



VNIVERSITATĪ DE VALÈNCIA

Máster Universitario en Investigación en Didácticas Específicas

COMPLEJIDAD-DIFICULTAD
EN TAREAS CON PATRONES LINEALES
REITERATIVOS EN ESTUDIANTES
DE 4, 5 y 6 AÑOS

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:
DIONISIO FÉLIX YÁÑEZ AVENDAÑO

Tutorizada por:

Dr. Pascual D. Diago Nebot

Dr. David Arnau Vera

Departamento de Didáctica de la Matemática

València, septiembre de 2018

Ficha Técnica

Máster: Máster Universitario en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València (Estudi General)

Especialidad: Didáctica de las Matemáticas

Autor: Apellidos: Yáñez Avendaño
Nombre: Dionisio Félix

Título de la memoria: Complejidad-Dificultad en tareas con patrones lineales reitrativos en estudiantes de 4, 5 y 6 años

Tutor 1: Apellidos: Diago Nebot
Nombre: Pascual D.
Departamento: Didáctica de la Matemática

Tutor 2: Apellidos: Arnau Vera
Nombre: David
Departamento: Didáctica de la Matemática

Fecha de defensa: septiembre, 2018

Calificación:

Palabras clave: Patrones, Educación Infantil, Resolución de Problemas, Información Superflua

Keywords: Patterns, Early Childhood Education, Problem Solving, Surplus Data

Códigos UNESCO: 1299 (Didáctica de las Matemáticas), 6102.02, 6104.01, 6104.02

Resumen: La enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria pretende fomentar el pensamiento lógico y la capacidad para resolver problemas de los estudiantes. Una de las actividades escolares con las que más se trabaja es la tarea de identificación y continuación de patrones lineales de repetición. Un patrón lineal de repetición es una cadena de objetos, habitualmente geométricos (pero no necesariamente), que se repiten de manera periódica. El análisis de las variables que definen a los elementos del patrón permite la elección correcta del objeto que continúa la serie. Por tanto, esta actividad puede ser estudiada desde un contexto de resolución de problemas en el que el estudiante debe discriminar la información superflua de aquella que le permite obtener la regla de generación de la serie y resolver la tarea. Las distintas variables permiten establecer el grado de complejidad de la tarea. En este trabajo analizamos qué aspectos relacionados con la complejidad del patrón influyen en la dificultad experimentada por estudiantes de cuatro, cinco y seis años (dos cursos de Educación Infantil y primero de Educación Primaria).

Abstract: The teaching of mathematics in Early Childhood Education and in the first years of Primary Education aims to encourage logical thinking and the ability to solve problems of students. One of the school activities most applied is the task of identification and continuation of one-dimensional repeating patterns. An one-dimensional repeating pattern is a string of objects, usually geometric (but not necessarily), which are repeated periodically. The analysis of the variables that define the elements of the pattern allows the correct choice of the object that continues the series. Therefore, this activity can be studied from a solving problem-context because of the student should discriminate the surplus information. The different variables establish the degree of complexity of the task. In this work we analyze which aspects related to the complexity of the pattern influence the difficulty experienced by four, five and six years students.

Índice general

1. El problema de investigación	1
1.1. Justificación y propósito de la investigación	1
2. Marco teórico	3
2.1. Patrones lineales de repetición	3
2.2. Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde la resolución de problemas	5
2.2.1. Complejidad y dificultad	6
2.3. Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde el álgebra	7
2.4. Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde las Matemáticas	8
3. Objetivos de la investigación	13
4. Material y métodos	15
4.1. Desarrollo de la investigación	15
4.2. Participantes	15
4.3. Las variables de tarea y el diseño de las tareas	16
4.4. Diseño del cuestionario	18
4.5. Desarrollo de la fase de enseñanza	19
4.6. Desarrollo del estudio de grupo	23
4.7. Desarrollo del estudio de casos	23
5. Análisis y discusión de resultados	27
5.1. Estudio de grupo	27
5.1.1. Análisis general	28
5.2. Análisis por longitud del núcleo	29
5.2.1. Análisis por longitud del núcleo por grupos de edades	31
5.2.2. Análisis por longitud del núcleo entre grupos de edades	32
5.3. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo	33
5.3.1. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo por gru- pos de edades	35
5.3.2. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo entre grupos de edades	35
5.4. Análisis de la influencia de distractores	37
5.4.1. Análisis de la influencia de la presencia de distractores por grupos de edad	38

5.4.2. Análisis de la influencia de la presencia de distractores entre grupos de edad	39
5.5. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo	39
5.5.1. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo por grupos de edad	41
5.5.2. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo entre grupos de edad	41
5.6. Análisis cualitativo: resolución de las tareas por parejas	42
5.6.1. Análisis por longitud del núcleo	44
5.6.2. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo	51
5.6.3. Análisis de la influencia de la presencia de distractores	56
5.6.4. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo	67
6. Conclusiones y trabajo futuro	71
Referencias	75
Índice de Tablas	79
Índice de Figuras	81

1

El problema de investigación

1.1. Justificación y propósito de la investigación

En las últimas décadas las tareas de identificación de patrones en primeras edades escolares han sido objeto de un amplio estudio. En el área de la psicología y desde principios de los 70, la producción científica se centró en estudiar el grado de complejidad estructural de los patrones ([Simon, 1972](#); [Sternberg, 1974](#); [Vitz y Todd, 1967, 1969](#)) y en detectar la relación entre la dificultad de la tarea, su complejidad y el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes ([Greeno y Simon, 1974](#)). Desde la educación matemática, son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la importancia de las tareas de identificación de patrones para el desarrollo de diferentes procesos cognitivos y destrezas, tales como el reconocimiento de relaciones matemáticas generales o el uso de expresiones simbólicas para expresarlas. Hay evidencias de que los procesos cognitivos puestos en juego cuando los estudiantes resuelven tareas de identificación de patrones favorecen el desarrollo del razonamiento lógico y matemático ([Kamii, Rummelsburg, y Kari, 2005](#)) y que preparan y desarrollan el pensamiento algebraico en el estudiante ([Kieran, 2018](#); [National Council of Teachers of Mathematics, 2000](#); [Orton y Orton, 1999](#); [Sarama y Clements, 2009](#); [Zazkis](#)

y Liljedahl, 2002). En esta línea Blanton y cols. (2018) destacan este tipo de actividades como centrales entre las tareas propias del Early Algebra ya que permiten al estudiante generalizar, representar, justificar y razonar sobre las estructuras matemáticas y las relaciones de los objetos circundantes. Desde esta perspectiva, las tareas de reconocimiento e identificación de patrones pueden ser utilizadas para introducir el álgebra en niveles donde lo impediría el simbolismo algebraico (Alsina y Giralt, 2017; Morales, Cañadas, y Castro, 2017; Papic, 2015).

Dentro de la Didáctica de la Matemática, algunas investigaciones han intentado establecer relaciones entre las características de las tareas de seriación y su dificultad (Morales y cols., 2017). De hecho, la preocupación por encontrar una relación entre la complejidad de una tarea escolar con contenido matemático y su dificultad es un asunto central de la investigación en Educación Matemática. Desde el punto de vista de la docencia, establecer esta relación ocupa la atención del profesor/a, de manera implícita o explícita, tanto en el diseño de secuencias de enseñanza como en la de pruebas de evaluación. Desde el punto de vista de la investigación, identificar estas relaciones proporciona potentes herramientas empíricas. Este tipo de estudios forman parte de la tradición del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y un buen ejemplo sería el de la tesis doctoral de Fernando Cerdán Pérez (Cerdán, 2008) en la que se pretendía encontrar la relación entre medidas de la complejidad de la estructura matemática de los problemas verbales y su dificultad media. Otro ejemplo más reciente sería la tesis doctoral de Clara Benedicto Baldonado (Benedito, 2018). No obstante, somos conscientes que estos estudios son un paso intermedio hacia soluciones futuras en las que se pueda establecer una relación entre complejidad y la dificultad esperada para un estudiante con unas determinadas características.

En este trabajo pretendemos estudiar la dificultad que presentan niños de 2º curso de Educación Infantil, 3º curso de Educación Infantil y 1º de Educación Primaria (que inician el curso el año que cumplen 4, 5 y 6 años, respectivamente) ante tareas de seriación con diferentes características. Para este fin adoptamos un diseño experimental mixto cuantitativo-cualitativo.

El documento que se presenta se distribuye de la siguiente manera: En el capítulo 2 presentamos el marco teórico relacionado con el trabajo con patrones en la educación matemática escolar. En particular se describen algunas implicaciones relacionadas de las tareas de seriación desde el enfoque de la resolución de problemas escolares y desde el del álgebra temprana. En el capítulo 3 se describe el propósito de esta investigación. En el capítulo 4 se describe el experimento de enseñanza, detallando el desarrollo de la investiga-

ción y el material utilizado. El capítulo 5 contiene el análisis y discusión de los resultados obtenidos en la resolución de las tareas de seriación. En dicho capítulo se presenta un estudio cuantitativo de grupo y un estudio de casos cualitativo para estudiantes de cuatro, cinco y seis años de edad. Por último, en el capítulo 6 se recogen las conclusiones del estudio junto con las posibles líneas de trabajo futuro.

2

Marco teórico

En las últimas décadas, el trabajo con patrones ha tomado un papel importante en la educación matemática escolar. Como parte de sus estándares, el [National Council of Teachers of Mathematics \(2000\)](#) incluye el reconocimiento de patrones y estructuras dentro de los programas instruccionales relacionados con el álgebra, la resolución de problemas o el análisis analítico y la demostración matemática. En el currículo español, los patrones tienen un carácter fundamental en Educación Primaria debido a que se propone que los alumnos deben ser capaces de describir, analizar y encontrar patrones en contextos numéricos, geométricos y funcionales al finalizar este nivel educativo ([Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2014](#)).

2.1. Patrones lineales de repetición

Dado que el término *patrón* aparece en gran variedad de contextos, lo definiremos aquí desde la perspectiva matemática, acercándonos a la idea de regularidad predecible que, por lo general, implica relaciones lógicas, numéricas o espaciales entre elementos,

eventos, o acciones (Mulligan y Mitchelmore, 2009). En este trabajo nos centraremos en los llamados *patrones de repetición o reiterativos*, término que hace referencia a objetos de una colección en los que se puede percibir cierta estructura cíclica en sus elementos (Owen, 1995).

Por otra parte, el trabajo previo a la identificación de patrones en una colección de objetos exige el establecimiento de semejanzas y diferencias entre ellos. Como indica Boule (1995), en primeras edades escolares la aproximación a un conjunto de objetos siempre tiende a ser lineal, bien por el gesto (tomar los elementos uno a uno), por la vista (movimiento de la mirada para reconocerlos) o por la palabra (nombrándolos). Debido a la fuerte influencia piagetiana de las llamadas experiencias prenuméricas, en la literatura existente al trabajo de identificación y continuación de patrones lineales se le suele atribuir, al menos a nivel español, el nombre de *tareas de seriación*. Pese a que el concepto *serie* tiene un significado matemático diferente al aquí expuesto, optamos por continuar con la nomenclatura del área.

De este modo, llamaremos *serie reiterativa o de alternancia* al conjunto lineal cuyos elementos están dotados de un patrón de repetición cíclico. Las series de alternancia son, habitualmente, las más usadas en Educación Infantil. Hablaremos de *núcleo* para referirnos al conjunto de menor número de elementos que permitiría generar la serie dada por repetición del mismo (Castro, 1995). Así pues, a cada serie reiterativa es posible asignarle un valor que dará cuenta de la longitud del núcleo que conforma el patrón lineal de repetición de dicha serie, como se muestra en la Figura 2.1.

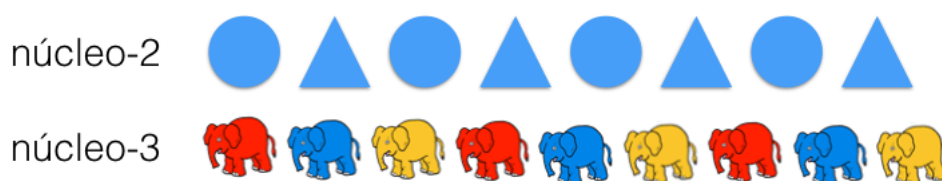


Figura 2.1: Ejemplos de dos series con patrones de repetición lineales, la primera de núcleo-2 y la segunda de núcleo-3.

Dado un conjunto lineal de objetos, llamaremos *atributo* a cada una de las características que permiten identificar a un objeto y compararlo con el resto mediante el establecimiento de semejanzas y diferencias. Llamaremos *descriptor* al conjunto de atributos relacionados entre sí. Por ejemplo, el color es un descriptor que corresponde al conjunto de atributos “ser rojo”, “ser verde”, etc. A partir de la comparación de atributos se puede llevar a cabo la identificación del núcleo en una serie reiterativa, dando lugar a lo que se

denomina *regla* o *criterio de generación*. Este criterio constituye las instrucciones lógicas que se han de seguir con el fin de construir dicha serie (Figura 2.2). Los descriptores presentes en los elementos de la serie que no muestren variación cíclica a lo largo de la serie los denominaremos *distractores* (Figura 2.3). Es importante resaltar que las relaciones lógicas que permiten la identificación del núcleo, así como de la deducción de la regla de generación de la serie, está ligada exclusivamente a los descriptores y no a los distractores.



Figura 2.2: Serie generada a partir de la regla círculo rojo - cuadrado amarillo - triángulo azul con núcleo-3 y dos descriptores (color y forma).



Figura 2.3: Serie reiterativa de núcleo-2 con un descriptor (forma) y un distractor (color).

2.2. Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde la resolución de problemas

Llamamos *proceso de resolución de un problema* “a la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (Puig y Cerdán, 1988, p.21). La resolución de problemas puede ser observada, explicada y caracterizada desde muchos puntos de vista y ha sido una de las áreas que más se ha desarrollado en la investigación en educación matemática de la última década (Weber y Leikin, 2016). Desde esta perspectiva la resolución de problemas implica reconocer y comprender una tarea gracias a un aprendizaje previo y experimentar cierta perplejidad, pero no confusión total, ante la misma. Esto implica que una misma tarea propuesta a sujetos con distintas edades, capacidades o formación previa pueda ser considerada un ejercicio, un problema o un enigma (Puig, 1996).

Desde este prisma, una tarea de identificación y continuación de un patrón reiterativo con presencia de distractores puede entenderse y estudiarse desde una perspectiva de resolución de problemas en la que aparece información superflua. Típicamente en esta situación un estudiante debe eliminar la información innecesaria (distractor) y solo atender a la necesaria (descriptores) para identificar el patrón. Así, en el ejemplo de la Figura 2.3 el único descriptor que muestra un cambio cíclico a lo largo de la serie es la forma, mientras que el color no responde a ninguna regla de generación cíclica. En este caso el color actúa como distractor, ofreciendo un grado de libertad a la hora de continuar la serie, pues el resolutor puede elegir un círculo del color que desee para resolver la tarea. Es por ello que podemos definir como *grado de libertad de una serie reiterativa* como el número de distractores que aparecen en ella.

2.2.1. Complejidad y dificultad

En la escuela, una situación de enseñanza-aprendizaje de resolución de problemas a menudo satisface las siguientes condiciones: i) hay una solución única que resuelve el problema; ii) dicha solución puede ser obtenida a partir de la información que detalla el problema; y iii) suele haber una clara diferencia en el enunciado de la tarea entre información necesaria para su resolución e información superflua.

El carácter relativo de la idea de problema (Brownell, 1942) supone un obstáculo a la hora de establecer una relación entre su *complejidad* (que puede no ser única, ya que puede estar ligada a la vía de resolución elegida) y su *dificultad*. En el caso, por ejemplo, de los problemas verbales, diversos estudios han intentado definir medidas de complejidad para los problemas o las familias de problemas que tuvieran en cuenta los aspectos anteriores y que permitieran vincular complejidad con dificultad (Cerdán, 2008). En este sentido, y nuevamente dentro del campo de la resolución de problemas verbales, la presencia de información superflua o contradictoria, o la ausencia de datos pueden considerarse como factores que introducen complejidad en la tarea (Puchalska y Semadeni, 1987).

Atendiendo a estudios previos, resulta plausible considerar las tareas de seriación como actividades de resolución de problemas para los estudiantes primeras edades escolares. En lo que se refiere al reconocimiento de patrones, según Threlfall (1999), hay dos factores críticos. Por un lado, la complejidad estructural del patrón de la tarea correspondiente. Por otro, la capacidad del estudiante para identificar el patrón, que a su vez está relacionada con la capacidad de identificar la unidad de repetición, el núcleo de la serie que genera toda la serie reiterativa, y que dará cuenta de la dificultad experimentada por el estudiante

al resolver la tarea.

En el caso de las series reiterativas, la complejidad viene determinada por la combinación de los diferentes valores tomados por las variables que conforman la tarea de seriación. Las variables que caracterizan la complejidad de dicha tarea de seriación pueden hacer referencia a la propia estructura de la serie (las relaciones lógico-matemáticas que caracterizan al patrón de repetición, como por ejemplo la longitud del núcleo o el número de descriptores presentes) o a la propia tarea de seriación (número de elementos del conjunto de referencia que pueden usarse para continuar la serie, soporte en el que se facilita la tarea, etc.). Por otra parte, la dificultad de la tarea de seriación vendrá definida como aquella medida que da cuenta de la dificultad experimentada por los estudiantes en el proceso de resolución de dicha tarea. Para cada tarea de seriación, definiremos la dificultad de la misma como porcentaje de aciertos.

2.3. Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde el álgebra

Habitualmente, el aprendizaje del álgebra en los primeros cursos de la Educación Secundaria suele acarrear dificultades para los estudiantes. Muchos estudios han tenido, y continúan teniendo, como objeto determinar el origen de estas dificultades (Kieran, 2014). Estas investigaciones atribuyen el origen de las dificultades al conocimiento aritmético de estudiante adquirido durante su etapa en Educación Primaria.

Desde el punto de vista de la investigación y la innovación curricular, han aparecido dos paradigmas conocidos como el enfoque del álgebra temprana (*early algebra*) y la *pre-algebra*. Desde la perspectiva de la pre-álgebra, las dificultades en el inicio de la enseñanza del álgebra son consecuencia de la dificultad para adaptar el conocimiento aritmético ya existente. Como consecuencia se recurre a métodos mediadores. Desde el álgebra temprana, estas dificultades serían la consecuencia heredada de una enseñanza pobre en la etapa de primaria, basada exclusivamente en tareas propias de la aritmética (Carragher, Schlie-mann, Brizuela, y Darrell, 2006). Así, desde el álgebra temprana, una de las finalidades de la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades escolares sería el desarrollo del pensamiento algebraico (o pre-algebraico) del estudiante además del desarrollo del pensamiento lógico-formal. Bajo esta premisa, las propuestas curriculares deberían secuenciar tareas con contenido algebraico en edades en las que típicamente no sería posible, con el fin de potenciar el pensamiento algebraico temprano. Estas actividades basadas en procesos

de generalización se iniciarían con relaciones estructurales mediante patrones y, posteriormente, con relaciones aritméticas, introduciendo, a su vez, el uso de símbolos y signos (Blanton y cols., 2018; Carraher y cols., 2006; Kaput, 2008; Mason, Stephens, y Watson, 2009, entre otros). Desde esta perspectiva es habitual encontrar tareas de identificación y continuación de patrones de tipo lineal, en las que el alumno debe colocar los elementos de un conjunto de referencia de forma que estos se sucedan unos a otros atendiendo a uno o varios criterios, identificando y continuando el patrón. Abordar este tipo de tareas en la primera infancia proporciona un aprendizaje precoz relacionado con el orden, la secuenciación, la comparación y la clasificación (Papic y Mulligan, 2005), pues exige que el estudiante identifique y describa atributos en colecciones de objetos, intrínsecas al patrón de la tarea de seriación.

A nivel curricular la importancia de las tareas relacionadas con el reconocimiento de patrones en primeras edades escolares se comienza a visibilizar a través de la incorporación de la enseñanza del álgebra en los documentos curriculares de diversos países como Estados Unidos, Singapur, Australia o Nueva Zelanda. A nivel de investigación, los estudios sobre pensamiento algebraico e identificación de patrones de repetición en edades tempranas son todavía escasos (Sarama y Clements, 2009).

2.4. Las tareas de identificación y continuación de patrones lineales de repetición desde las Matemáticas

Finalmente planteamos una aproximación matemática al concepto de patrón lineal de repetición. Así, desde el punto de vista matemático, podemos tomar en consideración las siguientes definiciones:

Sea $\mathcal{U} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N$ un universo (conjunto finito) de elementos con N atributos, $A_1 \times \dots \times A_N$, que determinan cada elemento, llamamos serie, que denotaremos como $\{x^n\}_{n \geq 0} = \{(a_1^n, a_2^n, \dots, a_N^n)\}_{n \geq 0}$ a una sucesión infinita de elementos de \mathcal{U} de tal manera que existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que si $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_k}$ es el conjunto con $k \in \mathbb{N}^*$ atributos determinados entonces:

$$(a_{i_1}^n, a_{i_2}^n, \dots, a_{i_k}^n) = (a_{i_1}^{n+n_0}, a_{i_2}^{n+n_0}, \dots, a_{i_k}^{n+n_0}), \forall n \in \mathbb{N}.$$



Figura 2.4: *Serie reiterativa núcleo-2.*

Con las definiciones dadas en las secciones anteriores, la regla de generación de la serie mostrada en la Figura 2.4 sería “triángulo rojo seguido de cuadrado azul”. Usando la nomenclatura matemática tendríamos que el patrón mostrado en la serie de la Figura 2.4 vendría expresado tomando en consideración $A_1 = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ como los atributos correspondientes al descriptor color y $A_2 = \{\Delta, \square\}$ como los atributos correspondientes al descriptor forma. Así, el patrón que sigue la serie de la Figura 2.4 se corresponde con

$$x^n = x^{n+2}, \forall n > 0$$

$$\begin{aligned} (a_1^1, a_2^1) &= (\text{rojo}, \Delta) \\ (a_1^2, a_2^2) &= (\text{azul}, \square) \end{aligned}$$

Siendo $\mathcal{U} = A_1 \times A_2 = \{(\text{rojo}, \Delta), (\text{azul}, \Delta), (\text{rojo}, \square), (\text{azul}, \square)\}$

Tal y como hemos indicado anteriormente, el núcleo se corresponde con el menor subconjunto formado con elementos de la serie en el que puede identificarse el patrón de repetición, siendo la longitud del núcleo el cardinal de dicho subconjunto, i.e.,

$$n_0 = \min\{j \in \mathbb{N}^* : (a_{i_1}^n, a_{i_2}^n, \dots, a_{i_k}^n) = (a_{i_1}^{n+j}, a_{i_2}^{n+j}, \dots, a_{i_k}^{n+j}), \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que

$$\{j \in \mathbb{N}^* : (a_{i_1}^n, a_{i_2}^n, \dots, a_{i_k}^n) = (a_{i_1}^{n+j}, a_{i_2}^{n+j}, \dots, a_{i_k}^{n+j}), \forall n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{M}(n_0),$$

donde $\mathcal{M}(n_0)$ es el conjunto de múltiplos de n_0 . Además,

$$n_0 = m.c.m.\{n_{i_1}, \dots, n_{i_k}\},$$

con

$$a_{i_j}^n = a_{i_j}^{n+n_{i_j}}, \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k.$$

Cada n_{i_j} con $1 \leq j \leq k$ se corresponde con la longitud del patrón.

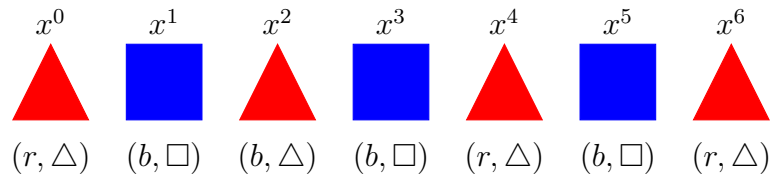


Figura 2.5: Estructura matemática de la serie reiterativa de la Figura 2.4.

Haciendo uso de este desarrollo matemático, los bloques lógicos de Dienes caracterizados por los descriptores color, forma, tamaño y grosor vendrían definidos por:

$$A_1 = \text{color}, \quad A_2 = \text{forma}, \quad A_3 = \text{tamaño}, \quad A_4 = \text{grosor}.$$

Así,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{azul}(b), \text{rojo}(r), \text{amarillo}(y)\}, \\ A_2 &= \{\text{cuadrado}(\square), \text{triángulo}(\Delta), \text{rectángulo}(\text{[]}), \text{círculo}(\text{O})\} \\ A_3 &= \{\text{grande}(g), \text{pequeño}(s)\}, \\ A_4 &= \{\text{grueso}(l), \text{fino}(t)\}. \end{aligned}$$

En este caso, seleccionando solo los bloques finos (por brevedad, i.e., A_4 fijado en fino), obtendríamos el siguiente universo:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = A_1 \times A_2 \times A_3 = \{ &(b, \square, g), (r, \square, g), (y, \square, g), (b, \Delta, g), (r, \Delta, g), (y, \Delta, g), \\ &(b, \text{O}, g), (r, \text{O}, g), (y, \text{O}, g), (b, \text{[]}, g), (r, \text{[]}, g), (y, \text{[]}, g), \\ &(b, \text{O}, s), (r, \text{O}, s), (y, \text{O}, s), (b, \square, s), (r, \square, s), (y, \square, s), \\ &(b, \text{[]}, s), (r, \text{[]}, s), (y, \text{[]}, s), (b, \Delta, s), (r, \Delta, s), (y, \Delta, s)\}. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \text{[blue square]}, \text{[red square]}, \text{[yellow square]}, \text{[blue triangle]}, \text{[red triangle]}, \text{[yellow triangle]}, \text{[blue circle]}, \text{[red circle]}, \text{[yellow circle]}, \\ \text{[blue rectangle]}, \text{[red rectangle]}, \text{[yellow rectangle]}, \text{[blue circle]}, \text{[red circle]}, \text{[yellow circle]}, \text{[blue square]}, \text{[red square]}, \text{[yellow square]}, \\ \text{[blue thin square]}, \text{[red thin square]}, \text{[yellow thin square]}, \text{[blue thin triangle]}, \text{[red thin triangle]}, \text{[yellow thin triangle]} \end{array} \right\}$$

Basándonos en este universo se podrían construir diferentes series reiterativas, con

diferentes patrones y longitudes de núcleo según se desee crear tareas más o menos complejas. Por ejemplo, teniendo en consideración el descriptor color y longitud de núcleo-2, se podría crear la serie mostrada en la Figura 2.6.

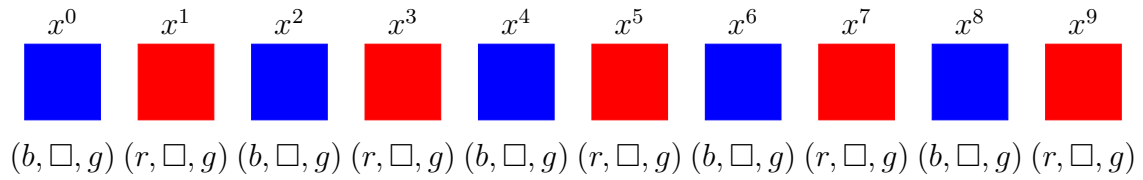


Figura 2.6: Ejemplo de serie reiterativa formada con elementos de los bloques lógicos.

3

Objetivos de la investigación

Partiendo de la perspectiva que las tareas de seriación pueden considerarse como tareas de resolución de problemas para los estudiantes de los primeros niveles educativos, nos planteamos los siguientes objetivos de investigación:

- Determinar en qué medida distintas variables de las tareas de seriación influyen en su dificultad. En concreto, estudiar el efecto de variables como la longitud del núcleo, el tipo de descriptores, la presencia de distractores o la repetición de atributos a lo largo de un patrón. Determinar las diferencias en el dificultad en función de los niveles educativos.
- Describir las actuaciones de los estudiantes de los distintos niveles cuando resuelven tareas de seriación. Este objetivo tiene la finalidad principal de intentar dar explicaciones plausibles a las relaciones entre complejidad y dificultad derivadas del primer objetivo.

4

Material y métodos

4.1. Desarrollo de la investigación

Para abordar los objetivos propuestos diseñamos una intervención en la que podía distinguirse un estudio de grupo y un estudio de casos. Tanto en uno como en otro estudio, los sujetos debían resolver colecciones de tareas de seriación. Como consecuencia, una parte importante de la fase empírica fue la determinación de variables de tarea que pudieran servir identificar criterios de complejidad de las mismas.

4.2. Participantes

Los participantes en el estudio de grupo son estudiantes de tres cursos escolares de 2º, 3º de Educación Infantil (4 y 5 años) y 1º de Educación Primaria (6 años) de un colegio concertado de la Comunitat Valenciana. De estos cursos se eligen al azar a 33 alumnos de 4 años, 31 de 5 años y 33 de 6 años. El tamaño de la muestra es adecuado

teniendo en cuenta el carácter exploratorio del experimento. Se eligieron estudiantes de esta edad dado que están familiarizados con el trabajo con patrones lineales de repetición, pero tienen dificultades a la hora de resolver tareas con series de alternancia. Es decir, se puede afirmar que estas tareas suponen un problema para ellos. La elección de estos tres cursos nos permite establecer comparaciones en la resolución entre grupos de edades y, por tanto, determinar la relación complejidad-dificultad en tareas de seriación.

En el estudio de casos, se escogen estudiantes de los tres cursos atendiendo a sus actuaciones en el estudio de grupo. Se pretende de esta manera formar parejas de estudiantes con dificultades similares a la hora de resolver tareas de seriación con unas determinadas características. La intención de este estudio es identificar los procesos cognitivos que ponen en juego los estudiantes cuando resuelven las tareas tanto de manera correcta como incorrecta.

4.3. Las variables de tarea y el diseño de las tareas

Dado que se trata de un estudio sobre resolución de problemas que involucran a estudiantes resolviendo tareas en un determinado contexto (identificación y continuación de patrones lineales de repetición), será necesario definir las variables de tarea (Kilpatrick, 1978). El número de variables, y los posibles valores que tomarían las mismas, sería inabordable en un estudio como el que se presenta. Por esta razón, decidimos reducir las variables al siguiente conjunto:

- Longitud del núcleo (LN). Limitaremos este estudio a series reiterativas núcleo-2 ($LN = 2$) y núcleo-4 ($LN = 4$). En el estudio de grupo, denotaremos como $n2$ la variable formada por suma de las respuestas correctas para las series de núcleo-2 y como $n4$ las de núcleo-4 (ver Capítulo 5).
- Número de descriptores presentes en el núcleo (ND). Consideraremos series reiterativas en las que intervengan 1, 2 a la vez. Con ellos se realizarán tareas con $LN = 2$ y $LN = 4$. En el estudio de grupo, definimos las variables $d1$ y $d2$ como las formadas por la suma de respuestas correctas con $ND = 1, 2$.
- Naturaleza o tipo del descriptor (para cada uno de los descriptores presentes en la serie, D_i). Tomaremos en consideración los descriptores color, forma y tamaño, en este orden.

- Distractores (o grados de libertad, GL). Para estudiar los efectos de la aparición de información superflua en tareas con patrones lineales reiterativos, en la generación de series con tres descriptores ($ND = 3$) se considerará uno de ellos como distractor ($GL = 1$), tanto para series con $LN = 2$ como $LN = 4$. En el estudio de grupo, siguiendo la notación ya utilizada ($d1, d2$) llamamos a la suma de respuestas correctas de las tareas con un distractor, tres descriptores, $d3$.

Con el fin de categorizar y establecer relaciones de complejidad estructural en las tareas administradas, a cada una de las series reiterativas se le asignará un código alfanumérico del tipo $[LN, D_i, GL]$. Este código dará cuenta de las variables implicadas en dicha tarea. En él LN tomará los valores 2 o 4, se añadirán tantas etiquetas c, f o t como descriptores (D_i) en juego tenga el patrón lineal de repetición. En el caso de que la serie tenga tres descriptores, dado que necesariamente uno de ellos será distractor (por el diseño del experimento), se indicará con la etiqueta d al final del código. Por ejemplo, la tarea con código $2cf$ (Figura 4.1, arriba) caracteriza una serie reiterativa núcleo-2, con descriptores color y forma presentes en el núcleo y sin distractores. En cambio, la tarea $2cfd$ (Figura 4.1, abajo) nos define una serie reiterativa núcleo-2 con tres descriptores, dos de ellos actuando como tales (color y forma) y uno (tamaño) actuando como distractor. Como se observa en la Figura 4.1, la variable ND no se especifica en el código asignado, pues el número de descriptores se puede derivar a partir de las etiquetas c, f o t presentes en el código.

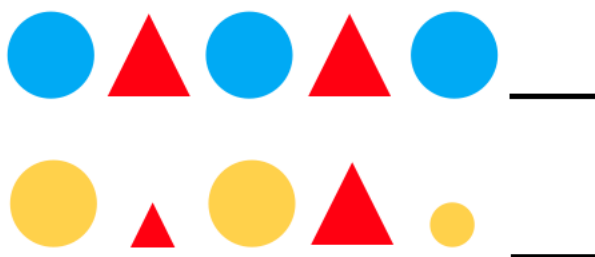


Figura 4.1: Serie reiterativa con variables de tarea $2cf$ (arriba) y $2cfd$ (abajo).

En general, se diseñan las tareas para que los atributos asignados a cada descriptor D_i sean siempre diferentes dentro del núcleo de repetición del patrón. No obstante, se introduce una variable que permita estudiar el efecto que produce que un descriptor repita atributo dentro del núcleo de repetición. Sternberg (1974) encontró que las seriaciones sin atributos repetidos en el núcleo, del tipo ABCDABCD (en la nomenclatura tradicional) resultaban más difíciles para los estudiantes que las que repetían atributos, del tipo AABCAABC,

pese a ser ambas de núcleo-4. Así, introduciremos la variable *repetición o no de atributos dentro del núcleo*. En nuestro caso esta variable solo podrá afectar a las seriaciones núcleo-4 (no tendría sentido en las núcleo-2), como se puede ver en la Figura 4.2. Estas series se etiquetarán introduciendo el subíndice b al final del código.



Figura 4.2: Serie reiterativa sin repetición de atributos en el núcleo ($4f$, arriba) y con repetición de atributos ($4f_b$, abajo).

En el diseño de la tarea se decide fijar otras variables implicadas. Así, se opta por mostrar siempre al menos dos repeticiones completas del núcleo y, como se puede ver en las Figuras 4.1, 4.2 o 4.3, nunca el primer elemento mostrado en la serie reiterativa será el que resuelve la tarea.

Por otra parte, se decide facilitar un conjunto de referencia para que el estudiante elija el elemento que continúa la serie. Este conjunto de posibles soluciones se colocará debajo de cada una de las series reiterativas administradas en el cuestionario. Esta limitación nos obliga a fijar otras variables de tarea relacionadas con el conjunto de referencia. Para ello, limitaremos el conjunto de referencia para continuar la serie a cinco elementos. De estos elementos, solo uno será el elemento correcto; uno (para el caso $LN = 2$) o dos (caso $LN = 4$) serán otros elementos que aparecen en la serie reiterativa mostrada en la tarea y otros tres (caso $LN = 2$) o dos (caso $LN = 4$) serán elementos considerados como distractores que compartirán un atributo con el elemento correcto que continúa la serie. Con todo, el aspecto general de cada una de las tareas es el que se muestra en la Figura 4.3.

4.4. Diseño del cuestionario

Hemos diseñado un cuestionario formado por 19 tareas (Tabla 4.1). En todas ellas se plantea una serie de alternancia y para resolverlas se debe identificar qué elemento, de los ofrecidos, continúa la serie. Para evitar la presencia de tareas isomorfas y poder dar respuesta a los objetivos marcados, hemos utilizado los distintos valores de las variables

de tarea expuestas anteriormente. En la Fig. 4.3 se pueden ver algunos ejemplos de las tareas propuestas en el cuestionario.

Tabla 4.1: Configuración de las tareas del cuestionario por variables involucradas

ND	Tareas					
	Núcleo-2 $LN = 2$			Núcleo-4 $LN = 4$		
1	color $2c$	forma $2f$	tamaño $2t$	color $4c$ y $4c_b$	forma $4f$ y $4f_b$	tamaño $4t$
2 $GL = 0$	color, forma $2cf$	color, tamaño $2ct$		color, forma $4cf$	color, tamaño $4ct$ y $4ct_b$	
3 $GL = 1$	color, forma distractor $2cf$	color, tamaño distractor $2ct$		color, forma distractor $4cfd$ y $4cfd_b$	color, tamaño distractor $4ctd$ y $4ctd_b$	

4.5. Desarrollo de la fase de enseñanza

Para la realización del estudio se planificaron dos fases diferenciadas: una primera fase de enseñanza y una segunda fase de experimentación. La fase de enseñanza se llevó a cabo en una única sesión, en la que se administraron 24 tareas de activación. Inicialmente, se presentaron los descriptores color, forma y tamaño (Figuras 4.4 y 4.5) que incluían, de manera aislada, los descriptores que se usaron posteriormente en las tareas de seriación de la fase experimental.

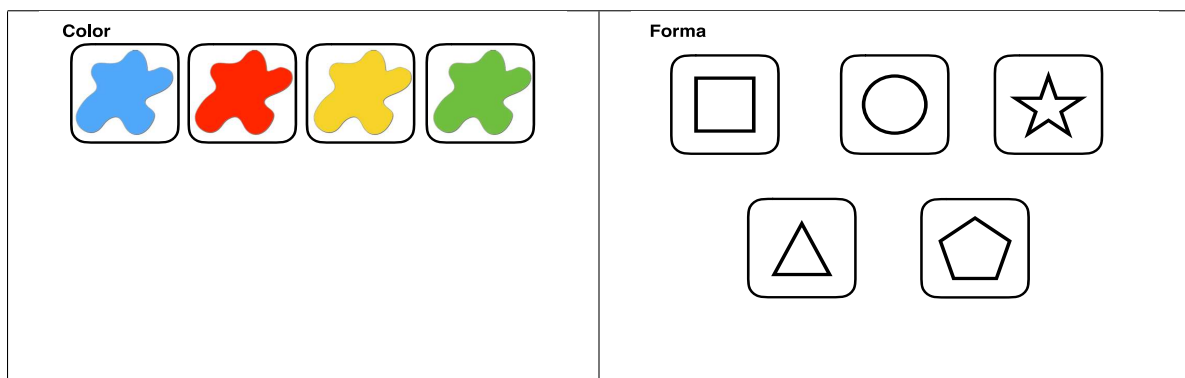


Figura 4.4: Fase de enseñanza: Descripción de los descriptores color y forma.

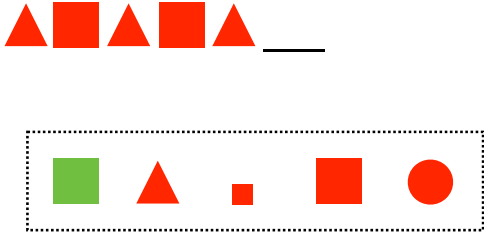
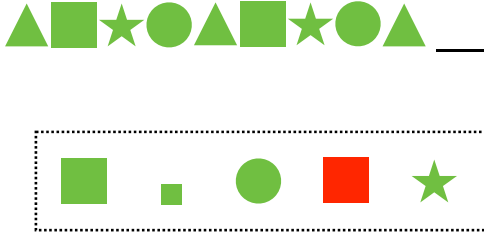






 <p>ID: _____ 2f</p>	 <p>ID: _____ 4f</p>
 <p>ID: _____ 2cf</p>	 <p>ID: _____ 4cf</p>
 <p>ID: _____ 4ctd</p>	 <p>ID: _____ 4ctd</p>
 <p>ID: _____ 2ct</p>	 <p>ID: _____ 2ctd</p>

Figura 4.3: Ejemplos de tareas del cuestionario: 2f, 4f, 2cf, 4cf, 4ctd, 4ctd, 2ct y 2ctd.

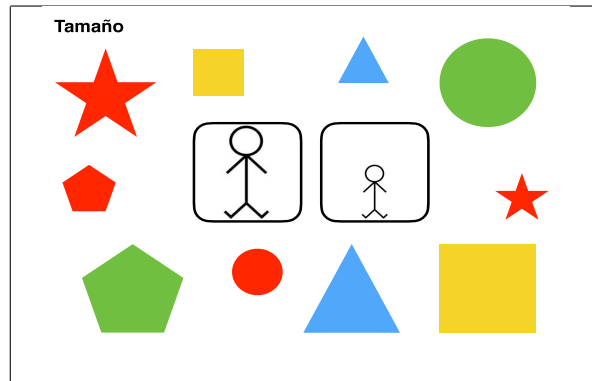


Figura 4.5: Fase de enseñanza: Descripción del descriptor tamaño.

En un segundo momento, se planteaban tareas mediante juegos lógicos, tablas de doble entrada y máquina de cambios en las que los objetos que se debían utilizar para resolverlas se caracterizaban mediante combinaciones de varios descriptores (Figuras 4.6, 4.7 y 4.8).

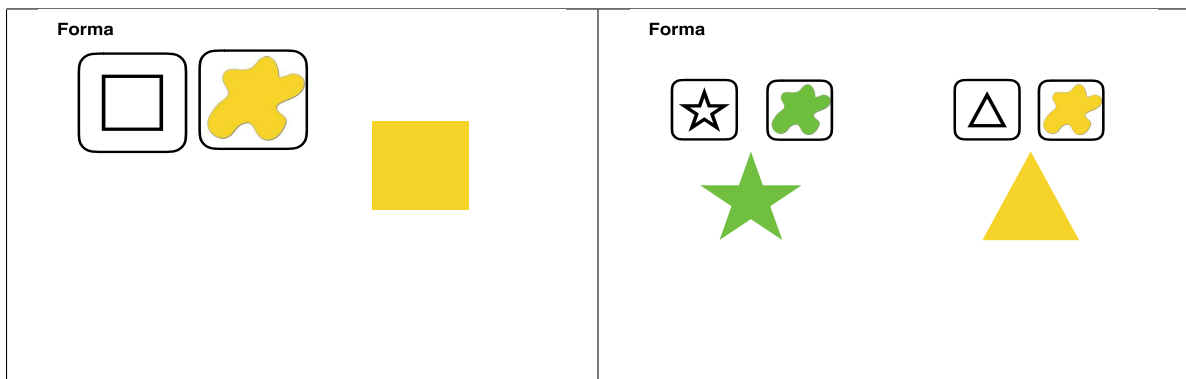


Figura 4.6: Fase de enseñanza: Relación entre los descriptores color, forma y tamaño.

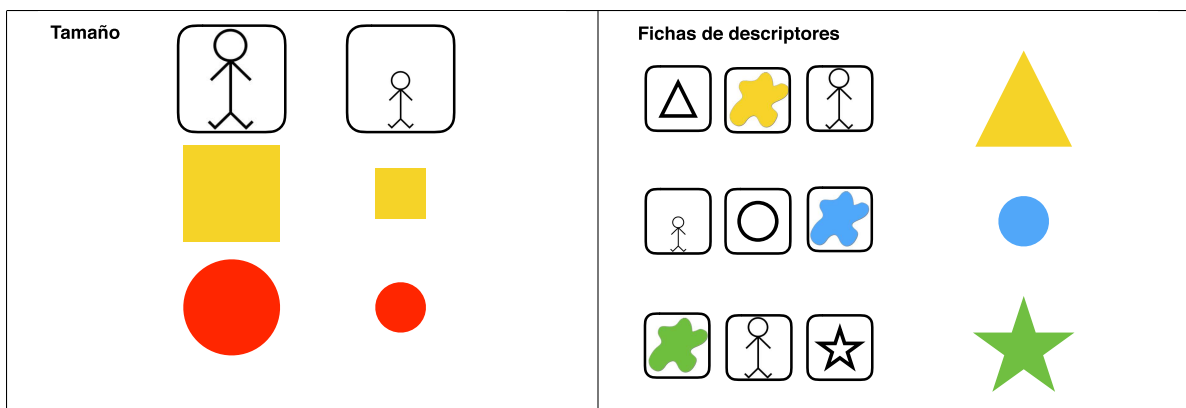


Figura 4.7: Fase de enseñanza: Relación entre los descriptores color, forma y tamaño.

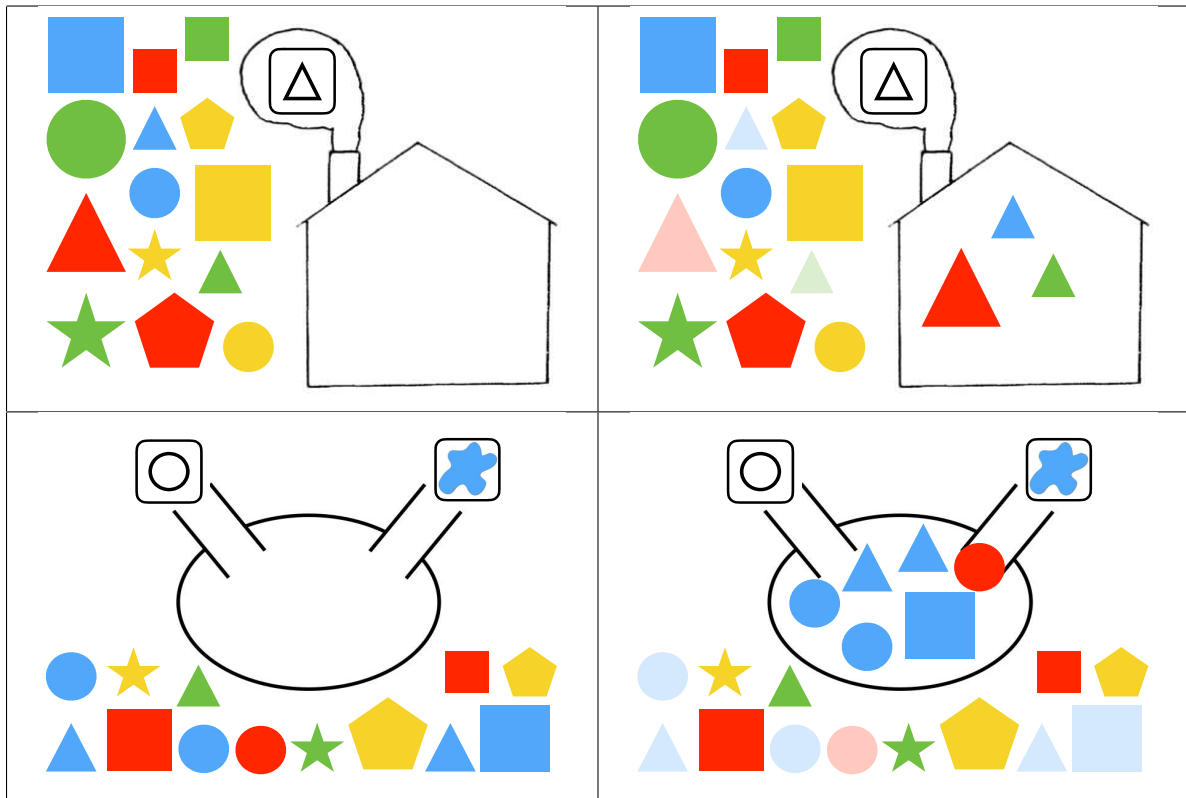


Figura 4.8: Fase de enseñanza: Actividades y sus soluciones.

Por último, en la parte final de la fase de enseñanza se presentaron tareas de seriación (Figura 4.9) utilizando el mismo formato que el de los ítems del cuestionario (Figura 4.3).

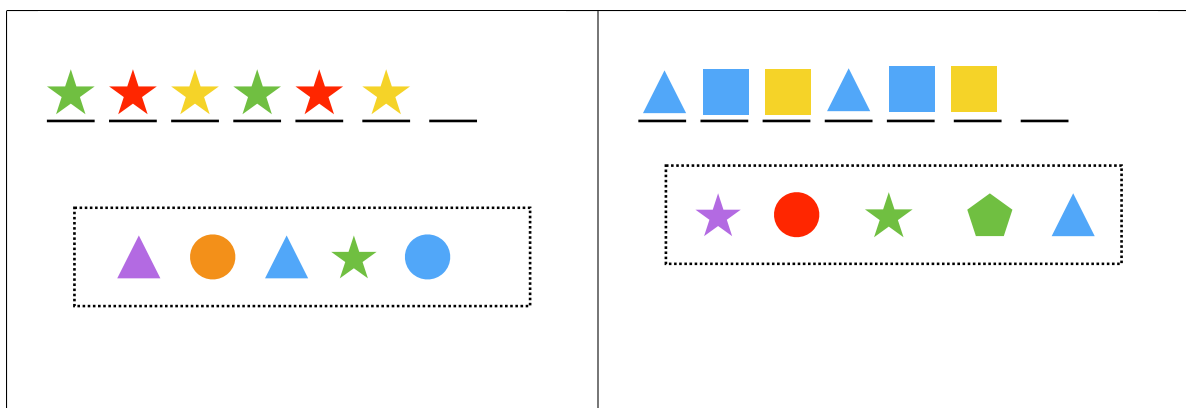


Figura 4.9: Fase de enseñanza: Actividades con series.

4.6. Desarrollo del estudio de grupo

En el estudio de grupo se administró el cuestionario formado por 19 tareas a los estudiantes de los tres grupos naturales seleccionados. Las tareas consistían en resolver series reiterativas que involucraban las variables: longitud del núcleo, tipo de descriptor, presencia de distractor y repetición de un atributo en el núcleo (Tabla 4.1, Figura 4.3). Se facilitó a cada estudiante una copia del cuestionario en formato papel, con una tarea por página. El alumno debía marcar la solución elegida. Decidimos establecer un límite máximo de treinta minutos para cumplimentar el cuestionario. Esta estimación de tiempo fue suficiente ya que todos los estudiantes finalizaron el cuestionario antes de que el tiempo máximo se cumpliera. Para evitar que las respuestas de los estudiantes estuvieran influidas por las de sus compañeros se ofrecieron cuestionarios con las tareas ordenadas de manera aleatoria.

A continuación, se codificaron las respuestas producidas por los estudiantes en cada ítem. Por un lado, se recogió la respuesta y determinó el número de descriptores coincidentes entre su respuesta y la solución correcta. Por otro, se asignó un 1 si la respuesta era correcta y un 0 en caso contrario. A partir de estos datos brutos se definieron nuevas variables que nos permiten establecer comparaciones atendiendo a:

- La influencia de la longitud del núcleo.
- La influencia del número de descriptores presentes en el núcleo.
- La influencia de la presencia de distractores.
- La influencia de la repetición de atributos en el núcleo.

4.7. Desarrollo del estudio de casos

El estudio de casos se planteó en una estructura de parejas de estudiantes. La razón de elegirlos de esta manera fue la de facilitar la comunicación entre los alumnos para que argumenten la elección de un elemento u otro a la hora de continuar la serie y resolver la tarea. Con esta distribución se intenta conseguir que se genere un diálogo fluido entre los estudiantes en el que aflore el razonamiento utilizado cuando resuelven la tarea.

A partir de los resultados del estudio de grupos se establecieron parejas a partir de las

puntuaciones obtenidas en los cuatro factores mencionados en la sección anterior (sección 4.5). Para el estudio de casos a las parejas de estudiantes se les administrarían dos tareas de las mostradas en la Tabla 4.1 dependiendo de las variables que se querían observar, de las descritas en el epígrafe anterior. Así, se configuraron parejas de alumnos cumpliendo las siguientes características: i) una pareja en la que ambos estudiantes resuelven de forma incorrecta ambas tareas; ii) una pareja en la que un estudiante resuelve de forma correcta una de las tareas y de forma incorrecta la otra tarea; iii) idem que en el caso anterior, pero al contrario; y iv) una pareja en la que ambos estudiantes resuelven de forma correcta ambas tareas. Esta estructura de selección obligó a que, en algunos casos, un mismo sujeto formara parte de varias parejas para el análisis. En la Tabla 4.2 se muestra un esquema de dicho montaje.

Tabla 4.2: *Característica de las parejas escogidas para la fase de estudio de casos. ✓ significa que se ha realizado la tarea correctamente y ✗ incorrectamente*

Análisis por longitud del núcleo			
$2f \text{ ✗} - 4f \text{ ✗}$	$2f \text{ ✓} - 4f \text{ ✗}$	$2f \text{ ✗} - 4f \text{ ✓}$	$2cf \text{ ✗} - 4cf \text{ ✓}$
Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo			
$2c \text{ ✓} - 2cf \text{ ✗}$	$2cf \text{ ✓} - 2cfd \text{ ✗}$	$2cf \text{ ✗} - 2cfd \text{ ✓}$	$2cf \text{ ✗} - 2cfd \text{ ✗}$
Análisis de la influencia de la presencia de distractores			
$4cf \text{ ✓} - 4cfd \text{ ✗} \quad 2ct \text{ ✓} - 2ctd \text{ ✗}$			
Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo			
$4c \text{ ✓} - 4c_b \text{ ✗} \quad 4ct \text{ ✓} - 4ct_b \text{ ✗} \quad 4ct \text{ ✗} - 4ct_b \text{ ✓}$			

Las parejas de alumnos seleccionadas fueron videograbadas (Figura 4.10) mientras resolvían las tareas. Recordemos que estas tareas se seleccionaron atendiendo a las dificultades que presentaron a los miembros de la pareja durante el estudio de casos. Se optó por intervenir durante la resolución en aquellos casos en los que los estudiantes no verbalizaban lo que estaban haciendo. En ese caso, el investigador les solicitó que explicaran la elección a sus compañeros o les realizó diversas preguntas. A partir de los grabaciones se realizó una transcripción de los diálogos, en base a los cuales, se realizó un análisis interpretativo.

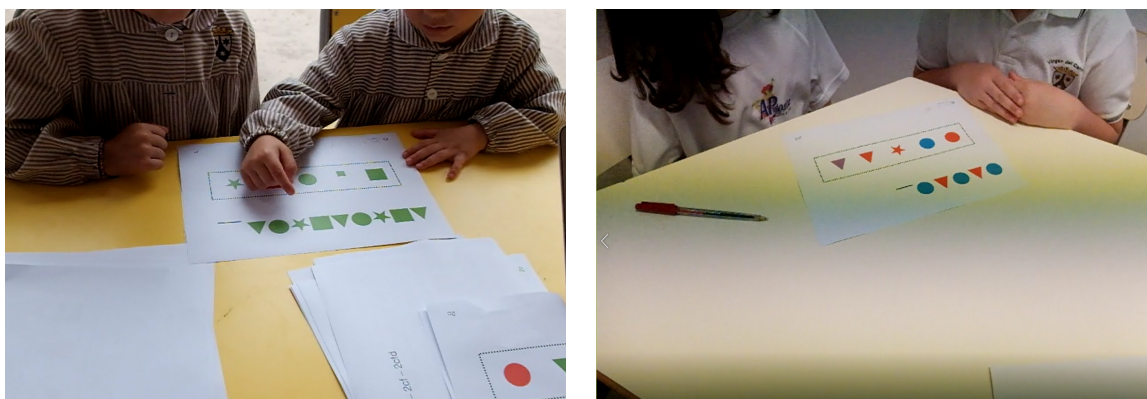


Figura 4.10: *Alumnos realizando las tareas de seriación.*

5

Análisis y discusión de resultados

El capítulo se divide en un estudio de grupo y un estudio de casos. En el primero de ellos llevamos a cabo un estudio cuantitativo, en el que analizamos los resultados del conjunto de estudiantes. En el segundo, se realiza un análisis cualitativo en el que se interpretan las actuaciones de parejas de estudiantes seleccionadas atendiendo a similitud de sus respuestas en las tareas propuestas en el estudio de grupo.

5.1. Estudio de grupo

En el primer apartado analizamos los resultados de manera general, señalando la proporción de aciertos obtenida para cada una de las tareas propuestas. En segundo lugar, realizamos un análisis por longitud de núcleo para los tres grupos con la intención de identificar, si existen, diferencias significativas entre los distintos niveles de complejidad presentada. Posteriormente, analizaremos la existencia, o no, de diferencias dependiendo del número de descriptores utilizados. Finalmente, estudiaremos si la presencia de distractores produce una mayor dificultad para el alumno.

5.1.1. Análisis general

En las Tablas 5.1 y 5.2 se presenta la proporción de estudiantes de cada grupo que respondieron correctamente a cada una de las tareas. Como era de esperar, se observa un incremento del número de respuestas correctas cuando la edad es mayor. En las Tablas 5.1 y 5.2, se observa que cuando se introduce un distractor tanto para series con núcleo-2 como núcleo-4, la proporción de aciertos disminuye respecto a las tareas que no contienen distractores. En el caso de las tareas con un solo descriptor en el núcleo, y por lo que respecta a la naturaleza del descriptor (color, forma, tamaño), observamos que tanto para núcleo-2 como para núcleo-4 la tasa de éxito disminuye para el descriptor forma, siendo similar en el caso de los descriptores color y tamaño.

Tabla 5.1: *Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas para series con núcleo-2*

Gr.	N	$2c$	$2f$	$2t$	$2cf$	$2ct$	$2cfd$	$2ctd$
4 años	33	0.667	0.606	0.636	0.697	0.606	0.242	0.030
5 años	31	0.935	0.806	0.839	0.903	0.839	0.419	0.129
6 años	33	0.969	0.969	1	0.848	1	0.727	0.273

Tabla 5.2: *Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas para series con núcleo-4*

Gr.	N	$4c$	$4f$	$4t$	$4cf$	$4ct$	$4cfd$	$4ctd$
4 años	33	0.515	0.606	0.727	0.576	0.727	0.152	0.061
5 años	31	0.806	0.677	0.903	0.871	0.710	0.323	0.161
6 años	33	0.909	0.939	1	0.939	0.939	0.667	0.091

En la Tabla 5.3 mostramos los datos cuando introducimos una variante que consiste en una repetición en el núcleo de una característica. Si comparamos las Tablas 5.2 y 5.3 vemos que en todos los casos disminuye la proporción exceptuando en las series que presentan distractores. Así, en la tarea $4c$ obtenemos una proporción de acierto de .515 en 4 años mientras que si introducimos la repetición ($4c_b$) la proporción disminuye a .485. Del mismo modo sucede en 5 años, descendiendo de .806 a .29 y en 6 años de .909 a .576.

Tabla 5.3: *Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas introduciendo una repetición de uno de los descriptores en el núcleo*

Gr.	N	$4c_b$	$4f_b$	$4cf_b$	$4ct_b$	$4cfd_b$
4 años	33	0.485	0.545	0.576	0.606	0.364
5 años	31	0.290	0.806	0.774	0.710	0.129
6 años	33	0.576	0.788	0.939	0.939	0.606

5.2. Análisis por longitud del núcleo

Para comparar si a mayor longitud del núcleo, mayor dificultad a la hora de resolver la tarea, hemos definido dos nuevas variables como suma de las respuestas correctas para las series de núcleo-2 y núcleo-4,

$$n2 = 2c + 2f + 2t + 2cf + 2ct + 2cfd + 2ctd,$$

$$n4 = 4c + 4f + 4t + 4cf + 4ct + 4cfd + 4ctd.$$

En la siguiente tabla (Tabla 5.4) mostramos las medias, las medianas y las desviaciones típicas obtenidas para las variables $n2$ y $n4$. Se observa que la media de las variable $n4$ es ligeramente menor que la variable $n2$ en todos los niveles académicos. Además, la dispersión es más pronunciada en los grupos de 4 años.

Tabla 5.4: Media, desviación típica y mediana de las variables $n2$ y $n4$ para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años.

Gr.	\bar{x}_{n2}	sd_{n2}	Mdn_{n2}	\bar{x}_{n4}	sd_{n4}	Mdn_{n4}
4 años	3.485	2.195	4	3.364	1.851	3
5 años	4.870	1.477	5	4.451	1.629	5
6 años	5.788	0.740	6	5.485	0.972	6

En la Figura 5.1 se proporciona el número de estudiantes por número de aciertos tanto para $n2$ como $n4$. No se aprecian grandes diferencias entre las distribuciones de las respuestas correctas entre núcleo-2 y núcleo-4 para ninguna de las edades. En el grupo de 4 años, el número de aciertos más elevado es 5 tanto para $n2$ como $n4$ con una frecuencia absoluta de 9 y 8 respectivamente. Similarmente sucede en los grupos de 5 y 6 años.

A continuación pasamos a analizar existencia o no de diferencias entre las puntuaciones obtenidas en las tareas de núcleo-2 y núcleo-4. Para ello, aplicamos el test de Shapiro-Wilk (Shapiro y Wilk, 1965) a las variables $n2$ como $n4$. Los p -valor de la prueba en cada caso nos permite descartar la normalidad (Tabla 5.5). Como consecuencia, recurrimos a pruebas no paramétricas para los análisis.

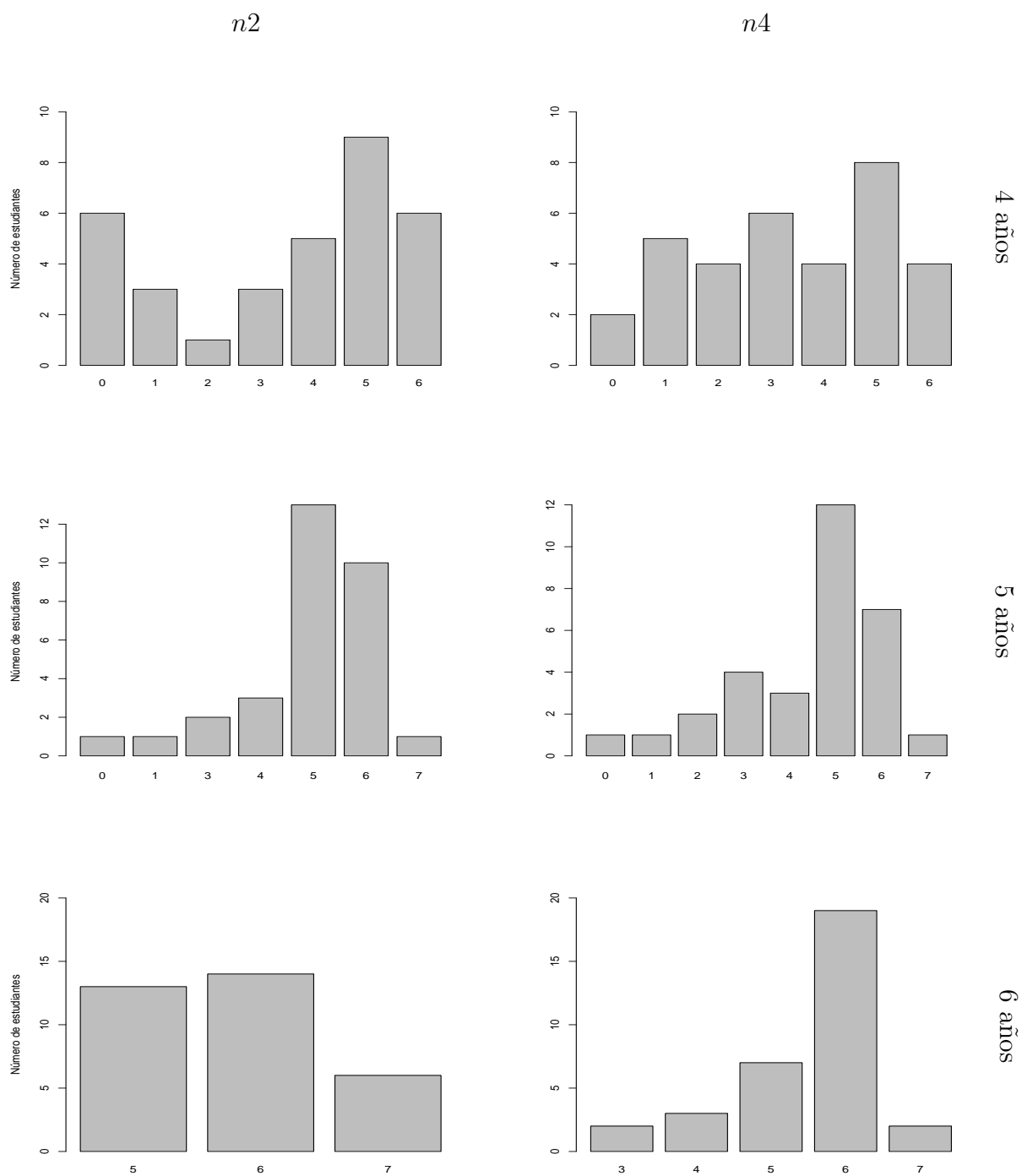


Figura 5.1: Diagrama de barras de las variables n_2 y n_4 de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.

Tabla 5.5: *p*-valor al aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a las variables *n2* y *n4* para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años

Gr.	<i>n2</i>	<i>n4</i>
4 años	< .001	.025
5 años	< .001	.003
6 años	< .001	< .001

5.2.1. Análisis por longitud del núcleo por grupos de edades

Como en este caso nuestra intención es la comparación de datos de un mismo estudiante recurriremos a las pruebas de Wilcoxon (Siegel, 1956; Wilcoxon, 1945). Comenzamos estudiando el grupo de estudiantes de 4 años. Los resultados del test de Wilcoxon ($p = .774$) nos permiten afirmar que los niveles de éxito en las tareas de núcleo-2 ($Mdn = 4$) no difieren significativamente de las de núcleo-4 ($Mdn = 3$). Lo anterior se puede confirmar de manera visual observando la Figura 5.2. De manera similar, los resultados de la prueba

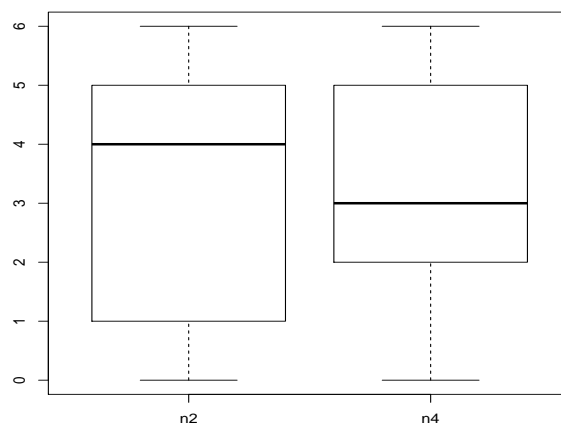


Figura 5.2: Diagrama de cajas de las variables *n2* y *n4* del grupo natural 4 años.

en las variables obtenidas para el grupo de 5 años ($p = .056$) nos permiten afirmar, de manera más ajustada, que los niveles de éxito en las tareas de núcleo-2 ($Mdn = 5$) no difieren significativamente de las de núcleo-4 ($Mdn = 5$). En la Figura 5.3 se muestra la similitud entre los valores obtenidos. Finalmente, en el grupo de 6 años, obtenemos $p = .192$. Por tanto, como en los casos previos, no detectamos diferencias significativas en los niveles de éxito en las tareas de núcleo-2 ($Mdn = 6$) y las de núcleo-4 ($Mdn = 6$). Los

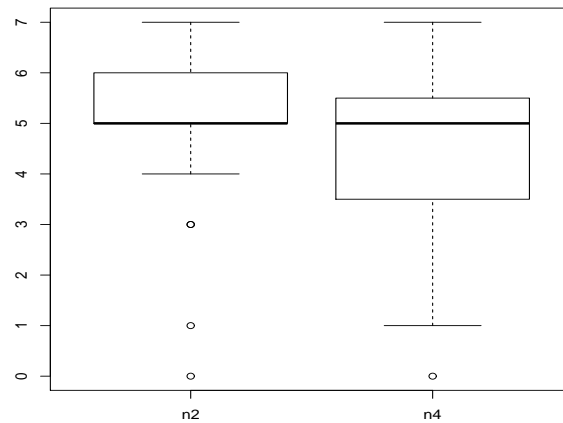


Figura 5.3: Diagrama de cajas de las variables n_2 y n_4 del grupo natural 5 años.

diagramas de cajas de las variables n_2 y n_4 de la Figura 5.4 confirman los resultados del test.

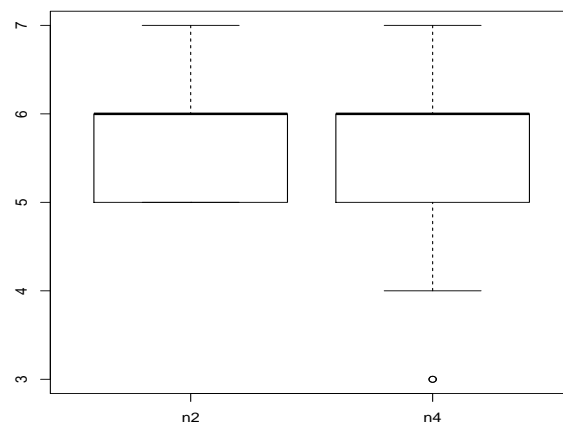


Figura 5.4: Diagrama de cajas de las variables n_2 y n_4 del grupo natural 6 años.

5.2.2. Análisis por longitud del núcleo entre grupos de edades

Como en este caso nuestra intención es la comparación de datos de sujetos distintos realizaremos la prueba de la U de Mann-Whitney (Field, Miles, y Field, 2012). Comenzamos con el estudio de la variable n_2 . Cuando analizamos lo que sucede entre los grupos

de 4 y 5 años, el resultado ($p = .007$, $r = .335$) nos permite afirmar que existen diferencias significativas, tal y como se aprecia en las Figuras 5.2 y 5.3, lo que confirma los resultados esperados. Las diferencias aumentan cuando comparamos los éxitos entre los grupos de edad de 4 y 6 años. Así, el p -valor obtenido es menor que 0.001 y $r = .597$. Entre alumnos de 5 y 6 años el resultado es algo más ajustado que el anterior. No obstante, volvemos a obtener diferencias significativas ($p = .005$, $r = .352$). En la Fig. 5.5 se observan claramente las diferencias mencionadas.

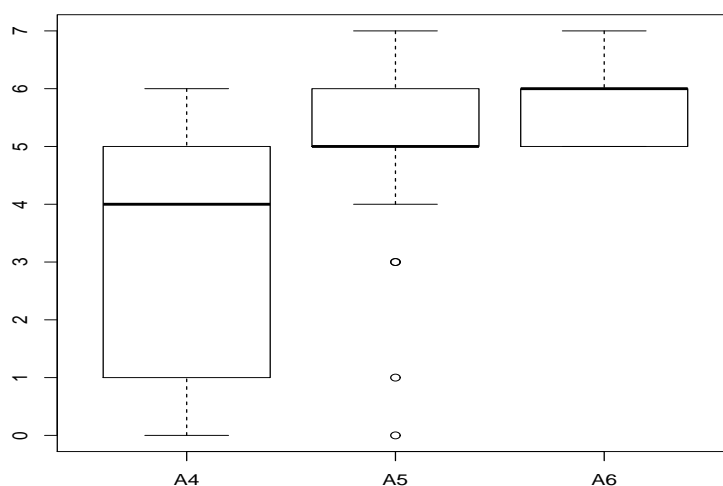


Figura 5.5: Diagrama de cajas de la variable n_2 para los grupos: 4, 5 y 6 años.

Si comparamos la variable n_4 entre los grupos de 4 y 5 años obtenemos $p = .017$ y $r = .299$, lo que permite afirmar que hay diferencias significativas. Entre 4 y 6 años, esta diferencia aumenta, obteniendo un p -valor menor que 0.001 con $r = .602$. Del mismo modo sucede si comparamos los grupos de 5 y 6 años ($p = .003$ y $r = .374$). Estas diferencias se observan de forma gráfica en la Figura 5.6.

5.3. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo

Como en la sección anterior, vamos a diseñar dos variables como suma del número de tareas, con uno o dos descriptores, resueltas correctamente. Con estas variables analizamos

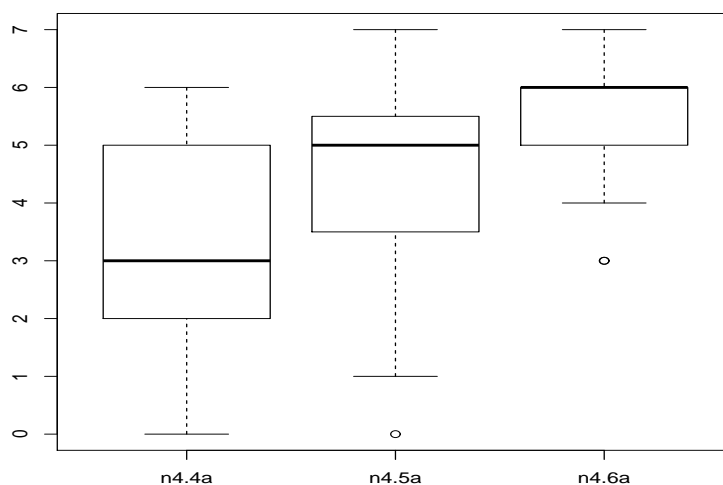


Figura 5.6: Diagrama de cajas de la variable $n4$ para los grupos: 4, 5 y 6 años.

la incidencia del número de descriptores en el éxito o fracaso al abordar la tarea. Así, definimos las variables $\hat{d}1$ (aciertos en tareas con 1 descriptor) y $d2$ (aciertos en tareas con 2 descriptores) para cada grupo de edad:

$$\begin{aligned}\hat{d}1 &= 2c + 2t + 2f + 4c + 4t + 4f, \\ d2 &= 2ct + 2cf + 4ct + 4cf.\end{aligned}$$

Como el número de ítems no es el mismo en ambos casos, normalizamos a rango $[0, 4]$ la variable $\hat{d}1$ multiplicando el valor obtenido por $2/3$. Es decir, $d1 = \hat{d}1 \cdot 2/3$. De este modo, podemos comparar ambas variables.

Calculamos en primer lugar la media, la mediana y la desviación típica de todas las variables. Recogemos los resultados en la Tabla 5.6. Vemos que la media apenas aumenta ligeramente cuando hay dos descriptores y la mediana es mayor en el grupo de 4 años e igual en los grupos de 5 y 6 años. La dispersión disminuye cuando aumenta la edad. Una explicación plausible es que, según el diseño de las tareas, en aquellas con 2 descriptores se hacen coincidir las longitudes de los patrones de ambos descriptores (núcleo-2 o núcleo-4), por lo que son estructuralmente más sencillas. Es decir, en la $2cf$, por ejemplo, el círculo siempre es azul y el triángulo siempre rojo, de modo que esta tarea se puede resolver tanto si el estudiante fija su atención en color o en la forma. De ahí, que al incluir un descriptor (con igual longitud de patrón) la tarea se revele menos difícil, como se observa

en las ligeras diferencias entre \bar{x}_{d1} y \bar{x}_{d2} .

Tabla 5.6: *Media, desviación típica y mediana de las variables $d1$ y $d2$ para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años*

Gr.	\bar{x}_{d1}	sd_{d1}	Mdn_{d1}	\bar{x}_{d2}	sd_{d2}	Mdn_{d2}
4 años	2.505	1.491	2.667	2.606	1.297	3
5 años	3.312	1.095	4	3.323	1.107	4
6 años	3.859	0.323	4	3.727	0.626	4

Al aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a las variables obtenemos en todos los casos un p -valor menor que .001, por tanto no podemos asegurar que los datos provengan de una distribución normal. Como consecuencia recurrimos nuevamente a pruebas no paramétricas. Emplearemos el test de Wilcoxon para la comparación intra sujetos y la U de Mann-Whitney para las comparaciones entre sujetos.

5.3.1. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo por grupos de edades

El resultado de la prueba de Wilcoxon, en el grupo de 4 años, ($p = .424$) nos permite afirmar que, no existen diferencias significativas en los niveles de éxitos en las tareas con 1 descriptor ($Mdn = 2.667$) y las tareas con 2 descriptores ($Mdn = 3$). En el grupo de 5 años, los resultados de la prueba ($p = .899$) nos permiten concluir de manera no ajustada que los niveles de éxitos en las tareas con un descriptor ($Mdn = 4$) no difieren significativamente de las tareas con dos descriptores ($Mdn = 4$). Tampoco existen diferencias en los niveles de éxito en el grupo de 6 años ya que el p -valor hallado es $p = .120$. Por tanto, no existen diferencias en los niveles de éxito para ningún grupo de edad. En la Figura 5.7 se observa que no hay diferencias significativas.

5.3.2. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo entre grupos de edades

Si comparamos la variable $d1$ entre los grupos de edad de 4 y 5 años obtenemos como resultado de la prueba de U de Mann-Whitney $p = .032$ y $r = .267$, por tanto podemos afirmar que existen diferencias significativas en los niveles de éxito cuando hay

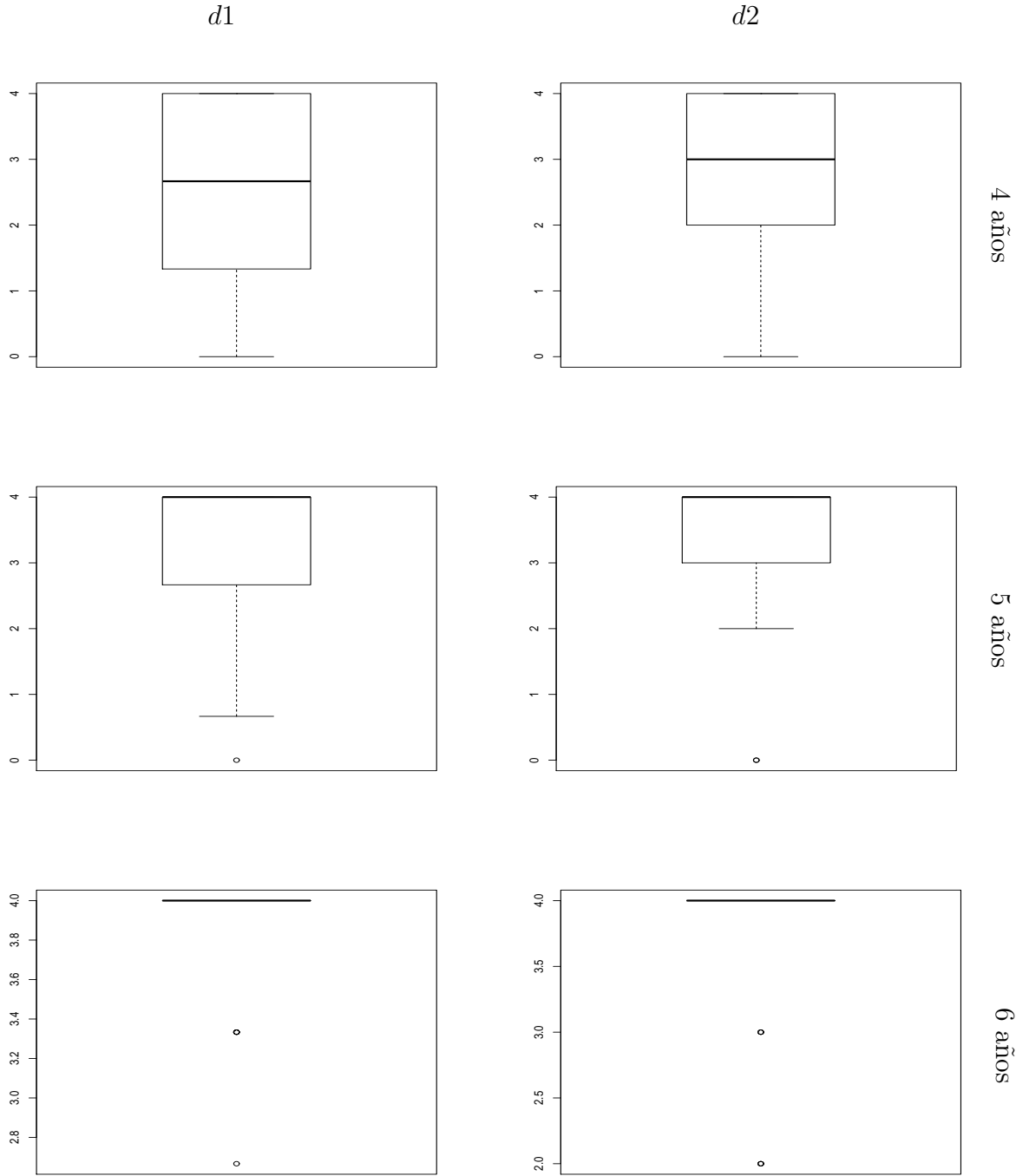


Figura 5.7: Diagrama de cajas de las variables $d1$ y $d2$ de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.

un descriptor. El resultado es aún más claro cuando aplicamos la prueba a las variables $d1$ de los grupos de edad de 4 y 6 años es de $p < .001$ y $r = .505$. El resultado de la prueba comparando la variable $d1$ para los grupos de 5 y 6 años es $p = .017$ y $r = .298$, lo que nos permite afirmar que hay diferencias significativas entre los tres grupos.

Comparamos la variable $d2$ para los distintos grupos de edad. Podemos afirmar que existen diferencias significativas en los niveles de éxito cuando hay dos descriptores entre los alumnos de 4 y 5 años ($p = .014, r = .307$). Asimismo, en el caso de la comparativa en la variable $d2$ para los grupos naturales de 4 y 6 años obtenemos, como es de esperar, diferencias significativas en los niveles de éxito en la resolución de tareas con dos descriptores ($p < .001, r = .502$). Cuando aplicamos el test de U de Mann-Whitney a las variables $d2$ para 5 y 6 años se concluye que no podemos afirmar que haya diferencias significativas ($p = .076$). Es decir, el éxito para tareas con dos descriptores es similar para los alumnos de 5 y 6 años. Los resultados son similares para $d1$ y $d2$ exceptuando cuando comparamos los grupos de edades de 5 y 6 años.

5.4. Análisis de la influencia de distractores

Definimos $d3$ como:

$$d3 = 2ctd + 2cfd + 4ctd + 4cfd.$$

Esta variable mide los aciertos en los ítems que contienen un distractor. El rango de esta variable es $[0, 4]$. La notación elegida ($d3$) responde al hecho de que en nuestro cuestionario todas las tareas en las que aparecen distractores usan tres descriptores en el núcleo, uno de ellos actuando como distractor (no posee patrón de repetición) y dos de ellos actuando como descriptores propiamente. El diseño del cuestionario permite la comparación de las variables $d2$ y $d3$ pues los ítems con distractor se construyeron a partir de los ítems con dos descriptores. Como consecuencia podemos establecer una relación uno a uno entre ítems con no presencia ($d2$) o presencia ($d3$) de distractores. En la Tabla 5.7 se muestran la media, mediana y desviaciones típicas obtenidas de $d3$ para los grupos de 4, 5 y 6 años.

Tabla 5.7: Media, desviación típica y mediana de las variables $d3$ para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años

Gr.	\bar{x}_{d3}	sd_{d3}	Mdn_{d3}
4 años	0.485	0.667	0
5 años	1.032	0.752	1
6 años	1.758	0.936	2

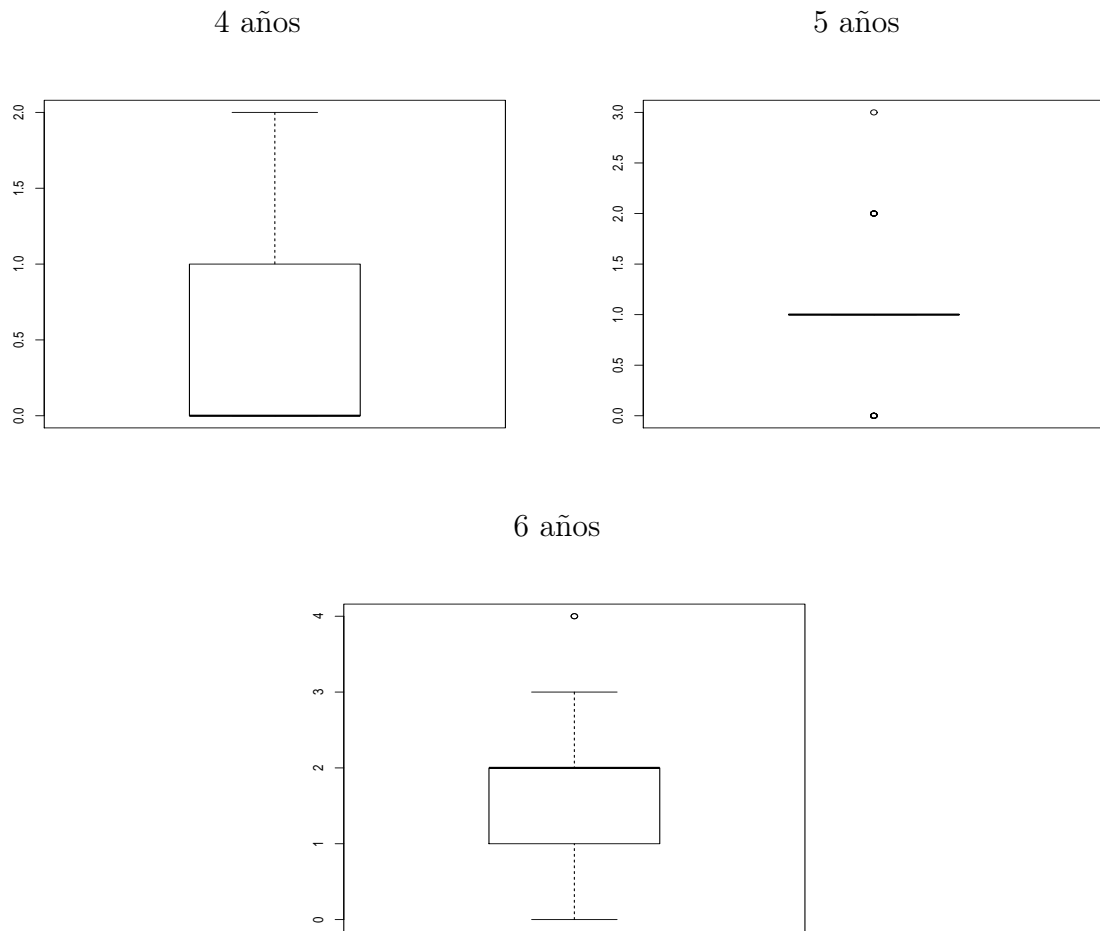


Figura 5.8: Diagrama de cajas de las variables $d3$ de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.

Introduciendo un distractor vemos que la media de aciertos se reduce considerablemente. En el grupo de cuatro años obtenemos una media $\bar{x}_{d3} = 0.485$, en el de 5 años 1.032 y el de 6 años 1.758. La dispersión también se incrementa lo que implica que la dificultad para el resolutor ha aumentado. La mediana, además, se sitúa en 0 en el caso de 4 años, 1 en 5 años y 2 en 6 años.

5.4.1. Análisis de la influencia de la presencia de distractores por grupos de edad

Existen diferencias significativas por grupos de edad y entre grupos de edad. Esto queda reflejado en la Figura 5.8. Para el grupo de 4 años, al aplicar el test de Wilcoxon obtenemos como resultado $p < .001$ y $r = .603$, por tanto podemos afirmar que existen

diferencias significativas entre el nivel de éxito en la resolución de las tareas con y sin distractores. Obtenemos resultados similares en el grupo de 5 años ($p < .001$ y $r = .606$). El número de aciertos en los ítems sin distractores difiere significativamente ($p < .001$, $r = .575$) del obtenido en los ítems con distractores en el grupo de 6 años.

5.4.2. Análisis de la influencia de la presencia de distractores entre grupos de edad

El test de la U de Mann-Whitney nos permite concluir la existencia de diferencias significativas en los niveles de éxito en las tareas que tienen distractores y aquellas que no tienen entre los distintos grupos de edad (entre 4 y 5 años $p = .003$ y $r = .374$, entre 4 y 6 años $p < .001$ y $r = .637$ y entre 5 y 6 años $p < .001$ y $r = .413$).

5.5. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo

Finalmente, vamos a analizar la influencia de la repetición de un atributo en la definición del núcleo. Para ello usaremos las variables *nob* (aciertos en tareas sin repetición de atributo en el núcleo) y *sib* (aciertos en tareas con repetición de atributo en el núcleo):

$$\begin{aligned} nob &= 4c + 4f + 4cf + 4ct + 4cfd, \\ sib &= 4c_b + 4f_b + 4cf_b + 4ct_b + 4cfd_b. \end{aligned}$$

En la Tabla 5.8 recogemos la media, desviación típica y mediana de las variables para los distintos grupos naturales. En el caso del grupo de 4 años podemos apreciar que la media y la mediana son las mismas y que la dispersión es ligeramente mayor en el caso de no repetir atributos. La media de aciertos aumenta cuando los grupos son de mayor edad, así como la mediana y la dispersión son más bajas. En los grupos de 5 y 6 años es interesante apreciar que la media disminuye ligeramente (aprox. 0.5) cuando introducimos una repetición en el núcleo, pero en grupo de 4 años no existe prácticamente diferencia (véase Figura 5.10).

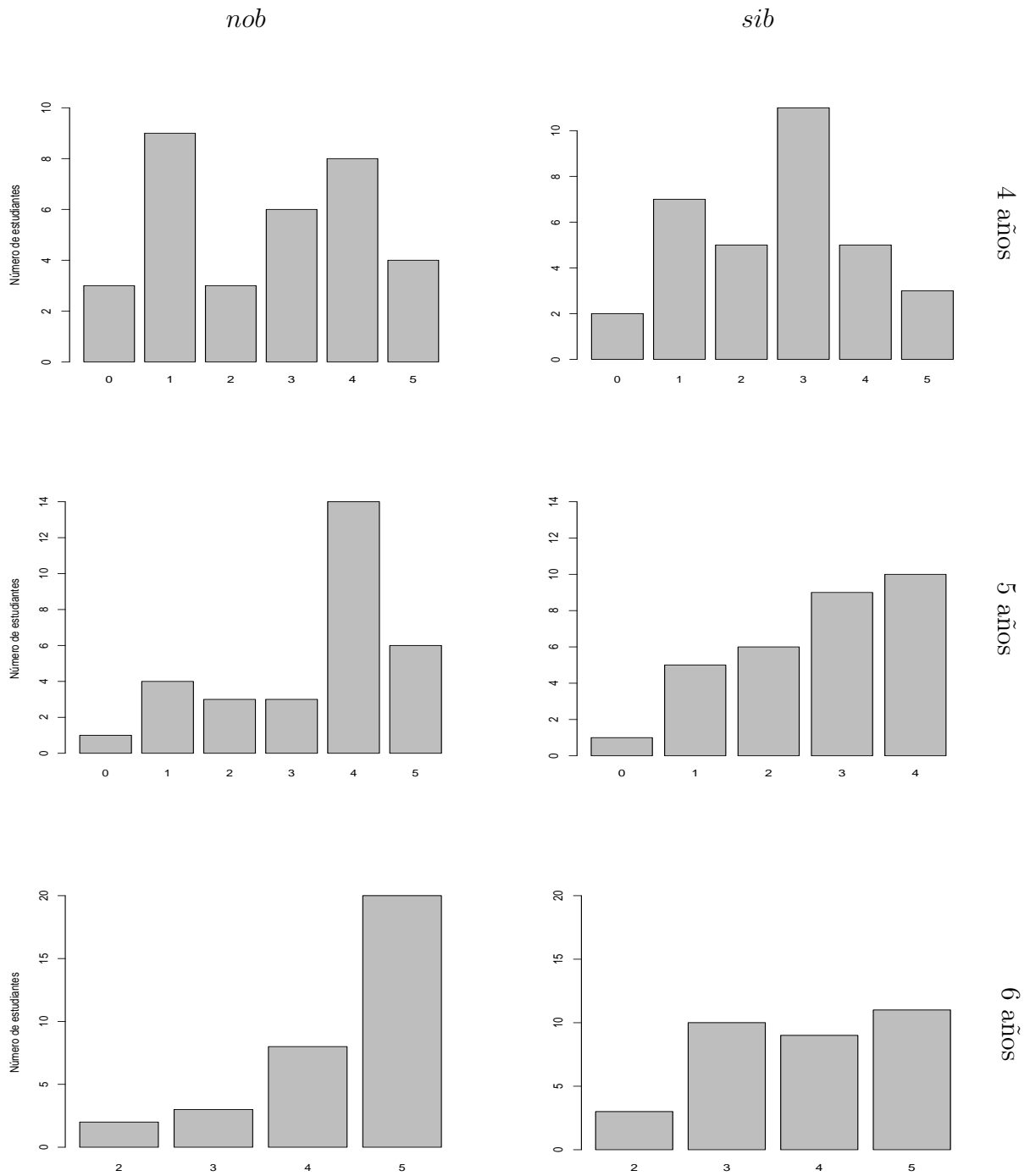


Figura 5.9: Diagrama de barras de las variables nob y sib de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.

Tabla 5.8: Media, desviación típica y mediana de las variables *nob* y *sib* para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años

Gr.	\bar{x}_{nob}	sd_{nob}	Mdn_{nob}	\bar{x}_{sib}	sd_{sib}	Mdn_{sib}
4 años	2.576	1.621	3	2.576	1.393	3
5 años	3.387	1.430	4	2.710	1.189	3
6 años	4.394	0.899	5	3.848	1.004	4

5.5.1. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo por grupos de edad

Al aplicar el test de Shapiro-Wilk a las variables *sib* y *nob* obtenemos no normalidad. Esto nos lleva a aplicar la prueba no paramétrica de Wilcoxon para determinar la existencia, o no, de diferencias significativas entre las puntuaciones obtenidas por los estudiantes cuando en el núcleo de las series planteadas aparecen repeticiones o no. En el caso del grupo de 4 años, los resultados ($p = .885$) no nos permite rechazar la hipótesis de no existencia de diferencias. Por tanto, no podemos afirmar que el nivel de éxito en la resolución de las tareas con o sin repeticiones sea distinto. Sin embargo, en alumnos de 5 años los resultados ($p = .003$, $r = .378$) nos permiten rechazar la hipótesis de no existencia de diferencias y nos permiten afirmar que el número de aciertos cuando hay repetición de atributos en el núcleo es significativamente menor que cuando no la hay. De manera, similar, en el grupo de 6 años, los resultados ($p = .001$, $r = .392$) nos conducen a afirmar que existen diferencias significativas.

5.5.2. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo entre grupos de edad

Comenzamos aplicando el test de la U de Mann-Whitney a las variables *nob* correspondientes a los grupos naturales de 4 y 5 años. El resultado es $p = .038$ y $r = .259$ lo cual implica que hay diferencias significativas. Si comparamos entre 4 y 6 años los resultados obtenidos ($p < .001$, $r = .582$) nos permiten afirmar que existen diferencias significativas. También existen diferencias cuando comparamos los grupos de 5 y 6 años ($p < .001$, $r = .415$).

Vamos a analizar la variable *sib* entre los grupos naturales de edad 4, 5 y 6 años. Comenzamos con la comparativa entre 4 y 5 años. Al aplicar el test de U de Mann-Whitney, el resultado obtenido ($p = .619$) no nos permite afirmar que haya diferencias

significativas entre los grupos de 4 y 5 años en cuanto al nivel de éxitos en tareas con repetición de atributos en el núcleo ($Mdn_{sib_{4a}} = Mdn_{sib_{5a}} = 3$). Sin embargo, si podemos afirmar que hay diferencias comparando los grupos de 4 y 6 años ($p < .001$, $r = .452$). Finalmente, entre los grupos de 5 y 6 años también encontramos diferencias significativas ($p < .001$, $r = .441$).

En la Figura 5.10 se observan las diferencias obtenidas en el estudio numérico.

5.6. Análisis cualitativo: resolución de las tareas por parejas

Tras realizar el análisis de grupo por edades y obtener conclusiones respecto a las diferencias en el nivel de éxito al resolver las tareas dependiendo de las variables de tarea introducidas, en esta sección analizamos cualitativamente la actuación de los estudiantes al enfrentarse por parejas a las tareas. La intención es identificar los razonamientos que llevan a cabo los estudiantes cuando resuelven este tipo de tareas con la finalidad de encontrar modelos explicativos de los errores cometidos.

Hemos escogido dos tipos de parejas de alumnos, un primer tipo formado por estudiantes que realizaron incorrectamente una de las tareas propuestas en el estudio exploratorio y segundo tipo de pareja formada por dos alumnos que han resuelto mal las dos tareas. En la sección 4.7 se detalla cómo se han realizado las parejas. Los datos en esta sección fueron obtenidos mediante la grabación audiovisual realizada mientras los alumnos resolvieron las tareas por parejas. Nuestros datos, por tanto, son de naturaleza audiovisual, ya que son los elementos comunicativos que presentan los alumnos al resolver un problema en un contexto de trabajo cooperativo (Puig (1996)). Actualmente, el uso de los datos extraídos de grabaciones audiovisuales está completamente aceptado ya que gran número de investigaciones, p. ej. Arnau (2011), Calero (2014) y otras muchas, utilizan este tipo de datos.

Presentamos, pues, un análisis sobre los datos recogidos basados en la construcción racional, Puig (1996), que consiste en narrar las actuaciones verbales y no verbales de los alumnos intentando explicar todos los razonamientos y argumentaciones que realizan. En este trabajo no realizamos una construcción racional completa, tan solo hacemos comentarios sobre las actuaciones de los estudiantes con el fin de explicar los razonamientos que muestran a la hora de resolver las tareas de seriación.

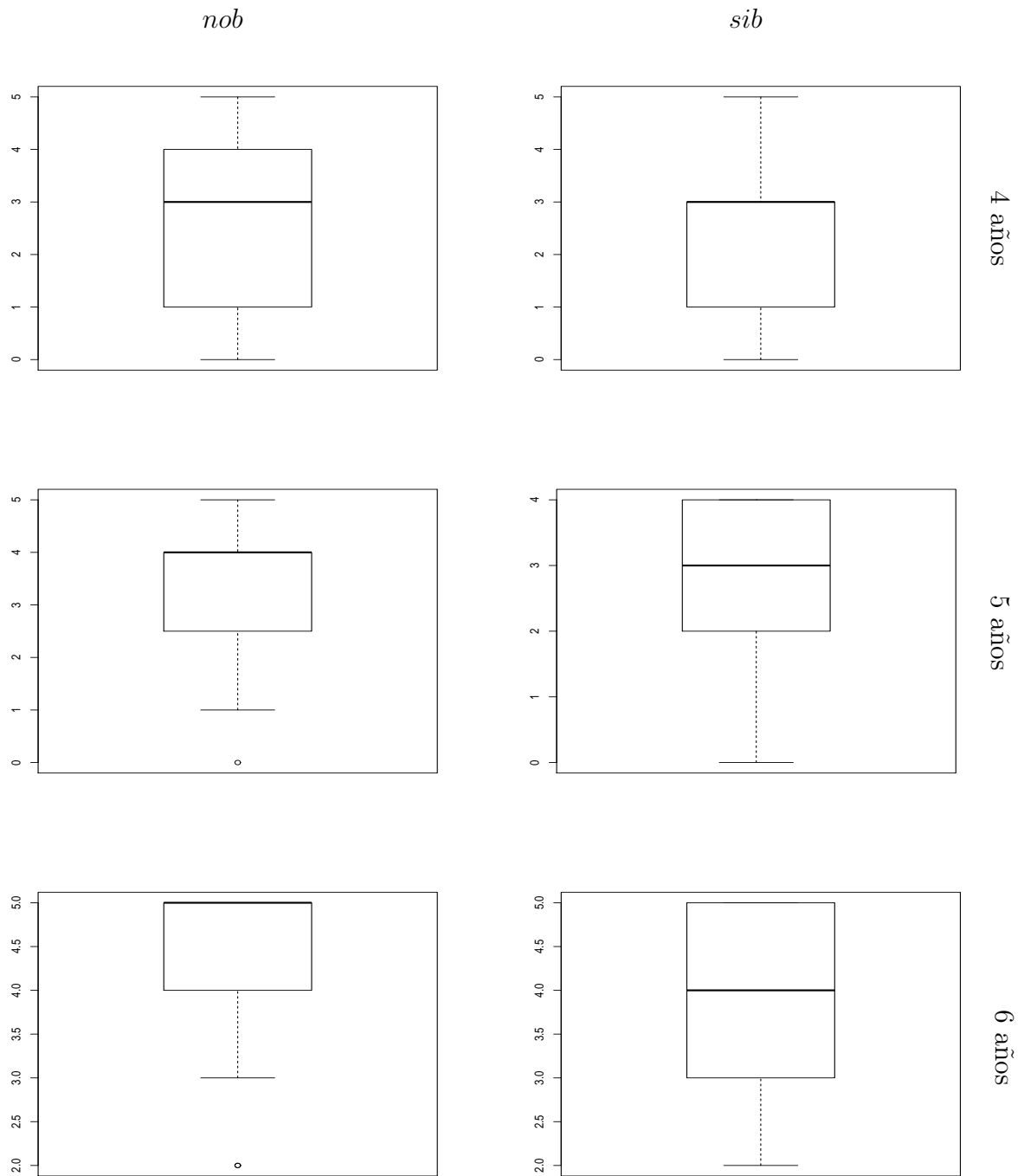


Figura 5.10: Diagrama de cajas de las variables nob y sib de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.

Los datos recogidos por medio de grabaciones son transcritos extrayendo las actuaciones más relevantes. Respecto a las transcripciones utilizaremos la siguiente notación:

- i. Se asignará una inicial (consonante) ficticia a cada alumno que se introducirá al principio de cada subsección.
- ii. Las indicaciones del profesor las marcaremos con una P. La primera frase del profesor siempre es una explicación de la tarea. Para no ser demasiado repetitivos, lo marcamos como –.
- iii. La numeración es correlativa en las transcripciones con el fin de que no hayan dos líneas con el mismo número.
- iv. Se realiza una transcripción en castellano de las intervenciones. Las palabras que aparecen en otra lengua son traducidas al castellano.
- v. Las pausas o duda en la argumentación se señala con puntos suspensivos.
- vi. Las aclaraciones o descripciones se realizan utilizando corchetes con texto entre ellos, [texto].

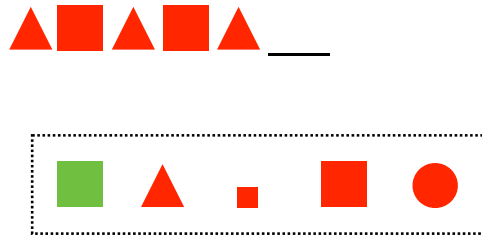
Dividiremos la sección en cuatro categorías analizando la solución presentada por las parejas dependiendo de:

- Longitud del núcleo.
- Número de descriptores presentes en el núcleo.
- Influencia de la presencia de distractores.
- Influencia de la repetición de atributos en el núcleo.

5.6.1. Análisis por longitud del núcleo

En el estudio por grupo hemos constatado que no se han encontrado diferencias significativas en los niveles de éxito de los alumnos al resolver tareas con variables de tarea $LN = 2$ y $LN = 4$. Vamos a analizar la solución dada por una pareja de alumnos del grupo natural de 4 años, N y H resolviendo las tareas $2f$ y $4f$ (Figuras 5.11 y 5.12).

N y H (cuatro años) resolviendo la tarea $2f$ (Figura 5.11)



ID: _____

2f

Figura 5.11: Tarea 2f.

1 P: –

2 H: [Repasa la serie], cuadrado.

3 P: ¿Pondrías un cuadrado?

4 H: Sí.

5 P: Y tú N, ¿cuál pondrías?

6 N: Un triángulo.

7 P: ¿Cuál pondrías?

8 N: Este [señalando triángulo rojo].

9 P: ¿Por qué?

10 N: Porque me gusta el triángulo.

11 P: Pero, si tuvieras que seguir la serie, ¿cuál pondrías?

12 N: El cuadrado.

13 P: Pero el ejercicio dice que tienes que seguir la serie.

14 N: Sí.

15 P: ¿Qué cuadrado pondrías entonces? Si tienes que seguir la serie.

16 N: El verde.

17 P: ¿Por qué?

18 N: Porque me gusta.

19 P: Pero si el ejercicio dice que tienes que seguir la serie, ¿cuál pondrías? ¿El cuadrado verde?

20 N: El cuadrado verde.

21 P: Y tú, H, ¿cuál pondrías?

22 H: [Señala el cuadrado verde].

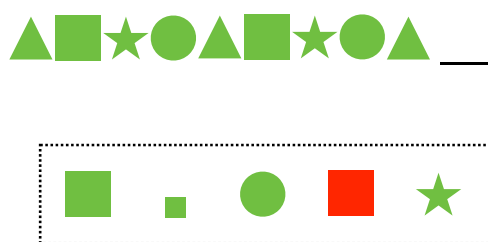
23 P: ¿Por qué has cambiado?

24 H: Porque me gusta.

25 P: Vale, muy bien, marcadlo.

En primer lugar, vemos que H repasa la serie, línea 2, esto lo hace de manera habitual (ver línea 27 de la siguiente transcripción). N, sin embargo, no repasa la serie y hace su elección entre las cinco posibles teniendo por criterio cuál le guste más, líneas 10 y 18. Esta elección al ser aceptada por el profesor provoca que el alumno H cambie su elección y presente el mismo argumento, línea 24.

N y H (cuatro años) resolviendo la tarea 4f (Figura 5.12)



ID: _____

4f

Figura 5.12: Tarea 4f.

26 P: –

27 H: [Repasa la serie] Triángulo, cuadrado, estrella, círculo, triángulo, cuadrado, estrella, círculo, triángulo y estrella. Estrella

28 P: ¿Triángulo y estrella?

29 H: Sí.

30 N: Yo, la estrella.

31 H: Y yo, éste [señalando el cuadrado grande verde].

32 P: Tú el cuadrado, y N la estrella, pues, tenéis que elegir uno. Dos no se pueden coger. Explícaselo, tú, N, ¿por qué quieres la estrella?

33 N: Porque me gusta.

34 P: Pero, si tuvieras que completar la serie, ¿cuál pondrías?

35 N: El cuadrado.

36 P: ¿Por qué?

37 N: Porque me gusta.

38 P: Y H, ¿tú cuál pondrías?

39 H: Ya lo he dicho, éste [señalando el cuadrado verde grande].

40 P: ¿Por qué? Explícaselo a N.

41 H: Porque me gusta.

42 P: Antes has señalando aquí [señalando a la serie], ¿por qué has señalado aquí?

43 H: Porque...

44 P: ¿Por qué?

45 N: Porque me gusta.

46 P: Marca éste.

Nuevamente, H repasa primero, pero da una respuesta incorrecta eligiendo un elemento que forma parte de la serie (línea 27). N también elige la estrella, tras lo que H cambia su respuesta eligiendo el elemento que completa de manera correcta (línea 31). Ambas mantienen su elección a partir de ese momento. Cuando se les pregunta la razón de su elección N vuelve a utilizar como criterio “lo que más me gusta” (línea 33). Cuando H es preguntado por su elección (correcta) también responde “porque me gusta” (línea 41), lo que puede ser debido a la dificultad para verbalizar su razonamiento.

En el caso de la pareja L y Pa cuando resuelven la tarea 2f podemos ver que Pa da una respuesta inicial incompleta (líneas 48 y 50) pues no identifica el tamaño que debe tener. Posiblemente ha hecho una identificación correcta pero no es capaz de verbalizar todas las características que identifican el elemento. L a petición del profesor identifica correctamente el elemento (líneas 55 y 57). En ningún caso ofrecen una explicación de la decisión, aunque en la línea 54 parece que Pa utiliza la verbalización de la serie como método para dar la solución.

L y Pa (cuatro años) resolviendo la tarea 2f (Figura 5.11)

47 P: –

48 Pa: El cuadrado.

49 P: ¿Qué cuadrado?

50 Pa: El rojo.

51 P: El rojo, ¿por qué?

52 Pa: Porque ahí hay figuras rojas.

53 P: Y tú, L, ¿cuál pondrías?

54 Pa: Triángulo, cuadrado, triángulo, cuadrado, triángulo [repasa la serie].

55 L: Cuadrado.

56 P: Y, ¿qué cuadrado de todos?

57 L: El rojo [marca el cuadrado rojo grande].

58 P: ¿Por qué ese? Pa díselo

59 Pa: Porque ese es grande y hay figuras grandes.

60 P: Muy bien, márcalo.

Si comparamos esta transcripción con la siguiente observamos que el método utilizado por Pa para identificar la solución vuelve a consistir en verbalizar los elementos de la serie. Así, Pa repasa la serie, línea 62, y a continuación discrimina por color, línea 65.

L y Pa (cuatro años) resolviendo la tarea 4f (Figura 5.12)

61 P: –

62 Pa: Triángulo, cuadrado, estrella, círculo, triángulo, cuadrado, estrella, círculo, triángulo [repasa la serie]. Un cuadrado.

63 P: Y L, ¿tú que pondrías?

64 P: Pa tiene un cuadrado y, ¿de qué color?

65 Pa: Verde.

66 P: L, ¿tú estás de acuerdo con eso?

67 L: Sí.

68 P: ¿Por qué? ¿Lo marcamos?

69 L: Sí.

En ambas resoluciones, tanto de la pareja N y H como L y Pa, hemos visto que la longitud de núcleo no afecta en su nivel de éxito. Una variable que puede afectar es que la longitud de núcleo no es excesivamente mayor, pasa de dos a cuatro. Es interesante, en futuras investigaciones, ampliar esta variable. En las tareas que los alumnos resuelven habitualmente en el aula no aparecen series con LN elevado. A continuación, mostramos, soluciones dadas por alumnos de 5 años, A y C de la tarea 2f y 4f.

A y C (cinco años) resolviendo la tarea 2f (Figura 5.11)

70 P: –

71 A y C: [Señalan cuadrado grande rojo].

72 P: A, ¿por qué piensas que va esa?

73 A: Porque es un triángulo y un cuadrado.

74 P: ¿Es un triángulo y cuadrado? Entonces, ¿cuál va ahí [señalando el hueco]?

75 A: Un cuadrado.

76 P: ¿Y tú estás de acuerdo [refiriéndose a C]?

77 C: Sí.

78 P: Pues marcadla.

En este caso, A identifica el núcleo de la serie (línea 73) sin que haya verbalización de las mismas. En la siguiente transcripción, C vuelve a identificar directamente el núcleo sin que necesite verbalizar la serie.

A y C (cinco años) resolviendo la tarea 4f (Figura 5.12)

79 P: –

80 C: [Señala estrella verde, de manera inmediata A también lo señala].

81 P: ¿Por qué pensáis que es esa?

82 C: Porque hay cuadrado, triángulo, estrella y círculo.

83 P: ¿Tú piensas que es esa y tu A estás de acuerdo?

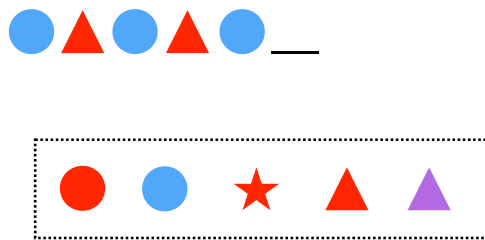
84 A: No lo sé. [Se queda pensando].

85 P: Va otra figura, ¿va el cuadrado?

86 P: No pasa nada, marcadla.

En las dos siguientes transcripciones vemos que la pareja C y J no tiene ningún problema en resolver las series que se les presentan. Sí percibimos que, pese a que tienen 5 años, las explicaciones dadas son muy pobres y en ningún caso verbalizan previamente las series.

C y J (cinco años) resolviendo la tarea 2cf (Figura 5.13)



ID: _____

2cf

Figura 5.13: Tarea 2cf.

87 P: –

88 C: Triángulo.

89 J: Triángulo rojo.

90 P: Que rápido, ¿por qué?

91 P: Tú lo sabes también C, triángulo pero cuál de los dos [violeta o rojo].

92 J: Este [señala el rojo].

93 P: ¿Por qué?

94 J: Porque ahí es rojo.

95 P: ¿Y el morado no se puede poner?

96 J: No.

97 P: ¿Tú estás de acuerdo C?

98 C: Sí.

C y J (cinco años) resolviendo la tarea 4cf (Figura 5.14)

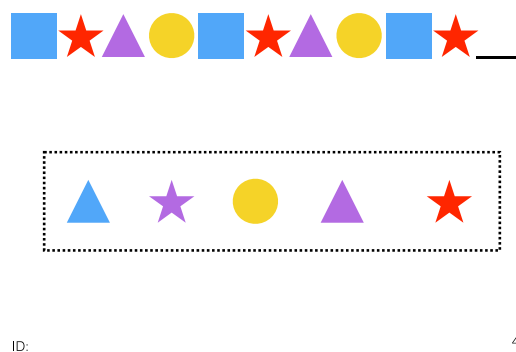


Figura 5.14: Tarea 4cf.

99 P: –

100 C: Ésta [señala el triángulo violeta grande].

101 P: Pues marcadlo. ¿Por qué?

102 J: Porque después de la estrella va el triángulo.

103 P: ¿Tú estás de acuerdo C?

104 C: Sí.

105 P: Perfecto.

Para concluir con esta sección mostramos dos transcripciones de alumnos de 6 años, la pareja formada por los alumnos An e I resolviendo las tareas 2cf y 4cf.

An e I (seis años) resolviendo 2cf (Figura 5.13)

106 P: –

107 I: El triángulo [señalando el triángulo grande rojo].

108 A: Sí.

109 P: Explícaselo a A, ¿por qué?

110 I: Porque es círculo, triángulo, círculo, triángulo, círculo, triángulo, círculo.

111 P: Y, ¿qué color? Un triángulo, pero, ¿de qué color?

112 I: El rojo.

113 P: ¿Por qué?

114 I: Porque los otros triángulos son rojos.

El sujeto I ofrece la respuesta correcta de manera casi inmediata (línea 107). Cuando se le pide que argumente la elección se limita a repetir la serie centrándose en el descriptor forma (línea 110). Cuando el profesor pregunta por el color, I no tiene duda ya que en la serie ve que todos los triángulos son rojos, líneas 112 y 114.

An e I (seis años) resolviendo 4cf (Figura 5.14)

115 P: –

116 I: Ésta, [señalando triángulo violeta].

117 P: ¿Por qué? Explicásele a A.

118 P: A, ¿tú que piensas?

119 A: Yo aún no me lo sé.

120 P: Pues pégale una mirada o I explícale tú por qué piensas que es esa.

121 I: Porque he mirado la estrella y después de la estrella va el triángulo.

122 P: ¿Sí? ¿Por qué? ¿Después de la estrella cuál va?

123 I: Porque es cuadrado, estrella, triángulo.

124 P: ¿Y cuál va al final entonces?

125 I: Triángulo.

126 P: A, ¿estás de acuerdo?

127 A: Sí.

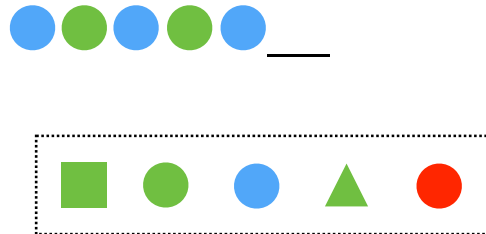
El alumno I da la respuesta correcta. En la argumentación que ofrece no hace referencia al círculo como parte del núcleo. Posiblemente, el alumno entiende que no es necesario prestar atención a este elemento (que ocupa la posición 4 en el núcleo) porque el elemento que hay que identificar esta en al tercera posición (líneas 121 y 123).

5.6.2. Análisis por número de descriptores presentes en el núcleo

Como sucede en el análisis cuantitativo el número de descriptores presentes en el núcleo no afecta al éxito presentado por los alumnos al resolver tareas de seriación. En esta sección hemos escogido las tareas 2c (Figura 5.15) y 2cf (Figura 5.13). Mostramos

únicamente una pareja por edad, el resto de datos audiovisuales son similares y no aportan nuevas conclusiones al estudio.

C y H (cuatro años) resolviendo 2c (Figura 5.15)



ID: _____

2c

Figura 5.15: Tarea 2c.

128 P: –

129 H: Círculo, círculo, círculo,

130 H: Círculo.

131 P: Y, ¿cuál? Tenéis que elegir uno para ponerlo ahí.

132 C: El verde.

133 P: ¿Por qué?

134 H: El azul.

135 P: H pondría el azul. ¿Por qué coges el azul? Díselo a C.

136 H: Porque me gusta.

137 P: Y tu C, ¿cuál pondrías?

138 C: El verde.

139 P: ¿Por qué?

140 C: Porque es azul-verde, azul-verde, azul y ahora verde.

141 P: ¿Y ese [señalando triángulo verde] es verde?

142 C: No, el círculo verde.

143 P: H dice este [el azul] y C este [el verde], ¿cuál cogemos?

144 H y C: [Señalan cada uno el suyo].

145 P: Tenemos que escoger uno. Bueno, marcamos los dos.

En un primer momento, H identifica de manera imprecisa el círculo, pero sin hacer referencia al color (línea 130). Cuando se pregunta a H por el color, C se adelanta dando

la respuesta. H vuelve a utilizar como argumento su preferencia por un color, línea 136. Sin embargo, C le argumenta correctamente analizando como va cambiando el color, línea 140. El profesor intenta que señale si valdría otro elemento con distinta forma pero con el color adecuado y C le replica que no, línea 142. De la actuación de H, se podría deducir que no es capaz de establecer el núcleo, pues solo se fija en la forma.

C y H (cuatro años) resolviendo 2cf (Figura 5.13)

146 P: –

147 H: Círculo, triángulo, círculo, triángulo, círculo. Triángulo.

148 P: ¿Cuál pondrías tú?

149 H: Triángulo.

150 P: Y tú, C, ¿cuál pondrías?

151 C: El rojo.

152 P: Y H, tú, ¿qué triángulo?

153 H: El rojo.

154 P: ¿Por qué?

155 H: Porque me gusta.

156 P: Y tú, C, ¿por qué?

157 C: Porque es azul-rojo, azul-rojo, azul

158 P: Y ahora, ¿cuál va?

159 C: El rojo.

160 P: Y, ¿por qué no pones éste [círculo grande rojo]?

161 C: Porque es triángulo.

162 P: Pues márcala.

Nuevamente, H verbaliza la serie centrándose en el descriptor forma (línea 147), que le permite en este caso dar una respuesta correcta. C es capaz de identificar la secuencia de colores y combinarla con las formas (línea 151). Sin embargo, H justifica la respuesta atendiendo a sus preferencias.

En el caso de series con dos descriptores en el núcleo, las argumentaciones y comentarios presentados son los mismos. A saber, H hace un repaso de la serie, línea 147. Y C analiza el color, línea 151. La argumentación presentada por H es “porque me gusta”, línea 155, (antes, línea 136). El profesor intenta que argumenten utilizan la característica forma, así lo hacen en la línea 161.

La pareja de 5 años, A y E, señala la figura que continúa la serie de la tarea 2c con rapidez. El análisis presentado por E se basa en el atributo color, línea 166.

A y E (cinco años) resolviendo 2c (Figura 5.15)

163 P: –

164 A y E: [Señalan círculo verde grande].

165 P: Qué rápido, ¿por qué?

166 E: Porque primero va la azul, después la verde, después la azul, después la verde y después la azul.

167 P: A, ¿estás de acuerdo?

168 A: Porque es azul-verde.

169 P: Pues marcadla.

Si comparamos la anterior transcripción con la siguiente vemos que aún le resulta más fácil porque tiene dos atributos que definen el elemento a escoger, primero la forma, línea 173 y después el color, línea 179. Esto podrá explicar en parte la menor dificultad de esta tarea en el estudio de grupo, pues la identificación del núcleo puede hacerse centrándose solo en un descriptor.

A y E (cinco años) resolviendo 2cf (Figura 5.13)

170 P: –

171 A y E: Ésta [señalando al triángulo rojo].

172 P: Y ¿por qué?

173 E: Porque luego [después] del círculo va el triángulo.

174 P: Aquí hay varios triángulos [refiriéndose a los triángulos rojo y morado], ¿cuál de los dos va?

175 A: Éste [señalando al triángulo rojo, E también lo señala].

176 P: ¿Seguro? ¿Por qué, A?

177 A: Porque es círculo y triángulo.

178 P: ¿Marcamos ese, pues? ¿Y el color que pasa? ¿Por qué no marcamos este [refiriéndose al triángulo morado]?

179 E: Porque es morado.

En el caso de la pareja de 6 años, E y R, cabe destacar que no tienen ningún problema en detectar el elemento que falta, línea 181. En este caso centra la argumentación en el descriptor color, línea 181, y despreciando la forma. Esta actuación contrasta con la de C y H resolviendo 2c.

E y R (seis años) resolviendo 2c (Figura 5.15)

- 180 P: –
181 R: Ésta [señalando el círculo verde].
182 P: ¿Tú lo tienes claro?
183 R: Sí.
184 P: ¿Por qué? Explícalo R.
185 R: Porque va azul, verde, azul, verde, azul.
186 P: Marcad la que pensáis, ¿estás de acuerdo, E?
187 E: Sí.

Si comparamos la resolución de una serie de un descriptor con la de dos descriptores (transcripción siguiente) llevadas a cabo por E y P vemos que el método de resolución es similar ya que los alumnos solo se fijan en un descriptor del núcleo. En ambos casos, R explica la elección verbalizando la serie atendiendo al descriptor color (líneas 185 y 191).

E y R (seis años) resolviendo 2cf (Figura 5.13)

- 188 P: –
189 R: Esta [señalando el triángulo rojo].
190 P: ¿Por qué?
191 R: Porque va círculo, triángulo, círculo, triángulo, círculo.
192 P: ¿Y qué triángulo cogerías?
193 R: Este [señalando el triángulo rojo].
194 E: Este [señalando el triángulo rojo].
195 P: Y el otro triángulo, ¿no?
196 R: No.
197 P: ¿Por qué?
198 E: Porque es morado.
199 P: ¿Y no vale?
200 E: No.
201 P: E, ¿no vale ese?
202 E: No.
203 P: ¿Seguro? ¿Por qué no vale?
204 R: Porque son rojos.
205 P: ¿Por qué son rojos?
206 R: Sí.

207 P: Pues ale, marcadla.

En esta resolución los alumnos primero analizan y escogen por el descriptor forma, línea 191, y después cuando son preguntados por el profesor utilizan el descriptor color.

En conclusión, de manera local, podemos afirmar que el número de descriptores del núcleo no provoca variaciones en la resolución de las tareas de seriación. Sin embargo, sí que parece observarse que en las verbalizaciones los estudiantes se centran en un descriptor. En el caso de las tareas *2c* no es así, lo que podría estar detrás del menor índice de aciertos en alumnos de menor edad. En la siguiente sección veremos que si introducimos un distractor la dificultad presentada por el resolutor es mayor.

5.6.3. Análisis de la influencia de la presencia de distractores

La presencia de distractores provoca un diálogo más rico debido a la dificultad presentada por los alumnos para resolver las tareas. Vamos, por tanto, en esta sección a analizar la resolución de una pareja por cada grupo de edad resolviendo las tareas *2ct* (Figura 5.16), *2ctd* (Figura 5.17), *4cf* (Figura 5.18) y *4cfd* (Figura 5.19).

Inicialmente H verbaliza la serie centrándose en los descriptores tamaño y forma, pero sin hacer caso al color (línea 209). Sin embargo, C señala la respuesta correcta (línea 211) lo que implica tener en cuenta el color de manera implícita.

C y H (cuatro años) resolviendo *2ct* (Figura 5.16)



Figura 5.16: Tarea *2ct*.

208 P: –

209 H: Estrella grande, estrella pequeña, estrella grande, estrella pequeña, estrella grande. Y estrella pequeña.

210 P: Estrella pequeña, entonces, ¿cuál?

211 C: [Señala estrella pequeña verde].

212 P: Esa, ¿por qué?

213 C: Porque es grande pequeño, grande pequeño, grande y ahora pequeño.

214 P: ¿Y no hay más estrellas pequeñas ahí?

215 C: Sí, pero son de color rojo y de color morado y esta [señalando la estrella pequeña de color verde] nos vale.

216 P: Esa nos vale. H, ¿tú también piensas que va?

217 H: Sí.

218 P: Pues marcadla.

La metodología de la resolución en ambos casos es la misma, repasar la serie, líneas 209 y 222. En el caso en el que la serie presenta distractores esta metodología no es adecuada, de hecho el alumno busca la figura que iría después del triángulo grande azul y encuentra dos figuras (estrella y círculo) que no están entre su posible elección, así pues las señala en la serie, líneas 225 y 228.

C y H (cuatro años) resolviendo *2ctd* (Figura 5.17)

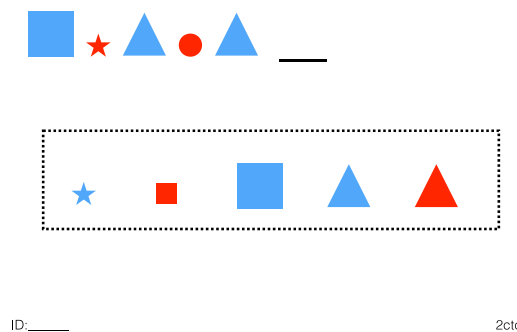


Figura 5.17: Tarea *2ctd*.

219 P: –

220 H: Triángulo [confunde triángulo con cuadrado], estrella pequeña.

221 C: Te has pasado, eso es un cuadrado.

222 H: Cuadrado grande, estrella pequeña, triángulo grande, círculo pequeño, triángulo grande.

223 P: ¿Cuál va?

224 C: [Señala cuadrado pequeño rojo].

- 225 H: [Señala estrella pequeña roja en la serie].
226 P: ¿Cuál pondrías?
227 C: [Señala cuadrado pequeño rojo].
228 H: [Señala círculo pequeño rojo en la serie].
229 P: Tiene que ser de aquí abajo.
230 H y C: [Señalan cuadrado pequeño rojo].
231 P: Esa, ¿por qué?
232 H: [Cambia y señala estrella pequeña azul].
233 P: ¿Por qué pondrías esa C?
234 C: Porque es grande pequeño, grande pequeño, y ahora pequeño.
235 P: Pero, esta también es pequeña, la que dice H.
236 C: Pero es azul y tiene que ser roja.
237 P: ¿Por qué?
238 H: Pero esa también vale.
239 P: Esa marcaría C, y tú, H, ¿cuál marcarías? ¿Por qué no marcarías esa [la de C]?
240 H: Porque no está aquí (en la serie).
241 P: Pues marcadla.

H inicia la resolución verbalizando la serie centrándose en la forma y el tamaño (línea 222). C da la respuesta correcta (línea 224), pero H inicia una secuencia de respuestas en la que va cambiando el criterio. Al ser preguntado por su respuesta, C introduce la necesidad de atender al tamaño (línea 234) y al color (línea 236). Podemos concluir que la dificultad inicial de H proviene de centrar su atención en dos descriptores (de los que uno es distractor) y no fijarse en otro necesario (el color) diciendo que ese elemento no ha aparecido en la serie (línea 240). Lo anterior pone de manifiesto que no es capaz de entender la posibilidad de que algún descriptor no se repite en la serie.

A continuación, analizamos la resolución de la pareja de 4 años, Al y An, de las tareas *4cf* y *4cfd*:

Al y An (cuatro años) resolviendo *4cf* (Figura 5.18)

- 242 P:—
243 An: Es un cuadrado, una estrella, un triángulo y un círculo.
244 P: An explícaselo a Al que es lo que estás pensando.
245 An: Ese [señalando la estrella roja].
246 P: ¿Y tú, Al?

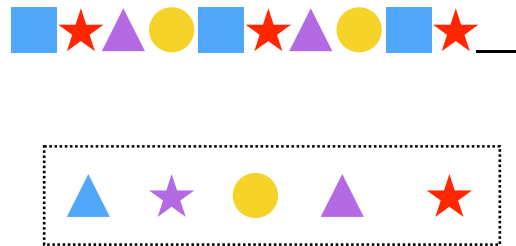


Figura 5.18: Tarea 4cf.

247 Al: Este [triángulo violeta grande].

248 P: Tú pondrías ese, ¿por qué? ¿Por qué pondrías ese Al? Cuéntaselo a An.

249 Al: Porque la estrella no se puede poner repetida.

250 P: ¿Estás de acuerdo tú An? Tú, ¿cuál pondrías ahora que te ha dicho eso Al?

251 An: Hay dos estrellitas.

252 P: Hay dos estrellas.

253 An: Y dos triángulos.

254 P: Y dos triángulos, pero, ¿cuál pondrías?

255 Al: Yo pondría este [triángulo violeta grande].

256 P: Tú pondrías este, ¿verdad?

257 Al: Sí.

258 P: Y tú An, ¿también?

259 An: Sí.

260 P: ¿Por qué lo pondrías tú, An? ¿O lo pondrías porque lo ha dicho Al?

261 An: Parece esto, [hace la silueta con el dedo del triángulo].

262 P: Venga pues marcadlo.

An describe la serie centrándose en el descriptor forma (línea 243). Según este criterio, el siguiente elemento debería ser un triángulo y entre las posibles respuestas hay dos. Sin embargo An sugiere como respuesta una estrella roja (línea 245) y Al la respuesta correcta (línea 247). Al indica a An que no puede ser la estrella roja porque estaría repetida y An le responde que hay dos estrellitas (líneas 249 y 251)). Lo anterior pone de manifiesto la dificultad de An y Al (y de los alumnos de estas edades en general) para argumentar. En el caso siguiente, además, observaremos como An toma el argumento de Al de manera literal (“no se puede poner repetida”) y lo aplica como norma (línea 256).

Al y An (cuatro años) resolviendo *4cfd* (Figura 5.19)

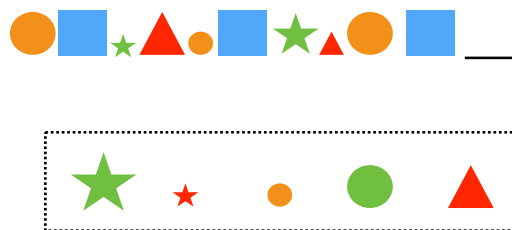


Figura 5.19: Tarea *4cfd*.

263 P:–

264 Al: Éste [triángulo grande rojo].

265 P: Y esa, ¿por qué?

266 An: Porque eso no se puede repetir.

267 P: Pero no hay ningún cuadrado aquí abajo.

268 P: An, ¿tú cuál pondrías?

269 An: Ese [círculo pequeño naranja].

270 P: ¿Por qué?

271 An: Porque ese se pone ahí.

272 P: ¿Se pone ahí? ¿Y este no se puede poner ahí [señala círculo grande verde]?

273 An: Sí.

274 P: ¿Sí?

275 An: Sí

276 P: ¿Y éste [señala estrella verde grande]?

277 An: Sí.

278 P: Y para que la serie estuviera bien, ¿cuál pondrías?

279 An : Ese [señalando estrella verde grande].

280 P: Ése, ¿por qué?

281 An: Porque ese se pone ahí.

282 P: ¿Y éste se puede poner ahí [señalando triángulo grande rojo]?

283 An: Sí.

284 P: Y para que la serie estuviera bien, ¿cuál pondrías?

285 Al: Yo este ahí [triángulo grande rojo].

286 An: Yo este ahí [estrella verde grande].

287 P: ¿Por qué pondría ese ahí?

288 Al: Porque hay un cuadrado y el cuadrado no se repite.

289 P: Pero si tuvieras que hacer la serie, ¿cuál pondrías?

290 Al: Ha dicho mi mamá, ha dicho que sí.

291 P: Cada uno que marque el suyo, el que pondría An y el que pondría Al.

El caso de la solución de $4cf$, esta pareja había verbalizado la serie centrándose en el descriptor forma. En esta resolución no ponen en juego esta técnica ni ninguna otra (al menos de manera implícita) que les permita detectar el núcleo y obtener la solución de manera correcta. Tampoco, encuentran razones para defender su elección (líneas 271 y 281) lo que les lleva a usar argumentos irreales como cuando Al elige una respuesta porque “se lo ha dicho su madre”. Por tanto, aunque la respuesta dada por An (línea 279) es correcta no podemos indicar cuáles son las razones que le llevan a dicha elección.

I y E (cinco años) resolviendo $2ct$ (Figura 5.16)

292 P: –

293 I y E: Este [señalando la estrella pequeña verde].

294 P: Y, ¿por qué?

295 E y I: Porque después del amarillo va el verde.

296 P: Pero aquí hay dos verdes, ¿no? ¿Qué pasa ahí?

297 I: Porque como hay dos, entonces por si era más grande esta [se refiere a la estrella grande verde].

298 P: Y ¿por qué ponemos la pequeña?

299 I: Es que nos va mejor esta, ¿verdad E?

En esta resolución los alumnos se fijan en el atributo color (línea 295) y después, tras la intervención del profesor en el tamaño (línea 297). No les resulta difícil resolver esta tarea, pero sus argumentaciones no se apoyan sobre una explicitación del núcleo.

I y E (cinco años) resolviendo $2ctd$ (Figura 5.17)

300 P: –

301 I: La estrella, pero es que está mal.

302 E: Yo pondría esta [señalando el cuadrado pequeño rojo].

303 I: Yo pondría esta [señalando la estrella pequeña azul].

304 P: E pondría el cuadrado rojo, ¿por qué?

305 I: Como si fuera el círculo, ¿no?

306 E: Porque como estas dos son diferentes [se refiere en la serie a círculo y estrella pequeños] pues la que ponemos es esta [se refiere a cuadrado pequeño].

307 I: Pues yo pondría esta [señalando la estrella azul pequeña].

308 P: ¿Qué quiere decir que son diferentes, E?

309 I: Mejor esta.

310 E: No, no.

311 P: Pero, ¿por qué quieres poner esa I?

312 I: Iba a poner una roja estrella pero como no estaban entonces he puesto esta [estrella azul].

313 P: Tú querías poner una estrella roja, y tú E, ¿qué querías poner?

314 E: Un cuadrado.

315 P: ¿Un cuadrado? ¿Por qué?

316 E: Porque como estas son diferentes [se refiere en la serie a círculo y estrella pequeños] pondría ahí una diferente.

317 P: ¿Por qué son diferentes? ¿En qué se diferencian?

318 E: Una es una estrella, la otra es un círculo.

319 I: Quedamos en la estrella, ¿no E?

320 P: ¿Cuál quedamos de los dos?

321 E: Cuadrado.

322 I: Estrella.

323 P: Cogemos los dos.

En este caso, E en un primer momento da la respuesta correcta. Cuando se le pregunta, argumenta su respuesta sobre el hecho que los segundos elementos del núcleo tiene un descriptor no coincidente (línea 306 y 316). I, sin embargo, parece centrar la identificación en la forma (justamente el descriptor que actúa como distractor), lo que le lleva a proponer una estrella (línea 301). El hecho de inmediatamente diga “pero está mal” (línea 301) podría sugerir que busca como solución la estrella pequeña roja, con lo que estaría observado solo una posible alternancia del segundo elemento del núcleo (estrella roja pequeña, círculo rojo pequeño, estrella roja pequeña...). Esto podría explicar la elección de la estrella pequeña azul (líneas 303, 307 y 312) por proximidad a la solución que le gustaría ofrecer (estrella roja pequeña).

I y E (cinco años) resolviendo 4cf (Figura 5.18)

324 P: –

325 I y E: Yo este [señalan ambos el triángulo violeta grande].

326 P: ¿Por qué?

327 E: Porque después de la estrella va el triángulo violeta grande.

328 P: Y, ¿cómo lo sabes?

329 E: Porque lo pone aquí [señalando a la serie].

330 P: I, ¿tú que dices? ¿cuál pondrías?

331 I: Este [triángulo violeta grande].

332 P: Pues lo marcáis.

Señala la respuesta rápidamente sin verbalización del razonamiento y justifican la respuesta conectando el elemento que da como respuesta con el anterior (línea 327) sin que se identifique explícitamente el núcleo.

I y E (cinco años) resolviendo *4cfd* (Figura 5.19)

333 P: –

334 I y E: La estrella verde [y la señalan].

335 P: ¿Por qué?

336 E: Porque luego va la estrella verde.

337 P: ¿Luego de qué va la estrella verde?

338 I: Pero es que está mal porque ésta [refiriéndose a la estrella escogida] es más grande que ésta [refiriéndose a la estrella de la serie].

339 P: Ah, es verdad, pero da igual, si fuesen del mismo tamaño.

340 I: Pondríamos ésta.

Dan la respuesta correcta y nuevamente sin verbalización del razonamiento. Cuando se intenta que razonen la respuesta, I (línea 338) parece sugerir que con los elementos ofrecidos como posibles soluciones no se puede resolver la tarea. Echa en falta una estrella verde pequeña, lo que parece indicar que intenta dar la solución apoyado en que se trata del tercer elemento del núcleo y que este tiene una repetición particular en la que se mantiene forma y color y alterna tamaño.

A y R (seis años) resolviendo *2ct* (Figura 5.16)

341 P: –

342 A: Ésta (señalando la estrella verde pequeña).

343 P: ¿Por qué?

344 A: Porque la estrella grande, la segunda es la estrella verde pequeña.

345 R: Sí.

346 P: ¿Sí? ¿Tú compartes? ¿Tú ves claro que sí?

347 R: Yo, sí.

348 P: Pues ala.

El alumno A no tienen ningún problema en resolver la tarea. Cuando se les pide que razonen, A responde definiendo claramente el módulo de la serie (línea 344).

A y R (seis años) resolviendo *2ctd* (Figura 5.17)

349 P: –

350 R: Pues yo mira, este [señala el cuadrado grande azul].

351 P: Tú marcarías ese, ¿por qué?

352 R: No sé.

353 A: A mí me parece que este [señalando el cuadrado grande azul].

354 R: A mí me parece que este [señalando el cuadrado pequeño rojo].

355 A: Hala, este [marcando el cuadrado grande azul].

356 P: A, marca el cuadrado azul y tú [refiriéndose a A], ¿marcas también el cuadrado azul?

357 A: Hombre, porque mira, siendo así, así, así [señalando toda la serie], y volver a empezar.

358 R: Yo voto porque sí.

359 P: Pero tú antes has dicho que el cuadrado rojo pero lo has cambiado. ¿Por qué pensabas que era el cuadrado rojo?

360 R: Después de un azul va uno rojo.

361 P: ¿Y ese no lo ponéis al final?

362 A: Yo creo que sí.

363 P: Después de un azul va uno rojo, pero aquí hay otro rojo, hay dos rojos. ¿Por qué eliges el cuadrado y no el triángulo?

364 A: Yo elijo este porque si al final va a empezar otra vez.

365 P: Y al final, ¿cuál dejamos? ¿La de A o la de R?

366 A: A mí me parece que esta [señalando al cuadrado azul grande].

367 R: A mí me parece que esta [señalando al cuadrado rojo pequeño].

368 P: Pero bueno, tenéis que llegar a un acuerdo.

369 A: Si esa va ahí, ahí, ahí [señalando toda la serie] y luego vuelve a empezar.

370 R: Pues esta [señalando al cuadrado azul grande, ha cambiado finalmente].

371 P: ¿Sí?

372 A: Sí.

El alumno R da inicialmente, y de manera incorrecta, el cuadrado azul grande como

respuesta (línea 350), pero cambia a cuadrado rojo pequeño (línea 354), la cual sería correcta. El alumno A también sugiere cuadrado azul grande (líneas 353 y 355) y parece justificarla indicando que se trata de una serie de longitud de núcleo 5 y que el siguiente elemento iniciaría el nuevo núcleo (líneas 357 y 364). La argumentación de A convence a R (línea 358), pero, a pregunta del investigador, R explicita que después de un azul va uno rojo (línea 360) y vuelve a cambiar su respuesta (línea 367). En definitiva se puede concluir que el alumno A ha supuesto que se trataba de una serie de longitud 5 y ha dado como respuesta el elemento que la volvería a iniciar. Por su parte, el alumno R se ha centrado en lo que caracteriza al segundo elemento del núcleo para dar la respuesta.

R y M (seis años) resolviendo 4cf (Figura 5.18)

373 P: –

374 R: Esta [señalando triángulo violeta grande].

375 P: ¿Por qué?

376 R: Porque después de esta estrella [señalando a la estrella roja grande], va triángulo morado.

377 P: Perfecto.

El alumno R da la respuesta correcta (línea 374) y lo justifica centrándose en el elemento que de manera recurrente se observa que sigue a otro (línea 376).

R y M (seis años) resolviendo 4cfd (Figura 5.19)

378 P: –

379 R: Esta [señalando estrella roja pequeña].

380 P: Sí, ¿por qué?

381 R: Porque después de un cuadrado grande va una estrella pequeña.

382 P: Pero la que has escogido es roja y la que hay en la serie es verde. ¿No cogemos la verde?

383 R: Cambio.

384 P: Ahora cambias, ¿por qué? M, ¿tú que piensas?

385 M: Porque está ésta [señalando la estrella verde de la serie].

386 P: Cogemos la estrella grande pero en la serie es pequeña, ¿cuál pondríamos?

387 M: El círculo.

388 P: ¿Por qué dices el círculo?

389 M: Porque ahí hay otro círculo y ahí [señalando a la serie].

390 P: Y, ¿qué círculo elegirías?

391 M: ¿Este? [señalando el círculo pequeño naranja].

392 P: No sé, el que tú pienses.

- 393 R: Yo elegiría este [señalando el círculo verde grande] porque si vuelve a empezar.
- 394 P: Pero, si vuelve a empezar, empieza con el naranja, ¿no?
- 395 P: ¿Con cuál nos quedamos de los cuatro que habéis marcado?.
- 396 R: Yo con este [señalando círculo naranja pequeño].
- 397 P: Tú, [refiriéndose a M] ¿cuál pondrías?
- 398 M: El círculo.
- 399 P: ¿Qué círculo? ¿Naranja o verde?
- 400 M: Verde.
- 401 P: ¿Verde? Tenéis que llegar a un acuerdo, ¿naranja o verde?
- 402 R: Naranja
- 403 P: ¿Por qué?
- 404 R. Porque creo que como vuelve a empezar yo prefiero naranja. Y como empieza con el naranja.
- 405 P: Sí o ¿qué?, tú [M] piensas que el verde, ¿por qué piensas que el verde?
- 406 M: No sé.
- 407 P: Alguna razón habrá. O, ¿te gusta más el verde?
- 408 M: El verde.
- 409 R: Pues marco el verde.

La propuesta inicial de R centra la determinación en la identificación del “siguiente de” sin buscar qué características tienen los elementos del núcleo en su conjunto (línea 379 y 381). En concreto, se centra en la presencia repetida del elemento cuadrado azul grande e intenta encontrar un criterio de repetición en el elemento que le sigue. Sin embargo, en lugar de atender a todas las repeticiones, se centra en la primera (cuadrado azul grande, estrella verde pequeña) y, al no encontrar una estrella verde pequeña, supone que el color actúa como distractor (y no el tamaño). Cuando el profesor plantea escoger la verde, automáticamente cambia su respuesta (línea 383). M (línea 385), y tras la sugerencia del profesor de observar el color, elige la estrella verde grande. Sin embargo, se observa que su razonamiento no es consistente y que se centra solo en ciertos aspectos. Así, cuando el profesor (línea 386) sugiere atender al tamaño, M cambia su respuesta al círculo (círculo pequeño naranja) y lo justifica sencillamente por su presencia en la serie (línea 389). El alumno R propone el círculo grande verde y lo justifica diciendo que la serie vuelve a empezar (línea 393). Posiblemente, esta verbalización es consecuencia de no ser capaz de identificar un patrón de repetición, lo que le conduce a suponer que lo que se presenta es un único núcleo. El profesor sugiere que si volviera a empezar, se iniciaría con círculo y pregunta con cuál de los dos posibles (naranja pequeño y verde grande) se quedarían. R

justifica su decisión centrándose en el atributo color (línea 404), pero M no es capaz de justificar su respuesta (que se apoyaría en la centración en el descriptor tamaño).

5.6.4. Análisis de la influencia de la repetición de atributos en el núcleo

En esta última sección vamos a analizar las resoluciones presentadas por los alumnos en tareas con series donde hay repeticiones de atributo en el núcleo. Como ya hemos analizado resoluciones cuando no hay repeticiones ($4c$ y $4ct$), mostramos solamente las transcripciones de las tareas $4c_b$ (Figura 5.20) y $4ct_b$ (Figura 5.20).

La pareja M y E de cuatro años resuelven de forma incorrecta la tarea $4c_b$ centrándose en el atributo color, la forma y el tamaño son similares. Veamos la transcripción:

M y E (cuatro años) resolviendo $4c_b$ (Figura 5.20)



Figura 5.20: Tarea $4c_b$.

410 P:—

411 M: Esta [estrella roja grande].

412 P: ¿Tú pondrías esa M? ¿Tú pondrías esa E? ¿Por qué pondrías esa?

413 M: Porque hay dos rojas, [señala la estrella amarilla de la serie e indica como si fuese detrás la roja].

414 P: Entonces ¿pondríamos?

415 M: Una roja.

416 P: E, ¿Tú qué?

417 E: Esta [señalando la estrella roja grande].

418 P: ¿Esa? ¿Por qué?

419 E: Porque...

420 P: Puedes coger otra si quieres.

421 P: ¿Por qué piensas que va ésa [estrella grande roja]? ¿Y no piensas que va esta [estrella verde] o esta [estrella violeta]? ¿Esta [estrella violeta] crees que no va?

422 E: No.

423 P: ¿No? ¿Por qué ahí no está?

424 E: No

425 P: Y esta [estrella verde], ¿por qué no va esta?

426 M: Porque va antes que el rojo.

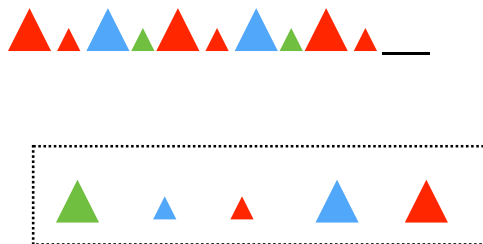
427 P: E, ¿cuál marcarías?

428 E: [Señala estrella roja grande].

429 P: Va, pues márcala.

El núcleo de la serie empieza y finaliza con una estrella amarilla. Esto hace que tras una estrella amarilla puedan aparecer dos elementos distintos. Se observa que ambos estudiantes eligen de manera incorrecta la estrella roja. En ningún caso verbalizan el núcleo y su argumento se apoya sobre la relación entre elemento que deben elegir y el anterior. En el fragmento de serie que se presenta la amarilla viene seguida por la roja en dos ocasiones y por una amarilla en otra ocasión. El alumno M centra la atención en la primera aparición de la estrella amarilla (línea 413), lo que le conduce al error.

H y L (cuatro años) resolviendo $4ct_b$ (Figura 5.21)



ID: _____

4ct_b

Figura 5.21: Tarea $4ct_b$.

430 P:—

431 H: Marca [triángulo azul grande].

432 P: ¿Tú marcas esa, H? ¿por qué?

433 L: Porque es rojo y rojo pequeño y azul y verde y también rojo rojo pequeño y azul y verde y rojo y rojo pequeño.

434 P: Y ahora, ¿cuál va?

435 L: Ésta [triángulo grande azul].

436 P: ¿Y no va ésta [triángulo pequeño azul]?

437 L: No, ese es pequeño.

438 P: ¿El pequeño no va?

439 L: No, porque aquí no hay azul de pequeño.

440 P: Pues bien, ya hemos acabado.

En este caso la presencia de más descriptores posiblemente facilita la identificación del núcleo. De hecho L (línea 433) identifica de manera correcta el núcleo de la serie y razona sobre el mismo.

I y S (cinco años) resolviendo $4c_b$ (Figura 5.20)

441 P: –

442 I: La roja.

443 P: ¿Los dos pensáis que la estrella roja?

444 I, S: Sí.

445 P: ¿Lo marcamos?

446 I, S: Sí.

Del mismo modo que le sucedía a los alumnos de cuatros años, se comete un error al elegir la estrella roja en los alumnos de cinco años.

V y J (seis años) resolviendo $4c_b$ (Figura 5.20)

447 P: Y en este de aquí, ¿cuál va?

448 V: La roja.

449 P: Sí, ¿por qué?

450 V: Porque amarilla-roja [señalando el comienzo de la serie], amarilla-roja (señalando el final de la serie].

451 P: J, ¿tú piensas lo mismo?

452 J: Sí.

453 P: Pues ale, marcad.

En la pareja de estudiantes de seis años, se produce el mismo error. Además la argu-

mentación se vuelve a centrar en la relación anterior-posterior y no en la identificación del núcleo de la serie.

C y B (cinco años) resolviendo $4ct_b$ (Figura 5.21)

454 P: –

455 B: Azul.

456 P: Pero hay dos azules, ¿qué azul?

457 C: Yo esta [triángulo azul grande].

458 P: ¿Por qué esa y no otra?

459 C: Porque lo he mirado [en la serie].

460 P: ¿Sí?, pues marcadlo.

Resuelven la tarea de manera correcta sin que se verbalice el razonamiento.

6

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo hemos analizado la relación entre la complejidad y dificultad de las tareas de identificación y continuación de patrones lineales reiterativos para alumnos de 4, 5 y 6 años. Para ello, se han definido cuatro variables de tarea: longitud del núcleo, número de descriptores presentes en el núcleo, naturaleza del descriptor (color, tamaño y forma) y presencia de distractores en el núcleo o grados de libertad para continuar la serie. Hemos realizado un estudio exploratorio por medio de un cuestionario con 19 ítems que hemos administrado a los tres grupos naturales. Los 19 ítems han sido diseñados para establecer relaciones entre los niveles de éxito en la resolución de tareas con diferentes valores de las variables de tarea. Además, hemos explorado las diferencias en los niveles de éxito en la resolución de tareas entre los distintos grupos de edad que, como era de esperar, han sido significativas.

Hemos dividido este estudio exploratorio en cuatro apartados dependiendo de las variables de tarea. Para cada análisis hemos definido nuevas variables sumando los éxitos de las tareas donde aparece la variable de tarea que se desea estudiar. Hemos aplicado un tratamiento estadístico a esas nuevas variables para detectar diferencias significativas en los niveles de éxito en la resolución de las tareas de seriación. En primer lugar, hemos comprobado que no hay normalidad en las variables, lo que nos ha inducido a aplicar tests no paramétricos como son el de Wilcoxon y la U de Mann-Whitney. Siguiendo a [Field y cols. \(2012\)](#) se ha fijado como criterio de significancia $p < .05$, y se ha cuantificado el tamaño del efecto, r , como pequeño si $r \sim 0.1$, medio si $r \sim 0.3$ y grande si $r \sim 0.5$.

Comenzamos estudiando las posibles diferencias en el éxito en la resolución de tareas con núcleo-2 y núcleo-4, obteniendo que no existen diferencias significativas en ningún grupo de edad. Del mismo modo, el número de descriptores presentes en el núcleo no afecta de manera significativa. Sin embargo, si introducimos un distractor en el núcleo obtenemos diferencias en los tres grupos de edad con un tamaño del efecto alto ($r = 0.603$, $r = 0.606$ y $r = 0.575$ respectivamente). Cuando introducimos una repetición de un atributo en el núcleo obtenemos diferencias significativas en los grupos de 5 y 6 años con un tamaño del efecto medio ($r = 0.378$, $r = 0.392$, respectivamente).

Además hemos comparado entre grupos de edades y, como era de esperar, hemos obtenido diferencias significativas. A continuación, resumimos en la Tabla 6.1) los resultados de carácter local obtenidos en el estudio exploratorio.

Tabla 6.1: Resumen de la influencia de las variables de tarea en la dificultad presentada por el alumno. \times = no hay diferencias significativas, \checkmark = existen diferencias significativas. Columnas 1 a 3: por grupos naturales de 4, 5 y 6 años. Columnas 4 a 6: entre grupos de edades

	4	5	6	4 y 5	4 y 6	5 y 6
Longitud del núcleo	\times	\times	\times	\checkmark	\checkmark	\checkmark
Descriptores presentes	\times	\times	\times	\checkmark	\checkmark	\times
Distractores	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
Repetición de atributo	\times	\checkmark	\checkmark	\times	\checkmark	\checkmark

Tras el análisis exploratorio, hemos realizado un estudio de casos estableciendo parejas de alumnos con el fin de obtener las causas de las diferencias encontradas en el análisis cuantitativo.

Hemos visto que los razonamientos se centran, en ocasiones, en la relación anterior-siguiente y no en la identificación de las características del núcleo completo. Esta técnica resulta adecuada excepto cuando las series tienen distractores (pues no siempre se encuentran relaciones unívocas anterior-posterior) y cuando aparecen atributos repetidos en los que pueden aparecer varios patrones anterior-posterior (el caso de las estrellas amarilla-roja, amarilla-amarilla). Lo cual, explica las diferencias aparecidas en los niveles de éxito en tareas que presentan distractores y repetición de atributos (Tabla 6.1).

Los problemas con distractores introducen al estudiante en una situación confusa, pues aparecen datos superfluos que le obligan a eliminar información no necesaria. Las diferencias encontradas tanto en el estudio cuantitativo como en el estudio de casos nos lleva a preguntarnos si no debería la escuela favorecer un abanico más amplio de problemas en los que las situaciones de incertidumbre y las soluciones sean abiertas y no únicas.

En otros casos, la identificación del núcleo se puede relacionar con la verbalización de la secuencia, pero en estos casos los estudiantes las verbalizan centrándose, habitualmente en un descriptor. Esto empobrece su percepción de núcleo y conduce a dar respuestas que

no tienen en cuenta todas las características de los elementos propuestos.

Como una limitación de este trabajo podemos indicar en el estudio cuantitativo el tamaño de la muestra en cada grupo de edad. Sin embargo, el tamaño del efecto observado en los casos que se producen diferencias significativas nos conduce a pensar que un estudio con una muestra mayor produciría resultados similares.

En el estudio de casos han aparecido resoluciones presentadas por los alumnos que nos invitan a observar otras variables como ampliar la longitud de núcleo o analizar si el descriptor elegido a la hora de definir el distractor tiene repercusiones en la dificultad presentada por el alumno.

Otra línea de investigación es analizar la relación complejidad-dificultad en series numéricas en grupos de edades mayores u otro tipo de series utilizadas en contextos no necesariamente académicos.

Referencias

- Alsina, Á., y Giralt, I. (2017). Introducción al álgebra en educación infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones. *Didácticas Específicas*, 16, 113 – 129.
- Arnau, D. (2011). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Valencia: Servei de Publicacions.
- Benedito, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* (Tesis Doctoral no publicada). Universitat de València (Estudi General).
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., ... Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. icme-13 monographs* (pp. 27 – 49). Cham, Heidelberg: Springer International Publishing. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2
- Boule, F. (1995). *Manipular, organizar, representar. Iniciación a las matemáticas*. Madrid: Narcea.
- Brownell, W. A. (1942). Problem Solving. En N. B. Henry (Ed.), *The psychology of learning*. Chicago: University of Chicago Press. Descargado de <https://hdl.handle.net/2027/uiug.30112003355614>
- Calero, J. A. (2014). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente* (Tesis Doctoral no publicada). Univeristat de València.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Darrell, E. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87 – 115. doi: 10.2307/30034843
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada, España: Comares.
- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritméticos-algebraicos* (Tesis Doctoral no publicada). Univeristat de València.
- Field, A., Miles, J., y Field, Z. (2012). *Discovering Statistics Using R*. SAGE Publications Ltd. Descargado de <https://studysites.uk.sagepub.com/dsur/study/default.htm>
- Greeno, J. G., y Simon, H. A. (1974). Processes for sequence production. *Psychological Review*, 81(3), 187 – 198. doi: <http://dx.doi.org/10.1037/h0036340>
- Kamii, C., Rummelsburg, J., y Kari, A. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(1), 39–50.
- Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput,

- D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5 – 17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2014). Algebra Teaching and Learning Carolyn. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27 – 32). Dordrecht: Springer.
- Kieran, C. (Ed.). (2018). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. Cham, Heidelberg: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-68351-5
- Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield (Ed.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. ERIC.
- Mason, J., Stephens, M., y Watson, A. (2009). Appreciating structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 2(2), 10 – 32.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*.
- Morales, R., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, 11(4), 233 – 252.
- Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33 – 49. Descargado de <http://link.springer.com/10.1007/BF03217544> doi: 10.1007/BF03217544
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Orton, J., y Orton, A. (1999). Pattern and the approach to algebra. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104 – 120). London, UK: Cassell.
- Owen, A. (1995). In Search of the Unknown: A Review of Primary Algebra. En J. Angileri (Ed.), *Children's mathematical thinking in the primary years* (pp. 124 – 147). Continuum.
- Papic, M. (2015). An Early Mathematical Patterning Assessment: identifying young Australian Indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 519–534. doi: 10.1007/s13394-015-0149-8
- Papic, M., y Mulligan, J. (2005). Pre-schoolers' mathematical patterning. En P. Clarkson y cols. (Eds.), *Building connections: Research, theory and practice: Proceedings of the 28th annual conference of the mathematics education research group of australasia, townsville: Vol. 2* (pp. 609 – 616). Sydney: Merga.
- Puchalska, E., y Semadeni, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetic problems with missing, surplus or contradictory data. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 9 – 16.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Shapiro, S. S., y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52(3/4), 591–611. Descargado de <http://www.jstor.org/stable/2333709>
- Siegel, S. (1956). *Nonparametric statistics for the behavioral sciences*. New York: McGraw-Hill.

-
- Simon, H. A. (1972). Complexity and the representation of patterned sequences of symbols. *Psychological Review*, 79(5), 369 – 382. doi: 10.1037/h0033118
- Sternberg, L. (1974). *An analysis of achievement characteristics of high and low performers in preschool, kindergarten and first-grade classes on pattern recognition tasks*. (Tesis Doctoral, University of Connecticut). Descargado de <https://search.proquest.com/docview/302687409?accountid=14777>
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18 – 30). London, UK: Cassell.
- Vitz, P. C., y Todd, T. C. (1967). A model of learning for simple repeating binary patterns. *Journal of Experimental Psychology*, 75(1), 108 – 117. doi: 10.1037/h0024881
- Vitz, P. C., y Todd, T. C. (1969). A coded element model of the perceptual processing of sequential stimuli. *Psychological Review*, 76(5), 433–449. doi: 10.1037/h0028113
- Weber, K., y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En A. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353–382). Rotterdam: Sense Publishers. doi: https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_10
- Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1(6), 80–83. Descargado de <http://www.jstor.org/stable/3001968>
- Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379 – 402. doi: 10.1023/A:1020291317178

Índice de Tablas

4.1. Configuración de las tareas del cuestionario por variables involucradas . . .	19
4.2. Parejas escogidas para la fase de estudio de casos	24
5.1. Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas para series con núcleo-2	28
5.2. Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas para series con núcleo-4	28
5.3. Proporción de respuestas correctas de las distintas tareas introduciendo una repetición de uno de los descriptores en el núcleo	28
5.4. Media, desviación típica y mediana de las variables n_2 y n_4 para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años.	29
5.5. p -valor al aplicar la prueba de Shapiro-Wilk a las variables n_2 y n_4 para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años	31
5.6. Media, desviación típica y mediana de las variables d_1 y d_2 para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años	35
5.7. Media, desviación típica y mediana de las variables d_3 para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años	37
5.8. Media, desviación típica y mediana de las variables n_{ob} y s_{ib} para los grupos naturales de 4, 5 y 6 años	41
6.1. Resumen de la influencia de las variables de tarea	72

Índice de Figuras

2.1. Series reiterativas núcleo-2 y núcleo-3	4
2.2. Serie reiterativa con dos descriptores	5
2.3. Serie reiterativa con un descriptor y un distractor	5
2.4. Serie reiterativa núcleo-2.	9
2.5. Estructura matemática de la serie reiterativa de la Figura 2.4.	10
2.6. Ejemplo de serie reiterativa formada con elementos de los bloques lógicos. .	11
4.1. Variables de tarea en series reiterativas	17
4.2. Series reiterativas con repetición de atributos	18
4.4. Fase de enseñanza: Descripción de los descriptores color y forma.	19
4.3. Ejemplos de tareas del cuestionario: $2f$, $4f$, $2cf$, $4cf$, $4ctd$, $4cfd$, $2ct$ y $2ctd$. .	20
4.5. Fase de enseñanza: Descripción del descriptor tamaño.	21
4.6. Fase de enseñanza: Relación entre los descriptores color, forma y tamaño. .	21
4.7. Fase de enseñanza: Relación entre los descriptores color, forma y tamaño. .	21
4.8. Fase de enseñanza: Actividades y sus soluciones.	22
4.9. Fase de enseñanza: Actividades con series.	22
4.10. Alumnos realizando las tareas de seriación.	25

5.1. Diagrama de barras de las variables n_2 y n_4 de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.	30
5.2. Diagrama de cajas de las variables n_2 y n_4 del grupo natural 4 años. . . .	31
5.3. Diagrama de cajas de las variables n_2 y n_4 del grupo natural 5 años. . . .	32
5.4. Diagrama de cajas de las variables n_2 y n_4 del grupo natural 6 años. . . .	32
5.5. Diagrama de cajas de la variable n_2 para los grupos: 4, 5 y 6 años.	33
5.6. Diagrama de cajas de la variable n_4 para los grupos: 4, 5 y 6 años.	34
5.7. Diagrama de cajas de las variables d_1 y d_2 de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.	36
5.8. Diagrama de cajas de las variables d_3 de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.	38
5.9. Diagrama de barras de las variables n_{ob} y s_{ib} de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.	40
5.10. Diagrama de cajas de las variables n_{ob} y s_{ib} de los grupos naturales: 4, 5 y 6 años.	43
5.11. Tarea 2 <i>f</i>	45
5.12. Tarea 4 <i>f</i>	46
5.13. Tarea 2 <i>cf</i>	49
5.14. Tarea 4 <i>cf</i>	50
5.15. Tarea 2 <i>c</i>	52
5.16. Tarea 2 <i>ct</i>	56
5.17. Tarea 2 <i>ctd</i>	57
5.18. Tarea 4 <i>cf</i>	59
5.19. Tarea 4 <i>cf</i> <i>d</i>	60
5.20. Tarea 4 <i>c_b</i>	67
5.21. Tarea 4 <i>ct_b</i>	68