DEPARTAMENT D’ECONOMIA FINANCERA I ACTUARIAL
FACULTAT D’ECONOMIA
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Tema 1: Actius financers i eines matemàtiques

APUNTS TEORIA

En aquest tema l'objectiu és introduir l'alumne en els conceptes bàsics que tracten sobre els intercanvis financers en ambient de certesa. Es tracten de manera concisa quines són les eines clau de fonaments de matemàtiques financeres a l'hora de valorar determinats actius financers, que es desenvolupen en temes posteriors.

ÍNDEX

1. Sistema financer

Les finances estudien la manera en què els recursos escassos s'assignen a través del temps. Dues característiques distingeixen les decisions financeres d'altres decisions d'assignació de recursos:

1. Els costos i beneficis de les decisions financeres es distribueixen al llarg del temps.
2. Generalment, no són coneguts amb anticipació pels encarregats de prendre les decisions, ni per ningú més.

En, portar a la pràctica les seues decisions, la gent es recolza en el **sistema financer**, que es defineix com el conjunt de mercats que canalitzen els recursos des de les unitats econòmiques posseïdores d'estalvi a què són deficitàries. La canalització dels recursos la realitzen les institucions financeres, i es materialitza a través dels actius financers.

En aquesta assignatura ens ocuparem de la determinació del preu dels actius financers. La valoració d'actius és fonamental en els processos de presa de decisions d'inversió i finançament. En el procés de valoració d'actius, hi juga un paper essencial el risc associat a aquests, per això inclourem també en aquesta assignatura la definició i les mesures dels riscos associats als diferents actius.

Els actius financers es poden classificar en tres categories bàsiques: deute, accions i derivats.

En la primera part de l'assignatura veurem els instruments de deute (també anomenats actius de renda fixa) i en la segona part veurem les accions (actius de renda variable). L'estudi dels instruments derivats queda fora de l'abast d'aquesta assignatura.

Els instruments de deute els emet qualsevol que demana un préstec: empreses, governs i individus. L'emissor d'aquests actius es compromet a atendre un corrent de pagaments en concepte d'interessos i satisfer la devolució del capital prestat.

Els instruments de deute també es coneixen com a instruments de renda fixa, perquè prometen pagar sumes fixes d'efectiu en el futur, per la qual cosa si l'operació arriba a venciment (l'actiu no es ven abans) la rendibilitat de l'operació és coneguda a priori.

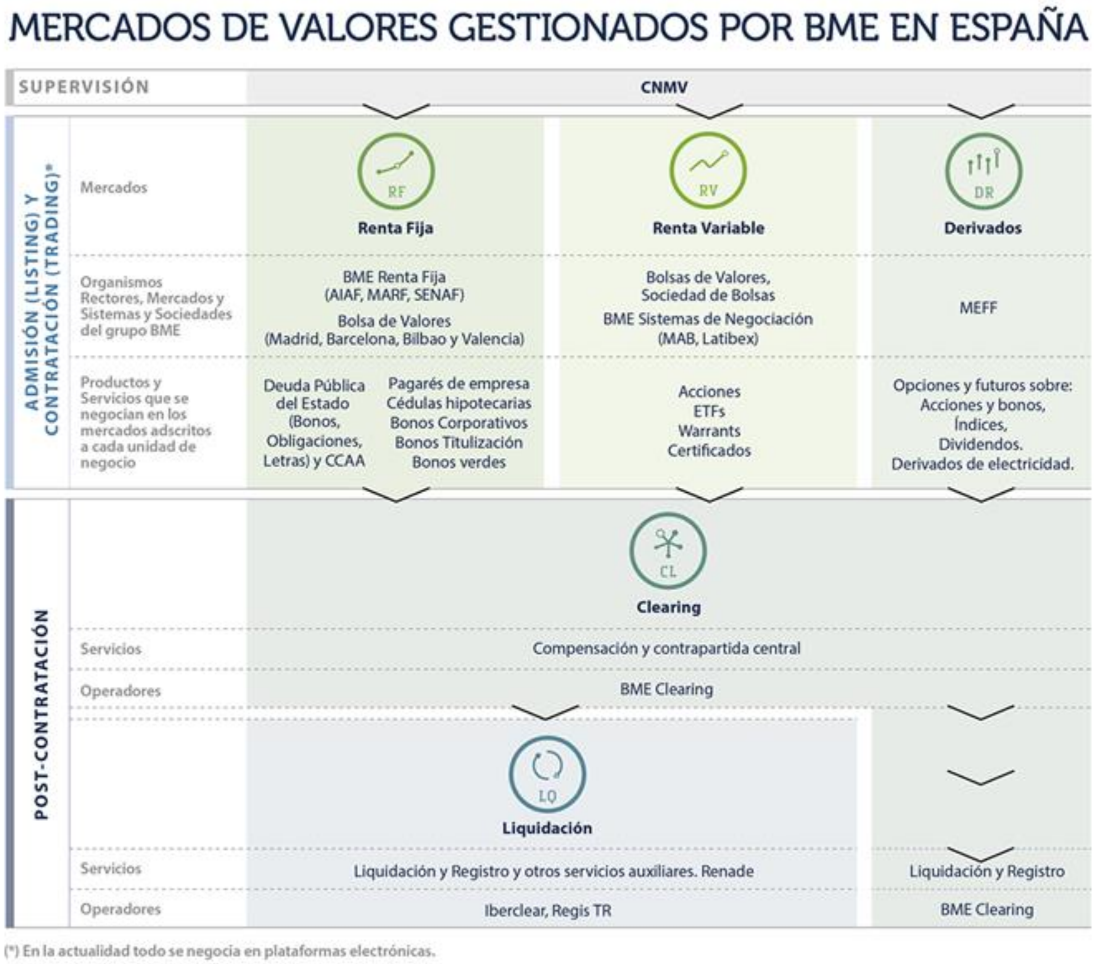
Els actius de renda fixa es poden classificar atenent a diferents criteris. Si es classifiquen respecte al venciment que posseeixen, fem la distinció entre actius de renda fixa a curt i mitjà o llarg termini. Els títols de renda fixa a curt termini són les lletres del tresor i els pagarés d'empresa (títols públics i privats respectivament) i els títols a mitjà i llarg termini són els emprèstits d'obligacions i bons, emesos per empreses privades o per l'Estat, coneguts en el segon cas com a deute de l'Estat.

Les accions són considerades actius de renda variable i representen una part alíquota del capital social d'una empresa, per tant en conformen part dels recursos propis. L'accionista es converteix a tots els efectes en propietari de l'empresa; per tant, l'adquisició d'una acció confereix a l'inversor tant drets polítics com econòmics. A diferència de les emissions de deute, quan una empresa emet accions no es compromet a remunerar els inversors i, per descomptat, les accions no tenen data de venciment. Per aquest motiu, el corrent de pagaments associats a la inversió en accions és incerta, ja que dependrà del benefici de l'empresa després d'atendre els pagaments del deute i, si l'empresa no és adquirida ni liquidada, es pot considerar perpètua.

En concret, el **sistema financer espanyol** és el conjunt d'institucions, intermediaris, instruments (actius financers) i mercats la missió dels quals és canalitzar l'estalvi/excedent que generen les unitats de despesa amb superàvit, cap als prestataris públics o privats (unitats de despesa amb dèficit).

La seua importància en les economies de mercat es converteix en essencial per a:

- Posar en contacte estalviadors i inversors.
- Realitzar una funció de transformació dels actius respecte al seu grau de liquiditat, seguretat i rendibilitat.



Fuente: http://www.bolsamadrid.es/esp/Inversores/MercadoEsp.aspx

Aquest quadre resumeix el mercat de valors a Espanya. Existeixen 4 tipus de mercats i en cada un d'ells es negocien uns productes determinats.

- En el **mercat de deute públic** es negocien els bons, obligacions i lletres del tresor, i deute emès per altres administracions i organismes públics. Aquests valors també es negocien simultàniament en les borses de valors, que tenen establert un règim específic per a la seua contractació.
- **El mercat de deute corporatiu** (deute d'empreses), en el qual es negocien els pagarés d'empresa, les cèdules hipotecàries i els bons de titulització.
- **El mercat borsari** és el que es coneix com la borsa; s'hi negocien tant títols de renda fixa com títols de renda variable (accions).
- El **mercat d'opcions i futurs**, en què té lloc la negociació d'opcions i futurs (actius financers que depenen de l'evolució d'altres actius financers) com per exemple l'índex borsari IBEX-35.

BME Clearing, conegut en anglès com *Central Counterparty Clearing House*, té com a objectiu principal la gestió del risc de contrapartida.

http://www.bmeclearing.es/esp/Segmentos/MEFFRepo/QueEs/Funciones.aspx

IBERCLEAR és el depòsit central de valors. És l'organització que manté registre, liquidació i custòdia de tots els actius admesos a negociació que no siguen opcions i futurs.

L'òrgan supervisor en els distints mercats és la CNMV (Comissió Nacional del Mercat de Valors).

Com ja hem comentat, en la primera part de l'assignatura ens centrarem a explicar les característiques i valoració dels actius financers de renda fixa que es negocien en els mercats de deute corporatiu, deute de l'Estat i mercat borsari. En la segona part, s'estudiaran els actius de renda variable (les accions) negociats en el mercat borsari.

2. Intercanvis financers

En aquest tema s'abordarà el tractament dels intercanvis financers considerant un ambient de certesa.

L'intercanvi financer suposa que un agent lliura a un altre un capital (o capitals) i qui el rep queda obligat a tornar, en el termini acordat, el capital prestat més una quantitat que representarà el preu d'haver-ne disposat durant el termini esmentat. Aquesta quantitat representa la recompensa que rep l'agent que ajorna la possibilitat de disposar del capital en una data futura.

Aquesta recompensa es basa en el denominat <u>principi de preferència per la liquiditat</u>, que és la base sobre la qual s'edifica la matemàtica financera. Aquest principi, també anomenat "principi de la subestimació de les necessitats futures", recull el fet que els agents econòmics preferisquen consumir un bé econòmic avui que diferir-ne el consum en el temps, o, en altres paraules, que una unitat monetària disponible avui serà més valuosa, és a dir, serà preferida a una unitat monetària disponible en el futur.

Es denomina **<u>interès</u> el preu, expressat en unitats monetàries, que serà necessari pagar**

per a disposar de capitals aliens durant un determinat període de temps.

Evidentment, aquesta quantitat dependrà de l'import del capital de què es disposa i de l'interval de temps durant el qual se’n disposa.

Atès que, com s’ha dit abans, és possible rebre una recompensa monetària per a ajornar la disposició d'un capital, és indubtable que amb aquest plantejament el moment en què el capital estiga disponible és un element indispensable per a conèixer-ne el valor.

Per això es defineix el concepte de **capital financer** com **“***la mesura d'un bé econòmic referida al moment de la seua disponibilitat, venciment o lliurament***”.** És una magnitud bidimensional **(C, t)**, en la qual **C** representa la quantitat del capital, que se sol expressar en unitats monetàries (euros, dòlars, etc.), i **t** el moment del temps en què està disponible.

Així, la magnitud (10.000, 31/12/2003) significa que el 31 de desembre de 2003 es podrà disposar d'un capital de 10.000 €.

Els capitals financers es representen de forma esquemàtica de manera que, en la part superior de l’eix temporal, se situa la quantia dels capitals, i en la part inferior el temps.

És a dir, de forma esquemàtica, se situa en la part superior de l'eix temporal la quantitat dels capitals i en la part inferior el temps.

Es pot considerar l'**<u>operació financera</u>** com <u>l'intercanvi no simultani de capitals financers pactat entre dues parts d'acord amb una regla de càlcul que permeta obtenir-ne la quantitat de l'interès</u>.

Sembla lògic pensar que, si dues persones han d’intercanviar diferents capitals financers, hi haurà d'haver un acord entre elles sobre aquest intercanvi. En altres paraules, l’intercanvi haurà de semblar-los just a totes dues, i per això estaran disposades a realitzar-lo.

No seria lògic que es prestaren avui 1.000 euros i que s'exigiren a canvi 2.000 euros d'ací a un any. És quasi segur que qui haguera de tornar els 2.000 euros rebutjaria l'operació.

Què ocorreria si l'intercanvi fora 1.000 euros ara enfront de 1.040 euros d'ací a un any? Intuïtivament sembla que hi hauria moltes més possibilitats que aquesta operació es poguera acceptar.

Què hauria d'ocórrer perquè ambdós individus o agents estigueren disposats a realitzar aquest intercanvi? Molt senzill, que tots dos opinen que 1.000 euros avui tenen la mateixa importància en termes monetaris que 1.040 euros d'ací a un any.

3. Lleis financeres

Una vegada admès que la renúncia a disposar d'un capital en el moment actual suposa l'obtenció d'una quantitat major en un moment futur, la següent qüestió que cal resoldre és com establir un criteri d'intercanvi que permeta obtenir amb total generalitat la naturalesa d'aquest intercanvi. Dit amb altres paraules, **com es pot establir una regla de càlcul que sustente l'intercanvi de capitals que té lloc en les operacions financeres?**

En principi, es poden establir tantes regles com accepten els agents que intervenen en l'operació. Tanmateix, els usos comercials i els mercats financers n'han consolidat únicament algunes, que es coneixen pel nom de lleis financeres.

La llei financera és l'expressió formal d'un criteri de substitució. La formalització es materialitza en una expressió matemàtica (en concret, una funció), que permet obtenir, a partir d'un determinat capital financer, la quantitat de capital financerament equivalent en un moment posterior o anterior (futur o present).

Els criteris consolidats en els mercats financers que veurem en aquest curs són la llei de capitalització simple i la llei de capitalització composta.

3.1. Llei de capitalització simple

En aquest criteri, l'interès *I* que es paga per disposar d'un capital de quantitat $\mathbf{C_0}$, durant un període de temps donat, *n*, es determina de forma proporcional al capital disposat i l'amplitud del període. És a dir:

$$I = C_0 \cdot i \cdot n \qquad \textbf{[1]}$$

amb:

C_0: quantitat de capital de què es disposa en unitats monetàries.

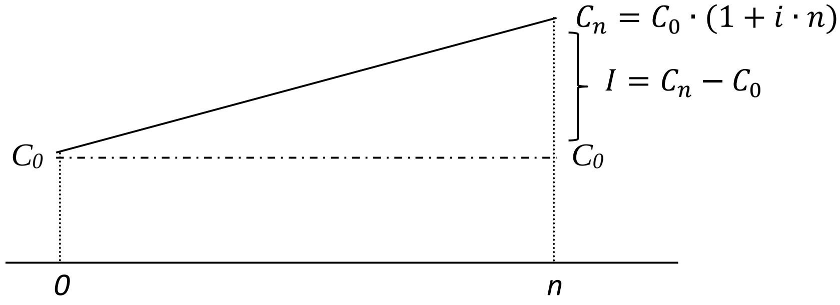
n = període de temps durant el qual s'ajorna la disposició del capital, expressat en unitats de temps.

i: paràmetre que defineix la llei utilitzada (que, com es veurà posteriorment, representa el "tipus d'interès" o preu a pagar al final del període per unitat de capital i unitat de temps), **expressat en la mateixa unitat en què es mesura el temps**.

D'aquesta forma, la quantitat del capital que es rebrà al final de període, C_n, s'obtindrà de l'expressió següent:

$$C_n = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n) \qquad \textbf{[2]}$$

Gràficament:



El capital (C_n, *n*), la quantitat del qual és la del capital (C_0, 0) més l'interès calculat segons la corresponent llei financera, s'anomena capital equivalent en n. Ambdós capitals resultaran intercanviables o, el que és el mateix, financerament equivalents.

A aquest procés de calcular el capital C_n, equivalent a un capital anterior C_0, a partir de la fórmula [2], se l'anomena capitalitzar (amb el criteri de capitalització simple).

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Si el que volem és realitzar el procés invers, és a dir, obtindre un capital C_0 equivalent a un capital posterior C_n, hauríem d'aclarir en l'equació anterior [2] i tindríem

$$C_0 = C_n \cdot \frac{1}{(1+i\cdot n)} = C_n \cdot (1 + i \cdot n)^{-1} \qquad \textbf{[3]}$$

Al procés invers se l'anomena actualitzar o contracapitalitzar (amb el criteri de capitalització simple).

Problema 1. Quin és l'interès, calculat en capitalització simple, corresponent a la disposició d'un capital de 6.000€ durant dos anys amb un tipus d'interès anual del 4,00%?

$$I = C_0 \cdot i \cdot n = 6.000 \cdot 0{,}04 \cdot 2 = 480€$$

Problema 2. Quin és el capital, calculat en capitalització simple, que es rebria al final del període si es prestara un capital de 6.000€ durant tres anys a un tipus d'interès anual del 4,5%?

El capital al final del període seria: $C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

C=6.000 n = 3 anys i = 4,5% anual

$$C_3 = 6.000 \cdot (1 + 0{,}045 \cdot 3) = 6.810€$$

Problema 3.

A) Quin seria el capital equivalent de (10.000, 15/09/2013) dos anys després si el criteri de valoració utilitzat és la capitalització simple, amb i = 5%.

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)}$$

$$C_n = 10.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 2) = 11.000€$$

El capital equivalent serà (11.000, 15/09/2015)
En conseqüència, 10.000 equivaldran a 11.000 en igualtat de condicions.

B) Quin seria el capital equivalent avui 25/09/2015 del capital (12.500, 25/09/2018) si el criteri de valoració utilitzat és la capitalització simple, amb i = 5%.

$$C_0 = C_n \cdot (1 + i \cdot n)^{-1}$$

$$C_0 = 12.500 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 3)^{-1} = 10.869{,}56€$$

El capital equivalent serà (10.869, 25/09/2015)

Subperíode de temps n

En la pràctica, el paràmetre ***i*** se sol expressar en termes anuals, per la qual cosa el temps, ***n***, s'expressarà en anys o fracció d'anys.

Per tant, la fórmula per a capitalitzar en el cas de treballar amb un nombre no enter d'anys és:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n) = C_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{k}{m}\right) \qquad \textbf{[4]}$$

en què:

m: nombre natural que representa els subperíodes d'igual amplitud en què s'ha dividit l'any (m = 12 mesos, m = 4 trimestres, m = 365 dies, etc.)

K: nombre de subperíodes compresos en n

Problema 4. Quin seria el capital, calculat amb capitalització simple, que es rebria al final del període si es prestara un capital de 5.000€ durant 180 dies a un tipus d'interès anual del 4,00%? I si el període fora de tres mesos?

Fent servir l'expressió anterior: $C_n = C_0 \left(1 + i \cdot \frac{k}{m}\right)$, i en funció del període de temps, tindrem:

k= 180 dies

$$C_n = 5.000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{180}{365}\right) = 5.098{,}63€$$

k= 3 mesos

$$C_n = 5.000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{3}{12}\right) = 5.050€$$

Problema 5. Determineu la quantitat final obtinguda, desglossada en devolució de capital i interès, corresponent a la inversió d'un capital de 9.000€ a un tipus d'interès del 3% anual en capitalització simple i en les tres possibilitats següents:
a) Per a un període de 18 mesos
b) Per a un període 30 dies
c) Per a un període d'1 any

L'interès en capitalització simple es calcula amb l'equació (1), on *C* és la quantitat del capital, *n* és el temps sobre el qual s'apliquen els interessos i *i* és el tipus d'interès que s'hi aplica. El temps i el tipus d'interès s'han d'expressar en les mateixes unitats de mesura. Per altra banda, el capital final es calcula segons (2).
Al final del període el capital serà: $C_n = C + I = C + C \cdot n \cdot i = C \cdot (1 + i \cdot n)$
a) k = 18 mesos i = 3% anual.
Interès: $I = C_0 \cdot i \cdot n = 9.000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{18}{12} = 405€$
Quantia final: $C_n = C_0 + I = 9.000 + 405 = 9.405€$

b) k = 30 dies i = 3% anual.
Interès $I = 9.000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{30}{365} = 22{,}19€$
Quantia final: $C_n = 9.000 + 22{,}19 = 9.022{,}19€$

c) n = un any, i = 3% anual

Interès $I = 9.000 \cdot 0{,}03 \cdot 1 = 270€$
Quantia final: $C_n = 9.000 + 270 = 9.270€$

3.2. Llei de capitalització composta

Amb el criteri de la capitalització composta, els interessos s'obtenen a partir de l'aplicació successiva de la capitalització simple. Així,

1r període (amplitud 1) $C_1 = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1)$
2n període (amplitud 1) $C_2 = C_1 \cdot (1 + i \cdot 1) = C_0 \cdot (1 + i)^2$
....
període n (amplitud 1) $C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot 1) \cdot (1 + i \cdot 1) \dots (1 + i \cdot 1) = C_0 \cdot (1 + i)^n$
és a dir:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n \qquad \textbf{[5]}$$

amb:

C0: la quantitat de capital de què es disposa en unitats monetàries.

n: el període de temps durant el qual s'ajorna la disposició del capital expressat en unitats de temps.

i = paràmetre que defineix la llei utilitzada (que, com veurem posteriorment, representa el "tipus d'interès" o preu a pagar al final del període per unitat de capital i unitat de temps), **expressat en la mateixa unitat en què es mesura el temps**.

En conseqüència, els interessos s'obtindran com a diferència dels capitals C_n i C_0:

$$I = C_n - C_0 = C_0 \cdot (1+i)^n - C_0 = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1] \qquad \textbf{[6]}$$

Problema 6. Quin seria l'interès calculat en capitalització composta corresponent a la disposició d'un capital de 5.000€ durant 3 anys amb un tipus d'interès anual del 4,00%? I en el cas d'un període de tres mesos amb un tipus d'interès trimestral de l'1%?

$$I = C_3 - C_0 = 5.000 \cdot [(1+0{,}04)^3 - 1] = 624{,}32€$$

$$I = 5.000 \cdot \left[(1+0{,}01)^{3/3} - 1\right] = 50\ €$$

En resum, per a **capitalitzar** amb capitalització composta, utilitzarem la fórmula [5]

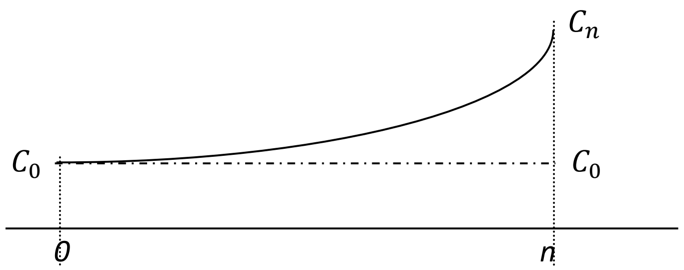
$$\boldsymbol{C_n = C_0 \cdot (1+i)^n}$$

I per a **contracapitalitzar** o **actualitzar**:

$$\boldsymbol{C_0 = C_n \cdot (1+i)^{-n}}$$

[7]

Gràficament:



Problema 7.

A) Quin seria el capital equivalent de (10.000, 15/09/2013) dos anys després si el criteri de valoració utilitzat és la capitalització composta, amb i = 5%.

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n = 10.000 \cdot (1+0{,}05)^2 = 11.025€$$

El capital equivalent dos anys després serà (11.025, 15/09/2015)

B) Quin seria el capital equivalent avui 25/09/2015 del capital (12.500, 25/09/2018) si el criteri de valoració utilitzat és la capitalització composta, amb i = 5%.

$$C_0 = C_n \cdot (1+i)^{-n} = 12.500 \cdot (1+0{,}05)^{-3} = 10.797{,}97€$$

El capital equivalent hui serà (10.797, 10/02/2015)

Subperíodes de temps n

Igual que en capitalització simple, el paràmetre *i* que defineix la capitalització composta ha d'expressar-se en la mateixa unitat en què es mesura el temps. Atès que, en la pràctica, el paràmetre *i* se sol referir a l'any, l'expressió per a capitalitzar en el cas de tractar-se d'un nombre no sencer d'anys serà:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^{k/m} \qquad \textbf{[8]}$$

en què:

m: nombre natural que representa els subperíodes d'igual amplitud en què s'ha dividit l'any (m = 12 mesos, m = quatre trimestres, m = 365 dies, etc.)

k: nombre de subperíodes compresos en n

El paràmetre *i* de la llei de capitalització composta representa el tipus d'interès per a intervals unitaris (en la pràctica, generalment, l'any) i <u>es denomina tipus d'interès efectiu anual</u>. El tipus d'interès efectiu mostra l'increment de capital per unitat de capital i temps.

Problema 8. Quin seria el capital, calculat amb capitalització composta, que es rebria al final del període si es prestara un capital de 5.000€ durant 180 dies a un tipus d'interès anual del 4,00%? I si el període fora de tres mesos?

k= 180 dies

$$C_{180/365} = 5.000 \cdot (1+0{,}04)^{\frac{180}{365}} = 5.097{,}65€$$

k= 3 mesos

$$C_{3/12} = 5.000 \cdot (1+0{,}04)^{\frac{3}{12}} = 5.049{,}27€$$

Problema 9. Determineu la quantitat final obtinguda, desglossada en devolució de capital i interès, corresponent a la inversió d'un capital de 9.000€, a un tipus d'interès del 3% anual, en capitalització composta i en les tres possibilitats següents: 18 mesos, 30 dies i 1 any. Compareu-ne resultats amb els de la capitalització simple (problema 5).

a) Inversió de 18 mesos (i = 3% anual).

Interès $I = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1] = 9.000 \cdot \left[(1+0{,}03)^{\frac{18}{12}} - 1\right] = 408{,}02€$

Quantia final: $C_n = C_0 + I = 9.408{,}02€$

b) Inversió de 30 dies (i = 3% anual).

Interès $I = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1] = 9.000 \cdot \left[(1+0{,}03)^{\frac{30}{365}} - 1\right] = 21{,}89€$

Quantia final: $C_n = C_0 + I = 9.021{,}89€$

c) Inversió a n = 1 any (i = 3% anual).

Interès $I = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1] = 9.000 \cdot [(1+0{,}03)^1 - 1] = 270€$
Quantia final: $C_n = C_0 + I = 9.270€$

d) Compareu-ne els resultats amb els obtinguts en el problema 5 i justifiqueu la diferència.

Els resultats són distints, ja que s'hi treballa amb una llei financera distinta. Així, quan el període és superior a un any, el resultat obtingut amb CC supera el que s'obté amb la CS (apartat a). S'esdevé el contrari per a períodes inferiors a l'any (apartat b) i els resultats son idèntics quan el període d'inversió és exactament un any (apartat c).

Problema 10. Obteniu el valor equivalent dins de tres mesos, un any i tres anys, a 500€ disponibles avui, si es valora en capitalització composta al 3% anual.

$$C_{0,25} = 500 \cdot (1+0{,}03)^{\frac{3}{12}} = 503{,}71€$$

$$C_1 = 500 \cdot (1+0{,}03)^1 = 515€$$

$$C_3 = 500 \cdot (1+0{,}03)^3 = 546{,}36€$$

Problema 11. Obteniu el valor actual de 1.000€ disponibles dins de tres mesos, un any i tres anys, si es valora en capitalització composta al 3% anual.

$$C_0 = 1.000 \cdot (1+0{,}03)^{-\frac{3}{12}} = 992{,}64€$$

$$C_0 = 1.000 \cdot (1+0{,}03)^{-1} = 970{,}87€$$

$$C_0 = 1.000 \cdot (1+0{,}03)^{-3} = 915{,}14€$$

3.3. Comparació de les lleis de capitalització simple i capitalització composta

Com es pot observar, la idea fonamental de la capitalització composta és que els interessos, al seu torn, generen interessos. La utilització d'aquest criteri donaria el mateix resultat que l'aplicació de la llei de capitalització simple de forma successiva reinvertint cada vegada els capitals generats en el període anterior.

Així, si es comparen els interessos per període obtinguts amb l'aplicació de la llei de capitalització simple amb els obtinguts mitjançant la composta, es comprova que en el primer cas la quantitat és constant mentre que en el segon és creixent, i que la reinversió dels interessos, implícita en la llei de capitalització composta, té un efecte considerable en la quantitat acumulada a mitjà i llarg termini. Tanmateix, cal assenyalar que en el termini curt les dues lleis produeixen resultats semblants i que, més encara, per a valors de n entre 0 i 1, els interessos generats mitjançant la capitalització simple són superiors als que s'obtenen en la capitalització composta.

Problema 12. Obteniu els interessos per període *i* acumulats amb una llei de capitalització simple i amb una llei de capitalització composta, i representeu-ne gràficament els resultats. Ambdues al 5% anual, considerant un capital de 10.000€ i els períodes següents:

a) Un semestre
b) Un any
c) Un any i mig
d) Dos anys

Amb capitalització simple: $I = C_0 \cdot i \cdot n$
Amb capitalització composta: $I = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1]$

a) n = ½ any

$$I = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{1}{2} = 250€$$
$$I = 10.000 \cdot \left[(1+0{,}05)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = 246{,}95$$

b) n = 1 any

$$I = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot 1 = 500€$$
$$I = 10.000 \cdot [(1+0{,}05)^1 - 1] = 500€$$

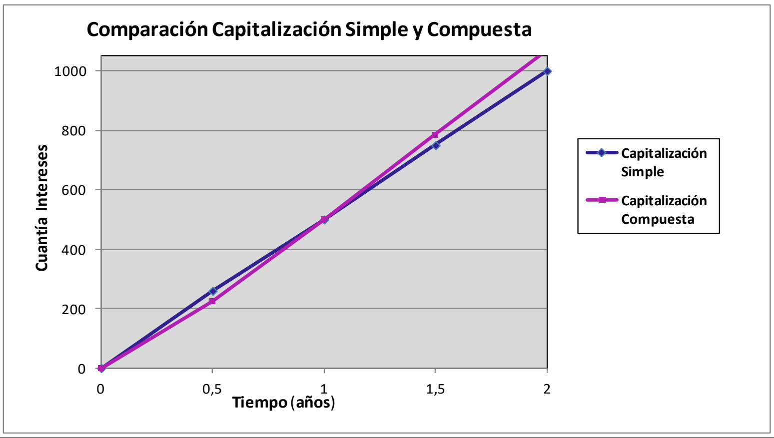
c) n = 3/2 anys

$$I = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{3}{2} = 750€$$
$$I = 10.000 \cdot \left[(1+0{,}05)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 759{,}30€$$

d) n = 2 anys

$$I = 10.000 \cdot 0{,}05 \cdot 2 = 1.000€$$
$$I = 10.000 \cdot [(1+0{,}05)^2 - 1] = 1.025€$$

	Capitalización simple		Capitalización compuesta	
Años	Int. Acum.	Int. Periodo	Int. Acum.	Int. Periodo
0.5	250,00	250,00	246,95	246,95
1	500,00	250,00	500,00	253,05
1.5	750,00	250,00	759,30	259,30
2	1.000,00	250,00	1.025,00	265,70



4. Suma financera

Moltes vegades el problema és trobar en un moment determinat **(s)** el capital equivalent a un conjunt de capitals financers.

Per a obtindre aquest capital equivalent, procedirem de la manera següent:

1. Obtindrem en un mateix moment de temps **(s)** el capital equivalent de cada un dels capitals considerats, tenint en compte que, si el venciment del capital és anterior a **s, la valoració s'obtindrà per mitjà del factor de capitalització, i si és posterior a s per mitjà del d'actualització**.
2. Una vegada fet açò, resultarà un conjunt de capitals amb un mateix venciment per la qual cosa, per a obtindre'n el valor, serà suficient sumar-los aritmèticament.

Aquest capital substitut d'un conjunt de capitals rep la denominació de **capital suma financera (també valor financer d'un conjunt de capitals)** i es defineix **com el capital financer (V; s). La quantia V és la suma aritmètica de les quanties equivalents en *s* a les quanties dels capitals sumands.**

Quan el criteri de valoració és la capitalització composta una vegada coneguda la suma financera en qualsevol punt, per a obtindre'n el valor en un moment distint només caldrà multiplicar el dit valor pel factor de capitalització o actualització corresponent a l'interval. Així és que se'n pot obtindre la suma financera en un moment intermedi, anterior al seu inici o posterior al seu final.

S'hi verifica la relació:

$$V_n = V_0 \cdot (1+i)^n \quad \text{o la recíproca:} \quad V_0 = V_n \cdot (1+i)^{-n} \qquad \textbf{[9]}$$

Si el criteri de valoració és la capitalització simple, l'equivalència financera en diferents dates de la suma financera no es verifica, per la qual cosa les parts implicades en la transacció hauran de fixar, a priori, una data per al càlcul de la suma financera.

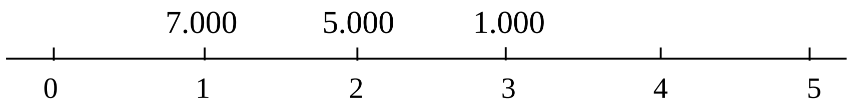
Problema 13. Obteniu la suma financera en V_s del conjunt de capitals següent:

$$\{(7.000, 01.01.01), (5.000, 01.01.02), (1.000, 01.01.03)\}$$

En s=0 i en s=5,. El tipus d'interès és 3,5% amb

A) llei de capitalització simple $\quad C_0 = C_n \cdot (1 + i \cdot n)^{-1} \quad C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

B) llei de capitalització composta $\quad C_0 = C_n \cdot (1+i)^{-n} \quad C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$



A) Llei de capitalització simple (CS)

Obtenim tots els capitals equivalent en s=0, (actualitzant) i els sumem

$$V_0 = 7.000 \cdot (1 + 0{,}035 \cdot 1)^{-1} + 5.000 \cdot (1 + 0{,}035 \cdot 2)^{-1} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}035 \cdot 3)^{-1} = 12.341{,}16€$$

Obtenim tots els capitals equivalent en s=5 (capitalitzant) i els sumem

$$V_5 = 7.000 \cdot (1 + 0{,}035 \cdot 4) + 5.000 \cdot (1 + 0{,}035 \cdot 3) + 1.000 \cdot (1 + 0{,}035 \cdot 2) = 14.575€$$

B) Llei de capitalització composta (CC)

Obtenim tots els capitals equivalent en s=0, (actualitzant) i els sumem

$$V_0 = 7.000 \cdot (1 + 0{,}035)^{-1} + 5.000 \cdot (1 + 0{,}035)^{-2} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}035)^{-3} = 12.332{,}78€$$

Obtenim tots els capitals equivalent en s=5 (capitalitzant) i els sumem

$$V_5 = 7.000 \cdot (1 + 0{,}035)^4 + 5.000(1 + 0{,}035)^3 + 1.000 \cdot (1 + 0{,}035)^2 = 14.647{,}48€$$

CONSIDERACIONS

1) El valor final és major quan treballem amb la CC que amb la CS, atès que en tots els casos l'amplitud dels períodes és superior a la unitat.

2) Amb la LCC es verifiquen les relacions

$V_5 = V_0 \cdot (1+i)^5 \quad V_0 = V_5 \cdot (1+i)^{-5}$

$12.332,78 = 14.647,48(1+0,035)^{-5}$

3) Amb la LCS no es verifiquen

$V_0 \neq V_5 \cdot (1+i)^{-5}$

$12.341,16 \neq 14.575(1+0,035 \cdot 5)^{-1}$

Problema 14. Determineu el valor de X perquè els dos conjunts de capitals següents siguen equivalents amb la llei de capitalització composta amb un tipus d'interès al 4.5%.

$$\left\{(1.000, 0), (3.000, 2), (5.000, 4)\right\} \sim \left\{(900, 1), (1.500, 3), (X, 5)\right\}$$

Perquè els dos conjunts de capitals siguen financerament equivalents, la seua suma financera ha de coincidir en qualsevol moment del temps. Ho portem tot a 5.

El primer conjunt de capitals valorat en 5 és:

$$V_5^A = 1.000 \cdot (1+0,045)^5 + 3.000 \cdot (1+0,045)^3 + 5.000 \cdot (1+0,045)^1$$
$$= 9.894,68€$$

$$V_5^B = 900 \cdot (1+0,045)^4 + 1.500 \cdot (1+0,045)^2 + X = 2.711,30 + X$$

Al ser equivalents $V_5^A = V_5^B$

Per tant:

$$9.894,68 = 2.711,30 + X$$

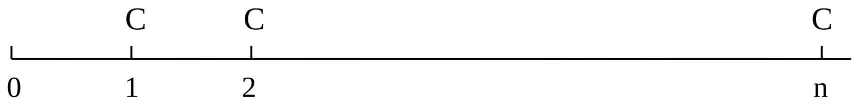
$$X = 7.183,38€$$

FÓRMULES PER A VALORAR RENDES

Aquestes eines són molt útils quan, en calcular el valor financer d'una suma de capitals, el nombre de termes a sumar és molt alt (o infinit).

1) Renda de pagament anual constant C, postpagable.

La representació gràfica seria la següent:



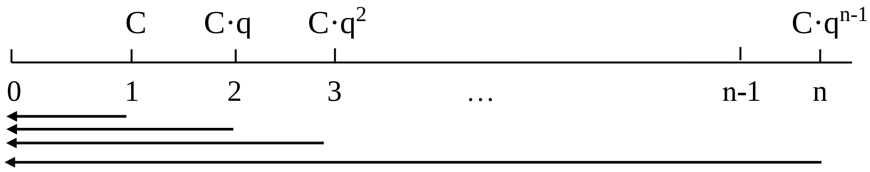
El Valor Inicial V0 (suma financera un període abans que es lliure el primer terme que s'està sumant) i el valor final Vn es poden calcular amb les fórmules:

$$V_0 = C \cdot a_{\overline{n|}i} = C \cdot \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} \quad \textbf{[10]} \qquad V_n = C \cdot S_{\overline{n|}i} = C \cdot \frac{[(1+i)^{n}-1]}{i} \quad \textbf{[11]}$$

2) Renda de pagament anual constant C, perpètua.

$$V_0 = \lim_{n\to\infty} (C \cdot a_{\overline{n|}i}) = \frac{C}{i} \qquad \textbf{[12]}$$

3) Renda variable de pagament inicial C anual i creixent a taxa q anualment.



$$V_0 = A(C,q)_{\overline{n|}i} = C \cdot \frac{[1-q^{n}(1+i)^{-n}]}{1+i-q} \quad \text{si} \quad 1+i \neq q \qquad \textbf{[13]}$$

4) Renda variable de pagament inicial C anual i creixent a taxa q anualment, perpètua.

$$V_0 = \lim_{n\to\infty} (A(C,q)_{\overline{n|}i}) = \frac{C}{1+i-q} \quad \text{si} \quad 1+i \neq q \qquad \textbf{[14]}$$

Problema 15.

Donada una renda de 5 anys de durada i terme anual constant de 12.000€, amb l'esquema temporal següent:

	12.000	12.000	12.000	12.000	12.000
15/02/03	15/02/04	15/02/05	15/02/06	15/02/07	15/02/08
V_0					V_n

Si es valora en capitalització composta un tipus d'interès efectiu anual del 3,75%, obteniu el seu valor en els punts següents:

a) s0=15/02/03 b) s=15/02/08 c) s= 15/02/06

d) s=15/05/10

a)

$$V_{15.02.03} = 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-1} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-2} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-3} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-4} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-5} = 53.799{,}14€$$

$$V_{15.02.03} = C \cdot \mathrm{a}_{\overline{n|}i} = 12.000 \cdot \frac{[1-(1+0{,}0375)^{-5}]}{0{,}0375} = 53.799{,}14€$$

b)

$$V_{15.02.08} = 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{4} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{3} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{2} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{1} + 12.000 = 64.671{,}94€$$

$$V_{15.02.08} = C \cdot \mathrm{S}_{\overline{n|}i} = 12.000 \cdot \frac{[(1+0{,}0375)^{5}-1]}{0{,}0375} = 64.671{,}94€$$

També se'n podria haver obtingut el valor final capitalitzant-ne el valor inicial:

$$V_{15.02.08} = V_{15.02.03} \cdot (1+i)^{n} = 53.799{,}14 \cdot (1+0{,}0375)^{5} = 64.671{,}94€$$

c) Com sempre, el valor financer s'obtindrà sumant financerament en el punt triat els termes de la renda:

$$V_{15.02.06} = 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{2} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375) + 12.000 + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-1} + 12.000 \cdot (1+0{,}0375)^{-2} = 60.081{,}35€$$

No obstant això, resultaria més fàcil obtindre'l a partir del valor inicial o del valor final:

$$V_{15.02.06} = V_{15.02.03} \cdot (1+0{,}0375)^{3} = V_{15.02.08} \cdot (1+0{,}0375)^{-2} = 60.081{,}35€$$

i aquesta és la forma que utilitzarem per a obtindre els valors següents.

d) $V_{15.05.10} = V_{15.02.08} \cdot (1+0{,}0375)^{\frac{27}{12}} = 70.256{,}92€$

Problema 16.

Considereu el premi de l'ONCE següent

Obviant la quantia de 15.000.000 i centrant-nos únicament en la renda mensual de 6.000 euros durant 25 anys, contesteu a les preguntes següents:

1) Quina quantia hauria de depositar el 22/10/09 (dia del sorteig) l'ONCE en un banc que paga un tipus d'interès efectiu mensual del 0,3% durant 25 anys per a poder atendre el pagament del premi?

2) Quina quantia hauria de depositar-hi si el tipus d'interès efectiu mensual que paga el banc fora el 0,5%? Serà major o menor? Per què?

3) Continueu assumint que el tipus d'interès efectiu mensual és 0,3%. Quin seria el valor del premi el 22/10/09 si aquest premi no es limitara a la vida del guanyador sinó que es perpetuara en els seus hereus? (és a dir, el premi ara és una renda mensual de 6.000 euros que no acaba mai, i es trasllada als hereus successius dels hereus del guanyador).

	6000	6.000	6.000	
0	1	2	25x12	mesos

1) $V_0 = C \cdot a_{\overline{n|}i} = C \cdot \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i} = 6.000 \cdot a_{\overline{300|}0,003} = 6.000 \cdot \frac{[1-(1+0,003)^{-300}]}{0,003} =$ 1.185.764€

2) $V_0 = C \cdot a_{\overline{n|}i} = 6.000 \cdot a_{\overline{300|}0,005} = 6.000 \cdot \frac{[1-(1+0,005)^{-300}]}{0,005} = 931.241€$

3) $V_0 = \frac{C}{i} = \frac{6.000}{0,003} = 2.000.000€$

PROBLEMES DE RESERVA

Problema R1. Obteniu el valor equivalent dins de dos anys de 1.000€ disponibles avui, si es valora en capitalització composta el tipus d'interès del 5% anual.

$$C_2 = 1.000(1+0{,}05)^2 = 1.102{,}5$$

Problema R2. Obteniu el valor actual de 1.000€ disponibles dins de dos anys i mig, si es valora en capitalització composta el tipus d'interès del 3% semestral.

$$C_0 = 1.000.(1+0{,}03)^{-5} = 862{,}61$$

Problema R3. Obteniu els factors financers de capitalització i actualització de la llei $L(t;t_n) = (1+i)^{t_n - t}$, amb $i = 3\%$ anual, corresponents a un període de:

a) tres mesos
b) un any
c) tres anys

El factor de capitalització és:

$$u(t_1, t_n) = \frac{L(t_1, t_n)}{L(t_n, t_n)} = (1+i)^{t_n - t_1}$$

El factor de contracapitalització:

$$u^*(t_1, t_n) = \frac{L(t_n, t_n)}{L(t_1, t_n)} = (1+i)^{-(t_n - t_1)}$$

a) tres mesos = $\frac{3}{12}$ anys

$$u(t_0, t_{0,25}) = (1+0{,}03)^{\frac{3}{12}} = 1{,}007417$$

$$u^*(t_0, t_{0,25}) = (1+0{,}03)^{\frac{-3}{12}} = 0{,}99263754$$

b) un any

$$u(t_0, t_1) = (1+0{,}03)^1 = 1{,}03$$

$$u^*(t_0, t_1) = (1+0{,}03)^{-1} = 0{,}97087379$$

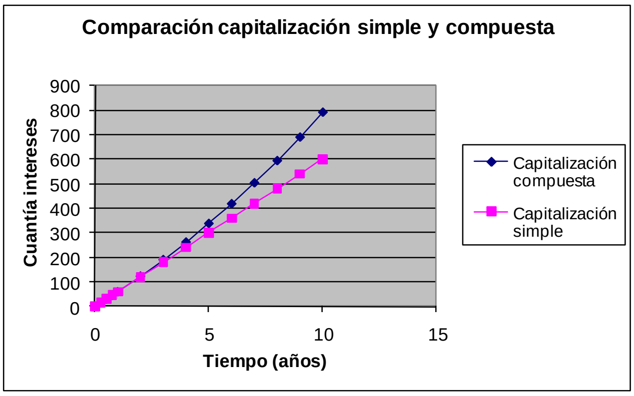
c) tres anys

$$u(t_0, t_3) = (1+0{,}03)^3 = 1{,}092727$$

$$u^*(t_0, t_3) = (1+0{,}03)^{-3} = 0{,}91514166$$

Problema R4. Obteniu els interessos per període i acumulats, amb una llei de capitalització simple i amb una llei de capitalització composta, considerant un capital de 1.000€ i un tipus d'interès anual del 6%.

n (años)	Intereses acumulados	Intereses por período	Intereses acumulados	Intereses por período
	Capitalización simple		Capitalización compuesta	
0,25	15	-	14,67	-
0,5	30	15	29,56	14,89
1	60	30	60,00	30,44
2	120	60	123,60	63,60
3	180	60	191,02	67,42
4	240	60	262,48	71,46
5	300	60	338,23	75,75
6	360	60	418,52	80,29
7	420	60	503,63	85,11
8	480	60	593,85	90,22
9	540	60	689,48	95,63
10	600	60	790,85	101,37
11	660	60	898,30	107,45
12	720	60	1012,20	113,90
13	780	60	1132,93	120,73



Problema R5. Utilitzant la llei de capitalització simple i la llei de capitalització composta, ambdues amb un tipus d'interès del 4% anual, obteniu el capital equivalent a 20/05/2007 dels capitals següents:

a) [3.000, 20/01/2001]
b) [1.000, 20/05/2006]
c) [5.000, 20/10/2006]
d) Compareu els resultats obtinguts.

a) Co = 3.000 n (20/05/07-20/01/01) = 76 mesos

$$C_n^A = 3.000 \cdot (1+0{,}04)^{\frac{76}{12}} = 3.845{,}91$$

$$C_n^B = 3.000 \cdot \left(1+0{,}04 \cdot \frac{76}{12}\right) = 3.760$$

b) Co = 1.000 n = 1 any

$$C_n^A = 1.000 \cdot (1+0{,}04) = 1.040{,}00$$

$$C_n^B = 1.000 \cdot (1+0{,}04 \cdot 1) = 1.040{,}00$$

c) Co = 5.000 n = 7 mesos

$$C_n^A = 5.000 \cdot (1+0{,}04)^{7/12} = 5115{,}71$$

$$C_n^B = 5.000 \cdot \left(1+0{,}04 \cdot \frac{7}{12}\right) = 5.116{,}66$$

d) Els capitals equivalents depenen de les lleis de valoració. La capitalització simple produeix menors resultats que la capitalització composta en operacions a més d'un any.

Problema R6.

Donat el conjunt de capitals següent: $\{(5.000, t+1)(2.000, t+6)\}$ obteniu-ne la suma financera en t+4 utilitzant com a criteri la capitalització composta; i=5%. Calculeu també la suma financera en aquests dos moments:

$$S = 5.000\ u(t+1, t+4) + 2.000\ u^*(t+4, t+6)$$
$$S = 5.000\ (1+0{,}05)^3 + 2.000\ (1+0{,}05)^{-2} = 7.602{,}18$$

a) En el moment del venciment del primer dels capitals.

S= 5.000+2.000 u*(t+1,t+6)= 5.000+2.000(1+0,05)$^{-5}$ =6.567,05

b) En el moment del venciment del segon capital.

5.000 u(t+1,t+6)+2.000= 5.000(1+0,05)^{5}+2.000 =8.381,40

Problema R7.

Donat el conjunt de capitals següent: $\{(5.000, t+1)(2.000, t+6)\}$ obteniu-ne la suma financera en t+4 amb la capitalització simple; i = 5%. Calculeu també la suma financera en aquests dos moments:

$$S = 5.000\ u(t+1, t+4) + 2.000\ u^*(t+4, t+6)$$
$$S = 5.000\ (1+0{,}05*3) + 2.000\ (1+0{,}05*2)^{-1} = 7568.18$$

a) En el moment del venciment del primer dels capitals.

5.000+2.000 u*(t+1,t+6)= 5.000+2.000(1+0,05.5)$^{-1}$ = 6.600

Comentari similar amb (1+0,05.5)$^{-1}$

b) En el moment del venciment del segon capital.

5.000 u(t+1,t+6)+2.000= 5.000 (1+0,05.5)+2.000 = 8.250