DEPARTAMENT D'ECONOMIA FINANCERA I ACTUARIAL
FACULTAT D'ECONOMIA
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Tema 3: Anàlisi del risc d’interès

APUNTS TEORIA

Aquest tema està destinat a l'anàlisi del risc d'interès. Tenint en compte que existeix la possibilitat que es produïsquen variacions no anticipades dels tipus d'interès, es planteja com a objectiu analitzar les conseqüències que això comporta en la gestió de carteres de renda fixa.

ÍNDEX

1. La valoració de les operacions financeres i els tipus d'interès

Aquesta secció es dedica al repàs de la relació existent entre la variació del valor financer d'un actiu enfront de variacions en els tipus d'interès de mercat. Per a això, representarem tots els pagaments a què dona dret la compra d'un actiu financer des del moment de la seua emissió en t_n fins a la data de venciment en t_n.

C_0	a_1	a_2	a_{s-1}	V_s	a_{s+1}	a_{n-1}	a_n
0	1	2	$s-1$	s	$s+1$	$n-1$	n

Si els tipus de mercat foren variables en un moment s, el <u>valor de mercat o valor financer</u> d'un actiu emès en 0 es calcularia a partir de l'expressió:

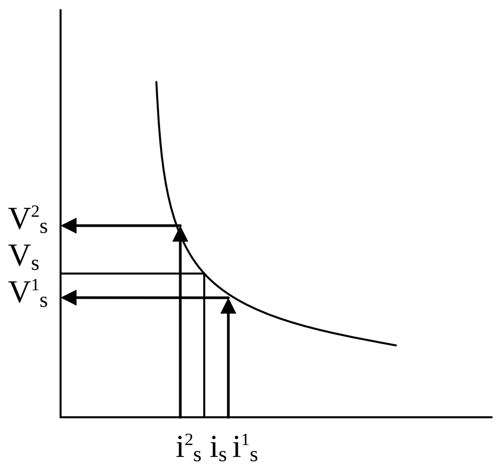
$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \, (1+i_m)^{-(r-s)}$$

V_s és el valor financer de l'operació en s i i_m el tipus d'interès de mercat per a tot el període.

Una disminució del tipus d'interès de mercat provocaria un increment en el valor financer de l'operació, mentre que un augment del tipus de mercat hi provocaria una disminució. A més, la relació entre el valor financer i la variació en els tipus d'interès és decreixent i convexa:

$\frac{\partial V_s}{\partial i_m} < 0$ (decreixent) y $\frac{\partial^2 V_s}{\partial i_m^2} > 0$ (convexa)

Si representem gràficament el valor de V_s, s'observa que, atés que la funció és convexa, la variació en el valor és distinta davant de baixades i pujades de tipus d'interès de la mateixa quantia:



Observacions:

- Els actius financers són sensibles a les variacions en els tipus d'interès.
- La variació en els preus serà de sentit invers a la dels tipus d'interès. Quan pugen els tipus d'interès, cau el valor financer.
- A més, si el tipus de mercat baixa (puja), hem demostrat que el valor de mercat d'un actiu tendirà a pujar (baixar), però els cupons que es vagen cobrant es podran reinvertir a tipus d'interès més baixos (alts). Per tant, les variacions en els tipus d'interès tenen dos efectes contraposats:
    - **Risc de preu**, risc de mercat o risc a curt termini. Risc de variació en el preu dels actius financers de renda fixa com a conseqüència de les variacions en els tipus d'interès.
    - **Risc de reinversió** o risc a mitjà i llarg termini. Risc de no obtenir la rendibilitat oferida inicialment pel mercat per a un determinat termini com a conseqüència de les variacions dels tipus d'interès.
- Ara bé, la qüestió rellevant és determinar la major o menor sensibilitat en el valor de l'actiu davant de variacions dels tipus d'interès.
    - La variació en el valor financer dels distints actius financers serà la mateixa enfront de variacions idèntiques en els tipus d'interès? Si no ho és, de què dependrà?
    - Es pot trobar una mesura que ens permeta calcular la variació a priori produïda en el preu d'un títol davant de variacions en els tipus d’interès?

L'anàlisi d'aquests riscs i les qüestions relacionades seran l'objecte d'estudi dels epígrafs següents.

2. Risc de preu

2.1. Duration

Per a conèixer la relació del preu de mercat d'un actiu de renda fixa davant de variacions en els tipus d’interès, s’ha de calcular la *semielasticitat* del valor d'un actiu de renda fixa.

El valor del bo es calculava com:

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \, (1 + i_m)^{-(r-s)}$$

De manera que la *semielasticitat* serà:

$$\frac{\partial V_s}{\partial i_m}\frac{1}{V_s} = \left[\sum_{r=s+1}^{n} -(r-s)\cdot a_r \cdot (1+i_m)^{-(r-s)-1}\right]\cdot\frac{1}{V_s}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial i_m}\frac{1}{V_s} = \frac{\sum_{r=s+1}^{n} -(r-s)\cdot a_r \cdot (1+i_m)^{-(r-s)-1}}{V_s}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial i_m}\frac{1}{V_s} = \frac{\sum_{r=s+1}^{n} -(r-s)\cdot a_r \cdot \frac{1}{(1+i_m)}\cdot\frac{1}{(1+i_m)^{(r-s)}}}{V_s}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial i_m}\frac{1}{V_s} = -\frac{1}{(1+i_m)}\sum_{r=s+1}^{n}(r-s)\cdot\frac{\frac{a_r}{(1+i_m)^{(r-s)}}}{V_s}$$

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{V_s}}{\partial \boldsymbol{i_m}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{V_s}} = -\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i_m})}\boldsymbol{D}}$$

On

$$D = \sum_{r=s+1}^{n}(r-s)\cdot\frac{\frac{a_r}{(1+i_m)^{(r-s)}}}{V_s}$$

$$W_s = \frac{\frac{a_r}{(1+i_m)^{(r-s)}}}{V_s}$$

$$\sum_{r=s+1}^{n} W_s = 1$$

Aquesta expressió és coneguda amb el nom de d*uration*.

Cal remarcar que la *duration* pot interpretar-se com una mitjana ponderada dels venciments dels fluxos de caixa generats per un títol, en què les ponderacions són la proporció que cada flux de caixa actualitzat representa sobre el valor total del títol. El valor d'aquesta serà expressat en la mateixa unitat de temps que la utilitzada per a mesurar el venciment dels fluxos de caixa.

Aplicació de la *duration*

Per a variacions petites dels tipus d'interès es verifica que:

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta i_m}\frac{1}{V_s} \approx -\frac{1}{(1+i_m)}D$$

Per a calcular variacions percentuals (relatives):

$$\boxed{\left[\frac{\Delta V_s}{V_s}\right]_D = -\frac{1}{(1+i_m)}D \cdot \Delta i_m}$$

Per a calcular variacions absolutes:

$$\boxed{\Delta V_s = -\frac{1}{(1+i_m)}D \cdot V_s \cdot \Delta i_m}$$

En conseqüència, la sensibilitat del preu d'un actiu de renda fixa enfront de les variacions dels tipus d'interès depèn de:

- La variable D que rep el nom de duration.
- El tipus d'interès abans que es done la variació de tipus.
- La magnitud de la variació dels tipus d'interès.

Problema 1.

a) Calculeu la *duration* en el moment inicial d'una obligació americana que paga cupó al 7% de 10.000 euros de nominal i 3 anys fins al venciment. Suposeu un tipus d'interès de mercat del 6%.

0	1	2	3
	700	700	10.700

$$Vo = \frac{}{(1+0,06)} \cdot \frac{}{(1+0,06)^2} + \frac{10.700}{(1+0,06)^3} = 10.267,30$$

Com que el tipus de mercat (6%) es inferior al tipus del cupó (7%), el valor de mercat és superior al valor nominal.

$$D = 1 \cdot \frac{\frac{700}{(1,06)}}{V_0} + 2 \cdot \frac{\frac{700}{(1,06)^2}}{V_0} + 3 \cdot \frac{\frac{10.700}{(1,06)^3}}{V_0} =$$

$$= 1 \cdot \omega_1 + 2 \cdot \omega_2 + 3 \cdot \omega_3 = 1 \cdot 6,4318\% + 2 \cdot 6,0678\% + 3 \cdot 87,500\% = 2,81 \text{ anys}$$

La *duration* (2,81 anys) és inferior al termini de venciment del bo (3 anys).

b) Calculeu la *duration* d'una obligació cupó zero emesa al 7% de 10.000 euros de nominal i 5 anys fins al venciment suposant un tipus d'interès de mercat del 6%.

0 1 2 3 4 5

$$a_5 = 10.000 \cdot (1 + 0{,}07)^5 = 14.025{,}51€$$

$$V_0 = 14.025{,}51 \cdot (1 + 0{,}06)^{-5} = 10.480{,}68€$$

$$D = 5 \cdot \frac{\frac{14.025{,}51}{(1 + 0{,}06)^5}}{10.480{,}68} = 5\ anys$$

La *duration* coincideix amb el termini fins al venciment.

c) Calculeu la *duration* al cap de tres anys de l'emissió del bo anterior.

0 1 2 3 4 5

$$V_3 = 14.025{,}51 \cdot (1 + 0{,}06)^{-2} = 12.482{,}66€$$

$$D = 2 \cdot \frac{\frac{14.025{,}51}{(1 + 0{,}06)^2}}{12.482{,}66} = 2\ anys$$

La *duration* (2 anys) coincideix amb el termini fins al venciment.

Per tant, en vista dels resultats obtinguts en l'exercici anterior, podem afirmar que:

- La *duration* d'un bo cupó zero coincideix amb el termini fins a l'amortització.
- Qualsevol bo amb pagament intermedi de cupons tindrà una *duration* inferior al termini fins al venciment.
- La *duration* es una mitjana ponderada i serà expressada en la mateixa unitat de temps que la utilitzada per a mesurar el termini fins al venciment dels fluxos de caixa.

Problema 2.

Es tracta d'un bo amb un nominal de 1.000 euros a què li queden 5 anys fins a l'amortització i que paga un cupó anual del 5%. Suposant un tipus de mercat del 5% es demana que:

a) Calculeu la *duration* del bo.

	50	50	50	50	1.050
0	1	2	3	4	5

N=1.000

Tipus del cupó = i = 5%

$i_m = 5\%$

Com i = 5% = $i_m = 5\%$ → Preu de mercat = valor de mercat =1.000

$$V_0 = \frac{50}{1{,}05} + \frac{50}{(1{,}05)^2} + \frac{50}{(1{,}05)^3} + \frac{50}{(1{,}05)^4} + \frac{1.050}{(1{,}05)^5} = 1.000$$

$$D = 1 \cdot \frac{\frac{50}{1{,}05}}{1.000} + 2 \cdot \frac{\frac{50}{(1{,}05)^2}}{1000} + 3 \cdot \frac{\frac{50}{(1{,}05)^3}}{1000} + 4 \cdot \frac{\frac{50}{(1{,}05)^4}}{1000} + 5 \cdot \frac{\frac{1.050}{(1{,}05)^5}}{1000} = 4{,}546\ anys$$

Duration menor que els 5 anys de venciment, per ser un bo de pagament periòdic.

b) Calculeu la variació percentual en el preu del bo enfront d'una pujada dels tipus d'interès de 100 punts bàsics i compareu-ho amb la variació real que s'obtindria amb el nou tipus d'interès de mercat.

Pujada de 100 punts bàsics (↑*i*) → 0,01 → passa del 5% al 6%

$$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D = \frac{-1}{1+i_m} \cdot D \cdot \Delta i_m = \frac{-1}{1{,}05} \cdot 4{,}546 \cdot \frac{1}{100} = -4{,}330\%$$

Si $i_m = 6\%$

$$V_0 = \frac{50}{1{,}06} + \frac{50}{(1{,}06)^2} + \frac{50}{(1{,}06)^3} + \frac{50}{(1{,}06)^4} + \frac{1.050}{(1{,}06)^5} = 957{,}88€$$

$$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R = \frac{957{,}88 - 1000}{1.000} = -4{,}212\%$$

Diferència:

$$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R - \left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D = -4{,}212\% - (-4{,}330\%) = 0{,}118\%$$

c) Calculeu la variació percentual en el preu del bo davant una baixada dels tipus d'interès de 200 punts bàsics i compareu-ho amb la variació real que s'obtindria amb el nou tipus d'interès de mercat.

Baixada de 200 punts (↓*i*) → - 0,02 → passa del 5% al 3%

$$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D = \frac{-1}{1+i_m} \cdot D \cdot \Delta i_m = \frac{-1}{1{,}05} \cdot 4{,}546 \cdot (-0{,}02) = 8{,}659\%$$

Si $i_m = 3\%$

$$V_0 = \frac{50}{1{,}03} + \frac{50}{(1{,}03)^2} + \frac{50}{(1{,}03)^3} + \frac{50}{(1{,}03)^4} + \frac{1.050}{(1{,}03)^5} = 1.091{,}59€$$

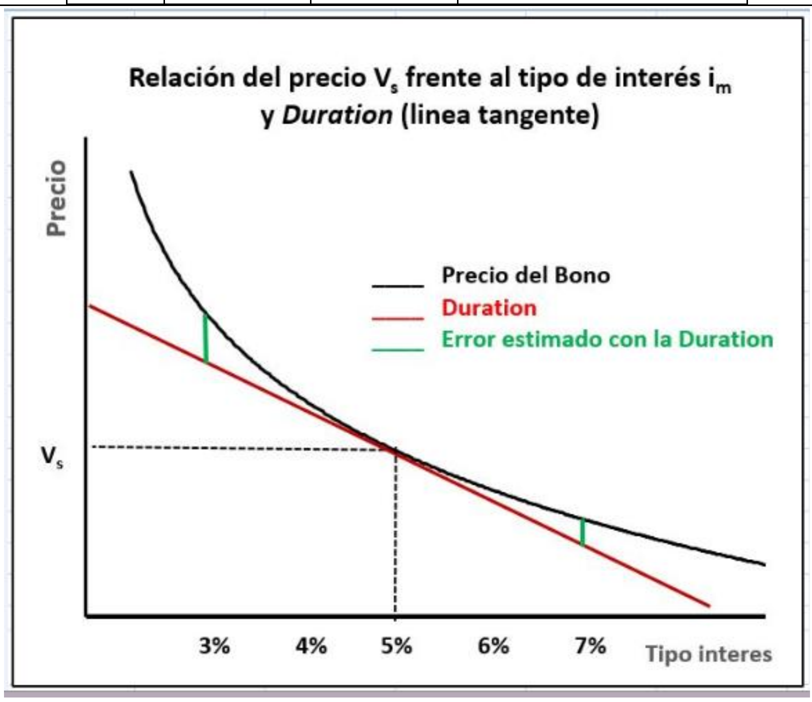
$$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R = \frac{1.091{,}59 - 1000}{1.000} = 9{,}159\%$$

Diferència:

$$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R - \left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D = 9{,}159\% - (8{,}659\%) = +0{,}500\%$$

d) Completeu les dades de la taula següent i representeu gràficament la variació de l'interès (Δi_m) davant la variació percentual del preu del bo $\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D$ i davant la variació real que s'obtindria amb el nou tipus d'interès del mercat $\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R$.

Δi_m	$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R$	$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D$	$\left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_R - \left[\frac{\Delta V_0}{V_0}\right]_D$
1%	−4,212%	−4,330%	+0,118%
−1%	4,452%	4,330%	+0,122%
2%	−8,200%	−8,659%	+0,459%
−2%	9,159%	8,659%	+0,500%



Resultats:

- ✓ Quan es produixen pujades de tipus, el preu del bo baixa més si es calcula segons la *duration*.
- ✓ Quan es produixen baixades de tipus, el preu del bo puja més segons el valor real.
- ✓ Quan es produixen baixades de tipus, la diferència (error de càlcul) és major.
- ✓ Quan la variació de tipus és major, l'error de càlcul també és major.

Per tant, la *duration* serveix per a aproximar de forma lineal la variació del preu d'un actiu enfront de variacions menudes en el tipus d'interès. No obstant, quan augmenta la variació dels tipus d'interès augmenta l'error que es comet amb aquesta aproximació.

b) *Duration* d'una cartera de *N* actius de renda fixa

A partir del concepte de *duration* d'un bo, l'extensió al càlcul de la *duration* d'una cartera és immediata i es defineix com la mitjana ponderada de la *duration* de cada un dels títols de la cartera, en què la ponderació α_i és el pes del títol i en el conjunt de la cartera c:

$$\mathrm{D_C} = \sum_{i=1}^{N} D_i \alpha_i$$

$$\alpha_i = \frac{V_i N_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i N_i}$$

Una primera aplicació pràctica de la *duration* seria la de permetre estimar les variacions en el valor de la cartera, en termes absoluts i relatius, davant de variacions en els tipus d'interès.

Problema 3.

Calculeu la *duration* d'una cartera composta per a 100 obligacions del problema 1 a) (bo americà, N= 10.000, n= 3, i= 7%) i per a 400 bons del problema 1 c) (bo cupó zero, N= 10.000, n= 2, i= 7%).

Els preus i les *duration* de cada un dels títols era:

$$V_A = 10.267{,}30 \rightarrow N_A = 100 \rightarrow D_A = 2{,}81$$

$$V_B = 12.482{,}66 \rightarrow N_B = 400 \rightarrow D_B = 2$$

El valor conjunt de la cartera és

$$V_0^C = \sum_{i=1}^{N} V_i N_i = V_0^A \cdot N^A + V_0^B \cdot N^B = 10.267{,}30 \cdot 100 + 12.482{,}66 \cdot 400$$

$$V_0^C = 6.019.794\ €$$

El pes de cada títol en el conjunt de la cartera

$$\alpha_A = \frac{V_A N_A}{6.019.794} = \frac{10.267{,}30 \cdot 100}{6.019.794} = 17{,}06\%$$

$$\alpha_B = \frac{V_B N_B}{6.019.794} = \frac{12.482{,}66 \cdot 400}{6.019.794} = 82{,}94\%$$

I la *duration* de la cartera és:

$$\mathrm{D_C} = 2{,}81 \cdot 0{,}1706 + 2 \cdot 0{,}8294 = 2{,}13\ anys$$

Problema 4. És una cartera composta pels títols següents:

- Actiu A: 150 bons de 1.000 euros de nominal, amb cupó anual del 10% i un termini fins al venciment de 3 anys.

- Actiu B: 10 obligacions de 10.000 euros de nominal, amb cupó anual del 8% i 5 anys fins a l'amortització.

- Actiu C: 100 bons cupó zero amortitzables al cap de 7 anys al 182,80% i de 1.000 euros de nominal.

- Actiu D: 15 lletres amortitzables d'ací a 1 any (365 dies) de 1.000 euros de nominal.

Obteniu la *duration* de la cartera si el tipus d'interès de mercat és del 6,5%.

Actiu A:

$$V_A = 100 \cdot a_{\overline{3}|6,5\%} + 1.000 \cdot (1+0{,}065)^{-3} = 1.092{,}69\ €$$

$$D_A = \frac{1 \cdot 100 \cdot (1+0{,}065)^{-1} + 2 \cdot 100 \cdot (1+0{,}065)^{-2} + 3 \cdot 1.100 \cdot (1+0{,}065)^{-3}}{1.092{,}696}$$

$$D_A = 2{,}74\ anys$$

Actiu B:

$$V_B = 800 \cdot a_{\overline{5}|6,5\%} + 10.000 \cdot (1+0{,}065)^{-5} = 10.623{,}35\ €$$

$$D_B = \frac{800 \cdot (1+0{,}065)^{-1} + 2 \cdot 800 \cdot (1+0{,}065)^{-2} + 3 \cdot 800 \cdot (1+0{,}065)^{-3} + 4 \cdot 800 \cdot (1+0{,}065)^{-4} + 5 \cdot 10.800 \cdot (1+0{,}065)^{-5}}{10.623{,}35}$$

$$D_B = 4{,}33\ anys$$

Actiu C:

$$V_C = 1.828 \cdot (1+0{,}065)^{-7} = 1.176{,}32\ €$$

$$D_C = 7\ anys$$

Actiu D:

$$V_D = 1.000 \cdot \left(1 + 0{,}065 \cdot \frac{365}{360}\right)^{-1} = 938{,}17\ €$$

$$D_D = 1\ any$$

	A	B	C	D
N	150	10	100	15
V_0	1.092,69	10.623,35	1.176,32	938,96
D	2,74	4,33	7	1

El valor conjunt de la cartera és:

$$V_C = \sum_{i=1}^{N} V_i N_i = V_A \cdot N_A + V_B \cdot N_B + V_C \cdot N_C + V_D \cdot N_D = 401.829{,}55€$$

I la *duration* de la cartera

$$\mathrm{D_C} = \sum_{i=1}^{N} D_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{N} D_i \frac{V_i N_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i N_i} = D_A \frac{V_A N_A}{V_C} + D_B \frac{V_B N_B}{V_C} + D_C \frac{V_C N_C}{V_C} + D_D \frac{V_D N_D}{V_C}$$

$$\mathrm{D_C} = 2{,}74 \cdot \frac{1.092{,}69 \cdot 150}{401.829{,}55} + 4{,}33 \cdot \frac{10.623{,}35 \cdot 10}{401.829{,}55} + 7 \cdot \frac{1.176.{,}2 \cdot 100}{401.829{,}55} + 1 \cdot \frac{938{,}17 \cdot 15}{401.829{,}55}$$

$$\mathrm{D_C} = D_A \cdot \alpha_A + D_B \cdot \alpha_B + D_C \cdot \alpha_C + D_D \cdot \alpha_D$$

$$\mathrm{D_C} = 2{,}74 \cdot 40{,}79\% + 4{,}33 \cdot 26{,}44\% + 7 \cdot 29{,}27\% + 1 \cdot 3{,}50\% = 4{,}34\ anys$$

Aquest resultat pot interpretar-se en el sentit que el risc de preu d'aquesta cartera és semblant al que tindria una cartera composta exclusivament per bons cupó zero amortitzables dins de 4,34 anys.

3. Risc de reinversió i la immunització financera

El risc de preu no és l'únic que incideix en la rendibilitat dels títols de renda fixa. A més a més, cal considerar el risc que la rendibilitat final de l'operació no coincidisca amb la del mercat en el moment de la contractació. Això és, cal considerar el risc de reinversió. En concret, davant variacions en els tipus d'interès, la reinversió dels fluxos de caixa ocasionarà un efecte contraposat al risc de preu. Així, davant de pujades (baixades) en els tipus d'interès, l'actiu valdrà menys (més), però la reinversió es realitzarà a tipus més alts (baixos) i s'obtindrà una major (menor) rendibilitat de la reinversió.

Així doncs, si tenim una cartera, en quina situació eixiríem beneficiats: si els tipus pugen o si els tipus baixen? A més a més, el risc de preu i el de reinversió tenen efectes contraris però, quin seria el resultat final de la confluència dels dos efectes en la rendibilitat oferida pel mercat en el moment de la contractació?

IMMUNITZACIÓ FINANCERA

En 1971 Fisher i Weil enunciaren el Teorema de la Immunització Financera que estableix que el risc de preu i el risc de reinversió es compensen quan la *duration* de l'operació financera coincideix amb l'horitzó de planificació de la inversió (HPI = període de temps que es desitja mantindre la inversió).

Risc d'interès = risc de preu + risc de reinversió.

Problema 5.

Suposem un $i_m = 10\%$ i que un inversor desitja disposar d'un milió d'euros d'ací a 4 anys. Suposem, addicionalment, que l'inversor té la possibilitat d'invertir en 3 actius diferents:

	Actiu A	**Actiu B**	**Actiu C**
Cupó anual (%)	8	12	8
Termini (anys)	3	5	10
Nominal (euros)	1.000	1.000	1.000
***Duration* (anys)**	2,77	4,07	7,04
Valor inicial (euros)	950,26	1.075,82	877,11

- Es demana calcular el valor final de la inversió <u>en les tres carteres i en tres casos</u> si:

a) Els tipus d'interès de mercat es mantenen en el 10%.

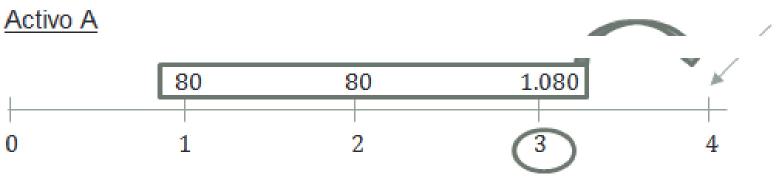
Inversió hui: $1.000.000 \cdot (1 + 0{,}10)^{-4} = 683.013{,}46$ €

	Actiu A	**Actiu B**	**Actiu C**
Inversió inicial (nº tit)	$\frac{683.013{,}46€}{950{,}26}$ 718,76	$\frac{683.013{,}46€}{1.075{,}82}$ 634,88	$\frac{683.013{,}46€}{877{,}11}$ 778,71
nº tit arredoniment	718	634	778
Valor inicial (euros)	$718 \cdot 950{,}26$ 682.286,68	$634 \cdot 1.075{,}82$ 682.069,88	$778 \cdot 877{,}11$ 682.391,58
Valor final (euros)	998.939,04	998.614,55	**999.087,12**

Risc d'interès = risc de preu (preu de mercat) + risc de reinversió (reinversió de cupons)

Millor escenari: actiu C que ofereix un major valor final però suposa que els tipus no canvien durant 4 anys.

Actiu A



- ✓ <u>Efecte reinversió:</u>

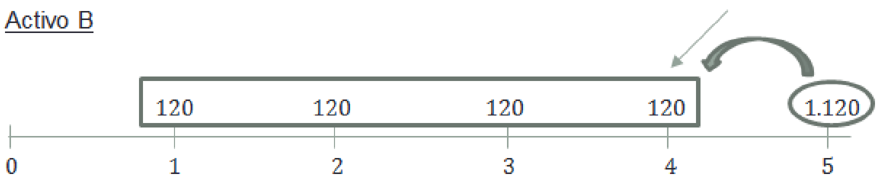
$$V_3 = 80 \cdot S_{\overline{3}|0,10} + 1.000 = 1.264,8€$$

$$V_4 = 1.264,8 \cdot (1 + 0,10)^1 = 1.391,28€$$

$$V_4(TOTAL) = 1.391,28 \cdot 718 = 998.939,04€$$

- ✓ <u>Efecte preu:</u> No n'hi ha, no hi ha cupons futurs que s'hagen d'actualitzar en l'any 4.

Actiu B



- ✓ <u>Efecte reinversió:</u>

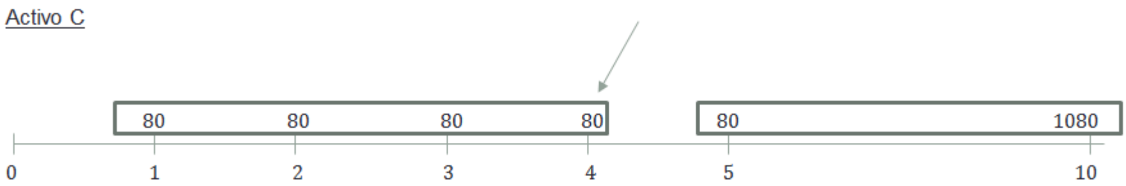
$$V_4 = 120 \cdot S_{\overline{4}|0,10} = 556,92€$$

- ✓ <u>Efecte preu:</u>

$$V_4 = 1.120 \cdot (1 + 0,10)^{-1} = 1.018,18€$$

$$V_4(TOTAL) = (556,92 + 1.018,18) \cdot 634 = 1.575,10 \cdot 634 = 998.614,55€$$

Actiu C



✓ Efecte reinversió:

$$V_4 = 80 \cdot S_{\overline{4}|0,10} = 371{,}28€$$

✓ Efecte preu:

$$V_4 = 80 \cdot a_{\overline{6}|0,10} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}10)^{-6} = 912{,}89€$$

$$V_4(TOTAL) = (371{,}28 + 912{,}89) \cdot 778 = 1.284{,}17 \cdot 778 = 999.087{,}12€$$

b) Si només realitzar la inversió els tipus de mercat passen al 8% i es mantenen així durant quatre anys.

	Actiu A	Actiu B	Actiu C
Valor de mercat (im=8%)	1.000€	1.159,71€	1.000€
nº. tit arredoniment	718	634	778
Valor inicial (euros)	718.000	735.256,14	778.000
Valor final (euros)	976.831,07	1.000.306,5	**1.058.460,41**

Valors inicials:

Actiu A

$$V_0 = 80 \cdot a_{\overline{3}|0,08} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}08)^{-3} = 1.000€$$

Actiu B

$$V_0 = 120 \cdot a_{\overline{5}|0,08} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}08)^{-5} = 1.159{,}71€$$

Actiu C

$$V_0 = 80 \cdot a_{\overline{10}|0,08} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}08)^{-10} = 1.000€$$

Si els tipus de mercat baixen és preferible l'actiu C, que proporciona major rendibilitat (major rendibilitat final) donat que la seua *duration* és major que l'HPI.

Actiu A

- ✓ Efecte reinversió:

$$V_3 = 80 \cdot S_{\overline{3}|0,08} + 1.000$$

$$V_4 = V_3 \cdot (1 + 0{,}08)^1 = 1.360{,}48€$$

$$V_4(TOTAL) = 1.360{,}48 \cdot 718 = 976.831{,}07€$$

- ✓ Efecte preu: No n'hi ha, no hi ha termes amortitzatius futurs que s'hagen d'actualitzar als 4 anys.

Actiu B

- ✓ Efecte reinversió:

$$V_4 = 120 \cdot S_{\overline{4}|0,08} = 540{,}73€$$

- ✓ Efecte preu:

$$V_4 = 1.120 \cdot (1 + 0{,}08)^{-1} = 1.037{,}04$$

$$V_4(TOTAL) = (540{,}73 + 1037{,}04) \cdot 634 = 1.577{,}77 \cdot 634 = 1.000.306{,}5€$$

Actiu C

- ✓ Efecte reinversió:

$$V_4 = 80 \cdot S_{\overline{4}|0,08} = 360{,}49€$$

- ✓ Efecte preu:

$$V_4 = 80 \cdot a_{\overline{6}|0,08} + 1.000 \cdot (1 + 0{,}08)^{-6} = 1.000€$$

$$V_4(TOTAL) = 1.360{,}49 \cdot 778 = 1.058.460{,}41€$$

c) Si realitzada la inversió els tipus de mercat passen al 12% i es mantenen així durant 4 anys.

	Actiu A	**Actiu B**	**Actiu C**
Valor de mercat (im=12%)	903,93€	1.000€	773,99€
nº. tit arredoniment	718	634	778
Valor inicial (euros)	648.590.94	634.000	602.164,22
Valor final (euros)	**1.021.244,6**	997.611,27	947.518,379

Valors inicials:

Actiu A

$$V_0 = 80 \cdot a_{\overline{3}|0,12} + 1.000 \cdot (1+0,12)^{-3} = 903,93€$$

Actiu B

$$V_0 = 120 \cdot a_{\overline{5}|0,12} + 1.000 \cdot (1+0,12)^{-5} = 1.000€$$

Actiu C

$$V_0 = 80 \cdot a_{\overline{10}|0,12} + 1.000 \cdot (1+0,12)^{-10} = 773,99€$$

Si els tipus de mercat pugen és preferible l'actiu A, que proporciona major rendibilitat (major rendibilitat final) donat que la seua *duration* es menor que l'HPI.

Actiu A

- ✓ Efecte reinversió:

$$V_3 = 80 \cdot S_{\overline{3}|0,12} + 1.000$$

$$V_4 = V_3 \cdot (1+0,12)^1$$

$$V_4(TOTAL) = 1.422,35 \cdot 718 = 1.021.244,6€$$

- ✓ Efecte preu: No n'hi ha, no hi ha termes amortitzatius futurs que s'hagen d'actualitzar als 4 anys.

Actiu B

- ✓ Efecte reinversió:

$$V_4 = 120 \cdot S_{\overline{4}|0,12} = 573,52€$$

- ✓ Efecte preu:

$$V_4 = 1.120 \cdot (1+0,12)^{-1} = 1.000€$$

$$V_4(TOTAL) = 1.573,53 \cdot 634 = 997.611,27€$$

Actiu C

- ✓ Efecte reinversió:

$$V_4 = 80 \cdot S_{\overline{4}|0,12} = 382,35€$$

- ✓ Efecte preu:

$$V_4 = 80 \cdot a_{\overline{6}|0,12} + 1.000 \cdot (1+0,12)^{-6} = 835,54€$$

$$V_4(TOTAL) = 1.217,89 \cdot 778 = 947.518,379€$$

HPI=4		$i_m = 10\%$		∇i_m $i_m = 8\%$		Δi_m $i_m = 12\%$	
Actiu A (D=2,77)	ER	1.391,28		1.360,48		1.422,35	
	EP	0		0		0	
	ET	**1.391,2**	998.939,04	**1.360,48**	976.831,07	**1.422,35**	1.021.244,6
Actiu B (D=4,07)	ER	556,92		540,73		573,52	
	EP	1.018,18		1.037,04		1.000	
	ET	**1.575,10**	998.614,55	**1.577,77**	1.000.306,5	**1.573,52**	997.611,27
Actiu C (D=7,04)	ER	371,28		360,49		382,35	
	EP	912,89		1.000		835,54	
	ET	**1.284,17**	999.087,12	**1.360,49**	1.058.460,4	**1.217,89**	947.518,37

A partir del Teorema de la Immunització Financera, i sota el supòsit que una variació en el moment de formar la cartera es manté durant tot l'HPI, es poden establir les relacions següents amb importants implicacions pràctiques:

	∇i_m	Δi_m
D=HPI	Indiferent	Indiferent
D>HPI	**Benefici**	Pèrdua
D<HPI	Pèrdua	**Benefici**

- ✓ Si els **tipus d'interès de mercat baixen**, preferisc els actius que tenen una *duration* major donat que oferiran un valor final de la inversió major. Per a aquests actius, que tenen *duration* alta, l'efecte preu és sempre superior a l'efecte de la reinversió. En el moment en què baixen els tipus i augmenta el preu de mercat per la relació inversa que existeix entre ells, l'efecte preu augmentarà atès que depèn del preu de mercat de l'actiu. Augmenta el preu de mercat, que és l'efecte que té més pes en aquest cas. S'hi produeix un benefici perquè se n'obté una rendibilitat major a l'esperada.
- ✓ Si els **tipus d'interès de mercat pugen,** preferisc actius que tenen una *duration* menor ja que oferiran un valor final de la inversió major. Per a aquests actius, que tenen *duration* baixes, l'efecte de reinversió és sempre superior a l'efecte preu, i en el moment en què pugen els tipus, augmentarà la reinversió dels cupons a tipus més alts i s'incrementarà el valor final de la inversió. S'hi produeix un benefici perquè s'obté una rendibilitat major a l'esperada.

Problema 6

Certa persona vol invertir 500.000 euros i garantir-se una rendibilitat del 10% (oferida pel mercat en aquests moments). Si el seu horitzó de planificació (HPI) és de 3,25 anys, determineu com podrà acomplir el seu propòsit si els títols que ofereix el mercat son els següents:

Obligacions americanes a 3 anys, cupó 10% amb $V_A = 100;\ D_A = 2{,}7355$

Obligacions americanes a 7 anys, cupó 8% amb $V_B = 9.026{,}316;\ D_B = 5{,}5423$

$$V_C = 500.000€$$

$$HPI = \mathrm{D_C} = 3{,}25$$

$$\mathrm{D_C} = D_A \cdot \alpha_A + D_B \cdot \alpha_B$$

$$\alpha_A + \alpha_B = 1$$

$$\left.\begin{array}{c} 3{,}25 = 2{,}7355 \cdot \alpha_A + 5{,}5423 \cdot \alpha_B \\ \alpha_A + \alpha_B = 1 \end{array}\right\}$$

$$\alpha_A = 81{,}67\%$$
$$\alpha_B = 18{,}33\%$$

$$\alpha_A = 81{,}67\% = \frac{V_A N_A}{V_C} = \frac{100 \cdot N_A}{500.000} \rightarrow N_A = 4.083\ tit.\ actiu\ A$$

$$\alpha_B = 18{,}33\% = \frac{V_B N_B}{V_C} = \frac{9.026{,}316 \cdot N_B}{500.000} \rightarrow N_B = 10{,}159\ \approx 10\ tit.\ actiu\ B$$

$$V_C = V_A N_A + V_B N_B = 100 \cdot 4.083 + 9.026{,}316 \cdot 10 = 498.563{,}10\ €$$

$$500.000 - 498.563{,}10 = 1.436{,}84 \rightarrow \frac{1.436{,}84}{V_A} \approx 14\ tit.\ actiu\ A$$

La cartera estarà composta per 4.097 títols de l'actiu A i 10 de l'actiu B.

4. Estructura temporal dels tipus d'interès (ETTI)

L'ETTI es defineix com la relació funcional existent entre el tipus d'interès al comptat i el seu corresponent termini.

<u>¿Què són els tipus d'interès al comptat?</u>

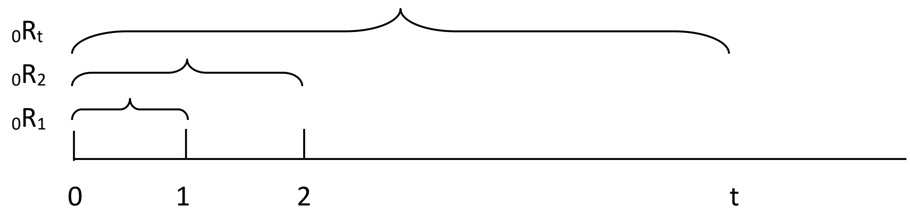
El tipus d'interès al comptat o *spot* corresponent a un termini $[0, n]$ es defineix com el tant efectiu periodal que proporcionaria una operació financera consistent en la compra fins al venciment d'un títol de renda fixa, bé al descompte, bé cupó zero o bé perquè li resta un únic pagament final, lliure de risc d'insolvència i amortitzable d'ací a *n* períodes.

Així, si el preu en 0 d'un títol com el descrit és P_0i el seu valor d'amortització en *n* es P_n, el tipus d'interès de comptat corresponent a un termini $[0, n]$, que denotarem per ${}_0R_n$, ve donat per l'expressió:

$$P_0 \cdot (1 + {}_0R_n)^n = P_n$$

Òbviament, el valor de ${}_0R_n$ depèn de la unitat de temps que s'està considerant. En general, tret que s'especifique el contrari, cal suposar que la unitat de temps utilitzada per al càlcul del tipus d'interès és l'any.

Gràficament:



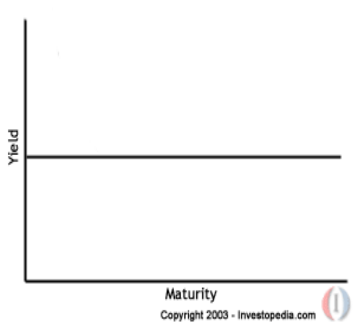
Observació: Les operacions al comptat realitzades diàriament en el mercat de deute públic són una bona font d'informació dels tipus d'interès al comptat. Així, a partir dels preus de mercat de les lletres del tresor, dels bons i obligacions de l'Estat amb termini inferior a l'any i dels STRIP, si apliquem la fórmula anterior, es poden obtindre els tipus d'interès al comptat.

Aquests tipus d'interès s'han d'obtenir a partir de títols que posseeixen les característiques següents: actius de deute públic, emesos al descompte o cupó zero o amb un sol pagament final, i amortitzables en *n* períodes.

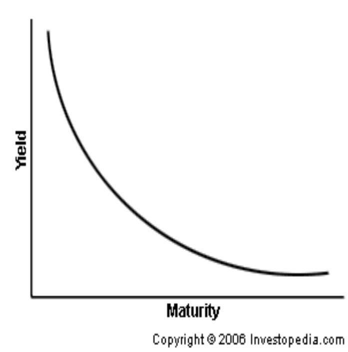
Les raons per les quals es tria aquest tipus d'actius són les següents: com que són actius de renda pública "teòricament" no presenten riscos d'insolvència, encara que tenen el risc sobirà. <u>Totes les emissions tenen el mateix risc i són emissions amb una elevada liquiditat.</u>

Si els tipus d'interès al comptat per a tots els terminis són iguals, es diu que és plana; si els tipus d'interès al comptat a curt termini són majors que els tipus a llarg termini, es diu que l'ETTI és decreixent; per últim, si els tipus d'interès al comptat a curt termini són menors que els tipus a llarg termini, es diu que l'ETTI és decreixent.

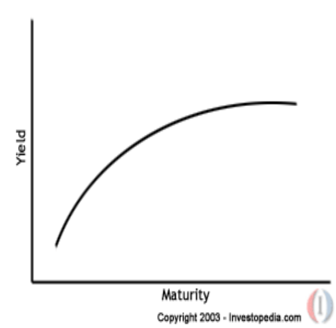
ETTI plana



ETTI decreixent

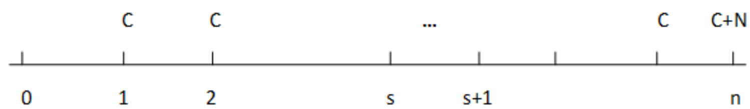


ETTI creixent



Aplicacions i limitacions de l’ETTI

1. Coneguts els tipus d’interès al comptat per a cada un dels terminis, es pot calcular el valor actual d'un pagament futur i, per tant, es pot determinar quin hauria de ser el preu de mercat de qualsevol actiu de renda fixa pública: lletres, bons, obligacions i STRIP. Així, el preu de mercat d'un títol de renda fixa sense risc d'insolvència amb pagament periòdic de cupons amortitzable dins de n períodes que genera un corrent de pagaments



en què C indica el cupó periodal (en este cas anual); N és el nominal del títol i sRt és el tipus d’interès al comptat vigent en el moment *s* i de termini t.

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \, (1 + i_m)^{-(r-s)}$$

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} C \, (1 + \, _sR_{r-s})^{-(r-s)} + N(1 + \, _sR_{n-s})^{-(n-s)}$$

Ara a cada cupó li correspon un tipus al comptat, de manera que NO es pot utilitzar la teoria de rendes per a valorar el bo, tret que l'ETTI fora plana.

2. L'ETTI s'utilitza també en la valoració d'actius de renda fixa del mercat de deute privat. En aquest cas, al tipus d’interès caldrà sumar-li la prima de risc de l'empresa que s'està valorant.

3. A més de la valoració d'actius, l'ETTI també s'utilitza en la gestió de carteres de renda fixa i en la valoració d'actius derivats sobre tipus d’interès (futurs i opcions).

LIMITACIONS. L'ETTI no és directament observable. Per a obtindre-la és necessari disposar de la cotització de bons cupó zero per a tots els terminis. No obstant això, s'han desenvolupat diferents metodologies (mètode recursiu) per a estimar-la a partir de cotitzacions de bons amb pagament periòdic de cupons, així com a partir de les cotitzacions del mercat de SWAP.

Problema 7

Suposem que tenim els preus (en euros) dels següents bons simples amb venciments a 1, 2, 3, 4 i 5 anys respectivament i nominal igual a 1.000 euros:

P_0^1=934,6; P_0^2=865,4; P_0^3=797,6; P_0^4=738,5 i P_0^5=671,3

Es demana:

1. Obtindre els tipus d'interès al comptat per als diferents terminis.

$$\mathrm{P_0} \cdot (1 + \mathrm{R_n})^{\mathrm{n}} = \mathrm{P_n}$$

Tipus d'interès al comptat a 1 any:

$$934{,}6 \cdot (1 + \mathrm{R_1})^1 = 1.000$$

$$\mathrm{R_1} = \left(\frac{1.000}{934{,}6}\right)^{1/1} - 1 = 6{,}998\%$$

Tipus d’interès al comptat a 2 anys:

$$865{,}4 \cdot (1 + \mathrm{R_2})^2 = 1.000$$

$$\mathrm{R_2} = \left(\frac{1.000}{865{,}4}\right)^{1/2} - 1 = 7{,}496\%$$

Tipus d’interès al comptat a 3 anys:

$$797{,}6 \cdot (1 + \mathrm{R_3})^3 = 1.000$$

$$\mathrm{R_3} = \left(\frac{1.000}{797{,}6}\right)^{1/3} - 1 = 7{,}830\%$$

Tipus d’interès al comptat a 4 anys:

$$738{,}5 \cdot (1 + \mathrm{R_4})^4 = 1.000$$

$$\mathrm{R_4} = \left(\frac{1.000}{738{,}5}\right)^{1/4} - 1 = 7{,}873\%$$

Tipus d’interès al comptat a 5 anys:

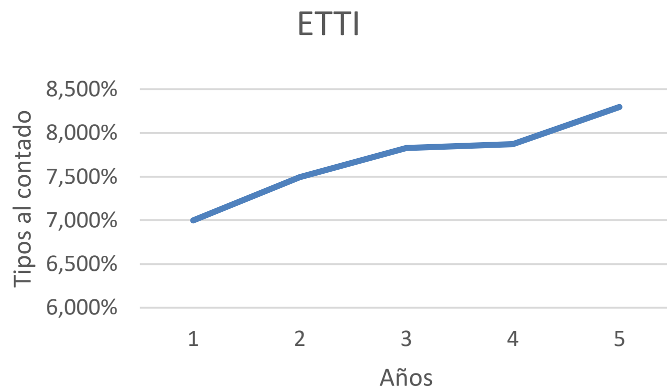
$$671{,}3 \cdot (1 + \mathrm{R_5})^5 = 1.000$$

$$\mathrm{R_5} = \left(\frac{1.000}{671{,}3}\right)^{1/5} - 1 = 8{,}297\%$$

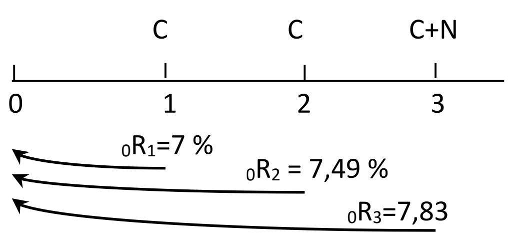
S’obté una ETTI creixent.

Els inversors esperen que els tipus d’interès al comptat futurs siguen majors que els tipus actuals.

2. Obteniu (dibuixeu) l’ETTI.



3. Suposant que hi ha un bo amb cupó emès al tipus d’interès del 7%, 3 anys fins al venciment i nominal de 1.000 €, calculeu el valor de mercat del bo avui.



$$V_0 = 70(1+0{,}07)^{-1} + 70(1+0{,}0749)^{-2} + 1.070(1+0{,}0783)^{-3} = 979{,}43€$$

Problema 8. Sabem que en el mercat es negocien els actius financers següents:

Actiu	Termini a venciment	Cupó anual	Nominal	Preu de mercat (€)
A	1	0	10.000	9.615,38
B	2	10%	10.000	10.938,86
C	3	5%	10.000	9.876,22

1. Obteniu-ne l'ETTI.

Actiu A:

$$9.615{,}38 = 10.000 \cdot (1 + R_1)^{-1}$$

$$R_1 = 4\%$$

Actiu B:

$$10.938{,}86 = 1.000 \cdot (1 + R_1)^{-1} + (10.000 + 1.000) \cdot (1 + R_2)^{-2}$$

$$R_2 = 5\%$$

Actiu C:

$$9.876{,}22 = 500 \cdot (1 + R_1)^{-1} + 500 \cdot (1 + R_2)^{-2} + 10.500 \cdot (1 + R_3)^{-3}$$

$$R_3 = 5{,}5\%$$

2. Calculeu el tant efectiu de l'inversor si inverteix fins a venciment per a cada un dels bons.

$$V_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \, (1 + i_a)^{-(r-s)}$$

Actiu A:

$V_0 = 10.000 \cdot (1 + i_a)^{-1}$

$$9.615{,}38 = 10.000 \cdot (1 + i_a)^{-1}$$

$$i_a = 4\%$$

Actiu B:

$$V_0 = 1.000 \cdot (1 + i_a)^{-1} + (10.000 + 1.000) \cdot (1 + i_a)^{-2}$$

$$10.938{,}86 = 1.000 \cdot (1 + i_a)^{-1} + (10.000 + 1.000) \cdot (1 + i_a)^{-2}$$

$$i_a = 4{,}954\%$$

Actiu C:

$$V_0 = 500 \cdot (1 + i_a)^{-1} + 500 \cdot (1 + i_a)^{-2} + 10.500 \cdot (1 + i_a)^{-3}$$

$$9.876{,}22 = 500 \cdot (1 + i_a)^{-1} + 500 \cdot (1 + i_a)^{-2} + 10.500 \cdot (1 + i_a)^{-3}$$

$$i_a = 5{,}458\%$$

WEBS RECOMANATS PER AL TEMA 3

Boletín del Mercado Deuda Pública: font d'informació per a construir l'ETTI:

http://www.bde.es/webbde/es/secciones/informes/banota/banota.html