interpolació.

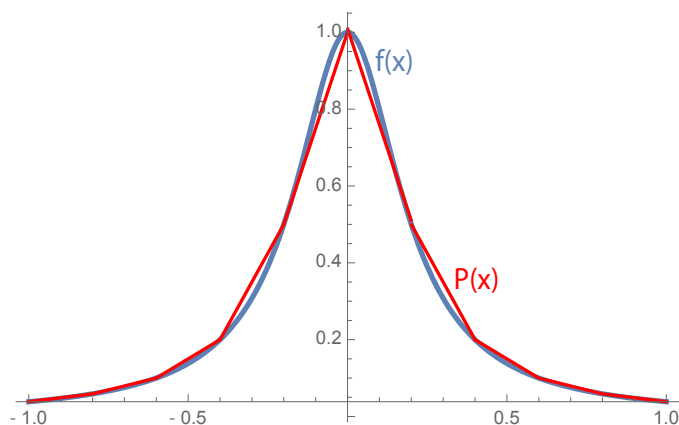


Figura 4.3: Funció de Runge amb interpolació segmentària lineal.

4.5.1 Error en la interpolació segmentària

Si considerem una partició uniforme de l'interval $[a, b]$ en n subintervalls de la mateixa longitud $h = (b - a)/n$, tindrem els punts $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Si $P(x)$ és la poligonal obtinguda en considerar la unió dels segments que s'obtenen de cada recta que uneix els punts $(x_i, f(x_i))$ amb $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, aleshores l'error d'interpolació verifica

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max_{t \in [a, b]} |f''(t)|}{2} \frac{h^2}{4}, \quad x \in [a, b].$$

Així, l'error depèn del pas h que triem per a construir la poligonal. Si utilitzem polinomis de segon grau per a la interpolació segmentària, és a dir, dividim l'interval $[a, b]$ en un nombre parell de subintervalls i de cada dos ajustem un polinomi de segon grau, la unió d'aquests

polinomis serà una funció polinòmica a troços, $Q(x)$. Aleshores es verifica que

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{\max_{t \in [a,b]} |f'''(t)|}{6} \frac{2h^3}{4}, \quad x \in [a, b].$$

4.5.2 Interpolació d'Hermite

Siguen $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ abscisses diferents i siguen $y_i, y'_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$. Plantegem el problema d'obtenir un polinomi $P(x)$, de grau més menut o igual que 3, que complisca

$$\begin{aligned} P(x_0) &= y_0, & P'(x_0) &= y'_0, \\ P(x_1) &= y_1, & P'(x_1) &= y'_1. \end{aligned}$$

És fàcil comprovar que aquest polinomi existeix i és únic.

Si generalitzem la definició de diferències dividides (4.2), afegint les relacions

$$f[x_i, x_i] = y'_i, \quad i = 0, 1$$

aleshores el polinomi es pot expressar en termes de diferències dividides en la forma:

$$\begin{aligned} P(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\ &\quad + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1). \end{aligned}$$

Es pot obtenir la següent estimació de l'error: Siga $f : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, derivable quatre vegades amb derivades contínues, i siga $M_4 = \max_{t \in [x_0, x_1]} |f^{(4)}(t)|$. Siga $P(x)$ el polinomi d'interpolació corresponent a les dades $(x_i, f(x_i))$, $(x_i, f'(x_i))$, $i = 0, 1$. Aleshores

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |x - x_0|^2 |x - x_1|^2, \quad x \in [x_0, x_1].$$

També podem fer una **interpolació segmentària d'Hermite** de manera anàloga a la presentada abans per al cas de disposar només d'informació de la funció en els nodes d'una partició i de les seues derivades primeres.

Per a aproximar una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable considerem una partició de l'interval $[a, b]$ i en cada subinterval obtenim el polinomi d'Hermite determinat per els valors de f i de f' en els seus extrems. Així obtindríem una funció per a aproximar f , que seria derivable i amb derivada contínua, tal que en cada subinterval de la partició és un polinomi de grau no superior a tres.

4.5.3 Interpolació per splines

Els mètodes de **splines** interpolen utilitzant funcions definides a trossos formades per polinomis. Entre els més simples i eficients hi ha els *splines cúbics*. Suposem una partició uniforme de l'interval $[a, b]$ donada pels punts $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, sent $h = (b - a)/n$.

Els **splines cúbics** estan formats per n trossos polinòmics, $P_i(x)$, de grau no major que 3, que s'enllacen de manera que la funció resultant té les dues primeres derivades contínues. A tal fi s'ha d'exigir que, en els punts d'enllaç, els polinomis siguin coincidents fins a les derivades segones.

Definirem una funció interpoladora $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ amb las condicions

- 1) $g(x)$ és de classe \mathcal{C}^2 ,
- 2) $g(x)$ és en cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n - 1$, un polinomi $P_i(x)$ de grau com a molt 3, i
- 3) $g(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Considerant la interpolació d'Hermite que hem vist abans, en cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ tindrem

$$P_i(x) = g[x_i] + g[x_i, x_i](x - x_i) + g[x_i, x_i, x_{i+1}](x - x_i)^2 + g[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}](x - x_i)^2(x - x_{i+1}).$$

on

$$\begin{aligned} g[x_i] &= g(x_i), & g[x_i, x_i] &= g'(x_i), \\ g[x_i, x_i, x_{i+1}] &= \frac{g(x_{i+1}) - g(x_i) - g'(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \\ g[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] &= \frac{(g'(x_{i+1}) + g'(x_i))(x_{i+1} - x_i) + 2(g(x_i) - g(x_{i+1}))}{(x_{i+1} - x_i)^3}. \end{aligned}$$

Per a obtenir aquests coeficients hem de conèixer els valors de les derivades de $g(x)$ en els nodes. Si, per a fer més simple la notació, anomenem $g'_i = g'(x_i)$, amb aquestes condicions obtenim:

$$g'_{i-1} + 4g'_i + g'_{i+1} = 3 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}, \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

que podem escriure en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \vdots \\ g'_{n-2} \\ g'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\frac{y_2 - y_0}{h} - g'_0 \\ 3\frac{y_3 - y_1}{h} \\ \vdots \\ 3\frac{y_{n-1} - y_{n-3}}{h} \\ 3\frac{y_n - y_{n-2}}{h} - g_n \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Els valors g'_0 i g'_n s'han de conèixer per a poder resoldre el sistema anterior. La resolució del sistema proporciona els valors de les derivades en els nodes intermedis, cosa que juntament amb els punts de la interpolació proporciona finalment la *funció splin* $g(x)$.

Si no es coneixen d'entrada els valors de g'_0 i g'_n , s'ha de fer alguna suposició addicional. La més habitual és suposar que les derivades segones de $g(x)$ en els extrems a i b són nul·les (això s'anomena *splin cúbic natural*), la qual cosa porta a determinar els valors d'aquestes derivades per les expressions

$$g'_0 = \frac{3(y_1 - y_0)}{2h} - \frac{g'_1}{2}, \quad g'_n = \frac{3(y_n - y_{n-1})}{2h} - \frac{g'_{n-1}}{2}.$$

les quals ens canvien les equacions primera i darrera del sistema (4.3).

Capítol V

Integració numèrica

Si una funció $f(x)$ és contínua en un interval $[a, b]$ i podem calcular una primitiva $F(x)$, la **integral definida** de la funció entre dos valors qualssevol dintre d'aquest interval es pot calcular per la **regla de Barrow** (coneguda també com a *fórmula de Newton-Leibniz*):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

sent $F'(x) = f(x)$.

No obstant això, en molts casos, la primitiva $F(x)$ **no pot calcular-se** per mitjans elementals o bé **no és expressable per funcions algebàriques senzilles** i, per això, el càlcul de la integral definida mitjançant la fórmula anterior es fa difícil o pràcticament impossible.

La solució més simple en tots aquests casos consisteix a substituir l'integrand per un polinomi interpolador, de manera que es pugui obtenir el valor aproximat de la integral buscada mitjançant la integració del polinomi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx$$

Donat que la integral $\int_a^b f(x) dx$ geomètricament és el valor de l'àrea que queda entre la funció, l'eix de les abscisses i les abscisses a i b , es tracta d'aproximar el valor d'aquesta àrea per la que es tindria substituint la funció per un polinomi interpolador (figura 5.1).

Les fórmules següents, que són les més senzilles entre les fórmules d'integració numèrica, provenen de fer una interpolació i després integrar directament l'expressió obtinguda. Així, les fórmules es poden aplicar directament quan tenim el conjunt de punts sense haver de calcular cada vegada el polinomi interpolador corresponent.

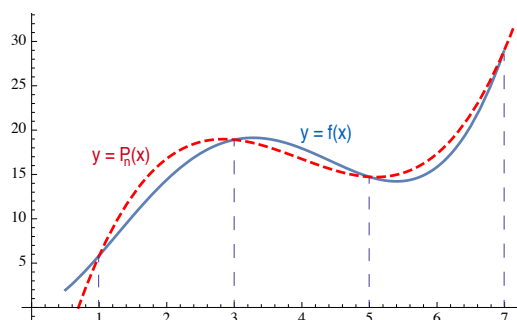


Figura 5.1: Àrea sota la funció i el polinomi interpolador.

5.1 Fórmula del rectangle

Es tracta en aquest cas d'una aproximació molt simple a l'àrea sota la corba, donada per l'àrea del rectangle que construïm amb base $b - a$ i altura $f(a)$. Tenim així un polinomi interpolador de grau 0 que passa per $(a, f(a))$ i, aleshores

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_0(x) dx = f(a) (b - a)$$

5.2 Fórmula del punt mitjà

És evident que tindriem una millor aproximació a l'àrea sota la corba si, en lloc de triar l'altura del rectangle com el valor $f(a)$, triàrem el valor de la funció en el punt mitjà de l'interval $[a, b]$, és a dir, $f(\frac{a+b}{2})$. Així tindrem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_0(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b - a)$$

Gràficament en aquests dos casos tindriem:

5.3 Fórmula dels trapezoides

Si aproximem la integral d'una funció $f(x)$ entre a i b pel polinomi d'interpolació corresponent als punts $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, obtenim la fórmula trapezoidal

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_1(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \quad (5.1)$$

Aquesta expressió de l'àrea s'obté directament de la fórmula de l'àrea d'un trapezi.

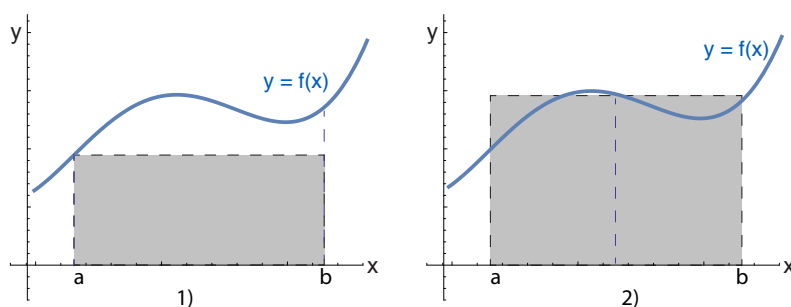


Figura 5.2: 1) Rectangle. 2) Punt Mitjà.

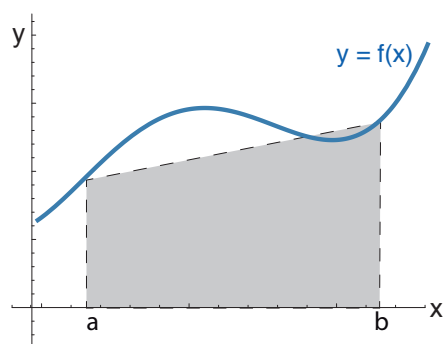


Figura 5.3: Fórmula dels trapezis.

5.4 Fórmula 1/3 de Simpson

Dividim ara l'interval de les abscisses pel punt mitjà $m = (a + b)/2$ i considerem ara els punts $\{(a, f(a)), (m, f(m)), (b, f(b))\}$ i interpolem un polinomi $P_2(x)$. Si integrem entre a i b , obtenim

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

5.5 Fórmules compostes

En tots els casos exposats anteriorment resulta evident que la seua aplicació pot millorar l'aproximació al valor buscat de l'integral si, en comptes de considerar l'interval complet $[a, b]$, dividim aquest en subinterval més menuts i apliquem la fórmula a cada un de manera reiterada.

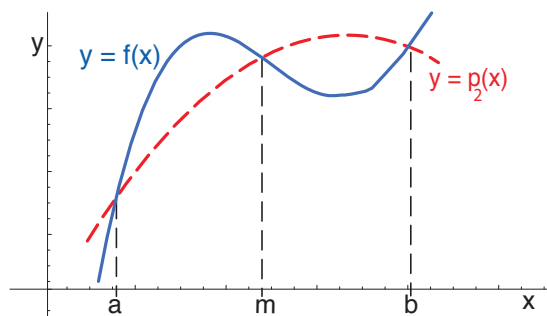


Figura 5.4: Fórmula 1/3 de Simpson.

Suposem, doncs, que entre a i b considerem un conjunt d'abscisses $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$. Aleshores, el valor de la integral, en cada cas, vindria donat per:

Per a la regla del rectangle tindrem:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i).$$

Per a la fórmula del punt mitja obtindriem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right).$$

En el cas de la fórmula dels trapezis

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.$$

i, finalment, en la de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{6} (f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f(x_{i+1})).$$

Abcisses igualment espaciades

Si, com és habitual, es divideix l'interval $[a, b]$ en n subintervalls de la mateixa longitud $h = \frac{b-a}{n}$, prenent ara les abscisses $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, podem aplicar a cada un dels mètodes anteriors les expressions obtingudes, de manera que, designant com a $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, tenim unes fórmules més condensades.

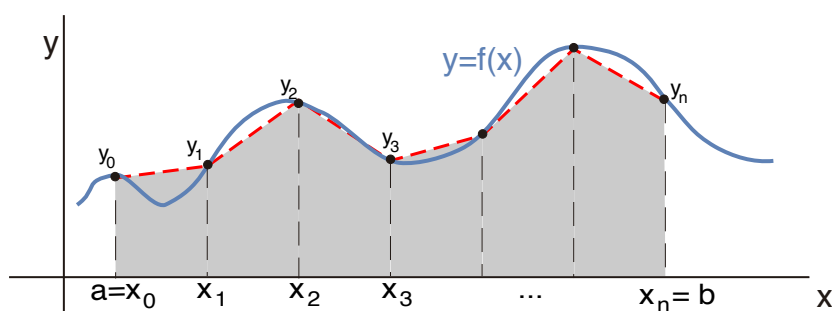


Figura 5.5: Fórmula composta de trapezis.

Per al mètode dels rectangles

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} y_i = R_n. \quad (5.2)$$

L'error d'integració es pot fitar amb l'expressió

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n \right| \leq \frac{(b-a)M_1}{2} h, \quad (5.3)$$

on $M_1 = \max_{t \in [a,b]} |f'(t)|$.

Per al mètode del punt mitjà

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = D_n. \quad (5.4)$$

L'error d'integració es pot fitar amb l'expressió

$$\left| \int_a^b f(x) dx - D_n \right| \leq \frac{(b-a)M_2}{24} h^2, \quad (5.5)$$

on $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

Per al mètode dels trapezis

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) = \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1})) = T_n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'error d'integració es pot fitar amb l'expressió

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{(b-a)M_2}{12} h^2, \quad (5.7)$$

on $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

Per al mètode de Simpson Igual que hem fet en el mètode del punt mitjà, dividim l'interval $[a, b]$ en un nombre parell $n = 2m$ de subintervalls, i l'espaiat o pas d'integració serà

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}.$$

Obtenim que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) = \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})] = S_n. \end{aligned} \quad (5.8)$$

L'error s'estima ara per

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{(b-a)M_4}{180} h^4, \quad (5.9)$$

on $M_4 = \max_{t \in [a, b]} |f^{(iv)}(t)|$.

5.6 Integració numèrica d'equacions diferencials

Considerem una equació diferencial de primer ordre, aïllada respecte de la derivada, amb condició inicial, és a dir,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (5.10)$$

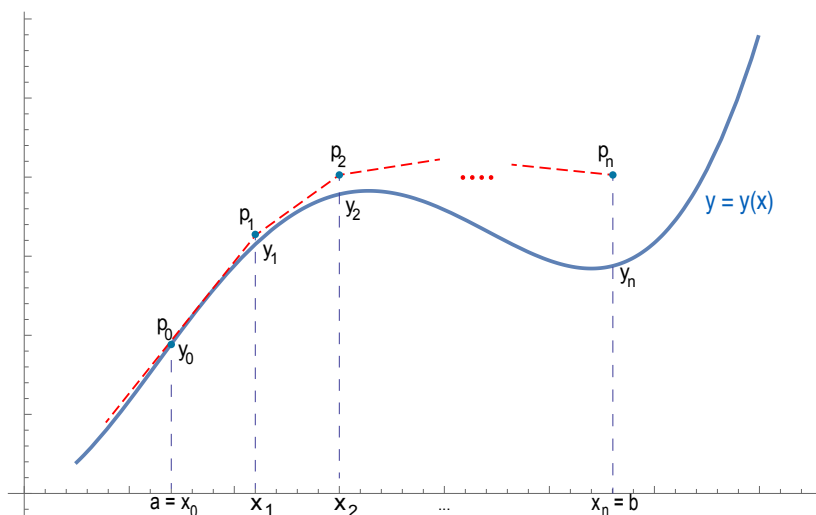
Volem construir la funció solució $y(x)$ que satisfà aquesta equació juntament amb la condició inicial, és a dir, trobar el valor de la solució $y(x)$ per a un $x \neq x_0$.

Donat que coneixem la primera derivada de la funció incògnita $y(x)$ i que aquesta ve donada de manera implícita per l'expressió $y'(x) = f(x, y(x))$, podem trobar les derivades successives derivant de manera implícita en aquesta expressió. Això ens permet obtenir valors aproximats als de la funció solució segons fins a quin ordre considerem en aproximar en el desenvolupament de Taylor aquesta funció al voltant de cada punt.

5.6.1 Mètode d'Euler

El mètode bàsic d'Euler consisteix a construir les aproximacions a la funció solució a partir de la primera derivada, que coneixem com a equació (5.10).

La corba integral buscada $y(x)$, que passa pel punt $p_0 = (x_0, y_0)$, se substitueix de manera aproximada per la poligonal formada pels punts p_0, p_1, p_2, \dots . Els segments $\overline{p_i p_{i+1}}$ tenen en cada vèrtex p_i el mateix pendent $y'_i = f(x_i, y_i)$ que la corba integral que passa pel punt p_i .



Construïm una partició uniforme de l'interval $[x_0, x_n]$ amb $n + 1$ punts:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n, \quad h = x_i - x_{i-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

I els valors aproximats de la solució de l'equació diferencial per a cada x_i s'obtenen segons la fórmula

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

5.6.2 Procediment d'Euler-Cauchy millorat

Per a millorar el procediment anterior, primerament es determina la solució aproximada que correspondria al punt (x_i, y_i) pel mètode d'Euler, és a dir, $\hat{y}_{i+1} = y_i + hf_i$ i a partir d'aquesta es determina el pendent $\hat{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$ de la corba integral en el punt aproximat (x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) . Aleshores s'obté l'ordenada y_{i+1} a partir de la mitjana dels dos valors obtinguts dels pendents.

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f_i + \hat{f}_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

El procediment d'Euler-Cauchy encara es pot millorar si es determina cada valor y_i de manera iterativa:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}) \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

El procediment iteratiu es continua fins que es troben dues aproximacions successives $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ que no es diferencien l'una de l'altra més que en l'ordre decimal requerit. Una vegada assolit l'ordre de precisió, posem $y_{i+1} = y_{i+1}^{(m)}$ i repetim el procés per al punt següent. Si no s'aconsegueix la precisió requerida amb diverses iteracions, s'acurta el pas h i es repeteix el procés.

5.6.3 Algorismes de Runge-Kutta

Els algorismes de Runge-Kutta tracten d'obtenir una aproximació a la funció que s'ha d'integrar fins a un cert ordre del seu desenvolupament de Taylor. Per a obtenir-la hi ha diversos algorismes, que depenen de l'ordre d'aproximació que es desitja i de l'elecció de les constants que cal determinar.

Un algorisme de Runge-Kutta de segon ordre (*mètode de Heun*) és

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (k_1 + k_2), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$$

que, com es pot veure, coincideix amb l'anterior d'Euler-Cauchy millorat.

Un algorisme de quart ordre, potser el més utilitzat, és

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.11)$$

on

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Part 2

Probabilitat i estadística

Capítol VI

Teoria elemental del mostreig estadístic

6.1 Introducció

Un **experiment aleatori** és aquell del qual coneixem el conjunt dels resultats possibles, però del qual no podem predir el resultat de cada prova concreta.

En estadística s'anomena **població** al conjunt de tots els elements dels quals es vol obtenir informació. Una **mostra** és un subconjunt extret de la població l'estudi del qual ens serveix per a traure conclusions vàlides i prendre decisions raonables sobre toda la població.

L'objectiu en aquest tema és aprendre a extraure, resumir i comunicar informació a partir de conjunts de dades experimentals, mitjançant variables aleatòries adequades, i dotar-nos de les eines bàsiques necessàries per a poder arribar a conclusions significatives sobre una població a partir d'una mostra.

6.2 Paràmetres mostrals

Siga $\{x_1, \dots, x_k\}$ una mostra d'una població, és a dir, un conjunt de valors observats, de manera que cada valor x_i ha estat observat en un nombre n_i d'ocasions ($1 \leq i \leq k$). Al número n_i l'anomenarem **freqüència absoluta** del valor x_i en la mostra i al número $n = \sum_{i=1}^k n_i$ l'anomenarem **grandària** de la mostra.

La **freqüència relativa** del valor x_i , f_i és el quocient entre la seua freqüència absoluta i el nombre total d'observacions

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

Observem que $\sum_{i=1}^k f_i = 1$.

La **mitjana mostral** del conjunt de valors observats la denotarem per \bar{x} i es defineix com la mitjana aritmètica d'aquests valors

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k f_i x_i.$$

Per a mesurar l'agrupació o dispersió global de les dades al voltant de la mitjana, es defineix l'anomenada **variància mostral**

$$d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \bar{x}^2,$$

o bé la **desviació típica mostral**

$$d = + \sqrt{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2},$$

que presenta l'avantatge de mesurar-se en les mateixes unitats que la variable original. Per les seues millors propietats matemàtiques (com veurem més endavant per a l'estimació de la variància poblacional), se sol utilitzar l'expressió anterior amb $n - 1$ en lloc de n en els denominadors, és a dir, es considera valor

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2,$$

que anomenarem **variància mostral corregida** o **quasivariància mostral**.

La relació existent entre la variància mostral i la variància mostral corregida és, evidentment,

$$s^2 = \frac{n}{n - 1} d^2. \quad (6.1)$$

6.3 Probabilitat

Un **espai mostral** per a un experiment aleatori és un conjunt Ω format per tots els resultats possibles associats a l'experiment. El conjunt pot tenir un nombre finit o infinit numerable d'elements, cas en el qual direm que l'espai mostral és **discret**, o bé un nombre infinit no numerable, cas en el qual direm que l'espai mostral és **continú**.

Cada subconjunt A de Ω és un **esdeveniment** i ho indicarem escrivint $A \subset \Omega$. Els elements de Ω són els **esdeveniments elementals** o **simples**. El mateix espai mostral Ω és un esdeveniment anomenat **esdeveniment segur**, mentre que el conjunt buit, \emptyset , representa l'**esdeveniment impossible**.

En fer un experiment aleatori, direm que ha tingut lloc o que ha esdevingut l'esdeveniment A si el resultat obtingut pertany al subconjunt A .

El conjunt de tots els possibles esdeveniments no és més que el conjunt de les parts de Ω , o dels subconjunts de Ω , que representarem mitjançant $\mathcal{P}(\Omega)$.

Siguen $A, B \subset \Omega$. Igual que es fa sobre $\mathcal{P}(\Omega)$, definim l'esdeveniment **unió** de A i B com a

$$A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ o } w \in B\},$$

l'esdeveniment **intersecció** de A i B

$$A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ i } w \in B\},$$

i l'esdeveniment **complementari** de A

$$\bar{A} = \{w \in \Omega : w \notin A\}.$$

Podem considerar també l'esdeveniment diferència $B \setminus A = B \cap \bar{A}$.

La relació $A \subset B$, s'interpreta com que si es dóna A , aleshores també es dóna B .

Dos esdeveniments $A, B \subset \Omega$ són **mútuament excloents** si $A \cap B = \emptyset$.

Definició 6.1 Una funció de probabilitat sobre un espai mostral Ω és una aplicació

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

que compleix

$$(i) P(\Omega) = 1,$$

(ii) si els esdeveniments $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ són mútuament excloents dos a dos, aleshores

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Si es compleixen les condicions anteriors, direm que el parell (Ω, P) és un **espai probabilístic o de probabilitat**.

Propietats 6.2 Siguen (Ω, P) un espai probabilístic i $A, B \subset \Omega$. Aleshores

$$1. P(\bar{A}) = 1 - P(A). \text{ En particular, } P(\emptyset) = 0.$$

2. Si $A \subset B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. **Postulat d'indiferència.** Si tots els esdeveniments elementals de Ω , $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, són igualment probables, aleshores

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Per tant, si $A = \bigcup_{k=1}^r \{e_{i_k}\}$, aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

que es coneix com a **lleï de probabilitat de Laplace**.

Definició 6.3 Siguen A i B dos esdeveniments d'un cert espai de probabilitat (Ω, P) , amb $P(B) > 0$, la **probabilitat de A condicionada per B** es defineix com a

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Siga (Ω, P) un espai probabilístic, $B \in \Omega$ amb $P(B) > 0$. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} P(. / B) : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(A/B) \end{aligned}$$

Aleshores $(\Omega, P(. / B))$ és un espai probabilístic.

Notem que, arran del resultat anterior, tenim automàticament relacions sobre la probabilitat condicionada tals com que $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$, $P((A \cup C)/B) = P(A/B) + P(C/B) - P((A \cap C)/B)$, etc.

Definició 6.4 Els esdeveniments A i B d'un espai de probabilitat (Ω, P) es diu que són **independents** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observem que, si $P(B) > 0$, aleshores A i B són independents si i solament si $P(A/B) = P(A)$.

Si tenim dos esdeveniments:

$$P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$$

Si en tenim tres:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A/(B \cap C)) P(B \cap C) = P(A/(B \cap C)) P(B/C) P(C)$$

i així en general, és a dir,

Teorema 6.5 (probabilitat composta) *Siguen $B_i \subset \Omega$, $1 \leq i \leq k$, de manera que $P(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i) > 0$. Aleshores*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k B_i\right) = P(B_1)P(B_2/B_1) \dots P(B_k/\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i).$$

Dintre de la probabilitat d'esdeveniments condicionada es donen dos teoremes importants.

Permeten calcular la probabilitat d'un esdeveniment que resulta d'un nombre finit de causes excloents o bé la probabilitat d'una d'aquestes causes una vegada que sabem que s'ha presentat l'esdeveniment.

Suposem que Ω es descompon en una partició de k esdeveniments mútuament excloents: $\Omega = \bigcup_{i=1}^k H_i$, amb $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$.

El primer teorema permet obtenir la probabilitat d'un esdeveniment A a partir de les probabilitats dels esdeveniments que conformen la partició i de la probabilitat condicionada de A a cada un d'aquests esdeveniments.

Teorema 6.6 (probabilitat total) *Siga un esdeveniment $A \subset \Omega$. La seua probabilitat es calcula per*

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \dots + P(A/H_k)P(H_k).$$

El segon teorema ens permet obtenir la probabilitat que un esdeveniment compost s'haja donat per una concreta de les causes.

Teorema 6.7 (Bayes) *S'ha donat un esdeveniment A . La probabilitat que siga per la causa H_i ve donada per*

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A)}.$$

6.4 Variables aleatòries

Siga Ω l'espai mostral associat a un experiment aleatori. Una **variable aleatòria** (v. a.) és una aplicació del tipus

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Anomenarem **soport** de X el conjunt imatge de l'aplicació, és a dir, el conjunt

$$S_X = \{X(s) : s \in \Omega\}.$$

Si sobre Ω tenim definida una funció de probabilitat P , al fet que X prenga valors en un subconjunt W de nombres reals li podem assignar una probabilitat mitjançant

$$P(X \in W) = P(\{s \in \Omega : X(s) \in W\}).$$

En particular, per a tot $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X \leq x) \equiv P(X \in]-\infty, x]) = P(\{s \in \Omega : X(s) \in]-\infty, x]\}).$$

6.4.1 Funcions de distribució i de densitat

Definició 6.8 La funció de distribució de probabilitat, F , d'una v. a. X és

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

que s'introdueix per a conèixer com es reparteix la probabilitat dels valors que pren la v. a.

Propietats. Siga F la funció de distribució d'una v. a. X . Siguen $x, y \in \mathbb{R}$. Es verifiquen:

1. si $x \leq y$, aleshores $F(x) \leq F(y)$,
2. $P(X > x) = 1 - F(x)$,
3. $P(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$,
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
5. F és contínua per la dreta en tota la recta real.

La v. a. X es diu que és **discreta** si S_X es compon d'un nombre finit o infinit numerable de nombres reals, mentre que si S_X és un interval de nombres reals es diu que X és **contínua**.

Definició 6.9 Siga X una v. a. discreta. Una **funció de densitat** per a X és una funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificant:

1. $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$
2. $f(x) = 0, \quad x \notin S_X,$
3. $\sum_{x \in S_X} f(x) = 1.$

Determinar quina funció de densitat és l'adient a cada experiment aleatori és equivalent a proporcionar una probabilitat a cada nombre real:

$$f(x) = P(X = x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La **funció de distribució** corresponent és

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f(y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notem que F és una funció escalonada amb salts en els valors de S_X .

Definició 6.10 Siga X una v. a. discreta amb funció de densitat f . L'**esperança** o **mitjana** de X és

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x f(x),$$

que també indicarem per μ . La **variància** de X és

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 f(x),$$

que també notarem per σ^2 . La **desviació típica** de X és l'arrel quadrada positiva de la variància i es denota per σ .

Definició 6.11 Siga X una v. a. contínua. Una **funció de densitat** per a X és aquella de la forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica

1. $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

La funció de distribució corresponent és

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En la definició anterior s'entén que les integrals existeixen. Notem que $P(X = x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. A més, per a $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(s) ds,$$

la qual cosa es pot interpretar com l'àrea tancada per la funció de densitat f , l'eix x i les rectes $x = a$, $x = b$.

En el cas continu, la funció de densitat no representa una probabilitat, com en el cas discret, però és la funció que serveix per a definir les diferents distribucions contínues i per a calcular els valors de la funció de distribució, que són els que tenen importància en aquestes distribucions.

Definició 6.12 Siga X una v. a. contínua amb funció de densitat f . L'esperança o mitjana de X és

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

que també indicarem per μ . La variància de X és

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx,$$

que també indicarem per σ^2 . La desviació típica de X és l'arrel quadrada positiva de la variància i es denotarà com a σ .

6.5 Distribucions de probabilitat

6.5.1 Distribucions discretes

Distribució de Bernoulli

Siga A un esdeveniment de probabilitat p coneguda. S'observa si A ocorre o no. La variable aleatòria X pren el valor 1 si ocorre A i el valor 0 en cas contrari. Diguem aleshores que X és una **variable aleatòria de Bernoulli**.

La funció de densitat és

$$f(0) = P(X = 0) = 1 - p = q, \quad f(1) = P(X = 1) = p$$

i els paràmetres són

$$E(X) = p, \quad \text{Var}(X) = pq.$$

Distribució binomial

Siga A un esdeveniment de probabilitat p i considerem n proves independents en cadascuna de les quals es pot presentar o no l'esdeveniment A .

Siga X la v. a. que compta el nombre de vegades que es presenta A . Aleshores, X pot prendre tots els valors de 0 a n i la seua funció de densitat ve donada per

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

Diguem en aquest cas que X segueix una **distribució binomial** de n proves i probabilitat p , i és representat per $B(n, p)$.

Els paràmetres són

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = npq.$$

Distribució multinomial

Siguen A_1, \dots, A_k , k esdeveniments mútuament excloents amb probabilitats p_1, \dots, p_k , de manera que $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. Considerem n proves independents i siga n_i el nombre de vegades que es presenta cada A_i , amb $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Siga la variable aleatòria X_i , que indica el nombre de vegades que s'ha donat l'esdeveniment A_i sobre les n observacions. La variable aleatòria vectorial $X = (X_1, \dots, X_k)$ segueix una **distribució multinomial** amb paràmetres n i p , on $p = (p_1, \dots, p_k)$ i la seua funció de densitat és

$$f(n_1, \dots, n_k) = P(X = (n_1, \dots, n_k)) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}. \quad (6.3)$$

L'esperança matemàtica és

$$E(X) = E(X_1, \dots, X_k) = (E(X_1), \dots, E(X_k)) = (np_1, \dots, np_k) = np$$

i la variància és

$$\text{Var}(X) = \text{var}(X_1, \dots, X_k) = (\text{Var}(X_1), \dots, \text{Var}(X_k)) = (np_1q_1, \dots, np_kq_k).$$

Distribució hipergeomètrica

La distribució **hipergeomètrica** s'aplica, per exemple, a les extraccions sense reemplaçament, és a dir, aquelles en què els objectes només s'extrauen una vegada.

Suposem que en una urna hi ha n boles de les quals n_1 són blanques i n_2 són negres. Extraïem m boles sense reemplaçament i la variable aleatòria X compta el nombre de boles blanques extretes. Aleshores, la funció de densitat és

$$f(k) = P(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{m-k}}{\binom{n}{m}}. \quad (6.4)$$

Tenim que

$$E(X) = mp, \quad \text{Var}(X) = mpq \frac{n-m}{n-1}$$

on $p = \frac{n_1}{n}$ i $q = 1 - p$.

Distribució geomètrica o de Pascal

Siga A un esdeveniment amb probabilitat p i siga X el nombre de vegades que hem de repetir una experiència, en condicions independents, fins que es done l'esdeveniment A .

En aquest cas la variable aleatòria X s'anomena **geomètrica** i pren els valors $0, 1, 2, \dots$, i la seua funció de densitat és

$$f(k) = P(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

on es considera $k = 0$ si l'esdeveniment A es dona en el primer assaig. Açò és equivalent a comptar el nombre de fallides fins que es té un èxit.

L'esperança i la variància són

$$E(X) = \frac{1-p}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Distribució binomial negativa

La distribució **binomial negativa** s'ajusta bé al recompte d'espècies d'animals i plantes per unitat d'àrea.

Siga r un enter positiu i la variable aleatòria X compta el nombre k d'absències d'un esdeveniment de probabilitat p , després de $k + r$ proves independents, fins a aconseguir r presències. La probabilitat de cada valor de la variable ve donada per

$$f(k) = P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^{r-1} q^k p \quad (6.6)$$

on $q = 1 - p$.

L'esperança i la variància són

$$E(X) = \frac{rq}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

Distribució uniforme discreta

Modelitza problemes en els quals la v. a. pren un nombre finit de valors $\{x_i\}_{i=1}^k$ amb la mateixa probabilitat. Direm aleshores que X es distribueix de manera **uniforme discreta**, $X \sim U(\{x_i\}_{i=1}^k)$, i la seua funció de densitat és determinada per

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \dots, k.$$

L'esperança és $E(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$ i la variància $\text{Var}(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - E(X))^2$.

Distribució de Poisson

La distribució de Poisson és útil per a estudiar la probabilitat que un determinat nombre d'esdeveniments es donen en un determinat període de temps, donada una freqüència mitjana coneguda i de manera independent del temps transcorregut des del darrer esdeveniment. Per exemple en els següents contextos: nombre de servidors web accedits per minut, nombre de nuclis atòmics inestables que decauen durant un cert període en una porció de substància radioactiva, nombre d'estels que hi ha en un determinat volum d'espai, etc.

Diem que una v. a. X segueix una distribució de **Poisson** de paràmetre $\lambda > 0$ si la funció de densitat associada és

$$f(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

i ho indicarem escrivint $X \sim P(\lambda)$. Es verifica que $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$.

6.5.2 Distributions contínues

Distribució uniforme

La **distribució uniforme** correspon a una v. a. contínua que resulta de triar a l'atzar un nombre dins d'un interval $]a, b[$. La funció de densitat de probabilitat és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } x \in]a, b[\\ 0, & \text{si } x \notin]a, b[\end{cases} \quad (6.7)$$

Tenim que

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

És interessant comprovar que la probabilitat que X prengui valors en dos subintervalls de $]a, b[$ de la mateixa longitud és la mateixa.

Distribució exponencial

Per a un valor $\lambda > 0$, la distribució **exponencial** correspon a una v. a. contínua de funció de densitat

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

S'obté que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ i $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Distribució normal

Una v. a. absolutament contínua X diem que segueix una distribució **normal** de paràmetres $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, si la funció de densitat que té és

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (6.9)$$

i es representa per $N(\mu, \sigma)$.

En aquest cas,

$$E(X) = \mu \quad \text{i} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Aquella distribució normal que té mitjana 0 i variància 1 s'anomena **normal tipificada**, i el pas d'una variable X , $N(\mu, \sigma)$, qualsevol a la Z , $N(0, 1)$, s'anomena *tipificar la variable*:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Designant z_α el punt de la normal tipificada que deixa a l'esquerra una probabilitat igual a α , la taula de la pàgina 100 proporciona les probabilitats d'aquesta variable Z per a $0 \leq z_\alpha \leq 3.79$.

Així, per a qualsevol $X \sim N(\mu, \sigma)$, $P(a \leq X \leq b)$ es pot calcular utilitzant taules per a Z mitjançant la igualtat

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

La taula de la normal tipificada sols conté probabilitats associades a valors positius, ja que per als valors negatius s'obtenen per la simetria de la funció de densitat respecte de l'eix y :

$$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \geq a).$$

La distribució normal s'utilitza en l'estudi de característiques morfològiques d'individus (alçada, perímetre de bíceps, etc.), característiques fisiològiques (efecte d'una mateixa dosi d'un fàrmac), característiques sociològiques (consum d'un cert producte per un mateix grup d'individus), característiques psicològiques (coeficient intel·lectual), en teoria d'errors, per a aproximar altres distribucions, etc.

Distribucions deduïdes de la normal

Les següents distribucions són útils en l'estudi dels intervals de confiança i el contrast d'hipòtesis.

Distribució χ^2 de Pearson

Si X_1, \dots, X_n són n v. a. independents amb distribució $N(0, 1)$, la v. a. que s'obté per la suma dels seus quadrats

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

es coneix com una χ^2 **de Pearson** amb n graus de llibertat. La funció de densitat és

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si } 0 < x < \infty \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

per a $n = 1, 2, \dots$ i Γ és la funció *gamma d'Euler*.

Per a aquesta distribució es té

$$E(\chi_n^2) = n \quad \text{i} \quad \text{Var}(\chi_n^2) = 2n$$

Si designem $x_{n,p}$ el valor de la χ^2 amb n graus de llibertat que deixa a l'esquerra una probabilitat p , la taula de la pàgina 101 proporciona els valors que pren la variable per a diferents probabilitats fins a $n = 30$.

Per a $n > 30$ s'utilitza la taula de la variable normal tipificada $N(0, 1)$, aprofitant, per exemple, el fet que $\sqrt{2\chi_n^2}$ és asimptòticament igual a $N(\sqrt{2n-1}, 1)$.

Distribució t de Student

Siguen X i Y dues v. a. independents, de les quals X és una $N(0, 1)$ i Y és una χ_n^2 . Aleshores la v. a.

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

segueix una distribució t **de Student** amb n graus de llibertat.

La funció de densitat de probabilitat de la variable t_n és

$$f_{t_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6.11)$$

Amb el mateix conveni de notació que hem establert anteriorment, $t_{n,p}$ representa el valor de la t amb n graus de llibertat que deixa a l'esquerra una probabilitat p . En la pàgina 102 tenim els valors de la variable per a diferents probabilitats superiors a 0.75.

Per a probabilitats p més menudes es pot obtenir el punt que correspon a partir de la taula aprofitant la simetria

$$p = P(t \leq t_{n,p}) = 1 - P(t \geq t_{n,p}) = 1 - P(t \leq -t_{n,p})$$

és a dir, $t_{n,p} = -t_{n,1-p}$, valor que es llegeix directament en la taula.

Es verifica que

$$E(t_n) = 0 \quad \text{i} \quad \text{Var}(t_n) = \frac{n}{n-2}.$$

Per a $n > 30$ la t_n s'aproxima molt bé mitjançant $N(0, 1)$.

Distribució F de Fisher-Snedecor

Siguen dues v. a. independents amb distribucions χ_m^2 i χ_n^2 de Pearson. La variable aleatòria

$$F_{m,n} = \frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n}$$

s'anomena **F de Fisher-Snedecor** amb m i n graus de llibertat.

La funció de densitat és

$$f_{F_{m,n}}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

Tenim ara que

$$E(F_{m,n}) = \frac{n}{n-2} \quad \text{i} \quad \text{Var}(F_{m,n}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}.$$

Representarem per $f_{m,n;p}$ el valor tal que $P(F_{m,n} \leq f_{m,n;p}) = p$. En la pàgina 103 es tenen els valors de la variable per a $p = 0.95$ i diferents combinacions de m i n , i en la pàgina següent per a la probabilitat $p = 0.99$.

Per la següent propietat

$$f_{n,m;1-p} = \frac{1}{f_{m,n;p}}.$$

es poden obtenir els valors corresponents a valors de p menuts.

6.6 Tractament d'errors

6.6.1 Tractament estadístic d'errors experimentals

L'objecte de la major part dels experiments científics és l'obtenció de determinats valors per a certes quantitats que es desconeixen: el pes molecular, el nombre de partícules, la velocitat d'una reacció, etc. Aquest estudi es fa mesurant les magnituds que caracteritzen les propietats que interessen a l'investigador, mitjançant aparells de mesura i, eventualment, l'aplicació de fórmules matemàtiques. El dispositiu de mesura i fins i tot les condicions de l'observació fan que les dades obtingudes experimentalment siguin sempre afectades d'errors.

La tasca de determinar l'error d'una magnitud mesurada en la pràctica no és senzilla. El vertader valor de l'error comès en la quantitat assignada a la magnitud resta sempre

desconegut. És per això que l'objectiu de la teoria d'errors pot ser només l'apreciació del grau màxim de l'error dels mesuraments. El grau de certesa d'aquesta estimació depèn de la quantitat de factors que hagen intervingut en un experiment concret: instruments, condicions, observador, etc., i que puguin influir sobre el resultat de les mesures.

Classificació dels errors Per a facilitar-ne l'anàlisi, se solen classificar els errors d'acord amb els motius que els provoquen i, bàsicament, en dues categories: errors sistemàtics i errors accidentals.

Els *errors sistemàtics* són aquells que influeixen en igual manera en cada resultat. Les fonts d'errors sistemàtics són: errors instrumentals, errors vinculats al medi, errors associats a l'experimentador (subjectius o personals). En aquests casos, si es coneix la font de l'error sistemàtic, en principi, es pot estimar la seva influència sobre la magnitud que es mesura, per exemple, introduint una correcció adequada als resultats.

Els *errors accidentals* són aquells lligats a factors que poden tenir petites variacions durant l'experiment. Per exemple, en obtenir un pes en una balança de precisió pot influir una vibració en els platerets, oscil·lacions en la il·luminació, un error humà en la lectura, etc. Una acumulació d'aquests factors dona lloc al fet que la repetició d'un mateix mesurament done en cada ocasió un valor lleugerament diferent.

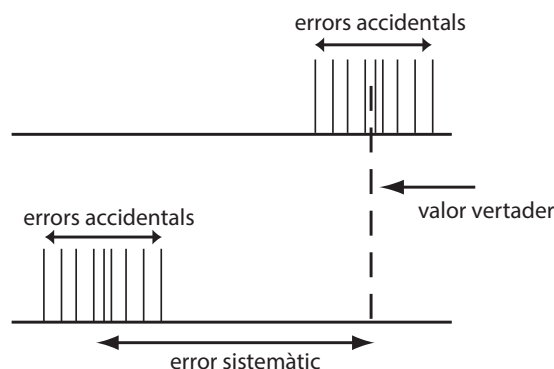


Figura 6.1: Errors sistemàtic i accidental

Com que el resultat de cada mesura individual depèn de l'ocurrència d'un gran nombre de factors diferents, que varien durant la prova, pot considerar-se com una magnitud fortuïta o aleatòria. Així mateix, també l'error pot considerar-se com una variable aleatòria. D'aquesta manera, es pot tractar el valor i l'error d'una mesura com a variables aleatòries que podem estudiar per les lleis de la probabilitat i utilitzar un mètode matemàtic, la teoria de les probabilitats, per al seu estudi.

En els apartats anteriors hem estudiat el càlcul de les probabilitats dels esdeveniments lligats a una certa classe d'experiments, als quals s'associa una determinada variable aleatòria. En la pràctica en estudiar els resultats de les proves d'un experiment s'utilitza el problema invers: donat un nivell de probabilitat i la funció de distribució que cal emprar (segons de quin experiment es tracte) es vol determinar un interval en el qual es pot trobar el veritable valor que s'intenta mesurar.

Considerem el problema de determinar un interval aleatori de manera que la probabilitat que la variable aleatòria X prengui valors en aquest interval siga igual a α . Aleshores haurem de determinar els valors x_e i x_d tals que

$$p(x_e < X < x_d) = \alpha. \quad (6.13)$$

La determinació d'aquests valors extrems de l'interval es tracta en la part de la teoria de la probabilitat coneguda com a *intervalls de confiança*.

Com ja sabem, a partir de la funció de distribució o la de densitat, la probabilitat (6.13) es calcula mitjançant

$$\alpha = F(x_d) - F(x_e) = \int_{x_e}^{x_d} f(x) dx$$

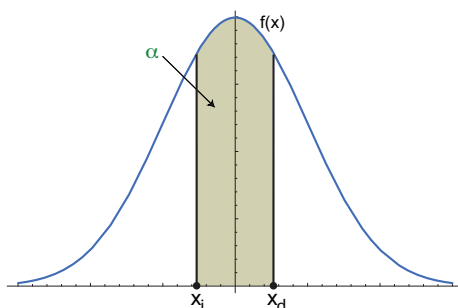


Figura 6.2: Extrems de l'interval de confiança.

Per tant, serà necessari per a determinar els extrems de l'interval fer una elecció sobre la funció de distribució que s'adequa a les característiques de la variable que es mesura.

L'interval determinat conté estadísticament el valor teòric esperat per a la magnitud que es vol calcular amb la probabilitat α que es fixe.

6.7 Interval·s de confiança

Considerem una v. a. $X \sim N(\mu, \sigma)$, on recordem que μ és la mitjana poblacional i σ és la desviació típica poblacional. Siguen $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, $1 \leq i \leq n$, v. a. independents idèntiques a X (mostra aleatòria simple de grandària n). Considerem les noves v. a.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

mitjana mostral, i

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

quasivariància mostral. Observades les v. a. X_i per a obtenir una mostra aleatòria simple de grandària n de X , tindrem valors concrets de les v. a. \bar{X} i S , que denotem \bar{x} i s , respectivament.

L'obtenció de les expressions que ens proporcionaran els diferents interval·s es basa en els supòsits següents. Si X és normal $N(\mu, \sigma)$, aleshores:

- La variable \bar{X} té una distribució normal de mitjana μ i variància $\frac{\sigma^2}{n}$.
- La variable $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ segueix una distribució χ^2 amb $n-1$ graus de llibertat.
- Les variables \bar{X} i Y són independents.
- La variable $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ segueix una distribució normal $N(0, 1)$.
- La variable $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ té una distribució t de Student amb $n-1$ graus de llibertat.

Un altre resultat fonamental és l'anomenat **teorema central del límit**, que estableix que si X_1, \dots, X_n són variables aleatòries independents amb la mateixa funció de densitat desconeguda, i μ i σ^2 representen la mitjana i la variància poblacionals, respectivament, ambdues finites, aleshores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z$$

on $Z \sim N(0, 1)$.

Utilitzant bàsicament aquestes propietats es determinen interval·s aleatoris en els quals hi ha el paràmetre desconegut de la població objecte d'estudi, amb una probabilitat prefixada

$1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, que anomenarem **intervals de confiança amb un nivell de confiança** $1 - \varepsilon$. Una vegada es dispose d'una mostra, obtindrem un valor concret, no aleatori, de l'interval de confiança, que en el $100(1-\varepsilon)\%$ de les mostres contindrà el paràmetre desconegut.

En avant utilitzarem la següent notació: per a $0 < p < 1$,

- z_p és el nombre real que compleix $P(Z \leq z_p) = p$,
- $x_{n,p}$ és el nombre real que compleix $P(\chi_n^2 \leq x_{n,p}) = p$,
- $t_{n,p}$ és el nombre real que compleix $P(t_n \leq t_{n,p}) = p$,
- $f_{m,n;p}$ és el nombre real que compleix $P(F_{m,n} \leq f_{m,n;p}) = p$.

6.7.1 Intervals de confiança per a la mitjana μ d'una distribució normal

a) Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de variància coneguda

Si es coneix la variància poblacional σ^2 es té que

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1 - \varepsilon$$

(recordem que, pel criteri de notació, $z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ representa el punt de la normal tipificada que deixa a l'esquerra una probabilitat de $1 - \frac{\varepsilon}{2}$) i, per tant, l'interval que té una probabilitat $1 - \varepsilon$ de contenir la mitjana ve donat per

$$\bar{X} \pm z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (6.14)$$

Si tenim una mostra $\{x_1, \dots, x_n\}$, obtindrem l'interval no aleatori

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\varepsilon/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\varepsilon/2} \right].$$

b) Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de variància desconeguda

Quan la variància poblacional σ^2 no es coneix, l'interval de confiança al nivell $1 - \varepsilon$ s'obté per

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (6.15)$$

Quan $n > 30$, els valors $t_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}}$ es poden aproximar directament per $z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ obtinguts a partir de la taula de la normal tipificada.

6.7.2 Intervalls de confiança per a la variància d'una distribució normal

a) Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de mitjana coneguda

Quan la mitjana poblacional μ siga coneguda, l'interval en què es troba la variància poblacional σ^2 amb probabilitat $1 - \varepsilon$ ve donat per

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{x_{n, 1-\frac{\varepsilon}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{x_{n, \frac{\varepsilon}{2}}} \right] \quad (6.16)$$

on n és la grandària de la mostra.

b) Cas d'una distribució $N(\mu, \sigma)$ de mitjana desconeguda

En cas que μ siga desconeguda, calcularem l'interval per

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{x_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{x_{n-1, \frac{\varepsilon}{2}}} \right] \quad (6.17)$$

on n és la grandària de la mostra.

6.7.3 Interval de confiança per a una proporció

Recordem que una binomial $B(1, p)$ té mitjana p i desviació típica \sqrt{pq} . Així, per a mostres de grandària prou gran, s'agafa com a interval de confiança del paràmetre p l'interval

$$\left[\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\varepsilon/2}, \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\varepsilon/2} \right], \quad (6.18)$$

on \hat{p} és la v. a. freqüència relativa de l'esdeveniment èxit. En l'obtenció d'aquest interval estan involucrats el teorema central del límit i l'aproximació d'una binomial per una normal.

Si en una mostra de grandària n obtenim N èxits, la variable \hat{p} pren el valor N/n , el que determina l'interval per a aquesta mostra. La aproximació és vàlida quan $n \geq 30$, $n\hat{p} \geq 5$ i $n(1-\hat{p}) \geq 5$.

6.7.4 Interval de confiança per a la diferència de mitjanes de distribucions normals

Per a determinar l'interval de confiança per a la diferència de mitjanes $\mu_1 - \mu_2$ de dues poblacions $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, donat un nivell de confiança $1 - \varepsilon$, actuarem de la següent manera:

Si suposem conegudes les corresponents variàncies poblacionals σ_1 i σ_2 , tenim que l'interval per a la diferència de mitjanes $\mu_1 - \mu_2$, a partir del nivell de significació ε , s'obté per

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}. \quad (6.19)$$

Si no es coneixen les variàncies, però es pot suposar que són iguals, fent ús de la distribució t , tenim que l'interval es calcula per

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{n_1+n_2-2, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \left(\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)}. \quad (6.20)$$

Quan les mostres són grans ($n_1, n_2 > 30$), podem utilitzar la fórmula (6.19) canviant les variàncies poblacionals σ_i^2 per les variàncies mostrals S_i^2 , proporcionant l'interval donat per

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}.$$

En cas que les variàncies siguin desconegudes i no hi haja motius per a suposar que són iguals o, més aviat, se suposen diferents, i les mostres no siguem grans, podem emprar l'expressió

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{gl, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}},$$

en què el nombre de graus de llibertat gl s'obté de

$$gl = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}.$$

6.7.5 Interval de confiança per al quocient de dues variàncies de distribucions normals

Per a determinar l'interval de confiança per al quocient de dues variàncies σ_1 i σ_2 de dues poblacions $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, donat un nivell de confiança $1 - \varepsilon$, actuarem

com segueix:

Se suposa que disposem d'una mostra de X_1 i altra de X_2 de grandàries n_1 i n_2 respectivament, i suposem que μ_1 i μ_2 són desconegudes, que és la situació més freqüent, l'interval es calcula per

$$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{f_{n_1-1, n_2-1; 1-\varepsilon/2}}, \frac{S_1^2/S_2^2}{f_{n_1-1, n_2-1; \varepsilon/2}} \right].$$

6.7.6 Interval de confiança per a la diferència de dues proporcions

Donada una mostra de grandària n_1 de la qual s'han obtingut N_1 èxits i una altra de grandària n_2 de la qual s'han obtingut N_2 èxits, l'interval de confiança per a la diferència de proporcions $p_1 - p_2$ s'obté per

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}},$$

on \hat{p}_i és la v. a. freqüència relativa de l'esdeveniment èxit en la mostra i , que prendria el valor $\hat{p}_i = \frac{N_i}{n_i}$.

Aquesta aproximació és vàlida quan $n_i \geq 30$, $n_i \hat{p}_i \geq 5$ i $n_i(1 - \hat{p}_i) \geq 5$.

6.8 Contrast d'hipòtesis

Per a **contrastar** una hipòtesi entenem el fet de decidir quan una afirmació relativa a un paràmetre o a una distribució, etc., es pot acceptar o no.

El contrast d'hipòtesis comença amb el plantejament d'una **hipòtesi nul·la** H_0 i de la **hipòtesi alternativa** H_a , no sempre complementària de l'anterior. Per a decidir sobre si es rebutja o no H_0 s'utilitza l'anomenat **nivell de significació** α (els valors més habituals del qual són 0.1, 0.05 ó 0.01), de manera que si la 'compatibilitat' de la mostra amb H_0 és més menuda que α , rebutjarem aquesta hipòtesi de partida i donarem com a bona la hipòtesi alternativa H_a .

En pronunciar-nos sobre H_0 o H_a podem prendre una decisió incorrecta: podem rebutjar H_0 quan en realitat aquesta és certa (*error del primer tipus*) o acceptar H_0 quan aquesta és falsa (*error del segon tipus*). La probabilitat de cometre un error del primer tipus és el **nivell de significació**. El nivell de significació α mesura, en termes probabilístics, el risc de rebutjar H_0 quan és certa.

Per a facilitar comparacions entre diferents nivells de significació, s'introdueix el concepte de p -**valor** que es defineix com el nivell de significació més menut per sota del qual la hipòtesi nul·la es rebutja.

Per a pronunciar-nos sobre una hipòtesi H_0 relativa a un paràmetre poblacional utilitzem una variable aleatòria K contínua, amb una distribució coneguda, la qual anomenem **estadístic de decisió** o simplement *estadístic*.

Designarem K_{obs}^0 el valor mostral que pren la variable K quan se suposa que H_0 és certa. Aleshores, el conjunt de tots els valors $\{K_{\text{obs}}^0\}$ que pren K^0 , a partir de les mostres aleatòries simples que es poden obtenir, es divideix en dos subconjunts diferents i disjunts: un està constituït per aquells valors $\{K_{\text{obs}}^0\}$ que porten a rebutjar la hipòtesi nul·la H_0 i formen l'anomenada **regió crítica**, i l'altre, format pels altres valors, s'anomena **regió d'acceptació**.

La determinació de regions crítiques, una vegada fixat un criteri K i triat un nivell de significació α , consisteix a determinar un punt crític c_d tal que

$$P(K^0 > c_d) = \alpha \quad (\text{per a regions a dretes})$$

o bé $P(K^0 < c_e) = \alpha$ o bé $P((K^0 < c_1) \cup (K^0 > c_2)) = \alpha$, per als altres tipus de regions.

En els contrastos que s'estudien, les regions d'acceptació i crítica són sempre complementàries. Per això, en les taules donarem només els valors amb els quals s'obté la regió crítica.

6.8.1 Contrast d'una mitjana d'una distribució normal

Considerem el contrast d'hipòtesi nul·la $H_0 : \mu = \mu_0$.

a) Cas en què es coneix la variància σ

En aquest cas l'estadístic que cal utilitzar és

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

i, segons quina siga H_a , la determinació de regions crítiques i, per tant, l'acceptació o no de H_0 , s'agafa d'acord amb la taula

H_a	rebutjar H_0 si	
$\mu > \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$	(6.21)
$\mu < \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 < z_\alpha$	
$\mu \neq \mu_0$	$ K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha/2}$	

b) Contrast de la mitjana d'una població de variància σ desconeguda

En aquest cas aplicarem l'estadístic

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

i decidirem segons la taula

H_a	rebutjar H_0 si
$\mu > \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 > t_{n-1, 1-\alpha}$
$\mu < \mu_0$	$K_{\text{obs}}^0 < t_{n-1, \alpha}$
$\mu \neq \mu_0$	$ K_{\text{obs}}^0 > t_{n-1, 1-\alpha/2}$

(6.22)

Per a n gran (> 30), com que t_n tendeix a la normal, es pot utilitzar aquest mateix estadístic K i la taula (6.22) del cas a).

6.8.2 Contrast d'una variància d'una distribució normal

Tindrem la hipòtesi nul·la $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.

a) Contrast de la variància d'una població normal de mitjana μ coneguda

L'estadístic serà

$$K^0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2$$

i la taula per a prendre la decisió

H_a	rebutjar H_0 si
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n, 1-\alpha}$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n, \alpha}$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n, \alpha/2}$ o $K_{\text{obs}}^0 > x_{n, 1-\alpha/2}$

(6.23)
b) Contrast de la variància quan la mitjana és desconeguda

En aquest cas prendrem com a estadístic

$$K^0 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

i tindrem la taula

H_a	rebutjar H_0 si
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 > x_{n-1,1-\alpha}$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n-1,\alpha}$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$K_{\text{obs}}^0 < x_{n-1,\alpha/2}$ o $K_{\text{obs}}^0 > x_{n-1,1-\alpha/2}$

(6.24)

6.8.3 Contrast del paràmetre p d'una distribució binomial

En aquest cas contrastem la hipòtesi que un cert esdeveniment tinga probabilitat p_0 , és a dir, $H_0 : p = p_0$. Agafarem com a estadístic

$$K^0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}},$$

en què \hat{p} és la v. a. freqüència relativa de l'esdeveniment èxit en la mostra, és a dir, el nombre d'ocurrències de l'esdeveniment en n proves.

Com que K^0 es distribueix com una normal tipificada, aleshores utilitzem la taula

H_a	rebutjar H_0 si
$p > p_0$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$
$p < p_0$	$K_{\text{obs}}^0 < z_{\alpha}$
$p \neq p_0$	$ K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha/2}$

(6.25)

6.8.4 Comparació de dues mitjanes de distribucions normals

Considerem ara l'existència de dues poblacions representades per les variables X_1 i X_2 , amb mitjanes μ_1 i μ_2 i variàncies σ_1 i σ_2 , respectivament, les quals volem comparar.

- a) Es contrasta la hipòtesi $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ quan es coneixen σ_X^2 i σ_Y^2 .

Es pren l'estadístic

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$$

i tenim la taula

H_a	rebutjar H_0 si
$\mu_X > \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$
$\mu_X < \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 < z_\alpha$
$\mu_X \neq \mu_Y$	$ K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha/2}$

(6.26)

b) Es contrasta $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ quan σ_X^2 i σ_Y^2 són desconegudes.

b.1. Suposem que, tot i ser desconegudes, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. En aquest cas prendrem

$$K^0 = \frac{\sqrt{mn(m+n-2)}}{m+n} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

i decidim segons la taula

H_a	rebutjar H_0 si
$\mu_X > \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 > t_{m+n-2, 1-\alpha}$
$\mu_X < \mu_Y$	$K_{\text{obs}}^0 < t_{m+n-2, \alpha}$
$\mu_X \neq \mu_Y$	$ K_{\text{obs}}^0 > t_{m+n-2, 1-\alpha/2}$

(6.27)

b.2. Suposem que $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ i m, n grans. En aquest cas prendrem

$$K^0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}},$$

que és aproximadament $N(0, 1)$ i utilitzarem la taula (6.21).

6.8.5 Comparació de dues variàncies

Contrastem $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

La v. a. $\frac{\mathcal{S}_X^2}{\mathcal{S}_Y^2}$ té una distribució F de Snedecor amb $m - 1$ i $n - 1$ graus de llibertat. En aquest cas s'obté la taula

H_a	rebutjar H_0 si
$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$S_X^2/S_Y^2 > f_{m-1, n-1; 1-\alpha}$
$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$S_X^2/S_Y^2 < f_{m-1, n-1; \alpha}$
$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$\mathcal{S}_X^2/\mathcal{S}_Y^2 > f_{m-1, n-1; 1-\alpha/2}$
	$\mathcal{S}_X^2/\mathcal{S}_Y^2 < \frac{1}{f_{n-1, m-1; 1-\alpha/2}}$

(6.28)

6.8.6 Comparació de dos percentatges

Es tracta de contrastar $H_0 : p_X = p_Y$. El criteri

$$K^0 = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{m} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n}}},$$

sent \hat{p}_X, \hat{p}_Y les proporcions observades en les mostres de grandaries m i n , respectivament, segueix una distribució $N(0, 1)$.

Quan H_0 és vertadera i m i n són grans (≥ 30) el valor observat del criteri es calcula per

$$K_{\text{obs}}^0 = \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{p^*(1-p^*) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}},$$

on

$$p^* = \frac{M + N}{m + n}$$

sent M i N el nombre d'èxits observats en cada mostra.

S'aplica ara la taula

H_a	rebutjar H_0 si	
$p_X > p_Y$	$K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha}$	(6.29)
$p_X < p_Y$	$K_{\text{obs}}^0 < z_\alpha$	
$p_X \neq p_Y$	$ K_{\text{obs}}^0 > z_{1-\alpha/2}$	

6.8.7 El test χ^2 de bondat d'ajustament

Per a decidir si les dades que tenim d'una variable aleatòria corresponen a una certa distribució s'utilitza aquest test de **bondat d'ajustament**.

Si θ_i representa la freqüència observada i e_i la que s'espera (teòricament) d'un valor x_i , aleshores l'estadístic

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i}$$

segueix una distribució χ^2 amb $(k-1)-m$ graus de llibertat, on m és el nombre de paràmetres els valors dels quals s'han d'estimar per a calcular els valors teòrics $\{e_i\}_{i=1}^k$, segons la distribució de probabilitat a la qual suposem que s'ajusten.

En cas que $X^2 > \chi_{k-1-m, 1-\alpha}^2$, es rebutja l'ajustament al nivell de significació α . Quan és més menut s'accepta.

Capítol VII

Anàlisi de regressió

7.1 Recta de regressió

En tractar la dependència **funcional lineal** d'una quantitat (funció) respecte d'una altra (variable) es plantegen els següents problemes: estimar els valors dels paràmetres d'aquesta dependència funcional, verificar el grau de dependència lineal, donar una valoració de l'interval de confiança tant per als paràmetres com per a la funció.

La solució d'aquests problemes mitjançant mesuraments experimentals i aplicació del mètode dels *mínims quadrats* i els mètodes de l'estadística matemàtica s'anomena **anàlisi de regressió**.

Suposem que l'equació de regressió de Y sobre x és lineal, és a dir, tal que per a qualsevol valor donat de x la mitjana de la distribució de Y s'expressa en la forma

$$E(Y/x) = \alpha + \beta x$$

Fixat un x , un valor observat y_i de la variable Y diferirà, en general, d'aquest valor mitjà $E(Y/x)$ en un terme desconegut e_i que no és observable (depèn dels errors aleatoris de mesura i d'altres variables diferents de x que poden influir sobre Y).

Aquest terme d'error correspondrà a un possible valor d'una variable aleatòria ε , tal que

$$Y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

i de manera que $E(\varepsilon) = 0$.

Suposem n valors de x , $\{x_1, \dots, x_n\}$, per als quals, en correspondència, s'observen valors de Y . Tenim així una mostra $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ la representació de la qual per punts del pla XY s'anomena **diagrama de dispersió** (figura 7.1).

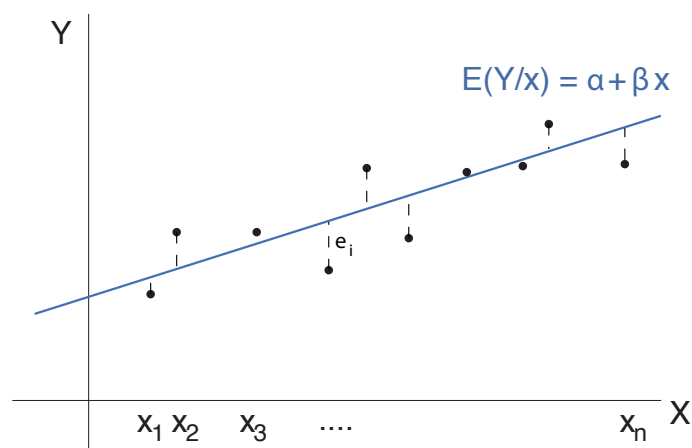


Figura 7.1: Diagrama de dispersió

El significat que donem al terme “millor” és que, d'aquesta manera, resulte mínima la suma dels quadrats de les desviacions

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

on

$$e_i = y_i - (a + bx_i)$$

són els termes d'error que s'obtenen a partir de la mostra per a una certa recta $y = a + bx$.

Es tracta, doncs, de trobar a i b de manera que siga mínima la suma

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (7.1)$$

Els valors de a i b que fan mínima la suma s'obtenen, com és habitual, derivant aquesta expressió com a funció de a i b i igualant a zero.

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \left(\sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \right) = 0.$$

La solució d'aquest sistema proporciona els valors mostrals de a i b :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (7.2)$$

Recta de regressió

Si recordem les expressions de les variàncies mostrals tenim

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2,$$

i la covariància, que es defineix com a

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}.$$

Aleshores, de les expressions mostrals (7.2), podem expressar

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \text{i} \quad a = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x}, \quad (7.3)$$

i, per tant, la **recta de regressió de Y sobre x** queda com a

$$y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x}). \quad (7.4)$$

Al seu pendent, $\frac{s_{xy}}{s_x^2}$, se l'anomena *coeficient de regressió de Y sobre x*.

De manera semblant podem obtenir la **recta de regressió de X sobre y**, que resulta ser

$$x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} (y - \bar{y}).$$

Correlació lineal

Donades les variables aleatòries X i Y, es defineix la v. a. **coeficient de correlació**, ρ , mitjançant

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)} \sqrt{\text{var}(Y)}}.$$

Expressant el valor del segon membre per a una mostra $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ de n observacions, tenim el valor

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2} \sqrt{s_y^2}}.$$

A r se l'anomena **coeficient de correlació mostral**.

Propietats 7.1

1. El valor absolut del coeficient de correlació mostral no supera la unitat.
2. Si $r = 0$ les equacions de les rectes de regressió prenen la forma $y = \bar{y}$, $x = \bar{x}$.
3. Si $r = \pm 1$, aleshores

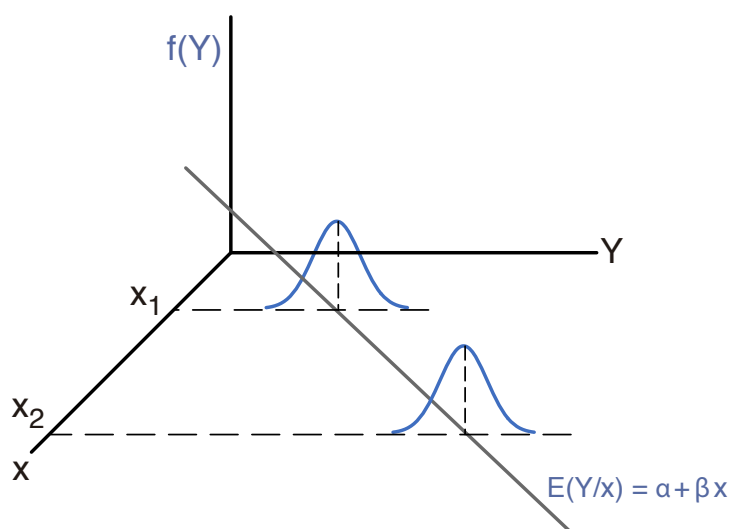
$$\sum_{i=1}^n \left(y_i - \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x_i - \bar{x}) \right)^2 = 0$$

la qual cosa sols passa quan s'anul·len tots i cada un dels termes de la suma, cas en el qual tots els punts estan alineats.

7.2 Interval de confiança

Model lineal simple normal

Suposarem que les v. a. $\{Y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, els valors de les quals són les observacions que s'obtenen en triar $x = x_i$ són independents i segueixen una distribució normal de mitjana $\alpha + \beta x_i$ i variància comuna σ^2 (independent de x_i).



Els valors Y_i són una v. a. que representem per $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, on els errors ε_i representen v. a. independents, distribuïdes normalment, amb mitjana

$$E(\varepsilon_i) = E[Y_i - (\alpha + \beta x_i)] = E(Y_i) - (\alpha + \beta x_i) = 0$$

i variàncies comunes

$$\text{var}(\varepsilon_i) = \text{var}[Y_i - (\alpha + \beta x_i)] = \text{var}(Y_i) = \sigma^2$$

7.2.1 Intervalls de confiança per als paràmetres

Per a estimar els paràmetres α , β i σ , s'utilitzen les variables aleatòries $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ i $\hat{\sigma}$ els valors mostrals dels quals són donats per (7.3)

$$\beta^* = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad \alpha^* = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x} = \bar{y} - \beta^* \bar{x}, \quad (7.5)$$

i per a la variància es fa servir

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2 = s_y^2 (1 - r^2). \quad (7.6)$$

Les expressions per als intervals de confiança dels paràmetres $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ de la regressió s'obtenen tenint en compte els supòsits següents:

1. L'estimador $\hat{\alpha}$ segueix una distribució $N\left(\alpha, \frac{\sigma \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$.
2. L'estimador $\hat{\beta}$ segueix una distribució $N\left(\beta, \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}\right)$.
3. Les distribucions de $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ són independents de la distribució de $\hat{\sigma}^2$.
4. La v. a. $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ segueix una distribució χ^2 amb $n - 2$ graus de llibertat.

Considerant els valors mostrals α^* i β^* , que es calculen per les expressions (7.5) quan es consideren les observacions $\{(x_i, y_i)\}$, l'interval

$$\alpha^* \pm t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2}{n(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (7.7)$$

conté el paràmetre α amb una confiança de $1 - \varepsilon$.

Igualment, tenim que l'interval

$$\beta^* \pm t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \alpha^* - \beta^* x_i)^2}{(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (7.8)$$

conté el paràmetre β amb una confiança de $1 - \varepsilon$.

Finalment, l'interval

$$\left] \frac{n \sigma^{*2}}{x_{n-2, 1-\varepsilon/2}}, \frac{n \sigma^{*2}}{x_{n-2, \varepsilon/2}} \right[\quad (7.9)$$

conté el valor de la variància σ^2 amb un nivell de confiança de $1 - \varepsilon$, on en cada cas $x_{n-2, \cdot}$ és el punt corresponent en una variable χ^2 amb $n - 2$ graus de llibertat.

7.2.2 Prediccions

Es tracta de predir el valor y_0 que correspondria a l'abscissa x_0 en un model lineal simple.

En aquest cas, l'interval de predicció per al valor y_0 , amb una confiança $1 - \varepsilon$ ve donat per la condició

$$P \left(\left| \frac{y_0 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0)}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{n}{n-2} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}} \right| < t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \right) = 1 - \varepsilon$$

la qual ens dóna els extrems de l'interval de predicció en la forma

$$(\alpha^* + \beta^* x_0) \pm t_{n-2, 1-\varepsilon/2} \sigma^* \sqrt{\frac{n}{n-2} \left(\frac{n+1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)} \quad (7.10)$$

on σ^* és el valor mostral de σ , calculat per (7.6).

7.3 Ajustaments per mínims quadrats

Suposem donats els punts $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ i triada una funció d'ajust definida per $y = f(x, a_1, \dots, a_k)$ en què intervenen k paràmetres a_1, \dots, a_k .

Segons el tipus de funció triada actuarem com en els casos següents.

7.3.1 Ajust d'una recta

En aquest cas, volem ajustar segons el model lineal $y = a + bx$. Així, donades les abscisses $\{x_i\}$, tindrem els valors calculats segons el model: $y_i^* = a + bx_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Per a determinar els paràmetres a i b , com ja hem vist, farem mínima la funció (7.1), que ara expressem amb

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2.$$

Això ens porta al sistema d'equacions normals

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)(-1) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0,$$

la resolució de les quals ens proporciona per a a i b les solucions

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}. \quad (7.11)$$

Com es pot comprovar, aquestes solucions coincideixen per al càlcul mostral amb les expressions de α^* i β^* donades per (7.5).

7.3.2 Ajust d'una paràbola

En aquest cas, el model triat serà ara $y = a + bx + cx^2$, els valors calculats segons el model, $y_i^* = a + bx_i + cx_i^2$, i per a obtenir a, b i c haurem ara de minimitzar la suma

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2.$$

Les equacions normals ara queden així

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= an + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3, \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4, \end{aligned}$$

La resolució d'aquestes equacions proporciona els paràmetres de l'ajust a, b i c .

7.3.3 Ajust hiperbòlic

Tractem ara d'ajustar les dades amb un model de la forma $y = a + b \frac{1}{x}$.

Aleshores el valor de y no és lineal amb els valors de x , però sí amb els valors inversos $1/x$.

Així doncs, ajustar les observacions $\{(x_i, y_i)\}$ es redueix a ajustar uns nous valors $\{(z_i, y_i)\}$ per la recta $y = a + bz$, fent prèviament el canvi de variable $z = \frac{1}{x}$ i calculant directament a i b amb (7.11).

7.3.4 Ajust potencial

La forma general d'aquest ajust és $y = ax^b$, la qual es pot reduir de nou al cas lineal prenent logaritmes, i així tindrem

$$\log y = \log a + b \log x .$$

Per tant, ajustarem una recta al conjunt $\{(z_i, u_i)\}$, on $z_i = \log x_i$ i $u_i = \log y_i$. Les equacions (7.11) proporcionen ara amb les variables z i u els valors de $\log a$ i b .

7.3.5 Ajust d'una funció exponencial

Tindrem en aquest cas $y = ab^x$, d'on prenent logaritmes es té

$$\log y = \log a + x \log b .$$

Ara resulta lineal la relació entre $\log y$ i x , per tant ajustarem una recta a les observacions $\{(x_i, u_i)\}$, on $u_i = \log y_i$. Les equacions (7.11) ens proporcionaran $\log a$ i $\log b$.

Capítol VIII

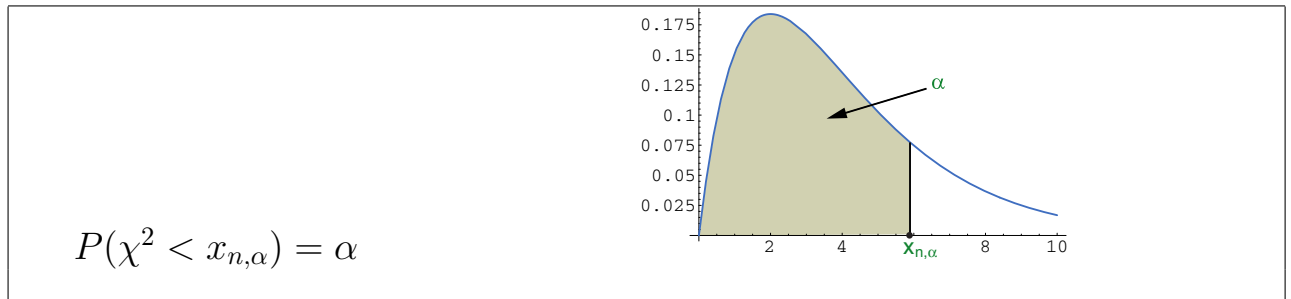
Taules de probabilitat

8.1 Taula per a la normal tipificada

$$P(Z < z_\alpha) = \alpha$$

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992

8.2 Taula per a la χ^2 de Pearson

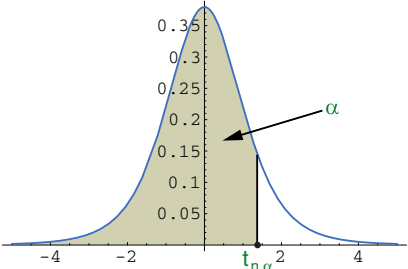


$$P(\chi^2 < x_{n,\alpha}) = \alpha$$

	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.45494	0.01579	0.10153	0.45494	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	0.01003	0.02010	0.05064	1.38629	0.21072	0.57536	1.38629	2.77259	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	0.07172	0.11483	0.21580	2.36597	0.58437	1.21253	2.36597	4.10834	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	0.20699	0.29711	0.48442	3.35669	1.06362	1.92256	3.35669	5.38527	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	0.41174	0.55430	0.83121	4.35146	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	0.67573	0.87209	1.23734	5.34812	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	0.98926	1.23904	1.68987	6.34581	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	1.34441	1.64650	2.17973	7.34412	3.48954	5.07064	7.34412	10.21885	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	1.73493	2.08790	2.70039	8.34283	4.16816	5.89883	8.34283	11.38875	14.68366	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	2.15586	2.55821	3.24697	9.34182	4.86518	6.73720	9.34182	12.54886	15.98718	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	2.60322	3.05348	3.81575	10.34100	5.57778	7.58414	10.34100	13.70069	17.27501	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	3.07382	3.57057	4.40379	11.34032	6.30380	8.43842	11.34032	14.84540	18.54935	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	3.56503	4.10692	5.00875	12.33976	7.04150	9.29907	12.33976	15.98391	19.81193	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	4.07467	4.66043	5.62873	13.33927	7.78953	10.16531	13.33927	17.11693	21.06414	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	4.60092	5.22935	6.26214	14.33886	8.54676	11.03654	14.33886	18.24509	22.30713	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132
16	5.14221	5.81221	6.90766	15.33850	9.31224	11.91222	15.33850	19.36886	23.54183	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	5.69722	6.40776	7.56419	16.33818	10.08519	12.79193	16.33818	20.48868	24.76904	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	6.26480	7.01491	8.23075	17.33790	10.86494	13.67529	17.33790	21.60489	25.98942	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645
19	6.84397	7.63273	8.90652	18.33765	11.65091	14.56200	18.33765	22.71781	27.20357	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	7.43384	8.26040	9.59078	19.33743	12.44261	15.45177	19.33743	23.82769	28.41198	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	8.03365	8.89720	10.28290	20.33723	13.23960	16.34438	20.33723	24.93478	29.61509	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	8.64272	9.54249	10.98232	21.33704	14.04149	17.23962	21.33704	26.03927	30.81328	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	9.26042	10.19572	11.68855	22.33688	14.84796	18.13730	22.33688	27.14134	32.00690	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	9.88623	10.85636	12.40115	23.33673	15.65868	19.03725	23.33673	28.24115	33.19624	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	10.51965	11.52398	13.11972	24.33659	16.47341	19.93934	24.33659	29.33885	34.38159	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	11.16024	12.19815	13.84390	25.33646	17.29188	20.84343	25.33646	30.43457	35.56317	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	11.80759	12.87850	14.57338	26.33634	18.11390	21.74940	26.33634	31.52841	36.74122	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	12.46134	13.56471	15.30786	27.33623	18.93924	22.65716	27.33623	32.62049	37.91592	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	13.12115	14.25645	16.04707	28.33613	19.76774	23.56659	28.33613	33.71091	39.08747	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	13.78672	14.95346	16.79077	29.33603	20.59923	24.47761	29.33603	34.79974	40.25602	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

8.3 Taula per a la t de Student

$$P(t < t_{n,\alpha}) = \alpha$$



	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.00000	3.07768	6.31375	12.70620	31.82052	63.65674	636.61920
2	0.81650	1.88562	2.91999	4.30265	6.96456	9.92484	31.59905
3	0.76489	1.63774	2.35336	3.18245	4.54070	5.84091	12.92398
4	0.74070	1.53321	2.13185	2.77645	3.74695	4.60409	8.61030
5	0.72669	1.47588	2.01505	2.57058	3.36493	4.03214	6.86883
6	0.71756	1.43976	1.94318	2.44691	3.14267	3.70743	5.95882
7	0.71114	1.41492	1.89458	2.36462	2.99795	3.49948	5.40788
8	0.70639	1.39682	1.85955	2.30600	2.89646	3.35539	5.04131
9	0.70272	1.38303	1.83311	2.26216	2.82144	3.24984	4.78091
10	0.69981	1.37218	1.81246	2.22814	2.76377	3.16927	4.58689
11	0.69745	1.36343	1.79588	2.20099	2.71808	3.10581	4.43698
12	0.69548	1.35622	1.78229	2.17881	2.68100	3.05454	4.31779
13	0.69383	1.35017	1.77093	2.16037	2.65031	3.01228	4.22083
14	0.69242	1.34503	1.76131	2.14479	2.62449	2.97684	4.14045
15	0.69120	1.34061	1.75305	2.13145	2.60248	2.94671	4.07277
16	0.69013	1.33676	1.74588	2.11991	2.58349	2.92078	4.01500
17	0.68920	1.33338	1.73961	2.10982	2.56693	2.89823	3.96513
18	0.68836	1.33039	1.73406	2.10092	2.55238	2.87844	3.92165
19	0.68762	1.32773	1.72913	2.09302	2.53948	2.86093	3.88341
20	0.68695	1.32534	1.72472	2.08596	2.52798	2.84534	3.84952
21	0.68635	1.32319	1.72074	2.07961	2.51765	2.83136	3.81928
22	0.68581	1.32124	1.71714	2.07387	2.50832	2.81876	3.79213
23	0.68531	1.31946	1.71387	2.06866	2.49987	2.80734	3.76763
24	0.68485	1.31784	1.71088	2.06390	2.49216	2.79694	3.74540
25	0.68443	1.31635	1.70814	2.05954	2.48511	2.78744	3.72514
26	0.68404	1.31497	1.70562	2.05553	2.47863	2.77871	3.70661
27	0.68368	1.31370	1.70329	2.05183	2.47266	2.77068	3.68959
28	0.68335	1.31253	1.70113	2.04841	2.46714	2.76326	3.67391
29	0.68304	1.31143	1.69913	2.04523	2.46202	2.75639	3.65941
30	0.68276	1.31042	1.69726	2.04227	2.45726	2.75000	3.64596

8.4 Taules per a la f de Snedecor a 0.95 i 0.99

$$P(F_{m,n} < f_{m,n;0.95}) = 0.95$$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882	243.906	245.95	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.302
2	18.5128	19.000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.371	19.3848	19.3959	19.4125	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4956
3	10.128	9.55209	9.27663	9.11718	9.01346	8.94065	8.8674	8.84524	8.8123	8.78552	8.74464	8.70287	8.66019	8.6385	8.61658	8.59441	8.5720	8.54935	8.52673
4	7.70865	6.94427	6.59138	6.38823	6.25606	6.16313	6.09421	6.04104	5.99878	5.96437	5.91173	5.85781	5.80254	5.77439	5.74588	5.71700	5.68774	5.65811	5.62843
5	6.60789	5.78614	5.40945	5.19217	5.05033	4.95029	4.87587	4.81832	4.77247	4.73506	4.6777	4.61876	4.55813	4.52715	4.49571	4.46379	4.43138	4.39845	4.3654
6	5.98738	5.14325	4.75706	4.53368	4.38737	4.28387	4.20666	4.1468	4.0902	4.05994	3.99994	3.93806	3.87419	3.84146	3.80816	3.77429	3.7398	3.70467	3.6693
7	5.59145	4.73741	4.34683	4.12031	3.97152	3.86597	3.78704	3.72573	3.67667	3.63652	3.57468	3.51074	3.44452	3.41049	3.37581	3.34043	3.30432	3.26745	3.23021
8	5.31766	4.45897	4.06618	3.83785	3.6875	3.58058	3.50046	3.4381	3.38813	3.34716	3.28394	3.21841	3.15032	3.11524	3.07941	3.04278	3.0053	2.96692	2.92805
9	5.11736	4.25649	3.86255	3.63309	3.48166	3.37375	3.29275	3.22958	3.17889	3.13728	3.07295	3.0061	2.93646	2.90047	2.86365	2.82593	2.78725	2.74752	2.70717
10	4.9646	4.10282	3.70826	3.47805	3.32583	3.21717	3.13546	3.07166	3.02038	2.97824	2.91298	2.84502	2.77402	2.73725	2.69955	2.66086	2.62108	2.58012	2.53839
11	4.84434	3.9823	3.58743	3.35669	3.20387	3.09461	3.01233	2.94799	2.89622	2.85362	2.78757	2.71864	2.64645	2.60897	2.57049	2.53091	2.49012	2.44802	2.40500
12	4.74723	3.88529	3.49029	3.25917	3.10588	2.99612	2.91336	2.84857	2.79638	2.75339	2.68664	2.61685	2.54359	2.50548	2.46628	2.42588	2.38417	2.34099	2.29675
13	4.66719	3.80557	3.41053	3.17912	3.02544	2.91527	2.8321	2.76691	2.71436	2.67102	2.60366	2.53311	2.45888	2.4202	2.38033	2.33918	2.2966	2.25241	2.20700
14	4.60011	3.73889	3.34389	3.11225	2.95825	2.84773	2.7642	2.69867	2.64579	2.60216	2.53424	2.463	2.3879	2.34868	2.30821	2.26635	2.22295	2.17781	2.13127
15	4.54308	3.68232	3.28738	3.05557	2.90129	2.79046	2.70663	2.6408	2.58763	2.54372	2.47531	2.40345	2.32754	2.28783	2.24679	2.20428	2.16011	2.11406	2.06644
16	4.494	3.63372	3.23887	3.00692	2.85241	2.74131	2.6572	2.5911	2.53767	2.49351	2.42466	2.35222	2.27557	2.23541	2.19384	2.15071	2.10581	2.05890	2.01024
17	4.45132	3.59153	3.19678	2.96471	2.81000	2.69866	2.6143	2.54796	2.49429	2.44992	2.38065	2.30769	2.23035	2.18977	2.14771	2.10400	2.05841	2.01066	1.96101
18	4.41387	3.55456	3.15991	2.92774	2.77285	2.6613	2.57672	2.51016	2.45628	2.4117	2.34207	2.26862	2.19065	2.14966	2.10714	2.06289	2.01664	1.9681	1.91747
19	4.38075	3.52189	3.12735	2.89511	2.74006	2.62832	2.54353	2.47677	2.4227	2.37793	2.30795	2.23406	2.1555	2.11414	2.07119	2.02641	1.97954	1.93024	1.87867
20	4.35124	3.49283	3.09839	2.86608	2.71089	2.59988	2.51401	2.44706	2.39281	2.34788	2.27758	2.20327	2.12416	2.08245	2.03909	1.99382	1.94636	1.89632	1.84384
21	4.32479	3.4668	3.07247	2.8401	2.68478	2.57271	2.48758	2.42046	2.36605	2.32095	2.25036	2.17587	2.09603	2.054	2.01025	1.96452	1.91649	1.86574	1.81237
22	4.30095	3.44336	3.04912	2.81671	2.66127	2.54906	2.46377	2.3965	2.34194	2.2967	2.22583	2.15078	2.07066	2.02832	1.9842	1.93802	1.88945	1.83802	1.78379
23	4.27934	3.42213	3.0278	2.79554	2.64000	2.52766	2.44223	2.37481	2.32011	2.27473	2.20361	2.12822	2.04764	2.00501	1.96054	1.91394	1.86484	1.81276	1.75769
24	4.25968	3.40283	3.00879	2.77629	2.62065	2.50819	2.42263	2.35508	2.30024	2.25474	2.18338	2.10767	2.02666	1.98376	1.93896	1.89195	1.84236	1.78964	1.73376
25	4.2417	3.38519	2.99124	2.75871	2.60299	2.49041	2.40473	2.33706	2.28221	2.23647	2.16489	2.08889	2.00747	1.96431	1.91919	1.8718	1.82173	1.7684	1.71171
30	4.17088	3.31583	2.92228	2.68963	2.53355	2.42052	2.33434	2.26616	2.2107	2.16458	2.09206	2.0148	1.93165	1.88736	1.84087	1.79179	1.73957	1.68345	1.62304
40	4.08475	3.23173	2.83875	2.60597	2.44947	2.33585	2.24902	2.18017	2.12403	2.07725	2.00346	1.92446	1.83886	1.79294	1.74443	1.6928	1.63725	1.57661	1.50977
60	4.00119	3.15041	2.75808	2.52522	2.36827	2.25405	2.16654	2.09697	2.0401	1.99259	1.9174	1.83644	1.74798	1.70012	1.64914	1.59427	1.53431	1.46727	1.3903
120	3.92012	3.07178	2.68017	2.44724	2.28985	2.17501	2.08677	2.01643	1.95876	1.91046	1.8337	1.7505	1.65644	1.60844	1.55434	1.4952	1.42901	1.35189	1.25525
∞	3.84239	2.99663	2.6058	2.37282	2.21499	2.0995	2.0105	1.93934	1.88082	1.83165	1.75314	1.66739	1.57157	1.51839	1.46025	1.3952	1.31942	1.22314	1.03345

$$P(F_{m,n} < f_{m,n;0.99}) = 0.99$$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.86	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.55
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.4159	99.4325	99.4492	99.4658	99.4742	99.4825	99.4908	99.4988	99.5069	99.5151
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287	27.0518	26.8722	26.6898	26.5975	26.5045	26.4108	26.3164	26.2211	26.1263
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5469	14.3736	14.1982	14.0196	13.9291	13.8377	13.7454	13.6522	13.5581	13.4642
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.967	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.051	9.88828	9.72222	9.55265	9.46647	9.37933	9.29119	9.20201	9.11177	9.02152
6	13.745	10.9248	9.77954	9.1483	8.7459	8.46613	8.26	8.10165	7.97612	7.87412	7.71833	7.55999	7.39583	7.31272	7.22853	7.14322	7.05674	6.96902	6.8811
7	12.2464	9.54658	8.45129	7.84665	7.46044	7.1914	6.99283	6.84005	6.71875	6.62006	6.46909	6.31433	6.15544	6.07432	5.99201	5.90845	5.82357	5.73729	5.65059
8	11.2586	8.64911	7.59099	7.00608	6.63183	6.37068	6.17762	6.02887	5.91062	5.81429	5.66672	5.51512	5.35909	5.27926	5.19813	5.11561	5.03162	4.94605	4.85986
9	10.5614	8.02152	6.99192	6.42209	6.05694	5.80177	5.61287	5.46712	5.35113	5.25654	5.11143	4.96208	4.808	4.729	4.64858	4.56665	4.48309	4.39777	4.31161
10	10.0443	7.55943	6.55231	5.99434	5.63633	5.38581	5.20012	5.05669	4.94242	4.84915	4.70587	4.55814	4.40539	4.32683	4.24693	4.16529	4.08186	3.99648	3.91004
11	9.64603	7.20571	6.21673	5.6683	5.31601	5.06921	4.88607	4.74447	4.63154	4.53928	4.3974	4.25087	4.09905	4.02091	3.94113	3.85957	3.77607	3.69044	3.60351
12	9.33021	6.92661	5.95254	5.41195	5.06434	4.82057	4.6395	4.49937	4.38751	4.29605	4.15526	4.00962	3.85843	3.78049	3.70079	3.61918	3.53547	3.44944	3.36189
13	9.07381	6.70096	5.73938	5.20533	4.86162	4.62036	4.441	4.30206	4.19108	4.10027	3.96033	3.81537	3.66461	3.58675	3.50704	3.42529	3.34129	3.25476	3.16648
14	8.86159	6.51488	5.56389	5.03538	4.69496	4.45582	4.27788	4.13995	4.02968	3.9394	3.80014	3.6557	3.50522	3.42739	3.3476	3.26564	3.18127	3.09419	3.00512
15	8.68312	6.35887	5.41696	4.89321	4.55561	4.31827	4.14155	4.00445	3.89479	3.80494	3.66624	3.52219	3.37189	3.29403	3.21411	3.13191	3.04713	2.95945	2.86954
16	8.53037	6.22624	5.29221	4.77258	4.43742	4.20163	4.02595	3.88957	3.78042	3.69093	3.55269	3.40895	3.25874	3.18081	3.10073	3.01825	2.93305	2.84474	2.75395
17	8.39974	6.11211	5.185	4.66897	4.33594	4.10151	3.92672	3.79096	3.68224	3.59307	3.4552	3.31169	3.16152	3.0835	3.00324	2.92046	2.83481	2.74585	2.65417
18	8.28542	6.0129	5.09189	4.57904	4.24788	4.01464	3.84064	3.70542	3.59707	3.50816	3.37061	3.22729	3.0771	2.99897	2.91852	2.83542	2.74931	2.6597	2.56712
19	8.18495	5.92588	5.01029	4.50026	4.17077	3.93857	3.76527	3.63052	3.5225	3.43382	3.29653	3.15334	3.00311	2.92487	2.8442	2.76079	2.67421	2.58394	2.49045
20	8.09596	5.84893	4.93819	4.43069	4.10268	3.87143	3.69874	3.56441	3.45668	3.36819	3.23112	3.08804	2.93774	2.85936	2.77848	2.69475	2.60771	2.51678	2.42237
21	8.0166	5.78042	4.87405	4.36882	4.04214	3.81173	3.63959	3.50563	3.39815	3.30983	3.17295	3.02995	2.87956	2.80105	2.71995	2.6359	2.54839	2.45681	2.36149
22	7.94539	5.71902	4.81661	4.31343	3.98796	3.7583	3.58666	3.45303	3.34577	3.25761	3.12089	2.97795	2.82745	2.7488	2.66749	2.58311	2.49515	2.40292	2.30668
23	7.88113	5.6637	4.76488	4.26357	3.93919	3.71022	3.53902	3.40569	3.29863	3.2106	3.07402	2.93112	2.7805	2.70172	2.62019	2.5355	2.44708	2.35421	2.25707
24	7.82287	5.61359	4.71805	4.21845	3.89507	3.66672	3.49593	3.36287	3.25599	3.16807	3.03161	2.88873	2.738	2.65907	2.57733	2.49232	2.40346	2.30996	2.21192
25	7.7698	5.568	4.67546	4.17742	3.85496	3.62717	3.45675	3.32394	3.21722	3.12941	2.99306	2.85019	2.69932	2.62026	2.53831	2.45299	2.36369	2.26956	2.17063
30	7.56248	5.39035	4.50974	4.01788	3.69902	3.47348	3.3045	3.17282	3.06652	2.97909	2.8431	2.70018	2.54866	2.46882	2.38597	2.29921	2.20785	2.11076	2.00753
40	7.3141	5.17851	4.31257	3.82829	3.51384	3.29101	3.12376	2.99298	2.88756	2.80055	2.66463	2.52162	2.36888	2.288	2.20338	2.11423	2.01941	1.91719	1.80613
60	7.07711	4.97743	4.12589	3.64905	3.33888	3.11867	2.95305	2.82338	2.71845	2.63175	2.49612	2.3523	2.19781	2.11536	2.02848	1.93602	1.83626	1.72632	1.60229
120	6.85089	4.78651	3.9491	3.47953	3.17355	2.95585	2.79176	2.66291	2.55857	2.47208	2.3363	2.1915	2.03459	1.95002	1.86001	1.76285	1.65589	1.53299	1.38267
∞	6.63743	4.60729	3.78358	3.32105	3.01908	2.80378	2.64111	2.51305	2.4091	2.32269	2.18652	2.04032	1.89015	1.7927	1.69835	1.59431	1.47523	1.32729	1.04763