



VNIVERSITAT
E VALÈNCIA

Programa de Doctorado en ESTADÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN

Título de la Tesis:

**PROPUESTA DE MEJORA DEL GRÁFICO DE
CONTROL C MEDIANTE EL DISEÑO ÓPTIMO DE
UN ESQUEMA DE MUESTREO DOBLE**

Manuel de Jesús Campuzano Hernández

Director:

Dr. Andrés Carrión García

Tutora:

Dra. Enriqueta Vercher González

Enero del 2019

Dedicatoria

A mis padres Alfonso y Beatriz quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a alcanzar un logro más, gracias por inculcar en mi el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer a las adversidades porque Dios está conmigo siempre.

A mi esposa Verónica, quien día a día me brindó su amor, su cariño, su estímulo y apoyo constante para alcanzar esta meta. ¡Gracias!

A mi hija Valentina, quien me prestó el tiempo que le pertenecía. Eres fuente de mi inspiración.

A mi hermana Anelena, este logro también es tuyo.

Agradecimientos

Durante estos años, son muchas las personas e instituciones que han participado en este proceso y a quienes quiero expresar mi agradecimiento por el apoyo y la confianza depositada en mí de manera desinteresada.

En primer lugar quiero agradecer al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valencia por su acogida y el apoyo recibido durante el tiempo que he desarrollado mi labor como investigador.

Debo un sincero y especial reconocimiento al Dr. Andrés Carrión García por aceptarme para realizar esta Tesis Doctoral bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para proveer ideas ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta Tesis, sino también en mi formación como investigador. ¡Muchas gracias!

Quiero expresar también un sincero agradecimiento al Dra. Enriqueta Vercher González quien como coordinadora del Doctorado y mi tutora participó de manera activa en este proceso.

A mis amigos, aquellas personas que me acompañaron en este largo camino quiero expresarles mis agradecimientos, en especial a Jaime Mosquera Restrepo por su disponibilidad y generosidad para compartir su conocimiento en el tema trabajado en esta Tesis.

Quiero extender un especial agradecimiento al Departamento del Magdalena y al Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, COLCIENCIAS, por haber financiado gran parte de mis estudios doctorales otorgándome una beca condonable a partir de la convocatoria para la formación de capital humano de alto nivel en el año 2014.

Finalmente, agradezco a mis padres, mi hija, mi hermana y sobre todo a Verónica, mi esposa, por acompañarme en este largo y fructífero camino.

Resumen

En el control estadístico de procesos, la herramienta más utilizada para monitorear el número promedio de no conformidades es el gráfico de Shewhart C. Este gráfico se basa en el supuesto de que el número de no conformidades en las muestras es bien modelada por la distribución de Poisson, y aunque es un gráfico fácil de usar, su capacidad para detectar cambios pequeños es baja, por lo que es necesario tomar tamaños de muestras grandes, aumentando los costos relacionados con el muestreo. Por lo anterior, se propone el desarrollo de un esquema de muestreo doble para el gráfico de control C. Además de derivar la expresión matemática adecuada para la evaluación exacta de la Longitud Media de Corrida ARL y el Tamaño de Muestra Promedio ASS , para el diseño de este gráfico de control se ha implementado un Algoritmo Genético bi-objetivo para obtener el diseño óptimo del esquema DS-C, con el objetivo de minimizar simultáneamente el número medio de muestras (ASS) y la probabilidad de error tipo II (β), garantizando niveles fijos de probabilidad de error tipo I (α). Con el fin de ejemplificar la aplicación del nuevo DS-C desarrollado y evaluar la influencia de varios parámetros operativos, se realizan ejemplos numéricos y se dan las consideraciones relacionadas. Durante el procedimiento de optimización se han impuesto restricciones en ASS y en el ARL bajo control, variando parámetros de entrada, para finalmente comparar el rendimiento del DS-C con el del gráfico clásico de Parámetros Fijos (FP-C), y esquemas más desarrollados como los gráficos de Tamaño de Muestra Variable (VSS), Medias Móviles Ponderadas Exponencialmente (EWMA) y Sumas Acumuladas (CUSUM).

Palabras clave: Muestreo Doble, Gráficos de control para atributos, Gráfico de control C, ARL, Algoritmos Genéticos, Frontera de Pareto.

Abstract

In statistical process control, the Shewhart C chart is the most used tool to monitor the mean number of nonconformities. This chart is easy to use but its ability to detect small shifts in the process is low. To improve its an inspection on a larger unit is required, increasing sampling-related costs. This thesis proposes a new double sampling scheme for C control chart (DS-C) that can be designed to improve the performance of C or to reduce the inspection cost. The mathematical expression required to do an exact evaluation of Average Run Length (*ARL*) and Average Sample Size (*ASN*) is deduced. Further, a bi-objective genetic algorithm is implemented to obtain the optimal design of the DS-C scheme. This optimization is aimed to simultaneously minimizing the error probability type II (β) and the *ASS*, guaranteeing a desired level for the error probability type I (α). In order to exemplify the application of the new developed DS-C and to evaluate the influence of several operational parameters, numerical examples are made and related considerations are given. During the optimization procedure restrictions have been imposed on *ASS* and on the *ARL* under control, varying input parameters, to finally compare the performance of the DS-C with that of the classic graph of Fixed Parameters (FP), Variable Sample Size (VSS) and Exponential Weighted Moving Average (EWMA) and Cumulative sum (CUSUM).

Palabras clave: Double-Sampling, Control charts for attribute, C chart, ARL, Genetic Algorithms, Pareto Front.

Resum

En el control estadístic de processos, l'eina més utilitzada per a monitorar el nombre de no conformitats per unitat és el gràfic de Shewhart C. Aquest gràfic es basa en el supòsit que el nombre de no conformitats en les mostres és ben modelat per la distribució de Poisson, i encara que és un gràfic fàcil d'usar, la seua capacitat per a detectar xicotets canvis és baixa, per la qual cosa és necessari prendre mostres grans, la qual cosa fa augmentar els costos relacionats amb el mostratge. Per l'anterior, es proposa el desenrotllament d'un esquema de mostratge doble per al gràfic de control C. A més de derivar l'expressió matemàtica adequada per a l'avaluació exacta de la Longitud Mitjana de Correguda *ARL* i la Grandària de Mostra Mitjana *ASS*, per al disseny d'este gràfic de control s'ha implementat un algoritme genètic bi-objectiu per a obtindre el disseny òptim de l'esquema DS-C, amb l'objectiu de minimitzar simultàniament el nombre mitjà de mostres *ASS* i la probabilitat d'error tipus II (β), tot garantint-hi nivells fixos de probabilitat d'error tipus I (α). A fi d'exemplificar l'aplicació del nou DS-C desenrotllat i avaluar-hi la influència de diversos paràmetres operatius, es realitzen exemples numèrics i s'hi donen les consideracions relacionades. Durant el procediment d'optimització s'han imposat restriccions en *ASS* i en *ARL* davall control, variant paràmetres d'entrada, per a finalment comparar el rendiment del DS-C amb el del gràfic clàssic de Paràmetres Fixos (FP-C), i esquemes més desenvolupats com els gràfics de Grandària de Mostra Variable (VSS) , Mitjanes Mòbils Ponderades Exponencialment (EWMA) i Sumes Acumulades (CUSUM) .

Palabras clave: Mostratge Doble, Gràfics de control per a atributs, Gràfic de control C, ARL, Algoritmes Genètics, Frontera de Pareto.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Resum	V
Lista de figuras	VIII
Lista de tablas	IX
1. Introducción y Objetivos	1
1.1. Objetivos	2
1.1.1. Objetivo General	2
1.1.2. Objetivos Específicos	2
1.2. Estructura del Documento	3
2. Antecedentes	4
2.1. Gráficos de Control	4
2.1.1. Generalidades	4
2.1.2. Tipos de Gráficos	6
2.1.3. Gráficos tradicionales para el control por Variables	7
2.1.4. Gráficos tradicionales para el control por Atributos	13
2.1.5. Desempeño de un Gráfico de Control Tradicional	20
2.1.6. Gráficos de Control con Memoria	21
2.1.7. Gráficos de Control Adaptativos	28
2.1.8. Desempeño de los Gráficos de Control Alternativos	30
2.1.9. Gráficos de Control de Doble Muestreo DS	31
3. Herramientas de Optimización para los Gráficos de Control	33
3.1. Algoritmos Genéticos	33
3.1.1. Técnicas para mejorar el desempeño de los Algoritmos Genéticos	36
3.2. Optimización Multiobjetivo	36
3.2.1. Algoritmo Genético Multiobjetivo (NSGA-II)	39
4. Gráfico de Control C con Muestreo Doble (DS-C)	41
4.1. Descripción del Gráfico de Control DS-C	41
4.2. Medidas de desempeño del Gráfico de Control DS-C	43
4.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico de Control DS-C	45

5. Gráficos de Control Alternativos para C	50
5.1. Gráfico de Control VSS-C	50
5.1.1. Descripción del gráfico de control VSS-C	50
5.1.2. Medidas de desempeño del Gráfico de Control VSS-C	51
5.1.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico de Control VSS-C	55
5.2. Gráfico de Control EWMA-C	58
5.2.1. Descripción del gráfico de control EWMA-C	58
5.2.2. Medidas de desempeño del gráfico de control EWMA-C	59
5.2.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico EWMA-C	64
5.3. Gráfico de Control CUSUM-C	67
5.3.1. Descripción del gráfico de control CUSUM-C	67
5.3.2. Medidas de desempeño del gráfico de control CUSUM-C	68
5.3.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico CUSUM-C	71
6. Comparación del gráfico DS-C con los diversos gráficos para C	76
6.1. Comparación del gráfico DS-C con el gráfico de control de parámetros fijos FP	76
6.2. Comparación del gráfico DS-C con los gráficos VSS-C, EWMA-C y CUSUM- C	82
7. Conclusiones	94
7.1. Investigaciones Futuras	95
A. Algoritmo de Optimización del gráfico DS-C	101
A.0.1. Descripción del Algoritmo DS-C	103
B. Algoritmo de Optimización del gráfico VSS-C	105
C. Algoritmo de Optimización del gráfico EWMA-C	109
D. Algoritmo de Optimización del gráfico CUSUM-C	112

Índice de figuras

2.1.	Ilustración esquemática de un gráfico de control.	5
2.2.	Relación entre los errores tipo I y II en un gráfico de control.	20
2.3.	Ilustración esquemática del gráfico de control CUSUM.	24
2.4.	Ilustración esquemática del gráfico de control EWMA.	27
3.1.	Frente de Pareto de un problema bi-objetivo de minimización	39
3.2.	Procedimiento del algoritmo NSGA II	40
4.1.	Ilustración esquemática del gráfico de control DS-C.	42
5.1.	Ilustración esquemática del gráfico de control VSS-C.	51
5.2.	Estados transitorios de la cadena de Markov, gráfico EWMA-C.	60
5.3.	Estados transitorios de la cadena de Markov, gráfico CUSUM-C	69

Índice de tablas

2.1.	Aplicación de las cartas de control por variables	6
2.2.	Aplicación de las cartas de control por atributos	7
2.3.	Gráficos de Control Alternativos	7
4.1.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$	47
4.1.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$. (<i>Continuación</i>)	48
4.2.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$	48
4.3.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$	49
5.1.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$	56
5.1.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$. (<i>Continuación</i>)	57
5.2.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$	57
5.3.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$	58
5.4.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$	65
5.5.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$	66
5.6.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$	66
5.6.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$. (<i>Continuación</i>)	67
5.7.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$	72
5.7.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$. (<i>Continuación</i>)	73
5.8.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$	73
5.8.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$. (<i>Continuación</i>)	74
5.9.	Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$	74

5.9. Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$. (<i>Continuación</i>)	75
6.1. Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* y α^*	77
6.1. Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* y α^* . (<i>Continuación</i>)	78
6.1. Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* y α^* . (<i>Continuación</i>)	79
6.2. Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* ajustado $\alpha^* = \alpha_{FP}$	80
6.2. Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* ajustado $\alpha^* = \alpha_{FP}$. (<i>Continuación</i>)	81
6.3. Perfil ARL_1 y ASS ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) para FP-C, Óptimo DS-C con $\alpha^* = \alpha_{FP}$	81
6.3. Perfil ARL_1 y ASS ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) para FP-C, Óptimo DS-C con $\alpha^* = \alpha_{FP}$. (<i>Continuación</i>)	82
6.4. Rendimiento de los gráficos de control DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y α^*	83
6.4. Rendimiento de los gráficos de control DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y α^* . (<i>Continuación</i>)	84
6.4. Rendimiento de los gráficos de control DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y α^* . (<i>Continuación</i>)	85
6.5. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.005$	85
6.5. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.005$. (<i>Continuación</i>)	86
6.5. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.005$. (<i>Continuación</i>)	87
6.6. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.0027$	88
6.6. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.0027$. (<i>Continuación</i>)	89
6.7. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.002$	90
6.7. Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.002$. (<i>Continuación</i>)	91

Capítulo 1

Introducción y Objetivos

Las industrias han comprendido que su razón de ser se justifica en la existencia de mercados estables y crecientes para sus productos. Esta orientación hacia los consumidores implica el reconocimiento de la importancia de la calidad como objetivo fundamental para tener consumidores satisfechos y mercados seguros que garanticen su crecimiento, y por ende resulta fundamental contar con métodos estadísticos apropiados que permitan monitorear de manera eficiente sus procesos de producción.

El gráfico de control convencional de Shewhart C es la herramienta estadística más utilizada para monitorear el número total de no conformidades en una muestra. Este gráfico se basa en el supuesto de que la aparición de no conformidades en las muestras está bien modelado por una distribución de Poisson. Considérese que las muestras con n unidades se toman en una inspección del producto en intervalos de tiempo fijos. En la mayoría de los casos, la muestra para inspección puede ser una sola unidad de producto, aunque esto no necesariamente siempre será así. Como el tamaño de la muestra se considera constante, el número total de no conformidades de una muestra se representa en el gráfico. Un punto por fuera de los límites de control preestablecidos se interpreta como una señal fuera de control (Montgomery, 2009).

La capacidad del clásico gráfico C para detectar pequeños cambios es baja, por lo que es necesario tomar muestras grandes, lo que incrementa los costos relacionados con el muestreo. Con el tiempo, se han desarrollado diferentes enfoques y propuestas para mejorar el rendimiento de los clásicos gráficos de control de Shewhart, y el gráfico de control C no ha sido la excepción. Entre los diferentes esquemas desarrollados para un monitoreo más eficiente del gráfico de control C están los gráficos de control CUSUM-C (*Cumulative Sum*) y EWMA-C (*Exponential Weighted Moving Average*), que utilizan la información de las muestras anteriores haciéndolas más sensibles a cambios pequeños y moderados. Más recientemente se han desarrollado esquemas de gráficos de control adaptativos tales como los de Intervalo de Muestreo Variable (VSI), Tamaño de Muestra Variable (VSS), Tamaño de Muestra e Intervalo Variable (VSSI), en el que se permite a todos los parámetros del gráfico cambiar de forma adaptativa. Se ha demostrado que estos gráficos de control adaptativos son más eficaces que los gráficos de control de parámetros fijos en la detección de cambios pequeños a moderados en los procesos bajo control.

Con el fin de explorar la posibilidad de evaluar gráficos alternativos que mejoren el desempeño del gráfico de control C, se estudia y propone en este trabajo de Tesis Doc-

toral una alternativa novedosa: un gráfico de control de muestreo doble análogo al plan de muestreo doble utilizado para la inspección de lotes. El plan de muestreo doble es la extensión natural del plan de muestreo simple. Se toma una muestra de n_1 unidades y se observan las unidades no conformes. Si el número de no conformidades no excede el número de aceptación c_1 se acepta el lote. Si en cambio excede c_1 pero no excede c_2 se toma una segunda muestra de tamaño n_2 y se contabilizan los defectos acumulados de la primera y segunda muestra. Si este acumulado de unidades defectuosas no excede c_2 se acepta el lote y en caso contrario se rechaza. Nótese que si el número de unidades no conforme de la primera muestra es mayor a c_2 no es necesario tomar una segunda muestra y el lote se rechaza inmediatamente. Como se mostrará, este esquema ofrece una mejor eficiencia estadística (en términos de ARL) que los gráficos C de parámetros fijos y otras alternativas más sofisticadas sin aumento del costo de muestreo. Alternativamente, el esquema se puede utilizar para reducir el costo de muestreo sin reducir la eficiencia estadística.

En la literatura se encuentran trabajos relacionados con muestreo doble en los gráficos de control: Croasdale (1974), Daudin (1992), Irianto and Shinozaki (1998), Wu and Wang (2007), y más reciente Perez et al. (2010), De Araújo Rodrigues et al. (2011), entre los cuales se destacan el gráfico de control \bar{X} con muestreo doble presentado por Daudin (1992) y el gráfico de control NP con muestreo doble propuesto por De Araújo Rodrigues et al. (2011), que motivaron el desarrollo del gráfico de control C con muestreo doble. Recientemente un esquema similar, pero no igual, fue propuesto por Inghilleri et al. (2015), quien diseñó un gráfico de control C de doble muestreo que es soportado en la aproximación a la distribución normal. La caracterización y optimización del nuevo gráfico DS-C es una contribución original para el área de control por atributos; así mismo, otra contribución de esta Tesis está relacionada con la optimización de los gráficos VSS-C, CUSUM-C y EWMA-C.

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo General

Diseñar, caracterizar y optimizar el gráfico de control DS-C para el monitoreo del número de no conformidades, que permita mejorar el desempeño del gráfico C clásico de parámetros fijos.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Estudiar y analizar los fundamentos estadísticos del control de procesos por atributos que permitan caracterizar el gráfico de control C haciendo uso del muestreo doble.
- Identificar los parámetros que permitan el diseño óptimo del gráfico de control DS-C.
- Establecer las expresiones matemáticas para evaluar el desempeño del gráfico de control DS-C.
- Establecer un procedimiento de optimización del gráfico de control DS-C.

- Obtener los diseños óptimos de los gráficos de control alternativos para C, (VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C)
- Comparar las medidas de desempeño del nuevo gráfico de control DS-C con el gráfico clásico de parámetros fijos (FP) así como con los diseños óptimos de los gráficos de control alternativos para C, (VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C).

1.2. Estructura del Documento

El documento está organizado en 7 capítulos de la siguiente manera:

- ▶ Capítulo 1: Introducción, objetivos y estructura de la Tesis Doctoral
- ▶ Capítulo 2: Revisión de los antecedentes asociados con Control Estadístico de Procesos que serán utilizados en este trabajo.
- ▶ Capítulo 3: Contiene una explicación de las herramientas de optimización usadas en esta Tesis.
- ▶ Capítulo 4: Desarrollo del gráfico de control DS-C y elaboración de un modelo matemático que calcula las medidas de desempeño. Formulación del problema de optimización que proporciona los diseños óptimos del gráfico DS-C. Presentación de los diseños óptimos a partir de los valores escogidos para hacer el análisis de desempeño del gráfico DS-C.

Los resultados de la optimización realizada y una comparación del desempeño DS-C frente al gráfico de parámetros fijo fueron incluidos como un capítulo, titulado "**Diseño óptimo de un esquema de muestreo doble para el gráfico de control C**" dentro del libro que lleva por nombre "**Nuevas Tendencias en Investigación de Operaciones y Ciencias Administrativas un Enfoque desde Estudios Iberoamericanos**", con ISBN 978-958-5430-88-4. Actualmente este libro se encuentra en fase de publicación por parte de la editorial de la Universidad Simón Bolívar en Colombia.

- ▶ Capítulo 5: Descripción y optimización de los gráficos de control VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C
- ▶ Capítulo 6: Contiene los resultados computacionales obtenidos al comparar la eficiencia del gráfico DS-C en términos de las medidas de desempeño (ARL_1 , ARL_0 , ASS) con los gráficos FP, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C. Como resultado de esta comparación se generó un artículo titulado: "**Characterization and Optimal Design of a new Double Sampling c Chart**". Este artículo fue sometido a la revista "**European Journal of Industrial Engineering**" de la editorial **InderScience**. Actualmente este artículo se encuentra en segunda revisión.
- ▶ Capítulo 7: Conclusiones de la Tesis y sugerencias para futuras investigaciones.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se hará una revisión de los fundamentos básicos del Control Estadístico de Procesos que serán utilizados en esta investigación.

2.1. Gráficos de Control

2.1.1. Generalidades

La implementación de métodos estadísticos en la administración de la calidad de las industrias, constituye una gama de esfuerzos por lograr grandes niveles de productividad. Una industria es un sistema compuesto por gran cantidad de procesos interrelacionados entre sí trabajando juntos por un fin en común, siendo estrictamente necesario conocer a fondo cada uno de los procesos, logrando establecer variables medibles en su desarrollo para que puedan ser monitoreados y controlados.

El monitoreo de procesos productivos es un área esencial del control estadístico de la calidad; su alcance va desde un diagnóstico de los procesos hasta la determinación de las causas más certeras que producen las indeseadas no conformidades. Cada día es mayor la inversión realizada en el desarrollo de estas metodologías de monitorización dentro de las empresas, arrojando resultados considerablemente beneficiosos, que procuran la estandarización de los procesos para el establecimiento de un control más eficiente.

Un proceso industrial está sometido a una serie de factores de carácter aleatorio que hacen imposible fabricar productos exactamente iguales. Dicho de otra manera, las características del producto fabricado no son uniformes y presentan una variabilidad. Esta variabilidad es claramente indeseable y el objetivo ha de ser reducirla lo más posible o al menos mantenerla controlada.

Existen dos tipos de causas de variación que pueden estar presentes en los procesos productivos; las **causas comunes** de variación, que son intrínsecas al procesos, naturales y actúan constantemente, de una forma estable, provocando una variabilidad homogénea y, sobre todo, previsible. Son causas que aparecen y desaparecen de forma aleatoria, produciendo una variabilidad regular que podemos disminuir pero no eliminar; y las **causas especiales** de variación, la cuales pueden ser identificadas y se necesitan descubrir para ser eliminadas. Se dice que un proceso está bajo Control Estadístico cuando presenta causas comunes de variación únicamente.

Los gráficos de control son la herramienta más poderosa para monitorear procesos. En 1924, Walter A. Shewhart fue el primero en desarrollar y aplicar los gráficos de control, enfocando la atención en identificar las variaciones del proceso debido a la entrada de causas especiales, determinando así de manera sencilla si un proceso se encuentra bajo Control Estadístico.

Un esquema ilustrativo de un gráfico de control se presenta en la figura 2.11. Una variación debida a causas especiales estará señalizada por los puntos encima del límite de control superior (*Upper Control Limit, UCL*) o por debajo del límite inferior de control (*Lower Control Limit, LCL*). Estas causas deben ser identificadas y corregidas.

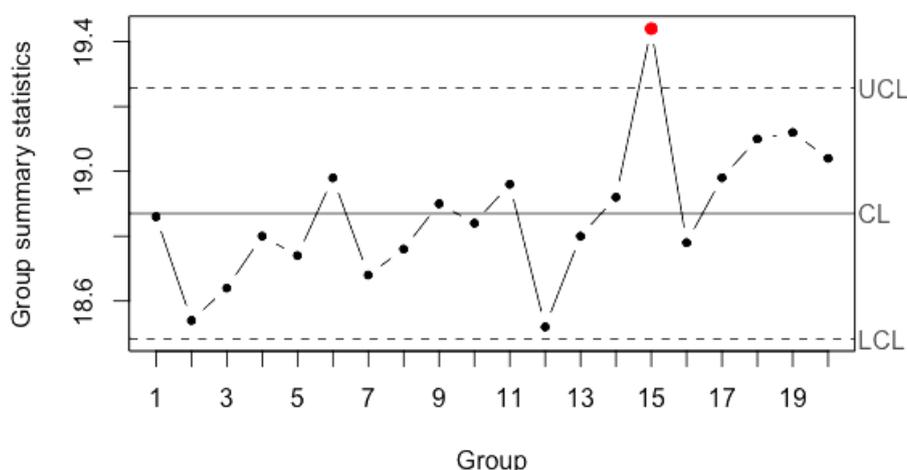


Figura 2.1: Ilustración esquemática de un gráfico de control.

El modelo general de un gráfico de control clásico de parámetros fijos, conocido como gráfico de control de Shewhart, está compuesto por una línea central (*CL*), un límite superior de control (*UCL*) y un límite inferior de control (*LCL*), cuyos valores son calculados de la siguiente manera:

$$UCL = \mu_w + L\sigma_w \quad (2.1)$$

$$CL = \mu_w \quad (2.2)$$

$$LCL = \mu_w - L\sigma_w \quad (2.3)$$

donde w es un estadístico muestral que resume la información recabada sobre alguna característica de calidad de interés en el proceso, por lo que μ_w y σ_w son la media y la desviación estándar de este estadístico cuando el proceso se encuentra bajo control. L es la distancia de los límites de control desde la línea central, expresada en unidades de desviación estándar. En ocasiones, los valores μ_w y σ_w son desconocidos y deben ser estimados a partir de muestras preliminares del proceso cuando se acredite que el proceso

está bajo control.

La ubicación de los límites de control es una de las decisiones clave para tener éxito en el monitoreo de los procesos; si se establecen límites muy ajustados a la línea central, se incrementa el riesgo de decidir que el proceso está fuera de control cuando en realidad no lo está (error tipo I), mientras que si se busca minimizar ese riesgo y se establecen límites demasiado alejados de la línea central se incrementa el riesgo de afirmar que el proceso se encuentra bajo control cuando en realidad no lo está (error tipo II). Por lo general, si se supone que el estadístico se distribuye normalmente y se toman límites para $L = 3$, se encuentra a partir de la tabla normal estándar que α , la probabilidad de un error tipo I es de 0,0027. Es decir, una falsa alarma se producirá aproximadamente en 27 de 1.000 puntos muestrales. Por lo general, se recomienda el uso de límites 3σ porque dan buen resultado en la práctica, pero en algunas situaciones especiales pueden emplearse otros valores para L .

Es importante resaltar que la aplicación de los gráficos de control, tiene sentido si el proceso ha de tener una estabilidad suficiente, que aún siendo aleatorio, permita un cierto grado de predicción. En general, un proceso caótico no es previsible y no puede ser controlado.

2.1.2. Tipos de Gráficos

Según las características a estudiar, los gráficos de control se pueden clasificar de la siguiente manera: gráficos de control por variables y gráficos de control por atributos. El primero corresponde a características de calidad resultantes de una medición (pesos, viscosidad, dimensiones etc.); el segundo a características de calidad de tipo cualitativa, como, por ejemplo, el conteo de defectos en productos o unidades defectuosas en una muestra. En las tablas 2.1 y 2.2, se presenta una relación no exhaustiva de los tipos gráficos de control clásicos, estructurados al tipo de característica de calidad controlada.

Gráfico	Descripción	Campo de aplicación
$\bar{X} - R$	Medias y Rangos	Control de características individuales.
$\bar{X} - S$	Media y desviación estándar	Control de características individuales.
I	Individuales	Control de un proceso con datos variables que no pueden ser muestreados en lotes o grupos.

Tabla 2.1: Aplicación de las cartas de control por variables

Gráfico	Descripción	Campo de aplicación
P	Proporciones	Control de la fracción global de piezas no conformes.
NP	Número de no conformes	Control del número de piezas no conformes.
C	Número de no conformidades por unidad	Control del número global de no conformidades por unidad
U	Promedio de de no conformidades por unidad	Control del promedio de no conformidades por unidad.

Tabla 2.2: Aplicación de las cartas de control por atributos

Los gráficos de control han sido objeto de numerosas investigaciones durante muchos años; los gráfico de control propuestos originalmente por Shewhart presentan actualmente numerosas variaciones en función principalmente del aumento del desempeño del mismo, entre los que se encuentran:

Gráfico	Descripción	Gráficos de aplicación
<i>EWMA</i>	promedios móviles ponderados exponencialmente	\bar{X} , R, S, P, NP, C y U.
<i>CUSUM</i>	Suma acumulada de las desviaciones con respecto a un valor de referencia a controlar	\bar{X} , R, S, P, NP, C y U.
<i>VSS</i>	Tamaño de muestra variable	\bar{X} , R, S, P, NP, C y U.
<i>DS</i>	Doble muestreo	\bar{X} , R, S, P, NP, C y U.

Tabla 2.3: Gráficos de Control Alternativos

A continuación se hará una descripción detallada cada uno de los gráficos anteriormente mencionados.

2.1.3. Gráficos tradicionales para el control por Variables

Muchas características de calidad pueden expresarse en términos de una medición numérica; por ejemplo, el diámetro de un rodamiento podría medirse con un micrómetro y expresarse en milímetros. Una característica de calidad que se puede medir con un instrumento de medición, se le conoce como variable. Los gráficos de control por variables permiten estudiar la calidad de dichas características numéricas, proporcionando información sobre el rendimiento del proceso y permitiendo procedimientos de control más

eficaces.

Cuando se trata con una característica de calidad que es una variable, por lo general es necesario monitorear tanto el valor medio de la característica de calidad como su variabilidad. El control del valor medio se realiza, habitualmente, con el gráfico de control para medias, o gráfico \bar{X} . El control de la dispersión puede efectuarse bien con el gráfico de control de la desviación típica (gráfico S) o con el gráfico de control de rangos (gráfico R).

Gráfico de Control para la media y el rango

El gráfico de control de la media, también llamado gráfico \bar{X} recoge la evolución de la media muestral, en muestras de tamaño n , de la característica de calidad de interés.

Suponga que la característica de calidad x de un proceso es una variable continua que sigue una distribución normal con parámetros μ y σ . si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son mediciones de una muestra de tamaño n , entonces el estadístico de la media muestral viene dado por:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.4)$$

Así mismo, es bien sabido que para la muestra de tamaño n , la media muestral \bar{X} se distribuirá normalmente; esto es, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ donde μ y σ son la media y desviación, respectivamente, de la variable de interés X cuando la variabilidad procede sólo de causas comunes, es decir, cuando el proceso está bajo control.

Además, la probabilidad de que cualquier media muestral caiga en el intervalo $(\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}; \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n})$ es $1 - \alpha$, siendo α el riesgo tipo I o nivel de significación (probabilidad de decir que el proceso ha cambiado cuando en realidad el proceso sigue la misma distribución $N(\mu, \sigma)$)

$$1 - \alpha = P[\mu - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} < \bar{X} < \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}] \quad (2.5)$$

Por consiguiente, si μ y σ son conocidos, la expresión anterior puede utilizarse para determinar los límites de control de la media muestral. Si la media muestral cae fuera de estos límites, esto indicará que la media del proceso es diferente a μ .

$$UCL = \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.6)$$

$$CL = \mu \quad (2.7)$$

$$LCL = \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.8)$$

Anteriormente se ha supuesto que la distribución original era normal. Si no lo fuera, los anteriores resultados serían también aproximadamente válidos cuando los tamaño de muestra son suficientemente grandes por la aplicación del teorema del límite central.

En la práctica, los parámetros μ y σ suelen ser desconocidos; por consiguiente, deben ser estimados. Para ello, se toman muestras durante un periodo prolongado de tiempo en el que se tiene certeza que el proceso está bajo control. Esta estimación debe basarse como mínimo en 20 o 25 muestras de tamaño n (comúnmente n está entre 3 y 5) (Montgomery, 2009). Una vez que se ha construido el gráfico, éste se utilizará en primer lugar para comprobar que realmente el proceso estuvo bajo control mientras se recogía esta información inicial. En caso contrario, se ha de prescindir de aquellas muestras en las que el proceso no estuvo bajo control y se recalculará los límites del gráfico. Esta etapa del control del proceso es conocida como **Fase I**.

Una vez construido el gráfico, se representa la evolución de las nuevas muestras obtenidas en tiempo real, controlando así el proceso, esta etapa es conocida como **Fase II**.

El gráfico no se vuelve a modificar, salvo que haya transcurrido mucho tiempo y se quieran actualizar sus límites. El periodo de tiempo en el que se tomen los datos iniciales para la etapa de construcción del gráfico debe ser lo suficientemente amplio para permitir que haya cambios de turno, variabilidad en la materia prima, horas punta del servicio y horas valle, etc. La estimación de los parámetros será, además, una tarea que ha de someterse a revisión periódica. Veamos a continuación cómo ha de hacerse la estimación de μ y σ .

Se toman k muestras, cada una de las cuales tiene n mediciones de la característica de calidad de interés. Sea $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k$, son los promedios de cada muestra de tamaño n , entonces el estimador insesgado de μ , la media del proceso, es el promedio general y viene dado por:

$$\hat{\mu} \equiv \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}_i}{k} \quad (2.9)$$

Por tanto $\bar{\bar{x}}$ se usará para la línea central del gráfico (CL).

Para construir los límites de control, se requiere de un estimador de la desviación típica σ . Se puede estimar σ a partir de los rangos o de las desviaciones típicas de las k muestras. Inicialmente se hará la estimación a partir de los rangos. Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, son mediciones de una muestra de tamaño n , el rango de la muestra es $R = x_{max} - x_{min}$, siendo x_{max} el dato con el valor más grande de la muestra y x_{min} el dato con el valor más pequeño.

El rango será, por tanto, proporcional a la variabilidad de la variable. En muchas ocasiones se analiza la variabilidad a través del rango, en lugar de la desviación típica muestral. La razón principal es su simplicidad de cálculo. Además, en muestras pequeñas, es un estimador de la desviación típica casi tan eficaz, desde el punto de vista matemático, como la desviación típica muestral. Supongamos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ y R es el rango de una muestra de tamaño n de dicha variable aleatoria normal. El rango será también una variable aleatoria. Esta variable aleatoria depende de σ y de n y se define como $W = R/\sigma$.

Llámesese $d_2 \equiv E[W]$ y $d_3 \equiv \sqrt{Var[W]}$, donde d_2 y d_3 han sido tabulados para varios tamaños de muestra. Entonces:

$$\mu_R \equiv E[R] = E[W]\sigma = d_2\sigma \quad (2.10)$$

$$\sigma_R \equiv \sqrt{Var[R]} = d_3\sigma \quad (2.11)$$

de la expresión (2.10) se deduce σ :

$$\sigma = \frac{E[R]}{d_2} \quad (2.12)$$

y un estimador de σ será, por tanto:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (2.13)$$

Por tanto, los límites de gráfico de control estimado para la media, usando $\bar{\bar{x}}$ como estimador de μ y \bar{R}/d_2 como estimador de σ será:

$$UCL = \bar{\bar{x}} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \quad (2.14)$$

$$CL = \bar{\bar{x}} \quad (2.15)$$

$$LCL = \bar{\bar{x}} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \quad (2.16)$$

Estamos suponiendo que la variable X es normal. Por tanto su distribución no depende sólo de la media μ , sino de la varianza σ^2 . Dado lo anterior, para comprobar que el proceso esté bajo control no es suficiente con demostrar que μ está bajo control; es decir, que los puntos del gráfico de media están entre sus límites. Es necesario comprobar

también que la varianza σ^2 de la variable de interés X permanece igualmente bajo control.

Utilizando las propiedades del rango muestral vistas en las expresiones (2.10) y (2.11) se tiene que los límites del gráfico de control teórico para el rango tendrá las siguientes características:

$$UCL = \mu_R + 3\sigma_R = d_2\sigma + 3d_3\sigma = D_2\sigma \quad (2.17)$$

$$CL = \mu_R = d_2\sigma \quad (2.18)$$

$$LCL = \mu_R - 3\sigma_R = d_2\sigma - 3d_3\sigma = D_1\sigma \quad (2.19)$$

Dado que σ será por lo general desconocido, se empleará el estimador (2.12). Entonces los límites del gráfico de control estará dado por:

$$UCL = d_2 \frac{\bar{R}}{d_2} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R} \quad (2.20)$$

$$CL = d_2 \frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R} \quad (2.21)$$

$$LCL = d_2 \frac{\bar{R}}{d_2} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \bar{R} \quad (2.22)$$

donde $D_3 = (1 - 3d_3/d_2)$ y $D_4 = (1 + 3d_3/d_2)$ están tabulados en función del tamaño de la muestra n .

Una vez se ha construido el gráfico para la media y para la dispersión con el conjunto de muestras iniciales, se dará por finalizada la fase I. Ahora se continúa con la fase II, donde se usará el gráfico para monitorear en tiempo real, analizando la estabilidad del proceso con nuevas muestras tomadas a intervalos regulares de tiempo. Si una muestra cae entonces fuera de los límites de control habrá que analizar rápidamente qué ocurrió para recuperar el control del proceso.

Gráfico de Control para la media y la desviación estándar

Los gráficos Gráfico de Control para la media y la desviación estándar \bar{X} y S se construyen de forma similar a los gráficos \bar{X} y R , solamente que ahora se calculará la desviación estándar de la muestra y no el rango de la muestra.

Para construir los límites de control, se requiere del estimador de la desviación típica σ , que se estimará a partir de las desviaciones típicas de las k muestras. Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, son mediciones de una muestra de tamaño n , la desviación de cada una de la muestra son:

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.23)$$

Este estimador será centrado si la media μ del proceso ha sido constante durante la recogida de la información. Sin embargo, puede demostrarse que el estimador s_j no es un estimador insesgado de σ aun estando el proceso bajo control ($E(s_j) \neq \sigma$). El sesgo depende, además, del tamaño de la muestra n . No obstante, el sesgo para poblaciones normales se encuentra tabulado. La desviación típica muestral S es una variable aleatoria donde:

$$E[s_j] = c_4\sigma \quad (2.24)$$

$$Var[s_j] = (1 - c_4^2)\sigma^2 \quad (2.25)$$

Dado que los valores de c_4 están tabulados para distintos tamaños muestrales, se puede definir σ de (2.24),

$$\hat{\sigma} = \frac{E[s_j]}{c_4} \quad (2.26)$$

Entonces, sí s_j/c_4 es un estimador insesgado de σ . Se puede construir un estimador insesgado de σ promediando los estimadores insesgado s_j/c_4 de las k muestras:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{j=1}^k s_j}{k} \quad (2.27)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{c_4} \quad (2.28)$$

El gráfico de control de la desviación estándar o gráfico S se utiliza para controlar que la desviación estándar se encuentre bajo control, y por tanto representativa de la variabilidad debido a causas comunes de variación. Utilizando las ecuaciones (2.24) y (2.25) se tiene que los límites del gráfico de control teórico para la desviación estándar será, por tanto:

$$UCL = E(\hat{\sigma}) + 3\sqrt{Var[\hat{\sigma}]} = c_4\sigma + 3\sqrt{1 - c_4^2}\sigma = B_6\sigma \quad (2.29)$$

$$CL = E(\hat{\sigma}) = c_4\sigma \quad (2.30)$$

$$LCL = E(\hat{\sigma}) - 3\sqrt{Var[\hat{\sigma}]} = c_4\sigma - 3\sqrt{1 - c_4^2}\sigma = B_5\sigma \quad (2.31)$$

donde $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$ y $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$ y están tabulados en función del tamaño de la muestra. Como σ es desconocido, se utilizará el estimador insesgado (2.28), y por lo tanto, los límites del gráfico de control estimado para las desviaciones estándar queda así:

$$UCL = B_6 \frac{\bar{s}}{c_4} = B_4 \bar{s} \quad (2.32)$$

$$CL = c_4 \frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{s} \quad (2.33)$$

$$LCL = B_5 \frac{\bar{s}}{c_4} = B_3 \bar{s} \quad (2.34)$$

El uso del gráfico R está más extendido que el uso del gráfico S debido a la simplicidad de calcular el rango de cada muestra, aunque en la actualidad la disponibilidad de herramientas computacionales permite el cálculo de s en las estaciones de trabajo sin dificultad alguna. Por lo regular, es mejor trabajar con los gráficos de control \bar{X} y S , ya que la desviación estándar tiene mejores propiedades estadísticas que el rango.

2.1.4. Gráficos tradicionales para el control por Atributos

Los gráficos de control por atributos constituyen una herramienta esencial para controlar características de calidad cualitativas, características que no pueden ser medidas en una escala continua o en una escala cuantitativa. El termino atributo, en el contexto del control de la calidad, se refiere la propiedad que tiene una unidad de producto de ser conforme o disconforme, esto es, que la característica de calidad esté dentro de los requisitos especificados o no. Este tipo de gráficos surge debido a que algunas características de calidad no pueden ser representadas convenientemente por medio de variables cuantitativas, o las características de calidad pueden obtenerse como un atributo conforme o no con unas especificaciones establecidas. El atributo a controlar se suele elegir de forma que sea fácilmente observable y por tanto económico de controlar.

Dado que los atributos son características de calidad no pueden medirse de manera cuantitativa, los gráficos de control por atributos se basaran en la determinación de la cantidad o porcentaje de unidades no conformes en una población de productos obtenidos de un proceso y al igual que en los gráficos de control por variables, el diagrama de atributos representa un estadístico T del proceso (como puede ser en el número de no conformidades) frente al número de la muestra o al tiempo. Una línea central representa el valor medio del estadístico cuando el proceso está bajo control, mientras que los límites de control suelen definir una zona de control que abarca tres desviaciones típicas por encima y por debajo de la línea central. Estos límites son escogidos de manera que si el proceso está bajo control, casi la totalidad de los puntos muestrales se halle entre ellos.

Gráfico de Control P

El gráfico P representa la proporción de unidades no conformes en relación al tamaño de la muestra. Se utiliza cuando las unidades de producto se clasifican en conformes o no conformes, y se desea controlar la proporción p de individuos en uno de estos grupos.

Para este gráfico por lo general, se necesita un tamaño de muestra grande, recogidas en un mismo periodo de operación del proceso a intervalos fijos de tiempo. Se utiliza comúnmente cuando en un muestreo no puede mantenerse constante el tamaño de muestra, pero también es válido su uso cuando los tamaños de las muestras permanecen constantes.

Los principios estadísticos que sirven de base al gráfico de control P se basan en la distribución Binomial. Supóngase que el proceso de producción está bajo control, de manera tal que la probabilidad de que cualquier artículo no esté conforme con las especificaciones sea p , y que los artículos son producidos sucesivamente e independientes; entonces, si seleccionamos k muestras aleatorias de n artículos del producto cada una, y representando por X_i al número de artículos no conformes en la muestra i -ésima, tendremos que $X_i \sim B(n, p)$.

Se sabe que:

$$\mu_{x_i} = np \quad (2.35)$$

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{np(1-p)} \quad (2.36)$$

Para cada muestra, definimos la fracción disconforme como:

$$\hat{p} = \frac{X_i}{n} \quad (2.37)$$

\hat{p} seguirá una distribución Binomial con media y desviación típica:

$$E[\hat{p}] = \frac{E[X_i]}{n} = p \quad (2.38)$$

$$Var[\hat{p}] = \frac{Var[X_i]}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \quad (2.39)$$

Por lo tanto $\hat{p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Así, según Shewhart, se definen los límites de la siguiente manera:

$$UCL = p + L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (2.40)$$

$$CL = p \quad (2.41)$$

$$LCL = p - L\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (2.42)$$

Si p es desconocida, se puede estimar a partir de k muestras tomadas (no inferior a 25) cuando se considera que el proceso está bajo control.

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{p}_i \quad (2.43)$$

En ocasiones, el tamaño de muestra n_i de cada subgrupo puede ser diferente. Cuando esto ocurre se pueden estimar los límites usando el n_i asociado a cada muestra, por lo que las líneas de control no serán rectas (darán “saltos” arriba o abajo según disminuya o aumente).

Cabe destacar que este gráfico de control se basa en la distribución Binomial, en el cual se supone que la probabilidad de ocurrencia de una pieza disconforme es constante, y que unidades sucesivas en la producción son independientes. Por otra parte, hay que tener cuidado con la interpretación de los puntos del diagrama de control que se hallan por debajo del límite inferior de control. Tales puntos no representan a menudo una mejora real en la calidad del proceso; frecuentemente son el resultado de errores en el método de inspección o recogida de datos.

Gráfico de Control NP

El gráfico de control NP mide el número de unidades no conformes encontradas en las muestras. Se aplica al mismo tipo de problemas que el gráfico P, pero cuando el tamaño de muestra es constante. En tales casos, el control calidad en el proceso se puede realizar por el número de individuos no conformes observados en lugar de la proporción de no conformidad. El primero resulta más cómodo representar directamente la cantidad de unidades no conformes en la muestra en vez de su proporción, en este caso el gráfico de control correspondiente se denomina NP puesto que en ordenadas se representa esa magnitud.

Al igual que el gráfico P, los principios estadísticos que implican al gráfico de control NP están basados en la distribución Binomial.

Supóngase que el proceso de producción funciona de manera estable, de tal forma que la probabilidad de que cualquier artículo no esté conforme con las especificaciones es p , y que los artículos producidos sucesivamente son independientes; entonces, si seleccionamos k muestras aleatorias de n artículos del producto cada una, y representando por X_i al número de artículos defectuosos en la muestra i -ésima, tendremos que $X_i \sim B(n, p)$.

Se sabe que:

$$\mu_{x_i} = np \quad (2.44)$$

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{np(1-p)} \quad (2.45)$$

Para cada muestra, definimos la fracción disconforme como:

$$\hat{p} = \frac{X_i}{n} \quad (2.46)$$

\hat{p} seguirá una distribución Binomial con media y desviación típica:

$$E[\hat{p}] = \frac{E[X_i]}{n} = p \quad (2.47)$$

$$Var[\hat{p}] = \frac{Var[X_i]}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \quad (2.48)$$

Por lo tanto $n\hat{p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(np, \sqrt{np(1-p)})$

Así, según Shewhart, se definen los límites de la siguiente manera:

$$UCL = np + L\sqrt{np(1-p)} \quad (2.49)$$

$$CL = np \quad (2.50)$$

$$LCL = np - L\sqrt{np(1-p)} \quad (2.51)$$

Si el límite inferior es negativo se sustituye por el valor cero.

Si p es desconocida, se puede estimar a partir de k muestras tomadas (no inferior a 25) cuando se considera que el proceso está bajo control.

$$\bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{p}_i \quad (2.52)$$

Gráfico de Control C

A veces, el interés no se centra en el número de artículos disconformes sino en el número de no conformidades en un artículo o unidad de medida o, en general, el número de sucesos o atributos observados por unidad de medida. Por ejemplo, en un cable de fibra óptica interesa el número de disconformidades por metro o kilómetro.

El gráfico C es la herramienta estadística utilizada para monitorear el número total de no conformidades en una unidad de inspección seleccionada a partir de una muestra. Este gráfico se basa en el supuesto de que la frecuencia de no conformidades en las muestras está bien modelado por una distribución de Poisson. Esencialmente, esto requiere que el número de oportunidades o ubicaciones potenciales para las no conformidades sea infinitamente grande y que la probabilidad de ocurrencia de una no conformidad en cualquier ubicación sea pequeña y constante. Además, el tamaño de la unidad de inspección n debe ser la misma para cada muestra. Es decir, cada unidad de inspección debe representar siempre un área de oportunidad idéntica para la ocurrencia de no conformidades. Además, podemos contar no conformidades de diferentes tipos en una unidad, siempre y cuando se cumplan las condiciones anteriores para cada clase de no conformidad.

Si x es una variable con distribución de Poisson de parámetro λ , el valor medio de dicha distribución es también λ , con varianza λ . Dada la propiedad de la aditividad que indica que el número de sucesos en un intervalo es una distribución de Poisson de parámetro λ , el número de sucesos en n intervalos es una Poisson de parámetro $n\lambda$. Si λ es elevado ($\lambda > 5$), la distribución de Poisson se aproxima bastante a la normal. Por tanto, utilizando la mencionada propiedad de aditividad tenemos que si tomamos una unidad de medida suficientemente grande, se puede utilizar la distribución normal como referencia. Entonces, el número de disconformidades X por unidad de medida será, si la unidad de medida n es suficientemente grande, $X \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

Si se conoce el parámetro λ , se tiene control sobre la media y la variabilidad del proceso. Bastará, entonces, con un solo gráfico de control. Sea X_i el número de no conformidades observadas en un intervalo de longitud fija. Un gráfico de control para controlar la evolución de esta variable será:

$$UCL = \lambda + L\sqrt{\lambda} \quad (2.53)$$

$$CL = \lambda \quad (2.54)$$

$$LCL = \lambda - L\sqrt{\lambda} \quad (2.55)$$

Si el LCL resultase negativo se usaría el valor cero. Si λ no fuese conocido habría que estimarlo con un conjunto de datos preliminares, procedentes del proceso bajo control. En este caso, el gráfico se construiría tomando k (al menos 25) muestras del proceso a intervalos regulares de tiempo, y sobre cada muestra se registra el número de no conformidades observadas X_i . Se estima λ con el número promedio de no conformidades observadas:

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k} \quad (2.56)$$

Si el proceso ha estado bajo control durante esta etapa, el valor $\bar{\lambda}$ será un buen estimador de λ y se usará entonces como línea central del gráfico.

$$UCL = \bar{\lambda} + L\sqrt{\bar{\lambda}} \quad (2.57)$$

$$CL = \bar{\lambda} \quad (2.58)$$

$$LCL = \bar{\lambda} - L\sqrt{\bar{\lambda}} \quad (2.59)$$

Si el límite inferior es negativo se sustituye por el valor cero.

Gráficos de Control U

El gráfico U se utiliza cuando no es posible tener siempre la misma unidad de medida para contar el número de no conformidades. Este gráfico representa las no conformidades por unidad presentes en muestras tomadas a intervalos fijos de tiempo y al igual que el gráfico de control C está bien modelado por una distribución de Poisson.

Si x_i el número de no conformidades en la muestra i -ésima y n_i el número de unidades de medida analizadas. El número de no conformidades por unidad de medida será:

$$u_i = \frac{x_i}{n_i} \quad (2.60)$$

sea x_i una variable con distribución de Poisson de parámetro $(n_i\lambda)$, donde λ es el valor medio de no conformidades por unidad, entonces:

$$E[x_i] = n_i\lambda \quad (2.61)$$

$$Var[x_i] = n_i\lambda \quad (2.62)$$

Esta variable u_i es, entonces, un promedio de variables con distribución de Poisson, donde los sucesos se observan en intervalos de longitud distinta, por lo tanto:

$$E[u_i] = \frac{E[x_i]}{n_i} = \frac{n_i \lambda}{n_i} = \lambda \quad (2.63)$$

$$Var[u_i] = \frac{Var[x_i]}{n_i^2} = \frac{n_i \lambda}{n_i^2} = \frac{\lambda}{n_i} \quad (2.64)$$

Si el valor de n_i es suficientemente grande, la variable aleatoria u_i será, por el Teorema del Límite Central, aproximadamente normal. El gráfico de control de la variable u_i será:

$$UCL = \lambda + L\sqrt{\frac{\lambda}{n_i}} \quad (2.65)$$

$$CL = \lambda \quad (2.66)$$

$$LCL = \lambda - L\sqrt{\frac{\lambda}{n_i}} \quad (2.67)$$

Si λ se desconoce es posible estimarla con valores preliminares de u_i . La media de la distribución del número medio de no conformidades se estimará como:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (2.68)$$

Entonces,

$$\widehat{Var}[u_i] = \frac{\bar{u}_i}{n_i} \quad (2.69)$$

Por tanto, los límites de gráfico de control U serán:

$$UCL = \bar{u} + L\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \quad (2.70)$$

$$CL = \bar{u} \quad (2.71)$$

$$LCL = \bar{u} - L\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \quad (2.72)$$

Si el límite inferior es negativo se sustituye por el valor cero.

2.1.5. Desempeño de un Gráfico de Control Tradicional

Los gráficos de control guardan un estrecha relación con el test de hipótesis. Básicamente, en un gráfico de control se evalúan múltiples test de hipótesis en el que se busca determinar si un proceso está o no bajo control estadístico, esto es, verificar en el tiempo si los parámetros permanecen en estado estable; $H_0 : \mu_1 = \mu_0$, o han sufrido algún cambio, $H_1 : \mu_1 \neq \mu_0$.

Cada punto de un gráfico de control corresponde al valor observado del estadístico de interés evaluado en una muestra de tamaño n en cierto instante. Si el proceso está bajo control, los gráficos deben mostrar un comportamiento aleatorio dentro de los límites de control (UCL, LCL); por tanto una evolución de los gráficos que tenga puntos fuera de los límites UCL y LCL será indicio de existencia de causas especiales y, por tanto, se determinará que el proceso se encuentra fuera de control.

Debido a que un estadístico muestral es un dato aleatorio, puede ocurrir que aunque el proceso esté bajo control, el estadístico se encontrará en la región de rechazo, determinando que el proceso se ha salido de control. Si este fuese el caso, se estará cometiendo un error de tipo I, con probabilidad α . Otra posible situación sería encontrar que el estadístico se halla dentro de los límites de control (UCL, LCL), indicando que el proceso está bajo control, siendo que verdaderamente el proceso está fuera de control, con lo que se estaría cometiendo el error tipo II, con probabilidad β . Ver figura 2.2.

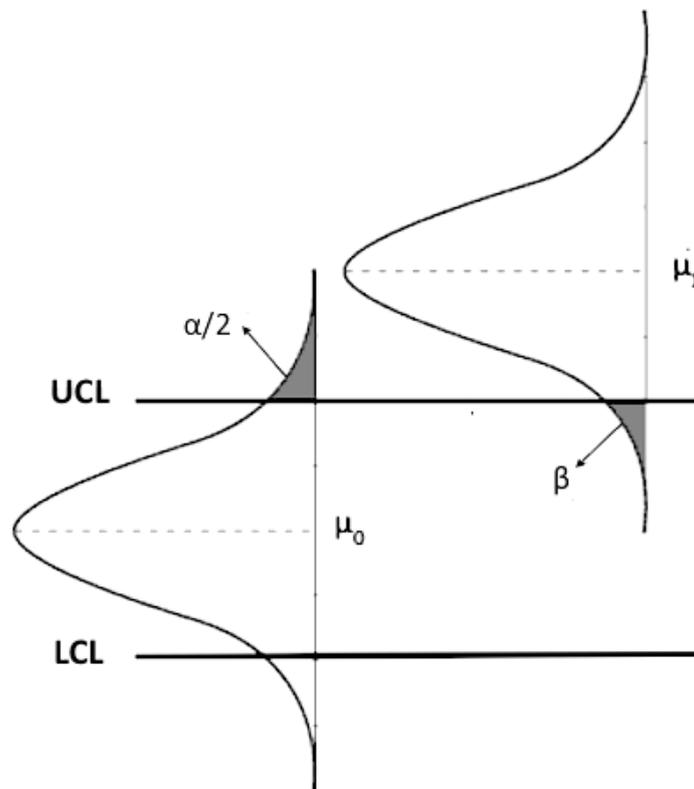


Figura 2.2: Relación entre los errores tipo I y II en un gráfico de control.

A la hora de seleccionar un gráfico de control, es imprescindible examinar su desempeño en términos de su velocidad de respuesta ante un cambio en el parámetro. La métrica usual es el ARL , que proviene de las siglas en inglés Average Run Length, (*longitud media de corrida*), que determina el número medio de muestras hasta la detección del corrimiento en el parámetro, representando la media de la variable aleatoria RL (*longitud de corrida*), que indica el número de puntos a dibujar en el gráfico desde que se produce el corrimiento en el parámetro hasta que el gráfico lo detecta mostrando un punto por fuera de los límites de control.

La variable aleatoria RL sigue una distribución geométrica de parámetro p , si las observaciones son independientes, p es la probabilidad de que un punto del gráfico esté fuera de los límites de control. El cálculo de esta probabilidad es sencillo y dependerá del tamaño muestral seleccionado, la ubicación de los límites y el estado del proceso. Por las propiedades de la distribución geométrica, se sabe que el número medio de sucesos hasta que un punto esté fuera de los límites (hasta que ocurra el suceso de probabilidad p) es:

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (2.73)$$

El ARL es una función que depende del desplazamiento del parámetro que se está controlando. Cuando el proceso está bajo control, indicando que no hay desplazamiento en el parámetro, el ARL es denotado por ARL_0 y cuando el proceso está fuera de control, indicando que ha habido un desplazamiento en el parámetro, el ARL es denotado por ARL_1 .

Entonces:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (2.74)$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (2.75)$$

donde α es la probabilidad de error tipo I y β es la probabilidad de error tipo II, luego entonces $1 - \beta$ es la probabilidad de que el gráfico indique que el proceso está fuera de control, siendo que verdaderamente el proceso está fuera de control, a esta probabilidad se le conoce como potencia.

2.1.6. Gráficos de Control con Memoria

Cuando los cambios en el proceso resultan ser de magnitudes pequeñas, los gráficos de control mencionados anteriormente resultan ser ineficientes con respecto a la detección de estos; lo anterior debido a que solo utiliza la información del proceso contenida en el último punto graficado e ignora cualquier información ofrecida por la secuencia completa de puntos (Montgomery, 2009).

Diferentes autores han desarrollado gráficos alternativos que permiten detectar con mayor rapidez los cambios pequeños, pero sacrificando la posibilidad de detectar cambios de magnitud grande de manera eficiente. El concepto de los gráficos de control con memoria es que la representación gráfica no se basa en las observaciones individuales, o promedios de una muestra de ellas, sino en la acumulación de información y por esta razón son denominados así.

Gráfico de control CUSUM

El gráfico CUSUM por sus siglas en ingles (Cumulative Sum) propuesto inicialmente por Page (1954) y estudiado en profundidad por diferentes autores, entre ellos Ewan (1963); Bissell (1969); Lucas (1973), representa gráficamente la suma acumulada de las desviaciones con respecto a un valor de referencia a controlar. En general las desviaciones en un proceso controlado son aproximadamente positivas y negativas de igual forma, y la suma de esas desviaciones será aproximadamente cero. Sin embargo una pequeña desviación de la media con respecto a la referencia, indetectable en los gráficos de Shewhart, se detectara rápidamente por el gráfico CUSUM debido al desequilibrio entre desviaciones positivas y negativas en la suma de desviaciones, que será claramente distinta de cero.

Considere que se desea controlar la media de un proceso cuyo valor de referencia es μ_0 , y para ello existe una sucesión de muestras de tamaño n cada una y cuyas medias muestrales son $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_t$, para cada muestra se calcula su desvío con respecto al valor de referencia $\bar{x}_i - \mu_0$, si el proceso estuviese realmente centrado en μ_0 , algunos desvíos resultarían positivos y otros desvíos resultarían negativos y la suma acumulada oscilaría al rededor de cero, dado lo anterior se define el estadístico de control como la suma acumulada hasta la t -ésima muestra y está definida así:

$$C_t = \sum_{i=1}^t (\bar{x}_i - \mu_0) \quad (2.76)$$

La ausencia de límites de control para la suma acumulada que permitiera determinar cuándo el proceso indicaba un cambio fue un inconveniente que condujo a los investigadores a desarrollar dos variantes del gráfico: el CUSUM tabular y la plantilla o mascara "V". Para el caso de esta Tesis se desarrolla el estudio con el CUSUM tabular, por lo que será detallado a continuación. Si quiere conocer en detalle la construcción de la mascara "V" puede referirse a Duncan et al. (2000).

El gráfico de control CUSUM tabular es un procedimiento que utiliza un algoritmo de suma acumulada para calcular las sumas acumuladas unilaterales que a través del gráfico se comparan con el intervalo de decisión H . Si un valor de la suma es mayor que este intervalo, se dice el proceso está fuera de control. Este procedimiento se aplica para monitorear el promedio de un proceso cuya estadística de control son observaciones individuales o medias de subgrupos racionales.

Para construir este gráfico es necesario definir un valor de referencia K , y un intervalo de decisión H . El valor de referencia K está determinado por la magnitud del cambio que se desea detectar. Cuanto más pequeño sea este valor, menor será el rango de variación

que el gráfico será capaz de detectar y mayor será la sensibilidad del gráfico. El intervalo de decisión H , es el valor que determina los límites fijos del gráfico.

Sea x_t una la variable aleatoria que se distribuye normalmente con media μ_0 y desviación estándar σ cuando el proceso está bajo control. El estadístico CUSUM acumula tanto los desvíos positivos en relación a μ_0 con el estadístico C^+ (CUSUM unilateral superior), como los desvíos negativos en relación a μ_0 con el estadístico C^- (CUSUM unilateral inferior). Los estadísticos C^+ y C^- se calculan como sigue:

$$C_t^+ = \max[0, x_t - (\mu_0 + K) + C_{t-1}^+] \quad (2.77)$$

$$C_t^- = \max[0, (\mu_0 - K) - x_t + C_{t-1}^-] \quad (2.78)$$

donde $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Observe que C_t^+ y C_t^- acumulan los desvíos en relación a μ_0 que son mayores que K , con ambas cantidades reiniciadas a cero al convertirse en negativas. Si C_t^+ o C_t^- exceden el intervalo de decisión H , el proceso se considera fuera de control.

El parámetro de referencia K usualmente es expresado en función de la desviación estándar y a menudo, K se establece como un valor intermedio entre μ_0 y el valor μ_1 fuera de control que se desea detectar. Si el cambio expresado en función de las unidades de desviación estándar es $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, entonces K se calcula como sigue:

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \quad (2.79)$$

donde δ es la magnitud del cambio que se desea detectar medida en unidades de desviación estándar.

En cuanto al intervalo de decisión H , también se puede definir en función de la desviación estándar $H = h\sigma$ y su valor viene determinado para la magnitud del cambio que se desea detectar, por la probabilidad de que se produzcan “falsas alarmas” en la operación del gráfico en condiciones bajo control y por probabilidad de detectar un cambio en la media. Montgomery (2009) aporta algunas recomendaciones generales para de diseñar el gráfico CUSUM con respecto a la selección de K y H . Definiendo $K = 1/2$ y $H = 4\sigma$ o $H = 5\sigma$. En la figura 2.3 se muestra una ilustración esquemática el gráfico CUSUM tabular.

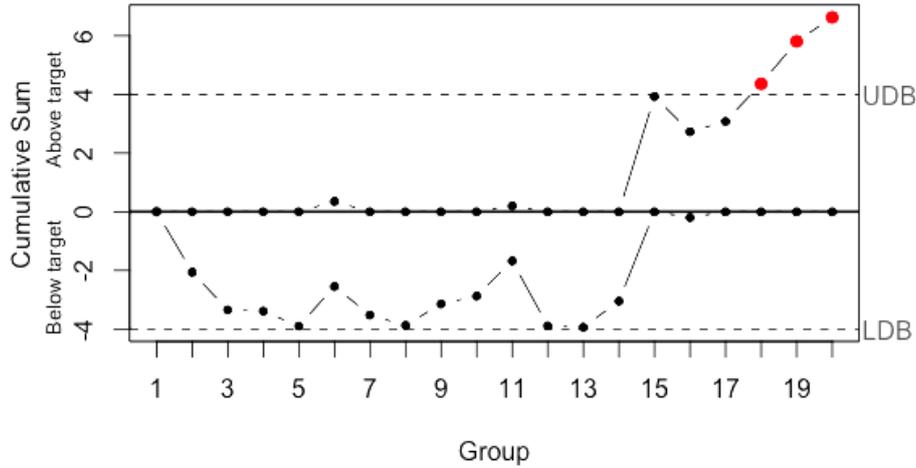


Figura 2.3: Ilustración esquemática del gráfico de control CUSUM.

Gráfico de control CUSUM por Atributos

Los gráficos CUSUM para atributos, resultan en una analogía del gráfico CUSUM por variables. Remitiéndonos al trabajo de Lucas (1985), se establecen tablas que ayudan en la elección de los parámetros K y H para la implementación de un gráfico CUSUM para la detección del aumento o reducción del número de no conformidades por unidad de inspección, (CUSUM-C). El procedimiento de Lucas (1985) para el desarrollo del gráfico CUSUM-C consiste en:

1. Calcular el valor de K .

$$K = K_{TRV} = (\mu_d - \mu_a) / (\ln(\mu_d) - \ln(\mu_a)) \quad (2.80)$$

K_{TRV} hace referencia a un test de razón de verosimilitud (TRV) cuando se está probando que la hipótesis nula es igual a μ_a contra la hipótesis alternativa que la media es igual μ_d , donde μ_a representa el número medio de no conformidades aceptados en la muestra y μ_d representa el número medio de no conformidades que se desea detectar.

2. Calcular las constantes de no conformidades μ_a/K y μ_d/K .
3. Escoger en las tablas presentadas el valor de H que proporcionen el rendimiento deseado.

La desventaja que ofrece este procedimiento es la limitación de las tablas proporcionadas, donde solo se puede seleccionar K de un grupo reducido de opciones 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 5.0, 7.0 y 10.0; a diferencia del programa propuesto en esta Tesis (*Apéndice D*) se permite determinar de manera precisa los valores de K y H sin restricción alguna.

Gan (1993) presenta una estrategia para optimizar en función del rendimiento los gráficos CUSUM para el número de no conformes (CUSUM-NP), el autor propone comparaciones exhaustivas, concluyendo que el K_{opt} es igual a:

$$K_{TRV} = [n \cdot \ln((1 - p_0)/(1 - p_1))] / [\ln((1 - p_0)/(1 - p_1)) - \ln(p_0/p_1)] \quad (2.81)$$

donde n es el tamaño de la muestra y p_0 es la proporción de productos no conformes cuando el proceso está bajo control y p_1 es la proporción de productos no conformes cuando el proceso está fuera de control.

White and Keats (1996) presentó un programa que utiliza el enfoque de cadena de Markov para calcular los valores de ARL para un gráfico de control CUSUM-C. Usando una fórmula recursiva. El programa se puede usar para obtener cualquier ARL de CUSUM-C para el caso de tasa creciente o decreciente, bajo cualquier cambio en la media del proceso, tanto en el punto de inicio cero como en el punto inicial de respuesta rápida. Mas tarde White et al. (1997) utilizó los resultados obtenidos para hacer una comparación basada en el ARL con el gráfico de control clásico de C, demostrando que el gráfico CUSUM-C es una alternativa superior al gráfico clásico C, no solo porque proporciona una detección más rápida de una situación fuera de control, sino que también proporciona un ARL más grande cuando el proceso está bajo control. CUSUM-C es capaz de proporcionar una protección superior contra un cambio manteniendo una tasa de falsas alarmas más baja.

En el capítulo 5 de esta Tesis se presentara un desarrollo detallado del gráfico de control CUSUM-C, así como su procedimiento de optimización.

Gráfico de control EWMA

Los gráficos de control de medias móviles ponderadas exponencialmente EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), fueron introducidos inicialmente por Roberts (1959). Los gráficos de EWMA utilizan el mismo principio que el gráfico CUSUM, la acumulación de desviaciones pasadas para detectar desviaciones del proceso, de modo que una pequeña desviación sostenida en el tiempo, indicativa de un desajuste, pueda ser detectada y corregida de forma temprana.

La acumulación se realiza en el gráfico EWMA tomando medias móviles; cada observación se promedia con las observaciones anteriores. Los valores de las observaciones promediadas se ponderan exponencialmente, de forma que las más recientes tienen más peso que las más antiguas. Se utilizan en general observaciones individuales, a diferencia del gráfico CUSUM, que habitualmente se construye con las medias de muestras secuenciales.

Supóngase que se quiere controlar la media de un proceso con un valor específico de μ_0 , que usa como estadístico de control a Z_t definido como el promedio ponderado entre la última observación x_t y el valor anterior de ese mismo estadístico.

$$Z_t = r \cdot x_t + (1 - r)Z_{t-1} \quad (2.82)$$

siendo $Z_0 = \mu_0$ y $0 < r \leq 1$

Entonces si se aplica de manera sucesiva esta formula para Z_{t-1} , Z_{t-2} , etc., se puede visualizar que Z_t resulta en un promedio exponencialmente ponderado entre todas las observaciones, donde las observaciones están mayormente ponderadas en la medida que sea más reciente:

$$Z_t = r \sum_{j=0}^{t-1} (1-r)^j x_{t-j} + (1-r)^t Z_0 \quad (2.83)$$

El factor de ponderación r reflejará la importancia que se le este dando a la observación más reciente.

El gráfico de control EWMA puede considerarse como un promedio ponderado de todas las observaciones pasadas y presentes, es en alto grado sensible al supuesto de normalidad. Por lo tanto, es un gráfico de control ideal para usarse con observaciones individuales.

Si las observaciones x_t son variables aleatorias independientes, con varianza σ^2 , entonces la varianza de Z_t es:

$$Var(Z_t) = \frac{r}{2-r} [1 - (1-r)^{2t}] \sigma_x^2 \quad (2.84)$$

Bajo el supuesto de normalidad los límites de control resultan ser:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma_x \sqrt{\frac{r}{2-r} [1 - (1-r)^{2t}]} \quad (2.85)$$

$$CL = \mu_0 \quad (2.86)$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma_x \sqrt{\frac{r}{2-r} [1 - (1-r)^{2t}]} \quad (2.87)$$

Note que a medida que t aumenta, el término $[1 - (1-r)^{2t}]$ converge rápidamente hacia uno, y la correspondiente expresión para la varianza se transforma en:

$$Var(Z_t) = \frac{r}{2-r} \sigma_x^2 \quad (2.88)$$

y los límites de control estabilizados se establecen de la siguiente manera:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma_x \sqrt{\frac{r}{2-r}} \quad (2.89)$$

$$CL = \mu_0 \quad (2.90)$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma_x \sqrt{\frac{r}{2-r}} \quad (2.91)$$

Sin embargo, se recomienda enfáticamente usar los límites de control exactos en las ecuaciones (2.89) y (2.91) para valores pequeños de t . Con esto mejorara de manera significativa el desempeño del gráfico de control para detectar un proceso fuera de control. El esquema del gráfico EWMA se representa en la figura 2.4.

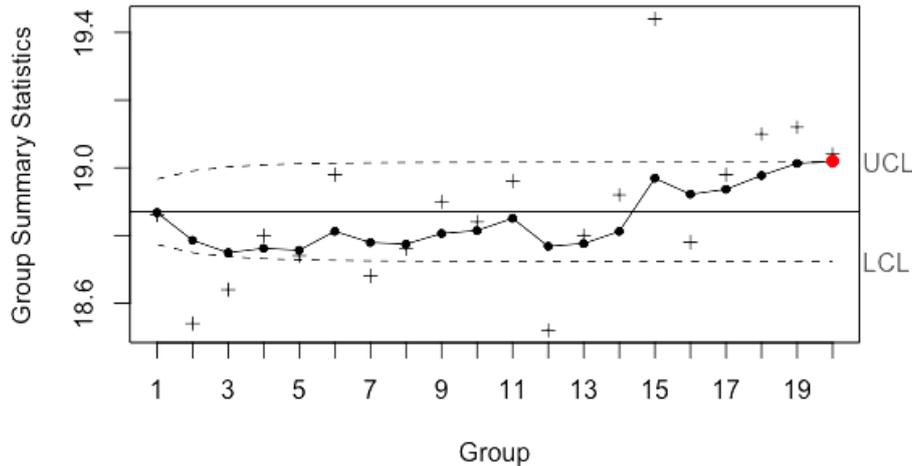


Figura 2.4: Ilustración esquemática del gráfico de control EWMA.

Gráfico de control EWMA por Atributos

Gan (1990a) propone un gráfico de control de promedio móvil ponderado exponencialmente (EWMA) modificado para monitorear datos provenientes de una distribución binomial, llamándolo REWMA de NP. El gráfico REWMA redondea el estadístico Z_t al entero más cercano. Se estudian dos casos, el caso en el que se desea detectar simplemente el aumento de la proporción de productos no conformes (REWMA unilateral) y el caso en el que se desee detectar tanto el aumento como la disminución de la proporción de productos no conformes (REWMA bilateral). La longitud media de corrida (ARL) y la función de probabilidad del ARL del gráfico de control de EWMA modificada pueden calcularse exactamente utilizando los resultados de la teoría de la cadena de Markov expuestos por Brook and Evans (1972). Se demuestra que el gráfico de control de EWMA-NP es generalmente superior al gráfico de control de Shewhart NP basado en la consideración de ARL .

Gan (1990b), extendiendo los conceptos de Gan (1990a), desarrolla tres gráficos de control EWMA modificados para monitorear los datos generados por una distribución de

Poisson. los tres gráficos fueron: REWMA de C, que redondea el estadístico Z_t al entero más cercano, CEWMA de C, que redondea el estadístico Z_t hacia el entero inmediatamente superior y FEWMA de C, que redondea el estadístico Z_t hacia el entero inmediatamente inferior. Es posible implementar estos gráficos de manera unilateral o bilateral. La longitud media de corrida (ARL) y la función de probabilidad de la longitud de ejecución de estos gráficos de control modificados se pueden calcular exactamente utilizando los resultados de la teoría de la cadena de Markov propuestos por Brook and Evans (1972). Se proporcionan tablas de ARL para ayudar en la selección de los parámetros para la implementación de estos gráficos de control modificados. Los gráficos de control CEWMA sobrestiman el estadístico Z_t , favoreciendo la detección de aumentos del número medio de no conformidades por unidad de inspección, mientras que el gráficos de control FEWMA de C subestima el estadístico Z_t , favoreciendo la detección de disminución del número medio de no conformidades por unidad de inspección. En todo caso estos modelos tienden a tener un tasa de falsas alarmas altas. Estas tendencia pueden ser compensadas con una selección adecuada de los límites de control que garanticen un ARL_0 mínimo.

Resultado del redondeo en el Z_t de las propuestas anteriores, está la pérdida de información y, aunque los gráficos propuestos por Gan (1990a) y Gan (1990b) resultan en un desempeño superior a los gráficos clásicos de parámetros fijos para detectar pequeños cambios en la tasa media de no conformidades por unidad, los ARL obtenidos difieren de manera significativa de los ARL obtenidos en el caso de no haber redondeo. Borrór et al. (1998) presentan un gráfico de control EWMA para monitorear los datos de Poisson (PEWMA). El procedimiento de creación de gráficos se evalúa utilizando una aproximación de cadena de Markov, y su longitud media de corrida se compara con otros procedimientos para datos de Poisson. El gráfico PEWMA utiliza límites constantes basados en la varianza asintótica del estadístico Z_t . Al igual que los modelos propuestos por Gan (1990a) y Gan (1990b), los ARL del gráfico PEWMA fueron obtenidos a partir del modelo de Brook and Evans (1972). Los ARL obtenidos resultaron inferiores que los ARL obtenidos con el modelo de Gan (1990b).

El gráfico PEWMA (o, como es llamado en el presente documento EWMA-C) número descrito detalladamente y optimizado en el capítulo 5 de esta Tesis.

2.1.7. Gráficos de Control Adaptativos

En los últimos tiempos, la investigación en el área del control estadístico de procesos se han enfocado en mejorar el desempeño de los gráficos de control. Los gráficos de control adaptativos nacen a partir de la necesidad de hacer los gráficos de control clásicos de Shewhart más eficientes tanto frente a desajustes pequeños como grandes. En este tipo de gráficos, uno o más parámetros como el tamaño de muestra, el intervalo de tiempo entre muestras o los límites de control varían durante la operación del proceso. El primer gráfico de control adaptativo fue propuesto por Reynolds et al. (1988), el cual fue basado en la variación de los intervalos de muestreo (VSI). Otros estudios se enfocaron en la variación del tamaño de la muestra (VSS) propuestos inicialmente por Prabhu et al. (1993) y Costa (1994), respectivamente. El gráfico de control adaptativo que combinaba la variación tanto en el intervalo de tiempo de muestreo como en el tamaño de la muestra (VSSI) lo propuso Prabhu et al. (1994). Finalmente, surge el gráfico adaptativo donde varían los límites de control, dichos gráficos fueron expuestos inicialmente por Costa (1999).

El procedimiento para implementar los gráficos de control adaptativos es simple y consiste básicamente en la definición de reglas sencillas para variar los parámetros. Por ejemplo, el gráfico VSS de dos etapas utiliza dos tamaños de muestra n_1 y n_2 alternativos, donde $n_1 < n_2$ y dependiendo de la posición actual del estadístico en el gráfico, el próximo muestreo se realiza con uno u otro tamaño de la muestra. En estos gráficos se deben añadir unos límites adicionales conocidos como límites de advertencia (WL), y a partir de este límite y los límites de control se evalúa la posición del estadístico. Si se empieza el muestreo con n_1 se continuará con este hasta que el estadístico proporcionado por la muestra n_1 supere el primer límite de advertencia (WL_1); en este caso, se procederá a tomar la siguiente muestra con tamaño n_2 para poder aumentar la capacidad de detección del gráfico. Si el estadístico supera el primer límite de control (UCL_1), se denotará el proceso como fuera de control. Ahora bien, si la inspección continúa con n_2 solo se volverá a inspeccionar con n_1 cuando el estadístico proporcionado por n_2 se posicione por debajo del segundo límite de advertencia (WL_2); por el contrario si el estadístico supera el segundo límite de control (UCL_2) se denotará el proceso como fuera de control. Alternativamente, se puede construir un gráfico adaptativo que en vez de variar el tamaño de la muestra (VSS), varíe el intervalo de tiempo de muestreo. El procedimiento de ejecución será similar al de (VSS), solo que ahora la muestra permanece fija n y se varía el tiempo de espera para la toma de la muestra h_1 y h_2 , donde $h_1 > h_2$; este es el caso denominado VSI.

Cabe resaltar que en la anterior descripción de los gráficos de tamaño de muestra variable e intervalo de muestreo variable solo se tuvieron en cuenta dos estados, pero se puede ejecutar el esquema con más de dos estados, como lo propone Zimmer et al. (1998) donde desarrollan el esquema en tres estados. Dependiendo del número de límites de advertencia, se tendrá diferentes esquemas de muestreo adaptables. Una comparación de los gráficos de control adaptativo de dos estados, tres estados y cuatro estados fue desarrollada por Zimmer et al. (2000). El número de estados define la cantidad de valores que pueden tomar los parámetros de diseño. Los gráficos de control de dos estados propuestos por Zimmer et al. (2000) son el intervalo de muestreo variable (VSI), el tamaño de muestra variable (VSS) y el tamaño de muestra e intervalo de muestreo variable (VS-SI). Un gráfico de control de dos estados incluye dos límites de advertencia (WL_1, WL_2), dividiendo el área entre los límites de control en dos áreas de acción y creando tres zonas, una zona bajo control, otra zona de advertencia y una zona fuera de control. Así mismo compararon el rendimiento de muchos esquemas diferentes de dos estados, tres estados y cuatro estados y concluyendo que, si bien los diagramas de control adaptativo de dos estados mejoran significativamente el rendimiento, en relación con los gráficos de control Shewhart clásicos, adicionar un tercer o cuarto estado no aumenta significativamente el rendimiento, por lo que agregar estados adicionales, más allá de dos, puede no justificar el trabajo adicional y la complejidad que esto requiere.

Gráfico de control Adaptativo por Atributos

Los gráficos de control adaptativos por atributos fueron propuestos inicialmente por Vaughan (1992) y años más tarde Epprecht and Costa (2001) y Epprecht et al. (2003) desarrollaron y optimizaron los gráficos adaptativos para NP y C, estos artículos servirán de referencia para el desarrollo y optimización del gráfico VSS-C. Epprecht and Costa (2001) investigaron, a través de un modelo de Marvok, análogo al de Brook and Evans

(1972), las propiedades de los gráficos adaptativos VSS de NP (VSS-NP), las cuales pueden ser extendidas para el gráfico adaptativo VSS-C; donde se estudia el desempeño de los gráficos bajo propósitos de; velocidad de detección del aumento de la proporción de no conformes, o el número de no conformidades durante el proceso. Así mismo, comparan el desempeño obtenido con el de los gráficos tradicionales NP y C en términos de velocidad de detección de cambio, demostrando que los gráficos de control adaptativo son más efectivos que los tradicionales de parámetros fijos en la detección de cambios de procesos. Así mismo, Luo and Wu (2002) desarrollaron un algoritmo para los diseños de optimización del gráfico NP de tamaño de muestra variable (VSS) y el gráfico NP de intervalos de muestreo variable (VSI) para la fracción de proceso de control no conforme P, evaluando el rendimiento en términos de Tiempo de señal promedio (ATS) en estado estable.

Epprecht et al. (2003) desarrollan un modelo mucho mas generalizado para gráficos de control adaptativos por atributos para (P, NP,C y U) donde varia uno, dos o los tres parámetros para el diseño del gráfico adaptativo, con una misma tasa de falsas alarmas y un mismo tamaño de muestra promedio cuando el proceso está bajo control. Los gráficos adaptativos detectan aumentos pequeños a moderados de la proporción de no conformes o número de no conformidades, más rápido que los gráficos clásicos de parámetros fijos. Se presentan diseños óptimos para diferentes valores de c_0 y varios aumentos en el número medio de no conformidades por unidad de inspección y hace una comparación de los diversos esquemas (Vp, VSS, y VSI). En particular la investigación ofrece diseños óptimos para los gráficos VSS de C.

Con la intención de seguir ahondando en la mejora de la eficiencia de los gráficos de control por atributos, Epprecht et al. (2010) propone un gráfico que relaciona el gráfico EWMA con un esquema adaptativo VSI para el gráfico C, llamándolo VSI-C EWMA. Utilizando el modelo de cadena de Markov para los cálculos, obtuvo diseños óptimos para este gráfico así como para el intervalo de muestreo fijo del gráfico EWMA-C y comparo el rendimiento de los dos esquemas de control en términos de eficiencia con respecto al tiempo esperado para la detección de un cambio (*ATS*).

La presente Tesis, ofrece el proceso de optimización del gráfico VSS-C a través de un Algoritmo Genético programado en el software R, donde se evidencian mejoras significativas con respecto al proceso de optimización de Epprecht et al. (2003), dicho proceso será descrito claramente en el capítulo 5 del presente documento y su algoritmo se puede ver en el (*Apéndice B*).

2.1.8. Desempeño de los Gráficos de Control Alternativos

Como se mencionó anteriormente, la expresión de cálculo de *ARL* detallada en el (*numeral 2.1.5*), solo es valida para el caso de observaciones independientes. Si el estadístico muestral presenta alguna estructura de dependencia temporal o auto correlación, el cálculo de *ARL* debe hacerse a través de otros procedimientos.

Las cadenas de Markov, se convirtieron en una poderosa herramienta para evaluar el desempeño de gráficos de control, cuyas observaciones no son independientes y por tanto, la variable aleatoria *RL* no sigue una distribución geométrica. El procedimiento para el

cálculo del *ARL* a través del uso de las cadenas de Markov, fueron introducidos por Brook and Evans (1972), donde haciendo uso de este enfoque, proponen calcular los *ARL* para el gráfico CUSUM, donde asevera que dichos resultados son válidos sin importar el tipo de distribución de la variable a ser controlada. Posteriormente, Lucas and Saccucci (1990) evaluaron las propiedades y el desempeño de los gráficos de control EWMA siguiendo un procedimiento similar al planteado por Brook and Evans (1972). Después de dos décadas de la introducción del enfoque de Markov, Hawkins (1992) proporciona un algoritmo general para la evaluación computacional de este método. El algoritmo es aplicable a las observaciones de cualquier distribución estadística en control, discreta o continua.

Dicho procedimiento ha sido también objeto de diferentes investigaciones; como es el caso de Runger and Prabhu (1996), quienes usaron el enfoque para evaluar el desempeño del gráfico EWMA multivariado y Fu et al. (2002) que desarrollaron un método simple y unificado, basado en cadenas finitas de Markov, para encontrar el *ARL* de gráficos de Shewhart, CUSUM y EWMA. Recientemente Li et al. (2014) hicieron una revisión de varios procedimientos, donde incluyeron el enfoque de cadena de Markov para calcular *ARL* y *ATS* para gráficos CUSUM, gráficos EWMA y gráficos de control combinados.

Diferentes autores han aprovechado este enfoque para evaluar el desempeño de gráficos de control por atributos, tal es el caso de Gan (1993), donde proponen una estrategia de diseño óptima, que permite determinar con facilidad los parámetros del gráfico NP CUSUM para el monitoreo del número de unidades no conformes y Borrór et al. (1998), quienes presentan un gráfico de control EWMA para monitorear los datos de Poisson, evaluando su desempeño haciendo uso del enfoque de cadena de Markov. Así mismo, Epprecht and Costa (2001) evaluaron el desempeño de un gráfico de control NP con tamaño de muestra variable y Epprecht et al. (2003) el gráfico de control C con tamaño de muestra variable.

En el capítulo 5 del presente documento, se describirá de manera detallada los procedimientos desarrollados para la evaluación del desempeño de los gráficos alternativos, haciendo uso del enfoque de cadena de Markov propuesto por Brook and Evans (1972).

2.1.9. Gráficos de Control de Doble Muestreo DS

Las primeras ideas de muestreo doble para el diseño de gráficos de control fueron introducidas por Croasdale (1974). Su propuesta estaba dirigida a la implementación de un esquema de muestreo doble (DS) en el gráfico de control \bar{X} , que se usa para el monitoreo de variables cuantitativas. En este esquema, se extraen dos muestras del proceso; la información recopilada de la primera muestra, se usa para decidir si el proceso está bajo control o si se requiere el análisis de la segunda muestra. La condición fuera de control del proceso se diagnostica utilizando solo la información de la segunda muestra. Más tarde Daudin (1992) propone usar la información conjunta de la primera y la segunda muestra para el diagnóstico de la situación fuera de control. Este procedimiento mejora el rendimiento del DS de Croasdale (1974). Los parámetros de diseño del DS de Daudin (1992) están optimizados para minimizar el *ASS*. En lugar de minimizar el *ASS*, Irianto and Shinozaki (1998) propone optimizar los parámetros para maximizar la potencia del gráfico de control DS.

En los últimos años, se han llevado a cabo investigaciones para mejorar el desempeño de los gráficos de control por atributos. Innovaciones similares a las mencionadas anteriormente han sido estudiadas y adaptadas para esquemas de control de atributos. Wu and Wang (2007) proponen un esquema de muestreo doble para el NP. En este esquema, la condición de control del proceso se diagnostica utilizando la cantidad de unidades no conformes observadas; cuando se requiere una segunda muestra, el diagnóstico de la condición fuera de control se realiza usando la ubicación de la primera unidad no conforme observada en la segunda muestra. Con este esquema, se obtiene una longitud de corrida media cuando el proceso está bajo control (ARL_0) más cercana al objetivo y una longitud de corrida media cuando el proceso está fuera de control (ARL_1) mas pequeña. Perez et al. (2010) propuso el gráfico de control DS-U para mejorar el rendimiento del gráfico U estándar. El gráfico de DS-U se basa en el esquema propuesto por Daudin (1992) y los parámetros de diseño de este gráfico de control se optimizaron para maximizar la potencia del gráfico de control, utilizando un Algoritmo Genético.

De Araújo Rodrigues et al. (2011) propusieron la idea de muestreo doble (DS) para los gráficos NP, este es otro esquema desarrollado para mejorar el rendimiento de los gráficos NP tradicionales, sin aumentar el tamaño de muestra promedio cuando el proceso se encuentra bajo control, al igual que Perez et al. (2010) el diseño del gráfico propuesto parte de la idea fundamental de Daudin (1992). Recientemente Chong et al. (2014) desarrolló un doble muestreo sintético NP. Este gráfico usa el DS-NP propuesto por De Araújo Rodrigues et al. (2011) y se complementa con un gráfico de control para el RL . Con este esquema, se observa una disminución significativa del ARL_1 en comparación con el NP sintético y DS-NP.

Por último, Inghilleri et al. (2015) desarrollaron un procedimiento de inspección de control de proceso estadístico basado en un nuevo esquema de muestreo doble simple para el gráfico de control C, dirigido a la minimización del número de unidades de observación inspeccionadas y garantizando niveles fijos de probabilidad de riesgo tipo I y tipo II. El esquema planteado está basado en la aproximación normal, que solo es adecuada para muestras de gran tamaño. La diferencia con la propuesta presentada en este documento se encuentra en el uso de una distribución de probabilidad exacta para el número de no conformidades y el enfoque de optimización el esquema.

Capítulo 3

Herramientas de Optimización para los Gráficos de Control

En el campo de investigación de operaciones, las técnicas de optimización se enfocan en determinar un conjunto de valores que toman los factores que pueden ser controlables a fin de regular el rendimiento del sistema en pro de maximizar o minimizar la respuesta de este (Baquela and Redchuk, 2013).

Específicamente en el diseño de los gráficos de control también puede aplicarse un procedimiento de optimización, en este caso orientado a encontrar el conjunto de parámetros que definen el gráfico de control para maximizar su desempeño en la detección de un cambio en el proceso, sujeto a las restricciones propias de la operación del proceso, del diseño del gráfico y de la frecuencia de falsas alarmas deseadas. Un esquema general habitualmente empleado consiste en minimizar el tiempo de detección de un cambio, para lo cual se utiliza como función objetivo la minimización del ARL_1 o la minimización de la probabilidad de error tipo II (β). Como una restricción fundamental se incluye el cumplimiento de tasas de falsas alarmas deseadas por el usuario (α^*) o alternativamente el cumplimiento de un ARL_0^* .

Regularmente, el problema de optimización asociado a un gráfico de control, no puede ser resuelto de forma analítica debido a la complejidad o no linealidad de la función objetivo y de las restricciones, en estos casos es habitual encontrar la implementación de métodos heurísticos para la identificación de la solución óptima. Dentro de estos métodos heurísticos, la aplicación de los Algoritmos Genéticos ha recibido recientemente gran atención de los investigadores en el área del control estadístico de procesos. En la literatura actual, se reconoce que los Algoritmos Genéticos pueden proporcionar herramientas poderosas en el campo de la optimización. Se ha comprobado que estos algoritmos pueden encontrar soluciones aproximadas a problemas de gran complejidad mediante un proceso de evolución simulada. Se le denomina evolución simulada debido a que estos algoritmos utilizan una técnica de búsqueda basada en mecanismos de selección y genética natural.

3.1. Algoritmos Genéticos

Los Algoritmos Genéticos introducidos e investigados por Holland (1975), es una heurística de búsqueda que está inspirada en la teoría de la evolución natural de Charles

Darwin. Este algoritmo refleja el proceso de selección natural donde los individuos más aptos, son seleccionados para la reproducción con el fin de producir descendencia de la próxima generación. El proceso de selección natural comienza con la selección de individuos más aptos de una población; producen descendientes que heredan las características de los padres y se agregarán a la generación siguiente. Si los padres tienen una mejor aptitud, sus hijos serán mejores que los padres y tendrán más posibilidades de sobrevivir. Este proceso continúa iterando y, al final, se encontrará una generación con los individuos más aptos.

Los Algoritmos Genéticos, utilizados como técnica de optimización, muestran buenas características de funcionamiento, específicamente cuando se trata de problemas con espacios de solución multimodal, dado que, a diferencia de los métodos tradicionales, es un método que busca en muchos puntos o posibles soluciones del espacio de solución simultáneamente (búsqueda en paralelo), lo cual reduce significativamente las probabilidades de que se queden atorados en mínimos locales durante el proceso de búsqueda. Adicionalmente, no necesitan de información auxiliar para funcionar apropiadamente, ya que solo requieren conocer la factibilidad o beneficio implícito de cada punto del espacio de solución explorado para guiar su búsqueda.

Para resolver un problema de optimización, cualquiera que este sea, mediante la aplicación de Algoritmos Genéticos, primeramente se tiene que codificar el conjunto de parámetros del problema. En términos del Algoritmo Genético, un vector de solución $x \in X$ se llama individuo o cromosoma. Los cromosomas están hechos de unidades discretas llamadas genes. Cada gen controla una o más características del cromosoma. En la implementación original de Holland (1975), se supone que los genes son dígitos binarios. En implementaciones posteriores, se han introducido tipos de genes más variados. Normalmente, un cromosoma corresponde a una solución única x en el espacio de la solución. Esto requiere un mecanismo de mapeo entre el espacio de la solución y los cromosomas. Este mapeo se llama codificación. De hecho, el Algoritmo Genético trabaja sobre la codificación de un problema, no en el problema en sí. Estos algoritmos utilizan reglas de transición probabilísticas para guiar su búsqueda hacia regiones del espacio de solución donde se espera tengan mejores características (Goldberg, 1989).

El algoritmo inicia creando aleatoriamente un conjunto de cromosomas de similares características que se conoce como población inicial, a cada elemento o cromosoma de la población inicial, a su vez, se le conoce como individuo; cada uno de los cuales representa una solución factible a un problema dado. A cada individuo se le asigna un valor o puntuación, mediante una función definida previamente conocida como función objetivo o función de evaluación, que asigna un valor de aptitud ó fitness a cada individuo. En la naturaleza esto equivaldría al grado de efectividad de un organismo para competir por unos determinados recursos. Cuanto mayor sea la adaptación de un individuo al problema, mayor será la probabilidad de que sea seleccionado para reproducirse, cruzando su material genético con otro individuo seleccionado de igual forma. Este cruce producirá nuevos individuos descendientes de los anteriores, los cuales comparten algunas de las características de sus padres. Cuanto menor sea la adaptación de un individuo, menor será la probabilidad de que sea seleccionado para la reproducción, y por tanto, de que su material genético se propague en sucesivas generaciones. A medida que la búsqueda evoluciona, la población incluye soluciones más ajustadas y, finalmente converge, lo que significa que está dominada por una única solución.

El Algoritmo Genético usa dos operadores para generar nuevas soluciones a partir de las existentes: cruce y mutación. El operador de cruce es el operador más importante del Algoritmo Genético. En el cruce, generalmente dos individuos, llamados padres, se combinan para formar nuevas cromosomas, llamados descendencia. Los padres se seleccionan entre los individuos existentes en la población con preferencia hacia los que tengan mayor aptitud, por lo que se espera que la descendencia herede buenos genes que hacen que los futuros padres sean más aptos. Cuando se aplica iterativamente el operador de cruce, se espera que los genes de los cromosomas buenos aparezcan con más frecuencia en la población, lo que finalmente converge en una buena solución general.

El operador de mutación introduce cambios aleatorios en las características de los cromosomas. La mutación generalmente se aplica a nivel genético. En las implementaciones típicas de los Algoritmo Genético, la tasa de mutación (probabilidad de cambiar las propiedades de un gen) es muy pequeña y depende de la longitud del cromosoma. Por lo tanto, el nuevo cromosoma producido por la mutación no será muy diferente del original. La mutación juega un papel crítico en los Algoritmo Genético. Como se discutió anteriormente, el cruce lleva a la población a converger haciendo que los cromosomas en la población sean iguales. La mutación vuelve a introducir la diversidad genética de nuevo en la población, y ayuda a la búsqueda de escape del óptimo local.

La reproducción implica la selección de cromosomas para la próxima generación, en el caso más general, la aptitud de un individuo determina la probabilidad de su supervivencia para la próxima generación. El procedimiento del Algoritmo Genético simple, se da de la siguiente manera:

1. Establezca $t = 1$: Genere aleatoriamente N soluciones para formar la primera población, P_1 . Computar la función de evaluación de cada individuo en P_1 .
2. Genere una población descendiente Q_t de la siguiente manera:
 - 2.1 Reproducción: Seleccione dos soluciones de P_t basadas en el valor de la función de evaluación.
 - 2.2 Cruce: Usando un operador de cruce, genere descendencia y agréguelos a Q_t
3. Mutación: seleccionar un subconjunto de soluciones $x \in Q_t$, a los cuales se les aplicará la mutación. La tasa de mutación debe ser predefinida.
4. Evaluación: evalúe la aptitud de cada solución $x \in Q_t$ a través de la función de evaluación.
5. Selección: seleccione N soluciones de Q_t basadas en la función de evaluación y cópielas a P_{t+1} .
6. Si se cumple el criterio de detención, finalice la búsqueda y regrese a la población actual; de lo contrario, establezca $t = t + 1$ y vaya al Paso 2.

3.1.1. Técnicas para mejorar el desempeño de los Algoritmos Genéticos

Con la intención de mejorar el desempeño de los Algoritmos Genéticos, en lo que se refiere a la calidad de las soluciones encontradas, y reducir los tiempos de ejecución, adicionalmente a lo ya mencionado hasta este momento, se aplican algunas técnicas especiales, tales como el elitismo y los factores de penalización entre otras. Dichas técnicas por lo general están muy relacionadas con las medida de ajuste (fitness) de los individuos en la población.

Elitismo

El proceso de reproducción consiste en seleccionar de la población inicial los mejores individuos (con alto fitness), que posteriormente serán sometidos a los operadores de cruce y mutación, donde muy probablemente serán modificadas las estructuras de los cromosomas padres por la acción de los operadores. Con el fin de evitar la pérdida del mejor individuo de cada generación, se hace una copia de este, que pasará intacta a la próxima generación, es decir, no participará en el proceso de cruce ni mutación; a esto se le llama elitismo.

Para cada problema particular, se tendrá que definir el número de copias élite por generación; esto es, cuántos de los diferentes mejores individuos pasarán intactos a la siguiente generación.

Factores de penalización

En lo que respecta a los factores de penalización, es una técnica más directa que actúa modificando el valor fitness de todos los individuos de cada generación, a través de una modificación directa en la función de evaluación, con el único objetivo de hacer una mejor discriminación de los individuos durante el proceso de reproducción y así, apresurar la evolución de los individuos generación tras generación.

Factores de prioridad

Esta técnica, al igual que las dos anteriores, modifica el valor fitness de los individuos, solo que lo hace de manera diferente. Esta técnica se aplica en funciones de evaluación un poco más elaboradas, es decir, compuestas de más de un elemento o subfunción de costo. Su finalidad es la de modificar la función de evaluación de forma tal que, uno de los elementos de la función tenga prioridad o mayor peso que él o los otros elementos que componen la función y así, el valor fitness del individuo evaluado, esté definido en mayor parte por el elemento prioritario.

3.2. Optimización Multiobjetivo

En aplicaciones del mundo real, la mayoría de los problemas de optimización implican la optimización de más de un objetivo. Los objetivos en muchos de los problemas de optimización a menudo son contradictorios, es decir, maximizan el rendimiento, minimizan

el costo, maximizan la confiabilidad, etc. En el caso, una solución extrema no satisface ambas funciones objetivos y la solución óptima de un objetivo no será necesariamente la mejor solución para otro(s) objetivo(s). Por lo tanto, las diferentes soluciones producirán compensaciones entre los diferentes objetivos y se requiere un conjunto de soluciones para representar las soluciones óptimas de todos los objetivos.

Normalmente, las metodologías de optimización se concentran en la adecuación de un conjunto de elementos de manera que se mejore el resultado dado por una función objetivo. Sin embargo, los problemas reales involucran otra serie de objetivos que pueden ser de tanto interés como lo que se optimizó, y también ser tan relevantes y conflictivos que harían inviable la solución obtenida. La optimización multiobjetivo basada en técnicas evolutivas es una metaheurística que surgió con el fin de resolver este tipo de problemas. Los Algoritmos Genéticos tradicionales están personalizados para adaptarse a problemas de objetivos múltiples mediante el uso de funciones fitness especializadas y la introducción de métodos para promover la diversidad de soluciones.

Existen dos enfoques generales para la optimización multiobjetivo: el primero es generar un única función compuesta, que combine las múltiples funciones objetivos individuales, en este caso, la determinación de un único objetivo es posible con métodos como la teoría de la utilidad, el método de suma ponderada, entre otros, pero se halla el inconveniente en la selección adecuada de los pesos o funciones de utilidad para caracterizar las preferencias del responsable de la toma de decisiones. En la práctica, puede ser muy difícil seleccionar estos pesos con precisión, incluso para alguien familiarizado con el problema.

Convertir todas las funciones objetivos en restricciones, excepto una, suele ser otra opción del primer enfoque, en este caso, el problema es que para mover los objetivos al conjunto de restricciones, se debe establecer un valor restrictivo para cada uno de estos objetivos. Esto puede ser bastante arbitrario. En ambos casos, un método de optimización devolvería una única solución en lugar de un conjunto de soluciones que pueden examinarse para obtener compensaciones. Por esta razón, los responsables de la toma de decisiones a menudo prefieren un conjunto de buenas soluciones considerando los múltiples objetivos.

El segundo enfoque, es determinar un conjunto completo de soluciones óptimas de Pareto o un subconjunto representativo. Un conjunto óptimo de Pareto es un conjunto de soluciones que no están diferenciadas entre sí. Al pasar de una solución de Pareto a otra, siempre hay una cierta cantidad de sacrificio en un objetivo para lograr una cierta cantidad de ganancia en el otro. Los conjuntos de soluciones óptimas de Pareto a menudo se prefieren a soluciones únicas porque pueden ser prácticos cuando se consideran problemas de la vida real, ya que la solución final del que toma las decisiones siempre es una solución de compromiso. Los conjuntos óptimos de Pareto pueden ser de diferentes tamaños, pero el tamaño del conjunto de Pareto generalmente aumenta con el aumento en el número de objetivos.

Conceptos básicos acerca de la optimización multiobjetivo

El modelo matemático general de un problema de optimización multiobjetivo se presenta a continuación:

$$\min/\max : f_m(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots, M \quad (3.1)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, J$$

$$h_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, K$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Para resolver el anterior problema se deben definir algunos criterios con el fin de determinar cuáles soluciones se consideran de buena calidad y cuáles no. Para lo anterior Zitzler and Thiele (1999) introdujeron el concepto de dominancia, que contribuye en el proceso de clasificación de las diferentes soluciones, encontrando las mejores alternativas teniendo en cuenta la presencia y la cuantificación de los M objetivos del problema.

La mayoría de los casos de optimización multiobjetivo se relacionan objetivos contradictorios, así entonces optimizar una solución con respecto a un objetivo no dará como resultado una solución óptima con respecto a los otros objetivos. para los M objetivos, el operador \triangleleft entre las dos soluciones i y j ($i \triangleleft j$) indica que la solución i es mejor que la solución j en un objetivo particular del mismo modo ($i \triangleright j$) indicara que la solución i es peor que la solución j en un objetivo particular.

Se dirá que una solución factible x^1 dominará a otra solución factible x^2 si solo si se cumplen las siguientes condiciones:

- La solución x^1 no es peor x^2 con respecto a todos los objetivos, $f_j(x^1) \not\triangleright f_j(x^2)$, para todo $j = 1, 2, 3, \dots, M$
- La solución x^1 es estrictamente mejor que x^2 en al menos un objetivo, $f_j(x^1) \triangleleft f_j(x^2)$ en al menos un $j \in 1, 2, 3, \dots, M$

Por lo tanto, la solución x^1 domina la solución x^2 o la solución x^2 está dominada por la solución x^1 . Si cualquiera de las dos condiciones es violada, la solución x^1 no domina la solución x^2 .

El concepto de dominancia, se puede extender para encontrar un conjunto de soluciones no dominadas dentro de una población. Si se considera una población de N soluciones cada una con M valores de funciones objetivo, se usa el siguiente procedimiento para encontrar el conjunto no dominado de soluciones:

1. Hacer $i = 1$.
2. Para todos los $j \neq i$, comparar las soluciones x^i y x^j para determinar dominancia, usando las dos condiciones mencionadas anteriormente para todos los M objetivos.
3. Si para algún j , x^i es dominado por x^j , marcar x^i como dominado. Incrementar i en uno e ir al paso 2.

4. Si todas las soluciones (es decir, cuando se llega a $i = j$) en el conjunto son consideradas, ir al paso 5; de lo contrario incrementar i en 1 e ir al paso 2.
5. Todas las soluciones que no son marcadas como dominadas, son soluciones no-dominadas.

Cuando se realiza un análisis de dominancia entre dos soluciones y se encuentra que la primera condición de dominancia no se cumple para ninguna de las dos soluciones, no se puede concluir acerca de la dominancia de una con respecto a otra. Cuando esto sucede, se dice que las soluciones son no-dominadas. De esta forma, si se tiene un conjunto finito de soluciones y se realiza una comparación de todos los pares posibles, al final se va a tener un conjunto de soluciones que son no dominadas entre sí y dicho conjunto tiene la propiedad de dominar al resto de soluciones que no pertenezcan a él. Por lo tanto, si se tiene un conjunto de soluciones P , el conjunto no dominado de soluciones P' lo forman aquellas que no son dominadas por ningún miembro del conjunto P , a este conjunto se le llama frente de Pareto. Cuando el conjunto P es el espacio de búsqueda, el conjunto no dominado P' resultante es denominado frente óptimo de Pareto Zitzler and Thiele (1999). Ver figura 3.1

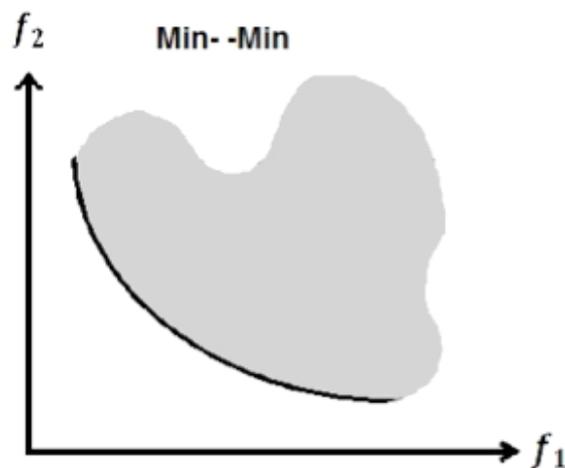


Figura 3.1: Frente de Pareto de un problema bi-objetivo de minimización tomado de Amouzgar (2012)

Dado que el concepto de dominación permite la comparación de soluciones con respecto a objetivos múltiples, la mayoría de los algoritmos de optimización multiobjetivo usan este concepto para obtener el conjunto de soluciones no dominadas, por lo tanto, el frente Pareto.

3.2.1. Algoritmo Genético Multiobjetivo (NSGA-II)

NSGA (*Non-Dominated Sorting in Genetic Algorithms*) es un popular Algoritmo Genético basado en la no dominación para la optimización multiobjetivo. Es un algoritmo muy efectivo pero ha sido ampliamente cuestionado por su complejidad computacional y falta de elitismo. Se desarrolló una versión modificada, por Deb et al. (2002), el NSGA-II, que tiene un mejor algoritmo de clasificación, incorpora el elitismo y ningún parámetro

de uso compartido debe ser elegido *a priori*, es clasificado como de tipo elitista, ya que incorpora un mecanismo de preservación de las soluciones dominantes a través de varias generaciones de un Algoritmo Genético.

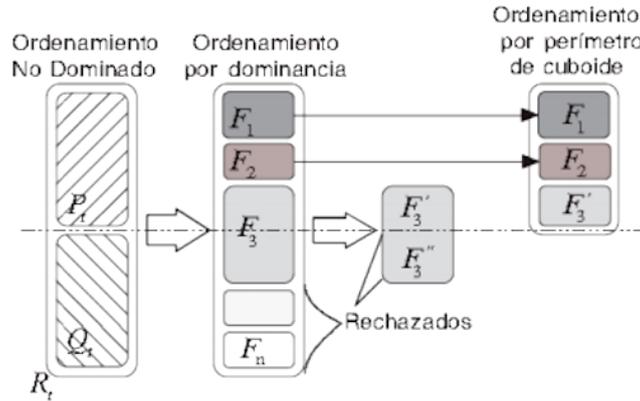


Figura 3.2: Procedimiento del algoritmo NSGA II
tomado de Deb et al. (2002)

El proceso se inicia a partir de un conjunto P_t de tamaño N de soluciones (padres) obtenidas al azar o a través de un constructivo suave. Las siguientes generaciones son determinadas usando mecanismos modificados de selección cruzamiento y mutación definidos por el Algoritmo Genético clásico. En este algoritmo, la población descendiente Q_t (tamaño N) es creada en primera instancia usando la población de padres P_t (tamaño N) luego, las dos poblaciones son combinadas para formar R_t de tamaño $2N$. Después de lo anterior, mediante un ordenamiento no dominado se clasifica la población R_t en diferentes frentes de Pareto. Aunque esto requiere un mayor esfuerzo, se justifica por el hecho de permitir una verificación global de dominancia entre la población de padres y descendientes. Una vez el proceso de ordenamiento no dominado ha finalizado, la nueva población es generada a partir de las configuraciones de los frentes no dominados. Esta nueva población empieza a ser construida con el mejor frente no dominado (F_1), continúa con las soluciones del segundo frente (F_2), tercero (F_3) y así sucesivamente. Como la población R_t es de tamaño $2N$, y solamente existen N configuraciones que conforman la población descendiente, no todas las configuraciones de los frentes pertenecientes a la población R_t podrán ser acomodados en la nueva población. Aquellos frentes que no pueden ser acomodados, desaparecen.

El software R contiene un paquete llamado "**mco**" desarrollado por Mersmann et al. (2014), donde en una de sus funciones es posible desarrollar un proceso de optimización usando el algoritmo NSGA II. Su implementación es sencilla y se obtienen excelentes resultados. Este paquete fue utilizado como herramienta para el proceso de optimización de los diferentes diseños del gráfico DS-C propuesto en esta Tesis.

Capítulo 4

Gráfico de Control C con Muestreo Doble (DS-C)

Inicialmente, será presentado el gráfico de control C con muestreo doble, en adelante llamado DS-C. Se presentarán las reglas de decisión para el diagnóstico del proceso, el modelo matemático para el cálculo de las medidas de desempeño y el formulado de optimización del modelo. Así mismo, se evaluará el nuevo gráfico a través de ejemplos.

4.1. Descripción del Gráfico de Control DS-C

Supóngase un proceso en el cual el número de no conformidades por unidad de inspección de tamaño k , sigue una distribución de Poisson, con un promedio histórico de λ_0 , cuando el proceso está bajo control. Si están presentes causas especiales de variación, implicaría que el proceso está llegando a ser de menor calidad, aumentando el número medio de no conformidades $\lambda = \lambda_1$ ($\lambda_1 > \lambda_0$). Sólo se considerará este caso de interés y el gráfico se definirá sin límite de control inferior.

En el diseño del gráfico DS-C propuesto, es necesario definir cinco parámetros: la fracción (m_1) para la primera submuestra, un primer valor límite para el número de no conformidades observadas para la primera submuestra, que actúa como un límite de advertencia (WL), un valor límite a partir del cual se genera una señal de cambio con la primera submuestra (UCL_1), la fracción (m_2) para la segunda submuestra y un valor límite de a partir del cual se genera una señal de cambio cuando se ha inspeccionado la muestra global (UCL_2).

El siguiente es el procedimiento propuesto:

1. En el momento de la inspección, se extrae una muestra global del proceso de tamaño $(m_1 + m_2) \cdot k$.
2. Se analiza la primera submuestra de tamaño $(m_1 \cdot k)$, contando las no conformidades. Sea x_1 el número de no conformidades encontradas en la primera submuestra:
 - A. Si $x_1 < WL$, el proceso se considera bajo control y la segunda submuestra no necesita ser analizada. El gráfico de control continua operando.
 - B. Si $x_1 > UCL_1$, se supone que el proceso está fuera de control y debe tomarse una acción correctiva. La segunda submuestra no necesita ser analizada.

3. Si $WL < x_1 < UCL_1$, se analiza la segunda submuestra de tamaño $(m_2 \cdot k)$. Sea x_2 el número de no conformidades encontradas en la segunda submuestra. En este caso la decisión depende de la suma de x_1 y x_2 :
 - C. Si $(x_1 + x_2) < UCL_2$, el proceso se considera bajo control y el gráfico de control continúa operando.
 - D. Si $(x_1 + x_2) > UCL_2$, el proceso se considera fuera de control y debe tomarse una acción correctiva.
4. En intervalos de muestreo prefijados (cada hora, por ejemplo), repita el procedimiento con una nueva muestra.

La ubicación de los límites WL , UCL_1 y UCL_2 , no puede coincidir con números enteros. Debido a esto las reglas de decisión no consideraron la igualdad. Para el diseño de la carta DS-C es recomendable ubicar estos límites en el punto medio de los dos enteros consecutivos adecuados. Así entonces:

$$WL = \lfloor WL \rfloor + 0.5 \quad (4.1)$$

$$UCL_1 = \lfloor UCL_1 \rfloor + 0.5 \quad (4.2)$$

$$UCL_2 = \lfloor UCL_2 \rfloor + 0.5 \quad (4.3)$$

La figura 4.1 representa el esquema de control gráfico para DS-C y los puntos se trazan de acuerdo con las situaciones A, B, C y D, descritas anteriormente.

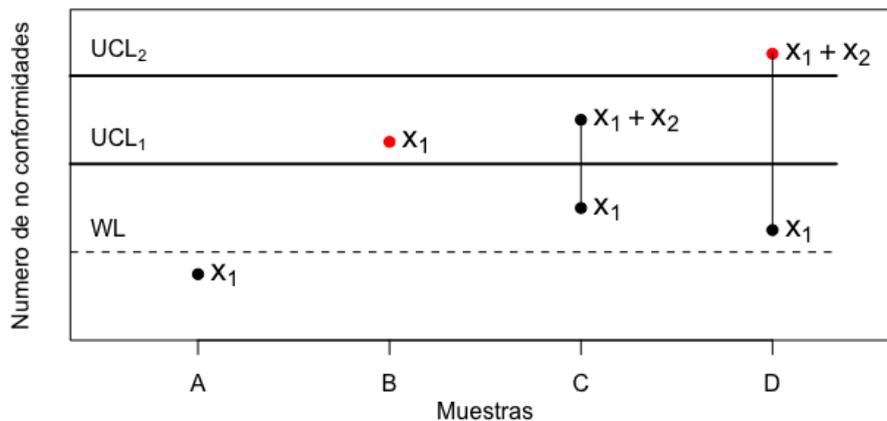


Figura 4.1: Ilustración esquemática del gráfico de control DS-C.

El esquema del gráfico de DS-C propuesto, supone que las dos submuestras sucesivas se pueden tomar al mismo tiempo y por lo tanto, provienen de la misma distribución de probabilidad. Para hacer esto, se toma una muestra de tamaño $(m_1 + m_2) \cdot k$, como resultado de la suma de los tamaños de la submuestra uno y la submuestra dos. Luego se analiza la primera submuestra y, dependiendo del resultado obtenido, se decide si se analiza la segunda submuestra o no. Por lo tanto, es posible utilizar el gráfico DS-C incluso cuando se necesita un largo tiempo para analizar o medir la muestra. Al igual que con todos los esquemas de gráficos de control habituales, también se supone que los valores de muestra son independientes. Cuando esta suposición no es válida, el ARL calculado puede no ser apropiado.

4.2. Medidas de desempeño del Gráfico de Control DS-C

La eficacia de un gráfico de control puede determinarse por su velocidad en la detección de un cambio, o perturbación del proceso que aumenta el número medio de no conformidades. Esta velocidad, puede ser medida por el ARL . El esquema DS-C tiene como objetivo acelerar la detección de aumentos en el número medio de no conformidades, sin aumentar la tasa de inspecciones o la tasa de falsas alarmas.

Por lo general, el proceso comienza en control ($\lambda = \lambda_0$) y en algún momento una causa especial aumenta el número de no conformidades por unidad a λ_1 . Se asumió para el esquema desarrollado que el proceso comienza bajo control. También se asumió que el aumento de λ no ocurre durante la extracción de una muestra, sino entre tiempos de muestreo. Por último, se supone que el número de no conformidades en las unidades producidas son independientes, y una vez que el proceso está en el estado fuera de control, permanece en esta condición, con ($\lambda = \lambda_1$), hasta que haya una intervención para devolverlo al estado bajo control ($\lambda = \lambda_0$).

Cuando un proceso está bajo control, las falsas alarmas deben ser tan pocas como sea posible para asegurar la credibilidad del gráfico de control. La tasa de falsas alarmas se calcula con el ARL_0 . La deducción es simple, y está dada por:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (4.4)$$

donde α es la probabilidad de falsa alarma, y está dada por:

$$\alpha = 1 - P(x_1 < WL | \lambda = \lambda_0) + \sum_{i=[WL]+1}^{[UCL_1]-1} P(x_1 = i | \lambda = \lambda_0) \cdot P(x_2 < UCL_2 - i | \lambda = \lambda_0) \quad (4.5)$$

donde:

$$P(x_1|\lambda_0) = \frac{e^{-\lambda_0 m_1} \cdot (\lambda_0 m_1)^{x_1}}{x_1!} \quad (4.6)$$

$$P(x_2|\lambda_0) = \frac{e^{-\lambda_0 m_2} \cdot (\lambda_0 m_2)^{x_2}}{x_2!} \quad (4.7)$$

Por el contrario, cuando un proceso está fuera de control, el número medio de muestras tomadas hasta encontrar una señal fuera de control debe ser pequeño para proporcionar una detección rápida del cambio en el proceso. Este número medio se denomina ARL_1 y bajo la suposición de que el aumento de λ no se produce durante la extracción de una muestra, se tiene la siguiente expresión:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} \quad (4.8)$$

donde $(1 - \beta)$ es la probabilidad de detectar un corrimiento específico. Este valor se conoce como la potencia del gráfico, y se obtiene a partir del cálculo de β , mediante:

$$\beta = P(x_1 < WL|\lambda = \lambda_1) + \sum_{i=[WL]+1}^{[UCL_1]-1} P(x_1 = i|\lambda = \lambda_1) \cdot P(x_2 < UCL_2 - i|\lambda = \lambda_1) \quad (4.9)$$

donde:

$$P(x_1|\lambda_1) = \frac{e^{-\lambda_1 m_1} \cdot (\lambda_1 m_1)^{x_1}}{x_1!} \quad (4.10)$$

$$P(x_2|\lambda_1) = \frac{e^{-\lambda_1 m_2} \cdot (\lambda_1 m_2)^{x_2}}{x_2!} \quad (4.11)$$

El tamaño medio de la muestra (ASS) del gráfico DS-C es una función del número medio de no conformidades por unidad λ , y está dado por:

$$ASS = m_1 + m_2 \cdot [P(WL < x_1 < UCL_1|\lambda = \lambda_0)] \quad (4.12)$$

donde $[P(WL < x_1 < UCL_1|\lambda = \lambda_0)]$ es la probabilidad de analizar la segunda muestra.

4.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico de Control DS-C

Optimizar el rendimiento del gráfico de control DS-C, es equivalente a encontrar el conjunto de parámetros de diseño que garantizan que en la operación las probabilidad de error tipo II (β) es la mínima posible, sujeto a una probabilidad de error tipo I ($\alpha \leq \alpha^*$) establecido por el operador del proceso. Simultáneamente, los costos de inspección se controlan a través de la minimización del *ASS*.

Este problema de optimización puede considerarse como un problema bi-objetivo en el que:

Dado $(\alpha^*, \lambda_0, \lambda_1)$, es deseable encontrar los valores de los parámetros (m_1, m_2) y (WL, UCL_1, UCL_2) que minimizan:

$$\min : Z_1 = \beta \quad (4.13)$$

$$\min : Z_2 = ASS \quad (4.14)$$

Sujeto a las siguientes restricciones en sus parámetros:

$$WL \geq 0.5 \quad (4.15)$$

$$UCL_1 - WL \geq 1 \quad (4.16)$$

$$UCL_2 - UCL_1 \geq 0 \quad (4.17)$$

Las restricciones anteriores son necesarias para garantizar el funcionamiento del gráfico de control y sus reglas de decisión.

El modelo de optimización debe permitir al controlador definir el rendimiento deseado del gráfico bajo control. Esto es posible mediante la fijación α^* , lo que es equivalente a definir el ARL_0 como se muestra en las ecuación (4.4), garantizando que bajo control el $ARL_0 \geq ARL_0^*$, donde ARL_0^* corresponde al *ARL* bajo control deseado, el controlador debe definir $\alpha^* = 1/ARL_0^*$. Para ello se define una restricción que evite obtener valores de α por encima del α^* preestablecido por el controlador, esto es:

$$\alpha \leq \alpha^* \quad (4.18)$$

Además, el operador puede localizar un conjunto de restricciones que limitan el rango de búsqueda para las fracciones $(m_1; m_2)$ para los tamaños de cada submuestra, adaptándolos a las condiciones específicas del proceso, tales como las limitaciones de la conformación de la muestra y los costos de muestreo.

$$m_{1_{min}} \leq m_1 \leq m_{1_{max}} \quad (4.19)$$

$$m_2 \leq m_{2_{max}} \quad (4.20)$$

De las ecuaciones (4.4) a (4.12) se puede deducir que la expresión matemática de los riesgos α, β y ASS no corresponden a funciones lineales, por lo que el uso de herramientas de resolución analítica y exacta puede ser una tarea muy difícil. En las últimas décadas ha sido frecuente el uso del Algoritmo Genético para obtener una solución para este tipo de problemas.

Hoy en día, existen diferentes alternativas para resolver problemas multiobjetivos. Varios métodos han sido estudiados por diferentes autores como Fonseca and Fleming (1998), De Toro et al. (2002) y Konak et al. (2006). Métodos como el uso de ponderación multiobjetivo o una función de utilidad, puede reducir el problema multiobjetivo a una optimización escalar, pero implican la selección de la preferencia entre los objetivos. Con el fin de ofrecer alternativas atractivas para el DS-C, se aplica en este estudio, el enfoque del frente de Pareto, que comúnmente se utiliza para resolver la optimización multiobjetivo con conflictos entre los objetivos. El frente de Pareto es un conjunto de soluciones para el caso multiobjetivo, utilizado donde la mejora de uno de los objetivos requiere algún sacrificio en otros objetivos, manteniendo al mismo tiempo la solución óptima global.

En este capítulo se propone la implementación de un Algoritmo Genético multiobjetivo NSGA-II para la búsqueda de los parámetros óptimos de diseño. Para su implementación, hemos usado las librerías incorporadas en la biblioteca del software R, Algoritmos de Optimización de Criterios Múltiples y Funciones Relacionadas "**mco**". El algoritmo NSGA-II desarrollado por Deb et al. (2002), presenta dos características importantes: garantiza la diversidad durante el proceso de solución y además se caracteriza por ser elitista, es decir, solamente considera las mejores soluciones encontradas durante el proceso de búsqueda.

Los diseños óptimos fueron desarrollados con el software R, que resolvió el problema de optimización (*Apéndice A*), obteniéndose así las medidas de desempeño para ser evaluadas posteriormente, con el fin de comparar el rendimiento del gráfico de control DS-C y la utilidad que su aplicación puede tener en contraste con el uso de un gráfico tradicional de parámetros fijos FP-C o el uso de gráficos alternativos como VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C; dicha comparación se hará a través de la evaluación del ARL_1 de cada esquema.

Los diseños óptimos del esquema se desarrollaron pre-estableciendo un α máximo (α^*) de 0.005, 0.0027 y 0.002 correspondientes a ARL_0^* de 200, 370.4 y 500 respectivamente. El valor de $\alpha = 0.0027$ corresponde a los límites tradicionales de 3σ , que es el más usado en las investigaciones y así mismo el más recomendado. El valor de $\alpha = 0.005$ es seleccionado con el fin de evaluar el rendimiento del gráfico DS-C mejorando la sensibilidad de este sin exigirles muestras grandes. Bissell (1988), por ejemplo, recomienda el uso de un $\alpha = 0.005$. El valor de $\alpha = 0.002$ es escogido pensando en los procesos que se le puede exigir alta frecuencia de muestreo, y que por lo tanto, requieren una tasa de falsas alarmas muy bajas.

Para el proceso de optimización, se evaluaron diferentes escenarios, como los expuesto por Epprecht et al. (2003), donde se considera λ_0 y γ^* como parámetros de entrada con los siguientes valores: $\lambda_0 = 0.5; 1.0; 1.5; 2.0; 3.0; 4.0$ y $\gamma^* = 1.5; 2.0; 3.0$. Con el fin de garantizar que el rendimiento del gráfico de control DS-C se evalúa bajo condiciones lógicas de producción, se han impuesto las mismas restricciones empleadas por Epprecht et al. (2003) en su proceso de optimización, para limitar el rango de variación de las fracciones m_1 y m_2 para los tamaños de cada submuestra, como se denota en las ecuaciones (4.19) y (4.20); las restricciones para m_1 y m_2 son: $0.2 \leq m_1 \leq 0.8$ y $m_2 \leq 5$. Las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 presentan los parámetros de diseño y sus respectivos ARL_0 y ARL_1 obtenidos para el gráfico de control DS-C, bajo las condiciones de α^* , λ_0 , γ^* . Con el propósito de hacer las comparaciones posteriores se establece una condición para el tamaño promedio de muestra así: $ASS \leq 1$, por lo que el objetivo de la comparación se centra en comparar el ARL_1 de cada gráfico.

Tabla 4.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$.

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	0.32	4.57	0.5	4.5	6.5	200.10	31.35
	2.0	0.32	4.57	0.5	4.5	6.5	200.10	10.79
	3.0	0.32	4.57	0.5	4.5	6.5	200.10	3.68
1	1.5	0.54	4.46	1.5	6.5	10.5	201.87	18.94
	2.0	0.54	4.46	1.5	6.5	10.5	201.87	5.78
	3.0	0.58	3.64	1.5	6.5	9.5	200.26	2.16
1.5	1.5	0.40	4.81	1.5	6.5	14.5	202.01	13.31
	2.0	0.40	4.81	1.5	6.5	14.5	202.01	4.09
	3.0	0.52	2.57	1.5	6.5	10.5	202.58	1.67
2.0	1.5	0.53	4.91	2.5	7.5	18.5	202.12	10.25
	2.0	0.55	4.45	2.5	8.5	17.5	201.97	3.21
	3.0	0.66	2.30	2.5	8.5	12.5	204.75	1.41

Continúa en la página siguiente

Tabla 4.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1
3.0	1.5	0.40	4.98	2.5	7.5	25.5	208.29	7.04
	2.0	0.61	3.38	3.5	11.5	20.5	201.04	2.34
	3.0	0.71	1.67	3.5	9.5	14.5	200.29	1.18
4.0	1.5	0.45	4.81	3.5	9.5	31.5	200.52	5.44
	2.0	0.64	3.07	4.5	10.5	24.5	209.57	1.90
	3.0	0.73	1.56	4.5	10.5	17.5	202.85	1.08

Tabla 4.2: Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$.

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	0.73	5.00	1.5	5.5	7.5	370.46	45.94
	2.0	0.73	5.00	1.5	5.5	7.5	370.46	13.92
	3.0	0.73	5.00	1.5	5.5	7.5	370.46	4.17
1	1.5	0.53	4.66	1.5	6.5	11.5	371.99	26.29
	2.0	0.53	4.66	1.5	6.5	11.5	371.99	6.87
	3.0	0.57	3.83	1.5	6.5	10.5	390.43	2.29
1.5	1.5	0.40	4.86	1.50	7.50	15.50	373.53	17.88
	2.0	0.40	4.86	1.50	7.50	15.50	373.53	4.61
	3.0	0.71	3.05	2.50	7.50	12.50	375.82	1.74
2.0	1.5	0.53	4.89	2.50	8.50	19.50	370.88	13.23
	2.0	0.53	4.89	2.50	8.50	19.50	370.88	3.53
	3.0	0.65	2.40	2.50	8.50	13.50	379.94	1.45
3.0	1.5	0.40	4.94	2.5	9.5	26.5	373.56	8.63
	2.0	0.59	3.92	3.5	9.5	23.5	376.10	2.49
	3.0	0.69	1.98	3.5	11.5	16.5	375.93	1.20
4.0	1.5	0.45	4.93	3.5	11.5	33.5	375.16	6.36
	2.0	0.62	3.49	4.5	10.5	27.5	373.13	2.01
	3.0	0.71	1.80	4.5	13.5	19.5	374.70	1.09

Tabla 4.3: Parámetros y rendimiento del gráfico de control DS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$.

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	0.31	4.82	0.50	4.50	7.50	500.00	56.68
	2.0	0.31	4.82	0.50	4.50	7.50	500.00	15.95
	3.0	0.31	4.82	0.50	4.50	7.50	500.00	4.35
1	1.5	0.54	4.38	1.50	7.50	11.50	500.11	32.01
	2.0	0.54	4.38	1.50	7.50	11.50	500.11	7.69
	3.0	0.54	4.38	1.50	7.50	11.50	500.11	2.34
1.5	1.5	0.64	4.98	2.50	8.50	16.50	500.28	20.22
	2.0	0.64	4.98	2.50	8.50	16.50	500.28	4.84
	3.0	0.70	3.38	2.50	8.50	13.50	502.87	1.76
2.0	1.5	0.71	4.98	3.50	9.50	20.50	500.15	15.22
	2.0	0.54	4.66	2.50	8.50	19.50	500.78	3.65
	3.0	0.64	2.65	2.50	8.50	14.50	500.09	1.47
3.0	1.5	0.56	4.92	3.50	10.50	27.50	500.13	9.43
	2.0	0.58	4.34	3.50	10.50	25.50	500.94	2.56
	3.0	0.68	2.14	3.50	10.50	17.50	500.35	1.20
4.0	1.5	0.45	5.00	3.50	9.50	34.50	500.00	6.83
	2.0	0.62	3.58	4.50	11.50	28.50	500.90	2.04
	3.0	0.72	1.71	4.50	11.50	19.50	501.48	1.10

Se destaca la flexibilidad del esquema DS-C para adaptarse a un ARL_0 deseado en todas las situaciones evaluadas. Así mismo, el esquema DS-C demuestra ser robusto en los casos donde la media del número de no conformidades es muy pequeño; $\lambda_0 = 0.5, 1$. Para el caso de $\alpha^* = 0.002$, se extendería a $\lambda_0 = 1, 5$ donde sin importar la magnitud de los cambios evaluados, los parámetros resultado de la optimización, permanecen fijos, aunque esta robustez solo se mantiene en los cambios de moderados a pequeños, esto es, $\gamma^* \leq 2$.

Capítulo 5

Gráficos de Control Alternativos para C

En este capítulo, se hará una descripción y optimización de los gráficos de control VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C bajo las mismas condiciones en las que fue optimizado el esquema DS-C, para que posteriormente, se pueda hacer una comparación válida entre los diferentes esquemas.

5.1. Gráfico de Control VSS-C

5.1.1. Descripción del gráfico de control VSS-C

Considere un proceso en el cual el número de no conformidades por muestra sigue una distribución de Poisson, que este puede estar en dos estados; el primer estado con un promedio histórico de λ_0 , cuando el proceso está bajo control y el segundo estado está determinado por la presencia de causas especiales de variación que implicaría que en el proceso hay un aumento en el número medio de las no conformidades, esto es λ_1 . Se asume para el esquema VSS-C que el proceso comienza a operar bajo control ($\lambda = \lambda_0$). También se asumió que el aumento de λ no ocurre durante la extracción de una muestra, sino entre tiempos de muestreo y que las unidades producidas son independientes, y una vez que el proceso está en el estado fuera de control, permanece en esta condición ($\lambda = \lambda_1$), hasta que haya una intervención para devolverlo al estado bajo control ($\lambda = \lambda_0$).

Supóngase que se utiliza un gráfico de control VSS-C para controlar el proceso. Dos conjuntos de parámetros definen el gráfico adaptativo VSS-C; el primer grupo está dado por (m_1, UCL_1, WL_1) y el segundo grupo está dado por (m_2, UCL_2, WL_2) , donde m_i ($i = 1, 2$) es la fracción de tamaño de la muestra en unidades de inspección k , UCL_i es el límite superior de control y WL_i es un límite de advertencia. No hay un límite de control inferior (LCL) porque el objetivo es detectar los deterioros del proceso que pueden aumentar el número esperado de no conformidades durante la producción. Por definición, suponemos que $0 < WL_i < UCL_i$ ($i = 1, 2$) y $m_1 \leq m_2$.

La operación del gráfico adaptativo VSS-C es simple. Cada muestra se toma con m_1 o m_2 , de acuerdo con el siguiente reglas: si $x_i < WL_i$, se usara m_1 junto con el conjunto de parámetros del primer grupo para la próxima muestra; si $WL_i < x_i < UCL_i$, se usara m_2 junto con el conjunto de parámetros del segundo grupo para la próxima muestra y si $x_i > UCL_i$, se determinará que el proceso está fuera de control y deberá tomarse una acción correctiva.

La figura 5.1 representa el gráfico de control VSS-C, el cual posee dos límites de control superior UCL_1 y UCL_2 , dos límites de alerta WL_1 y WL_2 en dos escalas, una para cada tamaño de muestra. Se utiliza una relación lineal por partes entre las escalas izquierda y derecha, de modo que haya una línea común para los UCL , otra para los WL y, opcionalmente, otra para los CL .

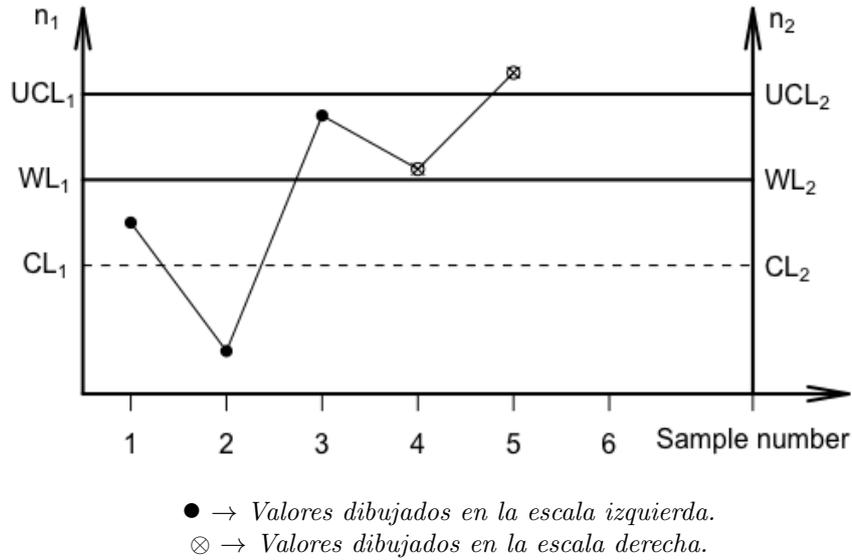


Figura 5.1: Ilustración esquemática del gráfico de control VSS-C.

Con el objetivo de evitar eventuales ambigüedades que puedan surgir en la interpretación del gráfico de control VSS-C, aquí también se ubicarán los límites en el punto medio de los dos enteros consecutivos adecuados. Entonces, para $i = 1, 2$ tenemos:

$$WL_i = [WL_i] + 0.5 \quad (5.1)$$

$$UCL_i = [UCL_i] + 0.5 \quad (5.2)$$

5.1.2. Medidas de desempeño del Gráfico de Control VSS-C

El esquema VSS-C tiene como objetivo acelerar la detección de aumentos en el número medio de no conformidades, sin aumentar la tasa de inspecciones o la tasa de falsas alarmas. Para calcular los ARL del gráfico de control VSS-C, Epprecht and Costa (2001), utilizan el modelo de cadena de Markov, que se caracteriza por tener un estado absorbente, situación que respecta al estado fuera de control, y durante el periodo que el proceso se mantiene bajo control, tiene dos estados transitorios de acuerdo con el tamaño de las muestras:

- El tamaño de la próxima muestra debe ser menor.

- El tamaño de la próxima muestra debe ser mayor.

Sea π y $1 - \pi$ los valores límites de las probabilidades de que la muestras sea menor o mayor, respectivamente. Se determina que el tamaño de la primera muestra que se toma del proceso cuando este justo inicia, o después de una falsa alarma, es escogido de manera aleatoria, de acuerdo a las mismas probabilidades. En este caso, durante la fase bajo control, las probabilidades no condicionales de que la muestra deba ser la menor permanece constante e igual a π y las probabilidades no condicionales de que la muestra deba ser la mayor permanece constante e igual a $1 - \pi$.

Con el propósito de determinar el valor de π , se utiliza una cadena de Markov que incluye un estado absorbente (estado 3: ocurrencia de falsa alarma).

La matriz de transición (P) está dada por:

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde p_{ij} ($i = 1, 2$ y $j = 1, 2$) denota las probabilidades que de transición entre dos estados transitorio; p_{i3} representa la probabilidad de transición de un estado transitorio a un estado absorbente ($i = 1, 2$); $p_{33} = 1$ representa la imposibilidad de salir del estado absorbente y $p_{31} = p_{32} = 0$ representan la imposibilidad de ir de un estado absorbente hacia un estado transitorio.

Ahora la matriz de transición entre estados transitorios, Q_0 está dada por:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

donde p_{ij} denota la probabilidad de transición de un paso de un estado i a un estado j

$$p_{i1} = \sum_{j=0}^{\lfloor WLi \rfloor} \frac{e^{-m_i \lambda_0} * (m_i \lambda_0)^j}{j!} \quad (5.5)$$

$$p_{i2} = \sum_{j=\lfloor WLi \rfloor + 1}^{\lfloor UCLi \rfloor} \frac{e^{-m_i \lambda_0} * (m_i \lambda_0)^j}{j!} \quad (5.6)$$

$$p_{i3} = 1 - p_{i1} - p_{i2} \quad (5.7)$$

De las propiedades elementales de las cadenas de Markov se obtiene π como solución a la ecuación:

$$[\pi(1 - \pi)] = [\pi(1 - \pi)] * Q_0 \quad (5.8)$$

la expresión 5.8 conlleva a:

$$\pi = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.9)$$

donde,

$$a = p_{23} - p_{13} \quad (5.10)$$

$$b = p_{12} + p_{21} - (p_{23} - p_{13}) \quad (5.11)$$

$$c = -p_{21} \quad (5.12)$$

Cuando el proceso está bajo control, la probabilidad de falsa alarma α y el tamaño de muestra promedio *ASS* de VSS-C son respectivamente:

$$\alpha = p_{13}\pi + p_{23}(1 - \pi) \quad (5.13)$$

$$ASS = m_1\pi + m_2(1 - \pi) \quad (5.14)$$

Por lo tanto, el valor del ARL_0 puede ser calculado utilizando una propiedad de la cadena de Markov:

$$ARL_0 = b^T [I - Q_0]^{-1} \vec{1} \quad (5.15)$$

donde $b^T = [\pi \ 1 - \pi]$ es el vector de probabilidades de estado inicial para el estado bajo control, I es la matriz identidad de orden 2, Q_0 es la matriz de transición cuando el proceso está bajo control y $\vec{1}$ es un vector de unos.

Análogamente si el proceso está fuera de control, el cálculo del ARL_1 se obtiene a partir de una cadena de Markov, que consta de dos estados de transición y un estado absorbente que respecta a un punto que cae fuera del límite de control. Ahora, la matriz transición viene dada por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

donde q_{ij} ($i = 1, 2$ y $j = 1, 2$) denota las probabilidades que de transición entre dos estados transitorio; q_{i3} representa la probabilidad de transición de un estado transitorio a un estado absorbente ($i = 1, 2$); 1 representa la imposibilidad de salir del estado absorbente y los ceros representan la imposibilidad de ir de un estado absorbente hacia un estado transitorio.

Ahora la matriz de transición entre estados transitorios, Q_1 está dada por:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

donde q_{ij} denota la probabilidad de transición de un paso de un estado i a un estado j

$$q_{i1} = \sum_{j=0}^{\lfloor WL_i \rfloor} \frac{e^{-m_i \lambda_1} * (m_i \lambda_1)^j}{j!} \quad (5.18)$$

$$q_{i2} = \sum_{j=\lfloor WL_i \rfloor + 1}^{\lfloor UCL_i \rfloor} \frac{e^{-m_i \lambda_1} * (m_i \lambda_1)^j}{j!} \quad (5.19)$$

$$q_{i3} = 1 - q_{i1} - q_{i2} \quad (5.20)$$

De las propiedades elementales de las cadenas de Markov se obtiene ARL_1 :

$$ARL_1 = b^T [I - Q_1]^{-1} \vec{1} \quad (5.21)$$

donde $b^T = [\pi \quad 1 - \pi]$ es el vector de probabilidades de estado inicial en el ultimo instante del proceso bajo control, I es la matriz identidad de orden 2, Q_0 es la matriz de

transición cuando el proceso está bajo control y $\mathbf{1}$ es un vector de unos.

5.1.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico de Control VSS-C

En el próximo capítulo, el desempeño del gráfico VSS-C será comparado con el desempeño del gráfico DS-C, para ello se requiere optimizar los parámetros del gráfico VSS-C bajo las mismas condiciones que fue optimizado el gráfico DS-C. La optimización del gráfico VSS-C se desarrolló a partir de un Algoritmo Genético implementado en el software R, usando la librería GA. Ver (ApéndiceB).

La optimización de los parámetros del gráfico VSS-C fueron obtenidos para los mismos valores de α^* , λ_0 , ASS^* y γ^* usados en la optimización del gráfico DS-C en el capítulo anterior:

- $\alpha^* \leq 0.005, 0.0027, 0.002$
- $\lambda_0 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0$
- $ASS^* = 1$
- $\gamma^* = 1.5, 2.0, 3.0$

Recordando que γ^* es el factor de aumento $\gamma = \lambda_1/\lambda_0$ para el cual el ARL_1 fue optimizado.

Optimizar el rendimiento del gráfico de control VSS-C, equivale a encontrar el conjunto de parámetros de diseño que garantizan la minimización del ARL_1 , mientras la probabilidad de riesgo de tipo I (α) y el ASS no superan los niveles máximo permitido (α^* ; ASS^*).

Este problema de optimización puede considerarse como un problema mono-objetivo en el que:

Dado $(\alpha^*, ASS^*, \lambda_0, \lambda_1)$, es deseable encontrar los valores de los parámetros (m_1, m_2) y $(WL_1, UCL_1, WL_2, UCL_2)$ que minimizan:

$$min : ARL_1 \tag{5.22}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$ASS \leq ASS^* \tag{5.23}$$

$$\alpha \leq \alpha^* \tag{5.24}$$

Además, el operador puede localizar un conjunto de restricciones que limitan el rango de búsqueda para las fracciones de tamaño de muestra $(m_1; m_2)$, adaptándolos a las condiciones específicas del proceso, tales como las limitaciones de la conformación de la muestra y los costos de muestreo.

$$m_{1_{min}} \leq m_1 \leq m_{1_{max}} \quad (5.25)$$

$$m_2 \leq m_{2_{max}} \quad (5.26)$$

En las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 se presentan los parámetros de diseño del gráfico de control VSS-C optimizados bajo las condiciones λ_0 y γ^* , además de los correspondientes ARL_0 y ARL_1 . Con el fin de garantizar que la comparación de rendimiento entre el gráfico VSS-C y el gráfico DS-C se lleva a cabo bajo condiciones lógicas de producción, se han impuesto las mismas restricciones empleadas en el proceso de optimización del gráfico DS-C. Como se mencionó anteriormente esto se hace con la finalidad de limitar el rango de variación de las fracciones de tamaño de muestra m_1 y m_2 , como se observa en las ecuaciones (5.25) y (5.26). Las restricciones para las fracciones de tamaño de muestra son: $0.2 \leq m_1 \leq 0.8$ y $m_2 \leq 5$.

Tabla 5.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$.

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	WL_2	UCL_2	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	0.27	4.58	0.5	3.5	2.5	5.5	201.17	25.55
	2.0	0.27	4.58	0.5	3.5	2.5	5.5	201.17	8.97
	3.0	0.34	4.51	0.5	2.5	3.5	5.5	201.48	3.89
1.0	1.5	0.48	4.45	1.5	4.5	4.5	8.5	201.13	15.10
	2.0	0.52	4.55	1.5	5.5	5.5	8.5	201.17	5.66
	3.0	0.35	2.61	0.5	4.5	3.5	6.5	200.73	2.71
1.5	1.5	0.38	4.88	1.5	5.5	8.5	12.5	202.22	10.90
	2.0	0.44	3.73	1.5	5.5	6.5	10.5	207.51	4.28
	3.0	0.34	2.40	0.5	3.5	5.5	8.5	200.02	2.18
2.0	1.5	0.50	4.93	2.5	6.5	10.5	15.5	200.69	8.71
	2.0	0.39	3.46	1.5	5.5	8.5	12.5	200.26	3.55
	3.0	0.71	2.48	2.5	5.5	7.5	10.5	201.57	1.90

Continúa en la página siguiente

Tabla 5.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	WL_2	UCL_2	ARL_0	ARL_1
3.0	1.5	0.38	4.76	2.5	6.5	15.5	21.5	202.63	6.39
	2.0	0.48	3.34	2.5	8.5	12.5	16.5	203.43	2.86
	3.0	0.79	1.87	3.5	7.5	8.5	11.5	202.84	1.58
4.0	1.5	0.32	4.42	2.5	6.5	20.5	26.5	203.68	5.63
	2.0	0.42	3.12	2.5	6.5	16.5	20.5	200.87	2.42
	3.0	0.78	1.90	4.5	8.5	10.5	15.5	200.50	1.38

Tabla 5.2: Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$.

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	WL_2	UCL_2	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	0.62	4.50	1.5	4.5	1.5	5.5	376.82	34.02
	2.0	0.69	4.81	1.5	4.5	2.5	5.5	376.52	11.55
	3.0	0.30	4.91	0.5	2.5	3.5	6.5	418.18	4.24
1.0	1.5	0.45	4.66	1.5	5.5	4.5	9.5	373.36	18.87
	2.0	0.51	4.65	1.5	4.5	5.5	9.5	380.86	6.21
	3.0	0.27	3.62	0.5	4.5	5.5	8.5	380.04	2.83
1.5	1.5	0.34	4.90	1.5	5.5	7.5	13.5	376.87	12.90
	2.0	0.42	4.42	1.5	5.5	8.5	12.5	372.98	4.58
	3.0	0.52	3.13	1.5	4.5	6.5	10.5	373.41	2.30
2.0	1.5	0.50	4.90	2.5	6.5	10.5	16.5	374.14	10.13
	2.0	0.36	4.33	1.5	7.5	11.5	15.5	384.58	3.78
	3.0	0.65	3.16	2.5	5.5	9.5	13.5	371.41	2.02
3.0	1.5	0.38	4.73	2.5	7.5	15.5	22.5	372.42	7.18
	2.0	0.48	3.33	2.5	7.5	12.5	17.5	377.58	3.00
	3.0	0.74	2.34	3.5	7.5	12.5	14.5	372.60	1.67
4.0	1.5	0.45	5.00	3.5	8.5	23.5	29.5	372.35	5.74
	2.0	0.27	3.15	1.5	8.5	16.5	21.5	387.77	2.55
	3.0	0.80	1.77	4.5	9.5	10.5	14.5	377.70	1.47

Tabla 5.3: Parámetros y rendimiento del gráfico de control VSS-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$

λ_0	γ^*	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	WL_2	UCL_2	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	0.65	4.21	1.50	5.50	1.50	5.50	500.00	40.81
	2.0	0.24	4.81	0.50	3.50	2.50	6.50	522.76	11.86
	3.0	0.30	4.84	0.50	3.50	3.50	6.50	535.90	4.32
1.0	1.5	0.33	5.00	1.50	4.50	3.50	10.50	520.07	21.54
	2.0	0.52	4.47	1.50	5.50	5.50	9.50	512.70	6.65
	3.0	0.61	3.65	1.50	4.50	5.50	8.50	505.27	2.91
1.5	1.5	0.58	4.94	2.50	6.50	7.50	13.50	528.47	14.72
	2.0	0.39	4.72	1.50	7.50	8.50	13.50	520.44	4.77
	3.0	0.50	3.39	1.50	4.50	7.50	11.50	506.21	2.36
2.0	1.5	0.48	4.72	2.50	6.50	9.50	16.50	501.29	11.25
	2.0	0.36	4.09	1.50	5.50	10.50	15.50	566.37	3.98
	3.0	0.63	3.52	2.50	5.50	10.50	15.50	506.75	2.08
3.0	1.5	0.52	4.69	3.50	9.50	14.50	22.50	501.27	7.79
	2.0	0.46	3.77	2.50	8.50	14.50	19.50	508.30	3.07
	3.0	0.71	2.64	3.50	7.50	13.50	16.50	518.62	1.71
4.0	1.5	0.32	4.78	2.50	11.50	22.50	29.50	517.22	6.02
	2.0	0.41	3.11	2.50	8.50	15.50	21.50	504.58	2.61
	3.0	0.79	1.98	4.50	9.50	14.50	16.50	522.11	1.50

5.2. Gráfico de Control EWMA-C

5.2.1. Descripción del gráfico de control EWMA-C

El gráfico EWMA-C es similar al gráfico EWMA para variables continuas expuesto en el capítulo 2.1. Supóngase un proceso en el cual el número de no conformidades por unidad de inspección de tamaño k , sigue una distribución de Poisson, con un promedio histórico de λ_0 , cuando el proceso está bajo control y si están presentes causas especiales de variación, implicaría un aumentando el número medio de no conformidades $\lambda = \lambda_1$ ($\lambda_1 > \lambda_0$). Si la diferencia de λ_1 con respecto a λ_0 es significativamente pequeña y se deseara identificar rápidamente este cambio, se propone el uso del gráfico de control EWMA introducido por Roberts (1959) y que define:

$$Z_0 = \lambda_0 \tag{5.27}$$

y

$$Z_t = r * X_t + (1 - r)Z_{t-1} \quad (5.28)$$

donde $t = 1, 2, \dots$ y $0 < r \leq 1$

dada la anterior definición se muestra:

$$E(Z_t) = \lambda_0 \quad (5.29)$$

y

$$Var(Z_t) \approx \frac{r}{2-r} [1 - (1-r)^{2t}] \lambda_0 \quad (5.30)$$

Para valores grandes de t , la varianza se aproxima a:

$$Var(Z_t) \approx \frac{r}{2-r} \quad (5.31)$$

Los límites de control EWMA-C están basados en la expresión 5.31, y se denotan a continuación:

$$h_L = \lambda_0 - L \sqrt{\frac{r\lambda_0}{2-r}} \quad (5.32)$$

$$h_U = \lambda_0 + L \sqrt{\frac{r\lambda_0}{2-r}} \quad (5.33)$$

Sea el límite inferior de control h_L y el límite superior de control h_U , se determina que el proceso está fuera de control cuando $Z_t > h_U$ o $Z_t < h_L$ y que estará bajo control cuando $h_L < Z_t < h_U$. Como en la investigación se está estudiando el caso referente al aumento del número de no conformidades, solo se analizará el gráfico EWMA-C unilateral superior, luego $h_L = 0$.

5.2.2. Medidas de desempeño del gráfico de control EWMA-C

Para calcular los ARL , Borrór et al. (1998) dividen los intervalos (h_L, h_U) en N subintervalos, que corresponden a los N estados transitorios de la cadena de Markov, como se

muestra en la figura 5.2.

Los límites del j -ésimo subintervalo está dado por (L_j, U_j) , $j = 1, 2, \dots, N$

$$L_j = h_L + \frac{(j-1)(h_U - h_L)}{N} \quad (5.34)$$

$$U_j = h_L + \frac{j(h_U - h_L)}{N} \quad (5.35)$$

Y el punto medio, m_i , del i -ésimo intervalo puede calcularse así:

$$m_i = h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N} \quad (5.36)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$

El $(N+1)$ estado, es absorbente y representa la región fuera de control.

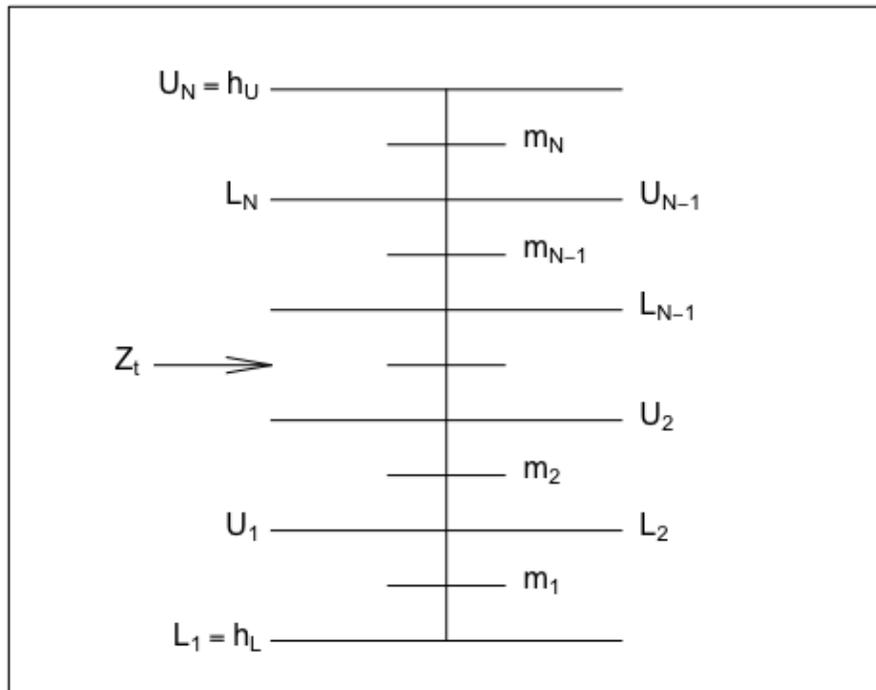


Figura 5.2: Estados transitorios de la cadena de Markov, gráfico EWMA-C.

Si el estadístico Z_t cae en el intervalo $(0, h_U]$, entonces, Z_t pertenece a uno de los N subintervalos definidos, los cuales corresponden a los estados transitorios de la cadena de

Markov. Cuando $Z_t > h_U$, Z_t pertenece al $(N + 1)$ estado absorbente.

La probabilidad de transición, p_{ij} , es la probabilidad de pasar de un estado i a un estado j en un paso y está dada por:

$$p_{ij} = P(L_j \leq Z_t < U_j \mid Z_{t-1} = m_i) \quad (5.37)$$

Esta es la probabilidad de que Z_t esté dentro de los límites del estado j , condicionado a que Z_{t-1} sea igual al punto medio del estado i . esta probabilidad de transición se puede escribir como:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(L_j \leq rX_t < U_j + (1-r)Z_{t-1} < U_j \mid Z_{t-1} = m_i) \\ &= P(L_j \leq rX_t < U_j + (1-r)m_i < U_j) \\ &= P\left(h_L + \frac{(j-1)(h_U - h_L)}{N} \right. \\ &\quad \left. < rX_t + (1-r)\left(h_L + \frac{(2i-1)(h_U - h_L)}{2N}\right) \right. \\ &\quad \left. \leq h_L + \frac{j(h_U - h_L)}{N}\right) \\ &= P\left(h_L + \frac{h_U - h_L}{2Nr}(2(j-1) - (1-r)(2i-1)) \right. \\ &\quad \left. < X_t < h_L + \frac{h_U - h_L}{2Nr}(2j - (1-r)(2i-1))\right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

La variable aleatoria X_t (número de no conformidades) toma solo valores enteros con una distribución de Poisson y dado que por lo general los límites no son enteros, tenemos:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\left(X_t \leq \left\lfloor h_L + \frac{h_U - h_L}{2Nr}(2j - (1-r)(2i-1)) \right\rfloor \right) \\ &\quad - P\left(X_t \leq \left\lfloor h_L + \frac{h_U - h_L}{2Nr}(2(j-1) - (1-r)(2i-1)) \right\rfloor \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Denote R_i como un *ARL* dado cuando el proceso empieza en el estado i , esto es:

$$Z_0 = m_i \quad (5.40)$$

entonces Borrór et al. (1998) define el vector, $R = [R_1, R_2, \dots, R_N]^T$, donde los elementos del vector R son los *ARL* de cada estado transitorio.

Considere ahora la matriz de transición P ,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} & p_{1,N+1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} & p_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} & p_{N,N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

al eliminar la fila $(N + 1)$ y la columna $(N + 1)$ de dicha matriz, se obtendrá la matriz Q que será la matriz de transición entre los estados transitorios.

$$Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Brook and Evans (1972), demostró que el vector de *ARL*, R es la solución del sistema.

$$(I - Q)R = \vec{1} \quad (5.43)$$

donde I es la matriz identidad de orden $N \times N$ y $\vec{1}$ es un vector de unos de orden $N \times 1$. entonces se puede calcular el *ARL* para el gráfico EWMA-C solucionando el anterior sistema lineal. Los elementos en el vector R son solo los *ARL* que comienzan en los diversos estados.

El *ARL* dado que $Z_o = \lambda_0$ es el punto medio, que es la entrada $((N + 1)/2)$ -ésimo en el vector R . Se debe elegir N impar para que haya un valor medio único (Borrór et al., 1998).

El ARL_0 para el gráfico de control EWMA-C viene dado por:

$$ARL_0 = b^T [I - Q_0]^{-1} \vec{1} \quad (5.44)$$

donde $b^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$, donde b^T es el vector de probabilidades de estado inicial, de manera tal que el valor 1 ocupa la posición correspondiente a la línea central del proceso cuando este está bajo control, $Z_0 = \lambda_0$. Las probabilidades de la matriz Q_0 son calculadas cuando $\lambda = \lambda_0$.

El ARL_1 , o el ARL fuera de control suponiendo que el cambio en el proceso ocurre inmediatamente después de iniciar el monitoreo con el gráfico, es decir que el proceso empieza fuera de control, es conocido como ARL_1 *zero-state* y está dado por:

$$ARL_1^{zs} = b^T [I - Q_1]^{-1} \vec{1} \quad (5.45)$$

donde $b^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$ y las probabilidades de la matriz Q_1 son calculadas cuando $\lambda = \lambda_1$.

En la mayoría de los casos prácticos, realmente no se sabe cuando ocurre un cambio en el proceso. Si se tiene en cuenta que los esquemas de control se implementan bajo la certeza que el proceso está operando de manera estable y bajo control, la probabilidad de que ocurra un cambio inmediatamente después de iniciar del monitoreo con el gráfico, es muy remota. Lo más común es que si ha de presentarse un cambio en el proceso, este cambio ocurra después de un período suficientemente largo posterior al inicio del monitoreo con el gráfico, por lo que los estadísticos de monitoreo pueden no ser cero cuando ocurre el cambio; de hecho, tiene una distribución sobre sus valores posibles llamada distribución de estado estacionario. Crosier (1986) propuso el concepto de ARL_1 *steady-state*, es decir, el promedio ponderado de los ARL dados los valores iniciales de los estadísticos de monitoreo, utilizando la distribución de estado estacionario de los valores de las estadísticas de monitoreo como ponderaciones. ARL_1 *steady-state* está dado por:

$$ARL_1^{ss} = s^T [I - Q_1]^{-1} \vec{1} \quad (5.46)$$

donde las probabilidades de la matriz Q_1 son calculadas cuando $\lambda = \lambda_1$ y $s^T = [p_i]$, que es el vector de probabilidades de la posición del estadístico Z_t en el instante en que ocurre el cambio y está dado por:

$$s^T = \frac{b^T [I - Q_0]^{-1}}{ARL_0} \quad (5.47)$$

en otras palabras, s^T es el vector de probabilidades de los estados antes del cambio en el proceso y el vector $b^T [I - Q_0]^{-1}$, proporciona el tiempo medio en cada estado antes de la absorción.

Lucas and Saccucci (1990) proporcionan los ARL^{ss} Y ARL^{zs} para EWMA basados en la distribución normal, concluyendo que el ARL^{ss} es frecuentemente menor que el ARL^{zs} y que la diferencia entre ellos se incrementa en la medida que r disminuye. En la literatura, se puede evidenciar que los diferentes autores comparten la idea de que el rendimiento partiendo de *steady-state* de un esquema de control a menudo es una medida más significativa que el rendimiento partiendo de *zero-state*, sin embargo en este trabajo se

optimizará el gráfico EWMA en favor de ambos ARL_1 con el fin de hacer la comparación más generalizada.

5.2.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico EWMA-C

En el próximo capítulo, el desempeño del gráfico EWMA-C será comparado con el desempeño del gráfico DS-C y el gráfico VSS-C, para ello se requiere optimizar los parámetros del gráfico EWMA-C bajo las mismas condiciones que fue optimizado el gráfico DS-C y el gráfico VSS-C. La optimización del gráfico EWMA-C se desarrolló a partir de un algoritmo que recorre un mado exhaustivo de todos los posibles valores que podía toma r y h_U , dicho algoritmo fue implementado en el software R. Cabe destacar que no se utilizó un Algoritmo Genético como en los anteriores gráficos debido a los tiempos computacionales que este invertía sin generar mejoras en las soluciones que arrojaba el algoritmo de mado.

La optimización de los parámetros del gráfico EWMA-C fueron obtenidos para los mismos valores de α^* , n , λ_0 y γ^* usados en la optimización del gráfico DS-C y VSS-C:

- $\alpha^* \leq 0.005, 0.0027, 0.002$
- $\lambda_0 = 0.5, 1, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0$
- $n = 1$
- $\gamma^* = 1.5, 2.0, 3.0$

Recordando que γ^* es el factor de aumento $\gamma = \lambda_1/\lambda_0$ para el cual el ARL_1 fue optimizado.

Optimizar el rendimiento del gráfico de control EWMA-C, equivale a encontrar el conjunto de parámetros de diseño que garantizan la minimización del ARL_1 , mientras la probabilidad de riesgo de tipo I se mantiene igual o inferior al de diseño (α^*).

Este problema de optimización puede considerarse como un problema mono-objetivo en el que:

Dado $(\alpha^*, n, \lambda_0, \lambda_1)$, es deseable encontrar los valores de los parámetros (r, h_U) que minimizan ARL_1 , esto es:

$$\min : ARL_1 \tag{5.48}$$

Sujeto a la siguiente restricción:

$$\alpha \leq \alpha^* \tag{5.49}$$

En las tablas 5.4, 5.5 y 5.6, se presentan los parámetros de diseño del gráfico de control EWMA-C optimizados bajo las condiciones de λ_0 y γ^* , en ambos estados *steady-state* y *zero-state*, además de sus correspondientes ARL_0 y ARL_1 .

Tabla 5.4: Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$.

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			h_u	r	ARL_0	ARL_1	h_u	r	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	1.0	0.68	0.04	201.22	27.28	0.68	0.04	201.22	26.10
	2.0	1.0	0.86	0.09	210.13	12.73	0.68	0.04	201.22	12.30
	3.0	1.0	1.16	0.20	200.01	5.59	1.11	0.18	203.25	5.50
1.0	1.5	1.0	1.36	0.06	207.19	18.35	1.25	0.04	204.77	17.65
	2.0	1.0	1.72	0.15	202.78	8.00	1.72	0.15	202.78	7.96
	3.0	1.0	2.12	0.27	203.92	3.51	1.96	0.22	203.58	3.50
1.5	1.5	1.0	2.19	0.11	201.00	14.20	1.74	0.03	215.47	13.68
	2.0	1.0	2.61	0.21	201.54	6.08	2.49	0.18	204.38	6.04
	3.0	1.0	2.84	0.27	204.81	2.71	2.77	0.25	202.40	2.70
2.0	1.5	1.0	2.84	0.12	201.41	11.79	2.62	0.08	201.44	11.66
	2.0	1.0	3.40	0.24	203.80	5.00	3.31	0.22	204.19	4.99
	3.0	1.0	3.57	0.28	203.78	2.28	3.57	0.28	203.78	2.24
3.0	1.5	1.0	4.12	0.14	200.83	9.03	3.89	0.10	206.81	9.03
	2.0	1.0	4.88	0.28	201.87	3.79	4.73	0.25	201.67	3.75
	3.0	1.0	4.88	0.28	201.87	1.82	4.88	0.28	201.87	1.77
4.0	1.5	1.0	5.57	0.18	201.29	7.46	5.37	0.15	204.39	7.50
	2.0	1.0	6.10	0.27	207.47	3.16	6.03	0.26	205.82	3.14
	3.0	1.0	6.10	0.27	207.47	1.59	6.03	0.26	205.82	1.54

Tabla 5.5: Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$.

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			h_u	r	ARL_0	ARL_1	h_u	r	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	1.0	0.68	0.03	387.87	35.73	0.68	0.03	387.87	34.95
	2.0	1.0	0.84	0.07	374.65	15.29	0.84	0.07	374.65	15.22
	3.0	1.0	1.19	0.18	370.77	6.48	1.28	0.21	371.42	6.52
1	1.5	1.0	1.52	0.08	377.44	23.07	1.31	0.04	375.74	22.58
	2.0	1.0	1.74	0.13	383.14	9.52	1.66	0.11	384.48	9.54
	3.0	1.0	2.08	0.22	388.78	4.02	2.12	0.23	394.89	3.98
1.5	1.5	1.0	2.07	0.07	382.35	17.50	2.07	0.07	382.35	17.54
	2.0	1.0	2.53	0.16	370.47	7.07	2.53	0.16	370.47	7.09
	3.0	1.0	2.83	0.23	377.05	3.05	2.83	0.23	377.05	3.07
2.0	1.5	1.0	2.84	0.10	372.02	14.27	2.84	0.10	372.02	14.30
	2.0	1.0	3.42	0.21	374.14	5.76	3.33	0.19	378.47	5.79
	3.0	1.0	3.57	0.24	392.97	2.57	3.42	0.21	374.14	2.56
3.0	1.5	1.0	4.09	0.11	371.30	10.78	4.09	0.11	371.30	10.84
	2.0	1.0	4.86	0.24	370.59	4.31	4.86	0.24	370.59	4.33
	3.0	1.0	4.86	0.24	370.59	2.03	4.86	0.24	370.59	1.99
4.0	1.5	1.0	5.32	0.12	372.93	8.82	5.32	0.12	372.93	8.85
	2.0	1.0	6.07	0.23	389.07	3.59	6.01	0.22	383.37	3.62
	3.0	1.0	6.07	0.23	389.07	1.77	6.01	0.22	383.37	1.81

Tabla 5.6: Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$.

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			h_u	r	ARL_0	ARL_1	h_u	r	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	1.0	0.70	0.03	533.39	40.43	0.70	0.03	533.39	40.20
	2.0	1.0	0.94	0.09	511.56	16.85	0.83	0.06	533.72	16.89
	3.0	1.0	1.35	0.22	502.61	7.00	1.04	0.12	502.72	6.97

Continúa en la página siguiente

Tabla 5.6: Parámetros y rendimiento del gráfico de control EWMA-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			h_u	r	ARL_0	ARL_1	h_u	r	ARL_0	ARL_1
1	1.5	1.0	1.45	0.06	508.12	25.15	1.45	0.06	508.12	25.55
	2.0	1.0	1.78	0.13	506.80	10.23	1.78	0.13	506.80	10.27
	3.0	1.0	2.14	0.22	524.66	4.24	2.02	0.19	518.25	4.29
1.5	1.5	1.0	2.16	0.08	504.96	19.06	2.16	0.08	504.96	19.23
	2.0	1.0	2.53	0.15	508.63	7.62	2.53	0.15	508.63	7.66
	3.0	1.0	2.81	0.21	508.25	3.24	2.81	0.21	508.25	3.21
2.0	1.5	1.0	2.76	0.08	507.10	15.60	2.70	0.07	514.55	15.59
	2.0	1.0	3.49	0.21	502.00	6.16	33.49	0.21	502.00	6.22
	3.0	1.0	3.49	0.21	502.00	2.71	3.55	0.22	527.88	2.75
3.0	1.5	1.0	4.15	0.11	508.48	11.67	4.15	0.11	508.48	11.75
	2.0	1.0	4.85	0.22	507.22	4.60	4.85	0.22	507.22	4.65
	3.0	1.0	4.85	0.22	507.22	2.15	4.85	0.22	507.22	2.16
4.0	1.5	1.0	5.47	0.13	509.66	9.51	5.47	0.13	509.66	9.55
	2.0	1.0	6.10	0.22	508.04	3.78	6.04	0.21	519.13	3.83
	3.0	1.0	6.10	0.22	508.04	1.85	6.04	0.21	519.13	1.84

5.3. Gráfico de Control CUSUM-C

5.3.1. Descripción del gráfico de control CUSUM-C

El gráfico CUSUM-C es similar al gráfico CUSUM para variables continuas expuesto en el capítulo 2.1. Supóngase un proceso en el cual el número de no conformidades por unidad de inspección de tamaño k , sigue una distribución de Poisson, con un promedio histórico de $\lambda = \lambda_0$ cuando el proceso está bajo control y, si están presentes causas especiales de variación, implicaría un aumento en el número medio de no conformidades $\lambda = \lambda_1$. Si la diferencia de λ_1 con respecto a λ_0 es significativamente pequeña y se deseara identificar rápidamente este cambio, se propone el uso del gráfico de control CUSUM para observaciones discretas sugerido inicialmente por Brook and Evans (1972), posteriormente analizado por Lucas (1985) y codificado primeramente para el cálculo del ARL por White and Keats (1996).

El gráfico CUSUM para C se analiza de dos formas, dependiendo de si se quiere detectar un aumento o una disminución en la media de no conformidades (λ). En el caso donde los cambios en λ en cualquier dirección sean importantes, ambas formas se emplearían simultáneamente. Si hay interés en detectar el aumento del número de no conformidades,

caso de interés, el estadístico CUSUM está determinado por:

$$C_t^+ = \max(0, C_{t-1}^+ + X_t - k) \quad (5.50)$$

donde C_t es la suma acumulada de las diferencias de las muestras anteriores, X_t ; es el número de no conformidades en la t -ésima muestra, y k se llama valor de referencia. Dado que C nunca puede ser negativo, $C_0 = 0$ el proceso permanece bajo control si las muestras caen entre cero y el límite de intervalo de decisión, H . El CUSUM-C está diseñado para distinguir entre una tasa media, λ_0 , y una tasa media, λ_1 . En esta Tesis el principal interés es detectar solo los aumentos en el número de no conformidades, solo se analizara el gráfico CUSUM-C unilateral superior, entonces el gráfico CUSUM señalizara que el proceso está fuera de control cuando $C_i > H$.

Los valores de k y H se deben escoger de tal manera, que el gráfico CUSUM tenga un buen desempeño en términos de ARL .

El valor de referencia k viene dado por:

$$k = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\ln(\lambda_1/\lambda_0)} \quad (5.51)$$

El gráfico CUSUM para C ha sido comparado con el gráfico clásico C de parámetros fijo en White et al. (1997), donde demuestra su superioridad, detectando cambios pequeños en un proceso de producción en condiciones normales de operación.

5.3.2. Medidas de desempeño del gráfico de control CUSUM-C

Para calcular los ARL aproximados del gráfico de control CUSUM-C será utilizado el modelo expuesto por Gan (1993) y recientemente por De Araújo Rodrigues et al. (2011), donde usan el enfoque de Markov sugerido por Brook and Evans (1972).

Defina el gráfico CUSUM con $k = a/b$ y $H = c/b$ donde a , b , y c son enteros positivos. Los estados transitorios de la cadena de Markov son representado por los valores que el estadístico CUSUM (C_t) puede tomar cuando el proceso se considera bajo control, $0 \leq C_i \leq H = c/b$. Dado lo anterior, los posibles valores de C_t son $\{0, 1/b, 2/b, \dots, c/b\}$, si $C_t > c/b$, entonces el proceso se considera fuera de control y se dice que S_t está en estado absorbente. Ver figura 5.3.

Siendo N el número de estados transitorios, entonces $N = bH = c + 1$.

Para facilidad computacional, los estados transitorios de la cadena de Markov, son renombrados como $\{1, 2, \dots, c + 1\}$, que corresponde a $\{C_t = i/b, \quad i = 0, 1, 2, \dots, c\}$ respectivamente. El estado absorbente es renombrado como estado $c + 2$ y $b = 10$, en la medida que b se incrementa, el número de estados transitorios de la cadena de Markov se

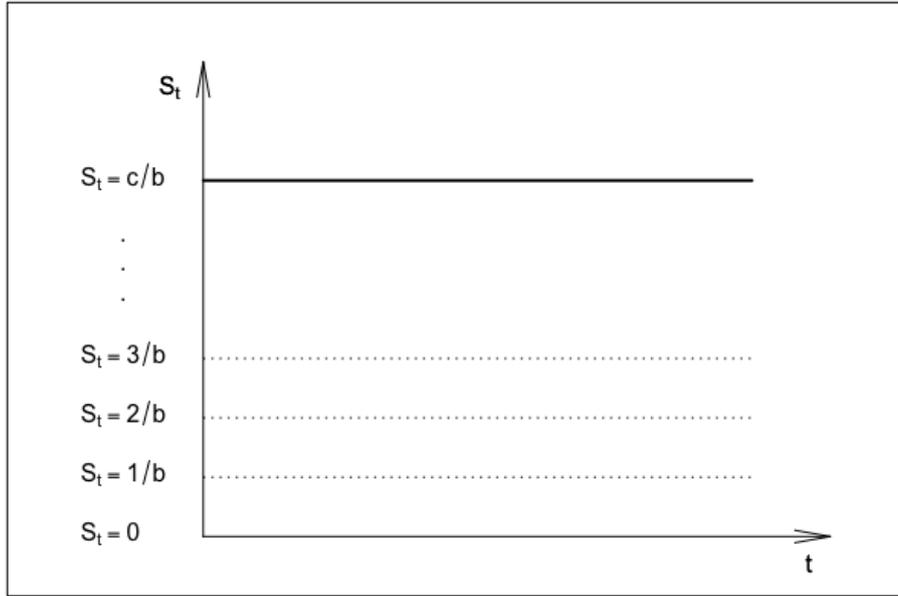


Figura 5.3: Estados transitorios de la cadena de Markov, gráfico CUSUM-C

incrementa, con consecuencias en la dimensión de la matriz, dificultando la ejecución del algoritmo que optimiza.

La matriz de transición de la cadena de Markov para CUSUM-C viene dada por:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,c+1} & p_{1,c+2} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,c+1} & p_{2,c+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_{c+1,1} & p_{c+1,2} & \cdots & p_{c+1,c+1} & p_{c+1,c+2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

al eliminar la fila $(c + 2)$ y la columna $(c + 2)$ de dicha matriz, se obtendrá la matriz Q que vendrá a ser la matriz de transición entre los estados bajo control.

$$Q = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,c+1} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,c+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{c+1,1} & p_{c+1,2} & \cdots & p_{c+1,c+1} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

donde p_{ij} denota la probabilidad de pasar de un estado i a un estado j en un paso, y su cálculo se desarrolla usando la distribución de probabilidad de Poisson. Los valores de p_{ij} parten del cálculo del rendimiento en estado inicial, esto es $C_t = 0$:

para $(i = 1, 2, \dots, c + 1 \quad y \quad j = 1)$:

$$p_{i1} = Pr\left(C_t = 0 \mid C_{t-1} = \frac{i-1}{b}\right) \quad (5.54)$$

$$p_{i1} = Pr(C_t \leq 0) \quad (5.55)$$

de la ecuación 5.50 se tiene:

$$p_{i1} = Pr(C_{t-1} + X_t - k \leq 0) \quad (5.56)$$

$$p_{i1} = Pr(X_t \leq k - C_{t-1}) \quad (5.57)$$

como sabemos que $k = a/b$, $S_t = 0$ y $S_{t-1} = (i-1)/b$, entonces:

$$p_{ij} = \begin{cases} Pr(X_t \leq (a-i+1)/b) & \text{si } 0 \leq (a-i+1)/b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.58)$$

Una vez se obtiene la matriz de transición Q , el cálculo de los ARL para CUSUM-C serán calculados de igual manera que se calcularon los ARL para EWMA-C.

El ARL_0 para el gráfico de control CUSUM-C viene dado por:

$$ARL_0 = b^T [I - Q_0]^{-1} \mathbf{1} \quad (5.59)$$

donde $b^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$, de manera tal que el valor 1 ocupa la posición correspondiente a la línea central del proceso cuando este está bajo control. Las probabilidades de la matriz Q_0 son calculadas cuando $\lambda = \lambda_0$.

El ARL_1 , o ARL fuera de control suponiendo que el cambio en el proceso ocurre al iniciar del monitoreo, es decir que el proceso empieza fuera de control, es conocido como ARL_1 *zero-state* y está dado por:

$$ARL_1^{zs} = b^T [I - Q_1]^{-1} \mathbf{1} \quad (5.60)$$

donde $b^\top = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]$ y las probabilidades de la matriz Q_1 son calculadas cuando $\lambda = \lambda_1$.

Así como en el gráfico EWMA, el ARL_1 del gráfico CUSUM puede ser calculado de manera diferente; haciendo la asunción de que el cambio en realidad no ocurre al inicio, sino que ocurre a lo largo del proceso, cuando este ya está siendo operado bajo control estadístico, este será el caso de rendimiento *steady-state* y se define así:

$$ARL_1^{ss} = s^\top [I - Q_1]^{-1} \vec{1} \quad (5.61)$$

donde las probabilidades de la matriz Q_1 son calculadas cuando $\lambda = \lambda_1$ y $s^\top = [p_i]$, que es el vector de probabilidades de la posición del estadístico C_t en el instante en que ocurre el cambio y está dado por:

$$s^\top = \frac{b^\top [I - Q_0]^{-1}}{ARL_0} \quad (5.62)$$

donde s^\top es el vector de probabilidades de los estados antes del cambio en el proceso y el vector $b^\top [I - Q_0]^{-1}$ proporciona el tiempo medio en cada estado antes de la absorción.

5.3.3. Diseños Óptimos y ARL del Gráfico CUSUM-C

El desempeño del gráfico CUSUM-C será comparado con el desempeño del gráfico DS-C, por lo que se requiere optimizar los parámetros del gráfico CUSUM-C bajo las mismas condiciones que fue optimizado el gráfico DS-C. La optimización del gráfico CUSUM-C se desarrolló a partir de un algoritmo que recorre un mado exhaustivo de todos los posibles valores que podía tomar k y H , dicho algoritmo fue implementado en el software R (Apéndice D). Cabe destacar que no se utilizó un Algoritmo Genético debido a los tiempos computacionales que este invertía sin generar mejoras en las soluciones que arrojaba el algoritmo de mado.

La optimización de los parámetros del gráfico CUSUM-C fueron obtenidos para los mismos valores de α^* , n , λ_0 y γ^* usados en la optimización del gráfico DS-C:

- $\alpha^* \leq 0.005, 0.0027, 0.002$
- $\lambda_0 = 0.5, 1, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0$
- $n = 1$
- $\gamma^* = 1.5, 2.0, 3.0$

Recordando que γ^* es el factor de aumento $\gamma = \lambda_1/\lambda_0$ para el cual el ARL_1 fue optimizado.

Optimizar el rendimiento del gráfico de control CUSUM-C, equivale a encontrar el conjunto de parámetros de diseño que garantizan la minimización del ARL_1 , mientras la probabilidad de riesgo de tipo I (α) no sea superada (α^*) con un tamaño de muestra en unidad de inspección determinado n .

Este problema de optimización puede considerarse como un problema mono-objetivo en el que:

dado $(\alpha^*, n, \lambda_0, \lambda_1)$, es deseable encontrar los valores de los parámetros (k, H) que minimizan ARL_1 , esto es de manera formal:

$$\min : ARL_1 \tag{5.63}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\alpha \leq \alpha^* \tag{5.64}$$

En las tablas 5.7, 5.8 y 5.9 se presentan los parámetros de diseño obtenidos para el gráfico de control CUSUM-C, bajo las condiciones λ_0 , γ^* y los correspondientes ARL_0 y ARL_1 .

Tabla 5.7: Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$.

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			H	k	ARL_0	ARL_1	H	k	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	1.0	9.20	0.50	203.75	27.55	5.80	0.60	214.73	31.85
	2.0	1.0	4.40	0.70	208.67	12.77	4.40	0.70	208.67	14.08
	3.0	1.0	3.70	0.80	219.61	5.70	3.20	0.90	216.67	6.08
1.0	1.5	1.0	8.80	1.10	200.28	18.08	6.80	1.20	200.25	20.56
	2.0	1.0	5.80	1.30	213.45	8.09	3.80	1.60	202.96	8.84
	3.0	1.0	3.80	1.60	202.96	3.47	3.80	1.60	202.96	3.72

Continúa en la página siguiente

Tabla 5.7: Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.005$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			H	k	ARL_0	ARL_1	H	k	ARL_0	ARL_1
1.5	1.5	1.0	9.10	1.70	204.69	14.19	6.50	1.90	200.51	15.91
	2.0	1.0	5.30	2.10	208.56	6.10	5.30	2.10	208.56	6.56
	3.0	1.0	3.70	2.50	201.25	2.60	3.70	2.50	201.25	2.72
2.0	1.5	1.0	8.00	2.40	202.77	11.79	8.00	2.40	202.77	13.20
	2.0	1.0	6.50	2.60	203.66	4.98	5.50	2.80	211.51	5.37
	3.0	1.0	4.50	3.10	206.06	2.17	4.50	3.10	206.06	2.26
3.0	1.5	1.0	8.60	3.60	200.47	8.96	7.90	3.70	203.47	9.96
	2.0	1.0	5.80	4.10	211.99	3.77	5.00	4.40	202.77	3.94
	3.0	1.0	3.80	5.10	221.64	1.66	3.80	5.10	221.64	1.68
4.0	1.5	1.0	9.10	4.80	201.10	7.10	8.40	4.90	201.18	8.11
	2.0	1.0	5.40	5.70	200.09	2.94	5.40	5.70	200.09	3.18
	3.0	1.0	3.20	6.80	200.06	1.39	3.20	6.80	200.06	1.41

Tabla 5.8: Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$.

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			H	k	ARL_0	ARL_1	H	k	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	1.0	7.3	0.60	399.92	35.94	7.30	0.60	399.92	40.89
	2.0	1.0	5.2	0.70	372.69	15.24	5.20	0.70	372.69	16.80
	3.0	1.0	4.2	0.80	378.74	6.47	4.20	0.80	378.74	7.00
1.0	1.5	1.0	8.4	1.20	387.06	22.89	8.40	1.20	387.06	25.82
	2.0	1.0	5.8	1.40	381.43	9.44	5.80	1.40	381.43	10.26
	3.0	1.0	4.2	1.70	398.38	3.94	4.20	1.70	398.38	4.13
1.5	1.5	1.0	11.1	1.70	370.54	17.33	7.80	1.90	385.41	19.52
	2.0	1.0	6.2	2.10	386.20	7.07	6.20	2.10	386.20	7.59
	3.0	1.0	4.3	2.60	430.31	2.97	4.30	2.60	430.31	3.07

Continúa en la página siguiente

Tabla 5.8: Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.0027$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			H	k	ARL_0	ARL_1	H	k	ARL_0	ARL_1
2.0	1.5	1.0	11.2	2.30	370.54	14.19	9.60	2.40	377.00	15.84
	2.0	1.0	5.7	2.90	373.91	5.72	5.70	2.90	373.91	6.05
	3.0	1.0	4.5	3.30	388.02	2.38	4.50	3.30	388.02	2.45
3.0	1.5	1.0	9.4	3.70	378.41	10.81	9.40	3.70	378.41	11.75
	2.0	1.0	6.1	4.30	376.11	4.24	6.10	4.30	376.11	4.45
	3.0	1.0	4.9	4.70	374.00	1.80	4.90	4.70	374.00	1.84
4.0	1.5	1.0	11.7	4.70	375.11	8.71	9.90	4.90	377.62	9.48
	2.0	1.0	6.6	5.60	379.30	3.43	5.80	5.90	371.68	3.57
	3.0	1.0	5.8	5.90	371.68	1.52	5.80	5.90	371.68	1.55

Tabla 5.9: Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$.

λ_0	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			H	k	ARL_0	ARL_1	H	k	ARL_0	ARL_1
0.5	1.5	1.0	7.90	0.60	514.56	39.44	7.90	0.60	514.60	44.81
	2.0	1.0	5.70	0.70	519.52	16.75	5.70	0.70	519.52	18.39
	3.0	1.0	3.80	0.90	509.34	6.91	3.80	0.90	509.34	7.31
1.0	1.5	1.0	9.20	1.20	530.45	25.30	7.40	1.30	506.96	28.37
	2.0	1.0	7.40	1.30	506.96	10.17	6.40	1.40	569.60	11.26
	3.0	1.0	4.50	1.70	508.03	4.13	3.60	1.90	504.08	4.29
1.5	1.5	1.0	12.20	1.70	505.26	19.09	8.40	1.90	500.31	21.04
	2.0	1.0	6.60	2.10	531.43	7.60	6.00	2.20	534.30	8.13
	3.0	1.0	4.20	2.70	501.66	3.07	4.20	2.70	501.66	3.15
2.0	1.5	1.0	10.50	2.40	509.94	15.45	10.50	2.40	509.94	17.17
	2.0	1.0	7.40	2.70	501.13	6.06	6.30	2.90	521.14	6.49
	3.0	1.0	4.20	3.60	534.00	2.51	4.20	3.60	534.00	2.55

Continúa en la página siguiente

Tabla 5.9: Parámetros y rendimiento del gráfico de control CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y $\alpha^* = 0.002$. (*Continuación*)

$c_0 = \lambda_0$	γ^*	n	<i>steady-state</i>				<i>zero-state</i>			
			H	k	ARL_0	ARL_1	H	k	ARL_0	ARL_1
3.0	1.5	1.0	10.10	3.70	511.43	11.65	10.10	3.7	511.43	12.64
	2.0	1.0	7.50	4.10	511.16	4.49	6.50	4.30	507.83	4.71
	3.0	1.0	3.60	5.60	500.20	1.85	3.60	5.60	500.20	1.87
4.0	1.5	1.0	10.60	4.90	501.21	9.35	10.60	4.90	501.21	10.12
	2.0	1.0	6.60	5.70	503.58	3.61	6.60	5.70	503.58	3.77
	3.0	1.0	5.80	6.10	585.72	1.57	5.80	6.10	585.72	1.59

Capítulo 6

Comparación del gráfico DS-C con los diversos gráficos para C

En este capítulo se hará una comparación del desempeño del gráfico DS-C, con los diferentes gráficos estudiados en el capítulo anterior, incluyendo el gráfico clásico de parámetros fijo FP.

6.1. Comparación del gráfico DS-C con el gráfico de control de parámetros fijos FP

Para establecer que tan eficiente resulta el gráfico DS-C, es necesario compararlo con el rendimiento de gráficos que han sido desarrollados y optimizados en función del mismo objetivo. El gráfico clásico C de parámetros fijos será el escogido para iniciar el análisis comparativo.

La tabla 6.1 presenta los parámetros de diseño obtenidos para los dos gráficos de control (FP-C y DS-C), bajo las condiciones α^* , λ_0 y γ^* y sus correspondientes ARL_0 y ARL_1 .

El indicador $\%ARL_1^{red}$, que se incluye en la columna 11 de la tabla 6.1, evalúa el porcentaje de reducción de ARL_1 obtenido cuando se utiliza el gráfico de control DS-C en lugar del gráfico de control FP-C. Este indicador se calcula como en la ecuación 6.1.

$$\%ARL_1^{red}(Ref, DS - C) = \frac{ARL_1(Ref) - ARL_1(DS - C)}{ARL_1(Ref)} * 100 \% \quad (6.1)$$

Tabla 6.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* y α^* .

λ_0	α^*	γ^*		m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	
0.5	0.005	1.5	FP	1			3.5		570.90	137.13	77.14	
			DS-C	0.32	4.57	0.5	4.5	6.5	200.10	31.35		
		2.0	FP	1				3.5		570.90	52.66	79.50
			DS-C	0.32	4.57	0.5	4.5	6.5	200.10	10.79		
		3.0	FP	1				3.5		570.90	15.23	75.86
			DS-C	0.32	4.57	0.5	4.5	6.5	200.10	3.68		
	0.0027	1.5	FP	1				3.5		570.90	137.13	66.50
			DS-C	0.73	5.00	1.5	5.5	7.5	370.46	45.94		
		2.0	FP	1				3.5		570.90	52.66	73.56
			DS-C	0.73	5.00	1.5	5.5	7.5	370.46	13.92		
		3.0	FP	1				3.5		570.90	15.23	72.62
			DS-C	0.73	5.00	1.5	5.5	7.5	370.46	4.17		
0.002	1.5	FP	1				3.5		570.90	137.13	58.66	
		DS-C	0.31	4.82	0.50	4.50	7.50	500.00	56.68			
	2.0	FP	1				3.5		570.90	52.66	69.71	
		DS-C	0.31	4.82	0.50	4.50	7.50	500.00	15.95			
	3.0	FP	1				3.5		570.90	15.23	71.41	
		DS-C	0.31	4.82	0.50	4.50	7.50	500.00	4.35			
1.0	0.005	1.5	FP	1			4.5		273.24	53.83	64.82	
			DS-C	0.54	4.46	1.5	6.5	10.5	201.87	18.94		
		2.0	FP	1				4.5		273.24	18.99	69.54
			DS-C	0.54	4.46	1.5	6.5	10.5	201.87	5.78		
		3.0	FP	1				4.5		273.24	5.41	60.18
			DS-C	0.58	3.64	1.5	6.5	9.5	200.26	2.16		
	0.0027	1.5	FP	1				5.5		1682.98	224.42	88.28
			DS-C	0.53	4.66	1.5	6.5	11.5	371.99	26.29		
		2.0	FP	1				5.5		1682.98	60.37	88.63
			DS-C	0.53	4.66	1.5	6.5	11.5	371.99	6.87		
		3.0	FP	1				5.5		1682.98	11.92	80.82
			DS-C	0.57	3.83	1.5	6.5	10.5	390.43	2.29		
	0.002	1.5	FP	1				5.5		1682.98	224.42	85.74
			DS-C	0.54	4.38	1.50	7.50	11.50	500.11	32.01		
		2.0	FP	1				5.5		1682.98	60.37	87.27
			DS-C	0.54	4.38	1.50	7.50	11.50	500.11	7.69		
		3.0	FP	1				5.5		1682.98	11.92	80.40
			DS-C	0.54	4.38	1.50	7.50	11.50	500.11	2.34		
1.5	0.005	1.5	FP	1			5.5		224.42	36.54	63.58	
			DS-C	0.40	4.81	1.5	6.5	14.5	202.01	13.31		
		2.0	FP	1				5.5		224.42	11.92	65.67
			DS-C	0.40	4.81	1.5	6.5	14.5	202.01	4.09		
		3.0	FP	1				5.5		224.42	3.37	50.31
			DS-C	0.52	2.57	1.5	6.5	10.5	202.58	1.67		

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* y α^* . (*Continuación*)

λ_0	α^*	γ^*	Gráfico	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	
	0.0027	1.5	FP	1			6.5		1079.92	119.45	85.03	
			DS-C	0.40	4.86	1.50	7.50	15.50	373.53	17.88		
		2.0		FP	1			6.5		1079.92	29.84	84.54
				DS-C	0.40	4.86	1.50	7.50	15.50	373.53	4.61	
		3.0		FP	1			6.5		1079.92	5.92	70.55
				DS-C	0.71	3.05	2.50	7.50	12.50	375.82	1.74	
	0.002	1.5	FP	1			6.5		1079.92	119.45	83.07	
			DS-C	0.64	4.98	2.50	8.50	16.50	500.28	20.22		
		2.0		FP	1			6.5		1079.92	29.84	83.77
				DS-C	0.64	4.98	2.50	8.50	16.50	500.28	4.84	
		3.0		FP	1			6.5		1079.92	5.92	70.22
				DS-C	00.70	3.38	2.50	8.50	13.50	502.87	1.76	
2.0	0.005	1.5	FP	1			6.5		220.57	29.84	65.67	
			DS-C	0.53	4.91	2.5	7.5	18.5	202.12	10.25		
		2.0		FP	1			6.5		220.57	9.04	64.44
				DS-C	0.55	4.45	2.5	8.5	17.5	201.97	3.21	
		3.0		FP	1			6.5		220.57	2.54	44.67
				DS-C	0.66	2.30	2.5	8.5	12.5	204.75	1.41	
	0.0027	1.5	FP	1			7.5		911.81	84.00	84.25	
			DS-C	0.53	4.89	2.50	8.50	19.50	370.88	13.23		
		2.0		FP	1			7.5		911.81	19.56	81.93
				DS-C	0.53	4.89	2.50	8.50	19.50	370.88	3.53	
		3.0		FP	1			7.5		911.81	3.91	62.78
				DS-C	0.65	2.40	2.50	8.50	13.50	379.94	1.45	
	0.002	1.5	FP	1			7.5		911.81	84.00	81.88	
			DS-C	0.71	4.98	3.50	9.50	20.50	500.15	15.22		
		2.0		FP	1			7.5		911.81	19.56	81.32
				DS-C	0.54	4.66	2.50	8.50	19.50	500.78	3.65	
		3.0		FP	1			7.5		911.81	3.91	62.49
				DS-C	0.64	2.65	2.50	8.50	14.50	500.09	1.47	
3.0	0.005	1.5	FP	1			8.5		262.95	24.84	71.68	
			DS-C	0.40	4.98	2.5	7.5	25.5	208.29	7.04		
		2.0		FP	1			8.5		262.95	6.55	64.19
				DS-C	0.61	3.38	3.5	11.5	20.5	201.04	2.34	
		3.0		FP	1			8.5		262.95	1.84	35.73
				DS-C	0.71	1.67	3.5	9.5	14.5	200.29	1.18	
	0.0027	1.5	FP	1			9.5		907.04	58.50	85.24	
			DS-C	0.40	4.94	2.5	9.5	26.5	373.56	8.63		
		2.0		FP	1			9.5		907.04	11.92	79.07
				DS-C	0.59	3.92	3.5	9.5	23.5	376.10	2.49	
		3.0		FP	1			9.5		907.04	2.42	50.67
				DS-C	0.69	1.98	3.5	11.5	16.5	375.93	1.20	

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.1: Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* y α^* . (*Continuación*)

λ_0	α^*	γ^*	Gráfico	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$
0.002	1.5	1.5	FP	1			9.5		907.04	58.50	83.87
			DS-C	0.56	4.92	3.50	10.50	27.50	500.13	9.43	
	2.0	2.0	FP	1			9.5		907.04	11.92	78.55
			DS-C	0.58	4.34	3.50	10.50	25.50	500.94	2.56	
	3.0	3.0	FP	1			9.5		907.04	2.42	50.32
			DS-C	0.68	2.14	3.50	10.50	17.50	500.35	1.20	
4.0	0.005	1.5	FP	1			10.5		352.14	23.46	76.80
			DS-C	0.45	4.81	3.5	9.5	31.5	200.52	5.44	
	2.0	2.0	FP	1			10.5		352.14	5.43	64.95
			DS-C	0.64	3.07	4.5	10.5	24.5	209.57	1.90	
	3.0	3.0	FP	1			10.5		352.14	1.53	29.28
			DS-C	0.73	1.56	4.5	10.5	17.5	202.85	1.08	
0.0027	1.5	1.5	FP	1			11.5		1092.62	49.77	87.22
			DS-C	0.45	4.93	3.5	11.5	33.5	375.16	6.36	
	2.0	2.0	FP	1			11.5		1092.62	8.94	77.52
			DS-C	0.62	3.49	4.5	10.5	27.5	373.13	2.01	
	3.0	3.0	FP	1			11.5		1092.62	1.86	41.10
			DS-C	0.71	1.80	4.5	13.5	19.5	374.70	1.09	
0.002	1.5	1.5	FP	1			11.5		1092.62	49.77	86.27
			DS-C	0.45	5.00	3.50	9.50	34.50	500.00	6.83	
	2.0	2.0	FP	1			11.5		1092.62	8.94	77.17
			DS-C	0.62	3.58	4.50	11.50	28.50	500.90	2.04	
	3.0	3.0	FP	1			11.5		1092.62	1.86	40.92
			DS-C	0.72	1.71	4.50	11.50	19.50	501.48	1.10	

Es notable la superioridad en rendimiento del gráfico DS-C con respecto al gráfico de parámetros fijo, para todos los casos evaluados se observa que el gráfico DS-C presenta una ARL_1 significativamente inferior que el observado en el esquema de parámetros fijos, con un porcentaje de reducción de ARL_1 que oscila entre (29,28 % y 88,63 %), sin aumentar el costo de la inspección, mientras el proceso permanece bajo control (se espera que la mayor parte del tiempo el proceso opere en esta condición).

Debido a su naturaleza discreta, el esquema de parámetros fijos presenta valores limitados para ARL_0 , que dependen del tamaño de la muestra y la ubicación del límite de control superior. En cambio, el esquema DS-C tiene un mayor número de parámetros de diseño y presenta más flexibilidad con respecto a las condiciones ARL_0 que es capaz de cumplir. Cabe destacar que, una parte de la reducción en ARL_1 está asociada con la dificultad que presenta el gráfico FP para cumplir la condición ARL_0 deseada. Bajo un ARL_0 inicial mucho más alto que el deseado, toda la curva ARL_1 presentará un incremento, que se verá reflejado incluso en el punto de cambio evaluado ARL_1 .

Considerando lo anterior, se plantea una comparación alternativa, bajo la cual se eliminan las diferencias iniciales entre las curvas ARL_0 . Para una comparación justa entre el esquema DS-C y el esquema de parámetros fijos, se requiere que el rendimiento bajo

control sea el mismo. Para ello, se encuentra el gráfico de control C de parámetros fijos con ARL_0 más cercano al ARL_0^{obj} , donde ARL_0^{obj} es una condición deseada para el operador. Para esta comparación se ha considerado el $ARL_0^{obj} = 370.4$, correspondiente al usual $\alpha = 0.0027$. El valor ARL_0 encontrado para el gráfico de control C de parámetros fijos ha sido la referencia para el diseño del gráfico de control DS-C. Esta estrategia de comparación fue la misma utilizada por Epprecht et al. (2003), así como los valores considerados para λ_0 y γ^* . Los parámetros obtenidos bajo esta nueva condición se presentan en la tabla 6.2. El resultado obtenido en $\%ARL_1$ representa la reducción de ARL_1 eliminando la dificultad inicial de ajuste al ARL_0 .

Tabla 6.2: Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0, γ^* ajustado $\alpha^* = \alpha_{FP}$.

λ_0	γ^*	Gráfico	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$
0.5	1.5	FP	1			3.5		570.90	137.13	53.73
		DS-C	0.31	4.68	0.5	4.5	7.5	575.11	63.45	
	2.0	FP	1			3.5		570.90	52.66	66.93
		DS-C	0.31	4.68	0.5	4.5	7.5	575.11	17.42	
	3.0	FP	1			3.5		570.90	15.23	70.06
		DS-C	0.31	4.68	0.5	4.5	7.5	575.11	4.56	
1	1.5	FP	1			4.5		273.24	53.83	59.90
		DS-C	0.52	4.96	1.5	5.5	11.5	273.84	21.59	
	2.0	FP	1			4.5		273.24	18.99	67.59
		DS-C	0.52	4.96	1.5	5.5	11.5	273.84	6.16	
	3.0	FP	1			4.5		273.24	5.41	58.72
		DS-C	0.59	3.37	1.5	5.5	9.5	273.64	2.23	
1.5	1.5	FP	1			5.5		224.42	36.54	61.26
		DS-C	0.40	4.73	1.5	7.5	14.5	224.63	14.16	
	2.0	FP	1			5.5		224.42	11.92	64.66
		DS-C	0.40	4.73	1.5	7.5	14.5	224.63	4.21	
	3.0	FP	1			5.5		224.42	3.37	49.46
		DS-C	0.53	2.50	1.5	6.5	10.5	228.00	1.70	
2.0	1.5	FP	1			6.5		220.57	29.84	64.59
		DS-C	0.54	4.81	2.5	7.5	18.5	221.79	10.57	
	2.0	FP	1			6.5		220.57	9.04	63.81
		DS-C	0.55	4.39	2.5	11.5	17.5	220.95	3.27	
	3.0	FP	1			6.5		220.57	2.54	44.26
		DS-C	0.66	2.26	2.5	8.5	12.5	224.00	1.42	
3.0	1.5	FP	1			8.5		262.95	24.84	68.75
		DS-C	0.55	5.00	3.5	9.5	26.5	273.60	7.76	
	2.0	FP	1			8.5		262.95	6.55	62.86
		DS-C	0.6	3.54	3.5	11.5	21.5	263.44	2.43	
	3.0	FP	1			8.5		262.95	1.84	35.38
		DS-C	0.70	1.83	3.5	9.5	15.5	268.62	1.19	
4.0	1.5	FP	1			10.5		352.14	23.46	73.31
		DS-C	0.45	4.95	3.5	10.5	33.5	358.65	6.26	

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.2: Parámetros y rendimiento del gráfico de control FP-C y el óptimo equivalente para el gráfico de control DS-C para λ_0 , γ^* ajustado $\alpha^* = \alpha_{FP}$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	Gráfico	m_1	m_2	WL_1	UCL_1	UCL_2	ARL_0	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$
2.0		FP	1			10.5		352.14	5.43	63.21
		DS-C	0.62	3.51	4.5	11.5	27.5	358.83	2.00	
3.0		FP	1			10.5		352.14	1.53	28.48
		DS-C	0.72	1.61	4.5	11.5	18.5	363.72	1.10	

Luego de la comparación ajustando el α^* al valor de α obtenidos para los diseños del gráfico FP, se continua evidenciando una superioridad significativa. Para todos los casos evaluados se observa que el gráfico DS-C presenta una ARL_1 menor que el observado en el esquema de parámetros fijos, con un porcentaje de reducción de ARL_1 que oscila entre 28,48 % y 73,31 %.

Es una práctica común optimizar los parámetros de un gráfico de control con el fin de garantizar un mejor rendimiento en la detección de una magnitud de cambio específica en los parámetros del proceso. Sin embargo, en la aplicación práctica, la magnitud de cambio para la que se ha optimizado el gráfico de control es sólo uno del conjunto infinito de magnitudes posibles de desplazamientos que el proceso puede presentar.

Por ejemplo, para el caso de controlar el número de no conformidades, el número medio de no conformidades puede tener un cambio de magnitud $\gamma = \gamma^*$ para el que se ha optimizado o puede presentar un cambio de magnitud $\gamma \neq \gamma^*$ en el que no hay garantía de que su rendimiento sea óptimo. Con el fin de evaluar y comparar el rendimiento de los dos esquemas de control en diferentes puntos de magnitud de cambio, el perfil ARL_1 de los dos gráficos fue evaluado en diferentes puntos de magnitud de cambio, donde γ es el factor de aumento del número de no conformidades, tal que $\gamma = \lambda_1/\lambda_0$ y tomará los valores $\gamma = 1.5; 2.0; 2.5; 3.0; 3.5; 4.0; 4.5; 5.0$. Los valores del perfil ARL_1 del gráfico DS-C y el gráfico de parámetros fijos son presentados en la siguiente tabla.

Tabla 6.3: Perfil ARL_1 y ASS ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) para FP-C, Óptimo DS-C con $\alpha^* = \alpha_{FP}$.

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5		FP	1.00	570.90	137.13	52.66	26.13	15.23	9.92	7.00	5.25	4.13
	1.5	DS-C	0.98	575.11	63.45	17.42	7.73	4.56	3.22	2.55	2.17	1.94
	2.0	DS-C	0.98	575.11	63.45	17.42	7.73	4.56	3.22	2.55	2.17	1.94
	3.0	DS-C	0.98	575.11	63.45	17.42	7.73	4.56	3.22	2.55	2.17	1.94
1		FP	1.00	273.24	53.83	18.99	9.19	5.41	3.64	2.69	2.14	1.79
	1.5	DS-C	1.00	273.84	21.59	6.16	3.23	2.29	1.87	1.63	1.48	1.37
	2.0	DS-C	1.00	273.84	21.59	6.16	3.23	2.29	1.87	1.63	1.48	1.37
	3.0	DS-C	0.99	273.64	25.16	6.99	3.39	2.23	1.75	1.50	1.36	1.26
1.5		FP	1.00	224.42	36.54	11.92	5.65	3.37	2.34	1.80	1.50	1.32
	1.5	DS-C	0.98	224.63	14.16	4.21	2.46	1.89	1.62	1.45	1.33	1.25

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.3: Perfil ARL_1 y ASS ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) para FP-C, Óptimo DS-C con $\alpha^* = \alpha_{FP}$. (Continuación)

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
	2.0	DS-C	0.98	224.63	14.16	4.21	2.46	1.89	1.62	1.45	1.33	1.25
	3.0	DS-C	0.98	228.00	18.05	4.90	2.44	1.68	1.38	1.23	1.15	1.10
2.0		FP	1.00	220.57	29.84	9.04	4.20	2.54	1.82	1.46	1.26	1.15
	1.5	DS-C	1.00	221.79	10.57	3.24	2.02	1.59	1.37	1.24	1.16	1.11
	2.0	DS-C	0.99	220.95	10.95	3.27	1.99	1.57	1.35	1.23	1.15	1.10
	3.0	DS-C	0.99	224.00	14.32	3.76	1.95	1.42	1.21	1.12	1.07	1.04
3.0		FP	1.00	262.95	24.84	6.55	2.96	1.84	1.39	1.18	1.09	1.04
	1.5	DS-C	0.98	273.60	7.76	2.53	1.70	1.37	1.21	1.12	1.07	1.04
	2.0	DS-C	0.98	263.44	8.56	2.43	1.55	1.27	1.15	1.08	1.04	1.02
	3.0	DS-C	1.00	268.62	11.67	2.82	1.52	1.19	1.08	1.03	1.02	1.01
4.0		FP	1.00	352.14	23.46	5.43	2.40	1.53	1.21	1.08	1.03	1.01
	1.5	DS-C	0.99	358.65	6.26	2.14	1.52	1.27	1.15	1.08	1.04	1.02
	2.0	DS-C	0.99	358.83	7.05	2.00	1.36	1.16	1.07	1.03	1.01	1.01
	3.0	DS-C	0.99	363.72	10.69	2.38	1.33	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00

El valor resaltado en negrita corresponde al ARL_1 obtenido para el punto de diseño óptimo γ^* .

En la tabla 6.3 se puede observar que el gráfico de control DS-C en cada uno de los casos estudiados se destaca en todo el perfil de ARL_1 , frente al gráfico de control C de parámetros fijos, manteniendo su hegemonía no solo en el punto de optimización, sino a lo largo del perfil de magnitudes de cambio, todo ello sin incrementar los costos de inspección, como lo refleja la columna 4 de dicha tabla.

6.2. Comparación del gráfico DS-C con los gráficos VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C

En esta sección se realizará una comparación de los diseños óptimos del gráfico DS-C con los diseños óptimos obtenidos de los esquemas estudiados en el capítulo 5; VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C. Para esta comparación solo se tendrá en cuenta la consideración que el cambio en el número de no conformidades λ ocurre después de un periodo suficientemente largo posterior al inicio del monitoreo con el gráfico, esto es que el ARL_1 considerado será el de estado estable ARL_1 *steady-state*, debido a que se evidenció en las secciones 5.2.3 y 5.3.3 lo concluido por Lucas and Saccucci (1990), que indica que el ARL_1 *steady-state* es frecuentemente menor y resulta mas apropiado que el ARL_1 *zero-state*.

La optimización de los parámetros de los diferentes esquemas fueron obtenidos para los mismos valores de α^* , λ_0 , ASS^* y γ^* .

- $\alpha^* \leq 0.005$, $\alpha^* \leq 0.0027$ y $\alpha^* \leq 0.002$
- $\lambda_0 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0$
- $ASS^* = 1$ (Gráfico DS-C y VSS-C) o $n^* = 1$ (EWMA-C y CUSUM-C)

- $\gamma^* = 1.5, 2.0, 3.0$

La tabla 6.4 muestra los parámetros de los diseños óptimos bajo las condiciones λ_0 y γ^* y α^* para cada uno de los esquemas y sus respectivos ARL_1 . El indicador $\%ARL_1^{red}$, que se incluye en la tabla 6.4, evalúa el porcentaje de reducción de ARL_1 obtenido cuando se utiliza el gráfico de control DS-C, en lugar de cada uno de los gráficos de control con el cual se compara. Este indicador se calcula como en la ecuación 6.1 expuesta en la sección anterior.

Tabla 6.4: Rendimiento de los gráficos de control DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y α^* .

λ_0	α^*	Gráfico	$\gamma^* = 1.5$		$\gamma^* = 2.0$		$\gamma^* = 3.0$	
			ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$
0.5	0.005	DS	31.35		10.79		3.68	
		VSS	25.55	-22.70	8.97	-20.37	3.89	5.49
		EWMA	27.28	-14.90	12.73	15.23	5.59	34.21
		CUSUM	27.55	-13.77	12.77	15.48	5.70	35.46
	0.0027	DS	45.94		13.92		4.17	
		VSS	34.02	-35.02	11.55	-20.53	4.24	1.62
		EWMA	35.73	-28.56	15.29	8.94	6.48	35.65
		CUSUM	35.94	-27.82	15.24	8.66	6.47	35.56
	0.002	DS	56.68		15.95		4.35	
		VSS	40.81	-38.89	11.86	-34.50	4.32	-0.75
		EWMA	40.43	-40.20	16.85	5.33	7.00	37.84
		CUSUM	39.44	-43.72	16.75	4.76	6.91	36.98
1.0	0.005	DS-C	18.94		5.78		2.16	
		VSS	15.10	-25.44	5.86	1.36	2.71	20.35
		EWMA	18.35	-3.18	8.00	27.70	3.51	38.51
		CUSUM	18.08	-4.73	8.09	28.52	3.47	37.91
	0.0027	DS	26.29		6.87		2.29	
		VSS	18.87	-39.33	6.21	-10.47	2.83	19.15
		EWMA	23.07	-13.98	9.52	27.85	4.02	43.10
		CUSUM	22.89	-14.89	9.44	27.26	3.94	42.04
	0.002	DS	32.01		7.69		2.34	
		VSS	21.54	-48.61	6.65	-15.54	2.91	19.80
		EWMA	25.15	-27.26	10.23	24.86	4.24	44.97
		CUSUM	25.30	-26.50	10.17	24.41	4.13	43.39
1.5	0.005	DS	13.31		4.09		1.67	
		VSS	10.90	-22.08	4.28	4.44	2.18	23.42
		EWMA	14.20	6.29	6.08	32.77	2.71	38.27
		CUSUM	14.19	6.18	6.10	32.94	2.60	35.74

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.4: Rendimiento de los gráficos de control DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y α^* . (*Continuación*)

λ_0	α^*	Gráfico	$\gamma^* = 1.5$		$\gamma^* = 2.0$		$\gamma^* = 3.0$	
			ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$
0.0027	0.0027	DS	17.88		4.61		1.74	
		VSS	12.90	-38.57	4.58	-0.70	2.30	24.18
		EWMA	17.50	-2.18	7.07	34.76	3.05	42.89
		CUSUM	17.33	-3.17	7.07	34.70	2.97	41.39
0.002	0.002	DS	20.22		4.84		1.76	
		VSS	14.72	-37.37	4.77	-1.55	2.36	25.23
		EWMA	19.06	-6.08	7.62	36.41	3.24	45.52
		CUSUM	19.09	-5.92	7.60	36.25	3.07	42.55
2.0	0.005	DS-C	10.25		3.21		1.41	
		VSS	8.71	-17.68	3.55	9.57	1.90	26.05
		EWMA	11.79	13.12	5.00	35.71	2.28	38.26
		CUSUM	11.79	13.13	4.98	35.53	2.17	35.14
0.0027	0.0027	DS	13.23		3.53		1.45	
		VSS	10.13	-30.57	3.78	6.45	2.02	28.02
		EWMA	14.27	7.24	5.76	38.70	2.57	43.40
		CUSUM	14.19	6.77	5.72	38.25	2.38	38.92
0.002	0.002	DS	15.22		3.65		1.47	
		VSS	11.25	-35.27	3.98	8.21	2.08	29.68
		EWMA	15.60	2.45	6.16	40.68	2.71	45.97
		CUSUM	15.45	1.50	6.06	39.69	2.51	41.50
3.0	0.005	DS-C	7.04		2.34		1.18	
		VSS	6.39	-10.11	2.86	17.98	1.58	25.18
		EWMA	9.03	22.09	3.79	38.10	1.82	35.11
		CUSUM	8.96	21.44	3.77	37.80	1.66	28.83
0.0027	0.0027	DS	8.63		2.49		1.20	
		VSS	7.18	-20.32	3.00	16.79	1.67	28.43
		EWMA	10.78	19.92	4.31	42.13	2.03	41.06
		CUSUM	10.81	20.10	4.24	41.22	1.80	33.50
0.002	0.002	DS	9.43		2.56		1.20	
		VSS	7.79	-21.17	3.07	16.76	1.71	29.66
		EWMA	11.67	19.16	4.60	44.37	2.15	43.93
		CUSUM	11.65	19.02	4.49	43.01	1.85	34.87
4.0	0.005	DS-C	5.44		1.90		1.08	
		VSS	5.63	3.23	2.42	21.36	1.38	21.21
		EWMA	7.46	26.98	3.16	39.75	1.59	31.98
		CUSUM	7.10	23.27	2.94	35.28	1.39	21.81

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.4: Rendimiento de los gráficos de control DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C optimizado para λ_0 ; γ^* y α^* . (*Continuación*)

λ_0	α^*	Gráfico	$\gamma^* = 1.5$		$\gamma^* = 2.0$		$\gamma^* = 3.0$	
			ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$	ARL_1	$\%ARL_1^{red}$
0.0027		DS	6.36		2.01		1.09	
		VSS	5.74	-10.90	2.55	21.38	1.47	25.52
		EWMA	8.82	27.90	3.59	44.09	1.77	38.32
		CUSUM	8.71	26.98	3.43	41.49	1.52	27.97
0.002		DS	9.43		2.56		1.20	
		VSS	7.79	-21.17	3.07	16.76	1.71	29.66
		EWMA	11.67	19.16	4.60	44.37	2.15	43.93
		CUSUM	11.65	19.02	4.49	43.01	1.85	34.87

Analizando la anterior tabla se evidencia que el gráfico DS-C tiene un desempeño inferior con respecto a los gráficos en comparación (VSS-C, EWMA-C, CUSUM-C) en la detección de cambios muy pequeños en el proceso, donde llega a perder hasta un 38.89 % con VSS-C, y hasta un 40 % con EWMA-C y CUSUM-C, pero su desempeño es superior que las demás alternativas para cambios de mediana y gran magnitud donde supera las alternativas con porcentajes de reducción que van desde el 1 % hasta el 30 % con respecto a VSS-C y hasta un 45 % a las alternativas EWMA-C y CUSUM-C. Es importante resaltar que para estas comparaciones no se tuvo el inconveniente con respecto a la flexibilidad del ajuste al ARL_0 deseado, dado que para estos gráficos la capacidad de ajustarse a un ARL_0 determinado es muy buena.

Como se cita en (Woodall and Mahmoud, 2005), los esquemas VSS, EWMA y CUSUM, son generalmente más eficientes para detectar cambios pequeños, sin embargo, estos esquemas optimizados para cambios pequeños, presentan el fenómeno de inercia, que retrasa la detección de cambios de mayor magnitud. Esto se puede verificar en la tabla 6.5, 6.6 y 6.7 en el que se realiza una comparación del desempeño sobre el todo perfil de posibles cambios en el proceso para diferentes valores de ARL_0 .

Tabla 6.5: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.005$.

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5	1.5	DS	1.00	200.10	31.35	10.79	5.59	3.68	2.79	2.32	2.04	1.86
		VSS	1.00	201.17	25.55	8.97	5.38	4.10	3.48	3.12	2.88	2.72
		EWMA	1.00	201.22	27.28	13.15	8.66	6.51	5.25	4.42	3.84	3.41
		CUSUM	1.00	203.75	27.55	14.40	9.83	7.51	6.12	5.19	4.52	4.02
	2.0	DS	1.00	200.10	31.35	10.79	5.59	3.68	2.79	2.32	2.04	1.86
		VSS	1.00	201.17	25.55	8.97	5.38	4.10	3.48	3.12	2.88	2.72
		EWMA	1.00	210.13	28.80	12.73	8.05	5.92	4.72	3.95	3.41	3.02
		CUSUM	1.00	208.67	30.2	12.77	7.90	5.74	4.54	3.78	3.26	2.88

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.5: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.005$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
	3.0	DS	1.00	200.10	31.35	10.79	5.59	3.68	2.79	2.32	2.04	1.86
		VSS	1.00	201.48	29.82	9.97	5.44	3.89	3.20	2.82	2.59	2.43
		EWMA	1.00	200.01	32.79	13.39	7.92	5.59	4.34	3.57	3.05	2.68
		CUSUM	1.00	219.61	34.18	13.59	8.03	5.70	4.45	3.69	3.17	2.79
1	1.5	DS	1.00	201.87	18.94	5.78	3.11	2.21	1.81	1.58	1.43	1.33
		VSS	0.99	201.13	15.10	5.89	3.90	3.13	2.72	2.46	2.28	2.14
		EWMA	1.00	207.19	18.35	8.57	5.66	4.28	3.48	2.95	2.59	2.31
		CUSUM	1.00	200.28	18.08	8.72	5.84	4.46	3.64	3.11	2.72	2.44
	2.0	DS	1.00	201.87	18.94	5.58	3.11	2.21	1.81	1.58	1.43	1.33
		VSS	0.99	201.17	15.89	5.86	3.71	3.00	2.64	2.41	2.26	2.15
		EWMA	1.00	202.78	19.43	8.00	4.99	3.68	2.95	2.49	2.17	1.94
		CUSUM	1.00	213.45	19.44	8.09	5.12	3.81	3.07	2.59	2.27	2.03
	3.0	DS	1.00	200.26	20.18	6.07	3.13	2.16	1.73	1.50	1.37	1.27
		VSS	0.99	200.73	22.31	6.83	3.71	2.71	2.28	2.06	1.94	1.86
		EWMA	1.00	203.92	22.78	8.48	4.95	3.51	2.75	2.29	1.98	1.76
		CUSUM	1.00	202.96	23.03	8.37	4.87	3.47	2.74	2.29	1.98	1.76
1.5	1.5	DS	0.99	202.01	13.31	4.09	2.43	1.89	1.61	1.45	1.33	1.25
		VSS	0.99	202.22	10.90	4.36	3.17	2.70	2.44	2.26	2.14	2.04
		EWMA	1.00	201.00	14.20	6.26	4.07	3.08	2.51	2.15	1.89	1.71
		CUSUM	1.00	204.69	14.19	6.63	4.40	3.35	2.75	2.35	2.07	1.86
	2.0	DS	0.99	202.01	13.31	4.09	2.43	1.89	1.61	1.45	1.33	1.25
		VSS	1.00	207.51	12.16	4.28	2.93	2.45	2.21	2.07	1.96	1.87
		EWMA	1.00	201.54	15.54	6.08	3.76	2.78	2.24	1.90	1.67	1.51
		CUSUM	1.00	208.56	16.23	6.10	3.73	2.75	2.22	1.89	1.66	1.50
	3.0	DS	0.99	202.58	16.88	4.71	2.39	1.67	1.38	1.24	1.16	1.11
		VSS	1.00	200.02	20.28	5.64	2.97	2.18	1.87	1.72	1.62	1.56
		EWMA	1.00	204.81	16.72	6.20	3.73	2.71	2.17	1.84	1.61	1.45
		CUSUM	1.00	200.28	19.62	6.54	3.69	2.60	2.06	1.73	1.52	1.37
2.0	1.5	DS	0.98	202.12	10.25	3.27	2.06	1.63	1.40	1.26	1.17	1.11
		VSS	0.99	200.69	8.71	3.99	2.95	2.49	2.22	2.04	1.89	1.77
		EWMA	1.00	201.41	11.79	5.22	3.43	2.61	2.15	1.85	1.64	1.49
		CUSUM	1.00	202.77	11.79	5.19	3.40	2.58	2.12	1.82	1.61	1.46
	2.0	DS	0.99	201.97	10.45	3.21	1.98	1.57	1.35	1.23	1.15	1.10
		VSS	0.99	200.26	10.11	3.55	2.52	2.18	2.01	1.89	1.80	1.72
		EWMA	1.00	203.80	12.92	5.00	3.12	2.32	1.89	1.62	1.44	1.31
		CUSUM	1.00	203.66	12.40	4.98	3.18	2.40	1.97	1.69	1.50	1.36

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.5: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.005$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
3.0	3.0	DS	1.00	204.75	13.49	3.62	1.91	1.41	1.21	1.12	1.07	1.04
		VSS	0.99	201.57	16.65	4.47	2.50	1.90	1.63	1.46	1.34	1.25
		EWMA	1.00	203.78	13.46	5.02	3.08	2.28	1.85	1.58	1.40	1.28
		CUSUM	1.00	206.06	15.69	5.19	3.00	2.17	1.74	1.48	1.32	1.20
3.0	1.5	DS	1.00	208.29	7.04	2.48	1.74	1.43	1.27	1.17	1.10	1.07
		VSS	0.99	202.63	6.39	3.25	2.55	2.22	2.01	1.85	1.72	1.61
		EWMA	1.00	200.83	9.03	4.02	2.68	2.07	1.72	1.49	1.34	1.22
		CUSUM	1.00	200.47	8.96	3.91	2.54	1.91	1.55	1.33	1.19	1.10
3.0	2.0	DS	0.99	201.04	7.77	2.34	1.52	1.26	1.13	1.07	1.04	1.02
		VSS	0.99	203.43	7.32	2.86	2.21	1.99	1.87	1.77	1.68	1.59
		EWMA	1.00	201.87	9.81	3.79	2.40	1.82	1.50	1.31	1.19	1.11
		CUSUM	1.00	211.99	10.10	3.77	2.35	1.74	1.42	1.23	1.12	1.06
3.0	3.0	DS	0.99	200.29	10.45	2.72	1.50	1.18	1.07	1.03	1.01	1.01
		VSS	1.00	202.84	13.14	3.54	2.04	1.58	1.36	1.22	1.14	1.08
		EWMA	1.00	201.87	9.81	3.79	2.40	1.82	1.50	1.31	1.19	1.11
		CUSUM	1.00	221.64	15.86	4.42	2.37	1.66	1.33	1.17	1.08	1.04
4.0	1.5	DS	0.97	200.52	5.44	2.11	1.52	1.27	1.14	1.08	1.04	1.02
		VSS	0.97	203.68	5.63	2.85	2.31	2.04	1.86	1.71	1.59	1.48
		EWMA	1.00	201.29	7.46	3.30	2.23	1.74	1.46	1.28	1.16	1.09
		CUSUM	1.00	201.10	7.10	3.01	1.89	1.41	1.18	1.07	1.03	1.01
4.0	2.0	DS	1.00	209.57	6.11	1.90	1.32	1.14	1.06	1.03	1.01	1.00
		VSS	0.99	200.87	6.55	2.42	1.89	1.68	1.53	1.40	1.30	1.21
		EWMA	1.00	207.47	7.84	3.16	2.06	1.59	1.34	1.18	1.09	1.04
		CUSUM	1.00	200.09	8.48	2.94	1.81	1.37	1.17	1.07	1.03	1.01
4.0	3.0	DS	1.00	202.85	8.09	2.12	1.28	1.08	1.03	1.01	1.00	1.00
		VSS	1.00	200.50	12.37	3.02	1.75	1.38	1.20	1.10	1.05	1.02
		EWMA	1.00	207.47	7.84	3.16	2.06	1.59	1.34	1.18	1.09	1.04
		CUSUM	1.00	200.06	11.29	3.26	1.86	1.39	1.17	1.07	1.03	1.01

El valor resaltado en negrita corresponde al ARL_1 obtenido para el punto de diseño óptimo γ^* .

Tabla 6.6: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.0027$.

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5	1.5	DS	0.99	370.46	45.94	13.92	6.68	4.17	3.05	2.45	2.09	1.85
		VSS	0.99	376.82	34.02	11.98	7.24	5.33	4.31	3.68	3.26	2.96
		EWMA	1.00	387.87	35.73	16.49	10.73	8.00	6.42	5.38	4.65	4.11
		CUSUM	1.00	399.92	35.94	15.90	10.22	7.58	6.07	5.09	4.40	3.89
	2.0	DS	0.99	370.46	45.94	13.92	6.68	4.17	3.05	2.45	2.09	1.85
		VSS	0.99	376.52	36.02	11.55	6.73	4.83	3.92	3.38	3.02	2.77
		EWMA	1.00	374.65	36.51	15.29	9.53	6.96	5.52	4.60	3.96	3.49
		CUSUM	1.00	372.69	38.76	15.24	9.27	6.70	5.30	4.40	3.79	3.33
	3.0	DS	0.99	370.46	45.94	13.92	6.68	4.17	3.05	2.45	2.09	1.85
		VSS	1.00	418.18	45.13	12.23	6.90	4.24	3.45	3.02	2.76	2.58
		EWMA	1.00	370.77	45.53	16.62	9.40	6.48	4.96	4.05	3.44	3.00
		CUSUM	1.00	378.74	44.68	16.17	9.26	6.47	5.00	4.09	3.48	3.05
1	1.5	DS	0.99	371.99	26.29	6.87	3.39	2.31	1.85	1.61	1.46	1.35
		VSS	0.98	373.36	18.87	6.47	4.23	3.36	2.90	2.62	2.43	2.29
		EWMA	1.00	377.44	23.07	9.67	6.14	4.55	3.66	3.08	2.68	2.39
		CUSUM	1.00	387.06	22.89	9.90	6.38	4.77	3.85	3.25	2.82	2.51
	2.0	DS	0.99	371.99	26.29	6.87	3.39	2.31	1.85	1.61	1.46	1.35
		VSS	1.00	380.86	20.83	6.21	3.86	3.05	2.64	2.39	2.21	2.08
		EWMA	1.00	383.14	24.96	9.52	5.80	4.22	3.36	2.81	2.44	2.17
		CUSUM	1.00	381.43	25.77	9.44	5.70	4.14	3.29	2.76	2.39	2.13
	3.0	DS	1.00	390.43	29.40	7.48	3.50	2.29	1.78	1.53	1.39	1.29
		VSS	1.00	380.04	28.61	7.32	3.82	2.83	2.43	2.24	2.12	2.05
		EWMA	1.00	388.78	29.77	10.09	5.73	4.02	3.13	2.59	2.23	1.97
		CUSUM	1.00	398.38	34.33	10.62	5.76	3.94	3.02	2.46	2.10	1.84
1.5	1.5	DS	0.99	373.53	17.88	4.61	2.53	1.90	1.62	1.45	1.33	1.25
		VSS	0.99	376.87	12.90	4.93	3.50	2.92	2.60	2.39	2.25	2.13
		EWMA	1.00	382.35	17.50	7.66	4.98	3.75	3.04	2.59	2.27	2.03
		CUSUM	1.00	370.54	17.33	7.94	5.23	3.95	3.21	2.72	2.37	2.11
	2.0	DS	0.99	373.53	17.88	4.61	2.53	1.90	1.62	1.45	1.33	1.25
		VSS	0.99	372.98	15.21	4.58	3.05	2.55	2.30	2.15	2.03	1.94
		EWMA	1.00	370.47	18.75	7.07	4.35	3.20	2.57	2.18	1.91	1.71
		CUSUM	1.00	386.20	20.06	7.07	4.27	3.12	2.51	2.12	1.86	1.66
	3.0	DS	0.99	375.82	21.99	5.30	2.55	1.74	1.42	1.26	1.17	1.11
		VSS	1.00	373.41	23.36	5.56	3.02	2.30	1.99	1.81	1.69	1.59
		EWMA	1.00	377.05	21.10	7.23	4.24	3.05	2.42	2.04	1.78	1.59
		CUSUM	1.00	430.31	29.75	8.31	4.37	2.97	2.28	1.87	1.61	1.43

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.6: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.0027$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
2.0	1.5	DS	0.98	370.88	13.23	3.53	2.09	1.63	1.40	1.26	1.17	1.11
		VSS	1.00	374.14	10.13	4.11	2.97	2.49	2.22	2.04	1.89	1.77
		EWMA	1.00	372.02	14.27	6.10	3.97	3.00	2.45	2.10	1.85	1.67
		CUSUM	1.00	370.54	14.19	6.40	4.22	3.18	2.57	2.15	1.85	1.62
	2.0	DS	0.98	370.88	13.23	3.53	2.09	1.63	1.40	1.26	1.17	1.11
		VSS	1.00	384.58	12.22	3.78	2.68	2.33	2.17	2.06	1.99	1.93
		EWMA	1.00	374.14	15.94	5.76	3.53	2.60	2.10	1.79	1.58	1.42
		CUSUM	1.00	373.91	17.14	5.72	3.40	2.46	1.96	1.66	1.45	1.31
	3.0	DS	0.99	379.94	18.74	4.28	2.06	1.45	1.23	1.13	1.08	1.05
		VSS	0.99	371.41	23.32	4.92	2.64	2.02	1.74	1.57	1.44	1.33
		EWMA	1.00	392.97	16.94	5.86	3.51	2.57	2.07	1.75	1.54	1.39
		CUSUM	1.00	388.02	22.12	6.27	3.42	2.38	1.86	1.55	1.35	1.23
3.0	1.5	DS	1.00	373.56	8.63	2.58	1.74	1.43	1.27	1.17	1.10	1.07
		VSS	0.99	372.42	7.18	3.32	2.58	2.27	2.07	1.94	1.83	1.73
		EWMA	1.00	371.30	10.78	4.70	3.10	2.38	1.97	1.70	1.52	1.37
		CUSUM	1.00	378.41	10.81	4.45	2.89	2.20	1.82	1.58	1.40	1.26
	2.0	DS	1.00	376.10	9.39	2.49	1.57	1.29	1.16	1.08	1.05	1.02
		VSS	0.99	377.58	9.11	3.00	2.21	1.95	1.81	1.69	1.58	1.48
		EWMA	1.00	370.59	11.70	4.31	2.70	2.03	1.66	1.43	1.28	1.17
		CUSUM	1.00	376.11	12.92	4.24	2.56	1.89	1.54	1.32	1.19	1.10
	3.0	DS	1.00	375.93	13.34	2.96	1.55	1.20	1.08	1.04	1.02	1.01
		VSS	0.99	372.60	19.46	4.19	2.19	1.67	1.44	1.29	1.19	1.12
		EWMA	1.00	370.59	11.70	4.31	2.70	2.03	1.66	1.43	1.28	1.17
		CUSUM	1.00	374.00	15.36	4.42	2.51	1.80	1.44	1.24	1.13	1.07
4.0	1.5	DS	0.99	375.16	6.36	2.14	1.52	1.27	1.14	1.08	1.04	1.02
		VSS	0.99	372.35	5.74	2.85	2.29	2.01	1.82	1.67	1.53	1.41
		EWMA	1.00	372.93	8.82	3.93	2.63	2.04	1.70	1.48	1.32	1.20
		CUSUM	1.00	375.11	8.71	3.85	2.58	2.01	1.68	1.44	1.27	1.15
	2.0	DS	0.99	373.13	7.20	2.01	1.36	1.16	1.07	1.03	1.01	1.01
		VSS	1.00	387.77	7.64	2.55	2.03	1.89	1.83	1.78	1.74	1.70
		EWMA	1.00	389.07	9.25	3.59	2.32	1.77	1.47	1.28	1.16	1.08
		CUSUM	1.00	379.30	10.29	3.43	2.12	1.60	1.33	1.17	1.08	1.03
	3.0	DS	1.00	374.70	10.13	2.28	1.31	1.09	1.03	1.01	1.00	1.00
		VSS	0.99	377.70	14.66	3.32	1.89	1.47	1.27	1.15	1.07	1.03
		EWMA	1.00	389.07	9.25	3.59	2.32	1.77	1.47	1.28	1.16	1.08
		CUSUM	1.00	371.68	11.48	3.47	2.05	1.52	1.26	1.12	1.05	1.02

El valor resaltado en negrita corresponde al ARL_1 obtenido para el punto de diseño óptimo γ^* .

Tabla 6.7: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.002$.

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.5	1.5	DS	1.00	500.00	56.68	15.95	7.24	4.35	3.12	2.50	2.14	1.93
		VSS	0.99	500.00	40.81	12.82	7.35	5.30	4.25	3.62	3.20	2.92
		EWMA	1.00	533.39	40.43	18.13	11.67	8.66	6.92	5.79	5.00	4.41
		CUSUM	1.00	514.56	39.44	17.21	11.01	8.16	6.51	5.45	4.70	4.15
	2.0	DS	1.00	500.00	56.69	15.95	7.24	4.35	3.12	2.50	2.14	1.93
		VSS	0.98	522.76	43.51	11.86	6.38	4.65	3.85	3.40	3.11	2.91
		EWMA	1.00	511.56	44.15	16.85	10.08	7.21	5.64	4.67	4.00	3.51
		CUSUM	1.00	519.52	44.37	16.75	10.07	7.23	5.67	4.70	4.03	3.55
	3.0	DS	1.00	500.08	56.69	15.95	7.24	4.35	3.12	2.50	2.14	1.93
		VSS	1.00	535.90	49.90	12.94	6.30	4.32	3.49	3.06	2.80	2.63
		EWMA	1.00	502.61	58.39	19.62	10.50	7.00	5.26	4.23	3.56	3.09
		CUSUM	1.00	509.34	58.15	19.09	10.25	6.91	5.22	4.21	3.54	3.06
1	1.5	DS	1.00	500.11	32.01	7.69	3.56	2.34	1.84	1.58	1.43	1.33
		VSS	0.98	520.07	21.54	8.53	5.66	4.38	3.67	3.22	2.91	2.69
		EWMA	1.00	508.12	25.15	10.69	6.82	5.07	4.07	3.43	2.98	2.65
		CUSUM	1.00	530.45	25.30	10.79	6.92	5.16	4.15	3.49	3.02	2.69
	2.0	DS	1.00	500.11	32.00	7.69	3.56	2.34	1.84	1.58	1.43	1.33
		VSS	0.99	512.70	24.88	6.65	3.94	3.06	2.65	2.41	2.25	2.14
		EWMA	1.00	506.80	28.13	10.23	6.14	4.43	3.51	2.93	2.54	2.25
		CUSUM	1.00	506.96	26.23	10.17	6.31	4.63	3.71	3.13	2.73	2.43
	3.0	DS	1.00	500.11	32.00	7.69	3.56	2.34	1.84	1.58	1.43	1.33
		VSS	1.00	505.27	33.77	8.02	4.05	2.91	2.43	2.17	2.00	1.88
		EWMA	1.00	524.66	34.70	11.05	6.13	4.24	3.28	2.71	2.32	2.05
		CUSUM	1.00	508.03	38.57	11.37	6.07	4.13	3.1	2.58	2.21	1.96
1.5	1.5	DS	1.00	500.28	20.22	4.84	2.54	1.85	1.54	1.36	1.24	1.17
		VSS	0.99	528.47	14.72	5.29	3.56	2.86	2.49	2.25	2.08	1.95
		EWMA	1.00	504.96	19.06	7.98	5.11	3.82	3.09	2.61	2.28	2.04
		CUSUM	1.00	505.26	19.09	8.67	5.71	4.32	3.51	2.98	2.61	2.33
	2.0	DS	1.00	500.28	20.22	4.84	2.54	1.85	1.54	1.36	1.24	1.17
		VSS	0.99	520.44	15.98	4.77	3.22	2.69	2.42	2.27	2.16	2.08
		EWMA	1.00	508.63	20.91	7.62	4.64	3.39	2.72	2.29	2.00	1.79
		CUSUM	1.00	531.43	22.13	7.60	4.53	3.26	2.58	2.17	1.89	1.69
	3.0	DS	1.00	502.87	24.54	5.51	2.59	1.76	1.44	1.27	1.18	1.12
		VSS	0.99	506.21	28.98	6.08	3.14	2.36	2.03	1.85	1.73	1.63
		EWMA	1.00	508.25	23.27	7.73	4.51	3.24	2.56	2.15	1.87	1.67
		CUSUM	1.00	501.66	35.02	9.15	4.62	3.07	2.32	1.89	1.61	1.43

Continúa en la página siguiente

Tabla 6.7: Perfil ARL_1 para ($\gamma = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0$) del óptimo DS-C, VSS-C, EWMA-C y CUSUM-C con $\alpha^* = 0.002$. (*Continuación*)

λ_0	γ^*	Gráfico	ASS	ARL_0	$\gamma = \lambda_1/\lambda_0$							
					1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
2.0	1.5	DS	1.00	500.15	15.22	3.78	2.14	1.61	1.36	1.22	1.13	1.08
		VSS	0.97	501.29	11.25	4.43	3.13	2.59	2.29	2.10	1.95	1.82
		EWMA	1.00	507.10	15.60	6.69	4.34	3.28	2.67	2.28	2.01	1.81
		CUSUM	1.00	509.94	15.45	6.55	4.25	3.21	2.61	2.23	1.96	1.76
	2.0	DS	1.00	500.78	15.27	3.65	2.06	1.59	1.36	1.24	1.15	1.10
		VSS	0.99	566.37	14.62	3.98	2.69	2.30	2.11	1.98	1.88	1.80
		EWMA	1.00	502.00	17.88	6.16	3.71	2.71	2.18	1.85	1.63	1.46
		CUSUM	1.00	501.13	16.98	6.06	3.72	2.74	2.22	1.89	1.67	1.50
	3.0	DS	1.00	500.09	20.69	4.41	2.09	1.47	1.24	1.14	1.08	1.05
		VSS	1.00	506.75	31.36	5.45	2.76	2.08	1.79	1.61	1.48	1.37
		EWMA	1.00	502.00	17.88	6.16	3.71	2.71	2.18	1.85	1.63	1.46
		CUSUM	1.00	534.00	30.94	7.53	3.76	2.51	1.91	1.57	1.36	1.23
3.0	1.5	DS	1.00	500.13	9.44	2.57	1.67	1.35	1.20	1.11	1.06	1.03
		VSS	1.00	501.27	7.79	3.47	2.60	2.25	2.05	1.91	1.79	1.68
		EWMA	1.00	508.48	11.67	4.99	3.28	2.51	2.07	1.78	1.58	1.43
		CUSUM	1.00	511.43	11.65	4.74	3.07	2.33	1.91	1.64	1.44	1.29
	2.0	DS	1.00	500.94	9.99	2.56	1.61	1.32	1.17	1.09	1.05	1.03
		VSS	0.99	508.30	9.49	3.07	2.30	2.06	1.93	1.83	1.74	1.65
		EWMA	1.00	507.22	12.71	4.59	2.87	2.15	1.76	1.51	1.34	1.22
		CUSUM	1.00	511.16	13.18	4.49	2.74	2.05	1.67	1.43	1.26	1.16
	3.0	DS	1.00	500.35	14.84	3.07	1.57	1.20	1.09	1.04	1.02	1.01
		VSS	1.00	518.62	23.33	4.32	2.23	1.71	1.48	1.33	1.22	1.14
		EWMA	1.00	507.22	12.71	4.59	2.87	2.15	1.76	1.51	1.34	1.22
		CUSUM	1.00	500.20	24.37	5.58	2.73	1.85	1.46	1.25	1.13	1.07
4.0	1.5	DS	1.00	500.00	6.83	2.15	1.52	1.27	1.14	1.08	1.04	1.02
		VSS	1.00	517.22	6.02	2.86	2.35	2.14	2.02	1.95	1.90	1.86
		EWMA	1.00	509.66	9.51	4.08	2.70	2.08	1.73	1.50	1.34	1.22
		CUSUM	1.00	501.21	9.35	3.90	2.56	1.96	1.62	1.39	1.22	1.12
	2.0	DS	1.00	500.90	7.85	2.04	1.36	1.16	1.07	1.03	1.01	1.01
		VSS	1.00	504.58	7.91	2.61	2.02	1.85	1.74	1.64	1.54	1.45
		EWMA	1.00	508.04	9.94	3.78	2.42	1.85	1.53	1.32	1.19	1.10
		CUSUM	1.00	503.58	11.29	3.61	2.21	1.65	1.35	1.18	1.08	1.03
	3.0	DS	1.00	501.48	12.09	2.48	1.34	1.10	1.03	1.01	1.00	1.00
		VSS	1.00	522.11	20.38	3.92	1.98	1.50	1.28	1.16	1.08	1.04
		EWMA	1.00	508.04	9.94	3.78	2.42	1.85	1.53	1.32	1.19	1.10
		CUSUM	1.00	585.72	14.25	3.85	2.18	1.57	1.28	1.13	1.05	1.02

El valor resaltado en negrita corresponde al ARL_1 obtenido para el punto de diseño óptimo γ^* .

De las tablas 6.5, 6.6 y 6.7 se sacan las siguientes conclusiones:

Los dos mejores gráficos en términos de ARL_1 son: el gráfico de muestreo doble DS-C y el gráfico de muestreo variable VSS-C, situación que se evidencia a través del subrayado que indica el punto en el perfil ARL_1 donde este es menor. Se observa que el gráfico VSS-C es el mejor para la detección de los cambios con menor magnitud en λ_0 (menores valores de γ), mientras que el gráfico DS-C es mejor para valores mayores de γ . Sin embargo en algunos casos el gráfico DS-C resultó mejor para todos los casos estudiados de γ . Es destacable el hecho que los gráficos EWMA-C y CUSUM-C siempre fueron superados por los gráficos DS-C y VSS-C, a excepción de algunos casos específicos donde se evaluaba un $ARL_0 = 500$ y el gráfico EWMA-C, logra destacarse en el cambio más pequeño del perfil, pero sin demostrar una diferencia significativa con el gráfico DS-C. Para los mismos valores de λ_0 y γ^* la fracción del perfil de ARL_1 donde el gráfico DS-C es el mejor, no se ve afectado de manera significativa por los diferentes valores ARL_0 analizados.

Haciendo una comparación detallada del gráfico DS-C con el gráfico alternativo VSS-C, se observa que para $\lambda_0 = 0.5$ el gráfico VSS-C es mejor para $1.5 \leq \gamma \leq 2.5$ y el gráfico DS-C es mejor para $\gamma \geq 3.0$. Así mismo para $\lambda_0 = 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ el gráfico VSS-C es superior en casos hasta $\gamma \leq 2.0$ esto cuando ($\gamma^* = 1.5, 2.0$), en el resto del perfil es superado por el gráfico DS-C, que incluso optimizado para un cambio $\gamma^* = 3.0$ llega a ser superior en todo el perfil, mientras que para $\lambda_0 = 4.0$ el gráfico DS-C muestra una superioridad en todo el perfil exceptuando algunos casos donde VSS-C es mejor en el valor mínimo del perfil, coincidiendo este con el punto en el cual fue optimizado.

El gráfico DS-C solo es superado por la alternativa VSS-C en la detección de cambios de muy pequeña magnitud y solo si el usuario tiene interés en detectar este tipo de cambios la alternativa resulta más eficiente. Sin embargo, el usuario debe considerar el efecto de retraso que se presenta, si el cambio que ocurriese en el proceso fuese de una magnitud mayor a la seleccionada para la optimización.

Como era de esperarse, los gráfico EWMA-C y CUSUM-C tienen desempeños muy similares, por lo que el análisis de comparación se llevará a cabo teniendo en cuenta los dos gráficos. Para $\lambda_0 = 0.5, 1.0$ los gráfico EWMA-C y CUSUM-C son mejores que el gráfico DS-C para los diseños optimizados $\gamma^* = 1.5, 2.0$, solamente en el valor mínimo del perfil $\gamma = 1.5$, en el resto del perfil es superado por el gráfico DS-C, mientras que si se optimiza para $\gamma^* = 3.0$, los gráficos EWMA-C y CUSUM-C son inferiores en todo el perfil, exceptuando algún caso específico. Para $\lambda_0 = 1.5$ los gráfico EWMA-C y CUSUM-C son mejores que el gráfico DS-C para los diseños optimizados $\gamma^* = 1.5$, solamente en el valor mínimo del perfil $\gamma = 1.5$, en el resto del perfil es superado por el gráfico DS-C, mientras que si se optimiza para $\gamma^* = 2.0, 3.0$, los gráficos EWMA-C y CUSUM-C resultan peor en todo el perfil ARL_1 , exceptuando algún caso específico. Entre tanto para $\lambda_0 \geq 2.0$ el gráfico DS-C resulta superior en todo el perfil ARL_1 , incluyendo el punto de optimización en cualquier caso.

Nótese que cuando el usuario selecciona un punto para optimizar el gráfico de control, en sentido práctico está definiendo aquella magnitud de cambio que genera un deterioro importante en la calidad del proceso, esto quiere decir que cambios de magnitud inferior a aquella seleccionada para el punto de optimización, son cambios indiferentes para el

usuario que carecen de importancia de detección. En ese sentido, un ARL_1 inferior en la detección de este cambio es equivalente a una disminución de la frecuencia de falsas alarmas para el proceso y puede entenderse como un desempeño no deseado en el gráfico de control.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo, se propuso una alternativa para la aplicación del gráfico de control C. Esta alternativa consiste en incorporar un esquema de muestreo doble, que permite una mayor flexibilidad para el cumplimiento de una condición ARL_0 deseada, al tiempo que disminuye el tiempo de detección de los cambios en el número promedio de no conformidades λ_0 .

Se desarrolló un enfoque de optimización multiobjetivo para el gráfico de control DS-C propuesto, al usar este enfoque, el usuario puede acceder a diseñar el gráfico de control, estableciendo los parámetros, permitiendo una probabilidad de error tipo 1 (α) pre-especificadas, mientras minimiza uno de los dos indicadores, la probabilidad de error tipo II (β) o el tamaño de muestra promedio (ASS). El usuario puede acceder a una de las dos alternativas de optimización pre-estableciendo los parámetros del procedimiento correspondiente.

La eficiencia del gráfico de control DS-C, fue analizada en términos del número medio de muestras hasta la detección del corrimiento en el parámetro λ_0 , y comparada con la del gráfico de parámetros fijo (FP-C), el gráfico de tamaño de muestra variable (VSS-C), el gráfico de medias móviles ponderadas exponencialmente (EWMA-C) y finalmente con el gráfico de sumas acumuladas (CUSUM).

Dada la comparación realizada de los ARL_1 del gráfico de control DS-C con las alternativas propuestas en esta Tesis se puede concluir lo siguiente:

- El desempeño del gráfico DS-C es muy superior al del gráfico clásico C de parámetros fijos, superándolo tanto en el punto de optimización como a través de todo el perfil ARL_1 , esto para cualquier valor de γ , todo ello sin incrementar los costos de inspección.
- El gráfico DS-C es menos eficiente que el gráfico propuesto por Epprecht et al. (2003) basado en el tamaño de muestra variable VSS-C en aquellos procesos con un número promedio bajo de no conformidades $\lambda_0 = 0.5$ donde el proceso sufre cambios pequeños $1.5 \leq \gamma \leq 2.5$ y el gráfico DS-C lo supera en la medida que la magnitud del cambio es mayor, $\gamma \geq 3.0$. Para aquellos procesos donde $\lambda_0 = 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ el gráfico VSS-C es superior en cambios con magnitud relativa hasta $\gamma \leq 2.0$ esto cuando se tienen cambios de pequeños a moderados, en el resto del perfil es superado

por el gráfico DS-C, que incluso optimizado para un cambio $\gamma^* = 3.0$ llega a ser superior en todo el perfil ARL_1 . En procesos donde el número promedio de no conformidades es alto $\lambda_0 = 4.0$, el gráfico de control DS-C es superior, tanto en el punto de optimización como en el perfil, salvo algunas excepciones.

- El gráfico de control DS-C es más simple de construir y de operar que el gráfico de control VSS-C, puesto que el usuario siempre tomará el mismo tamaño de muestra en el mismo intervalo de tiempo. A diferencia del gráfico VSS-C, el gráfico DS-C sólo tiene una escala y los puntos a dibujar no tienen que estar provistos de símbolos diferentes, lo cual disminuye la posibilidad de obtener una confusión en el diagnóstico.
- El gráfico DS-C es más eficiente que el gráfico EWMA-C y CUSUM-C para cualquier combinación λ_0 y γ^* en prácticamente todo el perfil, salvo en procesos con un número promedio bajo de no conformidades $\lambda_0 = 0.5, 1.0$, optimizado para cambios muy pequeños $\gamma^* = 1.5$ y en algunos casos $\gamma^* = 2.0$, donde presenta un ARL_1 inferior aunque solo para γ inferior al punto de optimización.

En resumen, el nuevo gráfico de control planteado en esta Tesis, DS-C, resulta en una interesante alternativa para mejorar el desempeño del gráfico C en el control del número promedio de no conformidades λ_0 , con la garantía de un esquema similar de costos de implementación y mayor capacidad de adaptación para satisfacer la condición requerida sobre la probabilidad de falsas alarmas.

7.1. Investigaciones Futuras

Uno de los supuestos sobre los cuales se soportó el desarrollo de esta Tesis, es que la tasa media de no conformidades para el proceso bajo control es bien conocida por el usuario. En una aplicación práctica muchas veces esta tasa se desconoce y el usuario recurre a muestrear durante la fase I, unidades del proceso y con la información colectada generar una estimación de este parámetro. Con muy alta probabilidad, esta estimación será diferente del verdadero valor del parámetro, por lo cual, el gráfico de control puede tener un desempeño diferente al esperado. La evaluación de este cambio en el desempeño resulta en una interesante línea de investigación futura. Adicionalmente se puede evaluar un rediseño de la fase I para mitigar el efecto del error de estimación sobre el desempeño del gráfico de control DS-C.

Por otro lado, en este trabajo solo se ha tenido en cuenta la posibilidad de variación en el tamaño de muestra para mejorar el desempeño del gráfico. En la literatura estudiada se encuentra como alternativa la variación en el intervalo de muestreo. Adaptar el gráfico propuesto para la inclusión de un intervalo de muestreo variable puede ser una línea de desarrollo para una investigador futura.

En algunas aplicaciones prácticas, la calidad en el proceso es medida no solo a través de un atributo, en ocasiones esta calidad se mide a través de múltiples atributos. El esquema DS-C que hemos propuesto está diseñado para el control de un solo atributo, un avance posterior consiste en investigar un implementación del esquema de muestreo doble sobre un gráfico de control simultaneo para múltiples atributos.

En la caracterización del desempeño del esquema DS-C se han considerado indicadores de eficiencia estadística, tales como el tamaño de la muestra promedio ASS y la probabilidad de error tipo II (β). En la selección de un gráfico de control se consideran tanto los indicadores de suficiencia estadística, como también algunos indicadores del costo de implementación y operación del gráfico de control. Estos indicadores pueden ser incluidos al modelo de optimización propuesto como un tercer objetivo o sustituir algunos de los indicadores que actualmente se encuentran incluidos. Por ejemplo incluir el costo medio de operación del gráfico en lugar del tamaño de muestra promedio (ASS).

Bibliografía

- Amouzgar, K. (2012). Multi-objective optimization using genetic algorithms.
- Baquela, E. and Redchuk, A. (2013). *Optimización matemática con R*. Bubok Publishing (Madrid).
- Bissell, A. (1969). Cusum techniques for quality control. *Applied Statistics*, pages 1–30.
- Bissell, A. (1988). Control chart limits for attributes and events. *Journal of Applied Statistics*, 15(1):97–105.
- Borror, C. M., Champ, C. W., and Rigdon, S. E. (1998). Poisson ewma control charts. *Journal of Quality Technology*, 30(4):352.
- Brook, D. and Evans, D. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length. *Biometrika*, 59(3):539–549.
- Chong, Z. L., Khoo, M. B., and Castagliola, P. (2014). Synthetic double sampling np control chart for attributes. *Computers & Industrial Engineering*, 75:157–169.
- Costa, A. F. (1999). X charts with variable parameters. *Journal of Quality Technology*, 31(4):408.
- Costa, A. F. B. (1994). X charts with variable sample size. *Journal of Quality Technology*, 26(3):155–163.
- Croasdale, R. (1974). Control charts for a double-sampling scheme based on average production run lengths. *International Journal of Production Research*, 12(5):585–592.
- Crosier, R. B. (1986). A new two-sided cumulative sum quality control scheme. *Technometrics*, 28(3):187–194.
- Daudin, J. (1992). Double sampling x charts. *Journal of Quality Technology*, 24(2):78–87.
- De Araújo Rodrigues, A. A., Epprecht, E. K., and De Magalhaes, M. S. (2011). Double-sampling control charts for attributes. *Journal of Applied Statistics*, 38(1):87–112.
- De Toro, F., Ortega, J., Fernández, J., and Díaz, A. (2002). Psfga: a parallel genetic algorithm for multiobjective optimization. In *Parallel, Distributed and Network-based Processing, 2002. Proceedings. 10th Euromicro Workshop on*, pages 384–391. IEEE.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197.

- Duncan, A. J. et al. (2000). *Control de calidad y estadística industrial*.
- Epprecht, E. and Costa, A. (2001). Adaptive sample size control charts for attributes. *Quality Engineering*, 13(3):465–473.
- Epprecht, E. K., Costa, A. F., and Mendes, F. C. (2003). Adaptive control charts for attributes. *IIE Transactions*, 35(6):567–582.
- Epprecht, E. K., Simões, B. F., and Mendes, F. C. (2010). A variable sampling interval ewma chart for attributes. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 49(1):281–292.
- Ewan, W. D. (1963). When and how to use cu-sum charts. *Technometrics*, 5(1):1–22.
- Fonseca, C. M. and Fleming, P. J. (1998). Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. i. a unified formulation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 28(1):26–37.
- Fu, J. C., Spiring, F. A., and Xie, H. (2002). On the average run lengths of quality control schemes using a markov chain approach. *Statistics & Probability Letters*, 56(4):369–380.
- Gan, F. (1990a). Monitoring observations generated from a binomial distribution using modified exponentially weighted moving average control chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 37(1-2):45–60.
- Gan, F. (1990b). Monitoring poisson observations using modified exponentially weighted moving average control charts. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 19(1):103–124.
- Gan, F. (1993). An optimal design of cusum control charts for binomial counts. *Journal of Applied Statistics*, 20(4):445–460.
- Goldberg, D. E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning/david e. Goldberg.-[USA]: Addison-Wesley.
- Hawkins, D. M. (1992). Evaluation of average run lengths of cumulative sum charts for an arbitrary data distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 21(4):1001–1020.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. U Michigan Press.
- Inghilleri, R., Lupo, T., and Passannanti, G. (2015). An effective double sampling scheme for the c control chart. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(2):205–216.
- Irianto, D. and Shinozaki, N. (1998). An optimal double sampling x control chart. *International Journal of Industrial Engineering-Applications and Practice*, 5(3):226–234.
- Konak, A., Coit, D. W., and Smith, A. E. (2006). Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9):992–1007.

- Li, Z., Zou, C., Gong, Z., and Wang, Z. (2014). The computation of average run length and average time to signal: an overview. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(8):1779–1802.
- Lucas, J. M. (1973). A modified “v” mask control schemet. *Technometrics*, 15(4):833–847.
- Lucas, J. M. (1985). Counted data cusum’s. *Technometrics*, 27(2):129–144.
- Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics*, 32(1):1–12.
- Luo, H. and Wu, Z. (2002). Optimal np control charts with variable sample sizes or variable sampling intervals. *Economic Quality Control*, 17(1):39–61.
- Mersmann, O., Trautmann, H., Steuer, D., Bischl, B., and Deb, K. (2014). Package “mco”: multiple criteria optimization algorithms and related functions. URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/mco/mco.pdf>.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to statistical quality control*. John Wiley & Sons (New York).
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41(1/2):100–115.
- Perez, E., Carrion, A., Jabaloyes, J., and Aparisi, F. (2010). Optimization of the new ds-u control chart: an application of genetic algorithms. In *Proceedings of the 9th WSEAS international conference on Applications of Computer Engineering*, pages 105–109.
- Prabhu, S., Runger, G., and Keats, J. (1993). X chart with adaptive sample sizes. *The International Journal of Production Research*, 31(12):2895–2909.
- Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1994). Combined adaptive sample size and sampling interval x control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26(3):164–176.
- Reynolds, M. R., Amin, R. W., Arnold, J. C., and Nachlas, J. A. (1988). Charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2):181–192.
- Roberts, S. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1(3):239–250.
- Runger, G. C. and Prabhu, S. S. (1996). A markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart. *Journal of the American Statistical Association*, 91(436):1701–1706.
- Vaughan, T. S. (1992). Variable sampling interval np process control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 22(1):147–167.
- White, C. H., Bert Keats, J., and Stanley, J. (1997). Poisson cusltm versus c chart for defect data. *Quality Engineering*, 9(4):673–679.
- White, C. H. and Keats, J. B. (1996). Arls and higher-order run-length moments for the poisson cusum. *Journal of Quality Technology*, 28(3):363–369.

- Woodall, W. H. and Mahmoud, M. A. (2005). The inertial properties of quality control charts. *Technometrics*, 47(4):425–436.
- Wu, Z. and Wang, Q. (2007). An np control chart using double inspections. *Journal of Applied Statistics*, 34(7):843–855.
- Zimmer, L. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1998). Evaluation of a three-state adaptive sample size x control chart. *International Journal of Production Research*, 36(3):733–743.
- Zimmer, L. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (2000). Guidelines for the application of adaptive control charting schemes. *International Journal of Production Research*, 38(9):1977–1992.
- Zitzler, E. and Thiele, L. (1999). Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271.

Apéndice A

Algoritmo de Optimización del gráfico DS-C

Librería Requerida

```
library(mco)
```

Parámetros de Entrada

```
alphaDesign  
lambdaUo  
gamma  
ASNmax  
liminfn1  
limsupn1  
limsupn2
```

Funciones Requeridas Para la Optimización

Función Objetivo

```
Fobj <- function(x) {  
  
  ASN <- x[1]+x[2]*((ppois(q = (ceiling(x[4])-1), lambda = (lambdaUo*x[1]),  
    lower.tail = T))-ppois(q = floor(x[3]), lambda = (lambdaUo*x[1]),  
    lower.tail = T)))  
  
  b<-0  
  
  for (i in (floor(x[3])+1):(ceiling(x[4])-1)) {  
    b<-b+dpois(i,lambda = (lambdaU1*x[1]) )*(ppois(q = (floor(x[5])-i),  
      lambda = (lambdaU1*x[2]) , lower.tail = T))  
  }  
  
  Beta <- (ppois(q = floor(x[3]), lambda = lambdaU1*x[1], lower.tail=T)+b)  
  
  c(ASN, Beta)  
}
```

Función que asocia las restricciones

```
Restr<- function(x) {  
  
  a<-0  
  
  for (i in (floor(x[3])+1):(ceiling(x[4])-1)) {  
    a<-a+dpois(i,lambda = (lambdaUo*x[1]) )*(ppois(q =(floor(x[5])-i),  
    lambda = (lambdaUo*x[2]) , lower.tail = T))  
  }  
  
  r1<- ceiling(x[4])-(floor(x[3])+2)  
  r2<- floor(x[5])-ceiling(x[4])  
  r3<- alphaDesign-(1-(ppois(q = floor(x[3]), lambda = lambdaUo*x[1],  
  lower.tail=T)+a))  
  r4<- (limsupn2)-x[2]  
  
  c(r1, r2, r3,r4)  
}
```

Función de Evaluación de Desempeño

```
DS-C <- function(x) {  
  
  ASN <- x[1]+x[2]*((ppois(q =(ceiling(x[4])-1), lambda = (lambdaUo*x[1]),  
    lower.tail = T))-(ppois(q =floor(x[3]), lambda = (lambdaUo*x[1]),  
    lower.tail = T)))  
  
  a<-0  
  b<-0  
  
  for (i in (floor(x[3])+1):(ceiling(x[4])-1)) {  
    a<-a+dpois(i,lambda = (lambdaUo*x[1]) )*(ppois(q =(floor(x[5])-i),  
    lambda = (lambdaUo*x[2]) , lower.tail = T))  
  }  
  
  for (i in (floor(x[3])+1):(ceiling(x[4])-1)) {  
    b<-b+dpois(i,lambda = (lambdaU1*x[1]) )*(ppois(q =(floor(x[5])-i),  
    lambda = (lambdaU1*x[2]) , lower.tail = T))  
  }  
  
  alpha <- 1-(ppois(q = floor(x[3]), lambda = lambdaUo*x[1], lower.tail=T)+a)  
  beta <- ppois(q = floor(x[3]), lambda = lambdaU1*x[1], lower.tail=T)+b  
  
  c(ASN, 1/alpha,1/(1-beta))  
}
```

Ejemplo de Optimización

```
alphaDesign<-0.005
lambdaUo<-0.5
gamma<-1.5
ASNmax<- 1

liminf1<-0.2
limsup1<-0.8
limsup2<-5

lambdaU1<- lambdaUo*gamma
LimSup<-qpois(0.9999,lambdaUo*limsup2)*1.2

res <- nsga2(Fobj, 5,2 , generations=200, lower.bounds=c(liminf1, 0, 0, 1, 1),
            upper.bounds=c(limsup1, limsup2, LimSup, LimSup, LimSup),
            constraints = Restr, cdim = 4, popsize = 1000)

res$par<-res$par[res$value[,1]<=ASNmax,]
res$value<-res$value[res$value[,1]<=ASNmax,]
id<-1:nrow(res$value)
sel<-id[res$value[,2]==min(res$value[,2])]
sol<-rbind(res$par[sel,])
sol<-sol[1,]
sol[3:5]<-ceiling(sol[3:5])-0.5

DS_C(sol)
```

A.0.1. Descripción del Algoritmo DS-C

El algoritmo planteado anteriormente para la optimización del gráfico DS-C, resulta sencillo desde su ejecución hasta su interpretación. Inicialmente se ejecuta la librería (mco), que contiene las funciones del optimizador multiobjetivo nsga2.

Los parámetros de entrada están definidos de la siguiente manera:

- * $\alpha_{Design} < -(\alpha_{max})$, Este parámetro corresponde a los α preestablecido y tomara valores de 0.005, 0.0027 y 0.002.
- * $\lambda_{Uo} < -(\lambda_0)$, para el caso en estudio tomara valores de 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 y 4.0.
- * $\gamma < -\gamma^*$, es considerada la relación de cambio del parámetro λ_0 y tomara valores de 1.5, 2.0 y 3.0.
- * $\lambda_{U1} < -\lambda_{Uo} * \gamma$, λ_1 es el valor que toma el parámetro λ_0 sujeto a la relación de cambio γ^* .
- * ASN_{max} , es el valor máximo que podría tomar ASS.
- * $liminf_1$, es el mínimo valor que puede tomar n_1

- * limsupn1 , es el máximo valor que puede tomar n_1
- * limsupn2 , es el máximo valor que puede tomar n_2
- * LimSup , se refiere al máximo valor que pueden tomar los límites de control.

El Algoritmo Genético multiobjetivo planteado busca optimizar en función del β y del ASS , para ello se definen dos funciones, la primera que contiene la expresión matemática que define a β y ASS y la segunda función que contiene las restricciones propuestas para el proceso de optimización. Los parámetros de salida obtenidos son n_1 , n_2 , WL , UCL_1 y UCL_2 que corresponderán a los diseños óptimos.

Finalmente se define un función que evalúa los parámetros obtenidos de la optimización, con la finalidad de evaluar el ASS , el ARL_0 y el ARL_1 obtenido con los parámetros de diseño obtenidos de la optimización.

Apéndice B

Algoritmo de Optimización del gráfico VSS-C

Librería Requerida

```
library(GA)
```

Parámetros de Entrada

```
ARL0desing  
lambdaUo  
gamma  
ASNmax  
liminfn1  
limsupn1  
limsupn2
```

Funciones Requeridas Para la Optimización

Función Objetivo

```
ARLVSSC<-function(sol) {  
  
  n1<-sol[1]; n2<-sol[2]; WL1<-sol[3]; UCL1<-sol[4]; WL2<-sol[5];  
  UCL2<-sol[6]  
  
  p11<-ppois(floor(WL1),lambda = (lambdaUo*n1), lower.tail = TRUE)  
  p12<-ppois(floor(UCL1),lambda = (lambdaUo*n1) )-p11  
  p13<-1-p11-p12  
  p21<-ppois(floor(WL2),lambda = (lambdaUo*n2), lower.tail = TRUE)  
  p22<-ppois(floor(UCL2),lambda = (lambdaUo*n2) )-p21  
  p23<-1-p21-p22  
  a<-p23-p13  
  b<-p12+p21-(p23-p13)  
  c<- -p21  
  
  if(a>0) {  
    a1<-a
```



```

return(fit)
}

```

Función decodificadora

```

decode <- function(string) {

n1 <- Min[1]+(binary2decimal(string[1:l1])/sum(2^(0:(l1-1))))*(Max[1]-Min[1])
n2 <- Min[2]+(binary2decimal(string[(l1+1):(l1+l2)])/sum(2^(0:(l2-1))))*(Max[2]-Min[2])

UCL1<- 0.5+(1:Max[3])
UCL2<- 0.5+(1:Max[4])

num.UCL1<-
(binary2decimal(string[(l1+l2+l3+1):(l1+l2+l3+l4)])/sum(2^(0:(l4-1))))
num.UCL2<-
(binary2decimal(string[(l1+l2+l3+l4+l5+1):(l1+l2+l3+l4+l5+l6)])/sum(2^(0:(l6-1))))

if(num.LSC1<(1/length(LSC1))) {
  UCL1<-UCL1[1]
} else {
  UCL1<-UCL1[ceiling(num.UCL1*length(UCL1))]
}

if(num.UCL2<(1/length(UCL2))) {
  UCL2<-UCL2[1]
} else {
  UCL2<-UCL2[ceiling(num.UCL2*length(UCL2))]
}

WL1<- seq(0.5,UCL1-1,1)
WL2<- seq(0.5,UCL2-1,1)

num.WL1<-
(binary2decimal(string[(l1+l2+1):(l1+l2+l3)])/sum(2^(0:(l3-1))))
num.WL2<-
(binary2decimal(string[(l1+l2+l3+l4+1):(l1+l2+l3+l4+l5)])/sum(2^(0:(l5-1))))

if(num.WL1<(1/length(WL1))) {
  WL1<-WL1[1]
} else {
  WL1<-WL1[ceiling(num.WL1*length(WL1))] }

if(num.WL2<(1/length(WL2)))WL2<-WL2[1]elseWL2<-WL2[ceiling(num.WL2*length(WL2))]

return(c(n1, n2, WL1, UCL1, WL2, UCL2))
}

```

Ejemplo de Optimización

```
ARL0desing<-200
lambdaUo<-0.5
gamma<-1.5
ASNmax<- 1
liminf1<-0.2
limsup1<-0.8
limsup2<-5
lambdaU1<- lambdaUo*gamma

l1<- 6; l2<- 7; l3<- 5; l4<- 5; l5<- 5; l6<- 5

Min<-c(liminf1, 0, 0, 0)
Max<-c(limsup1, limsup2, qpois(0.9999,lambdaUo*limsup1)*1.2,
        qpois(0.9999,lambdaUo*limsup2)*1.2)

GA.sol<-ga(type = "binary", nBits = l1+l2+l3+l4+l5+l6, fitness = fitness,
           popSize = 400, maxiter = 150, run = 50, pcrossover = 0.98,
           pmutation= 0.03)

sol<-decode(GA.sol@solution[1,])
sol1<-ARLVSSC(sol)
solf<-c(sol,sol1)
names(solf)<-c("n1", "n2", "WL1", "ÜCL1", "WL2", "ÜCL2", "ÄRL0", "ÄRL1", "ÄSS")

solf
```



```

    ARL0calc<-10000
    ARL1calcSS<-10000
    ARL1calczs<-10000
  }
  else {
    INV0<-solve(I-Q0)
    U<-matrix(1, 1, N)
    t<-ceiling((Z0-hl)/((hu-hl)/N))
    L0<-INV0[t,]
    ARL0calc<-L0 %*% %t(U)
  }

  INV1<-solve(I-Q1)
  s<-L0/ARL0calc
  ARL1calcSS<-s %*% %INV1 %*% %t(U)

  L1<-INV1[t,]
  ARL1calczs<-L1 %*% %t(U)

  return(c(hu,ARL0calc, ARL1calcSS, ARL1calczs))
}

```

Función de Optimización

```

OptEWMA.C<-function() {

  cont<-0
  Qres<-matrix(0,50000,5)

  for(h in seq(0.1,5,0.01)) {
    for (lambda in seq(0.03,1,0.01)) {
      cont<-cont+1
      sol<-EWMA.C(h, lambda)
      Res<-c(sol[1],lambda,sol[2:4])
      Qres[cont,]<-Res
    }
  }

  Resp<-Qres[Qres[,3]>ARL0desing,]
  OptSS<-rbind(Resp[Resp[,4]==min(Resp[,4]),])
  OptSS<-OptSS[1,]
  OptZS<-rbind(Resp[Resp[,5]==min(Resp[,5]),])
  OptZS<-OptZS[1,]
  salida<-rbind(OptSS,OptZS)
  colnames(salida)<-c("H","k",".^ARL0",".^ARL1_SS",".^ARL1_ZS")

  return(salida)
}

```

Ejemplo de Optimización

```
lambdaUo<-0.5
```

```
gamma<-1.5
```

```
n<-1
```

```
ARL0desing<-200
```

```
lambdaU1<-gamma*lambdaUo
```

```
OptEWMA.C()
```

Apéndice D

Algoritmo de Optimización del gráfico CUSUM-C

Parámetros de Entrada

lambdaUo
gamma
n
ARL0desing

Funciones Requeridas Para la Optimización

Función Objetivo

```
CUSUM.C<- function(H, k) {  
  
  N<-(H*b)+1  
  nCus<-n*b  
  Q0<-matrix(0,nrow=N,ncol=N)  
  Q1<-matrix(0,nrow=N,ncol=N)  
  
  for(i in 1:N) {  
    y<-((k*b)-i+1)/b  
  
    if(y>=0) {  
  
      Q0[i,1]<-ppois(y, Z0)  
      Q1[i,1]<-ppois(y, Z1)  
  
    }  
  
  }  
  
  for(i in 1:N) {  
  
    for (j in 2:N) {  
      x<-((k*b)-i+j)/b
```

```

    if(x<=nCus) {

      Q0[i,j]<-dpois(x, Z0)
      Q1[i,j]<-dpois(x, Z1)

    }

  }

}

I<-diag(N)
INV0<-solve(I-Q0)
INV1<-solve(I-Q1)
U<-matrix(1, 1, N)

media<-INV0 %* %t(U)
t1<-ceiling(H/N)
L0<-INV0[t1,]
ARL0calc<-L0 %* %t(U)
ARL0calc

s<-L0/ARL0calc
ARL1calcSS<-s %* %INV1 %* %t(U)
ARL1calcSS

L1<-INV1[t1,]
ARL1calczs<-L1 %* %t(U)
ARL1calczs

return(c(ARL0calc, ARL1calcSS, ARL1calczs))

}

```

Función de Optimización

```

OptCUSUM.C<-function(lambdaUo) {

  cont<-0
  Qres<-matrix(0,50000,5)

  for(H in seq(1,20,0.1)) {
    for (k in seq(lambdaUo,lambdaUo*2,0.01)) {
      cont<-cont+1
      sol<-CUSUM.C(H, k)
      Res<-c(H,k,sol[1:3])
      Qres[cont,]<-Res
    }
  }
}

```

```

    }
  }

  Resp<-Qres[Qres[,3]>ARL0desing,]
  OptSS<-rbind(Resp[Resp[,4]==min(Resp[,4]),])
  OptSS<-OptSS[1,]
  OptZS<-rbind(Resp[Resp[,5]==min(Resp[,5]),])
  OptZS<-OptZS[1,]
  salida<-rbind(OptSS,OptZS)
  colnames(salida)<-c("H","k",".^ARL0",".^ARL1_SS",".^ARL1_ZS")

  return(salida)
}

```

Ejemplo de Optimización

```

lambdaUo<-0.5
gamma<-1.5
n<-1
ARL0desing<-200

lambdaU1<-gamma*lambdaUo

OptCUSUM.C(lambdaUo)

```