

33069

FÍSICA

Grau en BIOLOGIA

Grup A

Professora: M. Carmen Martínez Tomás
Despatx: 1.04 de l'Edifici d'Investigació
e-mail: *Carmen.Martinez-tomas@uv.es*

FÍSICA

DADES:

- Nom i correu de la professora:
Carmen.Martinez-tomas@uv.es
- **Departament:**
Física Aplicada i Electromagnetisme
- **Despatx:**
Edifici d'Investigació 1.04
- **Tutories:**
dl, dm, dx, dj, dv: 10.30 h - 11.00 h
dl: 15.00 h – 16.30 h

OBJECTIUS DE L'ASSIGNATURA:

- Estudi dels fonaments físics dels processos biològics:
 - biomecànica (tema 1)
 - bioelectromagnetisme (tema 2)
 - òptica (tema 3)
 - moviment ondulatori (tema 4)
 - radioactivitat (tema 5)
- Vegeu temari detallat en la Guia Docent

AVALUACIÓ

- **Treball interdisciplinari:** **10%**
- **Entrega de problemes:** **5%**
- **Examen escrit** (qüestions i problemes) **55%**
 - *Nota mínima de l'examen per fer mitjana: 4 punts sobre 10*
- **Qüestionaris** realitzats per Internet: **5%**
 - Assignatura superada: puntuació final $\geq 50\%$ de la nota total (si es pot fer mitjana)
 - 2a convocatòria: es guardaran les notes de qüestionaris, treballs i memòries de laboratori.
 - La nota de laboratori només es guarda un curs, el següent a la realització de les pràctiques.
- **Laboratori:** **25%**
 - *Nota mínima de les memòries per fer mitjana: 4 punts sobre 10*

MATERIAL:

- Material:
 - Presentacions: OCW de la Universitat de València
http://ocw.uv.es/ciencias/fisica/Course_listing
 - Apunts: en l'Aula Virtual:
<https://aulavirtual.uv.es/>
 - No són apunts exhaustius; són només un **GUIÓ**.
 - Convé **COMPLETAR-LOS** amb els textos recomanats.
 - Nomenclatura (exemple per als fitxers del tema 1): Tema 1a, Tema1a_Prob

BIBLIOGRAFIA COMENTADA:

- **J.M. Kane, *FÍSICA***, Ed. Reverté
 - Llibre per a estudiants de biologia amb un nivell ajustat al curs.
 - Llibre de referència en relació amb les línies generals.
- **F. Cussó, C. López, R. Villar, *FÍSICA DE LOS PROCESOS BIOLÓGICOS***, Ed. Ariel
 - Llibre d'autors espanyols.
 - Llibre per a estudiants de biologia però amb un nivell superior al del curs.
 - Té moltes i molt interessants aplicacions biològiques.
 - Llibre molt adequat per a treballs i consultes futures.
- **M. Ortuño, *FÍSICA PARA BIOLOGÍA, MEDICINA, VETERINARIA Y FARMACIA***, Ed. Crítica
 - Llibre d'autors espanyols.
 - Llibre per a estudiants de biologia amb un nivell ajustat al curs.
 - Inconvenient: està esgotat.
 - Esquema i problemes del llibre resolts en la pàgina web:
<http://bohr.inf.um.es/teaching/aplicada/index.html>
- **P. A. Tipler, *FÍSICA*** (2 volums), Ed. Reverté
 - Llibre per a estudiants de ciències físiques i enginyeria, nivell superior al d'aquest curs.
 - Les figures de gran part del material de classe s'han obtingut del CD subministrat per l'autor amb la finalitat de facilitar la docència de la física.

LABORATORI: TEMARI DE PRÀCTIQUES

- Estudi dels fonaments físics dels processos biològics:
 - Pràctica 1: Sistemes d'unitats. Anàlisi i representació de dades. Càlcul d'errors. Relacions entre magnituds: anàlisi gràfica
 - Pràctica 2: Mesura de la densitat i viscositat d'un líquid
 - Pràctica 3: Circuits elèctrics. Mesures de corrent i diferència de potencial
 - Pràctica 4: Òptica. Formació d'imatges amb lents primes: la lupa i el microscopi
 - Pràctica 5: EXAMEN

QÜESTIONARIS

- 6 qüestionaris en total (Tema 1a, Tema 1b, Tema 2, Tema 3, Tema 4, Tema 5)
- Cada un d'aquests consta, en general, de 5 o 6 qüestions (una per cada bloc de problemes dels butlletins)
- Les qüestions són apartats dels problemes del butlletí, amb les dades diferents.
- 5% de la nota total
- Característiques:
 - oberts durant un temps limitat (aprox. 2 setmanes)
 - temps limitat per a contestar-lo (45 minuts)
 - nombre d'intents limitat (2)
 - Qüestionari de prova: DADES DE BATXILLERAT (no contribueix a la nota final)

Arrodoniments en els qüestionaris

- Les solucions numèriques es donen arrodonides, típicament amb tres xifres significatives (és a dir, les tres xifres de l'esquerra que són diferents de zero).
- Les regles que emprarem en l'arrodoniment de nombres són les següents:
 - Si la xifra que s'omet és menor que 5, s'elimina sense més.
 - Si la xifra eliminada és major o igual que 5, s'augmenta en una unitat l'última xifra retinguda.
 - Alguns exemples: si arrodonim 3.678 a tres xifres significatives, el resultat és 3.68. En canvi si el nombre a arrodonir, també a tres xifres, fora 3.673, quedaria 3.67. El nombre 3.675 també s'arrodoniria a 3.68.
 - Quan els nombres que cal arrodonir són grans, les xifres eliminades se substitueixen per zeros. Per exemple, el nombre 3875 arrodonit a una xifra significativa resulta 4000. Si l'arrodonim a 2 xifres significatives, quedaria com a 3900 i amb tres xifres significatives, 3880.

Falta de precisió en el càlcul (pistes per a seleccionar respostes en els qüestionaris)

- Els càlculs que fan els estudiants, com que s'anoten a mà i després es teclegen, tenen una certa imprecisió (observació: val més guardar el valor en la memòria de la calculadora i reutilitzar-lo).
- PER AIXÒ, cal comparar els resultats obtinguts amb els indicats en el qüestionari de forma "oberta", amb un marge d'error: si el vostre resultat és 18.37 i les opcions del qüestionari són (a) 7; (b) 18,2; (c) 23; (d) 57, indubtablement s'ha de donar per bona l'opció b, perquè el valor calculat està dintre d'un interval raonable al voltant d'aquest valor.
- Un interval raonable de comparança pot ser el 5% del valor, repartit per excés i defecte. En l'exemple anterior, com el 5% de 18.2 és 0.9; l'interval quedaria com a 18.2 ± 0.5 , és a dir, entre 17.7 i 18.7 (arrodonint 0.45 a 0.5).
- No obstant això, cal tenir en compte que les respostes incorrectes estan calculades pensant en els errors típics de càlcul (unitats, potències de 10, massa en lloc de força...).

VIII. TEMARI I PLANIFICACIÓ TEMPORAL

| | CLASSES TEÒRIQUES I CLASSES DE PROBLEMES | Hores (teo. / prob.) |
|---|---|-------------------------|
| 1 | Principis de biomecànica 1.1. Propietats elàstiques dels materials. Llei de Hooke 1.2. Tracció i contracció. Mòdul de Young. Coeficient de Poisson 1.3. Altres assajos elàstics 1.4. Disseny estructural de la natura (al LABORATORI) 1.5. Hidroestàtica 1.6. Fluids ideals: equació de Bernoulli 1.7. Fluids viscosos: equació de Poiseuille | 8 / 3 |
| 2 | Principis de bioelectromagnetisme 2.1. Força i camp elèctric 2.2. Potencial elèctric 2.3. La membrana cel·lular. Capacitat 2.4. Corrent elèctric. Resistència (al LABORATORI) 2.5. Circuits elèctrics de CC amb una malla (al LABORATORI) 2.6. Camp magnètic. Força sobre una càrrega en moviment 2.7. Espectròmetre de masses | 6 / 2 |
| 3 | Òptica 3.1. L'espectre electromagnètic 3.2. Índex de refracció. Lleis de la reflexió i la refracció 3.3. Espills i lents 3.4. Formació d'imatges 3.5. Òptica instrumental: la lupa i el microscopi 3.6. L'ull humà com a sistema òptic 3.7. Defectes de la visió | 6 / 2 |
| 4 | Moviment ondulatori 4.1. Tipus d'ones 4.2. Equació del moviment ondulatori: longitud d'ona, freqüència i velocitat 4.3. Superposició d'ones 4.3. Energia i intensitat d'una ona. Absorció 4.4. Breu introducció a l'acústica | 4 / 2 |
| 5 | Radioactivitat 5.1. Estructura nuclear. Forces nuclears 5.2. Masses nuclears i energia d'enllaç 5.3. La desintegració radioactiva i les seues lleis 5.4. Datació en arqueologia i geologia 5.5. Radioactivitat artificial. Aplicacions dels radioisòtops 5.6. Radiacions ionitzants. Efectes biològics de la radiació. Unitats dosimètriques | 5 / 2 |
| | TOTAL | 29 / 8 |

TEMA 0: SISTEMES D'UNITATS. MÚLTIPLES I SUBMÚLTIPLES

0.1 Unitats i dimensions

- Les lleis de la física expressen relacions entre magnituds físiques, com temps, força i espai.
- Les magnituds físiques són magnituds quantificables de manera objectiva (la quantificació no depèn de l'observador) mitjançant la seua comparació amb patrons bàsics (procés de mesura) que reben el nom d'*unitats de mesura*.
- Per tant, per a especificar el valor d'una magnitud cal donar sempre un nombre i la unitat de mesura que relaciona ambdós valors. No serveix de res dir que l'alçada d'un arbre és 5 vegades «alguna cosa» o dir que mesura «no sé quants» metres.
- Unitats fonamentals són aquelles que es consideren com a patró i de les quals deriven les altres. En el SI (Sistema Internacional) aquestes unitats són les indicades en la taula.

| <i>Magnitud física</i> | <i>unitat</i> |
|-------------------------|----------------|
| longitud | m (metre) |
| massa | kg (kilogram) |
| temps | s (segon) |
| corrent elèctric | A (amper) (*) |
| temperatura | K (kelvin) (*) |
| quantitat de substància | mol |
| intensitat lluminosa | cd (candela) |

(*) **NOTA:** El símbol de les unitats derivades d'un nom propi comença sempre amb lletra majúscula

- Unitats derivades són aquelles que, encara que es deriven de les fonamentals, tenen un nom especial. Algunes d'elles es mostren en la taula següent:

| <i>Magnitud</i> | <i>Nom</i> | <i>Símbol</i> | <i>Expressió en altres unitats del SI</i> | <i>Expressió en unitats bàsiques del SI</i> |
|---|------------|---------------|---|---|
| Freqüència | hertz | Hz | | s^{-1} |
| Força | newton | N | | $m \cdot kg \cdot s^{-2}$ |
| Pressió | pascal | Pa | $N \cdot m^{-2}$ | $m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$ |
| Energia, treball | joule | J | $N \cdot m$ | $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$ |
| Potència | watt | W | $J \cdot s^{-1}$ | $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$ |
| Càrrega elèctrica | coulomb | C | | $s \cdot A$ |
| Potencial elèctric, Força electromotriu | volt | V | $W \cdot A^{-1}$ | $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ |
| Resistència elèctrica | ohm | W | $V \cdot A^{-1}$ | $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ |
| Capacitat elèctrica | farad | F | $C \cdot V^{-1}$ | $m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$ |
| Camp magnètic | tesla | T | $Wb \cdot m^{-2}$ | $kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$ |
| Inductància | henry | H | $Wb \cdot A^{-1}$ | $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ |

Enllaços d'interès

- En la pàgina de l'autor: (C) Ángel Franco García. Universitat del País Basc (Espanya)
 - ⇒ Aspectes interessants del sistema internacional d'unitats
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/unidades/unidades_1.html
 - ⇒ Mesures i la seua incertesa
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/unidades/medidas_1.html
- Bureau International des Poids et Mesures: <http://www.bipm.org/en/si/>
- Múltiples i submúltiples: Moltes vegades és interessant utilitzar múltiples o submúltiples de les unitats del SI, construïts amb l'ajuda de prefixos que són potències de 10, tal com s'indica en la següent taula:

| Factor | Prefix | Símbol | Factor | Prefix | Símbol |
|-------------------|---------------|---------------|------------------|---------------|---------------|
| 10 ⁻²⁴ | yocto | Y | 10 ¹ | deca | da |
| 10 ⁻²¹ | zepto | Z | 10 ² | hecto | h |
| 10 ⁻¹⁸ | atto | A | 10 ³ | kilo | k |
| 10 ⁻¹⁵ | femto | F | 10 ⁶ | mega | M |
| 10 ⁻¹² | pico | P | 10 ⁹ | giga | G |
| 10 ⁻⁹ | nano | N | 10 ¹² | tera | T |
| 10 ⁻⁶ | micro | μ (**) | 10 ¹⁵ | peta | P |
| 10 ⁻³ | mili | m | 10 ¹⁸ | exa | E |
| 10 ⁻² | centi | c | 10 ²¹ | zeta | Z |
| 10 ⁻¹ | deci | d | 10 ²⁴ | yotta | Y |

(**) **NOTA:** Veure alfabet grec

0.2 Homogeneïtat de les magnituds físiques

- Magnituds homogènies: una magnitud es pot expressar amb unitats de diferents sistemes. Per exemple, una longitud es pot expressar en km o en milles, una massa en kg o en lliures. Fent el canvi d'unitats adequat, podem sumar una distància de 3 km amb una de 2 milles, o podem sumar 5 kg a 3 lliures, però no podem sumar 3 km amb 5 kg. És a dir, només es poden sumar *magnituds homogènies*.
- Dimensions d'una magnitud: A cada tipus de magnitud derivada li correspon un conjunt d'unitats fonamentals. A aquest conjunt d'unitats fonamentals se l'anomena *dimensió d'una magnitud*. En els exemples anteriors, teníem una magnitud amb "dimensions de longitud" i una altra amb "dimensions de massa". Una vegada coneguda la dimensió d'una magnitud, es poden conèixer les seues unitats en el SI (o en qualsevol altre sistema).
- Però... com determinar les dimensions d'una magnitud? → A partir d'equacions físiques.
- Exemples: les dimensions i unitats en el SI d'algunes magnituds s'indiquen a continuació (els parèntesis quadrats indiquen "dimensions")

| | | |
|-------------|------------------------|------------------------------------|
| superfície: | [S] = L ² | → unitats en el SI: m ² |
| velocitat: | [v] = LT ⁻¹ | → unitats en el SI: m/s |
| força: | [F] = M | → unitats en el SI: kg |
- En general, qualsevol equació física relaciona termes en relacions d'igualtat o de suma. En conseqüència, tots els termes d'una equació han de tenir les mateixes unitats. Aquesta propietat rep el nom de *condició d'homogeneïtat dimensional d'una equació*.
- Aquesta característica que una equació física ha de ser dimensionalment homogènia té diferents aplicacions, entre elles:

o Determinació de les unitats de constants o magnituds físiques:

- Per exemple: per determinar les *unitats de la força* en funció de les unitats fonamentals del SI, cal tenir en compte que:

$$\text{si } F = m \cdot a, \text{ aleshores } [F] = M \cdot L T^{-1}, F \rightarrow \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \text{ és a dir } N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

- Per exemple: en la llei de gravitació de Newton, podem determinar les *unitats de la constant de gravitació G* de la següent manera (partim de $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$):

$$\text{si } G = \frac{F r^2}{M_1 M_2}, \text{ aleshores } [G] = [F] \cdot L^2 \cdot M^{-2}, G \rightarrow N \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} = \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

En ambdós casos hem aplicat la *condició d'homogeneïtat dimensional*, és a dir, els termes (i els sumands, si hi haguera) a ambdós costats del signe igual han de tenir les mateixes dimensions.

o Comprovació de la correcció de les relacions entre magnituds físiques:

- Per exemple: si dubtem entre dues expressions per a l'àrea del cercle, només hem de comprovar si l'equació és dimensionalment homogènia (π no té dimensions):

$$A = \pi r \quad A \rightarrow m \quad \rightarrow \text{NO és dimensionalment correcta}$$

$$\text{o} \quad A = \pi r^2 \quad A \rightarrow \text{m}^2 \quad \rightarrow \text{SÍ que és dimensionalment correcta}$$

- Canvi d'unitats: Per a fer el canvi d'unitats entre magnituds homogènies, utilitzarem els factors de conversió. Anomenem factor de conversió a la relació d'equivalència entre dues unitats d'una mateixa magnitud, és a dir, un quocient que ens indica els valors numèrics d'equivalència entre ambdues unitats.

- o Si, per exemple, volem calcular l'espai recorregut per un mòbil que es mou a velocitat constant de 72 km/h en un trajecte que li costa 30 segons, hem d'aplicar la senzilla equació $S = v \cdot t$, però tenim el problema que la velocitat és expressada en kilòmetres/hora, mentre que el temps ve en **segons**. Açò ens obliga a transformar una de les dues unitats de temps, de manera que ambdues siguin la mateixa, per a no violar el principi d'homogeneïtat, i que el càlcul siga correcte.
- o En el nostre cas, el factor de conversió entre hores i segons es pot expressar com:

$$\frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ segons}} \quad \text{o l'equivalent,} \quad \frac{3600 \text{ segons}}{1 \text{ hora}}$$

ja que 1 hora = 3 600 segons

- o Per a fer la conversió, simplement posem la unitat de partida i multipliquem pel factor adequat, de manera que se simplifiquen les unitats de partida i obtenim el valor en les unitats que ens interessa. En el nostre cas, desitgem transformar la velocitat de km/hora a km/segon, per la qual cosa utilitzarem la primera de les expressions, ja que així simplifiquem la unitat hora:

$$72 \frac{\text{kilòmetres}}{\text{hora}} \times \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ segons}} = 0.02 \text{ km / s}$$

- o Si hem de transformar més d'una unitat, utilitzarem tots els factors de conversió successivament i realitzarem les operacions. Per exemple, transformem els 72 km/h en m/s:

$$72 \frac{\text{kilòmetres}}{\text{hora}} \times \frac{1 \text{ hora}}{3600 \text{ segons}} \times \frac{1000 \text{ metres}}{\text{kilòmetres}} = 20 \text{ m / s}$$

- Convertidors: en Internet hi ha convertidors per a poder fer canvi d'unitats. Per a comprovar si el vostre càlcul és correcte, podeu utilitzar per exemple els següents:

<http://www.calculator.org/properties.aspx>

<http://www.cleavebooks.co.uk/scol/index.htm>

EXERCICIS PROPOSATS

- 0.1. Expressar 27 km en (a) metres, (b) centímetres, (c) micròmetres i (d) anys-llum. **NOTA:** un any-llum (en anglès, *light-year*) és la distància recorreguda per la llum en un any, és a dir: $c \cdot t = 3 \times 10^8 \times 365 \times 24 \times 3600 = 9.46 \times 10^{15} \text{ m} \approx 10^{16} \text{ m}$. **SOL:** $2.7 \times 10^4 \text{ m}$, $2.7 \times 10^6 \text{ cm}$, $2.7 \times 10^{10} \mu\text{m}$, 2.85×10^{-12} anys-llum.
- 0.2. Expressar el volum d'un bric de llet d'1 l en: cm^3 , dm^3 , m^3 . **SOL:** 1000 cm^3 , 1 dm^3 , 0.001 m^3 .
- 0.3. Si el diàmetre d'un cilindre mesura $1,50 \pm 0,05 \text{ cm}$ i la seua altura $8,50 \pm 0,05 \text{ cm}$, calcula l'àrea de la seua base, el seu volum i la seua àrea lateral, totes les magnituds amb la seua incertesa.

CURIOSITATS

⇒ Els límits coneguts per a les tres magnituds físiques fonamentals són:

Massa: 10^{-30} a 10^{50} kg
Longitud: 10^{-16} a 10^{23} m
Temps: 10^{-23} a 10^{17} s

⇒ **PODEU VEURE ELS LÍMITS DE LA LONGITUD fent un passeig per l'Univers!**

Des de l'immensament gran a l'infinítament menut!

<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html>

⇒ Per tant l'home: $M \approx 10^2 \text{ kg}$
 $L \approx 10^0 \text{ m}$
 $T = 70 \text{ anys} \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 2.2 \times 10^9 \text{ s} \approx 10^9 \text{ s}$

| LÍMITS CONEGUTS DE LONGITUD | | |
|----------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| Univers (màx.) | 156 000 milions anys-llum | $\approx 10^{27} \text{ m}$ |
| Univers (min.) | 30 000 milions anys-llum | $\approx 10^{26} \text{ m}$ |
| Límit conegut | 10 milions anys-llum | $\approx 10^{23} \text{ m}$ |
| Via làctia | 100 000 anys-llum | $\approx 10^{21} \text{ m}$ |
| distància entre estrelles | 10 anys-llum | $\approx 10^{17} \text{ m}$ |
| Sistema solar | 11 hores-llum | $\approx 10^{13} \text{ m}$ |
| | | |
| Diàmetre de la Terra (R=6371 km) | 12 000 km | $\approx 10^7 \text{ m}$ |
| continent | 5 000 km | $\approx 10^6 \text{ m}$ |
| ciutat i rodalia | 20 km | $\approx 10^4 \text{ m}$ |
| sequoia | 80 m | $\approx 10^2 \text{ m}$ |
| | | |
| Fulla d'arbre | 10 cm | $\approx 10^{-1} \text{ m}$ |
| zigot | 0.1 mm | $\approx 10^{-4} \text{ m}$ |
| hematies | 7 μm | $\approx 10^{-5} \text{ m}$ |
| nucli de la cèl·lula | 1 μm | $\approx 10^{-6} \text{ m}$ |
| | | |
| ADN | | $\approx 10^{-8} \text{ m}$ |
| àtom mitjà (carboni, aigua) | | $\approx 10^{-10} \text{ m}$ |
| nucli | | $\approx 10^{-14} \text{ m}$ |
| quark (superfície del nucli) | | $\approx 10^{-16} \text{ m}$ |

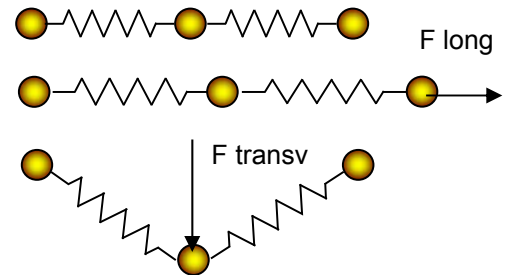
ALFABET GREC

| <i>SIGNE</i> | <i>NOM</i> | <i>PRONUNCIACIÓ</i> |
|---------------------|-------------------|----------------------------|
| A, α | alfa | a |
| B, β | beta | b |
| Γ, γ | gamma | g (com de gat) |
| Δ, δ | delta | d |
| E, ε | épsilon | e (breu) |
| Z, ζ | dseta | ds |
| H, η | eta | e (llarga) |
| Θ, θ | zeta | z |
| I, ι | iota | i |
| K, κ | kappa | k |
| Λ, λ | lambda | l |
| M, μ | mu | m |
| N, ν | nu | n |
| Ξ, ξ | xi | ks |
| O, ο | ómicron | o (breu) |
| Π, π | pi | p |
| P, ρ | ro | r |
| Σ, σ | sigma | s |
| T, τ | tau | t |
| Υ, υ | ípsilon | ü |
| Φ, φ | fi | f |
| X, χ | ji | j |
| Ψ, ψ | psi | ps |
| Ω, ω | omega | o (llarga) |

TEMA 1-a: BIOMECÀNICA - ELASTICITAT

1.1. Propietats elàstiques dels materials. Llei de Hooke

- Els cosos sòlids, quan sobre ells s'aplica una força, es deformen.
- Es pot entendre aquesta deformació si representem les forces atòmiques o moleculars com a molls que uneixen els àtoms o les molècules. En aplicar una força, els molls es deformen i els àtoms se separen o s'ajunten.



- Magnituds rellevants en els assajos elàstics:

- Esforç (τ): És la magnitud rellevant en l'assaig elàstic. Està relacionat amb la força deformadora, però depenent del tipus d'assaig elàstic aquesta relació és diferent.
- Deformació (ε): És l'efecte produït per l'esforç.
- Exemple: En un assaig de tracció, l'esforç és la força per unitat d'àrea transversal a aquesta força: F/A . La deformació és l'allargament relatiu: $\Delta L/L$

- Relació entre esforç i deformació:

- Si representem la relació experimental entre esforç i deformació en un assaig elàstic, obtenim la corba adjunta.

- S'hi poden distingir diverses regions:

- **Regió elàstica** (tram O-B)

- Es denomina així perquè, quan cessa l'esforç, la deformació desapareix. És a dir, el cos recupera la seua forma inicial.

- Zona lineal (tram O-A)

- En aquesta zona la relació entre l'esforç i la deformació és LINEAL, és a dir, l'esforç i la deformació segueixen una recta donada per

$$\text{esforç} = \text{constant} \times \text{deformació} \quad \rightarrow \quad \tau = \text{const} \times \varepsilon$$

- Aquesta llei lineal es coneix com a **Llei de Hooke**

- Zona no lineal (tram A-B)

- En aquesta zona la relació entre l'esforç i la deformació és una funció NO LINEAL, és a dir, una corba. Un exemple de material elàstic és una goma de cabells. Després d'estirar-se, recupera la seua forma i la seua longitud.

- El punt B marca el límit de la zona elàstica.

- **Regió plàstica** (tram de B en endavant)

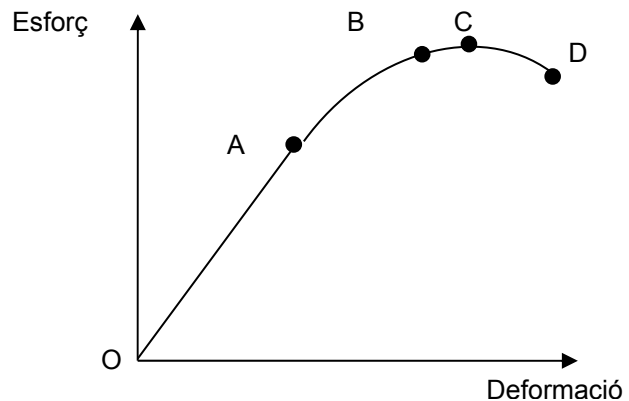
- Es denomina així perquè, quan l'esforç cessa, la deformació no desapareix i, per tant, el cos roman deformat. Un exemple de material plàstic és la plastilina, ja que quan es pressiona amb un dit sobre aquesta, queda la deformació.

- En aquesta zona la relació continua sent NO LINEAL

- El punt C: indica l'esforç màxim al qual es pot arribar

- El punt D: indica la deformació màxima que pot patir el cos. Si se supera, es produeix el trencament (el cos es trenca). Noteu que la deformació màxima no té per què donar-se per a l'esforç màxim.

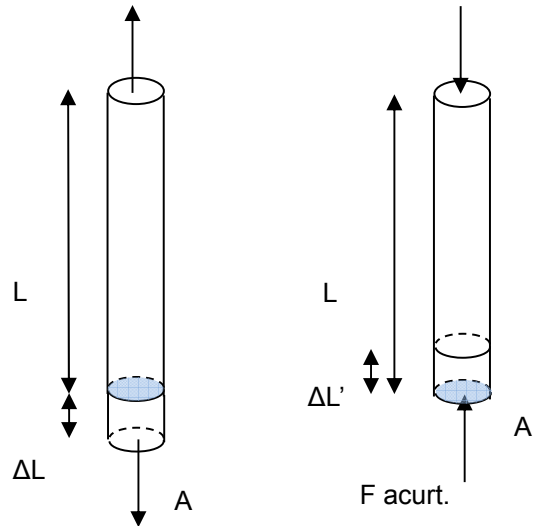
- Els materials reben les següents **denominacions** segons la seua resposta als assajos elàstics:



- **Material elàstic:** aquell en el qual la zona elàstica és molt gran i la zona plàstica molt menuda o inexistent. El límit de trencament (punt D) sol estar molt pròxim al límit elàstic (punt B).
- **Material plàstic:** aquell en el qual la zona elàstica és molt menuda i la zona plàstica molt gran, és a dir, el límit d'elasticitat (punt B) és molt prop a l'origen (punt O).
- **Material fràgil:** aquell en què es produeix el trencament quan s'arriba a l'esforç màxim. Els punts C i D són, per tant, molt pròxims.
- **Material dúctil:** és aquell en què els punts C i D són molt separats, és a dir, una vegada arribat al punt d'esforç màxim, el material es deforma molt amb poc esforç sense arribar al trencament.

1.2. Assaig de tracció: allargament/acurtament

- Un assaig de **tracció** consisteix en l'aplicació de forces iguals i oposades en els extrems d'un cos, que produeix una deformació en la direcció de la força.
- Quan les forces estiren del cos, es produeix un allargament (figura de l'esquerra).
- Quan les forces estan dirigides cap al cos, es produeix un acurtament (figura de la dreta).
- **NOTA:** aquest assaig també es denomina com a tracció/compressió, però el terme compressió produeix confusió respecte de l'equivalent utilitzat en l'assaig de compressibilitat (on la deformació es dona en totes direccions).



- L'**esforç** és la força per unitat d'àrea transversal a aquesta força: $\tau = \frac{F}{A}$

- La **deformació** és l'allargament/acurtament relatiu en la direcció de la força: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$
- **NOTA** ΔL té signe: és positiu per als allargaments i és negatiu per als acurtaments. Així tindrem: $L_{final} = L + \Delta L$.

- La **lei de Hooke** per aquest assaig és $\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$
- E és una constant que s'anomena **mòdul de Young** del material. La taula adjunta mostra valors representatius del mòdul de Young per a diferents materials.

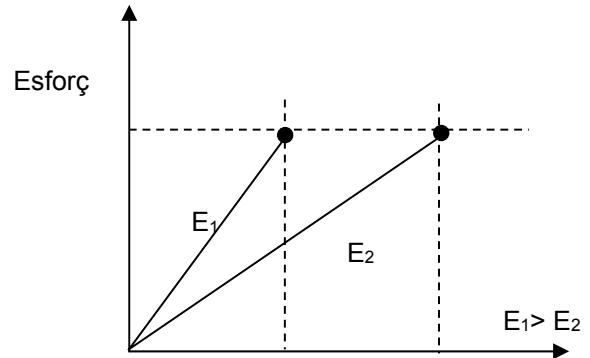
TAULA 1.1: Mòduls elàstics d'alguns materials (Kane i Cussó)

| | Mòd. Young (N/m²) | Esf. màx. (N/m²) | Coef. Poisson |
|-----------------|-------------------------------------|------------------------------------|----------------------|
| Acer | 20×10 ¹⁰ | 5×10 ⁸ | 0.30 |
| Alumini | 7×10 ¹⁰ | 2×10 ⁸ | 0.34 |
| Coure | 12×10 ¹⁰ | | 0.35 |
| Vidre | 7×10 ¹⁰ | 0.5×10 ⁸ | 0.24 |
| Fusta | 1×10 ¹⁰ | | 0.30-0.50 |
| Os (tracció) | 1.6×10 ¹⁰ | 1.2×10 ⁸ | 0.13-0.30 |
| Os (contracció) | 0.9×10 ¹⁰ | 2.2×10 ⁸ | 0.13-0.30 |
| Cabell humà | 5×10 ⁸ | 2×10 ⁸ | 0.30 |

- OBSERVACIONS IMPORTANTS

- Si representem gràficament la llei de Hooke per a un assaig de tracció, el mòdul de Young és el pendent de la recta: $\text{esforç} = \text{constant} \times \text{deformació}$.

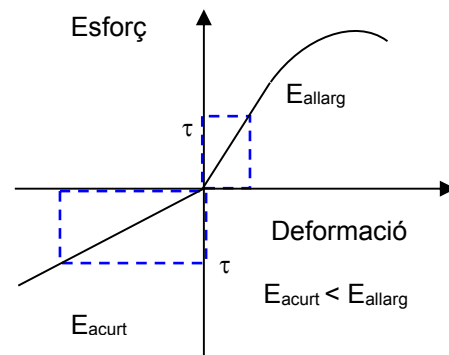
- Un mòdul de Young gran (E_1) correspon a una recta molt inclinada. En aquest cas, per a un esforç donat, la deformació és menuda. Es diu que aquest material s'oposa molt a la deformació.



- Un mòdul de Young menut (E_2) correspon a una recta poc inclinada. En aquest cas, per a un esforç donat, la deformació és gran. Es diu aleshores que el material s'oposa poc a la deformació.

➤ Concloem que, de la taula anterior, el material que més s'oposa a la deformació és l'acer i el que menys, el cabell humà.

- Un material especial és l'os, ja que presenta un mòdul de Young diferent per a l'allargament i per a l'acurtament. Com es pot veure en la figura, s'oposa més a la deformació quan s'allarga que quan s'acurta. És a dir, per a un mateix esforç, la deformació és més gran en un assaig d'acurtament que d'allargament. En general, és més probable un trencament per un accident de compressió de l'os (per exemple quan es cau a terra des d'una altura gran) que per un de tracció (per exemple quan se'ns enganxa un peu en un forat).



- Efecte sobre la secció: En un assaig de tracció, quan hi ha una deformació longitudinal, apareix com a conseqüència una deformació transversal. La relació entre ambdues deformacions, tenint en compte que la densitat es manté quasi constant, és la següent:

- Quan la longitud augmenta (allargament, ΔL positiu), l'àrea de la secció transversal disminueix (ΔA negatiu).

- Quan la longitud disminueix (acurtament, ΔL negatiu), l'àrea de la secció transversal augmenta (ΔA positiu).

- Si suposem una secció circular amb un radi r , la relació entre la deformació longitudinal i la transversal ve donada per:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\sigma \frac{\Delta L}{L}$$

- On σ és el **mòdul de Poisson**, que no té unitats (és adimensional) i el seu valor és de l'ordre de 0.10 a 0.50 per a tots els materials. Un valor típic és 0.30.

- El signe menys dona compte del signe oposat de les variacions (si una dimensió augmenta, l'altra disminueix i a l'inrevés).

PROBLEMA

- 1a.6. Es té una vareta feta d'os de 0.5 m de llarg i una secció d'1 cm². L'esforç màxim en un assaig de tracció és 1.2×10^8 N/m². (a) Quina és la força que li correspon a aquest esforç màxim? (b) Calcula quin és l'allargament absolut quan es realitza un esforç igual al màxim. (c) Quina és la variació relativa de la dimensió transversal (el radi r) (d) i l'absoluta? DADES: $E_{\text{os-allargament}} = 1.6 \times 10^{10}$ N/m², $\sigma_{\text{os}} = 0.2$. **SOL:** (a) 12000 N; (b) 0.00375 m = 3.75 mm; (c) 0.0015 = 0.15 %; (d) 8.5×10^{-6} m = 8.5 μ m.

- **Solució**

- (a) L'esforç màxim és: $\left[\frac{F}{A}\right]_{\max} = 1.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ i l'àrea: $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$

per tant, la força corresponent serà: $F = \left[\frac{F}{A}\right]_{\max} \cdot A = 1.2 \times 10^8 \cdot 10^{-4} = 1.2 \times 10^4 \text{ N}$

- (b) Aplicant la Llei de Hooke:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} = \frac{1}{1.6 \times 10^{10}} \cdot 1.2 \times 10^8 = 7.5 \times 10^{-3} = 0.0075 = 0.75 \%$$

la variació absoluta de la longitud serà:

$$\frac{\Delta L}{L} = 0.0075 \rightarrow \Delta L = 0.0075 \cdot 0.5 = 3.75 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.75 \text{ mm}$$

- (c) La variació relativa de la dimensió transversal serà:

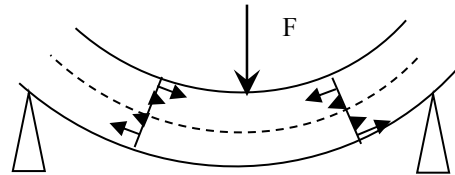
$$\frac{\Delta r}{r} = -\sigma \frac{\Delta L}{L} = -0.2 \cdot 0.0075 = -0.0015 = -0.15 \%. \text{ El signe negatiu indica una reducció de } r.$$

- (d) Per a calcular la variació absoluta: $A = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{A/\pi} = 5.64 \times 10^{-3} \text{ m}$

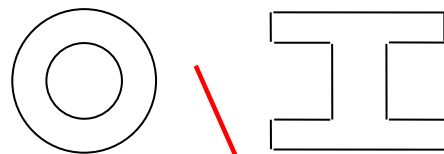
Com que la relativa és: $\frac{\Delta r}{r} = -0.0015 \rightarrow \Delta r = -0.0015 \cdot 5.64 \times 10^{-3} = -8.46 \times 10^{-6} \text{ m} = -8.46 \mu\text{m}$

1.3.a. Flexió central transversal

- Un assaig de flexió central transversal consisteix en una barra recolzada en dos suports i una força aplicada transversalment pel centre (vegeu figura).
- Es pot observar que, en una secció longitudinal paral·lela a la força, la part superior de la barra pateix un acurtament i la inferior un allargament.
- La làmina intermèdia que no pateix ni acurtament ni allargament es denomina superfície o fibra neutra. Com que no pateix deformació, no s'hi oposa i, en conseqüència, si es dissenja un cos que resisteix a la flexió amb estalvi de massa, en aquesta zona pot haver-hi poca massa.



- Exemple 1: els ossos de les aus estan buits, ja que en aquesta geometria la fibra neutra és l'eix del cilindre.
- Exemple 2: les bigues de construcció tenen forma de "H en horitzontal", ja que en una geometria de secció rectangular la superfície neutra és el pla horitzontal central.

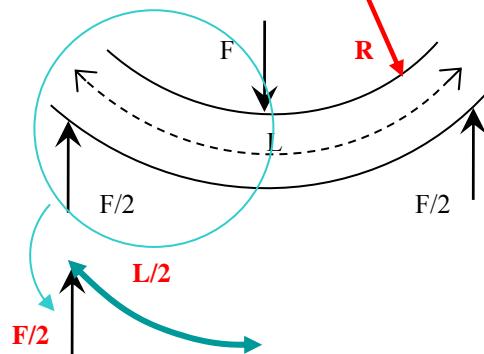


- Si es fa una força F en el centre de barra, els suports laterals fan cada un d'ells una força F/2 sobre una longitud L/2. L'esforç en aquest cas és el moment flexor en cada extrem:

$$\tau = \frac{F}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{FL}{4}$$

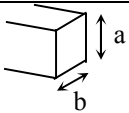
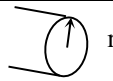
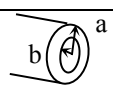
En aquest tipus d'assaig, l'esforç τ és constant en tota la barra.

- A causa de la força central, la barra es deforma corbant-se i adquirint un radi de curvatura R.

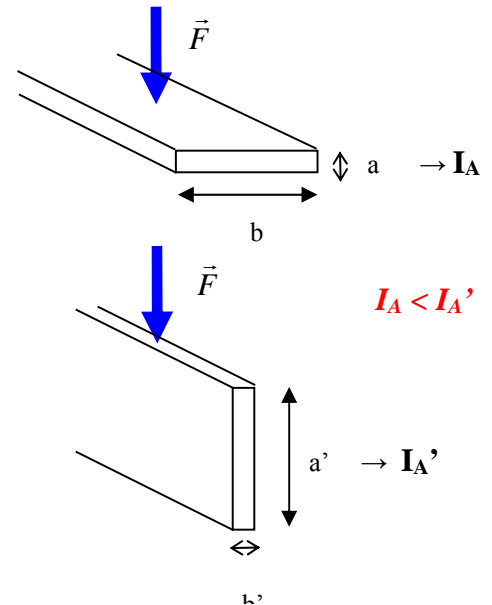


- La deformació és la inversa del radi de curvatura amb el que es deforma la barra: $\varepsilon = \frac{1}{R}$.
NOTA: com que la deformació és la inversa del radi de curvatura, una deformació menuda correspon a un radi de curvatura gran i una deformació gran a un radi menut.
- La lei de Hooke corresponent és: $\frac{FL}{4} = E \cdot I_A \frac{1}{R}$ on I_A és el moment d'inèrcia de la secció transversal.
- Aquest moment d'inèrcia de la secció transversal depèn de la geometria de la secció transversal. La taula adjunta mostra alguns casos particulars.

TAULA 1.2: Moments d'inèrcia d'algunes seccions (Taula 8.2, Kane)

| Secció transversal | | Moment de l'àrea |
|-----------------------------|--|----------------------------------|
| Barra de secció rectangular |  | $I_A = \frac{a^3 b}{12}$ |
| Cilindre |  | $I_A = \frac{\pi r^4}{4}$ |
| Tub |  | $I_A = \frac{\pi(a^4 - b^4)}{4}$ |

- Noteu que **com més gran és I_A** , major és el pendent de la Llei de Hooke i, per tant, **menor és la deformació**.
- En concret, per a una barra de secció rectangular, la deformació depèn de com s'aplique la força. Així, per a un mateix material i un mateix esforç (E i τ constants), però aplicant la força de forma diferent (vegeu figura).
 - Si la força s'aplica paral·lela al costat més curt, aleshores la deformació ($1/R$) és gran (perquè el factor I_A/E és menut).
 - Si la força s'aplica paral·lela al costat mitjà, aleshores la deformació ($1/R'$) és menuda (perquè el factor I_A/E és gran).
 - És a dir, com a $a < a' \rightarrow I_A < I_A' \rightarrow \frac{1}{R} > \frac{1}{R'}$.



PROBLEMA

1a.15. Una barra cilíndrica d'acer de 3 m de llarg té 0.01 m de radi. Si s'aplica una força de tal forma que es flexiona transversalment, amb un radi de curvatura de 20 m. (a) Quina és la deformació? (b) Quin és el moment d'inèrcia de la seua secció? (c) Quin és el moment flexor degut a la força? (d) Quina és la força aplicada? DADA: $E_{acer} = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. **SOL:** (a) 0.05 m^{-1} , (b) $7.85 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, (c) $78.5 \text{ N}\cdot\text{m}$, (d) 104.7 N .

• Solució

- (a) La deformació serà: $\varepsilon = \frac{1}{R} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ m}^{-1}$

- o (b) El moment d'inèrcia de la secció serà: $I_A = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi \cdot (0.01)^4}{4} = 7.85 \times 10^{-9} \text{ m}^{-4}$
- o (c) Aplicant la Llei de Hooke, obtenim el moment flexor:

$$\tau = E \cdot I_A \cdot \varepsilon = 20 \times 10^{10} \cdot 7.85 \times 10^{-9} \cdot 0.05 = 78.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

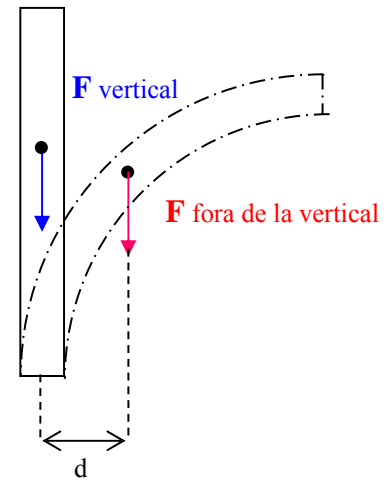
- o (d) La força aplicada es pot calcular com a: $\tau = \frac{F \cdot L}{4} \rightarrow F = \frac{4 \cdot \tau}{L} = 104.7 \text{ N}$

• **Flexió lateral o vinclament (pandeo, buckling):**

- o Sobre una columna vertical sotmesa al seu propi pes, apareix una força longitudinal vertical en la direcció de la gravetat. Si es desvia de la verticalitat, pot aparèixer un moment flexor $\tau = F \cdot d$ sobre ella tal que produeix una **flexió lateral** denominada **vinclament** (en castellà, *pandeo*, en anglès *buckling*).
- o Si el moment flexor produeix una flexió lateral massa gran, la columna no pot mantenir l'equilibri i **es fractura**.
- o Per a una columna de densitat ρ i mòdul de Young E , es pot demostrar (consultar Cussó o Kane) que just abans de trencar-se, la relació entre la longitud o alçària crítica, a la qual es trenca la columna, i el seu radi ve donada per

$$L_{crit} = \left(\frac{2E}{\rho g} \right)^{1/3} r^{2/3}$$

- per tant, si la longitud L és menor que la crítica ($L < L_{crit}$) → la columna NO es fractura
- però si la longitud L és major que la crítica ($L > L_{crit}$) → la columna SÍ es fractura



- o El primer factor depèn del material (E i ρ) i de la gravetat (g). El segon de la geometria (r).
- o Si anomenem C a la constant de proporcionalitat: $c = \left(\frac{2E}{\rho g} \right)^{1/3}$, tindrem que $L_{crit} = c \cdot r^{2/3}$.
Per a una espècie determinada d'arbre (E i ρ iguals) C tindrà el mateix valor per a tots ells.
- o En conseqüència, la longitud o alçària crítica augmenta amb el radi com a $r^{2/3}$. És a dir, l'alçària crítica augmenta lentament amb r , ja que no depèn linealment de r .
- o Per tant, les magnituds crítiques de dos arbres de la mateixa espècie guarden la relació:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{c \cdot r_2^{2/3}}{c \cdot r_1^{2/3}} = \frac{r_2^{2/3}}{r_1^{2/3}} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2/3}$$

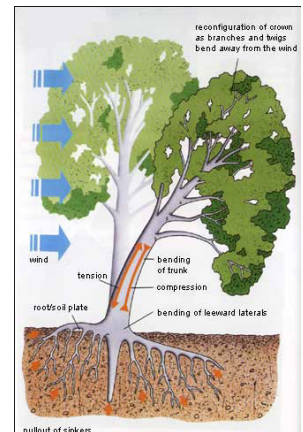
PROBLEMA

1a.18. Calcula quant canviarà l'alçària d'un arbre quan es duplica el seu radi.

• **Solució:**

- o Si $r_2 = 2 \cdot r_1$, aleshores $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2r_1}{r_1} = 2$

- o Per tant: $\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2/3} = 2^{2/3} = 1.59 \rightarrow L_2 = 1.59L$



- És a dir, quan un arbre duplica el seu radi, l'alçària no es duplica, sinó que es multiplica per un factor menor que 2 (en concret, per un factor 1.59). És a dir, en créixer l'arbre, es fa menys esvelt (augmenta més lentament l'alçària que el gros de l'arbre).

1.3.b Cisalla

- Un assaig de cisalla consisteix en un parell de forces aplicades tangencialment sobre un cos, tal com mostra la figura:

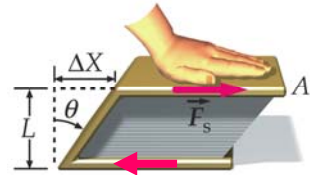


Figura 12.22, Tipler 5ª Ed

NOTA: forces tangencials significa paral·leles a les superfícies.

- L'esforç és la força per unitat d'àrea tangencial: $\tau = \frac{F}{A}$
- La deformació és la tangent de l'angle θ : $\epsilon = \tan \theta = \frac{\Delta X}{L}$
- La Llei de Hooke corresponent és: $\frac{F}{A} = G \tan \theta$

on G és el mòdul de cisalla:

- Si el material és homogeni i isòtrop, G es pot expressar com a: $G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$
- Si el material no és homogeni o isòtrop, cal determinar el valor de G experimentalment (com per exemple es fa en l'os).

PROBLEMA

1a.23. Quan el peu d'un corredor toca terra, la força de cisalla que actua sobre la sola, de 8 mm de gros, és la que s'indica en la figura. Si la força de 25 N es distribueix sobre una àrea de 15 cm², calcula (a) l'angle de cisalla, suposant que el mòdul de cisalla de la sola val 1.9×10⁵ N/m² i (b) quant es desplaça la sola en la superfície de contacte. **SOL:** (a) $\theta = 5^\circ$, (b) 0.7 mm.

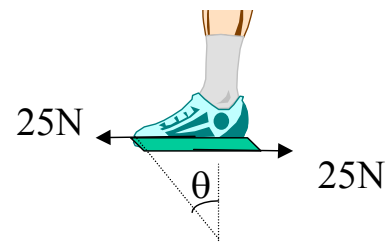


Figura 12.24, Tipler 5ª Ed

- Solució:

○ (a) L'esforç realitzat serà: $\tau = \frac{F}{A} = \frac{25}{15 \times 10^{-4}} = 16666 \text{ N/m}^2$; aplicant la Llei de Hooke:

$$\frac{F}{A} = G \tan \theta \rightarrow \tan \theta = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{1}{1.9 \times 10^5} \cdot 16666 = 0.0877 \text{ i, per tant, l'angle corresponent:}$$

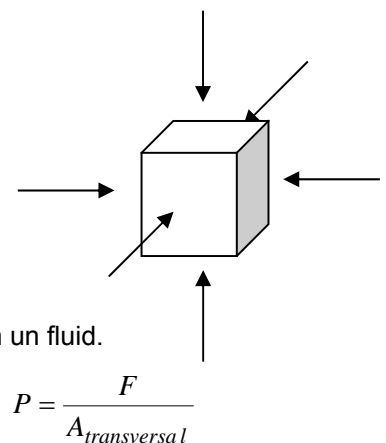
$$\theta = \tan^{-1}(0.0877) = 5.01^\circ$$

(b) El desplaçament de la sola serà:

$$\tan \theta = \frac{\Delta x}{L} \rightarrow \Delta x = L \cdot \tan \theta = 0.008 \cdot 0.0877 = 0.000702 \text{ m} \cong 0.7 \text{ mm}$$

1.3.c Compressió volumètrica

- Un assaig de compressió volumètrica consisteix en l'aplicació de forces perpendiculars a la superfície d'un cos en totes les direccions.
- Són les forces típiques que s'apliquen sobre un cos quan està submergit en un fluid.
- Les forces per unitat de superfície transversal constitueixen una pressió:



- Si un cos està sotmès prèviament a una pressió (com ara la pressió atmosfèrica o en el si d'un fluid), l'assaig de compressió consisteix en l'aplicació d'una diferència de pressió. Per tant, l'esforç és aquesta diferència de pressió (és a dir, la diferència de pressió entre la pressió final i la inicial)

$$\tau = P_f - P_i = \Delta P$$

- La deformació és la variació relativa de volum: $\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$

- La Llei de Hooke corresponent és: $\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V}$

on K és el coeficient de compressibilitat del cos.

- El signe menys indica que una compressió (augment de pressió, ΔP positiu) dona lloc a una reducció de volum (ΔV negatiu).

- Per a materials homogenis i isotrops: $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$

PROBLEMA

1a.25.- En un tub rígid d'1.2 m de longitud i 3.6 cm² de secció interior, s'introdueix aigua. Si s'aplica una força de 5 N mitjançant un èmbol que actua per un extrem del líquid, (a) quin canvi de volum experimentarà la columna líquida? (b) Quant canviarà la longitud de la columna líquida? DADA: $K = 2.16 \times 10^7$ N/m². **SOL:** 0.064 %, 0.77 mm.

- Solució:

- (a) La pressió aplicada serà: $P = \frac{F}{A} = \frac{5}{3.6 \times 10^{-4}} = 1.39 \times 10^4$ N/m² i considerant la Llei de Hooke:

$$\Delta P = -K \frac{\Delta V}{V} \rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} \Delta P = -\frac{1}{2.16 \times 10^7} 1.39 \times 10^4 = -6.43 \times 10^{-4} = -0.0643 \%$$

on el signe menys indica que hi ha hagut una reducció de volum (increment negatiu)

- (b) El volum interior del cilindre serà: $V = A \times L = 3.6 \times 10^{-4} \cdot 1.2 = 4.32 \times 10^{-4}$ m³ i la variació absoluta d'aquest volum serà:

$$\Delta V = -6.43 \times 10^{-4} \cdot V = -6.43 \times 10^{-4} \cdot 4.32 \times 10^{-4} = -2.78 \times 10^{-7} \text{ m}^3$$

Com que l'aigua està en un tub rígid, només canviarà la seua alçària quan es comprimeix, per tant: $V = A \times L \rightarrow \Delta V = A \times \Delta L$ i així

$$\Delta L = \frac{\Delta V}{A} = \frac{-2.78 \times 10^{-7}}{3.6 \times 10^{-4}} = -7.22 \times 10^{-4} \text{ m} = -0.77 \text{ mm}$$

CURIOSITATS: BIOMATERIALS (Cussó, capítol 16, apartat 5)

- Els éssers vius han desenvolupat al llarg de l'evolució una enorme varietat de materials. Per altra banda, l'home sintetitza químicament alguns materials anàlegs, imitant així a la natura.
- Segons la funció que compleixen en els organismes, es poden classificar en:
 - materials de tracció (seda, col·lagen, cel·lulosa, quitina...), (polietilens, niló, tefló...)
 - materials flexibles (resilina, abductina, elastina, mesoglea, cartílag),
 - materials rígids (cutícula, os, queratina, escames, xilema...).
- En la taula adjunta es mostren algunes propietats d'alguns d'aquests materials.

TAULA 1.3 Propietats mecàniques d'alguns biomaterials (Taula 16.6, Cussó)

| Material | Mòd. Young (N/m²) | Esf.màx. (N/m²) | Extensibilitat |
|-------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| Cabell humà | 5×10^8 | 6×10^8 | 140 % |
| Seda | $2-6 \times 10^9$ | 500×10^6 | 25 % |
| Tendó | 1×10^9 | 50×10^6 | 8 % |
| Cànem, lli | 5×10^{10} | 900×10^6 | 2 % |
| Quitina | 5×10^{10} | 900×10^6 | 2 % |
| Cartílag | 5×10^6 | 1×10^6 | 10 % |
| Conxa | $40-100 \times 10^9$ | 100×10^6 | |
| Fèmur-allargament | 1.6×10^{10} | 120×10^6 | |
| Fèmur-acurtament | 9×10^9 | 200×10^6 | |
| Fusta | $6-9 \times 10^9$ | $40-100 \times 10^6$ | |

WEB

- Capítol d'elasticitat amb problemes resolts en:
<http://bohr.inf.um.es/miembros/moo/p-ela.pdf>
- En aquestes pàgines teniu *applets* variats:
 - Experiència per mesurar el mòdul de Young:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/alargamiento/alargamiento.htm
 - Flexió d'una biga i vinclament (*pandeo*):
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/viga1/viga1.htm
 - Mesura del mòdul de cisalla:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/torsion/torsion.htm

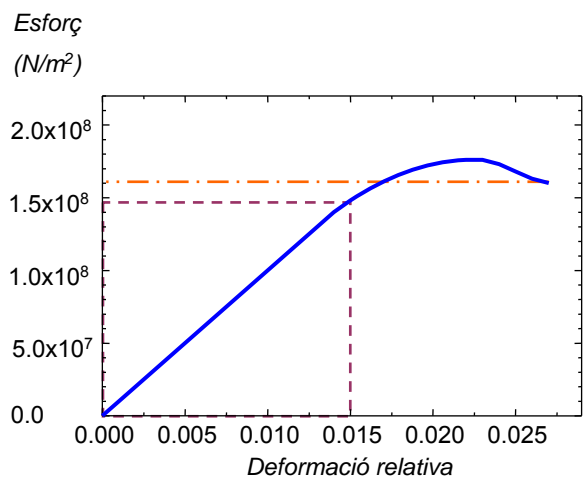
PROBLEMES DEL TEMA 1a: BIOMECÀNICA-ELASTICITAT

ESFORÇ I DEFORMACIÓ

- 1a.1. Sobre una barra de secció transversal 0.1 m^2 , s'aplica una força de tracció de 100 N . Quin és l'esforç aplicat? (Kane, prob.8.1) **SOL:** 1000 N/m^2
- 1a.2. Sobre una barra de 0.05 m^2 s'aplica un esforç de tracció de $2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, Quina és la força aplicada? (Kane, prob.8.2) **SOL:** 10^5 N .
- 1a.3. Un tub de 0.4 m de llarg canvia la seua longitud en -5 mm baix un assaig d'acurtament. Quina és la deformació del tub? (Kane, prob.8.3) **SOL:** $-0.0125 = -1.25\%$
- 1a.4. La deformació més gran de tracció que pot patir abans del trencament l'alumini és 0.003 (0.3%). Quina és la variació de longitud màxima d'un tub d' 1 m de llarg? (Kane, prob.8.4) **SOL:** $0.003 \text{ m} = 3 \text{ mm}$

TRACCIÓ I COMPRESSIÓ

- 1a.5. La gràfica adjunta presenta els resultats d'un assaig de tracció (allargament) sobre un fèmur humà. Determina el mòdul de Young i l'esforç de trencament del fèmur. **SOL:** $E = 10^{10} \text{ N/m}^2$, Esforç = $1.6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$.
- 1a.6. Es té una vareta feta d'os de 0.5 m de llarg i una secció d' 1 cm^2 . L'esforç màxim en un cert assaig de tracció és $1.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$. (a) Quina és la força que correspon a aquest esforç màxim? (b) Calcula quin és l'allargament absolut quan es realitza un esforç igual al màxim. (c) Quina és la variació relativa de la dimensió transversal (el radi) (d) i l'absoluta? DADA: $E_{\text{os-allargament}} = 1.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\sigma_{\text{os}} = 0.2$.
SOL: (a) 12000 N ; (b) $0.00375 \text{ m} = 3.75 \text{ mm}$; (c) $0.0015 = 0.15\%$; (d) $8.5 \times 10^{-6} \text{ m} = 8.5 \mu\text{m}$.



- 1a.7. Una cama humana es pot considerar com una barra d'os d' 1.2 m de llarg. Si la deformació quan cada cama suporta el seu pes és de 1.3×10^{-4} (0.013%), quant s'acurta cada cama? (Kane, prob.8.5) **SOL:** $1.56 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.156 \text{ mm}$.
- 1a.8. Es desconeix el mòdul de Young d'un cert tipus de cautxú. Si una barra de cautxú de 0.5 m de llarg i 10^{-3} m de radi s'allarga 0.1 m quan se li aplica una força de 140 N , (a) quant val el seu mòdul de Young? (b) Quina força és necessària per aconseguir el mateix allargament (0.1 m) en una barra del mateix cautxú, de la mateixa longitud (0.5 m), però de radi doble ($2 \times 10^{-3} \text{ m}$)? (Kane, prob.8.6) Per a la primera mostra, (c) quina és la variació relativa de la dimensió transversal (el radi) (d) i l'absoluta? Pren, $\sigma = 0.3$. **SOL:** (a) $2.23 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, (b) 560 N (Nota que per a mantenir l'esforç amb un radi doble, la força ha de ser 4 vegades més gran) (c) -6% , -0.06 mm .
- 1a.9. Un filferro d'acer de 10 m de longitud té un radi d' 1 mm . El seu límit lineal és $2.5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ i l'esforç màxim que pot suportar és $5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$. El filferro es fixa per un extrem i es realitza una tracció en l'altre extrem. (a) Si el filferro es troba en el seu límit lineal, quant val la força? (b) Quina és la màxima força de tracció corresponent a l'esforç màxim? (Kane, prob.8.8) **SOL:** (a) 785 N , (b) 1570 N .
- 1a.10. Es duu a terme una prova amb un cabell humà de radi $r = 0.035 \text{ mm}$ i aquest es trenca quan la massa que es penja d'ell arriba als 80 g . (a) Quin és l'esforç de trencament? (b) Si el seu mòdul de Young és $E = 5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ i suposem que està en la zona lineal, quin és l'allargament relatiu per a aquest esforç de trencament? (c) Quin és l'allargament absolut si és un cabell de 20 cm de llarg? (Cussó, prob. 16.1) **SOL:** (a) $2.04 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, (b) $0.407 \approx 41\%$, (c) 8.1 cm .
- 1a.11. Una aranya té una massa d' 1 g . (a) Sabent que l'allargament relatiu màxim de la seda és de 0.2 i que el seu mòdul de Young és de $5 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, estima el radi mínim del fil necessari per a sostenir el pes de l'aranya. Fes l'estimació considerant que la llei de Hooke es compleix fins a

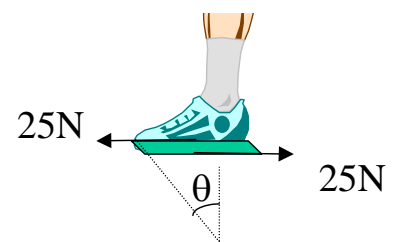
l'allargament màxim. (b) Les reserves de seda de l'aranya representen el 10% de la seua massa. Calcula la longitud màxima del fil que pot fabricar si la densitat de la seda és d'1.3 g/cm³ i el fil és cilíndric (Cussó, p. 808). **SOL:** (a) 1.77 μm; (b) 7.85 km.

FLEXIÓ

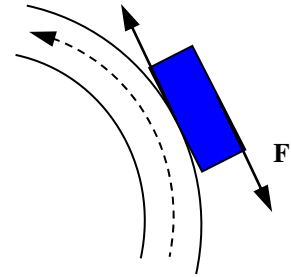
- 1a.12. Una barra de cautxú té 0.5 m de longitud i la seua secció quadrada té 0.005 m de costat. Quin és el moment d'inèrcia de la seua secció transversal? **SOL:** $5.21 \times 10^{-11} \text{ m}^4$.
- 1a.13. Una barra de cautxú té 0.5 m de longitud i la seua secció circular té 0.005 m de diàmetre. Quin és el moment d'inèrcia de la seua secció transversal? **SOL:** $3.07 \times 10^{-11} \text{ m}^4$.
- 1a.14. (a) Compara el moment d'inèrcia de la secció de dues barres, una de secció quadrada de costat a , i l'altra de secció circular de diàmetre a . (b) Quina s'oposa més a la flexió? **SOL:** (a) $I_A(\text{quadrada}) = a^4/12$; $I_A(\text{circular}) = \pi \cdot a^4/64$; $I_A(\text{quadrada}) = 1.7 \times I_A(\text{circular})$ (b) Com $I_A(\text{quadrada}) > I_A(\text{circular})$, la barra de secció quadrada es deforma menys, per tant, s'oposa més a la flexió.
- 1a.15. Una barra cilíndrica d'acer de 3 m de llarg té 0.01 m de radi. Si s'aplica una força de tal forma que es dobla elàsticament amb un radi de curvatura de 20 m. (a) Quina és la deformació? (b) Quin és el moment d'inèrcia de la seua secció? (c) Quin és el moment flexor degut a aquesta càrrega? (d) Quina és la força aplicada? DADA: $E_{\text{acer}} = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. **SOL:** (a) 0.05 m^{-1} , (b) $7.85 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, (c) 78.5 Nm, (d) 104.7 N.
- 1a.16. El tronc d'un arbre mort està buit, té 2 m de llarg i radis interior i exterior de 7 i 8 cm. (a) Quin és el moment d'inèrcia de la seua secció? (b) Si es fa servir de pont en un riu i passa una persona de 75 kg, quin és el moment flexor? (c) Quan es deforma, quina és la deformació? Quin serà el seu radi de curvatura? DADA: mòdul de Young de la fusta = 10^{10} N/m^2 , **SOL:** (a) $1.33 \times 10^{-5} \text{ m}^4$, (b) 367.5 Nm, (c) 0.00276 m^{-1} , 362 m.
- 1a.17. Compara les diferents deformacions per flexió (quan està de pla i quan està de cantell) per la post de fusta d'una llibreria de secció 2 cm x 20 cm i longitud 1 m, quan s'exerceix una força de flexió de 700 N (una persona adulta d'uns 70 kg que puja damunt d'ell) DADA: mòdul de Young de la fusta = 10^{10} N/m^2 . **SOL:** 7.6 m, 762 m (factor 100).
- 1a.18. Calcula quant canviarà l'alçària d'un arbre quan es duplica el seu radi. **SOL:** $L' = 1.59 L$.
- 1a.19. Utilitzant $L_{\text{crit}} = c \cdot r^{2/3}$, una certa espècie d'arbre té per a c el valor experimental $34.9 \text{ m}^{1/3}$. Troba l'alçària d'un arbre que té un tronc amb un radi de 0.125 m. (Kane, prob. 8.27) **SOL:** 8.73 m.
- 1a.20. Un espècimen d'arbre té un radi de 5 cm i una alçària de 5 m i està en el límit d'estabilitat respecte del vinclament. A quina alçària podrà arribar quan tinga un radi de 10 cm? **SOL:** 7.9 m (Nota que, augmentant el radi en un factor 2, l'alçària augmenta en un factor menor, en concret 1.59. És a dir, l'arbre adult és menys esvelt que el jove).
- 1a.21. En una altra galàxia, un planeta semblant a la Terra té una gravetat 10 vegades menor. Una determinada espècie d'arbre, que pot créixer en ambdós planetes, té una alçària crítica per a prevenir la flexió lateral que, en funció de la gravetat, s'expressa com a: $L_{\text{crit}} = 75 \left(\frac{1}{g} \right)^{1/3} r^{2/3}$.
Calcula a quina alçària arribarà en ambdós planetes un arbre que té un radi de 10 cm. Pren $g_{\text{Terra}} = 9.8 \text{ m/s}^2$. **SOL:** 7.6 m, 16.3 m. (Nota que, per al mateix radi, l'alçària és més del doble).
- 1a.22. Calcula el diàmetre que pot tenir una sequoia jove de 2 cm de radi i 2.4 m d'alt, quan arribe a la seua alçària màxima, que és d'uns 112 m. **SOL:** $r = 6.4 \text{ m}$, $D = 12.8 \text{ m}$.

CISALLA

- 1a.23. Quan el peu d'un corredor toca terra, la força de cisalla que actua sobre la sola, de 8 mm de gruix, és la que s'indica en la figura. Si la força de 25 N es distribueix sobre una àrea de 15 cm², calcula (a) l'angle de cisalla, suposant que el mòdul de cisalla de la sola val $1.9 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ i (b) quant es desplaça la sola en la superfície de contacte. **SOL:** (a) $\theta = 5^\circ$, (b) 0.7



- 1a.24. El bloc de fre d'una bicicleta té un mòdul de cisalla de 10^7 N/m². El bloc exerceix una força de 100 N (equivalent a uns 10 kg) sobre la vora de la roda. La superfície de contacte amb aquesta mesura 1 cm x 5 cm, i el bloc té 0.8 cm de gruix. (a) Quin és l'esforç de cisalla sobre el bloc? (b) Quina distància es desplaça la superfície de contacte? (Prob. 8.34, Kane) **SOL:** $2 \cdot 10^5$ N/m², 0.16 mm.



COMPRESSIÓ VOLUMÈTRICA

- 1a.25. En un tub rígid d'1.2 m de longitud i 3.6 cm² de secció interior, s'introdueix aigua. Si s'aplica una força de 5 N mitjançant un èmbol que actua per un extrem del líquid, (a) quin canvi de volum experimentarà la columna líquida? (b) Quant canviarà la longitud de la columna líquida? DADA: $K = 2.16 \times 10^7$ N/m². **SOL:** 0.064 %, 0.77 mm.
- 1a.26. L'augment aproximat de pressió en la mar, a 1000 m de fondària, és $\Delta P = \rho \cdot g \cdot h \approx 1000 \cdot 10 \cdot 1000 = 10^7$ N/m² (és una aproximació, ja que la densitat no és constant, sinó que augmenta amb la fondària). Calcula en % quina és la variació volumètrica que pateix un cos quan es troba a aquesta fondària. DADES: considera el cos uniforme i isòtrop, amb un mòdul de Young de $E = 30 \times 10^7$ N/m² (el d'un material biològic elàstic) i un coeficient de Poisson de 0.2. Nota que a aquesta fondària poden arribar les balenes i altres cetacis marins. **SOL:** $-0.06 = -6$ %.
- 1a.27. Un fluid disminueix un 1 % el seu volum quan el sotmetem a una pressió de 10^8 N/m². Quin és el seu mòdul de compressibilitat? **SOL:** 10^{10} N/m²

LLEIS D'ESCALA

- 1a.28 Una cuca americana gran té una pota de 2.8 mm i pesa 1 mg. Quant mesurarà la pota d'una altra més menuda que pesa 3 μg, si suposem que per als insectes s'acompleix la Llei d'Escala Simple? (Figura 6-6.13, Cussó). **SOL:** 0.4 mm.
- 1a.29 El fèmur d'un talp de les praderes (Microtus) fa 5 cm de llarg i pesa 0.05 g. Quant pesarà el d'un elefant que té una longitud igual a 1 m? Cal tenir en compte que la relació entre la massa i la longitud en els ossos de l'esquelet segueix la Llei d'escala modificada. Aquests valors són aproximats, vegeu Figura 6-6.23, Cussó. **SOL:** 8 kg.
- 1a.30 Els animals marins estan en condicions semblants a la ingravidesa a causa de l'empenyiment d'Arquimedes, per la qual cosa se'ls aplica la Llei d'escala simple. Un calamar jove fa 10 cm de llarg i el seu cos té un radi mitjà de 2 cm. Si en una certa etapa del seu creixement arriba als 30 cm de llarg, (a) Quin és el factor d'escala de la longitud? (b) Quin és el factor d'escala del radi?
- 1a.31 Utilitzant la Llei d'escala modificada: Un elefant jove té una alçada d'1 m i el radi d'una de les seues potes fa 5 cm. Si en una certa etapa del seu creixement arriba als 3 m d'alçada, (a) quin és el factor d'escala de l'alçada?, (b) quin és el factor d'escala del radi (dimensió transversal)? Compara els factors multiplicadors de la dimensió longitudinal i la transversal en ambdós casos. **SOL:** 3, 3; 3, 5.2.

TEMA 1-b: BIOMECÀNICA – FLUIDS

1.5. Pressió hidroestàtica

- S'anomena pressió hidroestàtica a la força per unitat d'àrea transversal que exerceix un fluid: $P = \frac{F}{A}$. Les unitats de la pressió en el SI són: $N/m^2 = Pa$ (pascal).
- En determinats entorns se solen utilitzar altres unitats de pressió. La taula mostra la seua relació amb la unitat del SI.

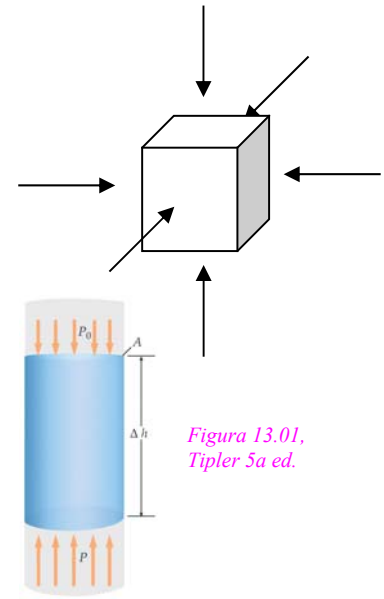


Figura 13.01, Tipler 5a ed.

TAULA 1.3: Unitats de pressió

| Unitat | Unitat del SI | altres |
|-------------|--------------------------|-------------|
| 1 bar | = $10^5 Pa$ | |
| 1 atmosfera | = $1.013 \times 10^5 Pa$ | = 1.013 bar |
| 760 mmHg | = $1.013 \times 10^5 Pa$ | = 1.013 bar |
| 1 mmHg | = 133.3 Pa | = 1 Torr |

- En un fluid de densitat ρ , la diferència de pressió entre dos punts separats una distància Δh és el pes de la columna fluida entre els dos punts i ve donada per: $\Delta P = \rho g \Delta h$
- És a dir, la pressió en punts inferiors d'un fluid és major que en punts d'una zona superior (el fluid de la zona superior "pesa").
- En conseqüència, la pressió P en un punt, respecte d'un altre a una distància Δh i a pressió P_0 , ve donada per $P = P_0 + \Delta P = P_0 + \rho g \Delta h$, on Δh serà positiu per a punts inferiors i negatiu per a punts superiors.

PROBLEMA

1b.1- Calcula com canvia la pressió en l'aigua per cada metre de fondària. Suposa la densitat constant ($\rho_{aigua} = 1000 \text{ kg/m}^3$) i arrodoneix per donar una aproximació senzilla i pràctica del valor obtingut ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$, $1.013 \times 10^5 Pa \approx 10^5 Pa \approx 1 \text{ bar} \approx 1 \text{ atm}$).

• Solució:

- Per cada metre de fondària, la pressió variarà:

$$\Delta P = \rho g \Delta h = 1000 \cdot 10 \cdot 1 = 10000 \text{ Pa} = 0.1 \text{ bar} \cong 0.1 \text{ atm}$$

on hem arrodonit el valor de g a 10 m/s^2 i hem considerat $1 \text{ bar} \cong 1 \text{ atm}$.

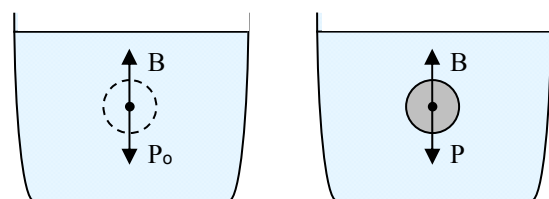
- Per tant, a 1 m de fondària respecte de la superfície:

$$P_{1m} = P_0 + \Delta P = 1 \text{ atm} + 0.1 \text{ atm} = 1.1 \text{ atm} \cong 1.1 \text{ bar}$$

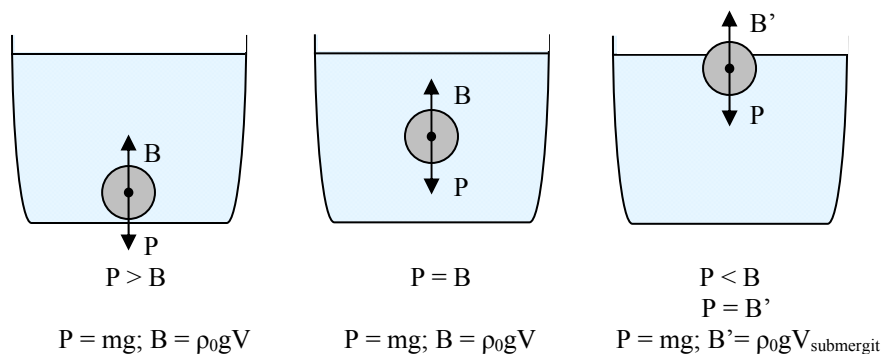
- És a dir, per cada metre de fondària que ens submergim augmenta en 0.1 bars la pressió de la superfície, que és igual a la pressió atmosfèrica. És evident que als 10 m de fondària tindrem $1 + 1 = 2 \text{ bars} \approx 2 \text{ atm}$.

1.5.1 Principi d'Arquimedes

- Considerem un fluid de densitat ρ_0 i una esfera imaginària de volum V i pes $P_0 = \rho_0 g V$. Si el fluid està en repòs, aquesta esfera estarà en equilibri.



- Si està en equilibri, la suma de les forces que actuen sobre ella és zero. Per tant, la força pes P_0 (de dalt cap a baix) està compensada per altra força B en sentit contrari (de baix cap a dalt).
- Aquesta força ascensional s'anomena "empenyiment" i és simplement la pressió exercida per la resta del fluid per a mantenir en repòs la porció de fluid considerada.
- Si ara considerem una esfera d'un material amb el mateix volum però de densitat ρ , el pes de l'esfera serà ara $P = mg = \rho gV$.
- El fluid que rodeja l'esfera no distingeix entre aquesta situació i l'anterior. Per tant, l'empenyiment segueix essent el mateix $B = \rho_0 gV$, és a dir, el pes del volum de fluid desallotjat.
- Depenent del pes P del cos, el volum del líquid desallotjat no sempre és el mateix:
 - Si $P > B$, el cos s'enfonsa, coincidint el volum desallotjat amb el volum del cos.
 - Si $P = B$, el cos es queda "entre dues aigües", el volum desallotjat també és el del cos.



- Si $P < B$, el cos és espentat a la superfície i sura. Quan sura, el volum del líquid desallotjat no coincideix amb el volum del cos, sinó amb la part submergida (volum submergit).

- Determinació del volum submergit d'un cos que sura

- Suposem un cos de densitat ρ i volum V , que sura en un líquid de densitat ρ_0 . Es pot calcular el volum submergit V_{subm} considerant que hi ha equilibri entre la força pes i l'empenyiment B' , essent B' el pes del volum de líquid desallotjat en aquestes condicions, és a dir, el pes del volum de líquid submergit.

$$P = B' \rightarrow \rho gV = \rho_0 gV_{\text{subm}}$$

$$\frac{V_{\text{subm}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

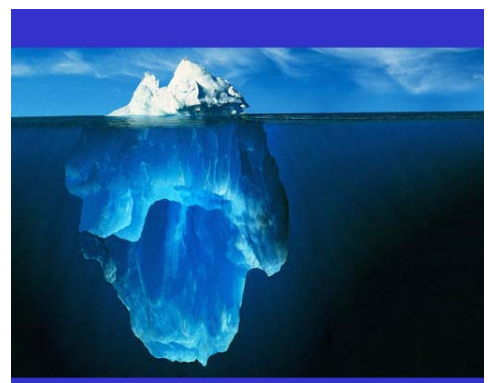
PROBLEMA

- 1b.5. Si la densitat de l'aigua del mar és 1025 kg/m^3 i la del gel 920 kg/m^3 , determina quina fracció del volum total d'un iceberg és visible per damunt del nivell de l'oceà.

- Solució:

- La fracció de volum submergit serà: $\frac{V_{\text{subm}}}{V} = \frac{\rho_{\text{gel}}}{\rho_0} = \frac{920}{1025} = 0.90 = 90\%$

- És a dir, els icebergs, tenen el 90% del seu volum submergit, mostrant a l'exterior tan sols el 10% (vegeu exemple numèric de la p. 635 del Cussó i figura adjunta).



Curiositat: per què sura el gel?

- L'aigua té una propietat inusual: la seua forma sòlida, el gel, és menys densa que la líquida. Per aquest motiu el gel sura sobre l'aigua, mentre que un cub d'alcohol congelat (amb una temperatura de congelació de $-113.8\text{ }^{\circ}\text{C}$) cau al fons d'un recipient amb alcohol líquid. Una conseqüència d'aquesta característica és que el volum d'una massa de gel és major que el corresponent per a la mateixa massa en estat líquid. És aquesta característica la que fa que en un got ple d'aigua amb un cub de gel no vesse quan el gel es fon. En relació amb el canvi climàtic, aquesta característica explica que el desglaç en l'Àrtic **NO** afectaria la pujada del nivell del mar, ja que el gel provindria de la capa superficial de l'aigua marina congelada. Per contra, el desglaç en l'Antàrtic **SÍ** que podria afectar greument la pujada del nivell del mar, ja que aquest gel està sobre la plataforma continental i seria una massa d'aigua que s'afegiria a l'aigua marina, amb l'inconvenient addicional del canvi de salinitat.

PROBLEMA

1b.6. Una massa m d'aigua ocupa diferents volums, segons l'estat en el qual estiga. Compara: (a) el volum d'aquesta massa d'aigua quan està en forma de líquid ($\rho_{\text{aigua}} = 1000\text{ kg/m}^3$); (b) el mateix, quan està en forma de gel ($\rho_{\text{gel}} = 920\text{ kg/m}^3$); (c) el volum submergit de la massa d'aigua en forma de gel, quan sura en aigua; (d) comprova que els volums dels apartats (b) i (c) són iguals.

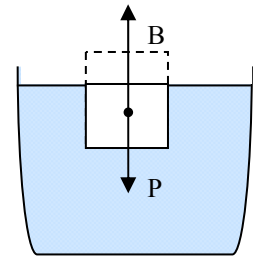
• Solució:

○ (a) Volum d'una massa m d'aigua en forma de líquid: $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$

○ (b) Volum d'una massa m d'aigua en forma de gel: $V_{\text{gel}} = \frac{m}{\rho_{\text{gel}}}$

○ (c) Volum submergit: $\frac{V_{\text{subm}}}{V_{\text{gel}}} = \frac{\rho_{\text{gel}}}{\rho_0} = \frac{920}{1000} = 0.92 = 92\%$

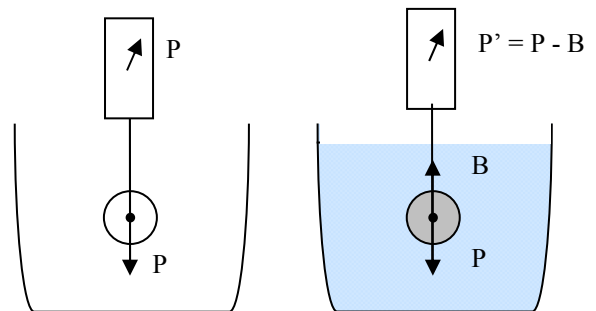
○ (d) Dividint (a) per (b): $\frac{V_0}{V_{\text{gel}}} = \frac{\rho_{\text{gel}}}{\rho_0}$; comparant amb (c): $V_{\text{subm}} = V_0$, és a dir, el volum submergit del cub de gel és igual a tot el volum de l'aigua en què es converteix.



• Determinació del volum d'un cos totalment submergit (densitat ρ desconeguda, però $\rho > \rho_0$)

○ Per a un cos totalment submergit, amb $\rho > \rho_0$, es pot determinar el seu volum pesant el cos fora (P) i dins de l'aigua (P' , pes aparent).

- com $P' = P - B \rightarrow B = P - P'$
- per altra part, $B = \rho_0 g V$
- en conseqüència, tindrem $V = \frac{P - P'}{\rho_0 g}$
- vegeu el problema de la corona.

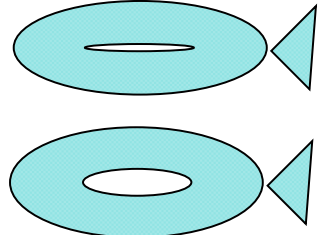


CURIOSITAT: per què els taurons han d'estar nadant contínuament?

- Els peixos tenen una densitat mitjana del seu cos ($\rho_{\text{peix}} \cong 1050\text{ kg/m}^3$) més gran que la de l'aigua del mar ($\rho_{\text{mar}} \cong 1025\text{ kg/m}^3$). Els peixos dotats de bufeta natatòria modifiquen el volum del seu cos, inflant o desinflant la bufeta, de tal manera que adquireixen una densitat aparent que és igual a la de l'aigua del mar ($\rho_{\text{aparent}} \cong \rho_{\text{mar}}$). Així aconseguixen que el seu pes siga igual a l'empenyiment i que la seua flotabilitat siga neutra (vegeu exemple de la p. 638 del Cussó i problema del butlletí). No passa el mateix amb els taurons, que com que no tenen la bufeta natatòria es veuen obligats a estar nadant contínuament per a no caure al fons.

PROBLEMA

1b.9. Perquè un peix mantinga una flotabilitat neutra, la seua densitat aparent ha de ser igual a la del líquid que el rodeja. Els peixos poden modificar la seua densitat real ($\rho = m / V$) mitjançant la bufeta natatòria, i arribar a una densitat aparent ($\rho_{ap} = \frac{m}{V + V_{bufeta}}$) menor que la seua densitat real. (a) Una anguila nada en aigua dolça ($\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$) i la seua densitat, sense comptar la bufeta natatòria, és de $\rho = 1.07 \text{ g/cm}^3$. Quina fracció del volum de l'anguila ocupa la bufeta natatòria (V_{bufeta} / V)? (b) L'anguila migra a l'oceà, on la densitat de l'aigua salada és $\rho_{mar} = 1.026 \text{ g/cm}^3$. Quina fracció del volum de l'anguila representa ara la bufeta natatòria?
SOL: (a) 7%; (b) 4.3%.



• Solució:

o La densitat aparent de l'anguila és:

$$\rho_{ap} = \frac{m}{V + V_{bufeta}}$$

o Si dividim numerador i denominador per V:

$$\rho_{ap} = \frac{m / V}{1 + V_{bufeta} / V}$$

o Operant:

$$\rho_{ap} = \frac{\rho}{1 + V_{bufeta} / V}$$

$$1 + \frac{V_{bufeta}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{ap}} \quad \frac{V_{bufeta}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{ap}} - 1$$

o Quan

$$\rho_{ap} = \rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3 \rightarrow \frac{V_{bufeta}}{V} = \frac{1070}{1000} - 1 = 0.07 = 7\%$$

o Quan

$$\rho_{ap} = \rho_{mar} = 1026 \text{ kg/m}^3 \rightarrow \frac{V_{bufeta}}{V} = \frac{1070}{1026} - 1 = 0.043 = 4.3\%$$

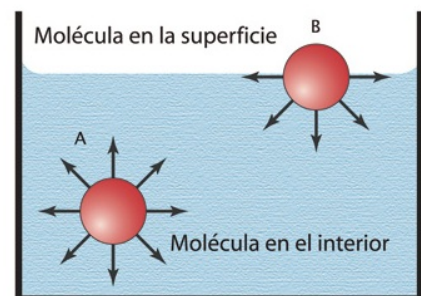
• Podeu llegir una breu descripció de com Arquimedes va descobrir el principi que porta el seu nom en: <http://www.ciencianet.com/eureka.html>

1.5.2 Forces de cohesió en líquids

- Les forces d'atracció entre àtoms i molècules són responsables de la rigidesa d'un sòlid, que només es trenca quan es fa una força molt gran (esforç de trencament).
- Els líquids també tenen una tendència a mantenir-se cohesionats. Es pot comprovar en intentar separar dues làmines de vidre unides per una capa d'aigua.
- Les forces responsables de la cohesió en líquids, igual que en els sòlids, són les forces d'atracció entre els àtoms i molècules, només que en els líquids la unió entre molècules no és rígida i poden girar entre elles, adaptant-se la forma del líquid al recipient que el conté.
- En contacte amb un sòlid, apareixen forces d'interacció amb el material del sòlid, que poden ser atractives o repulsives. Per tant, hi ha una competició entre forces líquid-líquid i líquid-sòlid.

1.5.3 Tensió superficial

- Les forces de cohesió en l'interior del líquid es compensen perquè es donen en totes direccions. En canvi, en la superfície es compensen parcialment i són tangencials, creant una superfície que equival a una membrana elàstica que manté les molècules en l'interior.
- Aquestes forces tangencials reben el nom de **tensió superficial** i són responsables del fet que la superfície d'un líquid tendisca a ser mínima i amb una forma definida.

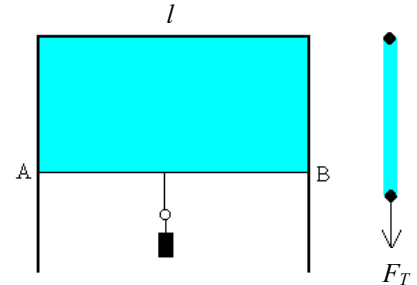


<https://neetescola.org/propiedades-de-los-liquidos/>

- En la NATURA la tensió superficial, entre altres coses, té molta importància per a animals menuts que es mouen per l'aigua, ja que trauen profit del comportament de la superfície líquida com una membrana elàstica.
- Per a quantificar aquesta força tangencial, considerem el dispositiu de la figura, format per un fil d'aram en forma de U amb longitud l , que forma un rectangle mitjançant un fil rígid i mòbil de la mateixa longitud l .
- Si dins del rectangle hi ha una làmina líquida (amb dues superfícies lliures) i pengem un pes del costat mòbil, la làmina líquida s'estendrà fins a arribar a l'equilibri.
- La tensió superficial γ es defineix com la força per unitat de longitud transversal exercida per cada una de les superfícies



<https://definicion.de/tension-superficial/>



<http://www.sc.edu/sbweb/fisica/fluidos/tension/introduccion/introduccion.htm>

$$\gamma = \frac{F}{l} \quad (\text{unitats: N/m})$$

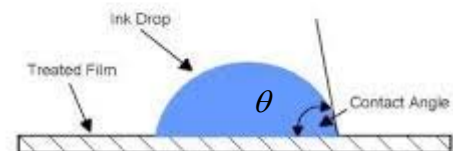
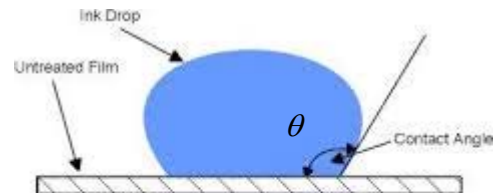
- Per tant, la força neta exercida per les dues superfícies serà: $F_T = 2F = 2\gamma l$ i γ es pot determinar de manera experimental com $\gamma = F_T / 2l$.
- És important destacar que la tensió superficial no depèn del gruix de la làmina líquida.
- La tensió superficial depèn de la natura del líquid, del gas que l'envolta i de la temperatura. En general, la tensió superficial disminueix amb la temperatura, ja que les forces de cohesió disminueixen en augmentar l'agitació tèrmica.

| Líquid (T=20 °C) | γ (N/m) |
|------------------|-----------------------|
| Aigua | 7.28×10^{-2} |
| Alcohol etílic | 2.23×10^{-2} |
| Bencé | 2.90×10^{-2} |
| Glicerina | 6.31×10^{-2} |
| Mercuri | 46.5×10^{-2} |
| Oli d'oliva | 3.20×10^{-2} |
| Petroli | 26.0×10^{-2} |

TAULA 1.4: Tensió superficial d'alguns líquids representatius, en contacte amb l'aire (Taula 15.1, Kane).

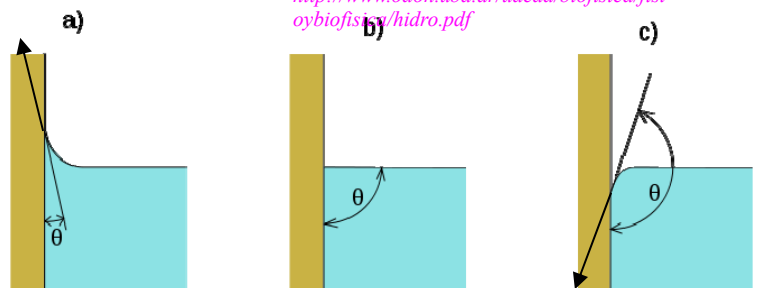
1.5.4 Angle de contacte i capil·laritat

- La tangent a la superfície lliure d'un líquid en contacte amb una superfície sòlida forma un angle respecte de la superfície anomenat angle de contacte θ .
- Aquest angle depèn de si dominen les forces de cohesió del líquid ($\theta > 90^\circ$), o les d'adhesió al sòlid ($\theta < 90^\circ$). En el primer cas es diu que el líquid "no mulla" la superfície sòlida i en el segon cas es diu que "mulla".
- La figura adjunta mostra com són les gotes d'un líquid sobre una superfície sòlida en funció d'aquest l'angle de contacte líquid – sòlid.



<http://www.odon.uba.ar/uacad/biofisica/fisiobiofisica/hidro.pdf>

- Quan el líquid està en contacte amb una paret vertical, aquest efecte es manifesta en el fet que, quan el líquid mulla ($\theta < 90^\circ$) aleshores puja per la paret, mentre que si no mulla ($\theta > 90^\circ$), baixa per la paret. En el cas que $\theta = 0$, el líquid ni puja ni baixa.

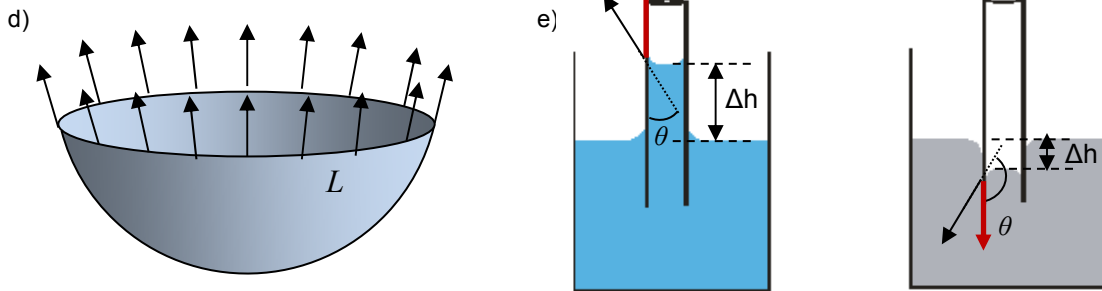


<https://es.wikipedia.org/wiki/Capilaridad>

TAULA 1.5: Angles de contacte per diverses superfícies de separació líquid - sòlid (Taula 15.2, Kane)

| Superfície de separació | Angle de contacte |
|-------------------------|-------------------|
| Aigua - vidre | 0° |
| Alcohol etílic - vidre | 0° |
| Iodur de metilè - vidre | 30° |
| Aigua - plata | 90° |
| Mercuri - vidre | 140° |

- Si el líquid està dins d'un tub prou prim (capil·lar), l'efecte de les parets se suma, donant lloc al que s'anomena *menisc* (superfície en forma de casquet esfèric, figura d). Per a $\theta < 90^\circ$, el menisc és còncav i el nivell del líquid puja pel tub (figures d, e), cas del contacte aigua-vidre. Per a $\theta > 90^\circ$, el menisc és convex i el nivell del líquid baixa (figura f), cas del contacte mercuri-vidre.



- Les forces que actuen prop de la paret són el pes de la columna líquida i les forces degudes a la tensió superficial. Actuen fins que s'arriba a un equilibri.
- En l'equilibri, els components horitzontals les forces degudes a la tensió superficial es compensen. La força pes sempre està dirigida cap avall. Els components verticals de les forces degudes a la tensió superficial depenen del valor de $\cos\theta$, estant dirigits cap amunt quan $\theta < 90^\circ$ o cap avall quan $\theta > 90^\circ$ (fletxa roja en les figures).
- Per a un tub cilíndric de radi r , el balanç és el següent:

pes de la columna líquida:

(r és el radi del tub i Δh l'altura a la qual arriba el líquid, amb signe)

força deguda a la tensió superficial:

(L és el perímetre del cercle del menisc sobre el qual actua la tensió superficial)

en l'equilibri:

$$F_p = \rho g V = \rho g \pi r^2 \Delta h$$

$$F_\gamma = \gamma L \cos \theta = \gamma 2 \pi r \cos \theta$$

$$\rho g \pi r^2 \Delta h = \gamma 2 \pi r \cos \theta ;$$

- Obtenim així l'altura Δh a la qual arriba el líquid, coneguda com a Llei de Jurin:
$$\Delta h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

- Per a $\theta < 90^\circ$, el $\cos\theta$ és positiu, Δh és positiu i el nivell puja. Per a $\theta > 90^\circ$, el $\cos\theta$ és negatiu, Δh és negatiu i el nivell baixa.

- En la NATURA, el fenomen de capil·laritat és el responsable que un líquid, per exemple l'aigua, pugui pujar, en lloc de baixar, a través de materials porosos, permetent l'arribada del líquid en contra de la gravetat, com és el cas de terres poroses, arrels, esponges...

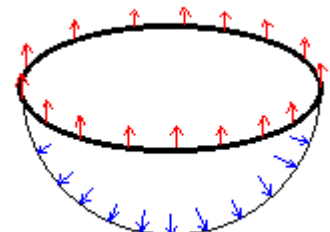


<http://blacks-guarnizo.blogspot.com/2010/09/definicion-de-capilaridad.html>
<https://educaconbigbang.com/>

1.5.5 Llei de Laplace

- La llei de Laplace relaciona la diferència de pressió a ambdós costats d'una membrana elàstica corbada en funció del radi de curvatura i la tensió superficial del líquid. Moltes superfícies líquides, com la de les gotes i les bombolles segueixen la Llei de Laplace.

<http://www.sc.edu/es/bweb/fisica/fluidos/tension/laplace/laplace.htm>

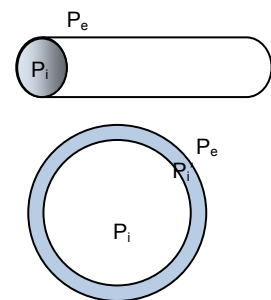


- Per obtenir aquesta llei, suposem la meitat d'una superfície esfèrica de radi r com la de la figura.
- Les forces que actuen són:
 - En **roig**, força deguda a la tensió superficial γ , dirigida cap amunt i que actua sobre la circumferència de la base circular: $F_\gamma = \gamma 2\pi r$.
 - En **blau**, força deguda a la diferència de pressió entre l'interior i l'exterior ($P_i > P_e$), dirigida perpendicularment a la superfície esfèrica. Els components horitzontals es compensen entre ells i la suma dels components verticals s'obté considerant la projecció de la superfície esfèrica sobre la base horitzontal, donant una resultant dirigida cap avall: $F_p = (P_i - P_e) \pi r^2$.
- En l'equilibri les forces s'igualen, i s'obté: $(P_i - P_e) = \frac{2\gamma}{r}$, expressió coneguda com a Llei de Laplace.
- La llei de Laplace indica que la diferència de pressió entre l'interior i l'exterior es fa més gran a mesura que el radi de la superfície esfèrica es fa més menut.
- En el cas d'una gota d'aigua de radi r , només hi ha una superfície líquida i la diferència de pressió entre l'interior de la gota (líquid) i l'exterior (aire) és: $(P_i - P_e) = \frac{2\gamma}{r}$.
- En el cas d'un cilindre líquid de radi r , com $F_\gamma = \gamma 2L$ i $F_p = (P_i - P_e) 2r \cdot L$, aleshores $(P_i - P_e) = \frac{\gamma}{r}$. Es dona en vasos sanguinis (pressió transmural), xilema de les plantes...
- En el cas d'una bombolla de radi r , com que hi ha dues superfícies líquides (aproximadament amb el mateix radi) i una pressió intermèdia P_i' , sumant les diferències de pressió,

$$(P_i' - P_e) = \frac{2\gamma}{r} \quad (P_i - P_i') = \frac{2\gamma}{r} \quad \rightarrow \quad (P_i - P_e) = \frac{4\gamma}{r}$$
- En la NATURA, el fet que per a gotes amb radis menuts la diferència de pressió haja de ser molt gran, té importants conseqüències en fenòmens d'ebullició de líquids i condensació de gasos. La formació de gotes o bombolles molt menudes exigeix molta energia, per la qual cosa apareixen estats metaestables de vapor sobresaturat i de líquid sobreescalfat (vegeu Cussó, capítol 11).



<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/tension/laplace/laplace.htm>



1.5.6 Tensioactius o surfactants

- Un agent tensioactiu o surfactant (de l'anglès, *surface active agent*) és aquell que, afegit a un líquid, modifica la seua tensió superficial. Un agent humectant redueix l'angle de contacte, com és el cas dels detergents i sabons. Un agent impermeabilitzant augmenta l'angle de contacte, impeding que el líquid mulle la superfície sòlida.
- En fisiologia, per exemple, tenen un paper important en els alvèols pulmonars, formats per saquets de diferent radi. Sense tensioactius, no existirien saquets de radi menut (formats en l'inspiració), ja que la gran diferència de pressió faria que desaparegueren, absorbits pels de radi més gran, amb la qual cosa els pulmons es col·lapsarien. La natura resol el problema mitjançant una lipoproteïna, formada per molècules llargues alineades una al costat de l'altra. Així, la tensió superficial dels alvèols disminueix quan els alvèols són menuts, impeding el col·lapse i augmenta quan els alvèols s'inflen (aspiració), evitant que exploten.

1.6. Fluids ideals en moviment

- Un fluid ideal en moviment es descriu mitjançant:
 - Línia de corrent: és la línia tangent al vector velocitat del moviment d'una partícula de fluid.
 - Tub de corrent: és el conjunt de línies de corrent que passen per un contorn tancat.

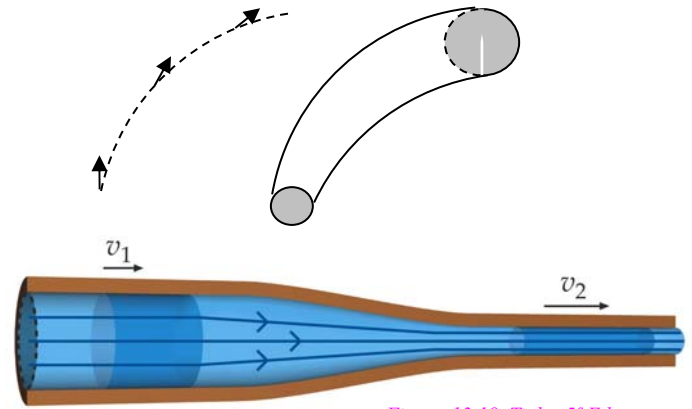


Figura 13.18 Tipler 5ª Ed

Equació de continuïtat:

- Siga un tub de corrent amb àrees de la secció A_1, A_2 i velocitats v_1, v_2 .
- La massa de fluid que passa pels punts 1 i 2 en un interval de temps Δt és:

$$m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t \quad m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

- Depenent de si $P_1 > P_2$ o $P_1 < P_2$, el fluid anirà a la dreta o a l'esquerra.
- De la definició de tub de corrent es desprèn que $m_1 = m_2$. Si suposem que la densitat no canvia d'un punt a un altre (cosa que es coneix com a fluid incompressible: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$), tindrem:

$$\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

- El producte $A v$ s'anomena cabal (Q) i és el volum de fluid que passa per una secció en la unitat de temps. Les seues unitats en el SI són el m^3/s :

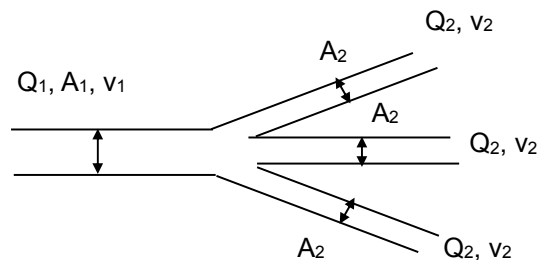
$$Q = A v = A \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

- En un tub sense bifurcacions, els punts 1 i 2 poden estar en qualsevol lloc. Açò implica que el cabal és constant al llarg de la conducció, per tant:

$$Q = A v = cte \quad (\text{equació de continuïtat})$$

PROBLEMA

1b.14. Per una conducció de 2 cm^2 flueix un fluid amb un cabal de $100 \text{ cm}^3/s$. Aquesta conducció es bifurca en tres ramals iguals, cada un d'ells amb secció 1 cm^2 . Determineu la velocitat del fluid (a) en la conducció, (b) en cada un dels ramals (considereu que el cabal es reparteix per igual entre els tres ramals)
SOL: 0.5 m/s , 0.33 m/s .



• Solució:

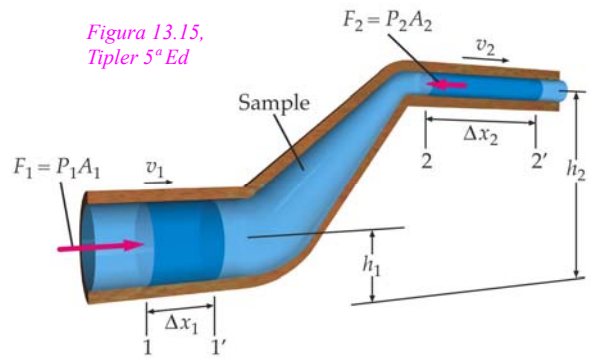
- (a) En la conducció principal: $Q_1 = A_1 v_1$, per tant $v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{100 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-4}} = 0.05 \text{ m/s}$
- (b) El cabal per cada un dels ramals iguals serà:

$$Q_2 = \frac{Q_1}{N} = \frac{100}{3} = 33.3 \text{ cm}^3 = 3.33 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\text{En cada un: } Q_2 = A_2 v_2, \text{ per tant: } v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{3.33 \times 10^{-5}}{10^{-6}} = 0.33 \text{ m/s}$$

- **OBSERVEU** que, encara que la secció de cada ramal és menor que la de la conducció principal, la velocitat del fluid és menor. Açò és degut al fet que l'àrea efectiva, que és la total, és major.

Figura 13.15,
Tipler 5ª Ed



1.6.1. Equació de Bernoulli

- Condicions d'aplicació de l'equació de Bernoulli:

- Fluid incompressible (ρ constant).
- Fluid ideal (sense pèrdues per fricció).
- Fluid estacionari (en cada punt, la velocitat v es manté constant amb el temps).

- Siga un tub de corrent com el de la figura, amb extrems 1 i 2.
- Durant un temps Δt el fluid ha recorregut entre 1-1' una distància Δx_1 i entre 2-2' una distància Δx_2 .
- Segons l'equació de continuïtat, el cabal en 1 i en 2 és el mateix. Anomenarem el volum de fluid que passa per ambdues seccions V .
- La magnitud que espenta al fluid és la diferència de pressió entre 1 i 2. Observeu que, segons siga $P_1 > P_2$ o $P_1 < P_2$, el fluid pujarà o baixarà. En el que segueix suposarem $P_1 > P_2$.

- El treball fet en 1 serà: $W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 V$

- El treball fet en 2 serà: $W_2 = F_2 \Delta x_2 = P_2 A_2 \Delta x_2 = P_2 V$

- Per tant el treball net serà $W = (P_1 - P_2)V$ (suposant $P_1 > P_2$)

- Aquest treball es consumeix en:

- a) l'augment de l'energia potencial de la massa de fluid de volum V :

$$\Delta E_P = E_{P2} - E_{P1} = m_2 g h_2 - m_1 g h_1 = \rho V g h_2 - \rho V g h_1 = \rho V g (h_2 - h_1)$$

- b) l'augment de l'energia cinètica de la massa de fluid de volum V :

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \rho V (v_2^2 - v_1^2)$$

- Per tant, aplicant el principi de conservació de l'energia:

$$(P_1 - P_2)V = \rho V g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho V (v_2^2 - v_1^2)$$

- simplificant el volum i reordenant els termes, obtenim:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

De forma genèrica: $P + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = cte$ (equació de Bernoulli)

- Observeu que cada membre de l'equació té dimensions de pressió. Per tant, aquesta equació s'interpreta com que la suma de la pressió hidroestàtica, la pressió deguda a l'altura i la pressió deguda a la velocitat, es mantenen constants en tots els punts d'un fluid ideal.

1.6.2 Aplicacions

- Aplicació 1: fluid en repòs

- Si apliquem l'equació de Bernoulli a un fluid en repòs ($v = 0$) en dos punts, un en la superfície ($h = \Delta h$) i un altre en el fons ($h = 0$) (punts 1, 2, 3...), obtindrem:

$$P_{fons} = P_{sup\ erficie} + \rho g \Delta h \rightarrow \Delta P = \rho g \Delta h$$

- Veiem que obtenim, altra vegada, l'expressió que proporciona la diferència de pressió entre dos punts separats una altura Δh .



Figura 13.05, Tipler 5ª Ed

• Aplicació 2: Manòmetre de tub obert

- Un manòmetre de tub obert és un tub en forma de U que s'utilitza per mesurar la pressió d'un gas.
- Conté un líquid amb característiques que depenen de la pressió que es mesurarà, però amb una densitat ρ coneguda. En funció de la pressió que es vol mesurar (gran o menuda), es tria mercuri, aigua o oli. En la figura el líquid apareix en blau.
- Un extrem del tub està obert a l'atmosfera (P_{at}) i l'altre està en contacte amb el gas la pressió del qual es vol mesurar (P).
- Aquest manòmetre també es pot utilitzar per a mesurar pressions de líquids, sempre que el líquid problema i el líquid manomètric no es barregen. En el cas de cànules per a mesurar la pressió sanguínia, s'utilitza una solució salina amb un agent anticoagulant entre el fluid manomètric i l'artèria.
- La **pressió absoluta** a la qual està el fluid s'obté aïllant el valor de P :

$$P + \rho g h_1 = P_{at} + \rho g h_2 ; \quad P = P_{at} + \rho g (h_2 - h_1) = P_{at} + \rho g h$$

- La **diferència** de pressió entre el punt considerat i la pressió en l'exterior s'anomena **pressió manomètrica** ($\Delta P = P - P_{at}$) i depèn de la diferència d'altura del líquid: $\Delta P = P - P_{at} = \rho g h$.

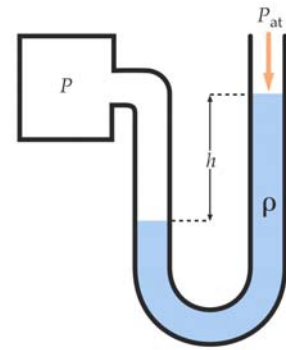


Figura 13.06, Tipler 5ª Ed

• Aplicació 3: Efecte Venturi

- Siga un tub amb un estrenyiment, com el de la figura.
- Si apliquem l'equació de Bernoulli als punts 1 i 2 en l'eix de la zona ampla i estreta, respectivament:

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

- Com que l'altura és la mateixa en els punts 1 i 2, els termes de la pressió deguda a l'altura se simplifiquen:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

- Per altra part, a partir de l'equació de continuïtat: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$
- Observeu que, si $A_1 > A_2$, aleshores $v_1 < v_2$. És a dir, la velocitat augmenta en els estrenyiments.

- Substituint en l'equació de Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_1}{A_2} v_1 \right)^2$$

Per tant:

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right)$$

- Com $A_1 > A_2$, el terme entre parèntesis és negatiu i $P_1 > P_2$, és a dir, la pressió disminueix en els estrenyiments, i es produeix una depressió que al seu torn genera una succió.

• Exemples:

- Si subjecteu dos fulls de paper entre les mans i bufeu entre ells (vegeu figura), observareu que s'ajunten. L'aire que passa entre ells, en constituir un estrenyiment, produeix una depressió que succiona els fulls de paper.



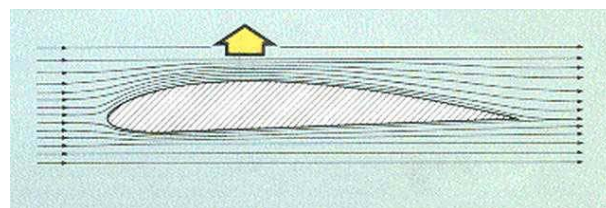
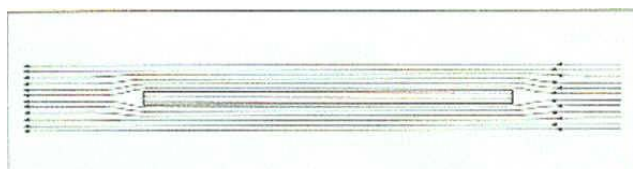
- En els espais entre edificis, si bufa fort el vent, es produeix una gran depressió que pot succionar els vidres de les finestres (vegeu la figura 13.11 del Kane).
- Els polvoritzadors basats en l'efecte Venturi són ecològics perquè no necessiten gasos CFC (clorofluorocarburs) que poden perjudicar la capa d'ozó. El pas ràpid d'aire, generat per pressió manual o per una bomba d'aire (aerògraf), produeix una depressió a l'eixida (broquet) que succiona el líquid del dipòsit a través d'un tub.



Figura 13.19,
Tipler 5a ed.

• **CURIOSITAT: EL VOL** (Cussó, p. 690)

- Tant els ocells, els insectes, els mamífers i els peixos voladors com els avions són molt més densos que l'aire, per la qual cosa la força que els permet volar no és una conseqüència del principi d'Arquimedes, segons la qual caurien de dalt cap avall.
- Es pot considerar el vol dels animals i avions com una aplicació de l'efecte Venturi.
- Un cos amb un perfil pla que es mou en el si d'un fluid desvia les línies de corrent de la zona superior i de la inferior per igual.
- El perfil típic d'una ala fa que, quan es desplaça en l'aire, les línies de corrent de la part superior s'ajunten (igual que ho fan en els estrenyiments), la qual cosa produeix una depressió i una succió que tira de l'ala en direcció cap amunt.
- Aquesta força s'anomena **força de sustentació** i això indica que ELS AVIONS I ELS OCELLS ESTÀN PENJATS DE L'AIRE, i no recolzats en l'aire!
- En els avions aquest efecte apareix tant en el planatge com en el moviment impulsat per motor. En els ocells hi ha un moviment addicional d'aleteig.
- Alguns peixos i mamífers aquàtics empenen també aquesta acció sustentadora per a no enfonsar-se en l'aigua i per a pujar a la superfície quan no tenen altres sistemes de flotació.
- Figures obtingudes de:



<http://www.fpolar.org.ve/escien/escien48.html>

<http://www.hangar57.com/sustentacion.html>

PROBLEMA

1b.15. La femella de l'àguila calba (*aquila chrysaetos*) té un pes mitjà de 5 kg i una envergadura mitjana d'ales de 2 m, i l'amplada és d'uns 30 cm. Calcula quina és la diferència de pressió entre la part superior i inferior de l'ala perquè durant el planatge la força de sustentació suporti el pes de l'au.

• Solució

- La força de sustentació ha de ser igual a la força pes
 $F_S = mg = 5 \times 9.8 = 49 \text{ N}$.
- La força de sustentació és conseqüència de la diferència de pressió entre la part inferior i la superior (pressió menor = succió).



- Com que una pressió és una força per unitat d'àrea, tindrem $\Delta P = \frac{F_s}{A}$.
- L'àrea del conjunt de les dues ales serà $A = 2 \times 2 \times 0.3 = 1.2 \text{ m}^2$; substituint, tindrem que:

$$\Delta P = \frac{F_s}{A} = \frac{49}{1.2} = 40.8 \text{ N/m}^2 = 40.8 \text{ Pa}$$
- Si la pressió en la part inferior de les ales és de l'ordre de la pressió atmosfèrica ($P_o \cong 10^5 \text{ Pa}$), aleshores la pressió en la part superior serà 40.8 Pa menor.

PROBLEMA

- 1b.18. En el sistema circulatori humà, podem considerar que les diferències de pressió per efecte de la viscositat i la velocitat són negligibles enfront de l'efecte de l'altura. Calcula, per a un adult d'1.70 m d'altura i amb el cor a 1.30 m de terra, quina és la pressió de la sang en el cap i en els peus, si la pressió a l'eixida del cor és $\cong 13000 \text{ Pa}$. Expressa els resultats en mmHg. DADES: densitat de la sang: $\rho = 1059.5 \text{ kg/m}^3$; $1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$. **SOL:** $P(\text{cap}) \cong 70 \text{ mmHg}$, $P(\text{cor}) \cong 100 \text{ mmHg}$, $P(\text{peus}) \cong 200 \text{ mmHg}$.

• Solució:

- Si les pèrdues per viscositat són negligibles, açò indica que podem aplicar l'equació de Bernoulli. Si a més a més, la pressió deguda a la velocitat és negligible, sols hem de considerar dos termes:

$$P_{cap} + \rho g h_{cap} = P_{cor} + \rho g h_{cor} = P_{peus} + \rho g h_{peus}$$

- Substituint els valors de g, de la densitat de la sang i les altures de dos en dos termes

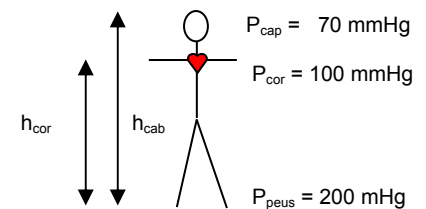
➤ Com $h_{cor} < h_{cap}$, la pressió en el cap és menor que en el cor:

$$P_{cap} = P_{cor} + \rho g (h_{cor} - h_{cap}) = 13000 \text{ Pa} - 4153 \text{ Pa} = 100 \text{ mmHg} - 31.1 \text{ mmHg} \cong 70 \text{ mmHg}$$

➤ En canvi, com $h_{cor} > h_{peus}$ la pressió en els peus és més gran que en el cor:

$$P_{peus} = P_{cor} + \rho g (h_{cor} - h_{peus}) = 13000 \text{ Pa} + 13498 \text{ Pa} = 100 \text{ mmHg} + 101 \text{ mmHg} \cong 200 \text{ mmHg}$$

- NOTEU que la pressió en els peus és major que a l'eixida del cor perquè els peus han de suportar la pressió deguda al pes de la sang (ρgh) de la resta del cos que està per damunt. En posició horitzontal les pressions són quasi iguals.



Pressió manomètrica en el sistema **arterial**

1.7. Fluids viscosos

- Les forces viscoses són forces de fricció en fluids. Sols es manifesten quan el fluid està en moviment.
- **En repòs** els fluids viscosos i els fluids ideals tenen el mateix comportament, per la qual cosa sempre podrem aplicar en aquestes condicions l'equació de Bernoulli.
- **En moviment**, el fluid pot moure's en diferents règims. El flux és **turbulent** quan hi ha terbolins i és **laminar** quan el fluid es mou formant làmines fluides que rellisquen unes sobre altres.
 - A causa de la fricció, la làmina fluida en contacte amb el fons o les parets de la conducció té velocitat zero. Les làmines pròximes, progressivament tenen una velocitat major. Per exemple, en un canal la velocitat màxima es dona en la superfície i, en una conducció, es dona en el centre de la conducció. La figura mostra, per a cada cas, el perfil de velocitats en una secció.

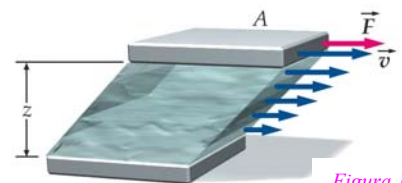
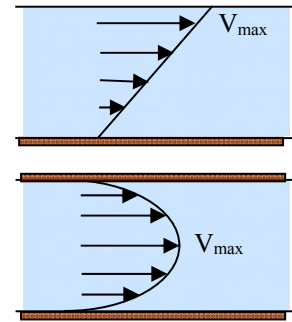


Figura 13.23, Tipler 5a ed.

- La força viscosa F és:
 - directament proporcional a:
 - l'àrea A de les làmines fluides,
 - la diferència de velocitat Δv entre dues làmines fluides.
 - inversament proporcional a la distància Δz entre aquestes dues làmines fluides



- Aquesta dependència es pot expressar com a:

$$F \propto A \frac{\Delta v}{\Delta z}$$

- La constant de proporcionalitat d'aquesta expressió s'anomena coeficient de viscositat o, simplement, viscositat:

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta z} \rightarrow \eta = \frac{F \Delta z}{A \Delta v}$$

- Les unitats del coeficient de viscositat són el Pa · s.
- La viscositat depèn fortament de la temperatura. En els líquids disminueix amb aquesta (és fàcil veure com disminueix la viscositat de l'oli quan es calfa en un recipient de cuina: es torna "més líquid"). En els gasos el coeficient de viscositat augmenta amb la temperatura.
- La taula adjunta mostra alguns valors típics de la viscositat.

TAULA 1.6: Coeficient de viscositat (Kane, T14.1 i altres)

| Fluid (a T ambient) | Viscositat (Pa·s) | Viscositat dels olis lubricants (a 176 °C, temperatura del motor) |
|---------------------|----------------------|---|
| aire | 1.8×10^{-5} | (Unitat SAE: unitat arbitrària de la "Society of Automotive Engineers", als EUA; vegeu |
| aigua | 1.0×10^{-3} | http://www.solomanteniment.com/m-aceite-lubricante.htm) |
| sang (a 37 °C) | 2.1×10^{-3} | SAE 10: 0.16 – 0.20 Pa·s |
| oli | 1.0×10^0 | SAE 20: 0.23 – 0.30 Pa·s |
| glicerina | 1.5×10^1 | SAE 30: 0.30 – 0.43 Pa·s |
| mel | 5.0×10^2 | |

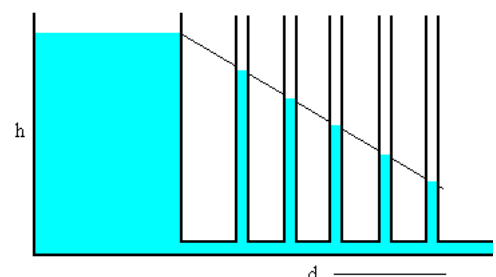
- Les característiques d'un **flux laminar** són les següents:
 - Per a fluids que circulen per una conducció cilíndrica, es pot demostrar (vegeu Cussó, ap. 14-1.4), que la velocitat mitjana del fluid és la meitat de la seua velocitat màxima, és a dir:

$$v_{mitjana} = \frac{v_{max}}{2}$$

- Es compleix l'equació de continuïtat, ja que el concepte de tub de corrent és aplicable, fins i tot en la presència de forces viscoses de fricció. L'única diferència és que el cabal s'expressa ara en funció de la velocitat mitjana:

$$Q = A v_{mitjana} = cte$$

- Si la secció de la conducció és constant (per exemple si és cilíndrica), aleshores la velocitat mitjana i el perfil de velocitats són constants al llarg de la conducció.
- No obstant això, existeix una pèrdua de pressió al llarg de la conducció per efecte de les pèrdues per fricció. És a dir, la pressió va disminuint a mesura que el fluid avança (en la figura es manifesta en el menor nivell al qual arriba el fluid en els tubs verticals, ja que $P_{fons} = \rho g \Delta h$).



1.7.1 Equació de Poiseuille

- o Poiseuille va obtenir una lleï experimental que proporciona la pèrdua de pressió per unitat de longitud, en funció de la velocitat mitjana del fluid, la seua viscositat i el radi de la conducció:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\eta v_{mitjana}}{r^2} \quad (\text{Llei de Poiseuille})$$

- En aquesta expressió, η és el coeficient de viscositat del fluid, $v_{mitjana}$ la seua velocitat mitjana i L i r la longitud i radi, respectivament, de la conducció cilíndrica.
- La velocitat mitjana és difícil de mesurar, i per això és millor expressar l'equació anterior en funció del cabal (volum de fluid per unitat de temps, magnitud més fàcil de mesurar). Si la conducció és cilíndrica, utilitzant l'equació de continuïtat

$$v_{mitjana} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r^2}$$

- o En conseqüència, la pèrdua de pressió la podem expressar en funció del coeficient de viscositat, el cabal i el radi de la conducció:

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\eta Q}{A r^2} = \frac{8\eta Q}{\pi r^4} \quad (\text{Llei de Poiseuille})$$

- La presència en el denominador del radi de la conducció elevat a la quarta potència fa que el valor de la pèrdua de pressió pugui ser molt important en conduccions estretes (per exemple, si el radi es redueix a la meitat, les pèrdues augmenten $2^4 = 16$ vegades!!!).

1.7.2. Pas al règim turbulent

- Un fluid **en moviment** es diu que està en **règim turbulent** quan forma **terbolins**.
- Aquest règim apareix quan la velocitat del fluid i/o la seua viscositat augmenten molt.
- Els terbolins són làmines de fluid que no rellisquen les unes sobre les altres, sinó que a causa de la gran velocitat i a la fricció, unes làmines arrossegueuen les altres amb força, i fan que s'enrotllen sobre si mateixes.
- Com podem saber que un fluid ja no circula en règim laminar i ha passat al turbulent? La llei de Poiseuille sols es pot aplicar quan el règim és laminar, per tant, necessitem una referència per a saber fins quan podem aplicar aquesta equació.

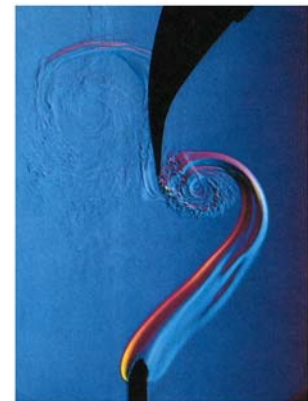


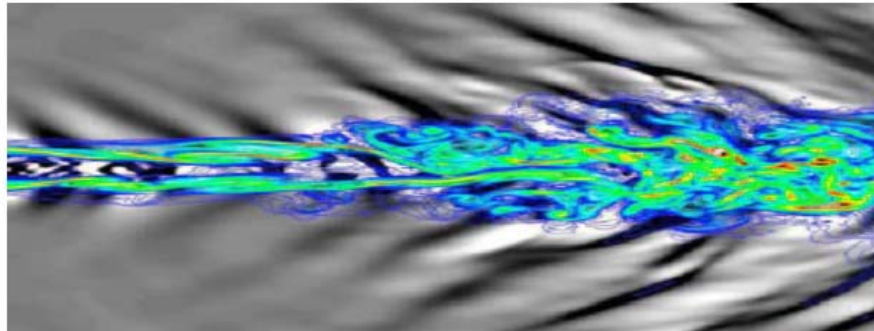
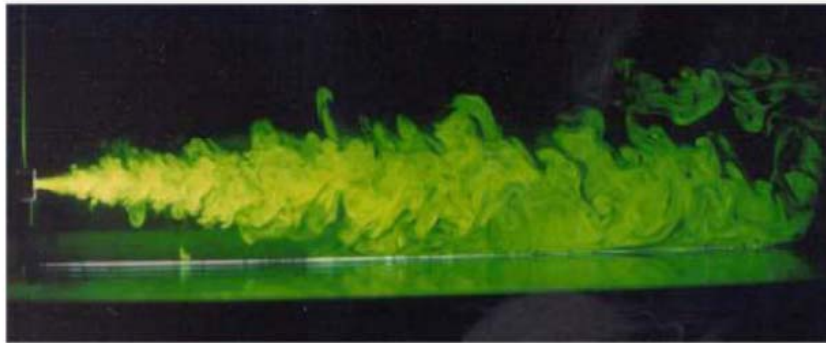
Figura p. 407, Tipler 5a de.

- Reynolds va obtenir una llei experimental que proporciona una referència. El nombre de Reynolds

es defineix com a:

$$N_R = \frac{2\rho v_{med} r}{\eta},$$

- o on v és la velocitat mitjana, ρ la densitat del fluid, η el seu coeficient de viscositat i r el radi de la conducció.
- o per a una conducció cilíndrica, s'ha pogut comprovar que:
 - Si $N_R < 2000$ → el flux és laminar
 - Si $N_R > 3000$ → el flux és turbulent
 - Si $2000 < N_R < 3000$ → el flux és inestable
- Capítol de fluids amb problemes resolts en: <http://bohr.fcu.um.es/miembros/moo/p-flr.pdf>



http://www.uniovi.es/Areas/Mecanica.Fluids/docencia/_asignaturas/fisicas/Libro_de_practicas.pdf

PROBLEMA

- 1b.22. Per un tub horitzontal de 20 m de longitud i diàmetre intern 10 cm passa un corrent fluid de viscositat igual a 0.2 Pa·s i densitat relativa 1.09. Si el cabal és d'un litre/segon, determina: a) la pèrdua de pressió en els 20 m de conducció; b) el tipus de règim de circulació del fluid.
SOL: 1630 Pa, $N_R = 69$, règim laminar.

• Solució:

- (a) El cabal expressat en unitats del SI serà: $Q = 1 \text{ l/s} = 1 \text{ dm}^3/\text{s} = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

$$\text{La pèrdua de pressió en el tub serà: } \frac{\Delta P}{L} = \frac{8 \eta Q}{\pi r^4} = \frac{8 \cdot 0.2 \cdot 0.001}{\pi (0.05)^4} = 81.48 \text{ Pa/m}$$

$$\text{Per tant, per a un tros de 20 m: } P = \frac{\Delta P}{L} \cdot 20 = 81.48 \times 20 = 1630 \text{ Pa}$$

- (b) Per a conèixer el règim en què circula el fluid hem de calcular el nombre de Reynolds:

$$N_R = \frac{2 \rho v_{med} r}{\eta} \text{ i per això hem de calcular prèviament la velocitat mitjana.}$$

La velocitat mitjana del fluid es calcula a partir de la llei de continuïtat:

$$Q = A \cdot v_{med} = \pi r^2 \cdot v_{med} \rightarrow v_{med} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{0.001}{\pi (0.05)^2} = 0.127 \text{ m/s}$$

Amb la qual cosa, el nombre de Reynolds valdrà:

$$N_R = \frac{2 \rho v_{med} r}{\eta} = \frac{2 \times 1090 \times 0.127 \times 0.05}{0.2} = 69.4 \rightarrow \text{RÈGIM LAMINAR}$$

1.9. La circulació sanguínia humana (Kane, ap 13.5 i 14.4; Cussó, 14.2)

- Considerarem la sang com un fluid viscos de densitat $\rho = 1059.5 \text{ kg/m}^3$ i coeficient de viscositat $\eta = 2.084 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.
- El cabal de sang oxigenada que ix del cor d'un adult sa és aproximadament $5 \text{ l/min} = 83.3 \text{ cm}^3/\text{s}$. El volum de sang en tot el cos és d'uns cinc litres (75% en el sistema venós). Aproximadament, cada minut tota la sang del cos fa un recorregut complet pel sistema circulatori (vegeu Cussó, p. 674).

- Pressió manomètrica:

- En fisiologia s'utilitza normalment com magnitud de mesura la pressió manomètrica i com a unitat el mmHg o Torr. La pressió manomètrica és la diferència entre la pressió del fluid (en aquest cas la sang) i la pressió exterior al conducte pel qual es mou (en aquest cas la pressió atmosfèrica).
- La pressió manomètrica quan el cor es contrau (sístole) és d'uns 120 mmHg i quan es dilata (diàstole) d'uns 80 mmHg.
- La pressió manomètrica mitjana en l'aorta a l'eixida del cor (fent mitjana entre sístole i diàstole) és una constant en tots els mamífers, des dels ratolins als elefants (vegeu Cussó, p. 366 i 369), amb un valor igual a

$$P_{\text{cor}} = 13000 \text{ Pa} \approx 0.13 \text{ atm} \approx 100 \text{ mmHg}$$

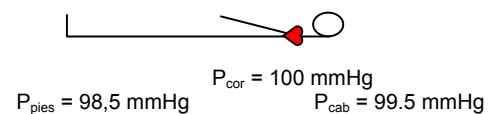
- La pressió manomètrica mitjana en la vena cava d'entrada al cor és zero.
- Essent les anteriors pressions manomètriques, la pressió total en l'aorta a l'eixida del cor és, per tant, $= 1 + 0.13 = 1.13 \text{ atm} = 880 \text{ mmHg}$ i, a l'entrada, d'1 atm. Per aquesta raó, si es produeix una incisió en una arteria propera al cor, la sang ix a borbolls, ja que està a una pressió superior a l'atmosfèrica.

- Pressió sanguínia en diferents parts del cos:

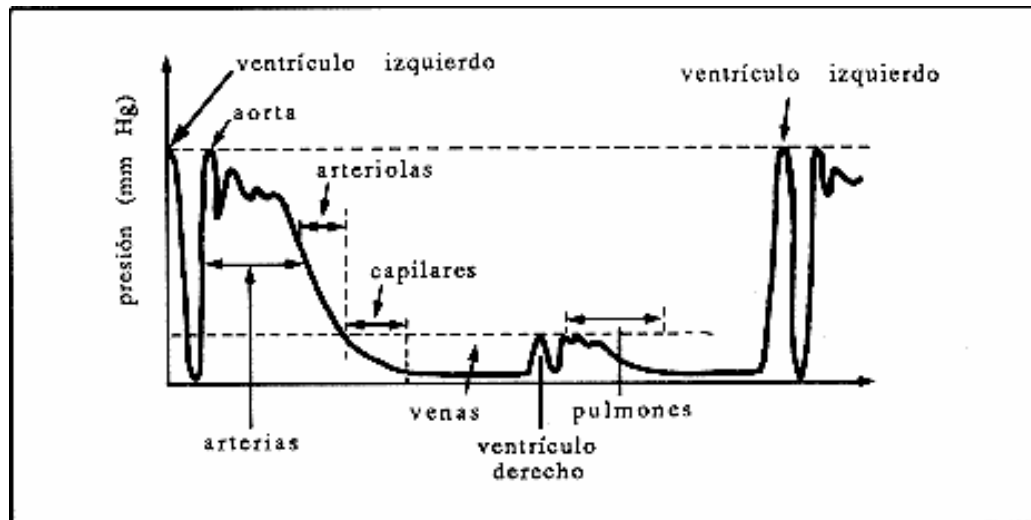
- Veurem a continuació com canvia la pressió sanguínia al llarg del cos, des que ix del cor per l'aorta a 100 mmHg fins que hi torna per la vena cava amb pressió zero.
- En una conducció per la qual circula un fluid, les variacions de pressió poden ser degudes en el cas més general a canvis en la velocitat de la sang, a variacions en l'altura i a les pèrdues per viscositat. Per tant, no es pot aplicar l'equació de Bernoulli pel fet que les pèrdues per viscositat fan que els termes de l'equació no mantinguin constant el seu valor. Això no obstant, veurem a continuació que en el sistema circulatori humà la podem aplicar en determinades condicions, quan algunes de les contribucions siga negligible.

- Pressió **arterial** en posició horitzontal:

- En posició horitzontal les variacions de pressió degudes a l'altura són negligibles (tot el cos està a la mateixa altura). Podem considerar, doncs, que la variació de pressió es deu només a les pèrdues de pressió degudes a la velocitat i a la viscositat. Però, quant valen?

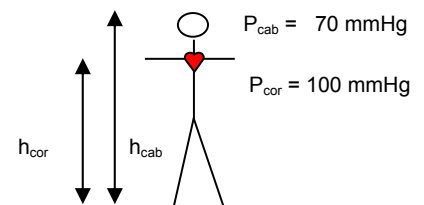


- La figura mostra les pressions manomètriques que s'obtenen per canulació en una persona tombada (vegeu figura 14.13 Cussó). Podem concloure que les pèrdues degudes a la viscositat i a la velocitat són negligibles.
- La figura de la següent pàgina mostra un esquema de les variacions de pressió en la sang al llarg del sistema circulatori humà en posició horitzontal.



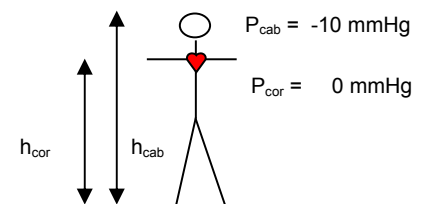
- Pressió **arterial** en posició vertical:

- Quan la persona està dreta, l'efecte de la gravetat fa que les pressions en el cap, el cor i els peus siguin molt diferents.
- La figura mostra les pressions manomètriques experimentals aproximades per al sistema arterial.
- Com les diferències de pressió són grans, molt més grans que les degudes a la velocitat i la viscositat, aquestes les podem suposar negligibles i aplicar l'equació de Bernoulli, tal com hem fet en el problema 1b.18.
- Cal destacar que, igual que en altres sistemes, la pressió en la zona inferior del cos és major que en les zones superiors, per efecte de l'altura (la sang en la zona superior "pesa" i exerceix una pressió sobre la zona inferior).

Pressió manomètrica en el sistema **arterial**

- Pressió **venosa** en posició vertical:

- La pressió manomètrica en els peus (204 mmHg) es redueix considerablement en passar la sang per arterioles i capil·lars. Així, la pressió venosa en els peus es queda en uns 100 mmHg.
- Aquesta pressió, ajudada per les vàlvules venoses, és la responsable que finalment la sang arribe al cor, on finalment la pressió es redueix a zero (en la vena cava).
- La figura mostra les pressions manomètriques en el sistema venós.
- En el sistema venós hi ha la major part de la sang del cos (en concret, el 75% del volum total). En les donacions de sang, aquesta se sol extraure de les venes, ja que el volum extret afecta menys al volum total i a la pressió de la vena, que és baixa.
- Observeu que, estant drets, la pressió manomètrica en el sinus longitudinal del cervell és negativa (-10 mmHg), és a dir, inferior a la pressió atmosfèrica. Si es produeix una incisió en aquest vas amb la persona dreta, entraria aire en el vas, amb el corresponent risc d'embòlia cerebral.

Pressió manomètrica en el sistema **venós**

- Velocitat de la sang en el sistema circulatori humà:

- Tal com s'ha dit, el cabal de sang és d'uns 5 l/min = 83.3 cm³/s.
- Essent el sistema circulatori un sistema tancat, aquest cabal és el mateix en tots els trams, llevat que hi haja una hemorràgia o es faça una transfusió de sang.
- Podem calcular la velocitat de la sang en l'aorta ($A = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$) a partir de l'equació de continuïtat: $v_{aorta} = \frac{Q}{A_{aorta}} = 0.33 \text{ m/s}$.
- En ramificar-se l'aorta en les arteries principals, cada una d'aquestes té una secció molt més menuda ($A \approx 10^{-5} \text{ m}^2$). Això no obstant, la secció total de totes elles és $2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, major que la de l'aorta, de manera que la velocitat mitjana disminueix $v_{arteria} = \frac{Q}{A_{sist. arterial}} = 0.041 \text{ m/s}$.
- La taula mostra un resum de les velocitats mitjanes en diferents vasos.

| | Area de la secció total (m ²) | Velocitat mitjana (m/s) | Velocitat mitjana |
|----------------------------|---|-------------------------|-------------------|
| Arteria aorta | 2.5×10^{-4} | 0.33 | = 33 cm/s |
| Arteries principals | 2.0×10^{-3} | 0.042 | = 4.2 cm/s |
| Arterioles | 3.0×10^{-2} | 0.0027 | = 2.7 mm/s |
| Capil·lars | 2.5×10^{-1} | 0.00033 | = 0.33 mm/s |

- NOTEU que esperariem que la velocitat augmentara en els vasos de secció menuda, però disminueix, perquè l'àrea que realment cal considerar és l'àrea de la secció total, la qual resulta ser més gran (àrea major, velocitat menor).

- Resistència al flux (ap. 14.4, Kane; ap. 14-2.2, Cussó):

- Es pot fer un símil entre sistemes circulatoris de fluids i circuits elèctrics, de manera que la pressió i el cabal fan el paper del potencial i el corrent elèctric:

$$\Delta P \rightarrow V \qquad Q \rightarrow I$$

- L'origen del símil és que la llei de Poiseuille és similar a la llei d'Ohm ($V = I \cdot R$). En conseqüència, podem definir de forma equivalent una resistència al flux, que representa la dificultat perquè un fluid fluïska:

$$R = \frac{V}{I} \qquad \rightarrow \qquad R_f = \frac{\Delta P}{Q}$$

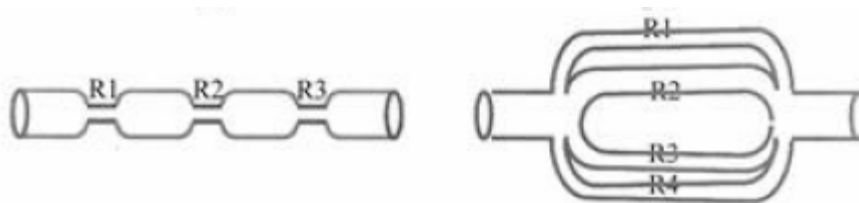
- Considerant l'equació que proporciona la caiguda de pressió en una conducció cilíndrica, podem obtenir l'expressió que dona la resistència al flux en una conducció de longitud L, radi r i coeficient de viscositat η

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8 \eta Q}{\pi r^4} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8 \eta L}{\pi r^4} \qquad \rightarrow \qquad R_f = \frac{8 \eta L}{\pi r^4}$$

- És de destacar la dependència en r^4 , que fa que les conduccions amb radi molt menut presenten una resistència al flux molt gran.
- La resistència al flux de tot el sistema arterial d'una persona en repòs (resistència perifèrica total) es pot calcular simplement a partir del cabal subministrat pel cor i la caiguda total de pressió:

$$R_f = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{13000}{83.3 \times 10^{-6}} = 1.56 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$$

- Quan la resistència al flux augmenta per alguna raó, per exemple per l'estrenyiment de les artèries (arterioesclerosi), la pressió subministrada pel cor ha d'augmentar considerablement per a mantenir el cabal. Aquest fenomen és conegut com a hipertensió, i implica una major despesa energètica i fatiga del cor.
- Resistències en sèrie:
 - Quan el cabal que passa per diverses conduccions és el mateix, es diu que les conduccions estan connectades en sèrie.

(a) Conduccions en **sèrie**(b) Conduccions en **paral·lel**

(Figura obtinguda de: <http://www.fac.org.ar/revista/03v32n2/revisio/revi01/cianca.PDF>)

- La resistència equivalent és la suma de les resistències

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$
- Resistències en paral·lel:
 - Quan el cabal se separa passant per diverses conduccions i totes tenen la mateixa diferència de pressió, es diu que les conduccions estan connectades en paral·lel i la resistència equivalent ve donada per

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$
 - *Cas particular:* si totes les resistències són iguals, tindrem

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \dots = \frac{N}{R} \quad \rightarrow \quad R_p = \frac{R}{N}$$
 - És a dir, la resistència equivalent és N vegades menor que cada una.
- Problemes de flux sanguini resolts en:

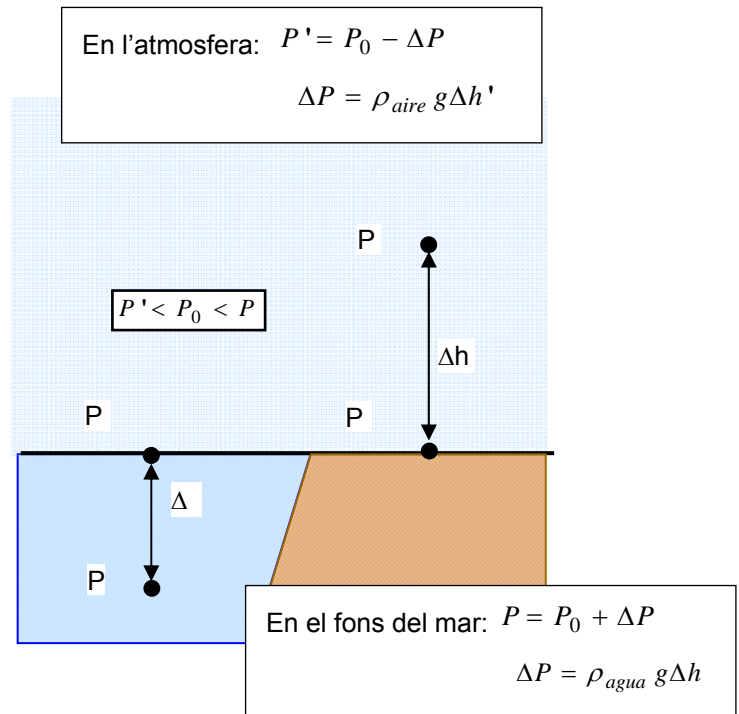
<http://bohr.fcu.um.es/miembros/moo/p-flr.pdf>
- Vegeu "Hidrodinàmica de la circulació vascular perifèrica normal i patològica" en

<http://www.fac.org.ar/1/revista/03v32n2/revisio/revi01/cianca.php>

PROBLEMES TEMA 1b: FLUIDS

PRESSIÓ HIDROESTÀTICA

- 1b.1.- Calcula com canvia la pressió en l'aigua per cada metre de fondària. Suposa que la densitat de l'aigua és constant ($\rho_{\text{aigua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$) i arrodoneix per a poder donar una aproximació senzilla i pràctica del valor obtingut.
- 1b.2.- Calcula de manera aproximada, com canvia la pressió en l'atmosfera per cada 1000 metres d'altura. Aplica el valor obtingut per a calcular a quina pressió està sotmesa la nau Columbia si vola a una altura de 8000 m sobre el nivell del mar. Suposa que la densitat de l'aire és constant ($\rho_{\text{aire}} \cong 1 \text{ kg/m}^3$) i arrodoneix per a poder donar una aproximació del valor obtingut. (En realitat, la densitat disminueix molt amb l'altura). **SOL:** 0.1 bar cada 1000 m, 0.2 bar \approx 0.2 atm.



Per a les característiques de l'atmosfera vegeu:

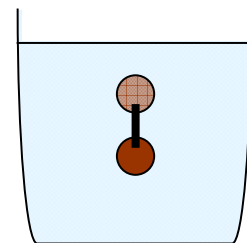
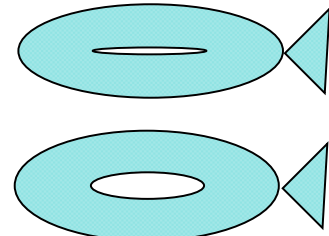
<http://es.wikipedia.org/wiki/Atm%C3%B3sfera>

- 1b.3. La pressió màxima que pot resistir un rellotge és de 5 atm. A quina fondària màxima es pot bussejar sense que s'espate? **NOTA:** recordeu que en la superfície del mar la pressió que hi ha és l'atmosfèrica P_0 . Dades: $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_{\text{aigua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$; **SOL:** $h_{\text{max}} = 41.3 \text{ m}$.

PRINCIPI D'ARQUIMEDES

- 1b.4. Un cilindre de fusta de densitat 0.75 g/cm^3 sura en l'aigua amb el seu eix perpendicular a la superfície. El radi del cilindre és 10 cm i l'altura 15 cm. (a) Quina fracció del volum del cilindre està submergida? (b) Quant valdrà l'altura de la fracció submergida? (c) Si el cilindre sura amb el seu eix paral·lel a la superfície del líquid, quina fracció del cilindre estarà submergida? **SOL:** (a) 75 %, (b) 11.25 cm, (c) 75 %
- 1b.5. Si la densitat de l'aigua del mar és 1025 kg/m^3 i la del gel 920 kg/m^3 , determina quina fracció del volum total d'un iceberg és visible per damunt del nivell de l'oceà. **SOL:** 10.2% (Exemple p. 635, Cussó, Exemple 13.2, Kane)
- 1b.6. Una massa m d'aigua ocupa diferents volums, segons l'estat en el qual estiga. Compara: (a) el volum d'aquesta massa d'aigua quan està en forma de líquid ($\rho_{\text{aigua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$); (b) el mateix, quan està en forma de gel ($\rho_{\text{gel}} = 920 \text{ kg/m}^3$); (c) el volum submergit de la massa d'aigua en forma de gel, quan sura en aigua; (d) comprova que els volums dels apartats (b) i (c) són iguals.
- 1b.7. Determina el volum d'una corona suposadament d'or que té una força pes de 5 N en l'aire i una força pes aparent de 4.72 N quan està totalment submergida en aigua. Compara el seu pes amb el d'una corona realment d'or. Dades: $\rho_{\text{aigua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{or}} = 19300 \text{ kg/m}^3$. **SOL:** 28.6 cm^3 , 5.40 N

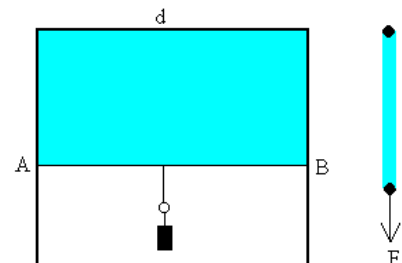
- 1b.8. Determina el volum d'un hipopòtam que pesa 4500 kg si suposem que nada "entre dues aigües", de tal manera que sobreïxen de l'aigua tan sols els ulls i les orelles, de volum negligible. Dades: $\rho_{\text{Aigua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ **SOL:** 4.5 m^3 .
- 1b.9. Perquè un peix mantinga una flotabilitat neutra, la seua densitat aparent ha de ser igual a la del líquid que el rodeja. Els peixos poden modificar la seua densitat real ($\rho = m/V$) mitjançant la bufeta natatòria, arribant a una densitat aparent ($\rho_{\text{ap}} = \frac{m}{V + V_{\text{bufeta}}}$) menor que la seua densitat real. Una anguila nada en aigua dolça ($\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$) i la seua densitat, sense comptar amb la bufeta natatòria, és de $\rho = 1.07 \text{ g/cm}^3$. Quina fracció del volum de l'anguila (V_{bufeta}/V) ocupa la bufeta natatòria? (b) L'anguila migra a l'oceà, on la densitat de l'aigua salada és $\rho_{\text{mar}} = 1.026 \text{ g/cm}^3$. Quina fracció del volum de l'anguila representa ara la bufeta natatòria? **SOL:** (a) 7%; (b) 4.3%.
- 1b.10. Una llavor està formada per dues esferes A i B unides per un filament de massa i volum negligibles. Cada una té un volum d' 1 cm^3 i les seues densitats són $\rho_A = 0.5 \text{ g/cm}^3$ i $\rho_B = 2 \text{ g/cm}^3$. (a) Calcula l'empenyiment sobre la llavor quan està submergida en l'aigua $\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$. (b) Calcula el pes total. (c) Compara el pes amb l'empenyiment; surarà la llavor? **SOL:** (a) $P_T = 0.0196 \text{ N}$; (b) $P_T = 0.0294 \text{ N}$; (c) s'enfonsa.



<http://www.sc.edu/sbweb/fisica/fluidos/tension/introduccion/introduccion.htm>

TENSIÓ SUPERFICIAL

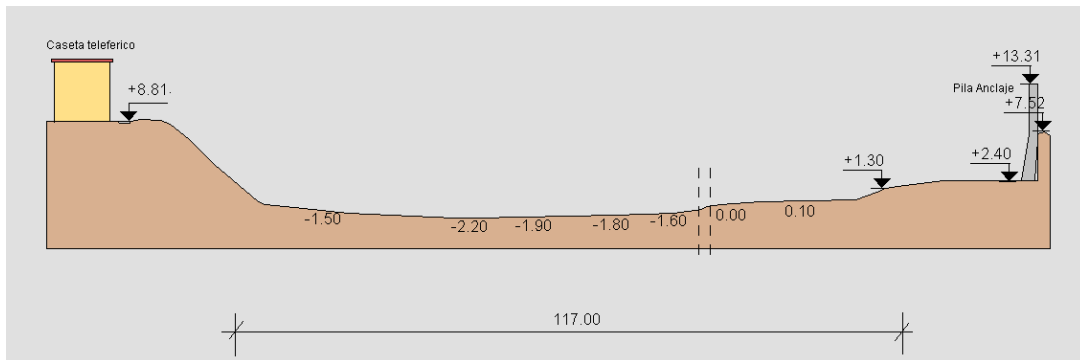
- 1b.11. Un fil d'aram en forma de U es mulla amb aigua a 20°C . El fil mòbil té 0.1 m de longitud i una massa $m = 0.001 \text{ kg}$. (a) Quan es penja una massa de 485 mg , el fil d'aram mòbil es queda en equilibri. Quan val la tensió superficial del líquid a aquesta temperatura? (b) Si s'afegeix aigua i es repeteix l'experiment, s'observa que la massa que cal penjar és la mateixa (0.49 g). Per què es dona aquest comportament? **SOL:** $\gamma(T=20^\circ \text{C}) = 7.28 \times 10^{-2} \text{ N/m}$.
- 1b.12. Una agulla de cosir té una longitud de 3.2 cm . Quan es col·loca suaument sobre la superfície de l'aigua ($\gamma = 0.073 \text{ N/m}$), surarà si no és massa pesada. Quina seria la massa de l'agulla més pesada que es pot utilitzar en aquesta demostració? **SOL:** $m = 0.477 \text{ g}$.
- 1b.13. Un insecte sabater descansa sobre la superfície de l'aigua. Si cada una de les seues sis potes toca l'aigua al llarg de 5 mm de la seua longitud, quina és la massa màxima de l'insecte? Tensió superficial de l'aigua (20°C): $72.75 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. **SOL:** $m = 0.4454 \text{ g}$.
- 1b.14.- La saba dels arbres en estiu és pràcticament aigua. Puja en els arbres per un sistema de capil·lars de radi $r = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$. L'angle de contacte es pot considerar zero. La densitat de l'aigua és 1000 kg/m^3 . (a) Quina és la màxima altura a la qual pot arribar la saba a 20°C per capil·laritat? (b) No obstant això, la saba puja fins a dalt en arbres com les sequoies que poden arribar als 100 m . Quins altres fenòmens permeten explicar aquest fenomen? DADA: $\gamma(T=20^\circ \text{C}) = 7.28 \times 10^{-2} \text{ N/m}$. **SOL:** $h = 0.594 \text{ m}$.
- 1b.15. Introduïm un tub capil·lar de 0.1 mm de radi en aigua a 20°C i aquesta puja 13 cm , mostrant un menisc còncav que forma un angle de 30° amb la paret del tub. Quina és la tensió superficial de l'aigua? **SOL:** $\gamma(T=20^\circ \text{C}) = 7.36 \times 10^{-2} \text{ N/m}$.
- 1b.16. La tensió superficial de l'aigua a 20°C és $\gamma = 7.28 \times 10^{-2} \text{ N/m}$. La pressió de vapor a aquesta temperatura és $2.33 \times 10^3 \text{ Pa}$. Quin és el radi de la gota esfèrica més menuda que està en equilibri amb la tensió de vapor? **SOL:** $r = 6.25 \times 10^{-5} \text{ m}$.



- 1b.17. Considera una bombolla d'aire amb diàmetre 0.1 mm, feta amb aigua sabonosa ($\gamma = 2.5 \times 10^{-2}$ N/m). (a) Calcula la sobrepressió dins de la bombolla. (b) S'utilitza la mateixa aigua per a produir una gota esfèrica amb un diàmetre que és la meitat del de la bombolla, és a dir, 50 μm . Troba la diferència de pressió entre l'interior i l'exterior de la gota. **SOL:** $\Delta P_b = 2.3 \times 10^2$ N/m², $\Delta P_g = 2.3 \times 10^2$ N/m².

EQUACIÓ DE CONTINUÏTAT

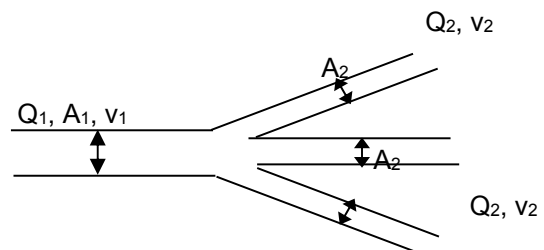
- 1b.18. El riu Ebre va tenir una crescuda l'any 2006 en la qual, al seu pas per Tortosa, arribà a tenir un cabal de 1289 m³/s i una altura mitjana de 4.29 m, i la seua secció es pot aproximar amb un rectangle de base igual a 130 m. Normalment té un cabal d'uns 191 m³/s i una altura mitjana de 1.23 m, essent en aquest cas l'amplada mitjana de la seua secció rectangular de 117 m. Fes una estimació de la variació de la velocitat de l'aigua. (Confederació Hidrogràfica de l'Ebre: <http://www.chebro.es/>) **SOL:** 1.33 m/s, 2.31 m/s.



- 1b.19. El radi d'una canonada d'aigua disminueix des de 0.2 a 0.1 m. Si la velocitat mitjana en la part més ampla és de 3 m/s, calcula la velocitat mitjana en la part més estreta (Kane, prob. 13.6) **SOL:** 12 m/s.
- 1b.20.- Vuit tubs prims es reuneixen formant un tub més gros. L'àrea de la secció de cada tub prim és 5×10^{-11} m² i el radi del tub gros és el doble dels prims. Si el cabal en el tub gros és de 5×10^{-14} m³/s, completa la taula següent (tingues en compte que el cabal del tub gros és la suma dels cabals en els tubs prim).

| | Àrea secció | x | Velocitat mitjana | = | Cabal |
|---------------|----------------------------------|---|-----------------------------------|---|---|
| tub gros | $20 \times 10^{-11} \text{ m}^2$ | x | $2.5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ | = | $5 \times 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}$ |
| tub prim (un) | $5 \times 10^{-11} \text{ m}^2$ | x | $1.25 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ | = | $6.25 \times 10^{-15} \text{ m}^3/\text{s}$ |

- 1b.21.- Per una conducció de 2 cm² flueix un fluid amb un cabal de 100 cm³/s. Aquesta conducció es bifurca en tres ramals iguals, cada un d'ells amb secció 1 cm². Determineu la velocitat del fluid (a) en la conducció, (b) en cada un dels ramals (tingueu en compte que el cabal es reparteix per igual entre els tres ramals) **SOL:** 0.5 m/s, 0.33 m/s.



| | Àrea secció | x | Velocitat mitjana | = | Cabal |
|------------|-------------------|---|-------------------|---|------------------------------------|
| conducció | 2 cm ² | x | 50 cm/s | = | 100 cm ³ /s |
| ramal (un) | 1 cm ² | x | 33 cm/s | = | $100/3 = 33 \text{ cm}^3/\text{s}$ |

EQUACIÓ DE BERNOULLI

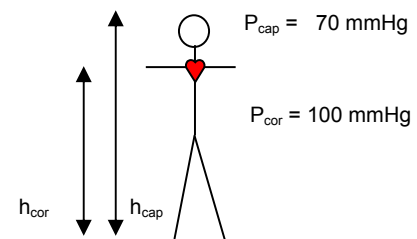
1b.22. La femella de l'àguila calba (*aquila chrysaetos*) té un pes mitjà de 5 kg i una envergadura d'ales mitjana de 2 m, l'amplada és d'uns 30 cm. Calcula quina és la diferència de pressió entre la part superior i inferior de l'ala perquè durant el planatge la força de sustentació suporti el pes de l'au.



1b.23. En una vena de 5 mm de diàmetre la velocitat de la sang és 0.1 m/s i la pressió 12 mmHg. Si la vena s'obstrueix i la seua secció efectiva es redueix a la quarta part, quina és la pressió i la velocitat de la sang en l'obstrucció? (Negligir els efectes de la viscositat). Dades: $\rho_{\text{Sang}} = 1059.5 \text{ kg/m}^3$, $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$. **SOL:** $v = 0.4 \text{ m/s}$, $P = 11.4 \text{ mmHg}$

1b.24. Es col·loca una cànula en una artèria ampla i s'utilitza una dissolució salina de 1300 kg/m^3 de densitat com a fluid manomètric. Quina és la pressió de la sang (pressió manomètrica) si la diferència d'altures entre els dos tubs manomètrics és de 0.67 m? **SOL:** $P = 8536 \text{ Pa} = 0.08426 \text{ atm} = 64.04 \text{ mmHg}$.

1b.25.- En el sistema circulatori humà, podem considerar que les diferències de pressió per efecte de la viscositat i la velocitat són negligibles enfront de l'efecte de l'altura. Calcula, per a un adult de 1.70 m d'alçada i amb el cor a 1.30 m de terra, quina és la pressió de la sang en el cap i en els peus, si la pressió a l'eixida del cor és $\cong 13000 \text{ Pa}$. Expressa els resultats en mmHg. DADES: densitat de la sang: $\rho = 1059.5 \text{ kg/m}^3$; $1 \text{ mmHg} = 133.3 \text{ Pa}$. **SOL:** $P(\text{cap}) \cong 70 \text{ mmHg}$, $P(\text{cor}) \cong 100 \text{ mmHg}$, $P(\text{peus}) \cong 200 \text{ mmHg}$.



Pressió manomètrica en el sistema arterial

1b.26. Les girafes tenen un coll molt llarg que fa que el seu cap estiga uns 3 m per damunt del cor. Si la pressió en el cap de la girafa (necessària per a fer circular la sang en el cervell) és de 8 kPa, a quina pressió ha d'eixir la sang del cor? Quant val quan abaixa el cap per beure si el situa a l'altura dels peus que estan 3 m per davall del cor? Supposeu que en els vasos principals les diferències de pressió per efecte de la viscositat i la velocitat són negligibles enfront de l'efecte de l'altura. Dada: $\rho_{\text{sang}} = 1059.5 \text{ kg/m}^3$. **SOL:** $P_{\text{cap}} = 60 \text{ mmHg}$, $P_{\text{cor}} = 294 \text{ mmHg}$, $P_{\text{peus}} = 527 \text{ mmHg}$.

FLUIDS VISCOSOS

1b.27. La saba flueix pel xilema d'un arbre, format per capil·lars de $50 \mu\text{m}$ de diàmetre interior. Si tenim en compte la seua viscositat, la caiguda de pressió al llarg del tronc és de 0.1 atmosferes per metre de longitud. Quin és el cabal de saba en cada capil·lar? Dada $\eta_{\text{saba}} \cong \eta_{\text{aigua}} \cong 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. **SOL:** $1.55 \times 10^{-12} \text{ m}^3/\text{s}$.

1b.28. Una artèria gran d'un gos té un radi interior de 4 mm. El cabal de sang en l'artèria és d' $1 \text{ cm}^3/\text{s}$. Calcula (a) les velocitats mitjana i màxima en la sang; (b) la caiguda de pressió en un fragment d'artèria de 0.1 m de longitud. Dades: $\rho_{\text{sang}} = 1059.5 \text{ kg/m}^3$, $\eta_{\text{sang}} = 2.084 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. (Exemple 14.2, Kane). **SOL:** (a) 2 cm/s, 4 cm/s; (b) 2.07 Pa.

1b.29. Per un tub horitzontal de 20 m de longitud i diàmetre intern 10 cm passa un corrent fluid de viscositat igual a $0.2 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ i densitat relativa 1.09. Si el cabal és d'un litre/segon, determina: a) la pèrdua de pressió en els 20 m de conducció; b) el tipus de règim de circulació del fluid. **SOL:** 1630 Pa, $N_R = 69$, règim laminar.

1b.30. Tenim una mànega d'aigua de 10 m de llarg i 1 cm de diàmetre, connectada a una aixeta que proporciona aigua a una pressió de 2 atm (teniu en compte que la pressió a l'eixida de la mànega és d'1 atmosfera). Calcula: (a) el cabal; (b) la velocitat mitjana de l'aigua; (c) la velocitat màxima; (d) la resistència al flux. **SOL:** $2.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, 31.8 m/s, 63.7 m/s, $4.07 \times 10^7 \text{ N s/m}^5$.

- 1b.31. Compara el nombre de Reynolds d'un flux de sang que circula (a) per l'arteria mesentèrica, (b) per un capil·lar. Dades: $\rho_{\text{sang}} = 1059.5 \text{ kg/m}^3$, $\eta_{\text{sang}} = 2.084 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $v_{\text{artèria}} = 0.07 \text{ m/s}$, $v_{\text{capil·lar}} = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, $r_{\text{artèria}} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $r_{\text{capil·lar}} = 4 \times 10^{-6} \text{ m}$. **SOL:** N_R (artèria) = 106, N_R (capil·lar) = 8.13×10^{-4} .

TEMA 2: BIOELECTROMAGNETISME

2.1 Força i camp elèctric

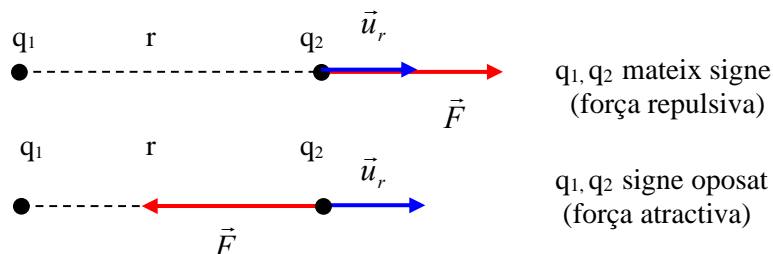
- Hui sabem que la matèria està formada per àtoms que contenen neutrons, protons i electrons. La càrrega del protó és positiva i la de l'electró és negativa. El neutró no té càrrega.
- Només es coneixen aqueixos tipus de càrrega: positiva i negativa.
- La unitat de càrrega en el SI és el coulomb (C) que es defineix en funció de la unitat de corrent elèctric (veure, per exemple: cap. 22, Tipler 5^o Ed). La càrrega més menuda que es coneix és la càrrega de l'electró. La càrrega positiva que té el mateix valor que la de l'electró es denomina "unitat fonamental de càrrega elèctrica e ". Expressada en coulombs és: $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$.
- El coulomb és una unitat que resulta massa gran per a les càrregues amb les que es treballa en els laboratoris; en conseqüència, s'utilitzen de forma més habitual els submúltiples μC i nC .

Força entre càrregues: Llei de Coulomb

- Charles Coulomb va obtindre la Llei que porta el seu nom i que, en resum, (veure ap. 22.3, Tipler 5^o Ed) diu: "La força exercida per una càrrega puntual sobre una altra està dirigida al llarg de la línia que les uneix. La força canvia inversament amb el quadrat de la distància que separa les càrregues i és proporcional al producte de les càrregues. És repulsiva si les càrregues tenen el mateix signe i atractiva si tenen signes oposats".
- A pesar d'aquesta redacció, la llei de Coulomb es pot escriure de forma única utilitzant vectors. La força que exerceix una càrrega q_1 sobre una altra q_2 a la distància r es pot expressar com:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

- q_1 i q_2 són els valors de les càrregues (amb signe)
- r la distància entre elles
- k una constant, que en el buit té un valor aproximat de $k = k_0 = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$
- k_0 també s'expressa en altres textos com $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
- \vec{u}_r és un vector unitari:
 - aplicat sobre q_2
 - en la direcció de la recta que uneix les càrregues
 - amb sentit de q_1 cap a q_2 .
 - cal definir un sistema d'eixos per poder expressar correctament la direcció i sentit dels vectors



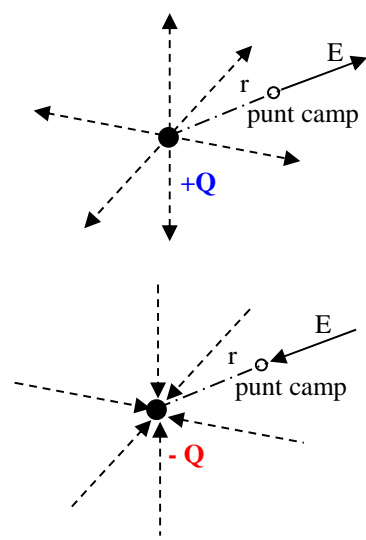
- A partir d'aquesta expressió, és fàcil veure que, quan ambdues càrregues tenen el mateix signe, la força té la direcció i sentit de \vec{u}_r (força repulsiva). En canvi, quan els signes de les càrregues són oposats, el producte de les càrregues és negatiu i la força resultant té sentit oposat a \vec{u}_r (força repulsiva).

Camp elèctric d'una càrrega puntual

- Considerem una càrrega Q i una altra més menuda, de prova q . La força que experimentarà la càrrega q serà $\vec{F} = k \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}_r$.
- Podem introduir un pas intermedi en aquest càlcul i determinar la força per unitat de càrrega de prova, \vec{F}/q que produeix la càrrega Q .
- Aquesta força per unitat de càrrega que exerceix la càrrega Q sobre una altra càrrega que estiga en la seua presència, s'anomena **camp elèctric** creat per Q . Podem dir per tant, que el camp elèctric és una modificació de l'espai que rodeja a Q , de tal manera que qualsevol altra càrrega q que estiga en aquest espai experimentarà una força $\vec{F} = q \vec{E}$.
- De l'expressió de la força de Coulomb s'obté que el camp elèctric creat per una càrrega puntual Q ve donat per:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

- Q és el valor de la càrrega que crea el camp (amb signe)
- r és la distància des de la càrrega fins el punt on es calcula el camp (anomenat "punt camp")
- k és una constant de proporcionalitat (la mateixa que per a la força de Coulomb)
- \vec{u}_r és un vector unitari
 - aplicat en el punt camp
 - en direcció de la recta que va des de la càrrega fins el "punt camp"
 - amb sentit de la càrrega Q cap el "punt camp"
 - noteu que si Q és positiva, el camp està dirigit en direcció radial allunyant-se de Q "cap a fora" i si Q és negativa està dirigit en direcció radial "cap a dins".



- L'ús del concepte de camp no afecta al càlcul de la força. Sols afegeix un pas: la càrrega Q modifica l'espai al seu voltant, creant un camp \vec{E} , i aquest és el que produeix una força $\vec{F} = q \vec{E}$ sobre q .
- Observeu que:
 - si la càrrega q és positiva, la força del camp elèctric sobre ella és en la direcció del camp,
 - si la càrrega q és negativa, la força del camp elèctric sobre ella és en la direcció oposada al camp elèctric.
- La unitat del camp elèctric és el N/C , que es deriva de la seua relació amb la força. També s'utilitza V/m que, com vorem, es deriva de la seua relació amb el potencial.

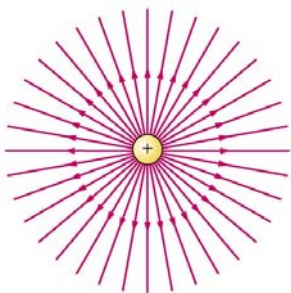
Si hi ha diferents camps elèctrics, els haurem de sumar sectorialment: $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$

• **TAULA 2.1: Valor del camp elèctric produït per diferents fonts**

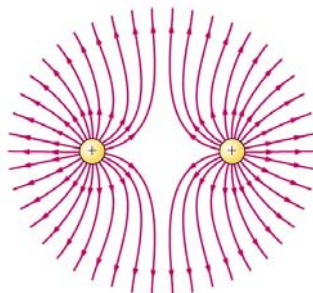
| Font | Camp elèctric |
|-----------------|--------------------|
| Cable domèstic | $\sim 10^{-2}$ N/C |
| Ones de radi | $\sim 10^{-1}$ N/C |
| Núvol turmentós | $\sim 10^3$ N/C |
| Tub de raigs X | $\sim 10^6$ N/C |

Línees de camp elèctric

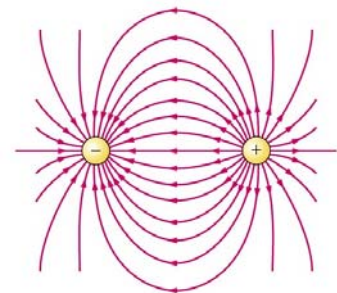
- Són línees tangents en tot punt al vector camp elèctric.
- Permeten visualitzar la direcció i sentit del camp elèctric.
- La figura mostra les línees de camp elèctric per a diferents conjunts de càrregues puntuals:
 - una càrrega puntual positiva (una negativa produiria les mateixes línees però dirigides "cap a dins": cap a la càrrega) (Figura 21.19a, Tipler 5ª ed.)
 - dues càrregues puntuals positives i iguals (Figura 21.20a, Tipler 5ª ed.)
 - dues càrregues puntuals del mateix valor, però signe oposat (Figura 21.21a, Tipler 5ª ed.). Aquest conjunt de càrregues s'anomena **dipol**.



(a) càrrega +Q



(b) càrregues +Q i +Q



(c) **Dipol**: càrregues -Q i +Q

CURIOSITAT

Peixos que "veuen" mitjançant un camp elèctric

Hi ha peixos que generen camps elèctrics dèbils que els serveixen per a detectar les seues preses. En canvi, hi ha altres que són capaços de generar camps elèctrics intensos que els serveixen d'arma d'atac. De on provenen aquestos camps i com els utilitzen?

Alguns d'aquestos peixos tenen un òrgan ubicat en diferents parts del cos (cua, lateral, dorsal...) format per milers de pors que generen impulsos de camp elèctric al seu voltant. Aqueixos impulsos de camp elèctric es reflecteixen en els objectes i, al ser detectats, permeten determinar la grandària, característiques i moviment de tot allò que els envolta. La recepció la realitzen mitjançant sensors que detecten contínuament el camp elèctric.

El peix elèctric ubica als altres peixos mitjançant l'emissió, i posterior recepció, de senyals elèctrics.

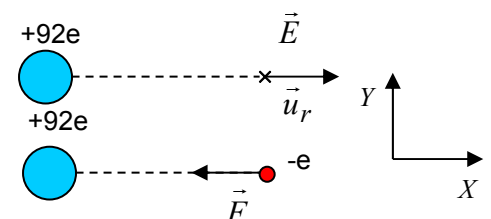
Imatges obtingudes de la següent pàgina que, **ATENCIÓ, són CREADORISMS ISLÀMICS.**

<http://www.harunyahya.com/es/naturaleza04.php>



PROBLEMA DE CÀRREGUES PUNTUALS

2.3.-Un nucli d'urani té una càrrega de 92e. (a) Quin és el mòdul i direcció del camp elèctric que crea aquest nucli a una distància de 10^{-10} m d'ell? (b) Quin és el mòdul i direcció de la força sobre un electró en aqueix punt? (Kane, Problema 16.7) **SOL:** (a) 1.32×10^{13} C/N; (b) 2.12×10^{-6} N.



• **Solució:**

- a) Si definim un sistema d'eixos com el indicat en la figura, el vector \vec{u}_r en el punt camp té direcció X, es a dir, $\vec{u}_r = \vec{u}_x$. Per tant, el camp elèctric en el punt situat a una distància d del nucli serà:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_x = k \frac{Q}{d^2} \vec{u}_x = 9 \times 10^9 \frac{92 \cdot 1.6 \times 10^{-19}}{(10^{-10})^2} = 1.32 \times 10^{13} \vec{u}_x \text{ N/C}$$

És a dir, essent Q és positiva, el camp elèctric està dirigit des de la càrrega Q cap el "punt camp".

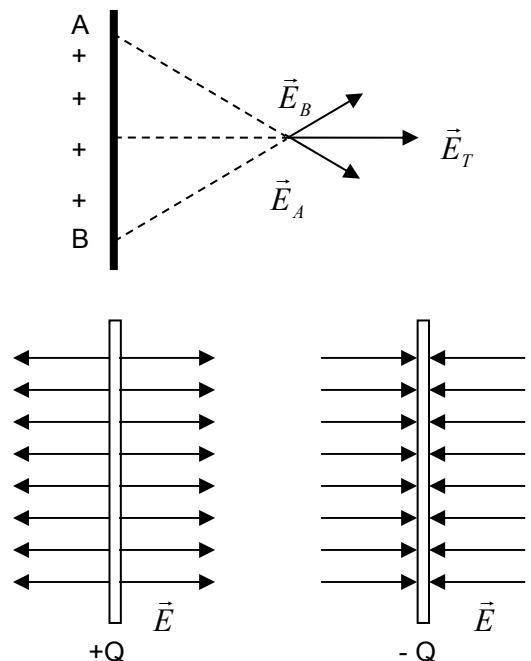
- b) La força sobre l'electró serà:

$$\vec{F} = q \vec{E} = (-1.6 \times 10^{-19}) \cdot 1.32 \times 10^{13} \vec{u}_x = 2.12 \times 10^{-6} (-\vec{u}_x) \text{ N}$$

Com q és negativa, F té el sentit oposat al camp elèctric ($-\vec{u}_x$).

Camp elèctric creat per un pla carregat uniformement

- Un pla carregat uniformement és un pla en el que hi ha una càrrega elèctrica repartida per igual.
- La densitat de càrrega és la càrrega per unitat d'àrea del pla Q/A, les seues unitats són C/m².
- **Direcció:** En les proximitats d'un pla carregat uniformement, el camp elèctric és pràcticament perpendicular a ell. Tal com es ve en el dibuix, açò és degut a que els components paral·lels a la superfície es compensen, mentre que els perpendiculars se sumen.
- **Mòdul:** Es pot demostrar (veure Apèndix 17.1, Cussó) que la intensitat del camp elèctric en les proximitats d'un pla carregat ve donat per: $E = 2\pi k \frac{Q}{A}$. Noteu que és un valor constant i no depèn de la posició.
- **Sentit:** Depèn del signe de la càrrega del pla, de forma similar al cas de la càrrega puntual:
 - si la càrrega Q és positiva, el camp elèctric s'allunya del pla carregat.
 - si la càrrega Q és negativa, el camp elèctric té direcció cap el pla carregat.



Camp creat per dos plans carregats uniformement

- Si disposem de dos plans carregats amb càrregues iguals però de signo oposat, el camp elèctric es compensa fora dels plans i se suma entre ells.
- D'aquesta manera:
 - el mòdul de E ve donat per $E = 4\pi k \frac{Q}{A}$
 - direcció i sentit: E és perpendicular als plans i va dirigit del pla positiu al negatiu.
- La membrana cel·lular es comporta com dos plans carregats uniformement.

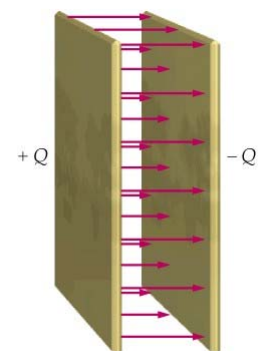


Figura 24.02, Tipler 5ª Ed

2.2 El potencial elèctric

- El treball elemental que fa una força \vec{F} per a realitzar un desplaçament $\Delta\vec{L}$ es

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{L}$$

- Quan el treball el fa un camp conservatiu, el fa per disminuir la seua energia potencial. És a dir, un camp conservatiu està dirigit en la direcció de l'energia potencial decreixent.
- Per exemple, en el cas del camp gravitatori, quan cau una pedra (és a dir, quan el camp gravitatori fa un treball), la pedra cau des de dalt cap a baix, és a dir, des d'un punt amb una certa energia potencial cap un altre amb una energia potencial menor.

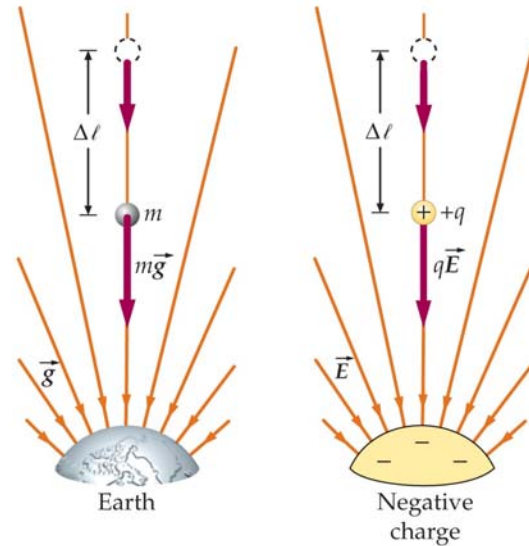


Figura 23.1, Tipler 5ª Ed

- Per tant, si el treball el fa el camp: $\Delta U = [U]_{final} - [U]_{inicial} = -\Delta W$, és a dir, ΔU és negatiu.
- El camp elèctric també és conservatiu. Per tant, si un camp elèctric fa una força sobre una càrrega de prova q positiva (veure Figura del Tipler), aleshores:

$$\Delta U = [U]_{final} - [U]_{inicial} = -q \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

Essent també la diferència ΔU negativa.

- En aquest cas, la diferència d'energia potencial ΔU depèn del valor i signe de la càrrega de prova q. Per a que no depenga de la càrrega, es defineix la diferència de potencial com la diferència d'energia potencial per unitat de càrrega de prova:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{L}$$
 - La unitat de diferència de potencial és el volt (V).
 - La línia que uneix els punts amb el mateix potencial s'anomena línia equipotencial
- L'avantatge del potencial és què, essent una magnitud escalar i per tant més fàcil d'utilitzar, conté informació sobre el camp elèctric, que és una magnitud vectorial. Vorem a continuació com podem deduir les característiques vectorials del camp elèctric (mòdul, direcció i sentit) a partir de les línies equipotencials.

Característiques del camp elèctric a partir del potencial:

- Considerem una zona de l'espai en la que hi ha un camp elèctric. Suposarem dues línies equipotencials, per exemple de 0 i 1 V (veure figura). El raonament que es farà serà respecte d'aqueixes línies, però es pot repetir per a qualsevol altres.
- Sentit del camp elèctric:** Com el camp elèctric és conservatiu, va dirigit des de punts amb una certa energia potencial cap a punts amb energia potencial menor.

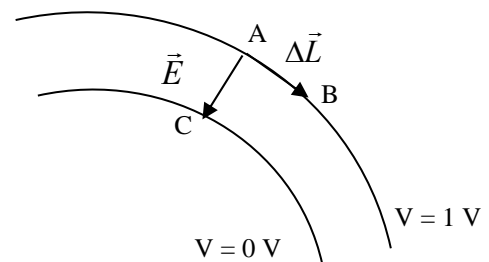
- El sentit del camp elèctric és el dels potencials decreixents.

- Direcció del camp elèctric:** Suposem que desplacem una càrrega sobre una línia equipotencial, per exemple des de A cap a B. Com el potencial és el mateix en A que en B, $\Delta V = 0$. Per altra part: $\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{L} = -E \Delta L \cos \theta$

En conseqüència: $-E \Delta L \cos \theta = 0$

Com el producte vectorial sols pot ser zero per a un angle $\theta = \pm 90^\circ$, aleshores

- El vector camp elèctric és perpendicular a les línies equipotencials.



- **Mòdul del camp elèctric** (per a camps elèctrics constants): Suposem ara que el camp elèctric és constant i desplaça una càrrega en direcció perpendicular a les línees equipotencials. Ho farà des de A cap a C, ja que el potencial en C és menor que en A. Per tant

$$\Delta V = -\vec{E} \Delta \vec{L}$$

Recordem que el signe negatiu indica que el camp va dirigit en el sentit del potencial decreixent.

- Quan el camp elèctric és constant, es pot calcular el mòdul del camp elèctric en la direcció perpendicular a la línees equipotencials com

$$|E| = \frac{|\Delta V|}{\Delta L}$$

essent ΔV la diferència de potencial i ΔL la distància entre les línees equipotencials en la direcció perpendicular.

- ADVERTÈNCIA: per a camps no uniformes, cal treballar amb diferencials, ja que la relació entre el camp elèctric i el potencial ve donada per l'operador gradient: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

- A partir d'aqueixes expressions es pot veure que una altra unitat per al camp elèctric és el V/m.
- El potencial creat per una càrrega puntual es pot calcular fàcilment a partir de l'energia potencial (veure ap. 17-5.2, Cussó) essent

$$V = k \frac{Q}{r}$$

- Les línees equipotencials produïdes per una càrrega puntual són cercles concèntrics.
- Degut a la dependència amb $(1/r)$, els cercles estan molt junts prop de la càrrega i es van separant a mesura que s'allunyen de la càrrega.

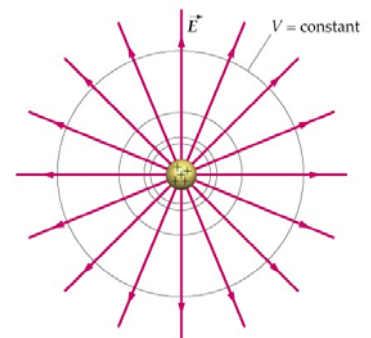


Figura 23.18, Tipler 5ª Ed

2.3 El condensador

- S'anomena condensador al conjunt de dos plans carregats amb càrregues iguals però de signe oposat. Tal com hem vist anteriorment, el camp elèctric es compensa fora dels plans i se suma entre ells (es "condensa" en l'interior, d'ací el nom).
- Com es pot aconseguir que dos plans es carreguen amb una certa càrrega elèctrica Q? Si dos plans conductors inicialment descarregats es connecten a una pila, tal com mostra la figura, progressivament anirà passant càrrega de la pila al condensador. El pla connectat al pol positiu de la pila es carregarà amb càrrega positiva, i el connectat al pol negatiu amb càrrega negativa.
- El procés continua fins que la càrrega arriba a un cert valor $\pm Q$. El quocient entre la càrrega Q a la que s'arriba i la diferència de potencial que s'obté s'anomena capacitat del condensador

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

- la capacitat del condensador dóna la relació entre la càrrega elèctrica que pot emmagatzemar i la diferència de potencial a la que es troba, essent $\Delta V = V_+ - V_-$
- La unitat de la capacitat és el faradi (F)
- En la cèl·lula, com el gruix de la membrana és molt menor que la grandària de la cèl·lula, la membrana es pot considerar equivalent a un condensador de plaques paral·leles.
- Tal com hem vist prèviament, el camp elèctric entre les plaques d'un condensador ve donat per:

$$E = 4\pi k \frac{Q}{A} \text{ i està dirigit des de la placa } +Q \text{ cap a la placa } -Q.$$

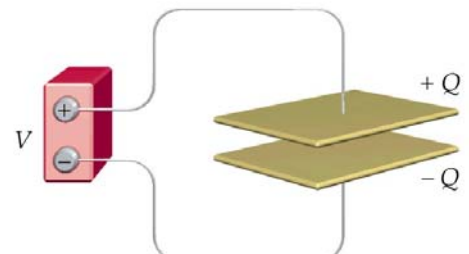


Figura 24.03, Tipler 5ª Ed

- Si el camp elèctric va des de la placa positiva cap a la negativa, el potencial en la placa positiva és més gran que en la negativa.
- Podem trobar una relació entre el mòdul del camp elèctric i el potencial, considerant que les plaques són superfícies equipotencials separades una distància d :

$$|\Delta V| = |E| \Delta L = 4\pi k \frac{Q}{A} d$$

- Per tant, la capacitat d'un condensador de plaques paral·leles serà:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{4\pi k \frac{Q}{A} d} = \frac{A}{4\pi k d}$$

Noteu que la capacitat del condensador només depèn d'aspectes geomètrics (àrea de les plaques i distància entre elles) i de la constant k , però no del camp elèctric ni el potencial.

Efecte d'un dielèctric en el camp elèctric:

- Un material conductor és aquell en el què les càrregues es poden moure lliurement.
- Una substància dielèctrica o aïllant és aquella en què les distribucions de càrrega dels seus àtoms o molècules poden ser distorsionades per efecte d'un camp elèctric, però no es poden moure lliurement.
- En presència d'un camp elèctric les molècules es distorsionen, separant-se lleugerament la càrrega positiva (nucli) de la negativa (núvol electrònic).

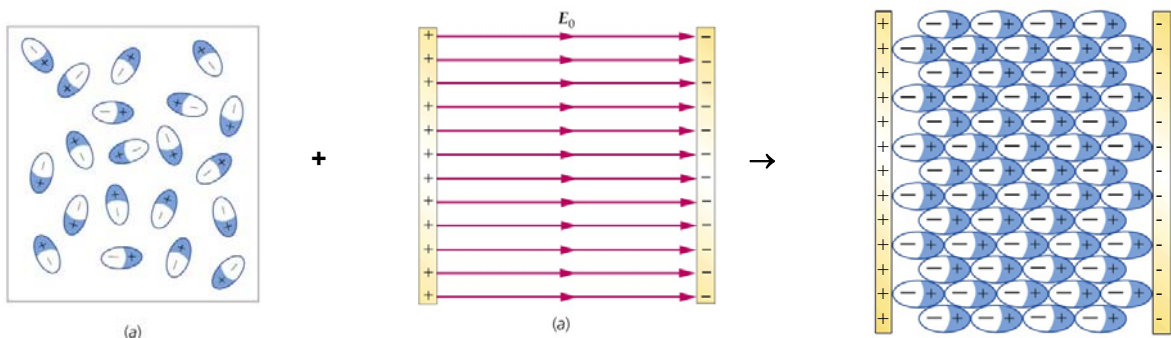
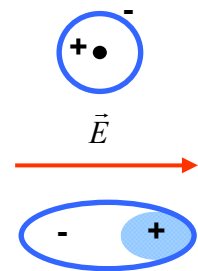


Figura 24.23, Tipler 5ª Ed

- Un dielèctric amb els seus àtoms inicialment desorientats (figura 24.23 Tipler a), quan s'introdueix en el camp elèctric E_0 present entre dos plans carregats (figura 24.23 Tipler b), els seus àtoms s'orienten (figura 24.23 Tipler c).
- Quan les molècules s'orienten en presència del camp elèctric E_0 , la seua part positiva apunta a la placa negativa i la part negativa a la placa positiva.
- Aquestes molècules orientades creen a la seua vegada un altre camp elèctric E_{diel} que s'oposa al camp inicial E_0 , reduint-lo (figura 24.24 Tipler).
- D'aquesta manera, el camp elèctric en l'interior dels plans carregats, que abans era E_0 , es redueix a E

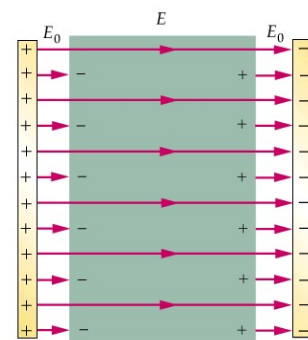


Figura 24.24, Tipler 5ª Ed

$$E = E_0 - E_{diel}$$

És a dir, on abans hi havia un camp E_0 , al introduir el dielèctric es redueix a E .

- Noteu que, quant més gran és E_0 , tant més gran és E_{diel} i tant més petit és el camp resultant E . Aquesta reducció del camp elèctric per efecte del dielèctric se sol expressar mitjançant una constant k_r , major que la unitat que divideix el valor del camp, en la forma $E = \frac{E_0}{k_r}$.
- El factor k_r , s'anomena constant dielèctrica relativa i és un número adimensional que dona compte de quant es redueix un camp elèctric quan està en presència d'un dielèctric. La taula mostra alguns valors representatius.

| Material | k_r |
|--------------|-------|
| aire | 1 |
| paper | 3.5 |
| vidre | 5-10 |
| membrana axó | 8 |
| plàstic | 3-20 |
| aigua | 78 |

- **TAULA 2.2: Constant dielèctrica relativa**
(Kane, Taula 16.1)

Càlcul de magnituds en presència de un dielèctric

- L'efecte d'un dielèctric s'introdueix en les expressions de E , ΔV i C substituint la constant k_0 , pròpia del buit, per la constant k , pròpia de dielèctric i definida com $k = \frac{k_0}{k_r}$. Per tant, en presència d'un dielèctric:
 - Camp elèctric creat per una q puntual: $\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r = \frac{k_0}{k_r} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
 - Potencial creat per una càrrega puntual: $V = k \frac{Q}{r} = \frac{k_0}{k_r} \frac{Q}{r}$
 - Condensador amb dielèctric: $\Delta V = 4\pi k \frac{Q}{A} d = 4\pi \frac{k_0}{k_r} \frac{Q}{A} d$ $C = \frac{A}{4\pi k d} = k_r \frac{A}{4\pi k_0 d}$
 - Observem que el camp elèctric i el potencial disminueixen, mentre que la capacitat augmenta.

PROBLEMA DE PLANS CARREGATS (CONDENSADOR)

2.9.-Dues plaques quadrades de 0.1 m de costat tenen càrregues iguals i oposades de 10^{-6} C, distribuïdes uniformement en cada una d'elles. Les plaques es troben a una distància de 10^{-2} m. (a) Quin és el mòdul i direcció del camp elèctric entre les plaques? (b) Quina és la diferència de potencial entre les dues plaques? (c) Quina és la capacitat d'aquest condensador? (d) Si s'introdueix entre elles una làmina de constant dielèctrica relativa igual a 5, indica quines són les magnituds que canvien i quant canvien.

- Solució:

○ a) Mòdul de E: $E = 4\pi k \frac{Q}{A} = 4\pi \cdot 9 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{(0.1 \times 0.1)} = 1.13 \times 10^7 \text{ V/m}$

○ b) $\Delta V = E \Delta L = 1.13 \times 10^7 \cdot 10^{-2} = 1.13 \times 10^5 \text{ V}$

○ c) $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{10^{-6}}{1.13 \times 10^5} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}$

○ d) $E' = \frac{E}{k_r} = \frac{1.13 \times 10^7}{5} = 2.26 \times 10^6 \text{ V/m}$ $\Delta V' = \frac{\Delta V}{k_r} = \frac{1.13 \times 10^5}{5} = 2.26 \times 10^4 \text{ V}$

$C' = k_r C = 5 \cdot 8.85 \times 10^{-12} = 4.43 \times 10^{-11} \text{ F}$

2.4 Corrent elèctric

- **Origen del corrent elèctric:** el corrent elèctric es degut a que un camp elèctric arrossega algun tipus de càrrega que està en disposició de moure's. No tots els materials permeten el moviment de càrregues al seu interior i la possibilitat del pas d'un corrent elèctric dins d'ell.
 - **Conductors** són aquells materials en els que les càrregues es poden desplaçar amb facilitat.
 - **Aïllants o dielèctrics** són aquells materials en els que les càrregues no tenen capacitat de moviment. Com hem vist prèviament, només es desvien lleugerament de la seua posició.
- Es defineix el **corrent elèctric** com el nombre de càrregues elèctriques en una unitat de temps que passen per una secció transversal:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

⇒ la unitat de corrent elèctric és l'amper (A).

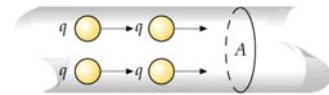


Figura 25.01, Tipler 5ª Ed

- **Llei d' Ohm per a un medi conductor:**

- Experimentalment s'ha pogut comprovar que dins d'un conductor el corrent per unitat d'àrea transversal és proporcional al camp elèctric que arrossega les càrregues

$$\frac{I}{A} \propto E \rightarrow \frac{I}{A} = \sigma E$$

⇒ aquesta expressió es coneix com **Llei d'Ohm per a medis materials**

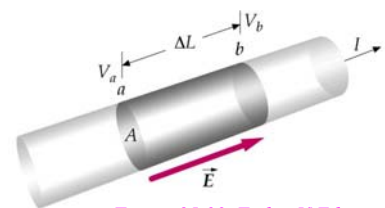


Figura 25.03, Tipler 5ª Ed

- La constant de proporcionalitat depèn del medi i s'anomena **conductivitat**. Per a un material donat, la conductivitat és, per tant, una indicació de la facilitat amb la que un corrent elèctric passa a través d'ell.
- S'anomena **resistivitat** a la inversa de la conductivitat: $\rho = \frac{1}{\sigma}$. Per a un material donat, la resistivitat és una indicació de la seua oposició al pas del corrent elèctric. La llei d'Ohm serà ara

$$\frac{I}{A} = \frac{1}{\rho} E$$

- La **taula** mostra la resistivitat per a diferents medis (**C**onductors, **S**emiconductors i **A**ïllants).

| Material | ρ ($\Omega \cdot m$) | Tipus |
|---------------------|-----------------------------|----------|
| Coure | 1.7×10^{-8} | C |
| Alumini | 2.6×10^{-8} | C |
| Germani | 0.6 | S |
| Silici | 2.4×10^3 | S |
| vidre | $10^{10} \cdot 10^{14}$ | A |
| fluids del cos humà | 0.15 | S |

TAULA 2.3: Resistivitats per alguns materials seleccionats (Kane, T17.1)

- **Llei d'Ohm per a un conductor cilíndric**

- Suposem un conductor cilíndric amb un camp elèctric constant E al seu interior dirigit des de l'extrem A cap el B. Recordem que el camp elèctric es dirigeix en el sentit del potencial decreixent, per tant, $V_A > V_B$. La relació entre la diferència de potencial entre els extrems A i B i la distància L entre ells serà:

$$V_A - V_B = E L$$

- Si substituïm E en funció de I i de ρ :

$$V_A - V_B = \frac{I \rho}{A} L = \rho \frac{L}{A} I = R I$$

- Es defineix la **resistència** elèctrica d'un medi material com: $R = \rho \frac{L}{A}$. Noteu que la resistència sols depèn de les propietats elèctriques del medi (la seua resistivitat ρ) i de la seua geometria (la longitud ΔL i l'àrea de la secció A). La unitat de resistència és l'ohm (Ω).

- La relació $V_A - V_B = R I$ ($V_A > V_B$) es coneix como **Llei de Ohm per a un cable conductor**.

PROBLEMA

2.15.- Determina el valor del camp elèctric E en l'interior d'un cable de 10 m quan aquest transporta un corrent de 1.3 A. Dades: $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$, $r = 0.81 \text{ mm}$. **SOL:** 0.0107 V/m (Exemple 25.5, Tipler 5ª Ed.)

• Solució:

- La resistència del cable serà: $R = \rho \frac{L}{A} = 1.7 \times 10^{-8} \frac{10}{\pi(0.81 \times 10^{-3})^2} = 0.0825 \Omega$
- La diferència de potencial entre els seus extrems s'obté aplicant la Llei de Ohm: $V_A - V_B = R I = 0.0825 \cdot 1.3 = 0.107 \text{ V}$
- El camp elèctric en l'interior serà: $E = \frac{\Delta V}{L} = \frac{V_A - V_B}{L} = \frac{0.107}{10} = 0.0107 \text{ V/m}$

2.5 Circuits elèctrics de CC d'una malla

- S'anomena corrent continu (CC) a aquell corrent elèctric en el que les càrregues es mouen sempre en el mateix sentit. Per conveni, el sentit del corrent continu és el del moviment de les càrregues positives, és a dir, des de potencials alts cap a potencials baixos (sentit en el que el camp elèctric arrossega les càrregues positives).

- S'anomena corrent altern (CA) a aquell corrent elèctric en el que les càrregues alternen el sentit del moviment.

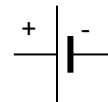
- Circuit elèctric d'una malla: és aquell que consta només d'un camí tancat o malla.

- Generador elèctric: és aquell element que genera energia elèctrica a partir d'altres tipus d'energia (como la mecànica: dinamo, o química: pila). Les seues característiques més importants són:

- actua com a font de càrregues, generant un flux de càrregues d'intensitat elèctrica I .
- manté una diferència de potencial (ddp) entre els seus borns o pols. En un generador ideal eixa ddp és independent del corrent que ix del generador i s'anomena força electromotriu (fem). Les seues unitats són els volts i es representa mitjançant la lletra grega ε $V_+ - V_- = \varepsilon$

• Elements d'un circuit elèctric:

- Generador elèctric: caracteritzat per la seua força electromotriu ε (el corrent I que ix d'ell depèn, com vorem més endavant, de la resta de components del circuit).



- Resistències: caracteritzades pel seu valor R .



- Cables conductors: se'ls suposa una resistència negligible (per als nostres efectes $R_{\text{cables}} = 0$) i uneixen elèctricament els elements del circuit.

• Circuit d'una malla amb un generador i una resistència:

- Si el generador és ideal, és a dir, sense pèrdues, aleshores:

$$V_+ - V_- = \varepsilon$$

- Per altra part: $V_c - V_d = I R$

- Com $R_{\text{cables}} = 0$, entre els extrems dels cables no hi ha diferència de potencial ($V_+ = V_a = V_c$; $V_- = V_b = V_d$) i es dedueix que: $V_a - V_b = V_+ - V_- \rightarrow \varepsilon = I R$

- Per tant, podem calcular el corrent que recorre el circuit com: $I = \frac{\varepsilon}{R}$

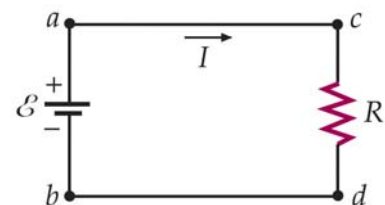


Figura 25.07, Tipler 5ª Ed

- Agrupació de resistències:

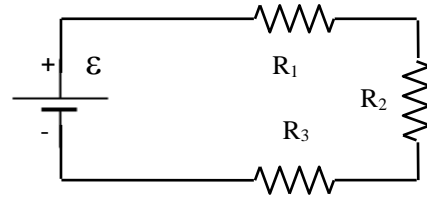
- resistències en sèrie: varies resistències estan connectades en sèrie quan per elles passa el mateix corrent.

- Si hi ha varies resistències en sèrie en un circuit, les seues diferències de potencial se sumen, aleshores: $\varepsilon = V_1 + V_2 + V_3$

- Com $V_1 = I \cdot R_1$; $V_2 = I \cdot R_2$; $V_3 = I \cdot R_3$.

- Aleshores $I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3}$.

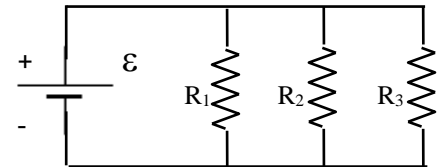
- Podem definir una resistència equivalent sèrie com: $R_S = R_1 + R_2 + R_3$, tal que $I = \frac{\varepsilon}{R_S}$



- Resistències en paral·lel: varies resistències estan connectades en paral·lel quan totes elles estan sotmeses a la mateixa diferència de potencial.

- Quan en un circuit hi ha resistències en paral·lel, el corrent I que ix del generador es bifurcarà en corrents I_1, I_2, I_3 per cada branca. Per tant $I = I_1 + I_2 + I_3$.

- El corrent per cada branca està relacionat amb la fem de la pila mitjançant la resistència de la branca



$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} \quad I_3 = \frac{\varepsilon}{R_3} ; \quad \text{per tant } I = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_3} = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

- Podem definir una resistència equivalent paral·lel com: $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$,

$$\text{tal que } I = \frac{\varepsilon}{R_p}$$

- Circuits amb més d'una malla

- Alguns circuits de varies malles (no tots) es poden reduir a una malla agrupant convenientment les resistències o els generadors. Per poder fer l'agrupament és necessari que els generadors estiguen tots en la mateixa malla, en cas contrari hi ha que aplicar altres mètodes de càlcul.

- Circuits amb diferents generadors en una malla: estratègia de càlcul

- En primer lloc, es redueix el circuit de varies malles a una malla, agrupant les resistències. Es calcula la resistència equivalent total: $R_{equivalent}$.

- Seguidament, es tria un sentit per al corrent. L'elecció es fa analitzant quin generador domina i tenint en compte que el corrent eixirà pel pol positiu d'aqueix generador dominant. En cas de no elegir adequadament, després es pot corregir l'error.

- El corrent que circula per aqueixa malla es pot calcular com: $I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \dots}{R_{equivalent}}$

- En aquesta expressió, les forces electromotrius segueixen un conveni de signes:

- La fem es considera positiva si el corrent ix del pol positiu; en aquest cas el generador actua com subministrador d'energia elèctrica.

- La fem es considera negativa si el corrent ix del polo negatiu; en aquest cas el generador està consumint d'energia, és a dir, se està carregant.

- Si el corrent calculat és negatiu, això significa que el sentit triat prèviament per al corrent no és el correcte. Es tria el sentit oposat i es refà el càlcul.
- Càlcul de les diferències de potencial
 - Les diferències de potencial entre els extrems de les resistències són positives quan es calculen en el sentit del corrent. És a dir, si el corrent va des de A cap a B, aleshores $V_A > V_B$ i per tant $V_A - V_B = I R$.
 - En els generadors, les *ddp* sempre s'acompleix que $V_+ > V_-$ i per tant $V_+ - V_- = \varepsilon$, independentment de si actuen com subministradors d'energia elèctrica (en aquest cas el corrent ix pel pol positiu), o si actuen com consumidors d'energia elèctrica (en aquest cas el corrent ix pel pol negatiu).
- Pèrdua de calor per efecte Joule
 - Quan per un conductor es desplacen càrregues, és perquè hi ha una diferència de potencial entre els seus extrems i un camp elèctric en el seu interior (que va del potencial alt:+, al potencial baix:-)
 - En aquest cas, és el camp elèctric és el que fa el treball de desplaçar les càrregues. Aquest treball es converteix en calor, com conseqüència dels xocs de les càrregues entre elles i amb la resta de material i s'anomena calor per efecte Joule.
 - El treball que fa el camp elèctric E per desplaçar una càrrega Δq serà:

$$\Delta W = \Delta q \vec{E} \Delta \vec{L} = -\Delta q \Delta V = -\Delta U$$

on hem expressat l'energia potencial en funció del potencial. El signo menys indica que es tracta d'una pèrdua d'energia potencial.
 - La potència es defineix com la variació amb el temps d'aqueixa pèrdua d'energia

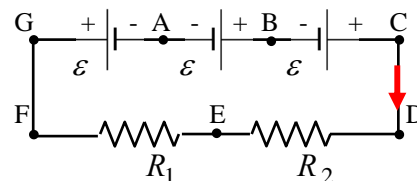
$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Delta V = I \Delta V = I(V_A - V_B)$$
 - On hem suposat que el corrent va de A cap a B, essent V_A i V_B els potencials en aqueixos punts i acomplint-se que $V_A > V_B$.
 - Per a les resistències: si la resistència entre A i B és R, aleshores $(V_A - V_B) = I R$
 - per tant $P = I^2 R$ essent P la potència consumida per aqueixa resistència.
 - Per als generadors ideals: en tots els casos s'acompleix $(V_+ - V_-) = \varepsilon$
 - per tant $P_{gen} = I \varepsilon$ essent P_{gen} la potència subministrada o consumida pel generador.
 - Balanç d'energia: tenint en compte el principi de la conservació de l'energia, la potència subministrada pel generador (o els generadors, si hi ha diversos) ha de ser igual a la suma de les potències consumides. Les potències consumides seran degudes a la potència dissipada per les resistències per efecte Joule, més la consumida pels generadors que s'estan carregant i que, en conseqüència, consumeixen energia.

$$P_{gen-sum1} + P_{gen-sum2} + \dots = I(V_A - V_B) + I(V_B - V_C) + \dots + P_{gen-cons1} + P_{gen-cons2} + \dots$$
- Capítol d'Electricitat amb problemes resolts:

<http://bohr.fcu.um.es/miembros/moo/p-ele.pdf>

PROBLEMA

2.18. En el circuit de la figura calcula (a) la intensitat i sentit del corrent elèctric, (b) la diferència de potencial entre els extrems de cada una de les resistències i (c) les potències subministrades o dissipades per cada un dels elements del circuit. DADES: $\varepsilon = 1.5 \text{ V}$; $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$. **SOL:** (a) 0.15 A en el sentit horari, (b) 0.6 V, 0.9 V, (c) 0.09 W, 0.135 W, 0.225 W, 0.225 W, 0.225 W.

• Solució:

- (a) En primer lloc, assignem un sentit al corrent. Como les tres *fem* són iguals, les dues que estan connectades igual dominaran. Si dominen i generen corrent, aquest eixirà pel seu pol positiu (circularà en el sentit de les agulles del rellotge).

➤ El corrent ve donat per $I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{R_{\text{equivqlent}}}$, per tant, necessitem calcular la resistència

equivalent. Como les resistències estan en sèrie: $R_S = R_1 + R_2 = 4 + 6 = 10 \Omega$

➤ Per tant $I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{R_{\text{equivqlent}}} = \frac{1.5 + 1.5 - 1.5}{10} = 0.15 \text{ A}$, on hem aplicat el conveni de signes que

diu que les *fem* són positives si el corrent ix pel seu pol positiu del generador.

- (b) La diferència de potencial entre els bornes de cada component és:

$$\text{Resistències: } V_1 = I \cdot R_1 = 0.15 \cdot 4 = 6 \text{ V} \quad V_2 = I \cdot R_2 = 0.15 \cdot 6 = 9 \text{ V}$$

$$\text{Generadors, per a tots: } V_+ - V_- = \varepsilon = 1.5 \text{ V}$$

Les diferències de potencial són:

➤ $V_A - V_B = V_- - V_+ = -1.5 \text{ V}$

➤ $V_B - V_C = V_- - V_+ = -1.5 \text{ V}$

➤ $V_D - V_E = V_1 = 6 \text{ V}$

➤ $V_E - V_F = V_2 = 9 \text{ V}$

➤ $V_G - V_A = V_+ - V_- = 1.5 \text{ V}$

➤ $V_C - V_D = V_F - V_G = I \cdot R_{\text{cables}} = 0 \text{ V}$ ja que $R_{\text{cables}} = 0 \Omega$

- (c) les potències són:

➤ $P_1 = I^2 R_1 = 0.15^2 \cdot 4 = 0.09 \text{ W}$

➤ $P_2 = I^2 R_2 = 0.15^2 \cdot 6 = 0.135 \text{ W}$

➤ $P_{\text{gen-esquerra}} = I \varepsilon = 0.15 \cdot 1.5 = 0.225 \text{ W}$

➤ $P_{\text{gen-centre}} = I \varepsilon = 0.15 \cdot 1.5 = 0.225 \text{ W}$

➤ $P_{\text{gen-dreta}} = I \varepsilon = 0.15 \cdot 1.5 = 0.225 \text{ W}$

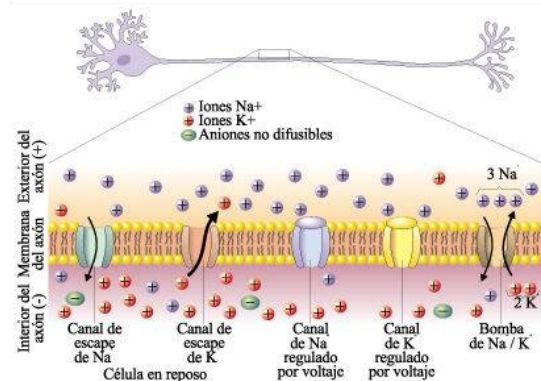
➤ $P(\text{generada}) = 0.225 + 0.225 = 0.450 \text{ W}$

$P(\text{consumida}) = 0.09 + 0.135 + 0.225 = 0.450 \text{ W}$ on hem tingut en compte que el generador de l'esquerra s'està carregant, ja que el corrent entra pel pol +.

Propietats estàtiques de la membrana cel·lular (capítol 19, apartat 17.6, Cussó)

- Tota cèl·lula està envoltada per una membrana (membrana plasmàtica) que li permet mantindre la seua identitat, aïllant-la de l'exterior. El model acceptat hui en dia per a la membrana cel·lular és el del mosaic fluid, que és comú per a tots els organismes vius (animals, plantes i microorganismes).
- La membrana té un gruix aproximat d entre 8 i 12 nm i consta de una dobla capa lipídica.

- La membrana cel·lular incorpora també diferents proteïnes, algunes d'elles anomenades de canal, ja que permeten l'intercanvi de substàncies entre el citoplasma i l'exterior a través de canals denominats iònics. Aquest intercanvi resulta imprescindible per al manteniment de l'activitat cel·lular.



<https://www.researchgate.net/publication/316158457>

- L'obertura i tancament d'aquests canals iònics dona lloc a la generació de senyals elèctrics associats amb el corresponent flux de ions a través de la membrana. Algunes cèl·lules, com les cèl·lules nervioses i musculars, han desenvolupat especialment aquesta capacitat, però en realitat totes les cèl·lules fan us d'ella.
- La permeabilitat de la membrana resulta ser molt selectiva donant lloc a que la composició del citoplasma siga notablement diferent del medi extern, produint-se un excés de ions K⁺ i un defecte de ions Na⁺ i Cl⁻ en el citoplasma respecte de les seues concentracions en el medi extracel·lular.
- Como conseqüència d'aquest desequilibri iònic, apareix una càrrega elèctrica neta a ambdós costats de la membrana, quedant el citoplasma carregat negativament respecte de l'exterior. Així, apareix un camp elèctric dins de la membrana i una diferència de potencial elèctric entre l'exterior i el citoplasma, anomenat **potencial de membrana**.

Camp elèctric en la membrana

- La membrana es pot considerar, des de el punt de vista elèctric, com un condensador aproximadament pla, ja que el seu gruix és molt més menut que les dimensions cel·lulars.
- Per tant, les seues propietats quedaran descrites pel seu gruix d , àrea A i constant dielèctrica relativa k_r .
- El valor del potencial de membrana i el camp elèctric al seu interior venen determinats pel valor de la densitat de càrrega superficial. Aquests valors van canviant segons l'activitat de la membrana. En el que segueix, estudiarem principalment la membrana cel·lular en condicions estàtiques.

- Mesures elèctriques realitzades en membranes demostren que el camp elèctric en el seu interior és de l'ordre de:

$$E \approx 10^7 \text{ N/C}$$

- Es pot calcular el valor de la diferència de potencial entre l'interior de la cèl·lula (citoplasma) i el medi extracel·lular, a partir del camp elèctric en l'interior de la membrana i el seu gruix ($d \cong 10 \text{ nm}$):

$$\Delta V = E \Delta L = 10^7 \cdot 10^{-8} = 0.1 \text{ V} = 100 \text{ mV}$$

- Aqueix és un valor relatiu. Per donar un valor absolut, s'adopta com conveni prendre el potencial exterior a la cèl·lula com zero. Per la qual cosa, com el citoplasma es troba carregat negativament respecte del medi extracel·lular, el potencial en l'interior és de l'ordre de

$$V_{\text{int}} \approx -100 \text{ mV}$$

- Aquest valor pot canviar durant els diferents processos dinàmics de l'activitat cel·lular.

Capacitat de la membrana

- Tal com hem dit, la membrana es pot considerar com un condensador pla. Per tant, la seua capacitat elèctrica es pot expressar com

$$C = \frac{k_r A}{4\pi k_0 d}$$

- Com la capacitat depèn directament de l'àrea, és més habitual utilitzar la capacitat específica o capacitat per unitat d'àrea de la membrana

$$\frac{C}{A} = \frac{k_r}{4\pi k_0 d}$$

Les seues unitats en el SI són: F/m². És a dir, si volem calcular la capacitat d'un fragment de membrana, tenim que *multiplicar* la capacitat específica de la membrana per l'àrea del fragment.

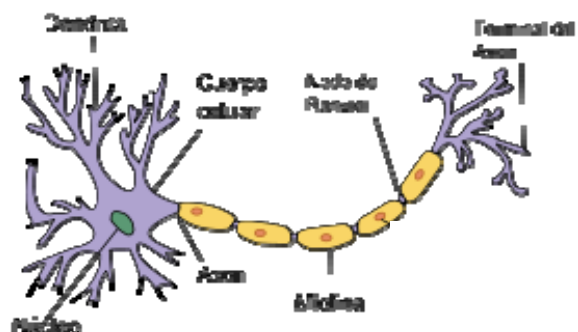
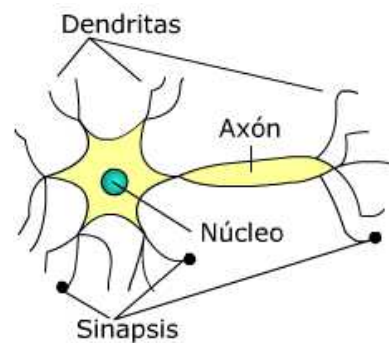
- La càrrega per unitat de àrea acumulada a ambdós costats de la membrana és:

$$\frac{Q}{A} = \frac{CV}{A}$$

Les seues unitats són: Ω/m². Tal como passa amb la capacitat, per a calcular la càrrega d'un fragment de membrana, tenim que *multiplicar* aquest valor per l'àrea del fragment.

L'estructura de les cèl·lules nervioses

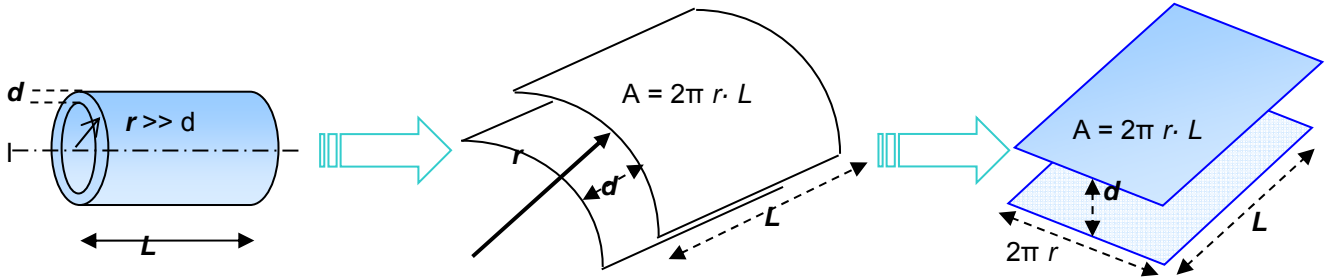
- Una neurona típica està composta per un cos cel·lular (que conté el nucli), les dendrites (unes prolongacions característiques que irradien del cos cel·lular) i l'axó.
- L'axó, que acostuma ser únic per a una neurona, sol tindre un diàmetre comprés entre 1 i 20 μm i pot ser prou llarg. Per exemple, en l'esser humà alguns axons connecten directament les seues extremitats amb la medulla espinal, per la qual cosa la seua longitud pot ser d' 1 m.
- Les dendrites són en general més curtes i estretes però, com l'axó, poden tindre ramificacions.
- Les dendrites són generalment els receptors dels estímuls que arriben a la neurona, donant lloc a canvis en el potencial de la membrana. Els potencials generats es propaguen cap a la regió del nucli, sumant-se, i, eventualment, generant un "impuls nerviós" que es transmet a través de l'axó.
- L'axó estableix contactes fisiològics amb altres cèl·lules a través de les sinapsis.
- En els vertebrats, els axons d'algunes cèl·lules nervioses estan recoberts per una capa aïllant anomenada mielina.
- Aquest recobriment no és continu al llarg de l'axó, sinó que està interromput pels nodes de Ranvier, cada un aproximadament d' 1 μm de longitud i separats per una distància entre 1 i 2 mm. En aquests nodes es dona una amplificació de l'impuls nerviós.
- La corba de mielina augmenta el gruix de la membrana cel·lular (recordem que era ~ 10 nm) en un factor de 200 (~ 2 μm).
- Aquest augment del gruix afecta a les propietats elèctriques de la membrana. Concretament, augmenta la seua resistència i redueix la seua capacitat, la qual cosa redueix també les pèrdues en la transmissió de l'impuls nerviós.



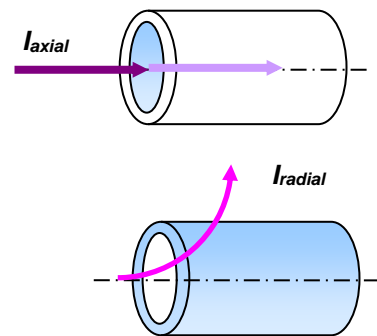
<http://es.wikipedia.org/wiki/Dendrita>

Resistència de l'axó (pag. 935, Cussó)

- Per a calcular les característiques elèctriques de l'axó suposarem que és cilíndric. Considerem un segment d'axó, de longitud L i radi r . El gruix d de la membrana (~ 10 nm) és en general molt menor que el diàmetre $2r$ de l'axó (1 a 20 μm), per la qual cosa, quan estudiem la membrana, podrem considerar-la plana.



- Des de el punt de vista de la conducció del corrent, podem descriure l'axó com un mal conductor (l'axoplasma) recobert d'un mal aïllant (la membrana).
- Per aquest motiu, hi ha dos tipus de corrents: una axial, al llarg de l'axoplasma, i un altre radial, ja que part del corrent elèctric "s'escapa" per la membrana (ix pels canals iònics). per tant, calcularem dos tipus de resistències: una longitudinal, corresponent a la resistència que presenta l'axoplasma al corrent que es propaga en la direcció **axial** de l'axó (resistència de l'axoplasma) i una altra transversal, corresponent a la resistència que presenta la membrana al corrent que es propaga en la direcció **radial** (resistència de la membrana).
- La resistència de l'axoplasma és la que correspon a un conductor cilíndric de longitud L i àrea transversal $A_{transv} = \pi r^2$. Concretant aquets valors per a l'axoplasma, tindrem



$$R = \rho \frac{L}{A} \rightarrow R_{axop} = \rho_{axop} \frac{L_{axop}}{\pi r_{axop}^2} \rightarrow \text{unitats: } \Omega$$

on ρ_{axop} és la resistivitat de l'axoplasma.

- La resistència de la membrana és la que correspon a una làmina de dimensions $2\pi r$ (el perímetre de l'axó), longitud L (la longitud del fragment considerat) i gruix d (el gruix de la membrana). Com el corrent passa en direcció radial, passa per la membrana de forma transversal. Açò implica que la distància recorreguda en el sentit del corrent és el gruix d de la membrana i l'àrea que travessa és l'àrea lateral del cilindre considerat. Concretant aquets valors per a la membrana, tindrem

$$R = \rho \frac{L}{A} \rightarrow R_{memb} = \rho_{memb} \frac{d_{memb}}{2\pi r_{memb} L_{memb}} \rightarrow \text{unitats: } \Omega$$

on ρ_{memb} és la resistivitat de la membrana.

2.6.1 Camp magnètic

- Es diu que els xins descobriren l'ús d'agulles imantades per a orientar-se molts anys abans del naixement de Jesucrist. Com se sap, l'agulla de les brúixoles s'orienta marcant el Nord geogràfic.
- Igualment, és conegut des de fa temps que l'agulla de les brúixoles també es desvia en presència de fragments de magnetita (òxid de ferro).
- En 1820 H.C. Oersted descobrí que, així mateix, un corrent elèctric que circula per un conductor pot desviar l'agulla d'una brúixola (Figura P.858, Tipler 5ª Ed.).
- En definitiva, les agulles imantades s'orienten amb la Terra, la magnetita i els corrents elèctrics.

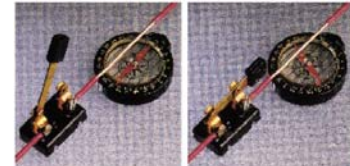
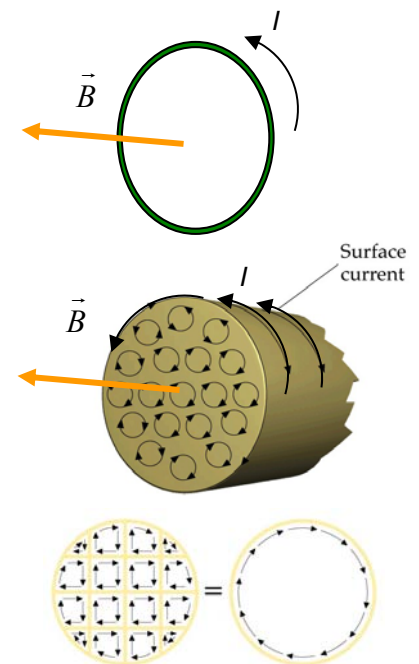


Figura P.881, Tipler 5ª Ed.

- Interpretació d'aquets fenòmens:
 - Hui en dia se sap que, tant la Terra, como la magnetita, com el cable que condueix un corrent elèctric, creen un camp magnètic.
 - Aqueix camp magnètic és el que produeix una força sobre l'agulla d'una brúixola, que s'alinea amb el camp magnètic. Aquest comportament és equivalent a la força que pateixen les càrregues elèctriques en presència d'un camp elèctric.
- Quina relació hi ha entre la magnetita i un cable amb corrent?:
 - Una espira circular, per la que passa un corrent, crea un camp magnètic en l'eix dirigit en direcció perpendicular al pla de l'espira.
 - Una barra cilíndrica de magnetita també crea un camp magnètic dirigit en la direcció de l'eix. Quina relació existeix entre ambdós camps magnètics?
 - La magnetita, com tots els imans permanents, té la característica de que els seus àtoms estan ordenats, de tal manera que els corrents microscòpics van totes ells en la mateixa direcció.
 - En l'interior del material, els corrents es compensen, però en la superfície queda un corrent net que equival al corrent d'un conjunt d'espires.
 - És a dir, les fonts del camp magnètic són els corrents elèctrics, bé microscòpics, bé macroscòpics. Recordem que, en el cas del camp elèctric, les fonts eren les càrregues elèctriques.
 - ⇒ Unitat: la unitat del camp magnètic és la tesla (T). Como és una unitat gran per als camps habituals, s'utilitzen els submúltiples mT i μ T.
 - La taula mostra alguns valors típics.



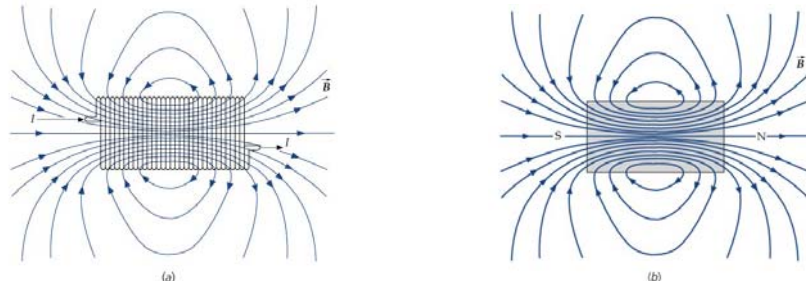
Figures 27.32 i 29.33, Tipler 5ª Ed.

TAULA 2.4: Valor del camp magnètic produït per diferents fonts

| Font | Camp Magnètic |
|-----------------------|--------------------------|
| Impuls axó | $\sim 10^{-10}$ T |
| Camp de la Terra | $\sim 10^{-4}$ T |
| Línia tramvia (500 A) | $\sim 10^{-4}$ T (a 2 m) |
| Camp RMN | $\sim 10^{-1}$ T |

- Representació del camp magnètic:
 - Al igual que el camp elèctric, el camp magnètic també es representa mitjançant les línies de camp. Són línies tangents en tot punt al vector camp i ajuden a visualitzar la direcció i sentit del camp magnètic.

- Les figures mostren les línies de camp per a (a) una bobina (és a dir, un cable enrotllat en forma de espiral) recorreguda per un corrent elèctric i i (b) una barra de magnetita. Es pot observar que el camp magnètic creat en ambdós casos té exactament la mateixa estructura, per la qual cosa comprovem que el camp magnètic dels imans permanents és equivalent al d'un conjunt d'espires.
- Per conveni, s'anomena POL NORT a l'extrem pel que ixen les línies de camp magnètic.



(a) Bobina

(b) Imant

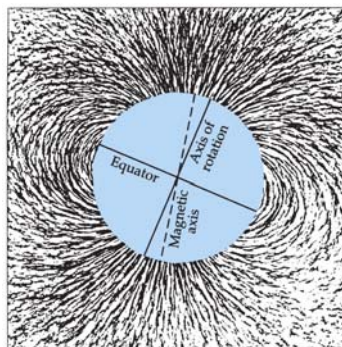
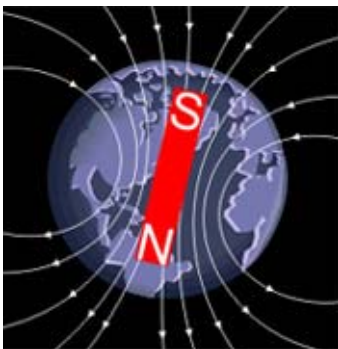
Figura 27.10, Tipler 5ª Ed.

CURIOSITAT

Veure: <http://tlacaelel.igeofcu.unam.mx/~GeoD/estudiantes/luisfern/magneto.html>

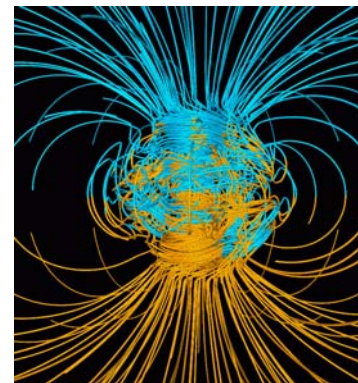
La Terra mateixa és un enorme imant; el pol sud (S) està prop del pol nord geogràfic i el pol nord (N), prop del pol sud geogràfic. Açò és degut a que el pol N d'una brúixola és atret pel pol S del imant terrestre, ja que els pols contraris de dos imants s'atreuen mútuament.

Els pols N i S geogràfics són els dos punts on l'eix de rotació de la Terra talla la superfície terrestre. El pol S magnètic no coincideix amb el pol N geogràfic. Aquesta desviació, s'anomena **declinació magnètica** i és diferent d'un punt a l'altre de la superfície de la Terra.



Veure: <https://apod.nasa.gov/apod/ap021125.html>

Estudis recents han mostrat que el camp magnètic de la Terra pareix emergir de corrents complexes dins del nucli fos de la Terra. Aquests corrents equivalen als corrents interiors de la magnetita, però més desordenats. La figura mostra una estructura tridimensional del camp magnètic simulat amb el model geodinamo de Glatzmaier-Roberts. Les línies del camp magnètic són blaves quan entren en la Terra (pols sud magnètic) i grogues quan s'allunyen cap a l'exterior (pol nord magnètic). Les línies de camp es dibuixen a una distància equivalent a dos radis terrestres. Noteu que la inclinació de les línies de camp són línies corbes amb curvatura diferent segons la latitud.



El polo nord magnètic es desplaça, de tal manera que al cap de certs períodes de temps de duració aleatòria (amb una duració mitjana d'uns centenars de milers d'anys), el camp magnètic de la Terra s'inverteix (el polo nord i el sud geomagnètic permuten la seua posició). Aquestes inversions deixen un registre en les roques, que permet datar la roca i calcular la deriva dels continents en el passat.

2.6.2 Força sobre una càrrega en moviment

- Considerem una càrrega q amb una velocitat \vec{v} que entra en una zona on hi ha un camp magnètic \vec{B} . La força que fa aqueix camp magnètic sobre la càrrega és

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

- Podem veure que l'expressió és més complexa que la de la força d'un camp elèctric sobre una càrrega ($\vec{F} = q\vec{E}$), ja que hi ha un producte vectorial.

- Analitzem la força resultant:

- o té per mòdul: $|\vec{F}| = q v B \sin\theta$

- o on l'angle θ és l'angle entre el vector \vec{v} i el \vec{B}

- o té per direcció i sentit la donada per la "regla del caragol o de la mà dreta"

- o regla del caragol per al vector \vec{C} del producte vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

- direcció de \vec{C} : perpendicular al pla definit pels dos vectors

- sentit de \vec{C} : el de l'avanç del caragol

- o regla de la mà dreta per al vector \vec{C} del producte vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$: portant els dits des de el primer vector (\vec{A}) cap el segon (\vec{B})

- sentit de \vec{C} : el del dit polze

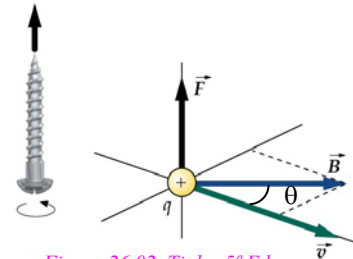
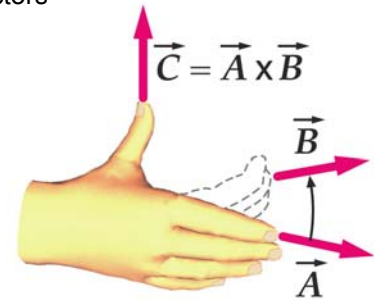


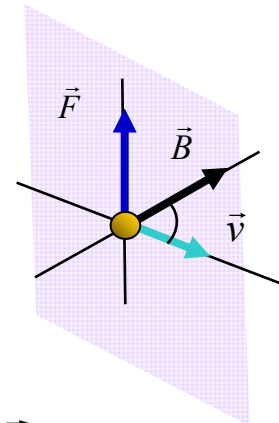
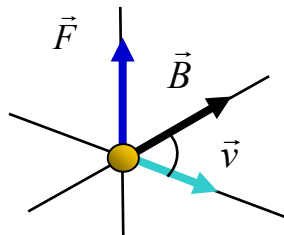
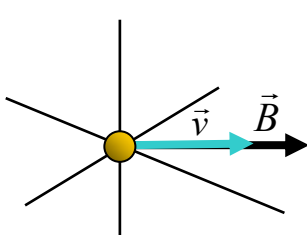
Figura 26.02, Tipler 5ª Ed.



- Casos especials:

- o Si $\vec{v} \parallel \vec{B}$, $\theta = 0^\circ$ (ó 180°) $\rightarrow |\vec{F}| = q v B \sin 0 = 0$

- o Si $\vec{v} \perp \vec{B}$, $\theta = 90^\circ$ $\rightarrow |\vec{F}| = q v B \sin 90 = q v B$



- Trajectòria d'una càrrega quan entra en una zona amb camp magnètic: Si una càrrega entra en una zona amb un camp magnètic uniforme i el seu vector velocitat és perpendicular al camp (és a dir, $\theta = 90^\circ$):

- o la força és sempre perpendicular al vector velocitat, estirant de la càrrega i canviant la seua direcció, però no el seu mòdul.

- o el resultat és una trajectòria circular.

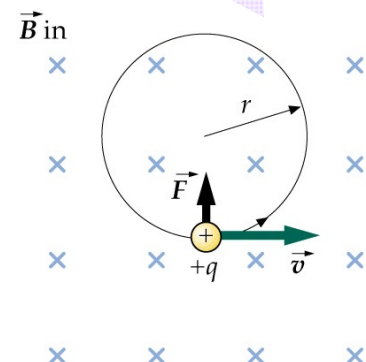


Figura 26.12, Tipler 5ª Ed.

CURIOSITAT

Cinturons de Van Allen i aurores boreals (Cussó, capítol 20, apartat 2.1)

A diferència del cas anterior, quan una q entra en una zona amb un B uniforme, si porta una velocitat no perpendicular al camp magnètic, descriu una trajectòria helicoidal. Açò es degut a que el component de velocitat perpendicular al camp fa que tinga una trajectòria circular (descrita anteriorment), però el component paral·lel (que no es veu afectat pel camp magnètic) fa que aquesta es convertisca en helicoidal.

A la Terra arriba el que s'anomena vent solar, que són partícules carregades d'alta energia procedents del Sol. Es coneix com magnetosfera a la regió al voltant de la Terra en la que el camp magnètic desvia la major part d'aquest vent solar, formant un escut protector.

Part de la protecció es deguda al comportament abans descrit. Els raigs còsmics que penetren en la magnetosfera provoquen la ionització de les capes altes de l'atmosfera, generant partícules carregades, entre elles protons i electrons. Les partícules carregades queden atrapades pel camp magnètic terrestre, movent-se en trajectòries helicoidals com les descrites anteriorment, donant lloc als cinturons de radiació o cinturons de Van Allen.

Adicionalment, algunes d'aquestes partícules interactuen amb els àtoms que constitueixen l'atmosfera, en particular amb l'oxigen, provocant l'emissió de llum verdosa (conseqüència de l'excitació i posterior desexcitació dels àtoms), coneguda com aurora boreal. Les aurores boreals es donen principalment en els pols, perquè allí el camp magnètic és més intens. En períodes d'intensa activitat solar, com els màxims del cicle undeganal de les taques solars, les aurores es poden observar en latituds més equatorials.

Agents mutagènics

La magnetosfera, per tant, redueix significativament la quantitat de raigs còsmics que arriben a la nostra atmosfera. Açò té importants conseqüències biològiques, ja que el gran perill d'aquestes radiacions és que poden afectar a l'ADN, provocant mutacions que poden transmetre's genèticament. També poden produir càncer i malformacions genètiques. La magnetosfera per tant disminueix la taxa de mutació associada als raigs còsmics.



<https://mejorepocapara.net/viajar/ver-auroras-boreales/>

Aquest efecte es veu reduït en els períodes d'inversió del camp magnètic de la Terra. Durant aquests períodes, a més d'esvair-se transitoriament la bipolaritat del camp magnètic, la seua intensitat decreix fins un 10% del seu valor habitual. S'ha especulat en que aquesta disminució d'intensitat ha pogut afavorir un augment de la taxa de mutació durant períodes en els que una major proporció de raigs còsmics arribaven a la Terra, podent haver influït en els processos evolutius de les espècies.

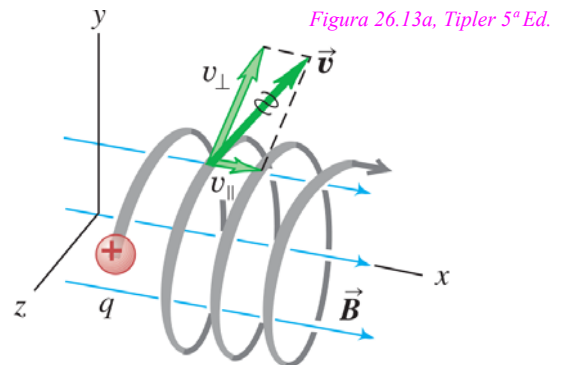
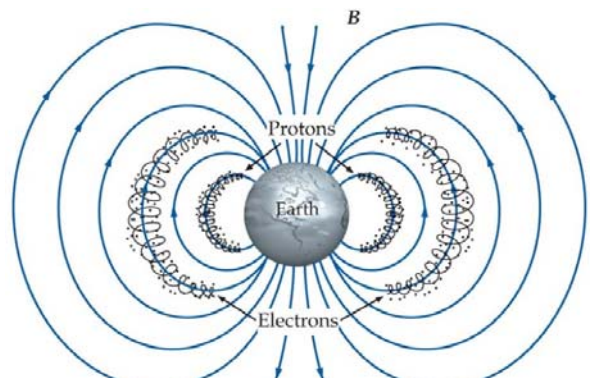


Figura 26.13a, Tipler 5ª Ed.



<http://www.esi2.us.es/DFA/FFII/Apuntes/Curso%200708/tema6.pdf>

2.6.3 Espectròmetre de masses

- La relació (quocient) càrrega/massa dels àtoms d'una substància és una quantitat característica, per la qual cosa pot ser utilitzada per a la seua identificació. Un aparell que permet determinar aquesta relació és l'espectròmetre de masses.
- Parts i principi de funcionament:
- Font ionitzadora:
 - L'espectròmetre de masses funciona analitzant càrregues, per la qual cosa fa falta una font ionitzadora que arranque electrons exteriors als àtoms de la substància que s'estudia. Així es generen ions de massa m i càrrega q (positiva). El que finalment es determina és la relació q/m .

- Selector de velocitats:

- Les càrregues travessen una zona coneguda com selector de velocitats, que és una zona on hi ha a la vegada un camp elèctric E i un camp magnètic B_{in} , perpendiculars entre ells i ambdós perpendiculars al vector velocitat de la càrrega.

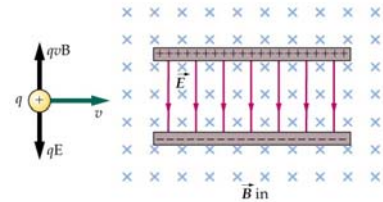


Figura 26.16, Tipler 5ª Ed

- Les forces que actuen sobre la càrrega són:
 - La força que fa el camp elèctric, que tindrà la mateixa direcció que el camp (ja que q és positiva) i un valor: $F_E = q E$. En la figura està dirigida cap avall.
 - La força que fa el camp magnètic, que serà perpendicular al plano definit per B_{in} i la velocitat i que té un valor $F_B = q v B_{in}$. En la figura està dirigida cap amunt.
- El resultat és que sols passen aquelles càrregues sobre les quals les forces es compensen i no actuen, és a dir aquelles en les que: $F_E = F_B$. Per tant, $q E = q v B_{in}$

- En conseqüència, només passen aquells ions amb una velocitat $v = \frac{E}{B_{in}}$

- Els ions que entren amb una velocitat major, com $F_E < F_B$, seran desviats cap amunt, ja que dominarà la força magnètica.

- Els ions que entren amb una velocitat menor, com $F_E > F_B$, seran desviats cap avall, ja que dominarà la força elèctrica.

- Càmera de desviament:

- Els ions que ixen del selector de velocitats porten la mateixa velocitat i entren en una càmera, generalment al buit, on hi ha un altre camp magnètic B_{out} uniforme, que forma 90° amb el vector velocitat.

- Allí, tal com s'ha explicat anteriorment, la força magnètica fa que la trajectòria siga circular.

- El radi R de la trajectòria s'obté considerant que

l'acceleració centrípeta $a = \frac{v^2}{R}$ és l'acceleració

deguda a la força magnètica $a = \frac{F_B}{m}$:

- Així: $\frac{v^2}{R} = \frac{F_B}{m} \rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{q v B_{out}}{m}$

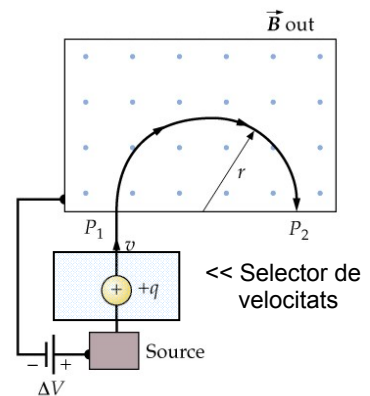


Figura 26.19, Tipler 5ª Ed

- Per tant, el procés per determinar la relació q/m dels ions és el següent:
 - La velocitat de la partícula ve donada per la relació entre els camps E i B_{in} del selector de velocitats $v = E / B_{in}$.
 - El radi R es determina de forma experimental en una pantalla on incideix el feix de ions i serà la meitat de la distància entre el punt d'entrada P_1 i el punto d'eixida P_2 .
 - El camp B_{out} de la càmera se suposa conegut
- Amb aquestos valors es pot obtindre la relació q/m del ió com

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{R B_{out}}$$

- I, a partir d'ella, procedir a la identificació dels ions.
- Des d'un punt de vista històric, (F.W. Aston, 1919) l'espectròmetre de masses fou fonamental per la identificació d'isòtops, és a dir, elements amb el mateix nombre de protons i electrons però diferent nombre de neutrons.

- Capítol de biomagnetisme amb problemes resolts:

<http://bohr.fcu.um.es/miembros/moo/p-mag.pdf>

- Applets sobre el camp magnètic:

<http://www.falstad.com/vector3dm/>

- Espectròmetre de masses amb simulació en pantalla:

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/espectrometro/espectro.html>

PROBLEMA D'ESPECTROMETRE DE MASSES

2.24. En un espectròmetre de masses, el selector de velocitats té un camp elèctric de 10^5 N/C i un camp magnètic de 0.6 T; el camp magnètic de la regió de curvatura val 0.8 T. (a) Quina és la velocitat dels ions que passen a través del selector de velocitats? (b) Calcula la separació de les marques deixades en la pantalla pels ions neó 20 i neó 22 (amb càrrega $+e$) després d'haver descrit una circumferència. (La massa del neó 20 és de 20 u i la del neó 22 de 22 u, $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$). **SOL:** $1.67 \times 10^5 \text{ m/s}$, 0.0087 m.

- Solució:

- (a) La velocitat dels ions que ixen del selector de velocitats ve determinada per la relació entre el camp elèctric i magnètic en aqueixa zona:

$$v = \frac{E}{B_{in}} = \frac{10^5}{0.6} = 1.67 \times 10^5 \text{ m/s}$$

- (b) Com les masses dels ions són diferents, els radis de curvatura seran diferents:

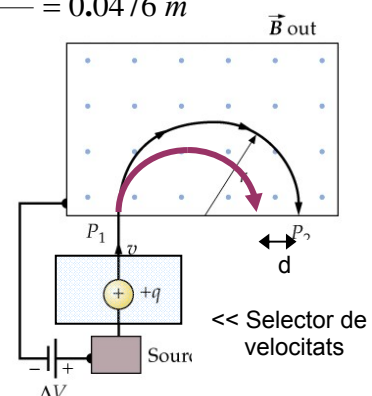
$$\frac{q}{m} = \frac{v}{R B_{out}} \rightarrow R_{20} = \frac{v \cdot m_{20}}{q B_{out}} = \frac{1.67 \times 10^5 \cdot 20 \cdot 1.66 \times 10^{-27}}{0.8 \cdot 1.6 \times 10^{-19}} = 0.0433 \text{ m}$$

$$R_{22} = \frac{v \cdot m_{22}}{q B_{out}} = \frac{1.67 \times 10^5 \cdot 22 \cdot 1.66 \times 10^{-27}}{0.8 \cdot 1.6 \times 10^{-19}} = 0.0476 \text{ m}$$

- La separació entre marques ve donada per la diferència de diàmetres:

$$d = 2 \cdot R_{22} - 2 \cdot R_{20} = 0.0086 \text{ m}$$

Figura 26.20, Tipler 5ª Ed



APENDIX

Camp magnètic creat per corrents (vegeu Cussó, capítol 20, apartat 3.1)

Camp magnètic creat per un fil rectilini de gran longitud

- Les línies del camp magnètic que es formen al seu voltant són circumferències concèntriques amb el fil com eix.
- La direcció i sentit del camp venen donats per la regla del caragol o de la mà dreta, amb el dit polze seguint el corrent; els altres dits donen la direcció del camp magnètic al voltant del fil.

- El mòdul ve donat per:
$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

on μ_0 és la permeabilitat magnètica del buit ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N / A}^2$)
i r és la distància al fil.

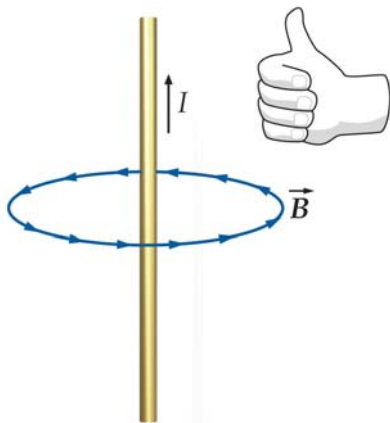
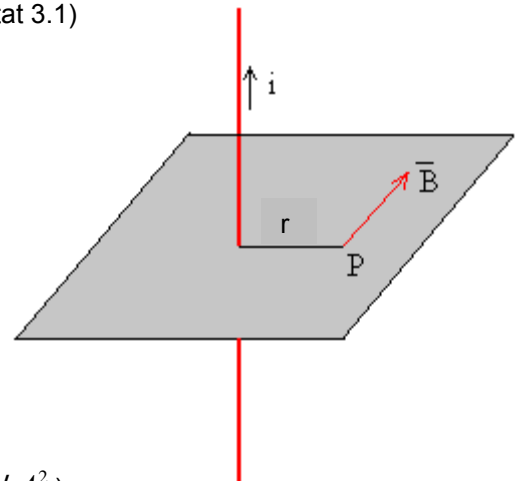


Figura 27.15, Tipler 5ª Ed



Camp magnètic creat per una espira circular de radi R sobre el seu eix

- Sobre l'eix, B és perpendicular al pla de l'espira.
- El sentit es pot determinar mitjançant la regla del caragol o de la mà dreta, amb els dits seguint la intensitat; el dit polze dona la direcció i sentit del camp magnètic sobre l'eix.

- El mòdul ve donat per
$$B(\text{eix}) = \mu_0 \frac{I R}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

on h és la distància sobre l'eix des del punt al centre de l'espira i R és el radi de l'espira.

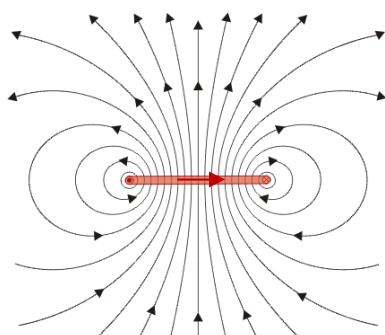
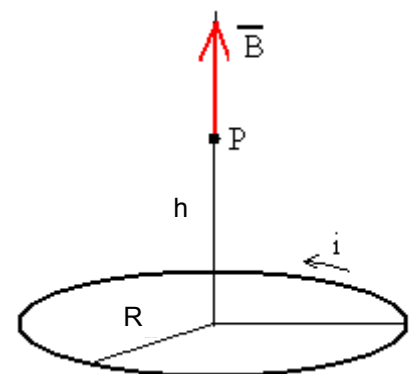


Figura 27.06, Tipler 5ª Ed



Camp magnètic creat per un solenoide molt llarg de radi R, en un punt de l'interior sobre l'eix

- Sobre l'eix, B és perpendicular al pla del solenoide, és a dir, té direcció axial.
- El sentit es pot determinar mitjançant la regla del caragol o de la mà dreta, amb els dits seguint la intensitat; el dit polze dona la direcció i sentit del camp magnètic sobre l'eix.
- El mòdul ve donat per $B(\text{eix})_{\text{solenoides-llarg}} = \mu_0 \frac{I N}{L}$

on **N** és el nombre d'espines i **L** la longitud del solenoide.

<http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/2015/03/19/campo-magnetico-creado-por-un-solenoid/>

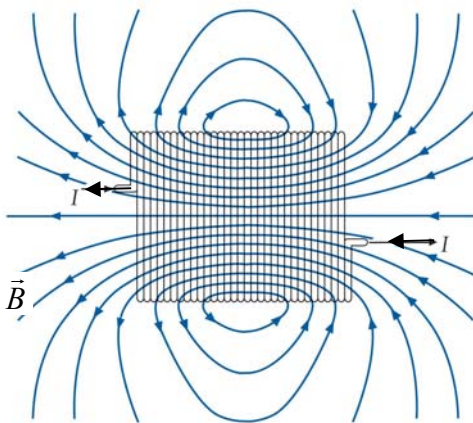
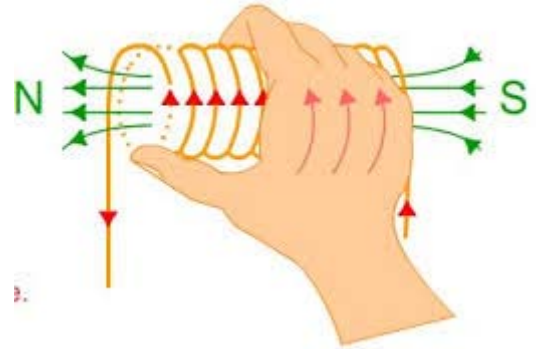
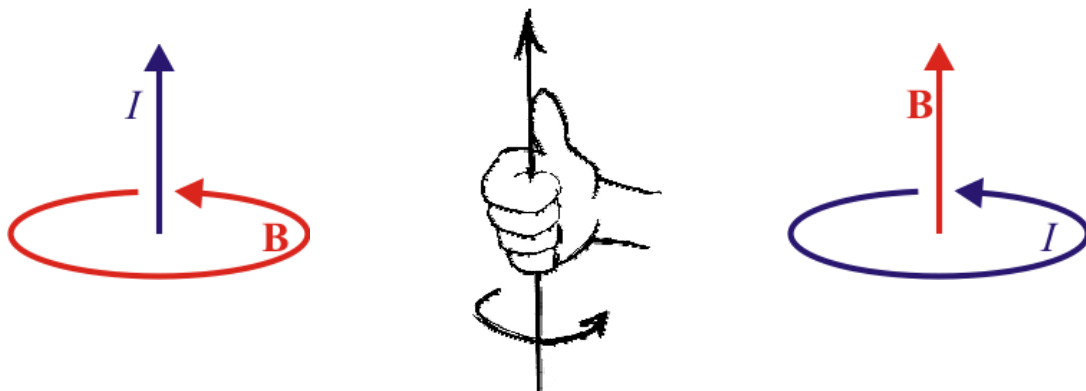


Figura 27.10, Tipler 5ª Ed

La doble regla de la mà dreta

Dels casos anteriors, es pot veure que el camp magnètic creat per una corrent lineal compleix la regla de la mà dreta per partida doble:

- El camp respecte del corrent
- El corrent respecte del camp

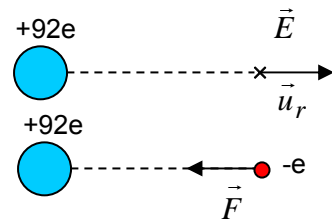


http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_magn%C3%A9tico_debido_a_una_corriente

PROBLEMES TEMA 2: BIOELECTROMAGNETISME

FORÇA, CAMP ELÈCTRIC I POTENCIAL

- 2.1. En una molècula de NaCl, l'ió Na^+ amb càrrega $+e$ està a una distància de 2.3×10^{-10} m de l'ió Cl^- amb càrrega $-e$. (a) Quin és el camp degut a l'ió positiu a la distància a la qual està situat l'ió negatiu? (b) Quant val la força que actua sobre l'ió negatiu? (c) i (d) Repetiu els càlculs considerant ara que l'ió que crea el camp és negatiu (Kane, Problema 16.5) **SOL:** (a) 2.72×10^{10} N/C cap a fora; (b) 4.36×10^{-9} N cap a dins; (c) 2.72×10^{10} m cap a dins; (d) 4.36×10^{-9} N cap a dins.
- 2.2. Una membrana cel·lular té ions positius a un costat i ions negatius a l'altre. Si el camp elèctric en el seu interior és de 10^7 N/C. (a) Quina és la força que actua sobre un ió de càrrega $+2e$ quan està travessant l'interior de la membrana? (b) Quin és el seu sentit? **SOL:** (a) 3.2×10^{-12} N; (b) cap als ions negatius.
- 2.3. Un nucli d'urani té una càrrega de $92 \times (+e)$. (a) Quin és el mòdul i direcció del camp elèctric degut al nucli a una distància de 10^{-10} m del nucli? (b) Quin és el mòdul i direcció de la força sobre un electró a aquesta distància? (Kane, Problema 16.7) **SOL:** (a) 1.32×10^{13} N/C cap a fora; (b) 2.12×10^{-6} N cap a dins.
- 2.4. Quina és la força que actua sobre un electró en un camp de 10^5 N/C? (Kane, Problema 16.8) **SOL:** 1.6×10^{-14} N en la direcció contrària a la del camp.
- 2.5. Calcula el mòdul i direcció del camp elèctric a 0.1 m d'una càrrega de -10^{-4} C. (Kane, Problema 16.10) **SOL:** 9×10^7 N/C cap a dins.



PLANS CARREGATS

- 2.6. El camp elèctric prop d'una placa circular carregada uniformement, de 0.1 m² de superfície, està orientat cap a la placa i val 10^4 N/C. (a) Dibuixa el camp elèctric. (b) Calcula el valor i signe de la càrrega de la placa. (Kane, Problema 16.13) **SOL:** -1.77×10^{-8} C.
- 2.7. Una membrana plana i prima separa una capa de ions positius en l'exterior d'una cèl·lula, d'una capa de ions negatius en l'interior de la cèl·lula. Si el camp elèctric degut a aquestes càrregues és 10^7 N/C, calcula la càrrega per unitat d'àrea Q/A en les capes a cada costat de la membrana (Exemple 16.3, Kane). **SOL:** 88.4 μC .
- 2.8. Dues plaques quadrades de 0.1 m de costat tenen càrregues iguals i oposades de 10^{-6} C, distribuïdes uniformement en cada una. Les plaques es troben a una distància de 10^{-2} m. (a) Quin és el mòdul i direcció del camp elèctric entre les plaques? (b) Quina és la diferència de potencial entre les dues plaques? (c) Quina és la capacitat d'aquest condensador? (d) Si s'introdueix entre elles una làmina de constant dielèctrica relativa igual a 5, indica quines són les magnituds que canvien i quant canvien. **SOL:** (a) $1.13 \cdot 10^7$ V/m; (b) 1.13×10^5 V; (c) 8.85×10^{-12} F, (d) 2.26×10^6 V/m; 2.26×10^4 V; 4.43×10^{-11} F.
- 2.9. Dues plaques metàl·liques, separades una distància de 0.1 mm, tenen càrregues iguals i de signe contrari, existint una diferència de potencial entre elles de 10 V. (a) Calcula el camp elèctric entre les plaques. Si les plaques són quadrades, de costat $L = 10$ cm, (b) calcula la capacitat i (c) la càrrega total Q en cada placa (Problemes 17.10 i 17.11, Cussó). **SOL:** (a) 10^5 V/m, 884 pF, 8.84 nC.
- 2.10. La membrana d'un axó té 7.5 nm de gruix. (a) En l'estat en repòs, el potencial de l'axó val -90 mV. Quina és la direcció, sentit i mòdul del camp elèctric dins de la membrana? (b) Si la membrana té una capacitat de 0.01 F/m², quina és la seua constant dielèctrica relativa? (Problema 18.7, Kane). **SOL:** (a) 1.2×10^7 V/m, 8.48 .
- 2.11. Dues plaques metàl·liques, carregades uniformement i separades 0.04 m, produeixen entre elles un camp elèctric uniforme de 10^4 V/m. Calcula (a) la càrrega per unitat de superfície Q/A

Problemes addicionals (Kane): 16.1 a 16.4; 16.16 a 16.19, 16.28 a 16.35, 16.43, 16.44, 16.52, 17.7 a 17.38, 18.3 a 18.13, 18.30 a 18.32, 19.3 a 19.13. Cussó: 17.12 a 17.15

de les seues plaques i (b) la diferència de potencial entre elles. (Kane, Problema 16.18) **SOL:**
(a) $8.84 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$; (b) 400 V.

2.12. En la següent pàgina web podreu trobar un “applet” del camp elèctric:

<http://www.falstad.com/emstatic/>

- Connecteu-vos a aquesta pàgina i feu els següents exercicis:
- Trieu una sola càrrega (setup: single charge)
 - Cliqueu sobre la càrrega i moveu-la → es veu com canvia el que s’anomena “camp de vectors”. És a dir, la modificació de l’espai per efecte de la càrrega, canvia en canviar de posició la càrrega.
 - Si teniu seleccionada la casella “draw equipotentials”, podreu veure que les línies equipotencials són cercles concèntrics, junts prop de la càrrega i separats lluny d’ella.
- Trieu dues càrregues (setup: double charge)
 - Podreu veure que entre les càrregues, en el punt (0,0), el camp elèctric és zero. És on el camp de les dues càrregues es compensa perquè tenen el mateix mòdul i direcció, però sentit oposat.
 - Si les càrregues estan en (0,a) i (0,-a), podreu veure que
 - en (a,0) el camp té direcció $+\vec{u}_x$
 - en (-a,0) el camp té direcció $-\vec{u}_x$
 - Si cliqueu sobre la càrrega de dalt i la separeu, veureu que la zona intermèdia de camp zero augmenta. Si la moveu dreta-esquerra, també veureu com canvia el “camp de vectors”.
 - També podreu veure com són les línies equipotencials i com canvien en moure les càrregues.
- Trieu un dipol (setup: dipole charge)
 - Un dipol és un conjunt de dues càrregues iguals, però de signe contrari, i separades una distància menuda.
 - Podreu veure que entre les càrregues, en el punt (0,0), ara el camp elèctric no és zero. En la zona central el camp de les dues càrregues se suma, perquè ara tenen el mateix mòdul, direcció i sentit.
 - En canvi, ara en (a,0) i (-a,0), podreu veure que el camp té direcció $-\vec{u}_y$, ja que en aquests punts es compensen els components horitzontals i les verticals se sumen.
- Trieu dos plans carregats (setup: charged planes)
 - Veureu que el camp elèctric entre ells:
 - Està dirigit des del pla carregat positivament (el de dalt) cap al pla carregat negativament (el de baix).
 - És perpendicular als plans en l’espai entre ells.
 - El camp és pràcticament zero fora de l’espai entre els plans.
 - En les vores dels plans tenen altres direccions. És el que s’anomena “efecte de vores” i és conseqüència de la grandària finita dels plans.
 - Si augmenteu la resolució (desplaceu a la dreta el botó “resolution”), la qual cosa equival a augmentar la grandària dels plans i disminuir la distància entre ells, veureu que el camp entre els plans és cada vegada més intens i, fora dels plans, cada vegada més menut.

MATERIALS RESISTIUS/CONDUCTORS

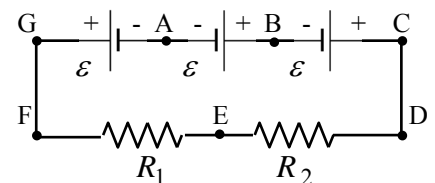
2.13. Un cable de nicrom (Ni-Cr) ($\rho = 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$) té un radi de 0.65 mm. Quina longitud del cable es necessita per a obtenir una resistència de 2Ω ? **SOL:** 2.65 m (Exemple 25.3, Tipler 5a ed.).

Problemes addicionals (Kane): 16.1 a 16.4; 16.16 a 16.19, 16.28 a 16.35, 16.43, 16.44, 16.52, 17.7 a 17.38, 18.3 a 18.13, 18.30 a 18.32, 19.3 a 19.13. Cussó: 17.12 a 17.15

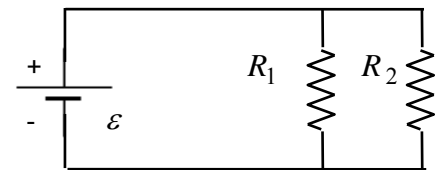
- 2.14. Per un conductor de 100 cm de longitud i una resistència de 0.2Ω circula un corrent de 5 A. Calcula la diferència de potencial entre els extrems del conductor i el camp elèctric en el seu interior. **SOL:** 1 V, 1 V/m.
- 2.15. Determina el valor del camp elèctric E en l'interior d'un cable de 10 m quan aquest transporta un corrent de 1.3 A. Dades: $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$, $r = 0.81$ mm. **SOL:** 0.0107 V/m (Exemple 25.5, Tipler 5a ed.)
- 2.16. Un fil metàl·lic té entre els seus extrems una diferència de potencial de 10 V i passa per ell un corrent de 4 A. Quina és la seua resistència? **SOL:** 2.5Ω .
- 2.17. Un corrent de 10 A produeix en un fil metàl·lic una diferència de potencial de 2 V entre els seus extrems. Si es tracta d'un conductor òhmic, quin corrent produirà una diferència de potencial de 6 V? **SOL:** 30 A.

CIRCUITS ELÈCTRICS

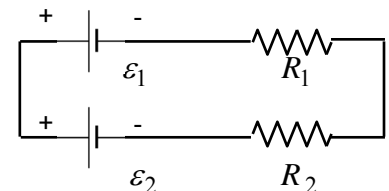
- 2.18. En el circuit de la figura, calcula (a) la intensitat i sentit del corrent elèctric, (b) la diferència de potencial entre els extrems de cada una de les resistències i (c) les potències subministrades o dissipades per cada un dels elements del circuit. DADES: $\varepsilon = 1.5$ V; $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$. **SOL:** (a) 0.15 A en el sentit horari, (b) 0.6 V, 0.9 V, (c) 0.09 W, 0.135 W, 0.225 W, 0.225 W, 0.225 W.



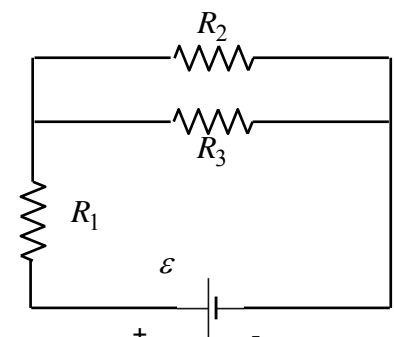
- 2.19. En el circuit de la figura calcula (a) la resistència equivalent (b) el corrent que ix de la pila, (c) la potència dissipada pel conjunt de resistències. (d) Com es repartirà el corrent entre les resistències? DADES: $\varepsilon = 12$ V; $R_1 = 6 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$. **SOL:** (a) 3Ω , (b) 4 A, (c) 48 W, (d) per igual.



- 2.20. En el circuit de la figura calcula (a) la intensitat i sentit del corrent elèctric, (b) la diferència de potencial entre els extrems de cada una de les resistències i (c) les potències subministrades o dissipades per cada un dels elements del circuit. DADES: $\varepsilon_1 = 12$ V; $\varepsilon_2 = 8$ V; $R_1 = 4 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$. **SOL:** (a) 0.4 A en sentit antihorari; (b) 1.6 V, 2.4 V; (c) 4.8 W, 3.2 W, 0.96 W, 0.64 W.



- 2.21. En el circuit de la figura calcula: (a) la intensitat del corrent que ix de la pila; (b) la diferència de potencial entre els extrems de la resistència R_3 ; (c) la intensitat de corrent a través de la resistència R_3 ; (d) les potències subministrades o dissipades per cada un dels elements del circuit. DADES: $\varepsilon = 6$ V; $R_1 = 2 \Omega$; $R_2 = 6 \Omega$; $R_3 = 3 \Omega$. **SOL:** (a) 1.5 A; (b) 3 V; (c) 1 A; (d) 9 W, 4.5 W, 1.5 W, 3 W.



FORÇA DEGRADA A UN CAMP MAGNÈTIC: ESPECTRÒMETRE DE MASSES

- 2.22. Una partícula de càrrega 10^{-6} C es desplaça en la direcció +y a una velocitat de 10^4 m/s perpendicularment a un camp magnètic de 2 T en direcció -z. (a) Calcula el mòdul i direcció

Problemes addicionals (Kane): 16.1 a 16.4; 16.16 a 16.19, 16.28 a 16.35, 16.43, 16.44, 16.52, 17.7 a 17.38, 18.3 a 18.13, 18.30 a 18.32, 19.3 a 19.13. Cussó: 17.12 a 17.15

- de la força que s'exerceix sobre la partícula. (b) Quina seria la força si la velocitat estiguera dirigida cap a $-y$? **SOL:** 0.02 N en direcció $-x$.
- 2.23. Un feix de partícules de càrrega $+e$ descriu un cercle de 3 m de radi en un camp magnètic de 0.2 T. Si la seua massa és 1.67×10^{-27} kg (són protons), quina és la seua velocitat? Si suposem que el camp magnètic ix del paper, dibuixa una possible trajectòria. (Exercici 19.47, Kane). **SOL:** $5.75 \cdot 10^7$ m/s.
- 2.24. En un espectròmetre de masses, el selector de velocitats té un camp elèctric de 10^5 N/C i un camp magnètic de 0.6 T; el camp magnètic de la regió de curvatura val 0.8 T. (a) Quina és la velocitat dels ions que passen a través del selector de velocitats? (b) Calcula la separació de les marques en la pantalla deixades pels ions neó 20 i neó 22 (amb càrrega $+e$) després d'haver descrit una circumferència (la massa del neó 20 és de 20 u i la del neó 22 de 22 u, $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg). **SOL:** 1.67×10^5 m/s, 0.0087 m.
- 2.25. Un feix d'ions passa a través del selector de velocitats d'un espectròmetre de masses que té un camp elèctric de 1.4×10^5 V/m. (a) Si els ions que ixen del selector tenen una velocitat de 2×10^5 m/s, quant val el camp magnètic en el selector? (b) El camp magnètic en la regió de curvatura val 1 T, quin és el radi de l'òrbita descrita per un ió He^+ de càrrega e i massa 6.68×10^{-27} kg (Exercici 19.50, Kane). **SOL:** 0.7 T, 0.84 cm.

CAMP MAGNÈTIC

- 2.26. En la següent pàgina web trobareu un "aplet" del camp magnètic creat per diferents elements:

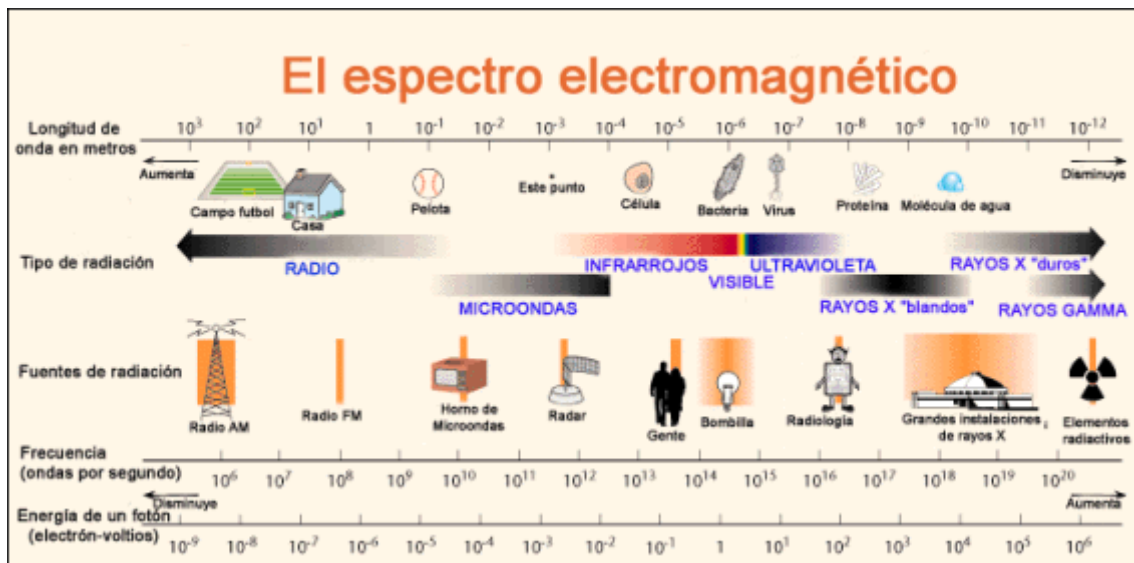
<http://www.falstad.com/vector3dm/>

- Connectat a aquesta pàgina i feu els següents exercicis:
- Elegiu un solenoide, equivalent a una barra imantada (imant) (Field Selection: solenoid)
 - Veureu uns punts que es mouen eixint per la part superior. Representen el camp magnètic. La seua velocitat és proporcional a la intensitat del camp magnètic: dins del solenoide/imant es mouen ràpidament, per tant, el campen aquesta zona és intens.
 - Seleccioneu en "Display: Field Lines" i veureu les línies de camp que ixen per la part superior (pol nord) i entren per la inferior (pol sud).
 - Si cliqueu en la imatge i moveu el punter, tindreu una visió espacial.
 - Per a veure les línies de camp en un pla: cliqueu en la quarta finestra i canvieu de "No Slicing" a "Show Z Slice".
 - Repetiu aquest procés per a l'esfera magnètica (Field selection: magnetic sphere, penúltima opció). En aquest cas el pol Nord està en la part superior de l'esfera.
 - És una representació de la Terra i del seu camp magnètic.
- També els podeu fer per a un cable pel qual passa un corrent (Field Selection: current line, primera opció).
 - Veureu que els punts giren al voltant del cable i que les línies de camp són cercles concèntrics.
 - Els punts giren molt de pressa prop del cable, que és on el camp és més intens.

TEMA 3: ÒPTICA

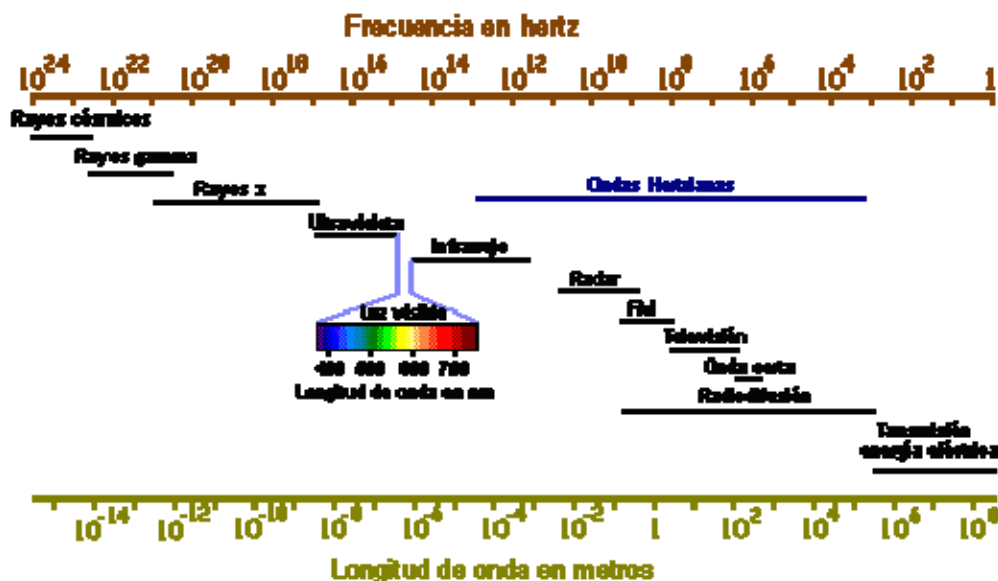
3.1. Índex de refracció. Lleis de reflexió i refracció

- Avui sabem que la llum és a la vegada una ona electromagnètica i un corpuscle.
 - En els fenòmens de propagació es manifesta la seua naturalesa ondulatoria.
 - En els fenòmens d'interacció amb la matèria es manifesta la seua naturalesa corpuscular.
- La llum, com a ona electromagnètica, és caracteritzada per la seua freqüència. El rang de valors que pot prendre aquesta freqüència és molt ampli, podent variar des d'uns pocs hertz fins a freqüències tan altes com 10^{22} Hz (raigs γ). Aquest ampli rang de freqüències que pot prendre la llum rep el nom d'espectre electromagnètic.



<https://sites.google.com/a/uaem.mx/satellites-artificiales/espectro-electromagnetico>

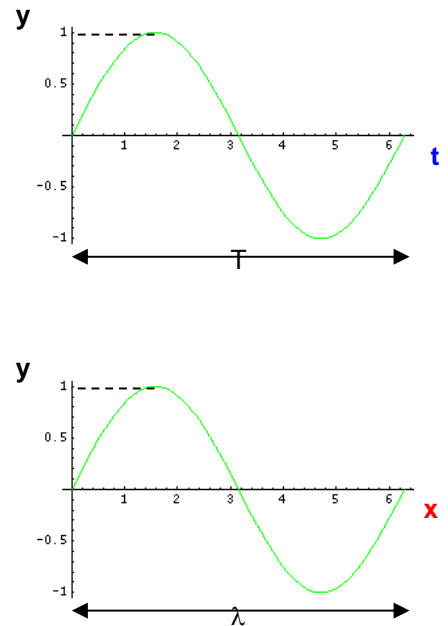
- L'òptica és aquella part de la física que s'encarrega d'estudiar la propagació de les ones pertanyents a un interval molt menut de l'espectre electromagnètic. En concret, estudia el que s'anomena espectre visible, que és l'interval de freqüències que pot veure l'ull humà (3.8×10^{14} Hz a 7.7×10^{14} Hz). Veure la figura adjunta.



http://es.ingenieriatopografica.wikia.com/wiki/Espectro_electromagn%C3%A9tico

Velocitat de la llum: índex de refracció

- Una ona harmònica és una magnitud que varia sinusoidalment amb el temps i l'espai. Si anomenem y a aquesta magnitud, l'expressió que la descriu és $y = A \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$, on A és l'amplitud, λ és la longitud d'ona i T el període d'oscil·lació
- Les figures mostren aquesta dependència de y amb el temps t i el desplaçament x per a una oscil·lació amb $A = 1$. Es pot veure que T és el període de repetició temporal i la longitud d'ona λ és el període de repetició espacial.
- La velocitat d'una ona ve donada per la relació entre la seua longitud d'ona i el seu període. Per tant: $v = \frac{\lambda}{T}$.
- Com la relació entre període i freqüència és $f = \frac{1}{T}$, aleshores $v = \lambda f$.
- La velocitat de la llum en el buit és una constant fonamental de la Física, se sol representar per la lletra c i té el valor exacte de: $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- Aquest valor és considerat com un límit superior per a qualsevol velocitat. És a dir, no hi ha res que es pugui moure a una velocitat més gran que aquest valor.
- Quan la llum penetra en un medi transparent la seua velocitat disminueix. El quocient entre la velocitat de la llum en el buit c i en el medi v s'anomena **índex de refracció**: $n = \frac{c}{v}$.
- En conseqüència, el valor de l'índex de refracció és sempre major que la unitat, $n \geq 1$. La taula següent mostra alguns valors típics de l'índex de refracció.



TAULA 3.1: Índex de refracció (Kane, T23.1)

| Material | N |
|-------------|---------|
| Aire | 1.00029 |
| Aigua | 1.333 |
| Vidre crown | 1.5 |
| Vidre flint | 1.7 |
| Diamant | 2.417 |

TAULA 3.2: Espectre visible (Kane F23.1)

| Color | λ (nm) | f (Hz) |
|-------------|----------------|------------------------------|
| Ultraviolat | < 400 | > 7.5×10^{14} |
| Violat | 400 - 450 | $\approx 7.2 \times 10^{14}$ |
| Blau | 450 - 500 | $\approx 6.4 \times 10^{14}$ |
| Verd | 500 - 550 | $\approx 5.7 \times 10^{14}$ |
| Groc | 550 - 600 | $\approx 5.3 \times 10^{14}$ |
| Taronja | 600 - 650 | $\approx 4.8 \times 10^{14}$ |
| Roig | 650 - 700 | $\approx 4.5 \times 10^{14}$ |
| Infraroig | > 700 | < 4.3×10^{14} |

- El fet que la velocitat de llum disminuïska en penetrar en un medi transparent, implica que la longitud d'ona disminueix també, i es manté constant el valor de la freqüència. Si λ_0 és la longitud d'ona en el buit i λ en el medi

$$\left. \begin{aligned} c &= \lambda_0 f \\ v &= \lambda f \end{aligned} \right\} n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \rightarrow \lambda < \lambda_0$$

- La segona taula mostra els valors aproximats de la longitud d'ona i la freqüència de la llum en el buit per als diferents colors de l'espectre visible. En òptica és més habitual parlar de longituds d'ona que de freqüències.

PROBLEMA D'ÍNDEX DE REFRACCIÓ

3.1. Un raig de llum verda de 5×10^{-7} m de longitud d'ona en el buit penetra en un vidre d'índex de refracció 1.5. Quina és la velocitat de la llum en el vidre? Quina és la seua longitud d'ona en el vidre? **SOL:** 2×10^8 m/s; 333 nm, ultraviolada.

Solució:

- Si l'índex de refracció del medi és 1.5, aleshores la velocitat de la llum en aquest medi serà

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1.5} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- La longitud d'ona en aquest medi serà: $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{5 \times 10^{-7}}{1.5} = 3.33 \times 10^{-7} \text{ m} = 333 \text{ nm}$

Reflexió i refracció

- La propagació d'una ona depèn de les propietats del medi i, sobretot, de les fronteres de separació entre medis de propietats diferents. Quan un feix de llum arriba a la superfície de separació entre dos medis, part de la llum es reflecteix, part es transmet i la resta s'absorbeix.
- L'anàlisi d'aquests fenòmens el farem mitjançant raigs, que mostren la direcció de propagació de l'energia. D'aquesta manera estudiarem principalment la direcció de les ones reflectida i transmesa i els seus canvis.
- La part de la física que estudia els canvis de direcció que experimenten els raigs de llum s'anomena **ÒPTICA GEOMÈTRICA**.

Lleis de la reflexió:

- Els raigs incident, reflectit i la normal a la superfície estan en el mateix pla.
- L'angle entre el raig reflectit i la normal és igual a l'angle entre el raig incident i la normal: $\theta_1 = \theta_1'$.

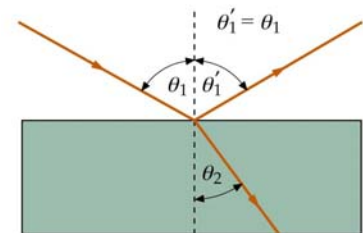


Figura 31.18, Tipler 5ª Ed

Lleis de la refracció:

- Els raigs incident, refractat i la normal a la superfície estan en el mateix pla.
- L'angle entre el raig refractat i la normal i l'angle entre el raig incident i la normal guarden la següent relació:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

(Llei de Snell)

on n_1 i n_2 són els índexs de refracció del primer i segon medi.

- Quan $n_1 < n_2$ el raig refractat s'acosta a la normal ($\theta_1 > \theta_2$).
- Quan $n_1 > n_2$ el raig refractat s'allunya de la normal ($\theta_1 < \theta_2$).
- En aquest cas es pot donar el fenomen de reflexió total:
 - Existeix un angle d'incidència límit a partir del qual la llum es reflecteix en lloc de refractar-se. Aquest angle s'anomena angle crític i ve donat per

$$\sin \theta_{cr} = \frac{n_2}{n_1}$$

(observeu que sent $n_1 > n_2$ el quocient n_2/n_1 és menor que la unitat, la qual cosa és coherent amb $\sin \theta_{cr} \leq 1$).

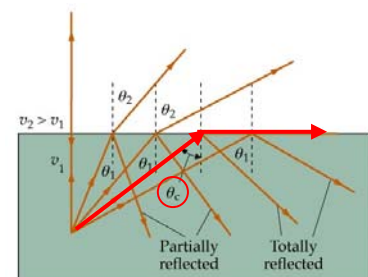


Figura 31.23a, Tipler 5ª Ed

- En les següents direccions teniu “aplets” de reflexió i refracció:

<http://acacia.pntic.mec.es/~jrui27/light/refracciones.html>

<http://www.ub.edu/javaoptics/index-ca.html>

PROBLEMA DE REFLEXIÓ I REFRACCIÓ

3.3. Un biòleg marí s'acosta amb sigil a una basa plena d'aigua ($n = 1$) i, mirant per la vora, que està a 70 cm de la superfície de l'aigua ($n = 1.33$), veu un peix apegat a la paret oposada, que està a 2 m. (a) A quina fondària aparent està el peix? (b) A quina fondària real està? Supposeu que el raig de llum que ve de l'espècimen emergeix pel centre del tanc. **SOL:** 1.28 m, 0.70 m.

Solució:

- (a) El raig que ix del peix (és el que veiem, perquè és el que entra en l'ull) compleix l'equació de Snell:
 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$, sent $n_1 = 1.33$ i $n_2 = 1$

- Per avaluar $\sin \theta_2$ busquem un triangle de costats coneguts que tinga un angle igual a θ_2 : el triangle blau.

$$\text{➤ Així: } \sin \theta_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{1}{1.22} = 0.82 \quad \rightarrow \theta_2 = \sin^{-1}(0.82) = 55.1^\circ$$

$$\text{➤ També } \tan \theta_2 = \frac{R}{h} = \frac{1}{0.7} = 1.43 \quad \rightarrow \theta_2 = \tan^{-1}(1.43) = 55.1^\circ$$

- Ara podem determinar θ_1 a partir de la Llei de Snell:

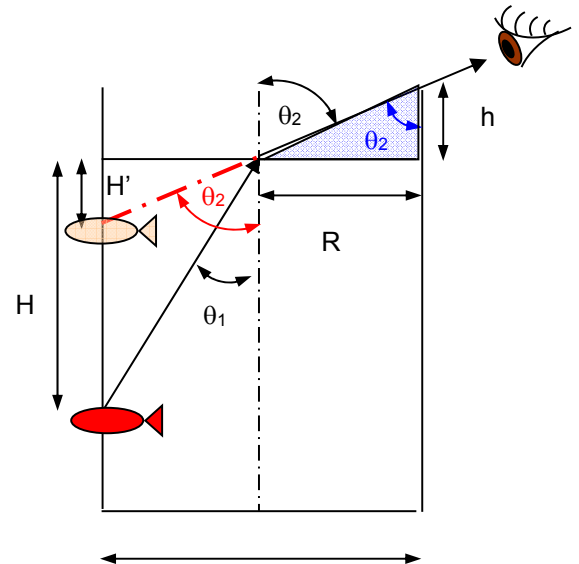
$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 = \frac{1}{1.33} 0.82 = 0.616 \quad \rightarrow \theta_1 = \sin^{-1}(0.616) = 38.0^\circ$$

- I a partir d'aquest angle l'altura buscada H: $\tan \theta_1 = \frac{R}{H} \quad H = \frac{R}{\tan \theta_1} = \frac{1}{0.782} = 1.28 \text{ m}$

- (b) La fondària aparent és la que dedueix l'ull de manera automàtica, a partir de la prolongació del raig que li arriba (raig roig).

- L'angle amb la normal, marcat en roig, serà igual a θ_2 ja que són oposats pel vèrtex. Així

$$\tan \theta_2 = \frac{R}{H'} \quad \rightarrow H' = \frac{R}{\tan \theta_2} = \frac{1}{1.43} = 0.70 \text{ m}$$

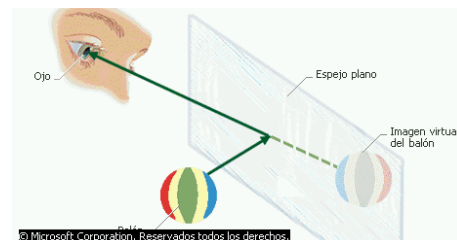


3.2. Espills i lents

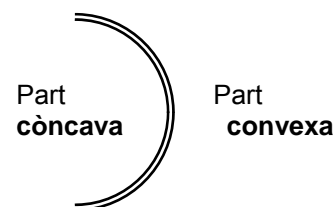
- En el que segueix, es determinarà per a un objecte (en la posició s i amb altura y), les característiques de la imatge (en la posició s' i amb altura y') formada per un espill o una lent.

- Conceptes bàsics i conveni de signes

- Objecte o imatge real: aquell per al qual els raigs de llum es creuen de manera real. L'objecte o imatge real es poden recollir en una pantalla.
- Objecte o imatge virtual: aquell per al qual els raigs de llum no es creuen de manera real, sinó que ho fan les seues prolongacions. L'objecte o imatge virtual, com que els raigs no es tallen, no es poden recollir en una pantalla. En alguns casos, l'ull recull aquests raigs i amb ajuda del cristal·lí elabora una imatge en la retina (el cristal·lí és la lent de l'ull).
- Sentit de la llum: d'esquerra cap a la dreta, és a dir, el raig incident ve des de l'esquerra.
- Eix òptic: s'indica mitjançant una línia horitzontal.
- Centre òptic del sistema (C): és un punt en l'eix òptic tal que els raigs que passen per ell no es desvien.
- Origen de posicions:
 - És el centre òptic C.
 - En espills: està en la intersecció entre l'espill i l'eix òptic.
 - En lents: està en la intersecció entre la lent i l'eix òptic
- Posicions i distàncies focals (s, s', f, f'):
 - Fletxa des de l'origen de posicions fins a l'objecte (s) o imatge (s')
 - Posició de l'objecte (s): si està a l'esquerra de la lent, és real i s és positiva; si és virtual, està a la dreta de la lent i és negativa.
 - Posició de la imatge (s'): si està a la dreta de la lent, és real i s' és positiva; si és virtual, està a l'esquerra de la lent i és negativa.
- Segments perpendiculars a l'eix (y, y'):
 - positius: de baix cap amunt
 - negatius: de dalt cap avall
- Radi de curvatura:
 - positiu: per a superfícies exteriors convexes
 - negatiu: per a superfícies exteriors còncaves

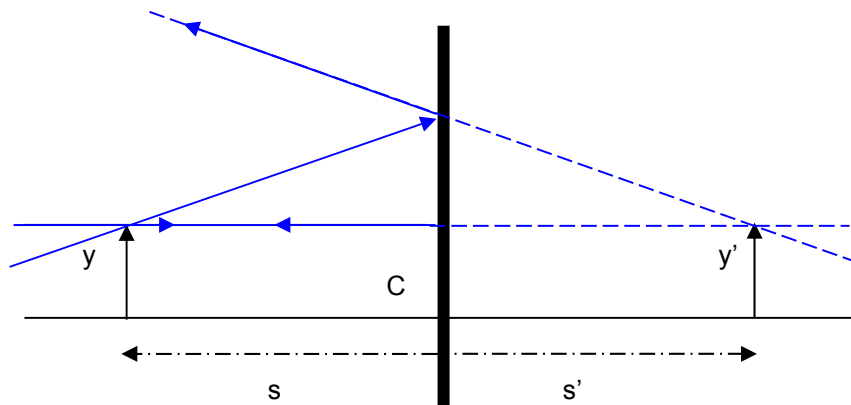


© Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.



3.2.1. Espills plans

- Un espill pla és una superfície plana que reflecteix totalment la llum.
- Obtenció de la imatge:
 - Mètode gràfic:
 - Des de la part superior de l'objecte es tracen 2 raigs; es determina la trajectòria aplicant les lleis de la reflexió especular (angle incident igual al reflectit).
 - La imatge es forma entre l'eix i el punt on es tallen els raigs. En general, en un espill els raigs divergeixen (com en la figura), aleshores la imatge es forma entre el punt on es tallen les prolongacions dels raigs i l'eix (imatge virtual).



o Mètode analític:

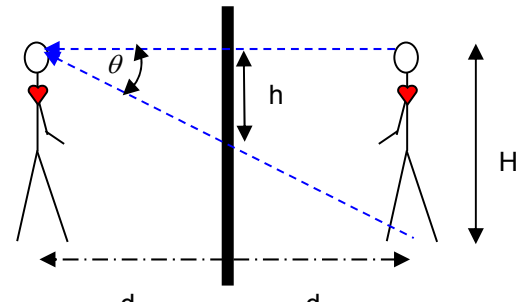
- Per a un espill pla, la imatge és virtual (s' negativa) i està en la posició $s' = -s$.
- Som capaços de veure la imatge "a l'altre costat de l'espill" perquè els nostres ulls recullen els raigs i el cristal·lí forma una imatge real en la retina:
- La grandària de la imatge és la mateixa que la de l'objecte $y' = y$
- En general, la imatge és dreta i virtual

PROBLEMA D'ESPILLS

3.6. Quines han de ser les dimensions que ha de tenir un espill perquè ens puguem veure de cos sencer? **SOL:** la meitat de la nostra altura.

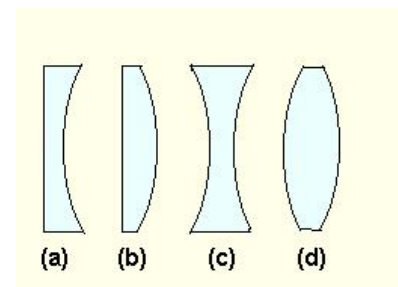
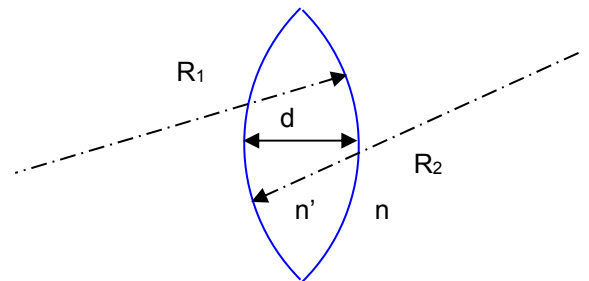
Solució:

- Per a veure la figura completa, han d'arribar als nostres ulls els raigs de llum provinents del cap i dels peus de la imatge en l'espill.
- Si som a una distància d de l'espill, la distància des de l'objecte a la imatge serà $2d$.
- La tangent de l'angle θ serà, per tant: $\tan \theta = \frac{H}{2d}$.
- També es complirà que: $\tan \theta = \frac{h}{d}$
- Perquè la tangent de θ siga la mateixa, és necessari que: $H = 2h$, per tant, $h = \frac{H}{2}$.



3.2.2 Lents primes

- S'anomena lent a un material transparent d'índex n' , separat del medi exterior d'índex n , per dues superfícies de separació. Una bossa de plàstic rígid plena d'aigua i dins de l'aigua és un exemple de lent.
- S'anomena lent esfèrica prima: aquella amb dues superfícies esfèriques, o una esfèrica i una altra plana, amb un gruix d menut en comparació amb els radis de curvatura de les superfícies.
- Tipus de lents: s'anomenen depenent del radi de curvatura de les superfícies. Alguns exemples:
 - (a) pla-còncava
 - (b) pla-convexa
 - (c) bicòncava
 - (d) biconvexa



• En el que segueix, descriurem les propietats de lents convergents i divergents per al cas de lents d'un material dens (vidre) immers en un material lleuger (aire).

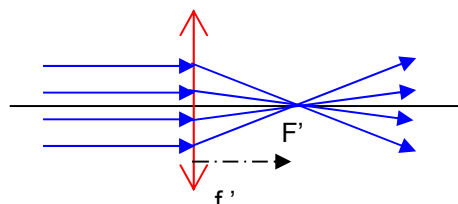
• Lent convergent:

- o És més grossa pel centre que per les vores (per exemple, lents (b) i (d))
- o Representació: una fletxa vertical com la indicada →



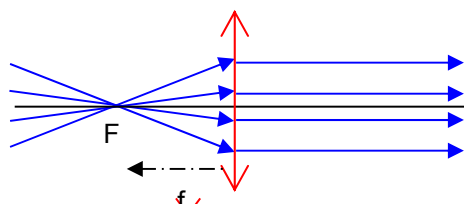
o Focus imatge d'una lent convergent:

- Quan en una lent convergent incideixen per l'esquerra raigs paral·lels a l'eix òptic, s'ajunten per la dreta en un punt anomenat focus imatge (F'). El focus imatge és, per tant, la imatge d'objectes situats a l'esquerra de la lent, en l'infinit, i és una imatge real.
- La posició d'aquest punt dona la distància focal imatge (f') de la lent.
- La distància focal imatge d'una lent convergent és positiva.



o Focus objecte d'una lent convergent:

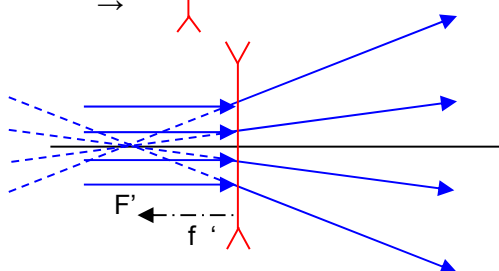
- Quan en una lent convergent incideixen per l'esquerra raigs passant per un punt anomenat focus objecte (F), ixen per la dreta paral·lels a l'eix òptic. Per tant, el focus objecte és un punt on, si es posa un objecte, forma la imatge a la dreta de la lent, en l'infinit.
- La posició d'aquest punt dona la distància focal objecte (f) de la lent.
- La distància focal objecte d'una lent convergent és positiva.



• Lent divergent

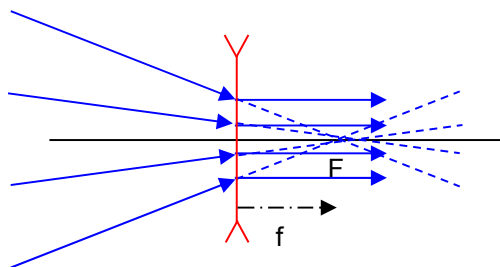
- o És més grossa per les vores que pel centre (per exemple, lents (a) i (c))
- o Representació: una fletxa vertical com la indicada
- o Focus imatge d'una lent divergent:

- Quan en una lent divergent incideixen per l'esquerra raigs paral·lels a l'eix òptic, ixen per la dreta seguint direccions divergents. Les seues prolongacions s'ajunten per l'esquerra en un punt anomenat focus imatge (F'). El focus imatge és, per tant, la imatge virtual d'objectes situats a l'esquerra de la lent en l'infinit.
- La posició d'aquest punt dona la distància focal imatge (f') de la lent.
- La distància focal imatge per a una lent divergent és negativa.



o Focus objecte d'una lent divergent:

- Quan en una lent divergent incideixen per l'esquerra raigs, les prolongacions dels quals s'ajunten per la dreta en un punt anomenat focus objecte (F), ixen per la dreta paral·lels a l'eix òptic. Per tant, el focus objecte és un punt on, si es poguera posar un objecte, formaria la imatge a la dreta de la lent, en l'infinit.
- La posició d'aquest punt dona la distància focal objecte (f) de la lent.
- La distància focal objecte per a una lent divergent és negativa.

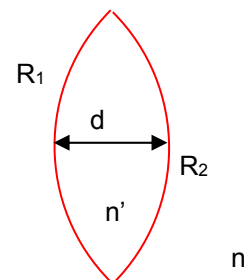


• Equació del constructor de lents:

- o La següent equació proporciona la distància focal imatge d'una lent en funció dels radis de curvatura de les superfícies i dels índexs de refracció dels medis:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- o n' és l'índex de refracció del material de la lent (en general, vidre: n' ≈ 1.5)



- o n és l'índex de refracció del material en el qual està immersa la lent (en general aire: $n' \approx 1$)
- o R_1 és el radi de curvatura de la primera superfície que el raig es troba (en general, la de l'esquerra). Si la superfície és plana, $R_1 = \infty$.
- o R_2 és el radi de curvatura de la segona superfície que es troba el raig (en general, la de la dreta). Si la superfície és plana, $R_2 = \infty$.
- o NOTEU que, sent $n' > n$, si ambdues superfícies són convexes, la distància focal imatge és positiva (lent convergent); si ambdues superfícies són cònques, la distància focal imatge és negativa (lent divergent). En casos mixtos, depèn dels valors relatius dels radis de curvatura.
- Potència d'una lent:
 - o L'equació del constructor de lents proporciona la inversa de la distància focal imatge. Per aquest motiu, de vegades és més convenient treballar amb aquest valor. S'anomena potència d'una lent a la inversa de la distància focal imatge:

$$P = \frac{1}{f'}$$

- o Quan la distància focal imatge s'expressa en metres, la potència ve donada en m^{-1} , unitat que rep el nom especial de diòptria (D).
- o La potència d'una lent té signe, el mateix que el de la distància focal imatge.
- o La potència proporciona informació sobre el poder convergent o divergent d'una lent. Per exemple, es diu que una lent convergent té molta potència (és a dir, la lent desvia molt els raigs, fent que convergisquen molt a prop de la lent).

PROBLEMA DE LENTS

3.7. Es té una lent de vidre ($n = 1.5$) immersa en aire ($n' = 1$). Determina la seua potència, la seua distància focal imatge i el seu caràcter (convergent o divergent) si les seues cares són (a) dues superfícies convexes de radis de curvatura 0.1 m i 0.2 m; (b) una superfície plana i una cònca de 4 m de radi. (Exemple 24.1, Kane). **SOL:** (a) 7.5 D, 0.133 m, convergent (b) - 0.125 D, - 8 m, divergent.

Solució:

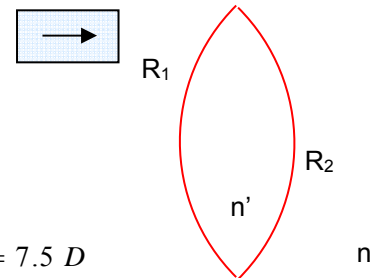
- (a) Si les cares són superfícies convexes:

- $R_1 = +0.1 \text{ m}$ (superfície convexa)
- $R_2 = +0.2 \text{ m}$ (superfície convexa)

- o Per tant la distància focal imatge serà:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1.5 - 1}{1} \left(\frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.2} \right) = 0.5 \cdot (10 + 5) = 7.5 \text{ m}^{-1} = 7.5 \text{ D}$$

- o $f' = \frac{1}{7.5} = 0.133 \text{ m}$ → com que f' és positiva, la lent és convergent.



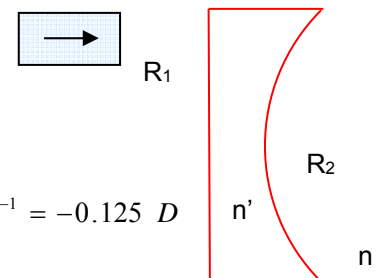
- (b) Si les cares són una plana i una altra cònca:

- $R_1 = \infty$ (superfície plana)
- $R_2 = -4.0 \text{ m}$ (superfície cònca)

- o Per tant la distància focal imatge serà:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1.5 - 1}{1} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{4} \right) = 0.5 \cdot (0 - 0.25) = -0.125 \text{ m}^{-1} = -0.125 \text{ D}$$

- o $f' = \frac{1}{-0.125} = -8 \text{ m}$ → com que f' és negativa, la lent és divergent.



3.3. Formació d'imatges

- (a) Mètode gràfic

- Cal traçar dos raigs dels quals se sàpia el seu recorregut. Se'n poden triar dos d'entre els tres següents:
 - 1) raig incident per l'esquerra paral·lel a l'eix òptic
→ ix per la dreta passant pel focus imatge F'.
 - 2) raig incident per l'esquerra que passa pel centre òptic del sistema
→ ix per la dreta sense desviar-se (en general, és el raig més fàcil de traçar)
 - 3) raig incident per l'esquerra que passa pel focus objecte
→ ix per la dreta paral·lel a l'eix òptic.
- La imatge es forma entre l'eix òptic i el punt de tall dels raigs traçats. El punt de tall per als tres tipus de raigs és el mateix.

- (b) Mètode analític

- Posició de la imatge: la posició de la imatge (s') està relacionada amb la de l'objecte (s) i amb la distància focal imatge (f') mitjançant la següent expressió:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s}$$

- Grandària de la imatge: S'anomena augment lineal β al factor que multiplica la grandària de l'objecte (y), per proporcionar la grandària de la imatge (y'). L'augment lineal es pot calcular a partir de la relació entre la posició de la imatge (s') i la posició de l'objecte (s), canviada de signe:

$$y' = \beta y \quad \beta = -\frac{s'}{s} \quad \rightarrow \quad y' = \beta y = -\frac{s'}{s} y$$

- Applets:

- <http://acacia.pntic.mec.es/jruiz27/lentspejoss/lents.htm>
- <http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/lents/ReglasFormaclmaLents.htm>

PROBLEMA DE FORMACIÓ D'IMATGES

- 3.12. Es tenen dues lents, una convergent amb una distància focal imatge $f' = + 0.1$ m, i una altra divergent amb una distància focal imatge de $f' = - 0.1$ m. Calcula, analíticament i gràficament, la posició, grandària i característiques de la imatge formada per un objecte quan està situat: (a) 0.3 m davant de la lent (b) 0.05 m davant de la lent (c) 0.05 m darrere de la lent (d) 0.3 m darrere de la lent.

Solució:

- Vegeu a continuació la resolució dels dos casos en els apèndixs A (lent convergent) i B (lent divergent), tant de manera analítica com de manera gràfica.

APÈNDIX A: IMATGES FORMADES PER UNA LENT CONVERGENT**RESOLUCIÓ ANALÍTICA**

3.12(a) La distància focal imatge d'una lent és + 0.1 m. Calcula, analíticament i gràficament, la posició, grandària i característiques de la imatge formada per un objecte quan està situat: (a) 0.3 m davant de la lent (b) 0.05 m davant de la lent (c) 0.05 m darrere de la lent (d) 0.3 m darrere de la lent.

SOLUCIÓ

$$(a) \quad s = +0.3 \text{ m}; \quad f' = +0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(+0.1)} - \frac{1}{(+0.3)} = \frac{3}{0.3} - \frac{1}{0.3} = \frac{2}{0.3} \quad \rightarrow \quad s' = +0.15 \text{ m}$$

$$\rightarrow \quad s' > 0 \quad \rightarrow \quad \text{imatge REAL}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{0.15}{0.3}y = -0.5y \quad \rightarrow \quad y' < 0 \quad \rightarrow \quad \text{imatge invertida}$$

$$\rightarrow \quad y' < y \quad \rightarrow \quad \text{imatge menor que l'objecte}$$

$$(b) \quad s = +0.05 \text{ m}; \quad f' = +0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(+0.1)} - \frac{1}{(+0.05)} = \frac{1}{0.1} - \frac{2}{0.1} = -\frac{1}{0.1} \quad \rightarrow \quad s' = -0.1 \text{ m}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{-0.1}{(+0.05)}y = +2y$$

imatge VIRTUAL, dreta i major que l'objecte

$$(c) \quad s = -0.05 \text{ m}; \quad f' = +0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(+0.1)} - \frac{1}{(-0.05)} = \frac{1}{0.1} + \frac{2}{0.1} = \frac{3}{0.1} \quad \rightarrow \quad s' = +0.033 \text{ m}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{(+0.033)}{(-0.05)}y = +0.66y$$

imatge REAL, dreta i menor que l'objecte

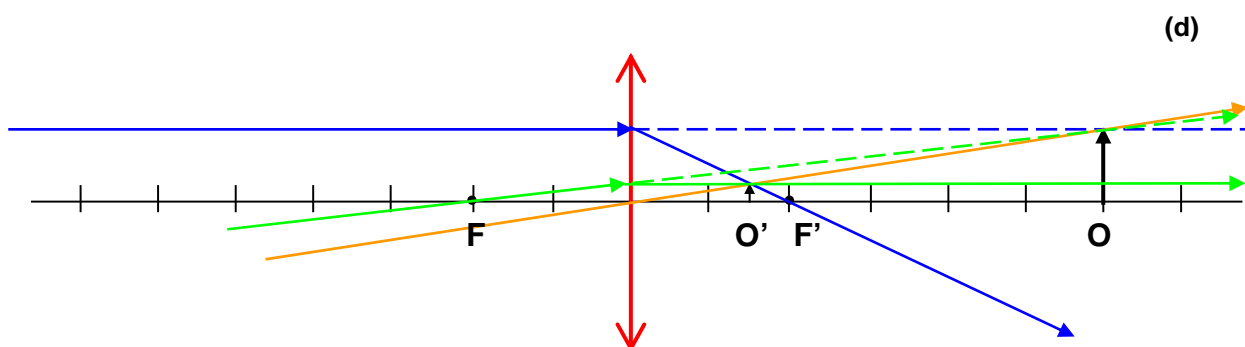
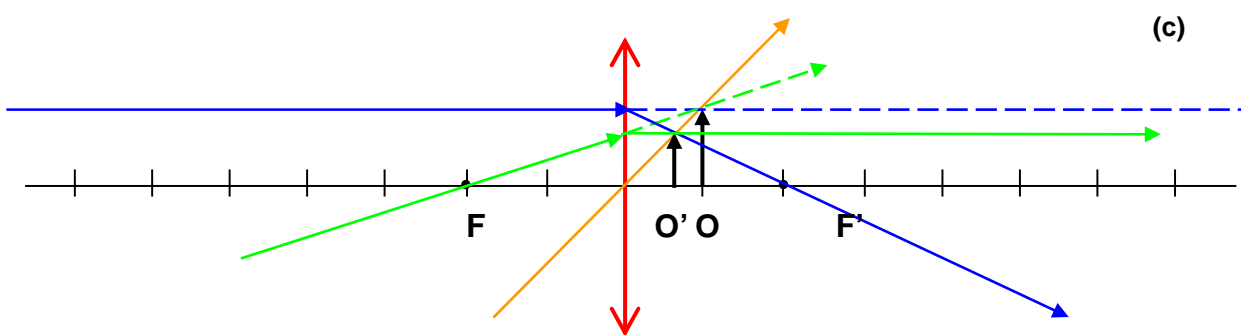
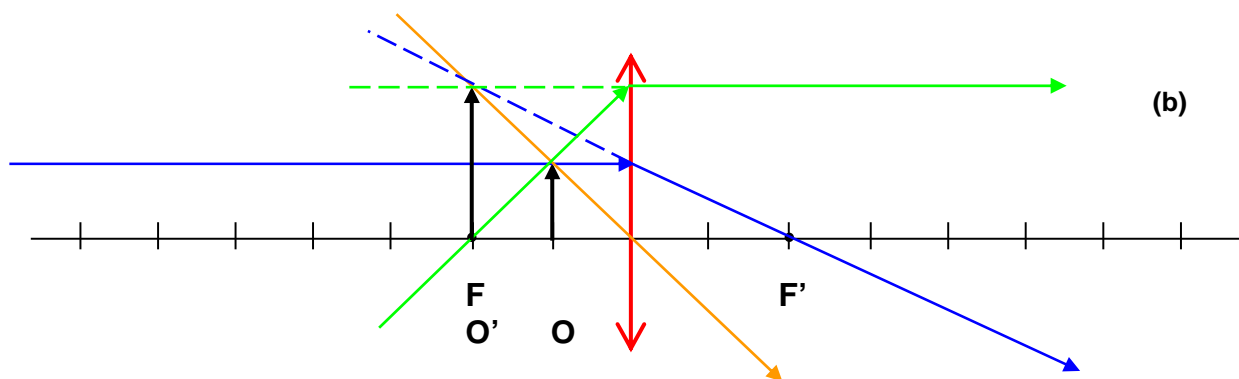
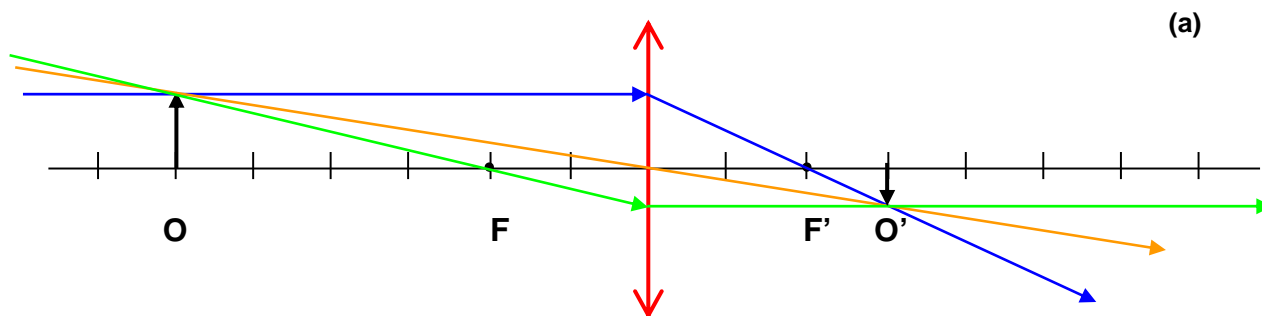
$$(d) \quad s = -0.3 \text{ m}; \quad f' = +0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(+0.1)} - \frac{1}{(-0.3)} = \frac{3}{0.3} + \frac{1}{0.3} = \frac{4}{0.3} \quad \rightarrow \quad s' = +0.075 \text{ m}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{0.075}{(-0.3)}y = 0.25y$$

imatge REAL, dreta i menor que l'objecte

LENT CONVERGENT: RESOLUCIÓ GRÀFICA



APÈNDIX B: IMATGES FORMADES PER UNA LENT DIVERGENT

RESOLUCIÓ ANALÍTICA

3.12 (b) La distància focal imatge d'una lent és -0.1 m. Calcula, analíticament i gràficament, la posició, grandària i característiques de la imatge formada per un objecte quan està situat: (a) 0.3 m davant de la lent (b) 0.05 m davant de la lent (c) 0.05 m darrere de la lent (d) 0.3 m darrere de la lent.

SOLUCIÓ

$$(a) \quad s = +0.3 \text{ m}; \quad f' = -0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(-0.1)} - \frac{1}{(+0.3)} = -\frac{3}{0.3} - \frac{1}{0.3} = -\frac{4}{0.3} \rightarrow s' = -0.075 \text{ m}$$

$$\rightarrow s' < 0 \rightarrow \text{imatge VIRTUAL}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{(-0.075)}{(+0.3)}y = +0.25y \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{imatge dreta}$$

$$\rightarrow y' < y \rightarrow \text{imatge menor que l'objecte}$$

$$(b) \quad s = +0.05 \text{ m}; \quad f' = -0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{(-0.1)} - \frac{1}{(+0.05)} = -\frac{1}{0.1} - \frac{2}{0.1} = -\frac{3}{0.1} \rightarrow s' = -0.033 \text{ m}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{(-0.033)}{(+0.05)}y = +0.66y \rightarrow \text{imatge VIRTUAL, dreta i menor que l'objecte}$$

$$(c) \quad s = -0.05 \text{ m}; \quad f' = -0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{(-0.1)} + \frac{1}{(+0.05)} = -\frac{1}{0.1} + \frac{2}{0.1} = \frac{1}{0.1} \rightarrow s' = +0.1 \text{ m}$$

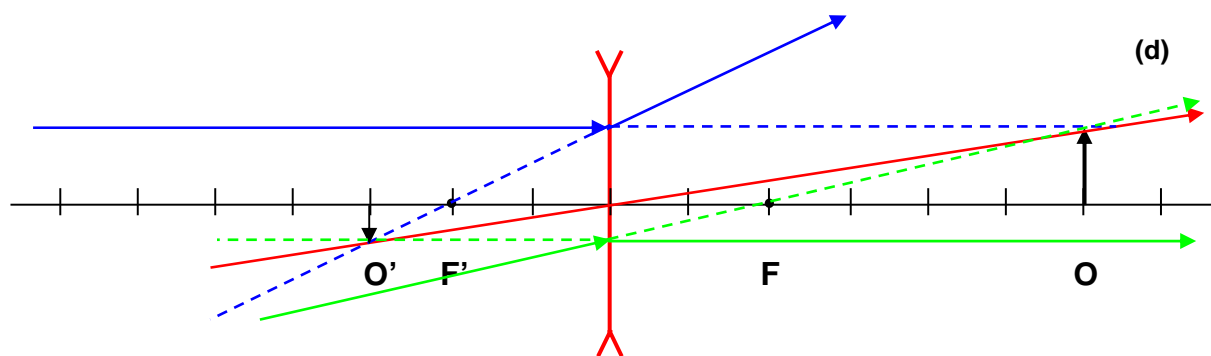
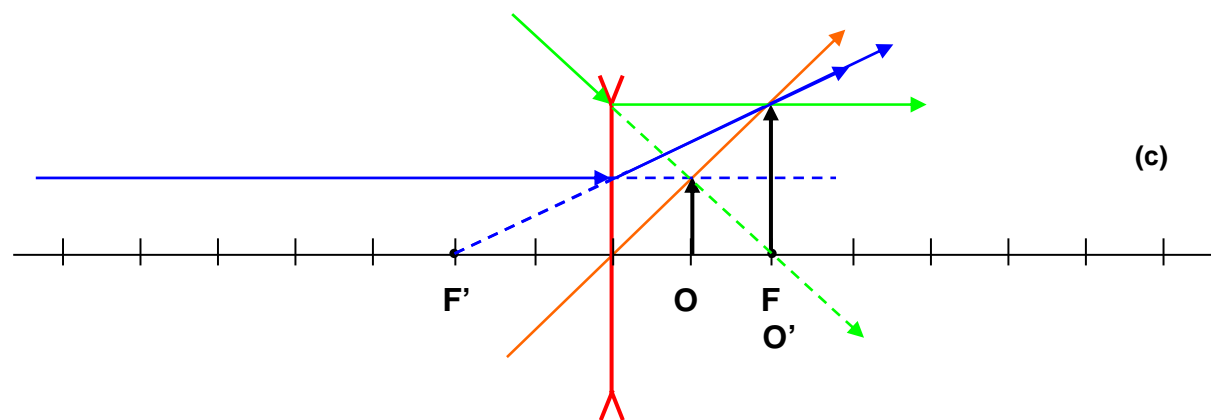
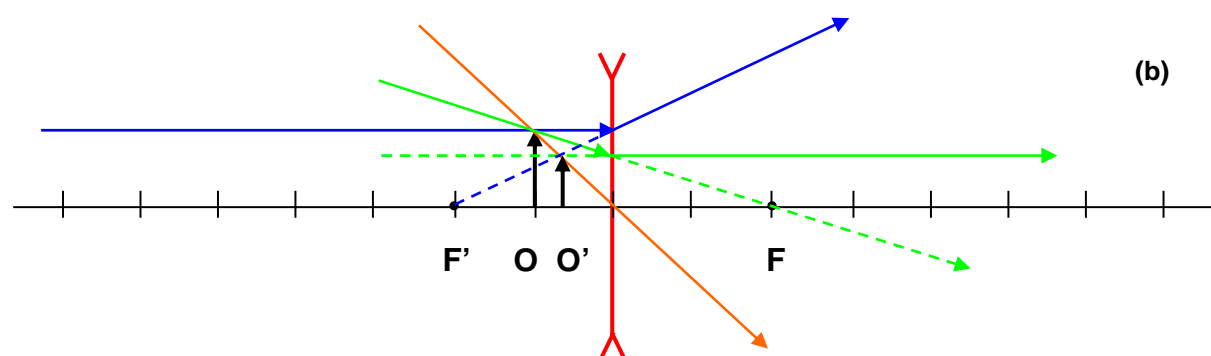
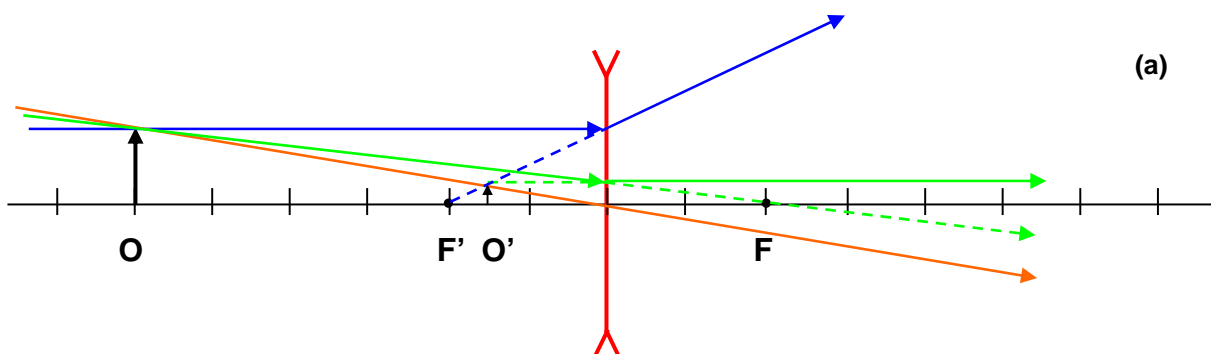
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{+0.1}{(-0.05)}y = +2y \rightarrow \text{imatge REAL, dreta i major que l'objecte}$$

$$(d) \quad s = -0.3 \text{ m}; \quad f' = -0.1 \text{ m}; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{(-0.1)} + \frac{1}{(+0.3)} = -\frac{3}{0.3} + \frac{1}{0.3} = -\frac{2}{0.3} \rightarrow s' = -0.15 \text{ m}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{(-0.15)}{(-0.3)}y = -0.5y \rightarrow \text{imatge VIRTUAL, invertida i menor que l'objecte}$$

LENT DIVERGENT: RESOLUCIÓ GRÀFICA



3.4. L'ull com sistema òptic

- Característiques de l'ull normal (emmetrop) (ap. 3.6, Cussó)

| | |
|--|--------|
| Diàmetre de l'ull | 25 mm |
| Radi de curvatura de la còrnia: | 7 mm |
| Diàmetre de la fòvea: | 0.3 mm |
| Índex de refracció de la còrnia: | 1.376 |
| Índex de refracció de l'humor aquós: | 1.336 |
| Índex de refracció del cristal·lí (ext): | 1.386 |
| Índex de refracció del cristal·lí (nucli): | 1.406 |
| Índex de refracció de l'humor vitri: | 1.337 |

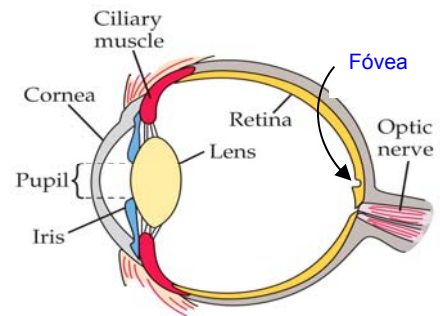


Figura 32.45 Tipler, 5ª

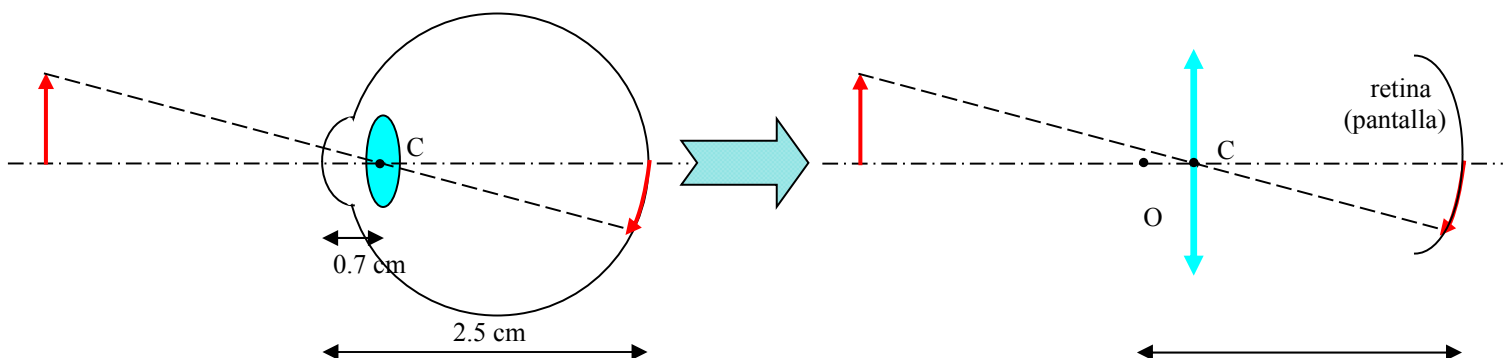
- Sistema òptic equivalent:

- L'element refractant del sistema és el conjunt format per la còrnia i el cristal·lí. En animals terrestres la refracció més important es dona en la còrnia. El cristal·lí s'encarrega de fer un ajust fi de la imatge perquè aquesta es forme correctament en la retina.
- Açò fa que el sistema equivalent de l'ull siga una LENT CONVERGENT, encara que amb les particularitats següents:
 - L'origen de distàncies del sistema es tria en el vèrtex de la còrnia (la part exterior de la còrnia).
 - El centre òptic del sistema es pot considerar en el centre de curvatura de la còrnia, és a dir, 7 mm darrere de la còrnia. També rep el nom de punt nodal. Un raig que passe per ell no es desviarà.
 - La distància focal objecte és de l'ordre de 17.5 mm. La distància focal imatge té un valor variable d'entre 22 i 25 mm (vegeu problema a continuació). Per tant, encara que ambdues distàncies focals són positives, són de valor diferent ($f \neq f'$):

$$f = +17.5 \text{ mm} \quad f' = +22 \text{ a } +25 \text{ mm}$$

- Procés de visió

- La llum pateix una refracció en entrar en la còrnia i després segueix a través de la pupil·la, orifici de diàmetre variable que s'ajusta a la quantitat de llum que entra (procés d'adaptació).
- El cristal·lí, la lent de l'ull, pot canviar la seua curvatura, possibilitant la formació d'una imatge nítida en la retina (procés d'enfocament o d'acomodació).
- Finalment, la imatge formada en la retina és recollida per les cèl·lules sensibles (bastons i cons) que envien un impuls elèctric al cervell.



- La figura mostra la forma de determinar la imatge sobre la retina quan l'ull enfoca correctament. Es traça un raig des de la part superior de l'objecte que passe pel centre òptic del sistema. El

raig no es desviarà i, en incidir sobre la retina, formarà una imatge invertida. El cervell s'encarrega de reinterpretar-la correctament. Mireu una animació en:

http://www.coopervision.com/spain/patient_eyecare_humaneye.asp

- Vegem a continuació algun detall del procés d'**adaptació**:
 - És el procés pel qual la pupil·la es contrau o dilata per a regular la quantitat de llum que entra a l'ull. D'aquesta manera es regula la quantitat de llum que entra en l'ull, permeten que siga l'adequada segons les condicions d'il·luminació.
 - El control es fa mitjançant la pupil·la, que és l'orifici central de l'iris i té capacitat per a canviar de diàmetre (d):
 - Si entra molta llum: la pupil·la es tanca ($d \approx 2 \text{ mm}$).
 - Si entra poca llum: la pupil·la s'obri ($d \approx 8 \text{ mm}$).
- Vegem a continuació algun detall del procés d'**acomodació**:
 - És el procés pel qual el cristal·lí canvia la seua curvatura per a enfocar objectes a diferents distàncies, és a dir, per a formar una imatge nítida sobre la retina.
 - El cristal·lí, o lent de l'ull, és una lent biconvexa asimètrica. És, per tant, una lent convergent. Els músculs ciliars canvien la seua curvatura, de tal manera que la seua distància focal imatge pot canviar (recordem l'equació del constructor de lents). D'aquesta manera, el conjunt còrnia-cristal·lí és capaç d'enfocar objectes situats a diferents distàncies. Quan s'enfoquen objectes propers el cristal·lí és més esfèric que quan s'enfoquen objectes llunyans
 - S'anomena **punt remot o punt llunyà (PR)** la distància màxima que pot enfocar l'ull. S'anomena **punt pròxim (PP)** la mínima distància que pot enfocar l'ull. En un adult sa el punt llunyà està en l'infinit i el punt pròxim està 25 cm davant dels ulls.

PROBLEMA DE L'ULL COM A SISTEMA ÒPTIC: POTÈNCIA

- .13. Calcula quin és el valor de la distància focal i la potència de la lent equivalent de l'ull en els punts remot i pròxim de l'ull sa. **SOL:** (a) 25 mm, 40 diòptries; (b) 22.7 mm, 44 diòptries.

Solució:

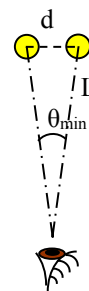
PR: objecte en infinit: $s = \infty$; imatge en retina: $s' = 25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{0,025} + \frac{1}{\infty} = 40 \text{ dioptries} \quad \rightarrow \quad f' = 0,025 \text{ m} = 25 \text{ mm}$$

PP: objecte situat a 25 cm davant l'ull: $s = + 25 \text{ cm} = + 0,25 \text{ m}$; imatge en retina: $s' = 25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{0,025} + \frac{1}{0,25} = 44 \text{ dioptries} \quad \rightarrow \quad f' = 0,0227 \text{ m} = 22,7 \text{ mm}$$

- Vegem a continuació una altra característica de l'ull: l'**agudes visual**
 - És la capacitat de l'ull per a distingir dos objectes lluminosos llunyans.
 - Per a un ull humà normal, la mínima separació angular entre dos punts lluminosos llunyans, per a poder veure dues imatges diferents, és de $\theta_{\min} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ radians} = 0,029^\circ$ (valor mitjà experimental).
 - Per tant, la relació entre la distància entre els punts lluminosos (d) i la distància a l'observador (L) ve donada per: $\text{tg } \theta_{\min} = \frac{d}{L}$



PROBLEMA DE L'ULL COM A SISTEMA ÒPTIC: AGUDESIA VISUAL

3.14.- Calcula a quina distància l'ull humà pot distingir de nit els fars d'un cotxe que estan separats entre si 1.5 m. **SOL:** 3000 m.

Solució:

- Noteu que, per a angles molt menuts, $tg \theta \cong \theta$, on θ s'expressa en radians. Per tant:

$$\frac{d}{L} \cong 5 \cdot 10^{-4} \rightarrow L \cong \frac{d}{5 \cdot 10^{-4}} \cong d \cdot 2000 \cong 3000 \text{ m} .$$

- Així doncs, una bona aproximació per a calcular la distància a la qual l'ull humà pot distingir dos punts lluminosos és multiplicar per 2000 la distància entre ells.

Defectes de la visió

• **Defectes de convergència**

○ Ull emmetrop:

- ull normal i sa
- $d_{PR} = \infty$; $d_{PP} = 25 \text{ cm}$.

○ Ull miop:

- Ull massa llarg o convergent.
- La imatge es forma davant de la retina.
- PR i PP més propers a l'ull que en l'ull emmetrop.
- Es corregeix amb lents divergents.
- Vegeu figures adjuntes.

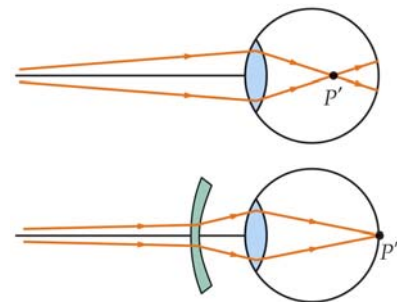
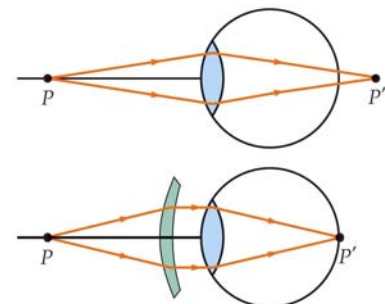


Figura 32.47 Tipler, 5ª

○ Ull hipermetrop:

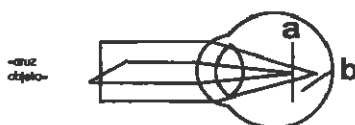
- Ull massa curt o poc convergent.
- La imatge es forma darrere de la retina.
- PR i PP més lluny de l'ull que en l'ull emmetrop.
- Es corregeix amb lents convergents.
- Vegeu figures adjuntes.



○ Ull astigmàtic:

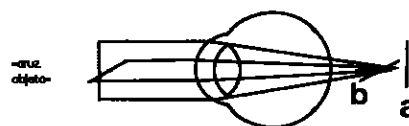
- ull no estigmàtic, la qual cosa significa que els raigs horitzontals i verticals no formen la imatge en el mateix punt.
- Defecte conseqüència d'una còrnia no perfectament esfèrica.
- Es corregeix amb lents cilíndriques (no esfèriques).
- Vegeu figures adjuntes (<http://www.tarso.com/Astig.html>).

ojo miope astigmático



Las imágenes de los 2 brazos de la «cruz objeto» están delante de la retina.

ojo hipermetrope astigmático



Las imágenes de los 2 brazos de la «cruz objeto» están detrás de la retina.

Indicacions per a calcular les lents correctores de miops i hipermetrops:• Miops:

- El seu punt llunyà (és a dir, la màxima distància a la qual poden enfocar) no és el ∞ , sinó que és una distància relativament curta (de vegades se'ls diu "curts de vista").
- Per tant, es desitja que objectes que estan en ∞ i que els miops no poden enfocar, formen la seua imatge a través de les lents correctores (ulleres) en el punt on sí que poden enfocar ("el seu" PR), sent aquesta imatge virtual (s' negativa).

○ Així: $s = + \infty$
 $s' = - d_{PR}$ (el seu) $\rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{1}{d_{PR}} + 0 = -\frac{1}{d_{PR}}$

• Hipermetrops

- El seu punt pròxim (és a dir, la mínima distància a la qual poden enfocar) és major que 25 cm.
- Per tant, es desitja que objectes que són a 25 cm, que els hipermetrops no poden enfocar correctament, formen la seua imatge a través de les lents correctores (ulleres) en el punt on sí que poden enfocar ("el seu" PP), sent aquesta imatge virtual (s' negativa).

○ Així: $s = + 25 \text{ cm}$
 $s' = - d_{PP}$ (el seu) $\rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{1}{d_{PP}} + \frac{1}{0.25} = 4 - \frac{1}{d_{PP}}$

PROBLEMA DE LENTS CORRECTORES

3.17. Calcula la distància focal d'una lent correctora: (a) per a un miop amb un punt remot es troba a 0.50 m; (b) per a un hipermetrop amb un punt pròxim que es troba a 0.75 m. **SOL:** (a) $f' = - 0.50$ m; (b) $f' = + 0.375$ m.

Solució:

- (a) Per aquest miop hem d'aconseguir una lent que permeta que objectes en $s = \infty$ (distàncies a les quals un miop no veu els objectes ben enfocats) formen la seua imatge en $s' = - 0.50$ m (màxima distància a la qual aquest miop veu ben enfocats els objectes llunyans).

Per tant $\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-0.5} + \frac{1}{\infty} = -2 + 0 = -2 \text{ D}$ $f' = \frac{1}{-2} = -0.5 \text{ m}$

- (b) Per aquest hipermetrop hem d'aconseguir una lent que permeta que objectes en $s = +0.25$ m (distància a la qual l'hipermetrop no veu els objectes amb claredat) formen la seua imatge en $s' = -0.75$ m (distància a la qual aquest hipermetrop veu correctament objectes propers).

Per tant $\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-0.75} + \frac{1}{+0.25} = -1.333 + 4 = 2.667 \text{ D}$ $f' = \frac{1}{2.667} = 0.375 \text{ m}$

• **Defectes d'acomodació (presbícia)**○ Ull prèsbita:

- Ull que ha perdut part de la seua capacitat per a acomodar (és a dir, part de la seua capacitat per a enfocar objectes propers).
- El PP s'allunya (recordeu a les persones majors estirant el braç per a allunyar el paper que estan llegint).
- Apareix amb l'edat, ja que el cristal·lí s'endureix amb el pas dels anys. En endurir-se, no es pot corbar prou per a enfocar objectes propers (recordem que el cristal·lí és més aviat pla quan enfoca objectes llunyans i més aviat esfèric quan enfoca objectes propers).

| Edat | Xiquet | adult < 40 anys | 40 anys | 50 anys | 60 anys |
|-----------------|--------|-----------------|-------------|--------------|--------------|
| PP | 10 cm | 25 cm | 33 cm | 50 cm | 100 cm |
| lent correctora | 0 | 0 | +1 diòptria | +2 diòptries | +3 diòptries |

Dades obtingudes de E. Pimentel (també parla de les operacions de miopia)

http://www.esteve.es/EsteveArchivos/1_8/Ar_1_8_44_APR_15.pdf

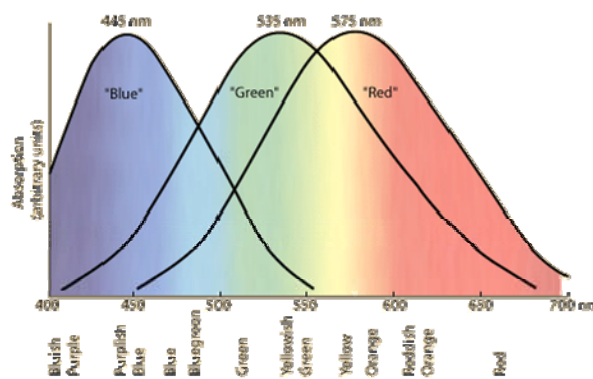
• Defectes de visió cromàtica (visió dels colors)

○ Ull daltònid

- Les cèl·lules sensibles al color tenen forma de con i estan situades en la retina, estant especialitzades a detectar la llum de diferents regions espectrals.
- Actualment és acceptat que hi ha tres tipus de cons: els sensibles al blau, al verd i al roig. La figura mostra els intervals de longitud d'ona que detecten.
- La ceguesa al color s'anomena daltonisme i consisteix en un funcionament incorrecte d'algun tipus de con.
- Per exemple, els protanòmals veuen poc el roig i els deuteranòmals veuen poc el verd.
- És un defecte d'origen genètic. Es dona quasi exclusivament en els homes (fins a un 10% de la població masculina). Les dones són portadores, ja que és un defecte lligat al cromosoma X (de manera semblant a l'hemofília).
- Podeu fer la prova de si sou daltònids en:

<http://www.tarso.com/Cromatica.html>

<http://www.kcl.ac.uk/teares/gktvc/vc/lt/colourblindness/plate1.htm>



- Pàgina web MOLT BONA d'òptica geomètrica amb applets i problemes (ja citada anteriorment):

<http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/index.htm>

- Figures de l'efecte de lents correctores:

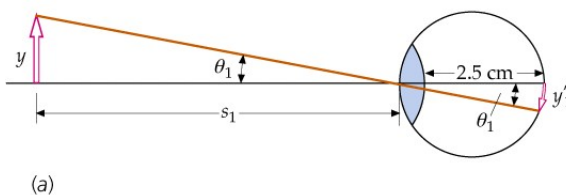
<http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/Instrumentos/ollo/ollo.htm>

3.6. Òptica instrumental

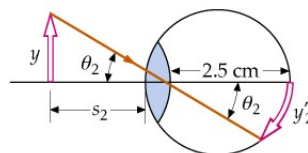
(a) La lupa (microscopi simple)

- La grandària aparent d'un objecte observat a simple vista ve determinat per la grandària de la imatge formada en la retina. En la figura (a), un objecte llunyà forma una imatge menuda y_1' ; en la figura (b), el mateix objecte però més prop forma una imatge més gran y_2' .
- El **límit** està en la mínima distància a la qual un objecte pot ser enfocat per l'ull, és a dir, en el punt pròxim.
- Vegem quin és l'angle màxim des del qual podem observar un objecte a ull n

$$\operatorname{tg} \theta_0 \cong \theta_0 \cong \frac{y}{d_{PP}}$$

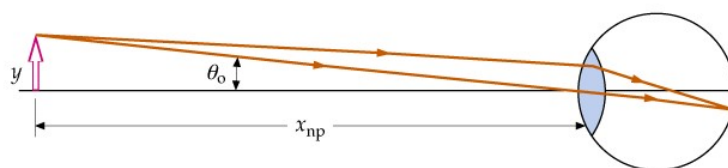


(a)



(b)

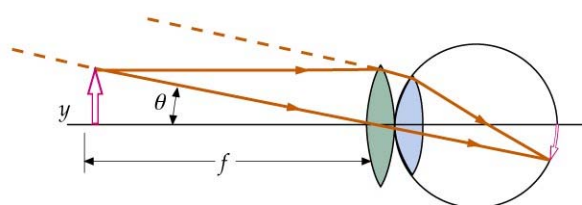
Figura 32.48 Tipler, 5ª Ed.



(a)

Figura 32.51 Tipler, 5ª Ed.

- Aquesta visió es pot millorar amb l'ús La lupa és senzillament una lent co distància focal menuda (de l'ordre ue pocs centímetres).
- L'ÚS CORRECTE exigeix:
 - Apegar la lupa a l'ull.
 - Ajustar la posició de l'objecte perquè estiga situat prop del focus objecte de la lent (estarà per tant a uns pocs centímetres de la lent).
 - Així, la imatge (virtual, gran i dreta) es forma en l'inl comoditat.



(b)

- L'angle θ subtendit per la imatge obtinguda amb la lupa serà el mateix que el subtendit per l'objecte respecte de la lupa. Per tant serà:

$$\operatorname{tg} \theta \cong \theta \cong \frac{y}{|f|} = \frac{y}{f'}$$

on hem tingut en compte que f és negativa i f' és positiva, sent $f' = -f = |f|$.

- Havíem dit que l'augment lineal $\beta = \frac{y'}{y}$ es podia calcular com la relació entre la posició de la imatge i la de l'objecte, canviada de signe: $\beta = -\frac{s'}{s}$. Quan alguna de les posicions és molt gran (∞), s'utilitza l'augment angular, definit por: $M = \frac{\theta'}{\theta}$, on θ és l'angle subtendit per l'objecte i θ' és l'angle subtendit per la imatge.

- En aquesta ocasió volem comparar la grandària de la imatge de l'objecte vist sense lupa (grandària y , angle subtendit θ_0) i la grandària de la imatge de l'objecte vist amb lupa (grandària y' , angle subtendit θ). Per tant, l'augment angular serà:

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{y/f'}{y/d_{PP}} = \frac{d_{PP}}{f'}$$

- Per exemple, sent $d_{PP} = 25$ cm per a l'ull normal i sa, una lupa amb distància focal imatge de 5 cm proporcionarà un augment de 5, és a dir, veurem l'objecte 5 vegades més gran.

PROBLEMA D'INSTRUMENTS ÒPTICS: LA LUPA

3.20. Un observador té el punt pròxim a una distància de 30 cm i observa un objecte menut amb una lupa de 20 diòptries. Suposant que la lupa s'utilitza correctament, calcula l'augment de la lupa per a aquest observador. **SOL:** $M = 6$.

Solució:

- La lupa s'utilitza correctament quan s'aplega a l'ull i l'objecte és prop del focus objecte.
- Calculem prèviament la distància focal imatge de la lupa: $f' = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ m}$
- Si la lupa s'utilitza correctament: $M = \frac{d_{PP}}{f'} = \frac{0.30}{0.05} = 6$, és a dir, l'augment lineal és 6:
 $y' = M y = 6y$.

(b) El microscopi compost

- S'anomena microscopi compost o, simplement microscopi, a un instrument d'observació format per, almenys, dues lents convergents i que permet observar objectes molt menuts a distàncies molt curtes. En el que segueix, descriurem el funcionament del microscopi compost format sols per dues lents. Si se'n comprèn el funcionament, es pot entendre també el funcionament d'altres tipus de microscopis més complexos, com el microscopi electrònic.
- De les dues lents del microscopi, la més propera a l'ull s'anomena OCULAR, i la més propera a l'objecte a estudiar s'anomena OBJECTIU.

- La distància entre el focus imatge de l'objectiu i el focus objecte de l'ocular és fixa i s'anomena **longitud del tub (L)**. El seu valor aproximat és de 16 cm.

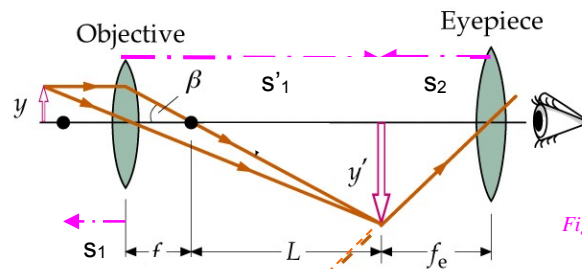


Figura 32.52 Tipler, 5ª

- Funcionament òptic:

Per a l'objectiu:

- Objecte prop del focus objecte de l'objectiu: $s_1 \approx f_o$
- Imatge prop del focus objecte de l'ocular: $s'_1 \approx f'_o + L$
- Imatge real (gran, invertida respecte de l'objecte y).
- Augment lineal: $\beta_{obj} = -\frac{s'_1}{s_1} = -\frac{f'_o + L}{f_o} \approx -\frac{L}{f_o} = -\frac{L}{f'_o}$ on $f'_o = +f_o$ $y' = \beta_{obj} y$

o Per a l'ocular:

- Imatge de l'objectiu = objecte de l'ocular
- Està prop del focus objecte de l'ocular: $s_2 \approx f_e$
- Imatge final virtual (gran, dreta respecte de y' , invertida respecte de y , quasi en $-\infty$)
- Augment angular (l'ocular actua com una LUPA): $M_{ocul} = \frac{d_{PP}}{f'_e}$ $y'' = M_{ocul} y'$

- Per tant l'augment total serà: $M = \beta_{obj} M_{ocul} = -\frac{L}{f'_o} \frac{d_{PP}}{f'_e} = -\frac{L d_{PP}}{f'_o f'_e}$ $y'' = M y$

- Observeu que, essent totes les magnituds positives, ja que ambdues lents són convergents, el signe negatiu indica que la imatge final és invertida respecte de l'objecte inicial.

PROBLEMA D'INSTRUMENTS ÒPTICS: EL MICROSCOPI

3.21. La distància focal de l'ocular i de l'objectiu d'un microscopi són, respectivament, 20 mm i 3 mm, i les lents estan separades 20 cm. Volem veure la imatge final virtual a 25 cm de l'ocular. (a) A quina distància de l'ocular s'haurà de formar la imatge de l'objectiu? (b) A quina distància de l'objectiu és l'objecte observat? (c) Quina seria la potència d'una lupa simple per a produir el mateix augment? **SOL:** (a) $s_2 = -1.85$ cm; (b) $s_1 = -0.305$ cm; (c) 3333 diòptries.

Solució:

- Dades : $f_o' = 0.003$ m $f_e' = 0.02$ m $L = 0.20 - 0.003 - 0.02 = 0.177$ m
ja que la longitud del tub L és la distància entre lents menys les seues distàncies focals.

- (a) Utilitzarem el subíndex 1 per a l'objectiu i 2 per a l'ocular. Per tant, com a dada tenim $s_2' = -0.25$ m.

- Així, per a l'ocular: $\frac{1}{f_e'} = \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_2} \rightarrow \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_e'} - \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{0.02} - \frac{1}{-0.25} = 50 + 4 = 54$ m⁻¹ en

conseqüència: $s_2 = \frac{1}{54} = 0.0185$ m

- (b) De la figura es dedueix que $|s_1'| + |s_2| = |f_o'| + L + |f_e'|$

o per tant $|s_1'| = |f_o'| + L + |f_e'| - |s_2|$

$$|s_1'| = 0.003 + 0.20 + 0.02 - 0.0185 = 0.2045$$
 m

- o Tenint en compte que la imatge a través de l'objectiu es forma darreres d'ell, el signe de s_1' serà positiu: $s_1' = +0.2045$ m

- o Així, per a l'objectiu: $\frac{1}{f_o'} = \frac{1}{s_1'} + \frac{1}{s_1} \rightarrow$

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_o'} - \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{0.003} - \frac{1}{0.2045} = 333.3 - 4.90 = +328.4$$
 m⁻¹ en conseqüència:

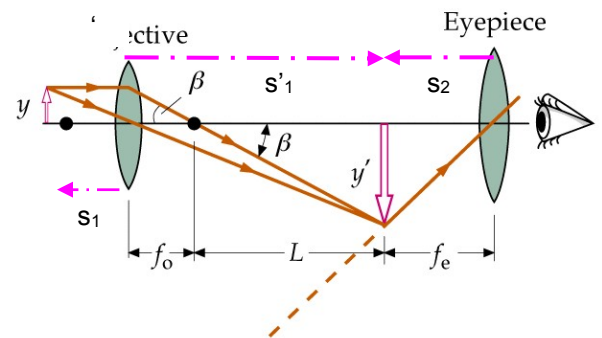
$$s_1 = \frac{1}{328.4} = 0.00304$$
 m

- (c) L'augment total serà: $M = M_{obj} M_{ocul} = -\frac{L d_{PP}}{f_o' f_e'} = \frac{0.20 \cdot 0.25}{0.003 \cdot 0.02} = 833.3$

$$y' = M y = 833.3 y$$

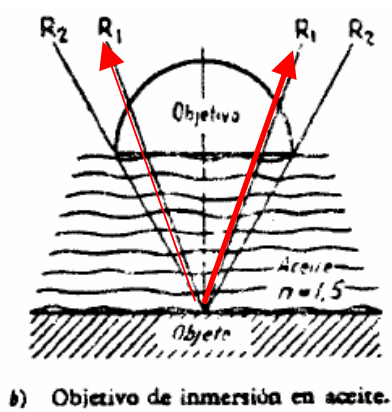
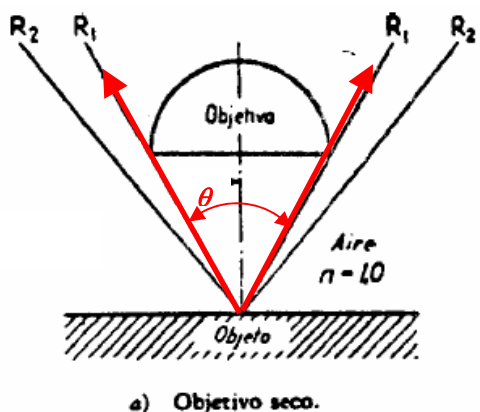
- Com que l'augment d'una lupa ve donat per $M = \frac{d_{PP}}{f'}$, perquè una lupa simple proporcionarà aquest augment, la seua distància focal imatge hauria de ser

$$f' = \frac{d_{PP}}{M} = \frac{0.25}{833.3} = 3333.3$$
 m⁻¹ = 3333.3 D



Obertura numèrica

- La qualitat d'un objectiu ve determinada per la seua capacitat per a "capturar" la llum, ja que aquesta captura determina la lluminositat de la imatge.
- Un medi amb un alt índex de refracció concentra molt els raigs de llum: la figura mostra (en roig) el diferent recorregut dels raigs R₁ i R₂ que ixen de la mostra, depenent de si hi ha aire entre ella i l'objectiu (n = 1) i quan hi ha un oli (n = 1.5).
- Es defineix l'obertura numèrica com $A = n \cdot \sin \theta$, on
 - n és l'índex del medi situat entre l'objecte i l'objectiu;
 - θ és el semiangle del con format pels raigs marginals a l'objectiu (raigs R₁ per a la figura a i raigs R₂ per a la figura b). Ve determinat pel diàmetre de la lent i la seua distància a l'objectiu.
- Valors típics per a l'obertura numèrica: 0.07 < A < 1.4
 - Els valors menors corresponen a "objectius secs", és a dir, objectius amb aire entre l'objecte i l'objectiu (figura a)
 - Els valors majors que la unitat corresponen a "objectius d'immersió", és a dir, objectius amb algun líquid d'alt índex de refracció que ocupa l'espai entre l'objecte i l'objectiu (figura b)
- Vegeu per a l'obertura numèrica: <http://www.metalurgiausach.cl/TECNICAS%20EXPERIMENTALES/UNID6.pdf>



Valors indicats en els objectius

- Nombre gran: és l'augment de l'objectiu.
- Nombre decimal: és l'obertura numèrica.
- Exemple de la figura: 40 x 0.65.

Valors indicats en els oculars

- Nombre gran: és l'augment de l'ocular.
- Exemple de la figura: 15 x

Augment total del microscopi

- Depèn de l'augment de l'objectiu i de l'ocular triats.
- Per a l'objectiu i l'ocular de les figures:
 - Augment total: $M = M_{obj} M_{ocul} = 40 \times 15 = 600$

- Applet del microscopi compost

<http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/difraccion/microsc.html>

- Bona descripció del microscopi en:

<http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/Instrumentos/Microscopio/mi>



TEMA 3: ÒPTICA

REFLEXIÓ I REFRACCIÓ

3.1. Un raig de llum verda de 5×10^{-7} m de longitud d'ona en el buit penetra en un vidre d'índex de refracció 1.5. Quina és la velocitat de la llum en el vidre? Quina és la seua longitud d'ona en el vidre? **SOL:** 2×10^8 m/s; 333 nm, ultraviolada.

3.2. Un raig de llum blanca penetra en un vidre formant un angle de 30° amb la normal. El vidre té un índex de refracció que depèn de la longitud d'ona. Si coneixem el seu valor per a tres longituds d'ona diferents: $n(\text{roig}, 656 \text{ nm}) = 1,523$; $n(\text{groc}, 589 \text{ nm}) = 1,556$ i $n(\text{violat}, 434 \text{ nm}) = 1,593$. Quin és l'angle de refracció per a aquesta llum roja, groga i violada? **SOL:** $\theta_R = 19.17^\circ$, $\theta_A = 18.74^\circ$, $\theta_V = 18.29^\circ$.

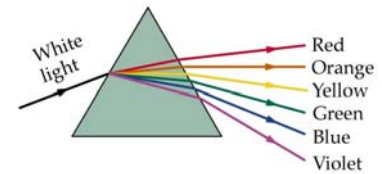
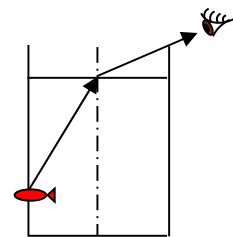
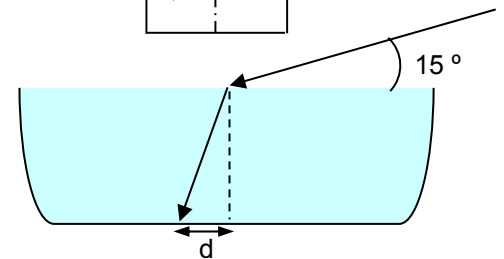


Figura 33.27, Tiple, 5ª Ed.

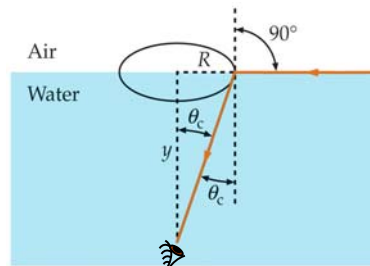
3.3. Un biòleg marí s'acosta amb sigil a un tanc ple d'aigua ($n = 1$) i, mirant per la vora, que és a 70 cm de la superfície de l'aigua ($n = 1.33$), veu un peix apegat a la paret oposada, que està a 2 m. (a) A quina fondària aparent és el peix? (b) A quina fondària real és? Supposeu que el raig de llum que ve de l'espècimen emergeix pel centre del tanc. **SOL:** 1.28 m, 0.70 m.



3.4. Una fulla d'arbre sura en la superfície de l'aigua d'una piscina de 2 m de fondària. En el moment en què el sol és a 15° sobre l'horitzó, a quina distància des del punt del fons situat directament davall de la fulla apareixerà la seua ombra? Supposeu que res obstaculitza el pas dels raigs del sol i que l'aigua està en calma. Dades: $n(\text{aire}) = 1$, $n(\text{aigua}) = 1.33$. **SOL:** 2.11 m.



3.5. Un bussejador submergit en l'aigua ($n = 1.33$) mira cap amunt i veu que la llum de l'exterior ($n = 1$) li arriba a través d'un con de llum, la base del qual és un cercle de 10 m de diàmetre. (a) Quina és l'obertura d'aquest con, si aquesta es defineix com l'angle entre dues generatrius oposades? (b) A quina fondària es troba el bussejador? **SOL:** (a) 97.5° , (b) 4.38 m.



ESPILLS

3.6. Quines han de ser les dimensions que ha de tenir un espill perquè ens puguem veure de cos sencer? **SOL:** la meitat de la nostra altura.

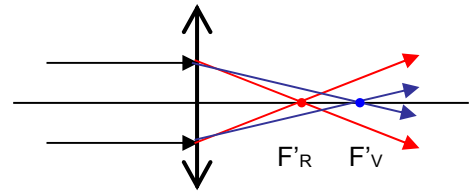
LENTS

3.7. Es té una lent de vidre ($n = 1.5$) immersa en aire ($n' = 1$). Determina la seua potència, la seua distància focal imatge i el seu caràcter (convergent o divergent) si les seues cares són (a) dues superfícies convexes de radis de curvatura 0.1 m i 0.2 m; (b) una superfície plana i una còncava de 4 m de radi. (Exemple 24.1, Kane). **SOL:** (a) 7.5 D, 0.133 m, convergent (b) - 0.125 D, - 8 m, divergent.

3.8. Quina és la distància focal imatge de la lent anterior (a) si s'utilitza dins de l'aigua? I si s'utilitza immersa en un diamant ($n = 2.42$)? Quin seria el seu caràcter (convergent o divergent) en cada

cas? (Exemple 24.2, Kane). **SOL:** (a) 1.92 D, 0.52 m, convergent (b) - 5.70 D, - 0.175 m, divergent.

- 3.9. Una lent convexa-còncava de radis iguals a $R_1 = 25$ cm i $R_2 = 50$ cm està feta de vidre, amb un índex de refracció de 1.53 per a la llum violeta i 1.47 per a la llum roja. Calcula les distàncies focals corresponents. **SOL:** $f_V' = 1.06$ m, $f_R' = 0.94$ m.



FORMACIÓ D'IMATGES

- 3.10. La distància focal d'una lent és 0.1 m (si no s'especifica, s'entén que es tracta de la distància focal imatge). Calcula, gràficament i analíticament, la posició i grandària de la imatge quan la posició de l'objecte és (a) 0.5 m davant de la lent; (b) 0.08 m davant de la lent. Repetiu el càlcul per a una lent divergent ($f' = -0.1$ m). **SOL:** (a) 0.125 m, - 0.25y (b) - 0.4 m, 5y.
- 3.11. La distància focal d'una lent és 0.2 m. Calcula, gràficament i analíticament, la posició i grandària de la imatge quan la posició de l'objecte és (a) 0.5 m davant de la lent; (b) 0.15 m davant de la lent. (c) Repetiu el càlcul (a) per a una lent divergent ($f' = -0.2$ m). **SOL:** (a) 0.33 m, - 0.66 i (b) -0.6 m, 4 y, (c) - 0.14 m, 0.28 y.

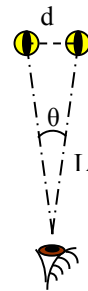
AJUDA: En la següent pàgina web teniu el càlcul i el traçat de raigs per a obtenir una imatge a través d'una lent en qualsevol posició de l'objecte. Instruccions: (a) En el menú de l'esquerra, dins de LENTS PRIMES, cliqueu en ACTIVITATS. (b) Maximitzeu la finestra que apareix. (c) Poseu les dades del problema amb les següents precaucions: (c1) les distàncies estan en cm; (c2) els signes de s i s' són contraris als nostres (+ davant de la lent, - darrere de la lent)

<http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/index.htm>

- 3.12. Es tenen dues lents, una convergent amb una distància focal imatge $f' = +0.1$ m, i una altra divergent amb una distància focal imatge de $f' = -0.1$ m. Calcula, analíticament i gràficament, la posició, grandària i característiques de la imatge formada per un objecte quan està situat: (a) 0.3 m davant de la lent (b) 0.05 m davant de la lent (c) 0.05 m darrere de la lent (d) 0.3 m darrere de la lent. **SOL:** vegeu els apèndixs A i B.

L'ULL COM A SISTEMA ÒPTIC

- 3.13. Calcula quin és el valor de la distància focal i la potència de la lent equivalent de l'ull en els punts remot i pròxim de l'ull sa. **SOL:** (a) 25 mm, 40 diòptries; (b) 22.7 mm, 44 diòptries.
- 3.14. Calcula a quina distància l'ull humà pot distingir de nit els fars d'un cotxe que estan separats entre si 1.5 m. **SOL:** 3000 m.
- 3.15. Repetiu el càlcul per a poder distingir els ulls d'un felí, si aquests estan separats entre si uns 4 cm. **SOL:** 80 m.
- 3.16. Quina és la mínima separació entre dos objectes situats en el punt pròxim de l'ull humà perquè puguin ser discernits? (Per exemple, dues larves d'insecte acabades d'eixir de l'ou). **SOL:** 0.125 mm.



LENTS CORRECTORES

- 3.17. Calcula la distància focal d'una lent correctora: (a) per a un miop amb un punt remot que és a 0.50 m; (b) per a un hipermetrop amb un punt pròxim que és a 0.75 m. **SOL:** (a) $f' = -0.50$ m; (b) $f' = +0.375$ m.
- 3.18. Un miop ha de llegir contínuament una pantalla situada a 40 cm dels seus ulls. El seu punt remot és a 80 cm. (a) Quines lents haurà d'utilitzar per a no experimentar cansament? (b) Quina és la potència de les lents d'ús ordinari? **SOL:** (a) $f' = 0.8$ m (1.25 diòptries); (b) $f' = -0.8$ m (-1.25 diòptries).
- 3.19. El punt pròxim d'un prèbita és a 80 cm. Se li recepten ulleres de lectura perquè pugui llegir un llibre a 25 cm dels ulls. Quina diferència hi haurà en la graduació si se suposa que les lents es

troben: (a) tocant els ulls; (b) a 2 cm d'aquests (en la punta del nas)? **SOL:** (a) 2.75 diòptries; (b) 3.07 diòptries.

INSTRUMENTS ÒPTICS

- 3.20. Un observador que té el punt pròxim a una distància de 30 cm, observa un objecte menut amb una lupa de 20 diòptries. Suposant que la lupa s'utilitza correctament, calcula l'augment de la lupa per a aquest observador. **SOL:** $M = 6$.
- 3.21. La distància focal de l'ocular i de l'objectiu d'un microscopi són, respectivament, 20 mm i 3 mm, i les lents estan separades 20 cm. Volem veure la imatge final virtual a 25 cm de l'ocular. (a) A quina distància de l'ocular s'haurà de formar la imatge de l'objectiu? (b) A quina distància de l'objectiu és l'objecte observat? (c) Quina seria la potència d'una lupa simple per a produir el mateix augment? **SOL:** (a) $s_2 = -1.85$ cm; (b) $s_1 = -0.305$ cm; (c) 3333 diòptries.
- 3.22. En un microscopi ($f'_{\text{obj}} = 0.05$ m, $f'_{\text{ocul}} = 0.05$ m, $L = 16$ cm) calcula: (a) l'augment lineal que produeix l'objectiu, l'augment angular que produeix l'ocular i l'augment total. (b) On haurà de col·locar-se l'objecte si la imatge final s'ha de veure en l'infinit? **SOL:** (a) $\beta = -3.2$, $M = 5$, $M_T = -16$; (b) $s_2 = 0.05$ m, $s'_1 = 0.21$ m, $s_1 = 0.066$ m,

TEMA 4: MOVIMENT ONDULATORI

4.1. Tipus d'ones (Tipler 5a ed., tema 15)

- Una ona mecànica s'origina quan es produeix una pertorbació en un medi. Per exemple, quan una gota o un objecte cauen en l'aigua. La pertorbació en aquest cas consisteix en una alteració de la superfície de l'aigua, que puja i baixa amb el temps. Aquesta pertorbació no es queda aïllada, sinó que es propaga a partir del punt d'origen en totes les direccions. Aquest tipus de moviment es denomina **moviment ondulatori**.
- El mecanisme pel qual es propaga una pertorbació en un medi elàstic es basa en les forces que uneixen àtoms i molècules. Aquestes forces són de tipus elàstic i actuen com a molls que, en recuperar-se després d'una deformació, transmeten el moviment (pertorbació de la posició d'equilibri) als àtoms veïns.
- Dos aspectes importants de les ones elàstiques són els següents:
 - En una ona elàstica es propaga la pertorbació, no es desplaça matèria. Per exemple, en l'ona que fan els espectadors en un estadi (vegeu el final de l'apartat), es desplaça el gest (aixecar-se i seure), però els espectadors no es desplacen.
 - Perquè una ona elàstica pugui donar-se, fa falta matèria. Per exemple, si colpegem un diapasó en el buit (dins d'una campana de buit o en l'exterior d'una nau espacial) no sentirem el so, ja que no hi ha matèria (aire) que es pugui deformar per a propagar la deformació.
- Les ones elàstiques es poden classificar segons diferents conceptes:
 - Segons la direcció relativa entre la deformació i la direcció de propagació:
 - **Ona transversal:** aquella en què el moviment de la pertorbació és perpendicular a la direcció de propagació. En el primer exemple, la superfície de l'aigua puja i baixa, mentre que la pertorbació es propaga al llarg i ample de la superfície. En la figura de baix a l'esquerra el moll mostra una ona transversal.
 - **Onda longitudinal:** aquella en què el moviment de la pertorbació és paral·lela a la direcció de propagació. Un exemple són les ones sonores, que consisteixen en una compressió i descompressió de l'aire en la direcció de propagació, de forma similar al moll de baix a la dreta.

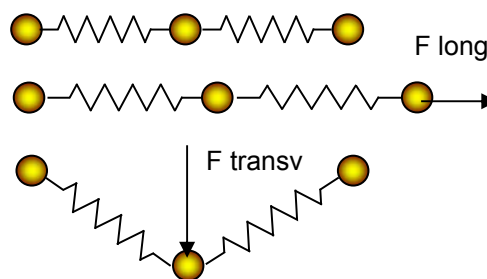


Figura 15.1 Tipler 5ª Ed: Ona transversal en un moll

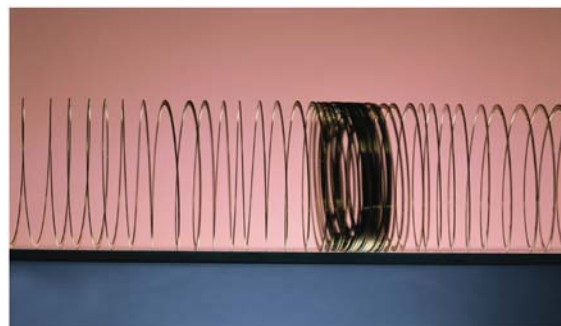
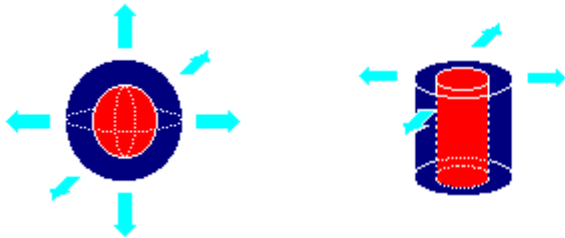


Figura 15.2 Tipler 5ª Ed: Ona longitudinal en un moll

- Segons la forma del front d'ones (superfície de punts en el mateix estat d'oscil·lació):
 - Esfèriques, cilíndriques, planes...



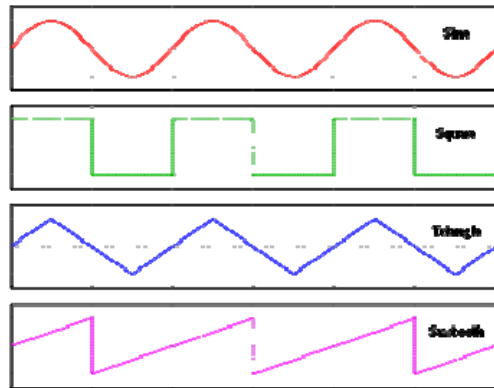
◀ **Ones esfèriques i cilíndriques**

<http://www.wikiciencia.org/tecnologia/comunicaciones/sonar/06.gif>



- ▲ **Dalt: impuls**
- ▼ **Baix: ones periòdiques**

- Segons la forma de la seua dependència amb el temps:
 - **Impuls**: pertorbació d'extensió temporal limitada. Un exemple és una sacsada en l'extrem d'una corda.
 - **Ones periòdiques**: pertorbació d'extensió temporal continuada. Segons la forma concreta de la dependència amb el temps, reben diferents noms. Tal com es veu en la figura: sinusoidal, quadrada, triangular, dent de serra...



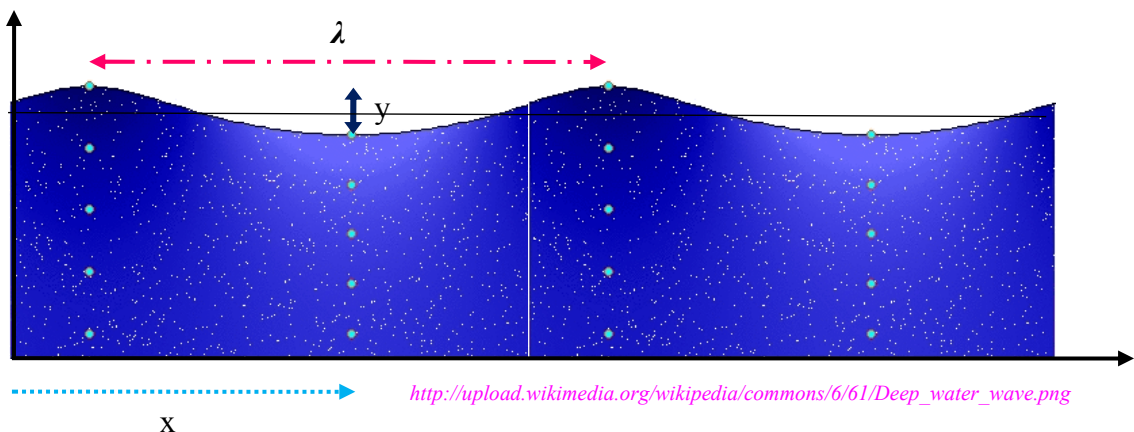
<http://es.wikipedia.org/wiki/Categor%C3%ADa:Ondas>

4.2. Ona harmònica: equació de moviment

- Una **ona harmònica** és un tipus concret d'ona periòdica que varia sinusoidalment amb el temps (la roja en la imatge de dalt). Aquest tipus d'ona és important perquè qualsevol tipus d'ona (com les de baix, per exemple) es pot expressar com una suma d'ones harmòniques.
- El temps que tarda un punt a repetir el moviment s'anomena **període d'oscil·lació T** i és igual a la inversa de la freqüència d'oscil·lació:

$$T = \frac{1}{f}$$

- En l'exemple del cos que cau a l'aigua, podem considerar que la superfície de l'aigua es mou cap amunt i cap avall respecte de la seua posició de repòs i que ho fa de manera harmònica.
- La **longitud d'ona** és la distància entre dos punts que estan en el mateix estat d'oscil·lació (per exemple, la distància entre dues crestes consecutives).



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/61/Deep_water_wave.png

- La **velocitat de propagació** de l'ona ve donada per la distància que avança la pertorbació durant el període d'oscil·lació. Com aquesta distància és precisament la longitud d'ona

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

- En el focus de l'oscil·lació harmònica (el qual prendrem com a punt d'origen), l'altura de l'oscil·lació y respecte de la posició d'equilibri en funció del temps es pot expressar com $y = A \sin(2\pi \frac{t}{T})$, on A és la amplitud de l'oscil·lació o valor màxim de l'oscil·lació.
- En un punt situat a una distància x del focus, la pertorbació tarda un temps $t = x/v$ en arribar, ja que l'ona té una velocitat v . Per tant, l'altura de l'oscil·lació y respecte de la posició d'equilibri en funció del temps en un punt x es pot expressar com

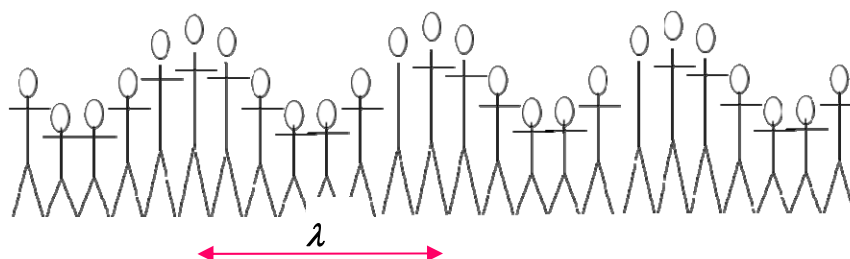
$$y = A \sin 2\pi \frac{t - \frac{x}{v}}{T} = A \sin(\omega t - kx)$$

on hem tingut en compte que $v = \frac{\lambda}{T}$ i on hem introduït:

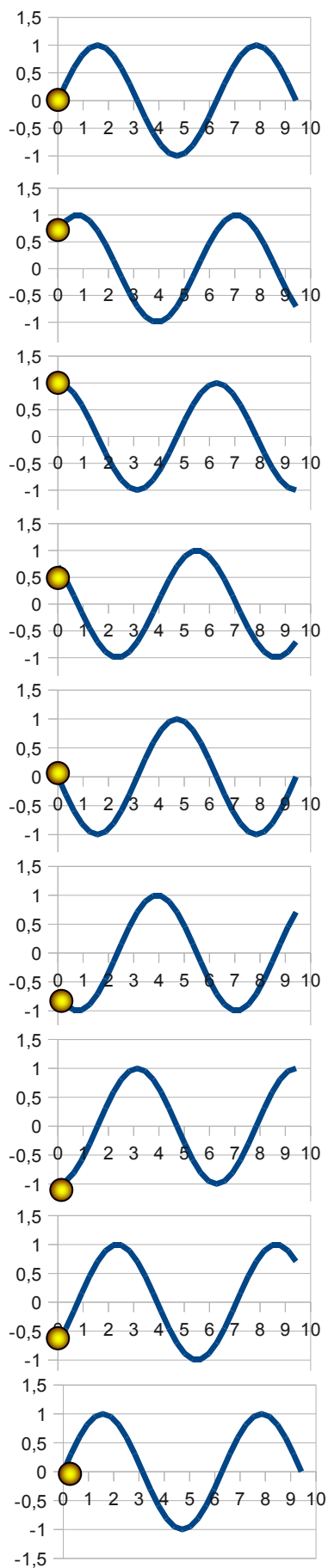
- La **freqüència angular** ω , que es pot expressar com a $\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f$.
- El **nombre d'ones** k , que es pot expressar com a $k = 2\pi \frac{1}{\lambda}$.
- El valor entre parèntesis, és a dir l'argument de la funció sinusoidal, s'anomena **fase**.
- Pot haver-hi una **fase inicial** δ quan l'origen no està en el focus. En aquest cas $y = A \sin(\omega t - kx + \delta)$.
- Si l'ona es desplaça en el sentit de les x negatives, el retard s'expressarà com a $t = -x/v$, amb la qual cosa l'equació de l'ona corresponent és $y = A \sin(\omega t + kx)$.
- Alguns textos expressen l'equació d'ones com $y = A \sin(kx - \omega t)$. Tenint en compte que $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$, es pot comprovar que ambdues expressions representa dues ones desfasades 180° : $A \sin(kx - \omega t) = -A \sin(\omega t - kx) = A \sin(\omega t - kx + \pi)$.
- La següent taula dona, com a RESUM, l'expressió que descriu l'estat d'oscil·lació y de cada punt x en qualsevol instant t , per a una ona TRANSVERSAL sense desfasament inicial ($\delta = 0$).

| Ona en direcció x positiva (fase inicial nul·la, $\delta = 0$) | Ona en direcció x negativa (fase inicial nul·la, $\delta = 0$) |
|--|--|
| $y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ | $y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$ |
| $y = A \sin(\omega t - kx)$ | $y = A \sin(\omega t + kx)$ |

- Un altre exemple d'ona és "l'onada" que fan els espectadors en un estadi esportiu:



punt en
 $X = 0$



$t = 0$

$t = T/8$

$t = 2T/8$

$t = 3T/8$

$t = 4T/8$

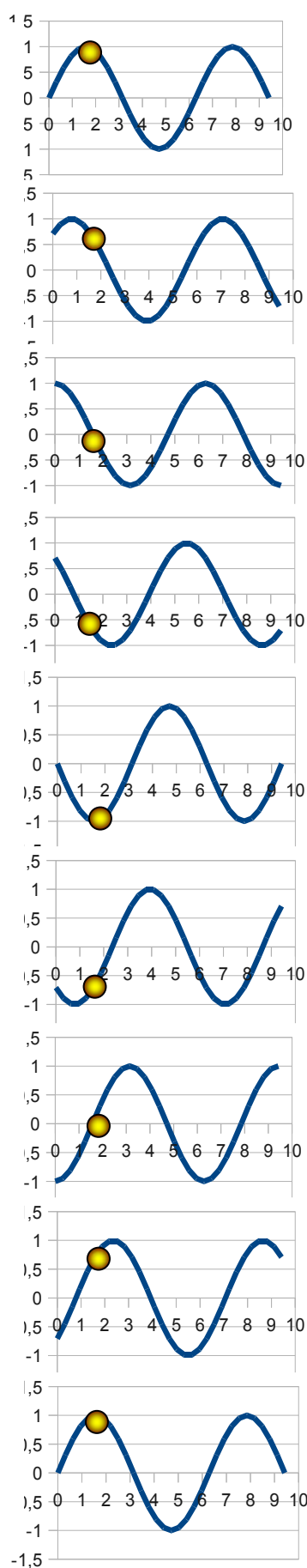
$t = 5T/8$

$t = 6T/8$

$t = 7T/8$

$t = 8T/8$

punt en
 $X = 1.57$

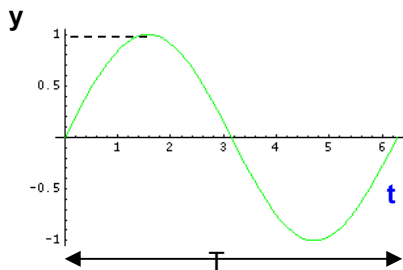


Estat d'oscil·lació de dos punts d'una corda ($x = 0$, $x = 1.57$) en funció del temps.

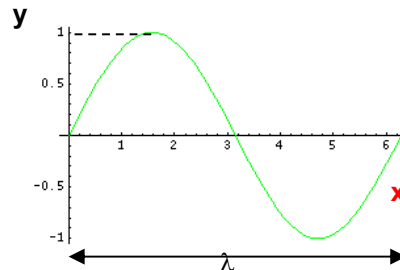
- És de destacar que una ona elàstica harmònica suposa dues variacions sinusoidals.
 - Una variació sinusoidal amb el temps: un punt en una posició determinada (x) oscil·la cap amunt i cap avall de forma sinusoidal amb el temps $y = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(\omega t - \delta_x)$.
 - Una variació sinusoidal amb la distància: en un instant concret (t donat, com si férem una fotografia) l'estat d'oscil·lació de tots els punts és sinusoidal.

$$y = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(\delta_t - kx) = A \sin(-\delta_t + kx + \pi) = A \sin(kx - \delta_t')$$

- Vegeu com a exemple la figura de la pàgina anterior i la mostrada ací baix.



T: període de repetició temporal

 λ : període de repetició espacial

4.3. Superposició d'ones

- El **principi de superposició** és una propietat del moviment ondulatori que estableix que: “*Quan dues o més ones es combinen, l'ona resultant és la suma algebraica de les ones individuals*”.
- La suma algebraica implica que hem de considerar el signe de l'oscil·lació, amb la qual cosa en determinades condicions els moviments poden anul·lar-se.
- La superposició d'ones harmòniques de la mateixa freqüència depèn de la diferència de fase entre les ones. Si considerem dues ones en la direcció x positiva, amb la mateixa freqüència angular ω i el mateix nombre d'ones k , amb un desfasament relatiu entre ambdues δ , tindrem

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \delta)$$

L'ona resultant serà $y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta)$

- Casos particulars:
 - Quan les ones estan en fase ($\delta = 0$ o $\delta = n \cdot 2\pi$, n sencer), es diu que es dona una **interferència constructiva**. L'ona resultant té la mateixa freqüència i una amplitud doble $y_T = 2A \sin(kx - \omega t)$
 - Quan les ones estan en oposició de fase ($\delta = 180^\circ$ o $\delta = (2n + 1) \cdot \pi$, n sencer), es diu que es dona una **interferència destructiva**. L'ona resultant té una amplitud nul·la.
- Diferència de fase deguda a una diferència de trajectes: Una causa habitual que origina una diferència de fase entre dues ones és la diferència entre trajectes recorreguts.
 - Suposem dues ones generades en focus S_1 i S_2 amb un desfasament inicial zero que es troben en un punt P. Les equacions que descriuen els moviments són:

$$y_1 = A \sin(kx_1 - \omega t) \qquad y_2 = A \sin(kx_2 - \omega t)$$

Sent Δx la diferència entre trajectes i $x_2 = x_1 + \Delta x$.

- (a) Si la diferència de trajecte és un nombre sencer de longituds d'ona,
 - $\Delta x = n\lambda$
 - $k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}n\lambda = n \cdot 2\pi$
 - Amb la qual cosa es donarà una interferència constructiva
- (b) Si la diferència de trajecte és un nombre imparell de mitges longituds d'ona
 - $\Delta x = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$
 - $k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}(2n + 1)\frac{\lambda}{2} = (2n + 1)\pi$
 - Amb la qual cosa es donarà una interferència destructiva.
- Un altre cas particular de superposició d'ones és el de les **ones estacionàries**

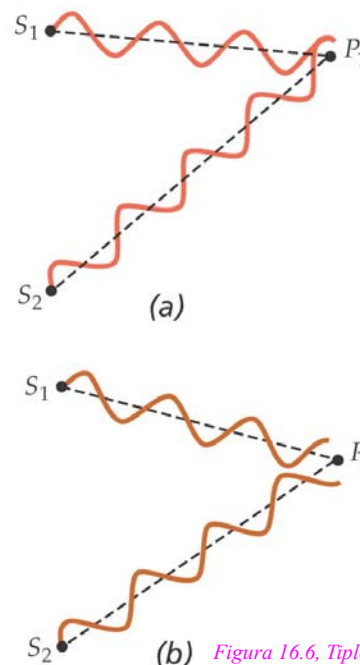


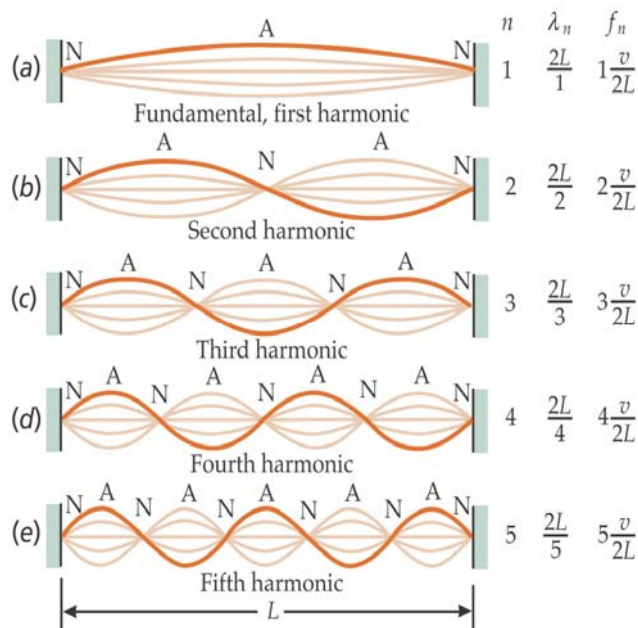
Figura 16.6, Tipler 5ª Ed.

- Les ones estacionàries es produeixen, per exemple, en cordes vibrants que tenen els extrems fixos, com és el cas de les cordes d'instruments musicals.
- En aquestes condicions, l'ona en el sentit de les X positives es reflecteix en l'altre extrem, de tal manera que hi ha dues ones que es mouen en sentits oposats.
 - Per tant, l'ona resultant és: $y_T = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx)$
- Com a resultat, cada punt de la corda oscil·la, no amb tota l'amplitud, sinó amb una determinada amplitud:

- Els punts que oscil·len amb amplitud zero (no oscil·len), s'anomenen **NODES**.
- Els punts que oscil·len amb amplitud màxima, s'anomenen **ANTINODES** O **VENTRES**.
- Els nodes es donen en aquells punts en què cada una de les ones (la incident i la reflectida) passen per zero. Per tant:
 - La distància entre dos nodes consecutius és igual a la meitat de la longitud d'ona de l'oscil·lació.
 - Una corda de longitud L sols admet ones estacionàries que compleixen

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3,$$

És a dir, aquella en què "cabem" un nombre sencer de mitges longituds d'ona.



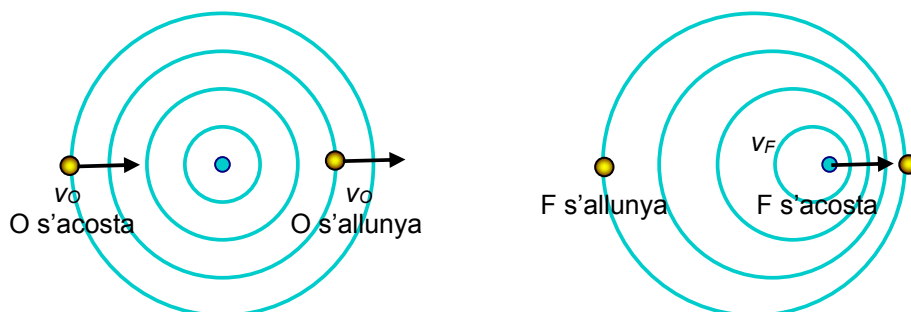
- Les freqüències d'aquests harmònics es poden calcular com a $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$, on v és la velocitat de l'ona en la corda.
- La freqüència més baixa s'anomena **freqüència fonamental** i només té dos nodes, un en cada extrem de la corda.
- **Harmònics** són aquelles freqüències de ressonància que són un múltiple enter de la fonamental

4.4. Efecte Doppler

- Quan un focus productor d'ones i un receptor estan en moviment un respecte de l'altre, la freqüència emesa i rebuda no és la mateixa. Quan ambdós s'acosten, la freqüència observada pel receptor és major que la del focus. Quan ambdós s'allunyen, la freqüència observada pel receptor és menor que la del focus. Aquest efecte s'anomena efecte Doppler.
- Un exemple familiar és el canvi detectat en la freqüència de la sirena d'una ambulància quan s'acosta i s'allunya respecte de nosaltres. Quan s'acosta el so és més agut (freqüència alta) i quan ens sobrepassa es fa més greu (freqüència més baixa).
- Totes les classes d'ones (electromagnètiques, sonores, lluminoses...) experimenten l'efecte Doppler. Ací analitzarem el cas de les ones sonores.
- **Focus fix - observador mòbil:** en aquest cas les ones viatgen a una velocitat v . Estant el focus fix, els fronts d'ona formen cercles concèntrics. No obstant això, l'observador que es mou detecta per a les ones una velocitat diferent de v , segons s'acoste o s'allunye el focus.
 - Anomenarem:
 - v : velocitat de l'ona en el medi
 - v_O : velocitat de l'observador
 - v' : velocitat aparent de l'ona per a l'observador
 - λ : longitud d'ona (resulta ser la mateixa per al focus i l'observador)
 - Si l'observador s'allunya, la velocitat relativa de l'ona respecte de l'observador serà:

$$v' = v - v_O$$
 - Per tant, la freqüència aparent de l'ona per a l'observador serà:

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v - v_O}{\lambda} = f \frac{v - v_O}{v}$$
 - si l'observador s'allunya del focus (v_O positiva): $f' < f$
 - si l'observador s'acosta al focus (v_O negativa): $f' > f$



- **Focus mòbil - observador fix:** en aquest cas, en desplaçar-se el focus, els fronts d'ona formen cercles que no són concèntrics. L'observador detecta, per tant, una longitud d'ona diferent de la del repòs, segons s'acoste o s'allunye el focus.
 - Anomenarem:
 - v : velocitat de l'ona en el medi
 - v_F : velocitat del focus
 - λ : longitud d'ona en condicions de repòs ($\lambda = v/f$)
 - λ'' : longitud d'ona aparent per a l'observador
 - Si el focus s'allunya, la distància entre màxims (longitud d'ona) que detecta l'observador serà:

$$\lambda'' = \frac{v + v_F}{f}$$
 - Per tant, la freqüència aparent de l'ona per a l'observador serà:

$$f' = \frac{v}{\lambda''} = f \frac{v}{v + v_F}$$

- si el focus s'allunya (v_F positiva): $f'' < f$
- si el focus s'acosta (v_F negativa): $f'' > f$
- **Focus mòbil - observador mòbil:** quan es mouen simultàniament el focus i l'observador, aquest detecta per a les ones una velocitat diferent segons s'acoste o s'allunye el focus i a més a més, detecta una longitud d'ona diferent, segons s'acoste o s'allunye el focus.
 - Per tant, la freqüència aparent és: $f''' = f \frac{v - v_O}{v + v_F}$
 - si el focus s'allunya (v_O , v_F positives): $f''' < f$
 - si el focus s'acosta (v_O , v_F negatives): $f''' > f$
- <http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/Ondasbachillerato/doppler/doppler.html>

4.5. Front d'ona. Energia i intensitat d'una ona.

- S'anomenen **fronts d'ona** als punts que estan en el mateix estat d'oscil·lació. En el cas de les ones en l'aigua, es formen ones circulars bidimensionals sobre la superfície de l'aigua. Els fronts d'ona són cercles concèntrics constituïts, per exemple, per les crestes de l'ondulació. En el cas del so en l'aire, els fronts d'ona són esferes concèntriques. Els fronts d'ona consecutius estan separats una longitud d'ona i la velocitat a la qual s'allunyen del focus és la velocitat de l'ona.
- En allunyar-se els fronts d'ona, el seu moviment pot representar-se mitjançant **raigs**, que són línies dirigides perpendicularment als fronts d'ona. Per a ones circulars o esfèriques, els raigs tenen direcció radial estan l'origen en el focus.
- En el focus d'una ona, la pertorbació té una energia per unitat de temps (potència) P .
- Reducció per repartiment de l'energia:
 - Si l'ona s'emete uniformement en totes les direccions, l'energia es repartirà en superfícies cada vegada més grans, de valor $4\pi r^2$. Es defineix la **intensitat** d'una ona a una distància r com a $I = \frac{P}{4\pi r^2}$
 - Les unitats són W/m^2 .
- Reducció addicional per absorció:
 - La intensitat d'una ona es pot reduir, de manera addicional, si el material que travessa és absorbent. En general els materials absorbents redueixen la intensitat mitjançant una llei exponencial, de tal manera que la intensitat després de travessar una làmina de gruix x serà:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

on α és el coeficient d'absorció del medi (unitats: m^{-1})

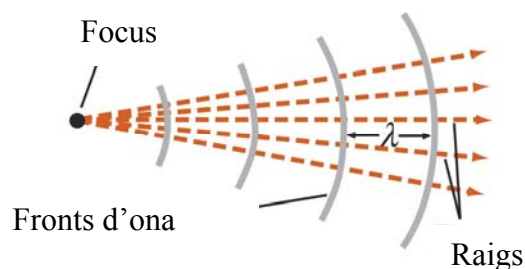
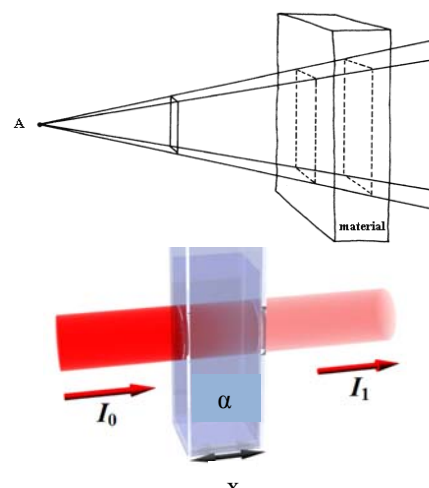


Figura 15.12, Tipler 5ª Ed.



4.6. Breu introducció a l'acústica.

- Les ones sonores es generen quan una font sonora, com per exemple un altaveu, fa que les molècules d'aire pròximes oscil·len al voltant de les seues posicions d'equilibri. Els desplaçaments es verifiquen al llarg del desplaçament de l'ona i donen lloc a variacions de densitat i pressió de l'aire (com ja hem dit, són ones longitudinals).
- Es pot demostrar que, per a l'ona de pressió que constitueix el so (Tipler 5a ed. 15.2):
 - Quan les molècules d'aire oscil·len, hi ha zones on s'ajunten, augmentant la pressió localment. En altres zones, les molècules se separen, disminuint la pressió localment. Anomenem Δp_0 al màxim valor del canvi de pressió. Per tant, l'ona de pressió es pot expressar com a

$$\Delta p = \Delta p_0 \sin(\omega t - kx).$$

La variació Δp pot ser, per tant, positiva o negativa.

- La figura mostra el desplaçament respecte de la posició d'equilibri de les molècules d'aire (a, b, c), la densitat de l'aire (d) i els canvis de pressió corresponents (d) (figura 15.10 Tipler 5a ed.). Noteu el desfasament entre el màxim de desplaçament i el màxim de pressió.
- En general, l'energia mitjana d'una ona sinusoidal és proporcional al quadrat de la seua amplitud. En el cas concret de les ones sonores, es pot demostrar (Kane, eq. 22.5) que l'expressió concreta que les relaciona és

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}$$

on Δp_0 és el màxim valor del canvi de pressió (amplitud de l'ona de pressió), ρ és la densitat del medi en equilibri i v la velocitat de l'ona en el medi.

- La velocitat de propagació v d'una ona sonora depèn de les propietats del medi. En el cas concret de les ones sonores en un fluid com l'aire o l'aigua, la velocitat ve expressada per

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

on K és el mòdul de compressibilitat de l'aire i ρ la seua densitat (en equilibri).

- Per a les ones sonores en un gas, el mòdul de compressibilitat és proporcional a la pressió, i aquesta al seu torn, és proporcional a la densitat ρ i a la temperatura absoluta del gas T , i queda:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

- On:
 - γ : constant que depèn del tipus de gas; per a l'aire té un valor de 1.4.
 - R : constant universal dels gasos $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$
 - M : massa molecular del gas; per a l'aire és $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$
- Si substituïm aquests valors, per a una temperatura de $T = 20^\circ\text{C}$ (293 K), obtenim la VELOCITAT DEL SO EN L'AIRE a 20°C $v = 343 \text{ m/s}$.

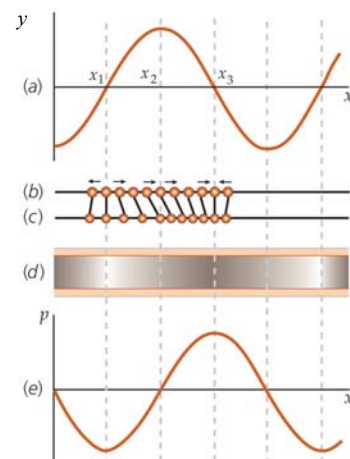
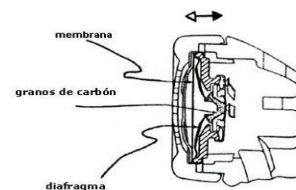


Figura 15.10, Tipler 5a ed.

4.6.1. Detectores de so: resposta auditiva

- La detecció de so requereix la conversió de les vibracions de pressió de l'aire en algun tipus de senyal que permeta l'anàlisi de la seua freqüència i intensitat.
- En el cas dels detectors mecànics, com són els altaveus, una fina membrana es desplaça amb les variacions de pressió de l'aire i aquests desplaçaments es converteixen en un senyal elèctric que es pot enregistrar en un instrument.



(Imatge: http://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/iod2/public_html/anatomia/anatomia.htm)
(Vegeu també: <http://www.eumus.edu.uy/docentes/maggiolo/aquapu/sap.html>)

- En el cas de l'oïda humana, el procés és similar: les vibracions de l'aire es detecten i es converteixen en un senyal elèctric que va al cervell mitjançant el nervi òptic.
- El procés d'audició i les parts de l'oïda són les següents

— L'orella externa recull i dirigeix les ones sonores com si fora una botzina.

— En l'orella mitjana, una membrana (timpà) les capta i les transmet, seguint els canvis de pressió de l'aire

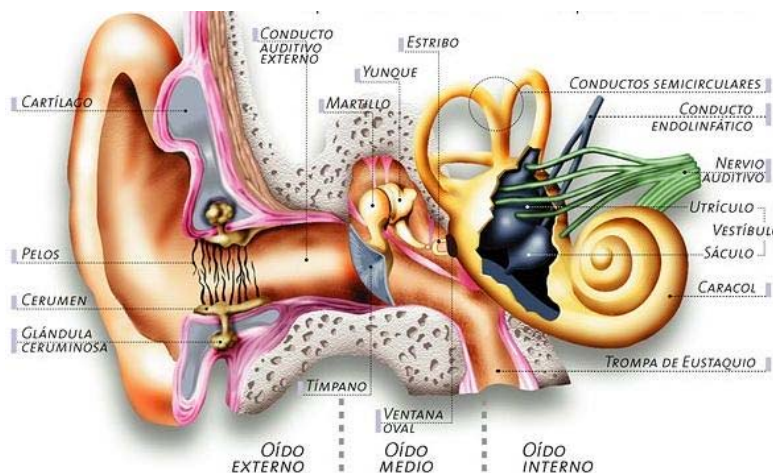
— També en l'orella mitjana, un joc d'ossets (martell, enclusa i estrep) les amplifica i transmet al canal coclear (en forma de caracol)

— La en l'orella interna, terminacions nervioses (pèls fins) en el caracol recullen el moviment mecànic i el converteixen en senyal elèctric.

— Finalment, aquest senyal és transmès al cervell mitjançant el nervi auditiu.

- En el següent vídeo, es pot veure el procés d'audició i, en concret i de manera molt cridanera, com "ballen" les cèl·lules del canal coclear al ritme de l'efecte de les vibracions sonores.

http://www.youtube.com/watch?v=rd6_zrvwk7U&feature=player_embedded



4.6.2. Nivell d'intensitat sonora i sensació sonora

- L'oïda humana pot acomodar-se a un llarg interval d'intensitats d'ones sonores des de 10^{-12} W / m^2 fins 1 W / m^2 . Les variacions de pressió Δp que corresponen a aquestes intensitats extremes varien aproximadament des de $3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$ fins 30 Pa . Aquestes variacions menudes de pressió se superposen (sumant o restant) a la pressió atmosfèrica normal, que té un valor aproximat de $1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 101.3 \text{ kPa}$.
- La nostra percepció de la sonoritat no és lineal amb la intensitat, sinó que hi varia logarítmicament. Per a descriure el nivell d'intensitat sonora β d'una ona sonora s'utilitza una escala logarítmica. El **decibel (dB)** es defineix com a

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

on I és la intensitat física del so i I_0 és un nivell de referència, que prendrem en el llindar d'audició

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2.$$

Noteu que el nivell d'intensitat sonora és una unitat de RELACIÓ entre dues magnituds que indica quant més gran (o menuda) és una magnitud respecte de la de referència. També s'utilitza en altres entorns, com en els amplificadors electrònics.

- El valor de β en els punts límit d'aquesta escala són:

- En el límit d'audició $I = I_0$ $\beta = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 0 \text{ dB}$

- En el límit de dolor $I = 1 \text{ W / m}^2$ $\beta = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \log 10^{12} = 120 \text{ dB}$

- La taula mostra altres nivells d'audició (Taula 15.1, Tipler 5a ed.)

| Font | I/I_0 | dB | Descripció |
|--------------------------------------|-----------|-----|---------------------------------------|
| | 10^0 | 0 | Límit d'audició |
| Respiració normal | 10^1 | 10 | Poc audible |
| Rumor de fulles | 10^2 | 20 | |
| Conversació en veu baixa | 10^3 | 30 | A penes sorollós |
| Biblioteca | 10^4 | 40 | |
| Oficina tranquil·la | 10^5 | 50 | Poc sorollós |
| Conversació normal | 10^6 | 60 | |
| Tràfic dens | 10^7 | 70 | |
| Oficina sorollosa | 10^8 | 80 | |
| Camió a (15 m); cascades del Niàgara | 10^9 | 90 | L'exposició constant perjudica l'oïda |
| Tren | 10^{10} | 100 | |
| Soroll de construcció | 10^{11} | 110 | |
| Concert de ROCK | 10^{12} | 120 | Límit del dolor |
| Piló neumàtic | 10^{13} | 130 | |
| Reactor | 10^{15} | 150 | |
| Motor de coet | 10^{18} | 180 | |

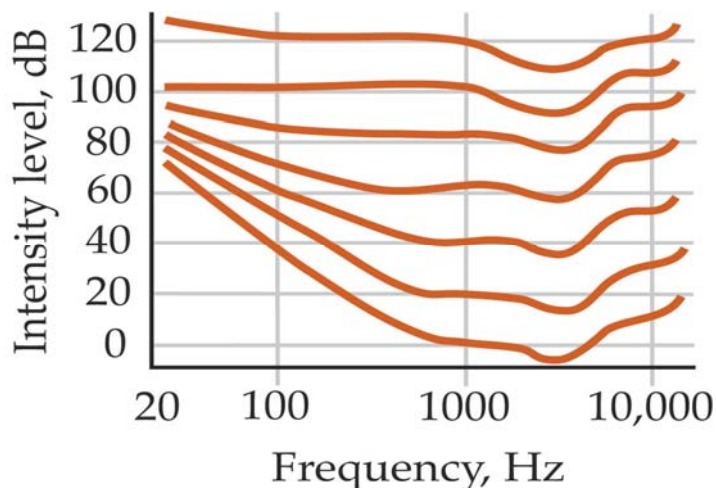
4.6.3. Resposta auditiva

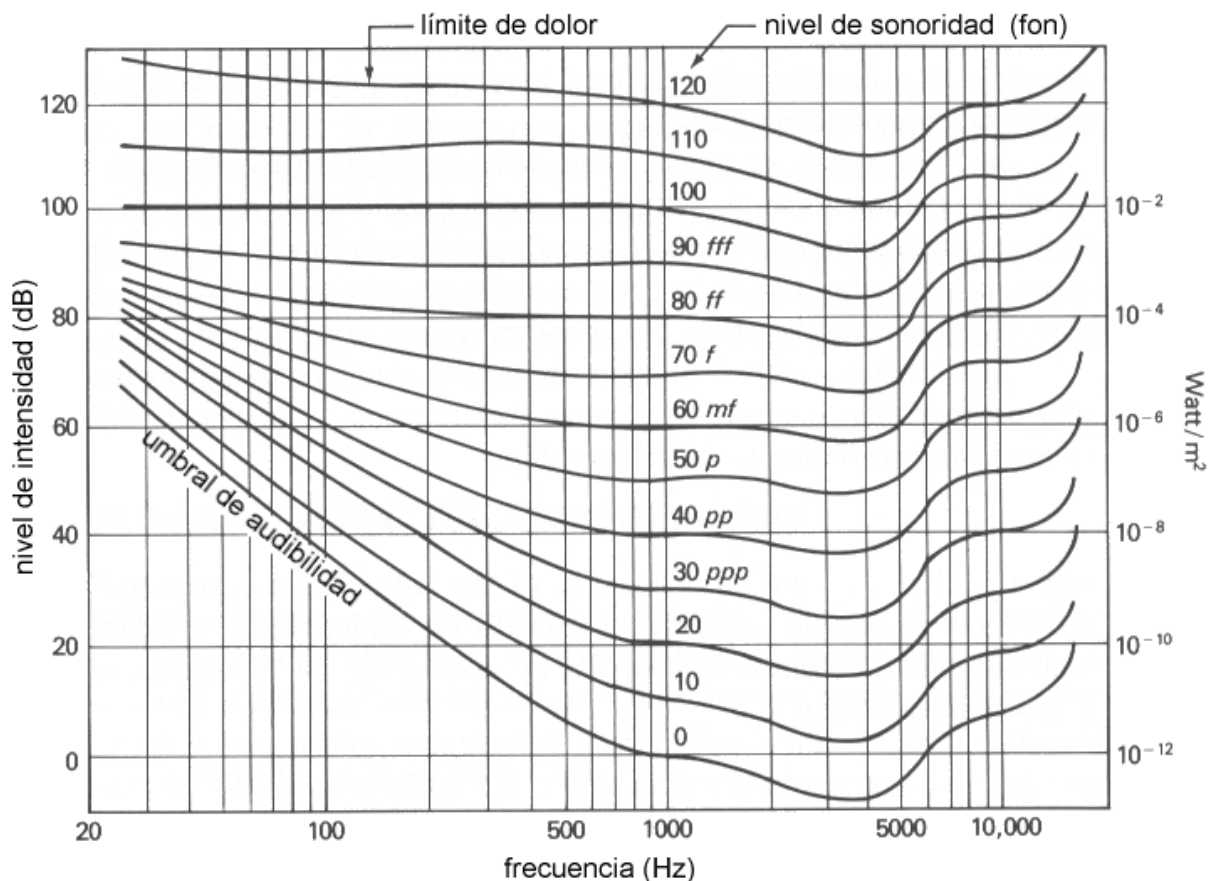
- Els humans percebem el so quan la freqüència de les ones acústiques és dins d'un cert interval de freqüències: entre 20 Hz i 20 000 Hz (banda audible).
 - Aquesta percepció es redueix a mesura que va avançant l'edat. Per exemple, un xiquet és capaç de percebre un so de 20 000 Hz, mentre que un adult de seixanta anys només percep sons de fins a 8 000 Hz de freqüència.
- La sensació sonora depèn no sols de la intensitat sinó també de la freqüència. S'anomenen corbes isofòniques a aquelles línies que donen la intensitat sonora necessària per a produir la mateixa sensació sonora en cada freqüència de la banda audible en humans.
 - Les figures mostren les corbes de Fletcher-Munson, o corbes isofòniques. La primera gràfica és una representació senzilla i la segona és molt més detallada.

Línies isofòniques

(mateixa sensació sonora)

Figura 15.16, Tipler 5a ed.





<https://www.studio-22.com/enciclopedia/curvas-fletcher-munson.htm>

- Encara que la resposta a l'audició pot ser subjectiva, s'han establert dos límits clars:
 - **Llindar d'audició (corba inferior):** intensitat mínima perquè un so d'una freqüència donada comence a ser audible.
 - La intensitat llindar a 1000 Hz és d'uns 10^{-12} W / m^2 , i és el valor que es pren com a referència. Així, la corba de sensació sonora a aquesta freqüència passa per 0 dB.
 - Aquesta corba mostra un mínim al voltant de la freqüència de 3 000 Hz. Açò vol dir que a aquesta freqüència l'oïda humana és molt sensible i necessita una intensitat un poc menor que 10^{-12} W / m^2 per a començar a sentir.
 - La resta de la corba inferior de la gràfica mostra que, comparativament, sons de diferents freqüències necessiten intensitats majors per a aconseguir la mateixa sensació sonora. Per exemple, un so de 100 Hz ha de ser de 40 dB per a produir la mateixa sensació sonora llindar que 0 dB de la de 1000 Hz.
 - **Llindar de sensació dolorosa (corba superior):** a aquesta intensitat sonora els ossos de l'orella vibren tan fort que xoquen amb la paret de l'orella mitjana, i produeixen dolor.
 - La intensitat de sensació dolorosa a 1000 Hz (1 W / m^2) correspon a 120 dB.
 - Es pot observar que el llindar de dolor, per a quasi totes les freqüències, és de l'ordre de 120 dB, encara que presenta un lleuger mínim també a la freqüència de 3 000 Hz.

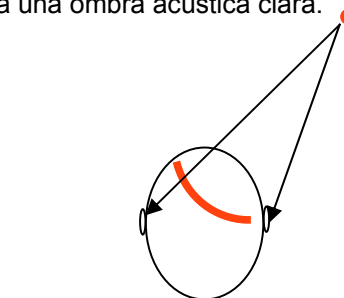
4.6.4. Localització auditiva

- El procés pel qual es percep la direcció de procedència d'un so s'anomena **localització auditiva**.
- És un fenomen **binaural**: intervenen ambdues orelles, ja que, com que estan separades entre si, perceben els sons de procedència distinta com a separats en el temps i amb diferent intensitat. Es

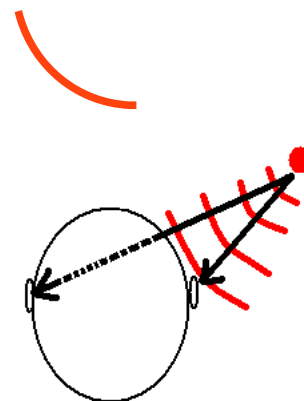
pot localitzar una font de so girant senzillament el cap, ja que l'orella més pròxima a la font detectarà un so amb una intensitat major.

- Depenent de la freqüència, també es pot localitzar amb precisió una font de so sense girar el cap. Per a l'home, la freqüència que marca la diferència és 1 700 Hz, que és una freqüència amb una longitud d'ona de l'ordre de la grandària del cap humà: esfera d'uns 0.2 m de diàmetre, aproximadament. L'estudi de la difracció determina que quan la longitud de l'ona és prou gran respecte a l'obstacle que es troba, les ones rodegen l'obstacle i no es genera el que es coneix com a **ombra acústica** (o, almenys, es produeix una ombra acústica menuda). Al contrari, quan les longituds d'ona són menudes, no es produeix difracció i es genera una ombra acústica clara.

- Per tant, per a freqüències baixes (longitud d'ona més gran que el cap), el procés de localització es produeix, tal com s'ha dit, perquè hi ha una diferència d'intensitat de l'ona en cada oïda, pel fet que a cada orella arriba una part diferent de l'ona. La figura adjunta mostra un exemple en què en l'orella dreta hi ha una cresta i en l'orella esquerra no. Així, girant el cap és fàcil distingir la direcció de la qual arriben les ones sonores.

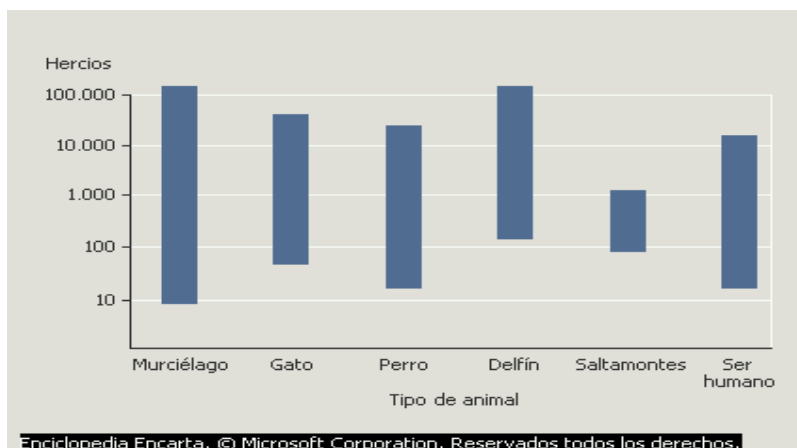


- Per contra, per a freqüències altes (longitud d'ona més menuda que el cap), sí que es genera una zona amb ombra acústica clara. La intensitat del so en l'orella més propera a la font sonora és considerablement major que en l'altra orella, en la qual no hi ha ona pel fenomen de l'ombra acústica. Per tant, per a tons en un rang de freqüències altes, és fàcil determinar la direcció de la font, sense necessitat de girar el cap.



- A causa d'aquests fenòmens, hi ha en els animals una correlació entre les freqüències d'audició i la distància entre orelles. Així, animals grans tenen un límit de freqüències audibles inferior a animals menuts, ja que la longitud d'ona haurà de ser major que el diàmetre dels seus caps i per tant la freqüència d'aquestes ones ha de ser menor.

- La figura mostra l'interval d'audició per a diferents animals. Observeu que el límit superior depèn de la grandària de l'animal de forma inversa.
- Hi ha animals que posseeixen elements addicionals que els permeten estendre l'interval d'audició. En el cas del dofí és l'orella especialitzada per a sentir en el medi marí. En el cas dels insectes, estan dotats d'òrgans especials.



- En RESUM, el procés de localització auditiva es dona per diferents motius depenent de la freqüència. A freqüències baixes (longitud d'ona més gran que el cap), és degut al fet que a cada orella arriba una part diferent de l'ona. A freqüències altes (longitud d'ona més menuda que el cap), és degut al fenomen d'ombra acústica. El límit superior de freqüències altes és tant més gran com menor és la grandària de l'animal que l'utilitza.

PROBLEMES TEMA 4: MOVIMENT ONDULATORI

EQUACIÓ D'UNA ONA

- 4.1. Quina és la longitud d'ona d'una ona sonora que té una freqüència d'1 kHz i es propaga a una velocitat de 344 m/s? **SOL:** 0.344 m.
- 4.2. Quina és la freqüència d'una ona que es propaga amb una velocitat de 200 m/s i té una longitud d'ona de 0.5 m? **SOL:** 400 Hz.
- 4.3. La telefonia mòbil GSM i UMTS utilitza ones electromagnètiques de freqüència 900 MHz i 2 GHz, respectivament. Calcula les longituds d'ona corresponents sabent que la velocitat de propagació de l'ona electromagnètica és de $\approx 3 \times 10^8$ m/s. **SOL:** 0.33 m. 0.15 m.

- 4.4. La funció d'ona, en unitats del sistema internacional, d'una ona harmònica que es transmet en una corda és

$$y(x, t) = 0,03 \sin(3.5 t - 2.2 x + 0.1)$$

(a) En quin sentit es propaga l'ona? (b) Quina és la seua velocitat? (c) Quina és la seua amplitud? (d) Quina és la seua fase inicial? (e) Quina és la seua longitud d'ona? i la seua freqüència? (f) Determina la velocitat màxima d'un segment qualsevol de la corda. **SOL:** +x; 1.59 m/s; 0,03 m, 0.1 rad; 2.86 m; 0.557 Hz; 0.105 m/s.

- 4.5. Una ona sonora en aire produeix una variació de pressió donada per

$$\Delta p(x, t) = 0.75 \cos \frac{\pi}{2}(x - 340 t)$$

en unitats del sistema internacional. Quina és l'amplitud de l'ona de pressió? I la longitud d'ona? Determina la freqüència i la velocitat de l'ona. **SOL:** 0.75 Pa. 85 Hz. 340 m/s.

- 4.6. Un fragment de fusta que sura en el mar oscil·la verticalment, a causa de les onades, completant 10 oscil·lacions en 50 s. La distància entre les crestes de les onades és de 20 m, i la distància entre el punt més alt i el més baix de l'onada és de 2 m. Determina (a) el període, (b) la longitud d'ona, (c) l'amplitud, (d) la freqüència, (e) la velocitat de propagació. (f) Escribe una equació que describa el moviment de les onades. **SOL:** 5 s. 20 m. 1 m. 0.2 Hz. 4 m/s, $y(x, t) = \cos 2\pi(t / 5 - x / 20)$.
- 4.7. Una ona harmònica amb una freqüència de 80 Hz i una amplitud de 0.025 m es propaga en la direcció de les x positives al llarg d'una corda amb una velocitat de 12 m/s. (a) Determina el període i la longitud d'ona. (b) Escribe una expressió que describa aquesta ona. **SOL:** 0.0125 s. 0.15 m, $y(x, t) = 0.025 \cos 2\pi(6.67 x - 80 t)$.

SUPERPOSICIÓ D'ONES

- 4.8. Dues ones que es mouen per una corda en la mateixa direcció i sentit tenen la mateixa freqüència de 100 Hz, una longitud d'ona de 2 cm i una amplitud de 0.02 m. Determina l'amplitud de l'ona resultant si les dues ones difereixen en fase (a) en $\pi/6$ i (b) en $\pi/3$. **SOL:** 0.0386 m, 0.0346 m.
- 4.9. Dos focus sonors idèntics oscil·len en fase. L'amplitud de cada ona és p_0 . En un punt, a 5.00 m del primer i a 5.17 m del segon, digueu quin tipus d'interferència es produirà i quant valdrà l'amplitud de l'ona resultant, per a les freqüències de (a) 1000 Hz, (b) 2000 Hz i (c) 500 Hz. **SOL:** Destructiva, $A = 0$; constructiva, $A = 2p_0$; suma d'ones, $A = \sqrt{2}p_0$.
- 4.10. Dos altaveus enfrontats entre si a una distància de 200 cm són accionats per un oscil·lador d'àudio de 680 Hz, de tal manera que es generen ones estacionàries al llarg de la línia que els uneix. Suposant que en la membrana de l'altaveu es dona un màxim, localitza els punts entre els altaveus per als quals la intensitat del so és (a) màxima i (b) mínima. Pren l'origen de distàncies en l'altaveu de l'esquerra. **SOL:** màxims en 0 cm, 25 cm, 50 cm...; mínims en 12.5 cm, 37.5 cm, 62.5 cm...

- 4.11. La freqüència fonamental d'una corda amb extrems fixos és 100 Hz i la velocitat d'ona és 350 m/s. (a) Quina és la longitud d'ona de l'ona fonamental? (b) Quina és la longitud de la corda? (c) Quina és la longitud d'ona del tercer harmònic? **SOL:** 3.5 m, 1.75 m, 1.16 m.
- 4.12. Una corda s'estira entre dos suports fixos distants 0.70 m entre si i s'ajusta la tensió fins que la freqüència fonamental de la corda és la nota *La* de 440 Hz. Quina és la velocitat de les ones transversals a la corda? **SOL:** 616 m/s.
- 4.13. La corda A (nota *La*) d'un violí té una longitud de 0.33 m i està afinada a una freqüència fonamental de 440 Hz. A quina distància de l'extrem de la corda s'hauria de prémer amb el dit per a obtenir la freqüència fonamental de la corda E (nota *Mi*) que és de 695 Hz? **SOL:** 12 cm.

EFECTE DOPPLER

DADA per a tots els problemes: velocitat del so en l'aire = 340 m/s

- 4.14. Quan un tren que es mou a 90 km/h s'aproxima a un observador estacionari, fa sonar el xiulet amb una freqüència de 630 Hz. No hi ha vent. (a) Quina és la freqüència percebuda per l'observador? (b) Quina és la longitud d'ona del so davant del tren? **SOL:** 680 Hz, 0.5 m.
- 4.15. Una sirena d'una fàbrica té una freqüència de 1000 Hz. Quina freqüència sentiran els conductors d'automòbil que vagen a 15 m/s (a) allunyant-se de la sirena; (b) aproximant-se a la sirena? (Exemple 21.8 Kane 2a ed.) **SOL:** 956 Hz, 1044 Hz
- 4.16. Un cotxe patrulla amb una sirena de 1000 Hz es desplaça a 15 m/s. Quina freqüència sent un vianant en repòs quan el cotxe patrulla (a) s'allunya, (b) s'acosta? (Exemple 21.9 Kane 2a ed.) **SOL:** 958 Hz, 1046 Hz.
- 4.17. La freqüència de la botzina d'un cotxe parat és de 400 Hz. Determina (a) la longitud d'ona del so, (b) la freqüència determinada per un observador en repòs si el cotxe se li acosta amb una velocitat $v_F = 34$ m/s (aproximadament 122 km/h). (c) Determina la freqüència observada si el cotxe està parat i un observador es mou amb velocitat $v_O = 34$ m/s cap al cotxe (Exemple 15.10, Tipler 5a ed.). **SOL:** 0.85 m, 444 Hz, 440 Hz.
- 4.18. Un ratpenat emet crits de curta duració a una freqüència de 80 000 Hz. Si vola cap a un obstacle amb una velocitat de 20 m/s, quina és la freqüència de l'ona reflectida que capta el ratpenat? (problema 21.55, Kane 2a ed.) **SOL:** 90 000 Hz.
- 4.19. Un ratpenat vola cap a un obstacle en repòs. Emet ones a una freqüència de 50 000 Hz i les detecta quan es reflecteixen a una freqüència de 51 000 Hz. A quina velocitat vola el ratpenat? (problema 21.56, Kane 2a ed.) **SOL:** 4.4 m/s
- 4.20. Un estudiant de biològiques es precipita a l'infern amb velocitat constant i el dimoni, que aguaita per a veure'l caure, sent el crit emès amb una freqüència que passa de 842 a 820 Hz. Calcula la velocitat de caiguda de l'alumne. **SOL:** 4.5 m/s (NOTA: aquest problema també es pot plantejar amb un observador i un tren que passa).
- 4.21. La velocitat sanguínia es pot detectar per efecte Doppler utilitzant ultrasons. Es disposa d'un generador d'ones sonores de 5 MHz (ultrasons) i es detecta un desplaçament Doppler de 100 Hz. Quina és per tant la velocitat de la sang? (suposa negligible l'angle que forma el feix d'ultrasons amb la velocitat de la sang). *DADA:* velocitat del so en la sang = 1 570 m/s. **SOL:** 3.14 cm/s.

EN EL SEGÜENT PROBLEMA ES DESPLACEN L'OBSERVADOR I EL FOCUS: $f' = f \frac{v - v_0}{v + v_F}$

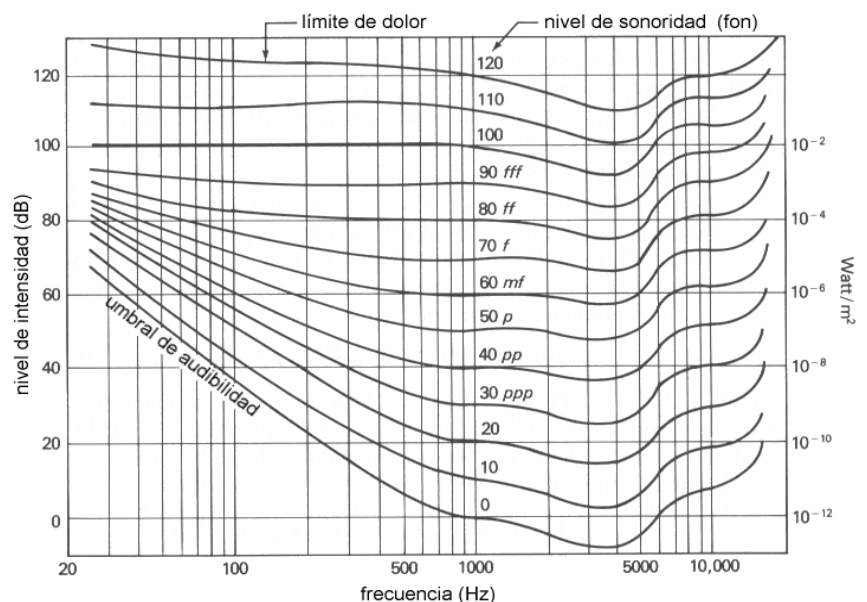
- 4.22. Un ratpenat emet ones sonores pures per a detectar blancs mòbils. En notar que una presa s'acosta cap a ell, emet ones d'una certa freqüència que, en reflectir-se en la presa pateixen l'efecte Doppler, de tal manera que el ratpenat les percep amb una freqüència de 83 kHz. Quina és aquesta freqüència si el ratpenat es mou a una velocitat de 10 m/s cap a un objecte que se li acosta amb una velocitat de 2 m/s **SOL:** 77.4 kHz.

INTENSITAT DEL SO I NIVELL D'INTENSITAT SONORA

- 4.23. L'altaveu de baixa freqüència d'un equip estereofònic potent té una àrea de 0.05 m^2 i produeix una potència acústica d'1 W. (a) Quina és la intensitat del so en l'altaveu? (b) Si l'altaveu emet el so uniformement a tot l'hemisferi davanter, a quina distància de l'altaveu la intensitat val 0.1 W/m^2 ? (Kane, 2a ed. exemple 22.6) **SOL:** 20 W/m^2 , 1,26 m.
- 4.24. El lladruc d'un gos suposa al voltant d'1 mW de potència. (a) Si aquesta potència es distribueix uniformement en totes direccions, quin és el nivell d'intensitat del so a una distància de 5 m? (b) Quin seria el nivell d'intensitat de dos gossos lladrant al mateix temps si cada un d'ells desenvolupa una potència d'1 mW? (c) I d'un ramat de 10 gossos? (Tipler 5a ed. exemple 15.8) **SOL:** $3.18 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$, 65 dB, 68 dB, 75 dB.
- 4.25. Quin és el nivell d'intensitat sonora en dB d'una ona sonora d'intensitat (a) 10^{-10} W/m^2 , (b) 10^{-2} W/m^2 . **SOL:** 20 dB. 100 dB.
- 4.26. Quina fracció de la potència acústica d'un soroll haurà d'eliminar-se per a disminuir el seu nivell d'intensitat sonora de 90 a 70 dB? **SOL:** 100.
- 4.27. Calcula la intensitat d'una ona sonora si (a) $\beta = 10 \text{ dB}$, (b) $\beta = 3 \text{ dB}$. Si $I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}$, calcula les amplituds Δp_0 de les ones de pressió corresponents. DADES: per al so en l'aire: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$; $v = 344 \text{ m/s}$. **SOL:** 10^{-11} W/m^2 , $2 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$, $8.3 \times 10^{-5} \text{ Pa}$, $3.7 \times 10^{-5} \text{ Pa}$.
- 4.28. En la determinació de l'audiograma d'una persona s'observa a quines intensitats aquesta comença a sentir sons de diferents freqüències. Si la intensitat llindar per a certa freqüència és I_0 , quin nivell d'intensitat, en dB, li produiran 100 focus iguals a l'emissor d'aquesta intensitat llindar quan sonen conjuntament? **SOL:** 20 dB.
- 4.29. Un emissor sonor integrat per 10 focus idèntics produeix en un auditor una sensació de 40 dB. Quina seria la sensació sonora si se n'insonoritzen 9? **SOL:** 30 dB.
- 4.30. La sensació que produeixen conjuntament 10 sons idèntics és de 50 dB, quina sensació produeix un sol a la mateixa distància? I dos? **SOL:** 40 dB; 43 dB.
- 4.31. Tres fonts sonores produeixen nivells d'intensitat de 60, 70 i 80 dB quan actuen separatament. Calcula el nivell d'intensitat sonora (sensació), en dB, si actuen juntes (en aquest cas les seues intensitats se sumen). **SOL:** 80.5 dB.

- 4.32. Un so de 70 Hz produeix en un auditor normal una sensació sonora de 30 dB. D'acord amb la gràfica adjunta, calcula la intensitat del so en W/m^2 . **SOL:** 10^{-6} W/m^2 .

- 4.33. Amb ajuda de les corbes d'audició, per a un so de 1000 Hz, 40 dB (a) calcula quina és la seua intensitat en W/m^2 ; (b) quina ha de ser la intensitat d'un so de 10 000 Hz perquè produïska la mateixa sensació sonora. **SOL:** 10^{-8} W/m^2 ; 10^{-7} W/m^2 .

**APÈNDIX**

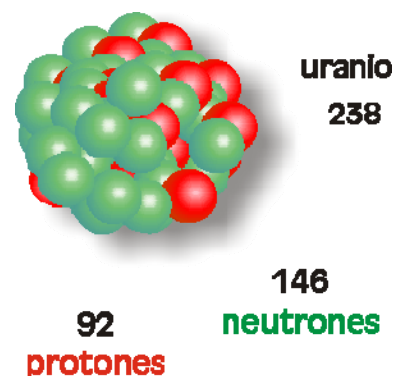
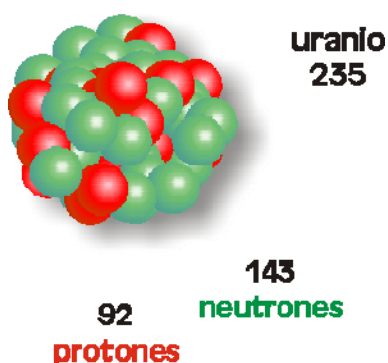
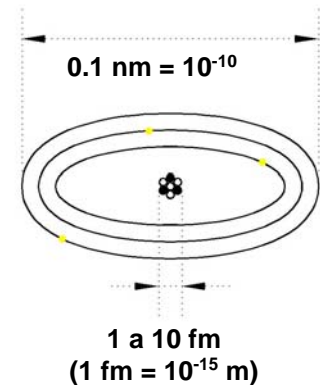
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

TEMA 5: RADIOACTIVITAT

5.1. Estructura nuclear i forces nuclears (capítol 30, Kane)

- El nucli atòmic és menut i molt dens. Les partícules que el formen s'anomenen **nucleons**. Es coneixen dos tipus de nucleons: **protons** i **neutrons** (els *electrons* estan en la corba externa).
- El **protó** té càrrega elèctrica positiva igual en valor a la de l'electró i una massa 1840 voltes major que la de l'electró.
- El **neutró**, com el seu nom indica, no té càrrega elèctrica. Té una massa semblant a la del protó, essent un 0.1% més pesat.
- El nucli atòmic queda especificat pel seu nombre atòmic Z i el seu nombre màssic A . El **nombre atòmic Z** és el nombre de protons. El **nombre màssic A** és el nombre total de nucleons. Així, el **nombre de neutrons és $A - Z$** .
- Notació: un nucli atòmic és representat pel símbol químic de l'element i pels seus nombres atòmic i màssic en la forma: ${}^A_Z X$.
- S'anomenen **isòtops** els àtoms amb un mateix nombre de protons, però diferent nombre de neutrons, és a dir, tenen el mateix nombre atòmic Z , però diferent nombre màssic A . Com que l'estructura electrònica de l'àtom depèn del nombre de protons, els diferents isòtops tenen pràcticament les mateixes propietats químiques.
- Per exemple: ${}^{235}_{92} U$
 - U: símbol químic de l'urani
 - 235: nombre de nucleons
 - 92: nombre de protons
 - nombre de neutrons =
= $235 - 92 = 143$
- Per exemple: ${}^{238}_{92} U$
 - U: símbol químic de l'urani
 - 238: nombre de nucleons
 - 92: nombre de protons
 - nombre de neutrons =
= $238 - 92 = 146$



- Figura de: http://www.cnea.gov.ar/xxi/divulgacion/reactores/c_reactores_f6.html
- Forces presents en el nucli:
 - *Forces nuclears*: són les que mantenen units els nucleons (a pesar que tots els protons tenen la mateixa càrrega elèctrica). Són molt intenses, però de curt abast.
 - *Forces elèctriques*: bàsicament són forces repulsives entre els protons del nucli. Són menys intenses, encara que el seu valor augmenta amb el nombre de protons del nucli.

- *Interaccions febles*: el seu origen concret es desconeix, però es considera que són deguts al procés de desintegració que, per exemple, converteixen els neutrons en protons, electrons i neutrins (una partícula que, com el seu nom indica, no té càrrega elèctrica, però tampoc té massa). Són molt més febles que les interaccions nuclears fortes.
- *Forces gravitatòries*: forces d'atracció entre protons i neutrons degudes a les seues masses. Són negligibles en física nuclear.

5.2. Masses nuclears i energia d'enllaç

- Les masses de molts nuclis es coneixen avui en dia amb molta precisió. Recordem que la unitat de massa atòmica (u) es defineix com la dotzena part de la massa de l'isòtop 12 del carboni (està inclosa, per tant, la massa dels electrons). El seu valor és

$$1 u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

- Per a qualsevol àtom es pot veure, fent una simple suma, que la massa de l'àtom és menor que la suma de les masses dels seus constituents: protons, neutrons i electrons.
- Per exemple, per a l'isòtop 12 del carboni: $6 m_p + 6 m_n + 6 m_e = 12.0989 u$.
- Com $m({}^{12}_6\text{C}) = 12.0000 u$ s'observa que en l'àtom hi ha un **defecte de massa**, donat per:

$$\Delta m = 0.0989 u.$$
- La taula adjunta mostra la massa del protó, neutró i electró, així com els defectes de massa d'alguns àtoms neutres.

TAULA 5.1: Masses atòmiques (en u) inclosa la massa dels electrons (Taula 30.4, Kane)

| Núclid | massa m (u) | $Z m_p + N m_n + Z m_e$ (u) | diferència (u) | Energia d'enllaç per nucleó (MeV) |
|-------------------------|-----------------------|--------------------------------|-------------------|--------------------------------------|
| e | 5.48×10^{-4} | | | |
| p | 1.00728 | | | |
| n | 1.00866 | | | |
| ${}^1_1\text{H}$ | 1.00783 | | | |
| ${}^2_1\text{H}$ | 2.0141 | 2.0165 | 0.0024 | 1.1 |
| ${}^4_2\text{He}$ | 4.0026 | 4.0330 | 0.0304 | 7.1 |
| ${}^{12}_6\text{C}$ | 12.0000 | 12.0989 | 0.0989 | 7.7 |
| ${}^{13}_6\text{C}$ | 13.0034 | 13.1078 | 0.1044 | 7.5 |
| ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ | 55.9349 | 56.4633 | 0.5284 | 8.8 |
| ${}^{238}_{92}\text{U}$ | 238.0508 | 239.9845 | 1.9337 | 7.6 |

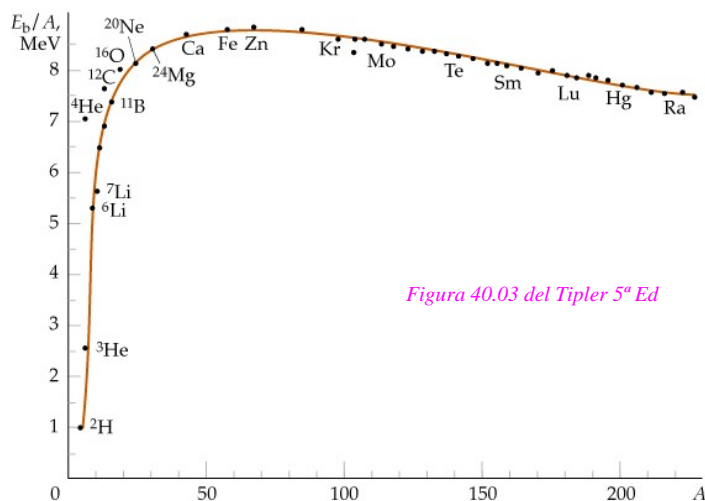
- El significat d'aquest defecte de massa queda aclarit pel principi d'Einstein d'equivalència entre massa i energia: $E = m c^2$, on c és la velocitat de la llum en el buit. Aquesta equació és, sense dubte, la més famosa d'Einstein i relaciona la massa d'una partícula amb la seua energia en repòs (concepte relativista).
- La diferència de massa entre la massa de l'àtom i la suma de les masses dels seus constituents, s'interpreta com que aquest defecte de massa Δm s'ha transformat en energia.
- Per tant, aquesta equació permet explicar el defecte de massa com una **energia d'enllaç entre els nucleons**. És a dir, si $E_{\text{enllaç}} = \Delta m c^2$, aleshores:

- Quan els nucleons s'uneixen, part de les seues masses es converteixen en una energia que els manté units (energia d'enllaç)
- Si volem separar els nucleons, hem de subministrar una quantitat d'energia igual a l'energia d'enllaç.
- Les energies nuclears s'expressen en una unitat d'energia que és l'**electró-volt (eV)**. Aquest es defineix com la quantitat d'energia que adquireix un electró quan és sotmès a una diferència de potencial d'un volt. Per a obtenir la relació entre la unitat d'energia en el SI (joule) i l'electró-volt, recordem l'expressió de l'energia potencial d'una càrrega: $\Delta U = q \Delta V$. Per tant, aquesta energia E és: $E = 1.6 \times 10^{-19} \cdot 1 = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$, aleshores $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$.
- Per conèixer l'energia que es pot obtenir d' 1 u , substituïm en l'equació d'Einstein

$$E = 1.66 \times 10^{-27} (3 \times 10^8)^2 = 1.49 \times 10^{-10} \text{ J}$$

- Si ara l'expressem en eV
- $E = 1.49 \times 10^{-10} \text{ J} \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 9.31 \times 10^8 \text{ eV} = 931 \text{ MeV}$.
- És a dir, un defecte de massa d'una u equival a una energia de 931 MeV: $1 u = 1 \text{ eV} / c^2$
- Amb l'objectiu de comparar els diferents nuclis, s'introdueix el concepte d'**energia d'enllaç per nucleó**, que és l'energia d'enllaç d'un àtom (i per tant, el seu defecte de massa) dividida pel nombre de nucleons, és a dir, $E_{\text{enllaç}} / A$. En el següent cercador trobareu totes les energies d'enllaç: <http://ie.lbl.gov/toi2003/MassSearch.asp>

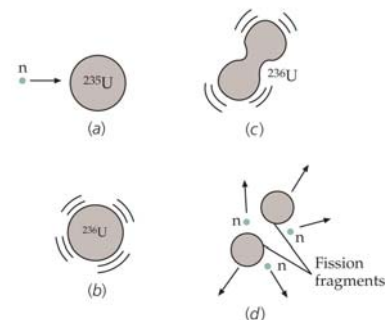
• La figura 40.03 del Tipler 5a ed. mostra l'energia d'enllaç per nucleó en funció de A per als nuclis estables.



- Es pot observar que val uns 8 MeV per nucleó, excepte per als nuclis més lleugers.
- Hi ha un ampli màxim en la regió dels nuclis de grandària mitjana, amb un valor de pic de 8.8 MeV per nucleó per al $^{56}_{26}\text{Fe}$.
- Per damunt de $A \approx 100$, la corba decreix suaument, i arriba als 7.6 MeV per nucleó per a l'urani.

• El fet que els nuclis de grandària intermèdia tinguem la màxima energia d'enllaç per nucleó té algunes conseqüències importants.

• Si en un nucli pesant es produeix una **fissió** en dos nuclis de grandària intermèdia, l'energia d'enllaç per nucleó augmenta aproximadament en 1 MeV per nucleó. L'energia sobrant s'elimina com energia cinètica dels productes de fissió o com raigs γ .



• Anàlogament, si es combinen dos nuclis molt lleugers, tals com el deuteri (^2_1H) o el triti (^3_1H), es produeix una **fusió**, que també allibera energia.

Figura 40.10 del Tipler 5ª Ed

- La figura (40.10, Tipler 5a ed.) mostra el procés de fissió induïda mitjançant el bombardeig del ${}_{92}^{235}\text{U}$ amb neutrons tèrmics. El bombardeig produeix nuclis d'urani excitats (el ${}_{92}^{236}\text{U}^*$) que es fissionen en dos fragments i emeten neutrons ràpids.
- Els neutrons alliberats poden ser capturats per altres nuclis de ${}_{92}^{235}\text{U}$, cosa que fa que aquests es fissionen al seu torn, i produeix una *reacció en cadena*.
- **CURIOSITAT**
 - Una **kilotona** és una mesura d'energia, que equival a l'energia alliberada per 1000 tones (1 Tm = 10^3 kg) de TNT (trinitrotoluen). Té un valor d'1 kt = 4.184×10^{12} J. El seu principal us és per a designar el potencial destructiu d'una arma, sobretot armes nuclears, expressant l'equivalència de l'energia explosiva en tones de TNT. Les bombes nuclears amb energies de l'ordre de les **kilotones** s'anomenen bombes nuclears **tàctiques**. Les bombes nuclears amb energies de l'ordre de les **megatones** reben el nom de bombes nuclears **estratègiques**. La bomba més gran mai detonada fou la bomba del Tsar en la Unió Soviètica en 1961, amb un rendiment estimat en 50 megatones. La bomba d'Hiroshima (6 d'agost de 1945), que va produir la mort de 140.000 persones, tenia una energia d'unes 15 kilotonnes.

PROBLEMA DE DEFECTE DE MASSA

- 5.2. En el procés de fissió del ${}_{92}^{235}\text{U}$ hi ha un defecte de massa de 0.2 u Quina és l'energia despresa per la fissió d'un mol d'urani? Si en la combustió d'1 kg de carbó es desprenen 3×10^7 J, quantes vegades més gran és l'energia despresa per 1 kg d'urani? DADES: $1 u = 931 \text{ MeV}$; $N_A = 6.023 \times 10^{23} \text{ at / mol}$; $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$; $M({}_{92}^{235}\text{U}) = 235 \text{ g / mol}$. **SOL:** $1.79 \times 10^{13} \text{ J}$, 2 500 000 vegades més gran.

Solució:

- (a) L'energia despresa en el procés de fissió d'un àtom d'urani s'obté a partir del defecte de massa en el procés i tenint en compte que $1 u = 931 \text{ MeV}$:

$$\text{Energia}({}_{92}^{235}\text{U}) = 0.2 \times 931 = 186.2 \text{ MeV / àtomo}$$

- L'energia despresa en el procés de fissió d'1 mol d'urani, s'obté considerant el nombre d'Avogadro: $\text{Energia}({}_{92}^{235}\text{U}) = 186.2 \times 6.023 \times 10^{23} = 1.12 \times 10^{26} \text{ MeV / mol}$

- Per passar aqueixa energia a joules, considerem que $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$:

$$\text{Energia}({}_{92}^{235}\text{U}) = 1.12 \times 10^{26} \cdot 1.6 \times 10^{-13} = 1.79 \times 10^{13} \text{ J / mol}.$$

- (b) Calculem primer el nombre de mols d'urani en 1 kg d'urani: $M({}_{92}^{235}\text{U}) = 0.235 \text{ kg / mol} \rightarrow$

$$1 \text{ kg}({}_{92}^{235}\text{U}) = \frac{1}{0.235} \text{ mol} = 4.26 \text{ moles}({}_{92}^{235}\text{U})$$

- Per tant, l'energia despresa per 1 kg d'urani serà:

$$\text{Energia}({}_{92}^{235}\text{U}) = 1.79 \times 10^{13} \cdot 4.26 = 7.62 \times 10^{13} \text{ J / kg}$$

- Comparant amb l'energia despresa per la combustió d'1 kg de carbó:

$$\frac{\text{Energia}({}_{92}^{235}\text{U})}{\text{Energia}(\text{carbón})} = \frac{7.62 \times 10^{13} \text{ J / kg}}{3 \times 10^7 \text{ J / kg}} = 2.5 \times 10^6. \text{ És a dir, l'energia en el procés de fissió d' 1}$$

kg d'urani és 2.5 milions de vegades més gran que la despresa en la combustió d' 1 kg de carbó.

5.3. (a) La desintegració radioactiva i les seues lleis: descripció qualitativa

- A. H. Becquerel (1852-1908) descobrí per casualitat les radiacions nuclears, en observar que una placa fotogràfica era impressionada per un compost d'urani ($Z = 92$) que estava en un calaix.

- **CURIOSITAT:** <http://www.ceride.gov.ar/servicios/comunica/casual.htm>

➤ S'anomena **serendipitat** (de l'anglès *serendipity*) a la "condició d'un descobriment que es fa gràcies a una combinació de casualitat i sagacitat". Molts descobriments s'han fet d'aquesta manera, però és de destacar que el mèrit del descobridor és el d'interpretar amb intel·ligència aquell fet inesperat i inexplicable pels coneixements del moment. Exemples de descobriments "per serendipitat" són: el principi d'Arquimedes, la resposta muscular a estímuls nerviosos de Galvani, la pila de Volta, la penicil·lina... Vegeu el llibre de Royston M. Roberts *Serendipia: descubrimientos accidentales en la ciencia*, editorial Alianza.

- Poc després, Pierre i Marie Curie van observar que el poloni ($Z = 84$) i el radi ($Z = 88$) generaven encara més radiacions nuclears.
- Analitzant la radiació d'una font d'urani, en presència d'un camp magnètic, es va observar que les radiacions nuclears podien ser de diferents tipus.

- Radiació alfa (α) (recorregut roig):

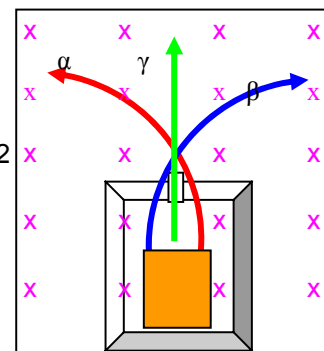
➤ Tal com es desvien, són partícules amb càrrega positiva.
 ➤ Avui en dia se sap que són nuclis d'Heli, és a dir, 2 protons i 2 neutrons.

- Radiació beta (β) (recorregut blau):

➤ Tal com es desvien, són partícules amb càrrega negativa.
 ➤ Avui en dia se sap que són electrons.

- Radiació gamma (γ) (recorregut verd):

➤ L'absència de desviament indica que es tracta d'un feix sense càrrega.
 ➤ Avui en dia se sap que són fotons molt energètics.



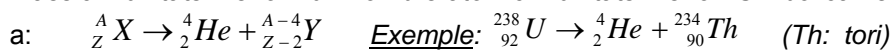
(\vec{B} dirigit cap al fons del paper)

- Les energies de les radiacions nuclears poden arribar a ser d'alguns MeV, energies molt més grans que les habituals en les reaccions químiques, que provenen dels intercanvis electrònics.

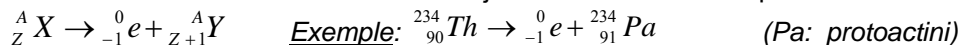
- Lleis de la desintegració radioactiva de Soddy i Fajans

- En 1903 Rutherford i Soddy van demostrar que quan un nucli d'urani emet una partícula alfa es transforma en un àtom de tori. Soddy i Fajans en 1913 van concretar aquestes observacions i van enunciar les lleis de la desintegració radioactiva:

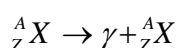
➤ 1) Quan un àtom **emet una partícula alfa**, es transforma en un àtom diferent amb un nombre màssic 4 unitats menor i un nombre atòmic 2 unitats menor. Simbòlicament s'expressa com a:



➤ 2) Quan un àtom **emet una partícula beta**, es transforma en un àtom diferent amb el mateix nombre màssic i un nombre atòmic 1 unitat major. Simbòlicament s'expressa com a:



➤ 3) Quan un àtom **emet radiació gamma**, no es transforma en un àtom diferent, sinó que realitza un ajust energètic nuclear. Simbòlicament s'expressa com a:



- Avui en dia se sap que totes les radiacions nuclears són perjudicials per a la salut. En un principi es va observar que produïen cremades en la pell, però no se sabia que produïen càncer. De fet, molts dels investigadors que van treballar amb aquestes radiacions van morir com a conseqüència de tumors malignes o leucèmia (per exemple, Marie Curie).

• Famílies radioactives

- Quan un element radioactiu es transforma en un altre, si aquest resulta ser també radioactiu, al seu torn es transformarà en un altre. Aquest procés pot continuar repetidament. S'anomena "família radioactiva" el conjunt dels elements format per: un element original "pare" i tots els productes de la seua desintegració, fins a un descendent estable. Aquest descendent estable, com que no es transforma en un altre radioactiu, és l'últim de la família.
- Família del tori: la figura mostra la gràfica N(Z) que descriu les transformacions d'aquesta família, incloses les radiacions emeses, fins al seu descendent estable, el $^{208}_{82}Pb$.
- Família del radi les transformacions d'una família també es poden mostrar en forma d'esquema, com el donat a continuació, on s'indiquen els productes de la desintegració fins al seu descendent estable $^{206}_{82}Pb$.

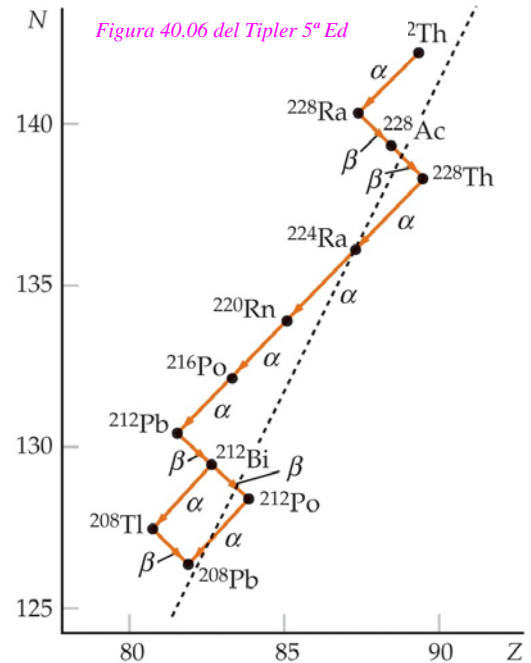
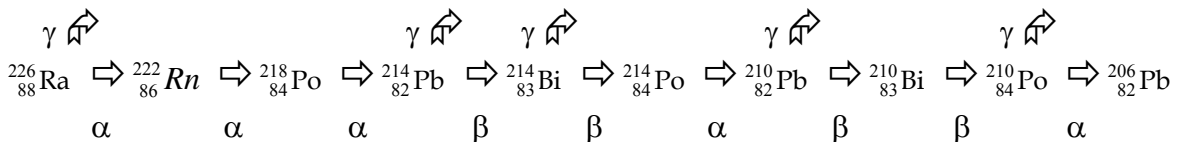


Figura 40.06 del Tipler 5ª Ed



- Pàgina recomanada: **CENTRE DE SEGURETAT NUCLEAR** (<http://www.csn.es/>)
- També, en PDF: <http://www.csn.es/descàrrega/gupro.pdf>

PROBLEMA DE LLEIS DE DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA (descripció qualitativa)

5.4. Per a la família del radi, descriu la desintegració dels tres últims elements de la família.

Solució:

- (a) Desintegració $^{210}_{82}Pb \Rightarrow ^{210}_{83}Bi$ emetent una partícula $\beta \rightarrow ^{210}_{82}Pb \rightarrow ^0_{-1}e + ^{210}_{83}X$.
Si busquem en el Sistema Periòdic l'element amb nombre atòmic 83, veurem que és el bismut.
Per tant $\rightarrow ^{210}_{82}Pb \rightarrow ^0_{-1}e + ^{210}_{83}Bi$
(Equació en Z: $82 = -1 + 83$; Equació en A: $210 = 0 + 210$).
- (b) Desintegració $^{210}_{83}Bi \Rightarrow ^{210}_{84}Po$ emetent una partícula $\beta \rightarrow ^{210}_{83}Bi \rightarrow ^0_{-1}e + ^{210}_{84}X$.
Si busquem en el Sistema Periòdic l'element amb nombre atòmic 84, veurem que és el poloni.
Per tant $\rightarrow ^{210}_{83}Bi \rightarrow ^0_{-1}e + ^{210}_{84}Po$
(Equació en Z: $83 = -1 + 84$; Equació en A: $210 = 0 + 210$).
- (c) Desintegració $^{210}_{84}Po \Rightarrow ^{206}_{82}Pb$ emetent radiació $\gamma \rightarrow ^{210}_{84}Po \rightarrow ^4_2He + ^{206}_{82}X$. Si busquem en el Sistema Periòdic l'element amb nombre atòmic 82, veurem que és el plom.
Per tant $\rightarrow ^{210}_{84}Po \rightarrow ^4_2He + ^{206}_{82}Pb$.
(Equació en Z: $84 = 2 + 82$; Equació en A: $210 = 4 + 206$).

5.3 (b) La desintegració radioactiva i les seues lleis: descripció quantitativa

- La descripció anterior del procés de desintegració radioactiu és una descripció qualitativa: hem vist en quins elements es pot transformar un element radioactiu en funció de la radiació que emet. Veurem a continuació l'aspecte quantitatiu de la desintegració radioactiva.
- A mesura que un material radioactiu es desintegra, òbviament, el seu nombre d'àtoms disminueix. Les característiques que té la llei de desintegració radioactiva són les següents:

- És un procés aleatori: donat un nombre d'àtoms radioactius, aproximadament la meitat es desintegraran en un temps (recordem la probabilitat que té una moneda que isca cara o creu). Els que queden, la meitat es desintegraran un temps posterior, i així successivament. S'anomena **període de semidesintegració** ($T_{1/2}$ o simplement T) el temps que tarda un nombre d'àtoms a reduir-se a la meitat. Una altra denominació habitual és **semivida**, encara que és una denominació que indueix a l'error.
- La figura adjunta (40.04, Tipler 5a ed.) mostra la variació del nombre d'àtoms en funció del temps, que s'obté en aplicar el comportament descrit. Noteu que l'eix d'abscisses es pot expressar com a múltiples del temps de semidesintegració (vegeu també que el material dura més temps que dues vegades aquest interval).
- Aquest procés aleatori caracteritzat pel període de semidesintegració es pot descriure matemàticament mitjançant l'equació:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{on}$$

- N_0 és el nombre d'àtoms en un moment donat.
- N és el nombre d'àtoms al cap d'un temps t .
- λ és la constant radioactiva, relacionada amb el període de semidesintegració T mitjançant

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

- La corba donada per l'equació anterior és una exponencial decreixent, que mostra la reducció del nombre inicial d'àtoms N_0 en funció del temps.
- Comprovem que en un temps T el nombre d'àtoms es redueix a la meitat:

$$N(T) = N_0 e^{-\ln 2} = N_0 \cdot 0.5$$

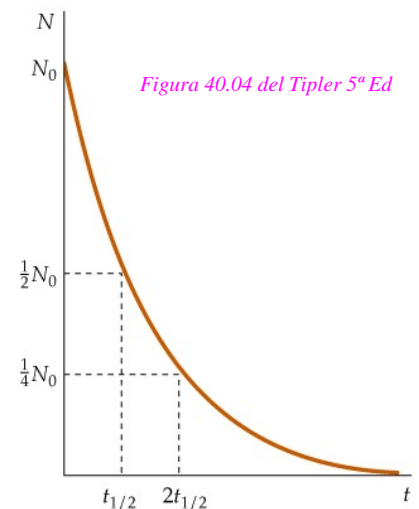
- En algunes versions del sistema periòdic dels elements, venen indicats els elements radioactius i el seu període de semidesintegració. Vegeu, per exemple:

<http://ie.lbl.gov/toi/perchart.htm>

- Si derivem la llei de decreixement exponencial respecte del temps, tindrem la **velocitat de desintegració**. La velocitat de desintegració és negativa, ja que el nombre d'àtoms disminueix amb el temps. Per aquest motiu, es defineix l'**activitat radioactiva (A)** com la velocitat de desintegració canviada de signe.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(N_0 e^{-\lambda t})}{dt} = (-\lambda)N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N \quad \rightarrow \quad A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

- La unitat de l'activitat radioactiva és $\frac{n^\circ \text{ desintegracions}}{s}$, és a dir, s^{-1} . Aquesta unitat rep el nom especial de bequerel (Bq).



- Substituint $N(t)$ $A = \lambda \cdot N_o e^{-\lambda t} = A_o e^{-\lambda t}$ essent $A_o = \lambda \cdot N_o$.
- L'activitat radioactiva és important per què és la magnitud que es pot mesurar amb instruments (com, per exemple, el comptador Geiger).

PROBLEMA DE LLEIS DE DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA (descripció quantitativa)

5.6. Cada dilluns, a les 12 hores, es prepara la mateixa quantitat d'un isòtop radioactiu que té un període de semidesintegració de 8 dies, marcant la data de preparació en el recipient. Un dijous a les 12 h es mesura l'activitat d'una mostra, en la qual no apareix la data de preparació i es registren 4200 Bq, mentre que la preparada el dilluns d'aquesta setmana registra una activitat de 47500 Bq. Quant de temps fa que la mostra està preparada sense etiqueta? **SOL:** 31 dies.

Solució:

- Calculem la constant radioactiva: $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{8} = 0.0866 \text{ dies}^{-1}$.
- Per a la mostra fresca, com des del dilluns a les 12 h fins dijous a les 12 h han transcorregut 3 dies complets, la seua activitat radioactiva serà: $A(3 \text{ dies}) = A_o e^{-\lambda t} = A_o e^{-\lambda \cdot 3}$. Per tant:

$$47500 = A_o e^{-\lambda \cdot 3}$$
- Per a la mostra de temps desconegut: $A(x \text{ dies}) = A_o e^{-\lambda t} = A_o e^{-\lambda \cdot x}$. Per tant

$$4200 = A_o e^{-\lambda \cdot x}$$
 A_o és la mateixa, ja que la quantitat inicial de les mostres és la mateixa.
- Dividint: $\frac{47500}{4200} = \frac{A_o e^{-\lambda \cdot 3}}{A_o e^{-\lambda \cdot x}} \rightarrow \frac{47500}{4200} = e^{\lambda(x-3)}$.
- Aplicant logaritmes neperians: $\ln\left(\frac{47500}{4200}\right) = \lambda(x-3)$
- Així: $x-3 = \frac{\ln(47500/4200)}{\lambda} = \frac{\ln(47500/4200)}{0.0866} = 28 \text{ dies}$. Per tant: $x = 28 + 3 = 31 \text{ dies}$
- Els elements radioactius que s'introdueixen en els organismes vius com a marcadors o per al tractament de malalties, pateixen una reducció addicional en el nombre d'àtoms com a conseqüència de la seua expulsió mitjançant processos biològics normals (suor, orina...). Per a donar compte d'aquesta reducció, s'introdueix el **període biològic de semidesintegració** T_B que, junt amb el **període físic de semidesintegració** T_F vist anteriorment, proporciona el **període efectiu de semidesintegració** T_{ef} :

$$\frac{1}{T_{ef}} = \frac{1}{T_B} + \frac{1}{T_F}$$

per tant $N = N_o e^{-\lambda_{ef} t}$

essent ara $\lambda_{ef} = \frac{\ln 2}{T_{ef}}$

- **TAULA 5.2: Períodes de semidesintegració de radionúclids utilitzats en medicina i biologia (taula 30.1, Kane)**

| Núclid | Lloc de concentració | T _F (dies) | T _B (dies) |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ^3_1H | Tot el cos | 4.6×10^3 | 19 |
| $^{14}_6\text{C}$ | Teixit gras | 2.1×10^6 | 35 |
| $^{14}_6\text{C}$ | Ossos | 2.1×10^6 | 180 |
| $^{24}_{11}\text{Na}$ | Tot el cos | 0.62 | 29 |
| $^{32}_{15}\text{P}$ | Ossos | 14.3 | 1200 |
| $^{35}_{16}\text{S}$ | Pell | 87.1 | 22 |
| $^{36}_{17}\text{Cl}$ | Tot el cos | 1.6×10^8 | 29 |

PROBLEMA DE LLEIS DE DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA (descripció quantitativa)

5.7. El ferro ^{59}Fe s'administra a un pacient per diagnosticar unes anomalies sanguínies. El seu període efectiu de semidesintegració és de 46.3 dies. Si no s'expulsa, quina fracció N/N_0 queda al cap de 30 dies? I al cap de 46.3 dies? El seu període biològic de semidesintegració és de 65 dies. Quin serà el període efectiu de semidesintegració? Calcula amb aquest valor quina fracció N/N_0 queda de ^{59}Fe al cap de 30 dies i al cap de 46.3 dies. **SOL:** 63.8% d'àtoms, 50% d'àtoms, 46.3% d'àtoms, 30.6% d'àtoms. (*Kane, Exemples 30.1 i 30.2*)

• Solució:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{46.3} = 0.0150 \text{ dies}^{-1}$$

- (a) Calculem la constant radioactiva **física**:

- La fracció d'àtoms que queda per desintegració física al cap d'un temps t serà: $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$. Per tant:

$$\frac{N(30 \text{ días})}{N_0} = e^{-0.015 \cdot 30} = 0.638 = 63.8\% \quad ; \quad \frac{N(46.3 \text{ días})}{N_0} = e^{-0.015 \cdot 46.3} = 0.5 = 50\%$$

Aquest últim càlcul es pot obviar, ja que com que el temps és igual al període de semidesintegració, per definició: $N(t=T) = \frac{N_0}{2}$, per tant $\frac{N(t=T)}{N_0} = 0.5 = 50\%$.

- (b) Calculem el període de semidesintegració **efectiu**:

$$\frac{1}{T_{ef}} = \frac{1}{T_F} + \frac{1}{T_B} = \frac{1}{46.3} + \frac{1}{65} = 0.0370 \text{ días}^{-1} \quad \rightarrow \quad T_{ef} = \frac{1}{0.0370} = 27.04 \text{ días}$$

- Calculem la constant radioactiva **efectiva**: $\lambda_{ef} = \frac{\ln 2}{T_{ef}} = \frac{\ln 2}{27.04} = 0.0256 \text{ días}^{-1}$.

- Per tant, la fracció d'àtoms que queda per desintegració física i biològica al cap d'un temps t serà: $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda_{ef} \cdot t}$. Així:

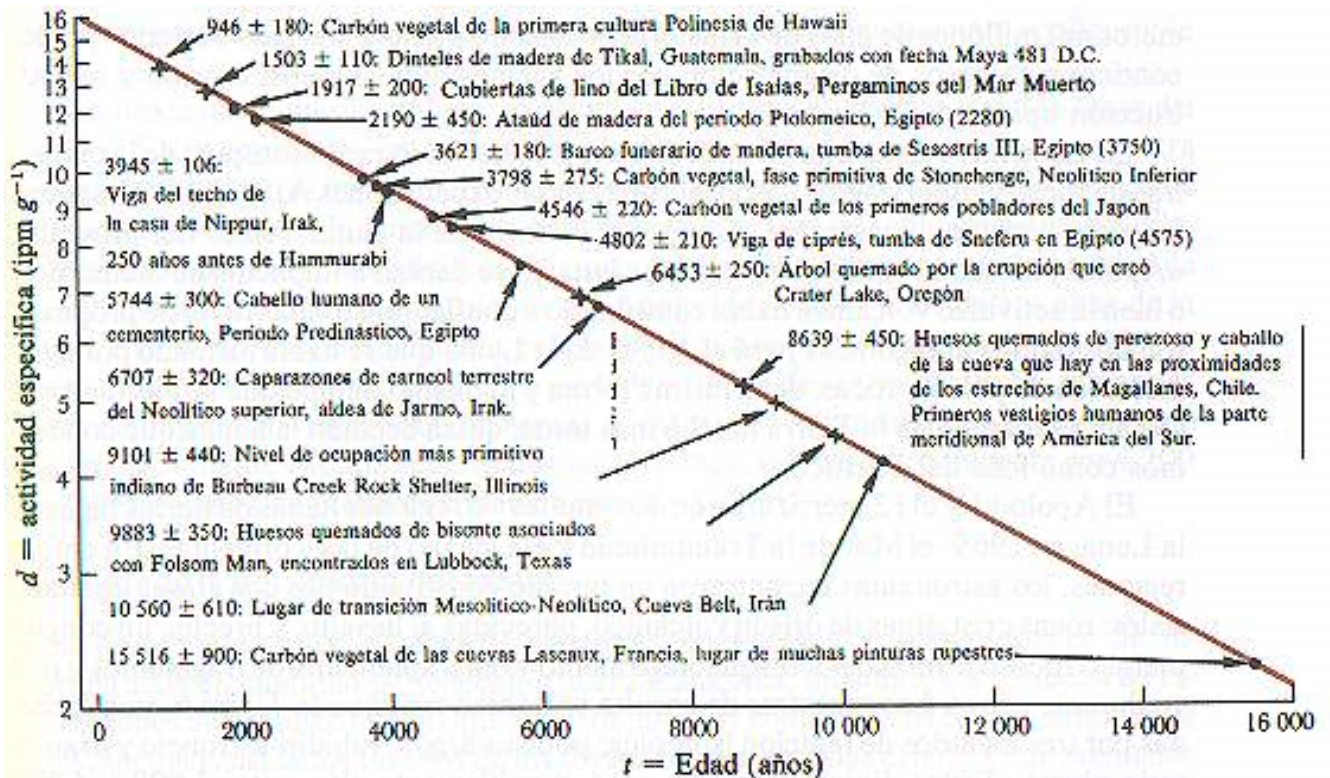
$$\frac{N(30 \text{ días})}{N_0} = e^{-0.0256 \cdot 30} = 0.463 = 46.3\% \quad ; \quad \frac{N(46.3 \text{ días})}{N_0} = e^{-0.0256 \cdot 46.3} = 0.306 = 30.6\%$$

- Observeu que el percentatge d'àtoms que queden és menor que en el cas anterior, ja que hi ha mecanismes addicionals d'eliminació (processos biològics)

5.4. Datació en arqueologia i geologia

- **FONAMENT GENERAL:** La proporció entre la quantitat original i la contemporània d'un radionúclid ens permet calcular, a partir de la llei de reducció exponencial, el temps transcorregut des de la seua creació fins als nostres dies.
- La concentració actual de radionúclids en un cos es pot mesurar directament, mentre que la quantitat original (la que tenia quan es va crear) s'ha de determinar indirectament.
- Datació en arqueologia: mètode del carboni 14
 - S'utilitza el carboni 14, present en materials d'origen animal o vegetal. El seu període de semidesintegració és de 5730 anys.
 - Tipus de mostres: amb aquest mètode es poden datar llavors, instruments de fusta, deixalles humanes i d'animals (és a dir, no és útil en minerals o instruments metàl·lics).

- El límit de validesa del mètode és per intervals de temps que no excedisquen en 10 vegades el període de semidesintegració del $^{14}_6C$, és a dir, uns 60 000 anys.
- **Fonament:**
 - El carboni 14 es troba sempre present en el medi ambient a causa dels efectes dels raigs còsmics que arriben a l'atmosfera, procedents de l'espai exterior. Aquestes partícules interaccionen amb els nuclis atòmics de les capes superiors de l'atmosfera per a produir neutrons (n) que posteriorment xoquen amb nuclis de nitrogen per a produir carboni 14 i protons (p), segons la reacció $^1_0n + ^{14}_7N \rightarrow ^{14}_6C + ^1_1p$
 - Aquest isòtop del carboni, que és radioactiu, es mescla totalment amb el carboni ordinari del medi ambient i s'introdueix en la cadena tròfica dels organismes vius.
 - Quan l'organisme està viu, la quantitat de $^{14}_6C$ es manté constant, ja que aproximadament s'ingereix a la mateixa velocitat que es destrueix.
 - Quan l'organisme mor, deixa d'incorporar carboni 14. El que hi ha present en el cos es va desintegrant, amb la qual cosa la proporció entre el carboni radioactiu i l'ordinari va reduint-se amb el temps.
- **Dificultat:** el carboni 14 és una fracció diminuta del carboni total (una part en 10^{12}), per la qual cosa és molt difícil de mesurar (vegeu ap. 30.3, Kane).
- Vegeu a continuació un esquema amb alguns exemples de datació mitjançant el mètode del carboni 14.



PROBLEMA DE DATACIÓ

5.9. L'activitat de la fusta viva és de 1000 desintegracions/dia i la fusta trobada en un jaciment arqueològic té una activitat de 250 desintegracions/dia. Quina antiguitat té la mostra? **SOL:** 11460 anys.

- **Solució:**

- L'activitat de la fusta viva (v) i morta (m), serà:

$$A_v = \lambda N_v \quad A_m = \lambda N_m \quad \text{dividint} \quad \frac{A_v}{A_m} = \frac{N_v}{N_m}$$

- si suposem que el nombre d'àtoms radioactius que té la fusta viva és el mateix ara que en aquesta època (N_0), tindrem

$$\frac{A_v}{A_m} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t} \quad \text{aplicant logaritmes:} \quad \ln\left(\frac{A_v}{A_m}\right) = \lambda t \ln e = \lambda t \quad \text{aïllant el temps } t$$

$$t = \frac{\ln(A_v / A_m)}{\lambda} = T \frac{\ln(A_v / A_m)}{\ln 2} = 5730 \frac{\ln(1000 / 250)}{\ln 2} = 5730 \cdot 2 = 11460 \text{ anys}$$

- Observeu que, quan l'activitat s'ha reduït en una potència de 2 (en aquest cas 2^2), el temps transcorregut és el període de semidesintegració multiplicat per aquest exponent (en aquest cas $2 \times T$).

- **Datació en geologia**

- S'utilitzen radionúclids amb períodes de semidesintegració comparables als temps geològics (milers de milions d'anys, vegeu taula adjunta).

TAULA 5.3: Radionúclids utilitzats en geocronologia (Taula 30.3, Kane)

| Núclid Natural | Núclid estable produït | $T_{1/2}$ (milers de milions d'anys) |
|------------------------|------------------------|---|
| $^{238}_{92}\text{U}$ | $^{206}_{82}\text{Pb}$ | 4.5 |
| $^{235}_{92}\text{U}$ | $^{207}_{82}\text{Pb}$ | 0.7 |
| $^{232}_{90}\text{Th}$ | $^{208}_{82}\text{Pb}$ | 14.1 |
| $^{87}_{37}\text{Rb}$ | $^{87}_{38}\text{Sr}$ | 50 |
| $^{40}_{19}\text{K}$ | $^{40}_{18}\text{Ar}$ | 1.3 |

- Les roques més velles de la Terra tenen uns 3300 milions d'anys, mentre que se suposa que la mateixa Terra té una edat de 4500 milions d'anys.

- **CURIOSITAT:** en treballar amb quantitats d'aquesta magnitud, cal tenir cura amb els textos en anglès:

- A Amèrica del Nord i Brasil "1 bilió" són 1 000 milions (10^9)
- A Europa i part d'Amèrica del Sud "1 bilió" són 1 000 000 milions (10^{12})
- No traduïu un text en anglès que diga "The age of the the earth is about 4.5 billions years" per "L'edat de la Terra és aproximadament 4.5 bilions d'anys"!

- La datació geològica en general depèn de dos supòsits principals:

- Quan la roca es va formar, sols hi havia àtoms radioactius pares i cap àtom radiogènic (derivat per la desintegració radioactiva d'altres elements).
- Després d'endurir-se, la roca va romandre com un sistema tancat, o siga, cap àtom pare o radiogènic es va afegir o es va llevar de la roca per influències externes, com ara aigües subterrànies filtradores, evaporació...

- Si algun d'aquests supòsits no es compleix, aleshores la tècnica falla i la datació obtinguda és falsa.

- Hi ha diferents mètodes en geocronologia, que depenen del tipus concret de roca o mineral que s'estudia. En <http://www.ingeis.uba.ar/default.php?page=geocronologia.htm> n'hi ha una bona descripció d'alguns. Ací en veurem només dos.

- **Datació en geologia: mètode de l'urani-plom (U/Pb)**

- **Tipus de mostres:** El plom ordinari d'origen no radioactiu és una mescla de $^{204}_{82}\text{Pb}$, $^{206}_{82}\text{Pb}$, $^{207}_{82}\text{Pb}$ i $^{208}_{82}\text{Pb}$. A partir de la taula 5.3 veiem que les desintegracions radioactives dels isòtops de l'urani i del tori produeixen tots aquests isòtops, excepte el $^{204}_{82}\text{Pb}$. Si el plom d'una

mostra no conté res de $^{204}_{82}Pb$, açò indica que no tenia inicialment plom i que tot el plom present s'ha produït per desintegració radioactiva. Per tant, aquesta mostra pot utilitzar-se per a la datació.

- Límit de validesa del mètode: edats superiors als 30 milions d'anys.
- Fonament: En aquests casos s'analitza la relació entre la quantitat de l'element pare i de l'element fill. Estudiarem el cas del $^{238}_{92}U / ^{206}_{82}Pb$.

➤ Quan es va crear la roca, hi havia N_0 àtoms de $^{238}_{92}U$. En l'actualitat hi haurà N àtoms d'urani i $(N_0 - N)$ àtoms de $^{206}_{82}Pb$, per tant

$$\frac{N(^{238}_{92}U)}{N(^{206}_{82}Pb)} = \frac{N}{N_0 - N} = \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} = \left(\frac{e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} \right) \left(\frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} \right) = \frac{1}{e^{\lambda t} - 1}$$

on hem multiplicat i dividit per l'exponencial positiva, per no tindre una exponencial negativa.

➤ Anomenarem a a la relació experimental entre àtoms d'urani i plom: $\frac{N(^{238}_{92}U)}{N(^{206}_{82}Pb)} = a$

➤ Igualant les expressions anteriors, tenim: $\frac{1}{e^{\lambda t} - 1} = a \rightarrow e^{\lambda t} - 1 = \frac{1}{a} \rightarrow e^{\lambda t} = \frac{1}{a} + 1$

- Operant $e^{\lambda t} = \frac{a+1}{a}$ i aplicant logaritmes $\lambda t \ln e = \ln\left(\frac{a+1}{a}\right)$

- Finalment $t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = T \frac{\ln[(a+1)/a]}{\ln 2}$

➤ Si la relació entre àtoms d'urani i plom és una potència de 2 (2^n), el temps transcorregut és l'exponent multiplicat pel període de semidesintegració ($t = n \cdot T$).

• Datació en geologia: mètode del potassi-argó (K/Ar)

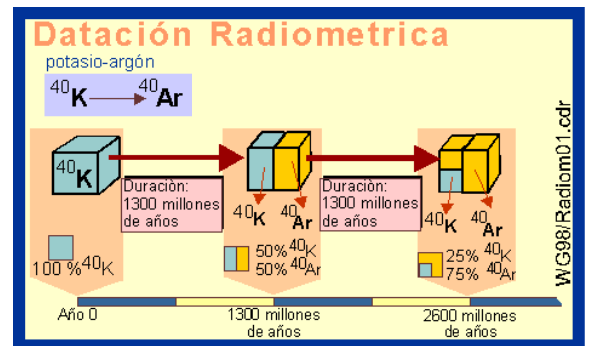
○ Tipus de mostres: Aquest mètode té l'avantatge que el potassi és un element molt comú en les roques de l'escorça terrestre. És efectiu sobretot en roques ígnies, ja que permet determinar el temps a partir del qual el mineral es va refredar prou perquè l'argó radiogènic no es difonguera fora de la roca. L'edat obtinguda pot ser inferior a la verdadera si s'ha produït pèrdua d'argó (per exemple, en roques poroses)

○ Límit de validesa: essent el període de semidesintegració del $^{40}_{19}K$ de 1300 milions d'anys, aquest mètode cobreix quasi per complet l'escala dels temps geològics, podent datar-se les roques terrestres més antigues (de més de 3.000 Ma) fins a les més modernes; se situa com a límit antiguitats pròximes a 1 milió d'anys. Per a materials geològics amb edats més recents al milió d'anys, les datacions per aquest mètode són difícils de realitzar a causa dels continguts menuts en $^{40}_{18}Ar$ radiogènic present en la mostra.

○ Fonament: Al igual que en el mètode U/Pb s'analitza la relació entre la quantitat de l'element pare $^{40}_{19}K$ i l'últim element estable: $^{40}_{18}Ar$.

○ Si la relació entre ambdós és $\frac{N(^{40}_{19}K)}{N(^{40}_{18}Ar)} = a$,

aleshores, igual que en el mètode U/Pb,
 $t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = T \frac{\ln[(a+1)/a]}{\ln 2}$



<http://www.fortunecity.com/westwood/chanel/270/kronos/metodos.htm#potasi>

PROBLEMA DE DATACIÓ EN GEOLOGIA

5.11. En fer la datació de dues roques, s'ha obtingut la relació isotòpica següent: (a) per a la mostra A, per cada àtom de ^{235}U , hi ha un de ^{207}Pb . (b) Per a la mostra B, per cada àtom de ^{235}U , hi ha tres àtoms de ^{207}Pb . Sabent que el període de semidesintegració de l'urani és de 710×10^6 anys, i que tot el plom procedeix de la desintegració de l'urani, quina edat tenen les dues mostres de roca? **SOL:** 710 milions d'anys, 1420 milions d'anys.

• Solució:

○ Si $\frac{N(^{235}\text{U})}{N(^{207}\text{Pb})} = 1$, aleshores: $N = N_o - N$ d'on $2N = N_o \rightarrow N = N_o / 2$

➤ Com que el nombre d'àtoms s'ha reduït a la meitat, ha transcorregut un temps igual al període de semidesintegració, és a dir 710 milions d'anys

○ Si $\frac{N(^{235}\text{U})}{N(^{207}\text{Pb})} = \frac{1}{3}$, aleshores: $3N = N_o - N$ de on $4N = N_o \rightarrow N = N_o / 4$

➤ Com que el nombre d'àtoms s'ha reduït a la quarta part (2^2), ha transcorregut dues vegades el període de semidesintegració, és a dir, $710 \times 2 = 1420$ milions d'anys.

5.5. Radioactivitat artificial. Radioisòtops

- La radioactivitat artificial consisteix a bombardejar certs elements amb un determinat tipus de projectils (partícules alfa, neutrons...) per a obtenir isòtops radioactius artificials que, en general, són inestables (és a dir, tenen un període de semidesintegració molt curt).
- Perquè es donen aquestes reaccions fan falta reactors nuclears (per a generar, per exemple, neutrons) i acceleradors de partícules (per a accelerar electrons, protons, neutrons...).

• Exemples de reaccions nuclears artificials

- El bombardeig d'àtoms de $^{27}_{13}\text{Al}$ amb partícules alfa, produeix l'isòtop $^{30}_{15}\text{P}^*$, que és un isòtop artificial amb un curt període de semidesintegració ($T = 2.6$ min):



➤ De la desintegració del $\left[^{30}_{15}\text{P} \right]^*$ s'obté també un positró ($^0_{+1}\text{e}$) que té una càrrega del mateix valor que la de l'electró, però positiva ($q = +e$). L'emissió de positrons és exclusiva dels elements radioactius artificials.

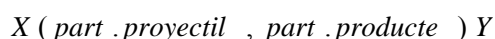
- El bombardeig d'àtoms $^{23}_{11}\text{Na}$ amb deuterons (nuclis de deuteri, és a dir, hidrogen amb un protó i un neutró en el seu nucli: ^2_1H), produeix l'isòtop $\left[^{24}_{11}\text{Na} \right]^*$, que és un isòtop artificial amb un període de semidesintegració de l'ordre d'hores ($T = 15$ hores):



- Avui en dia s'han aconseguit radioisòtops artificials de quasi tots els elements, tal com es pot comprovar en algunes versions del sistema periòdic dels elements , ja esmentades:

<http://ie.lbl.gov/toi/perchart.htm>

- La notació general d'una reacció nuclear artificial és:



on X és l'àtom que actua com a blanc i Y l'àtom resultant; entre parèntesis s'indica la partícula que actua com a projectil i la que es produeix o s'emet en la reacció.

PROBLEMA DE REACCIONS NUCLEARS

5.12. En el supòsit que el nucli ${}_{84}^{218}\text{Po}$ experimentara successivament els processos nuclears següents: ${}_{84}^{218}\text{Po} (-, \alpha) X$, $X (-, \beta) Y$, $Y (-, \gamma) Z$, $Z (n, p) W$

Quins serien els nombres atòmics i els nombres màssics dels nuclis resultants X, Y, Z, W dels esmentats processos? **SOL:** ${}_{82}^{214}\text{Pb}$, ${}_{83}^{214}\text{Bi}$, ${}_{83}^{214}\text{Bi}$, ${}_{82}^{214}\text{Pb}$.

- Solució:

- Plantejant les equacions per a A i Z en cada cas:
 - ${}_{84}^{218}\text{Po} \rightarrow [{}_{Z}^A X] + {}_2^4\text{He}$ Així: $A = 218 - 4 = 214$; $Z = 84 - 2 = 82$. Si busquem en el Sistema Periòdic l'element amb nombre atòmic 82, vorem que és el plom. Per tant ${}_{84}^{218}\text{Po} \rightarrow {}_{82}^{214}\text{Pb} + {}_2^4\text{He}$.
 - Noteu que, com que no hi ha projectil, es tracta d'una desintegració espontània.
 - ${}_{82}^{214}\text{Pb} \rightarrow [{}_{Z}^A X] + {}_{-1}^0 e$ Així: $A = 214 - 0 = 214$; $Z = 82 - (-1) = 83$. Si busquem en el Sistema Periòdic l'element amb nombre atòmic 83, vorem que és el bismut. Per tant ${}_{82}^{214}\text{Pb} \rightarrow {}_{83}^{214}\text{Bi} + {}_{-1}^0 e$.
 - ${}_{83}^{214}\text{Bi} \rightarrow [{}_{Z}^A X] + \gamma$ Així: $A = 214$; $Z = 83$. per tant ${}_{83}^{214}\text{Bi} \rightarrow {}_{83}^{214}\text{Bi} + \gamma$.
 - ${}_{83}^{214}\text{Bi} + {}_0^1 n \rightarrow [{}_{Z}^A X] + {}_1^1 p$ Així: $A = 214 + 1 - 1 = 214$; $Z = 83 - 1 = 82$. Si busquem en el Sistema Periòdic l'element amb nombre atòmic 82, veurem que és el plom. Per tant ${}_{83}^{214}\text{Bi} + {}_0^1 n \rightarrow {}_{82}^{214}\text{Pb} + {}_1^1 p$.

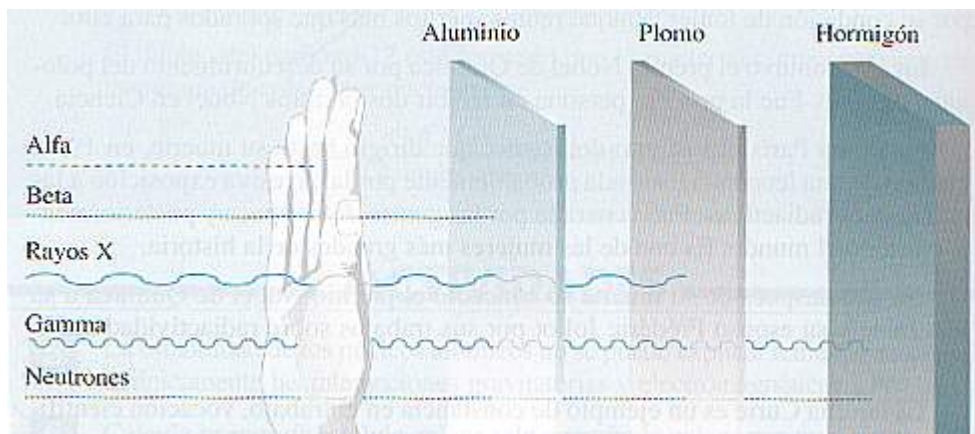
- **Aplicacions (beneficïoses) dels radioisòtops**

- Investigació mèdica
 - Els isòtops radioactius són àtoms amb les mateixes propietats químiques que els no radioactius, però són àtoms "marcats", és a dir, a causa de la radiació que emeten poden ser rastrejats i saber el seu recorregut, posició o quantitat.
 - *Exemples de processos biològics que s'han estudiat amb traçadors:* el transport actiu del sodi en les fibres nervioses (bomba de sodi-potassi), el metabolisme de fècules i sucres, la construcció de proteïnes a partir d'aminoàcids i l'acció d'hormones i de drogues.
- Diagnosi (vegeu ap. 31.5, Kane, exemples d'estudis diagnòstics):
 - En els estudis diagnòstics s'administra un compost marcat radioactivament, que és absorbit per l'òrgan d'interès. Un detector en l'exterior del cos mesura la radioactivitat en diferents temps i posicions, que permeten conèixer l'estat de l'òrgan i fer un diagnòstic.
 - Les dosis de radiació són en general comparables a les dels raigs X. Per a reduir al mínim la dosi, se seleccionen núclids de vida curta que emeten raigs gamma just amb prou energia per a ser detectats.
- Teràpia
 - Les cèl·lules canceroses són altament vulnerables a la radiació. Per aquest motiu, almenys la meitat dels pacients de càncer reben teràpia de radiació.
 - La radiació se subministra, bé externament mitjançant aparells de raigs X, ${}^{60}\text{Co}$, o acceleradors, bé internament mitjançant la implantació d'agulles de radi, càpsules plenes de radó o cintes que continguen radionúclids artificials.

5.6. (a) Radiació ionitzant

- Hem vist que la desintegració radioactiva dels nuclis produeix diferents tipus de radiació.
- Quan aquesta radiació travessa la matèria, ionitza els àtoms que es troba en el seu camí, és a dir, arranca electrons de la seua capa electrònica.
- El terme radiació ionitzant inclou tant la radiació nuclear que hem vist en aquest tema (radioactivitat natural: α , β , γ ; radioactivitat artificial: protons, neutrons, positrons...), com els raigs X d'origen atòmic. Ones de menor freqüència, com la llum visible, ones de radi o microones, no produeixen ionització apreciable.
- La radiació és un exemple d'un avanç científic que, encara que pot produir grans beneficis, també pot produir grans perjudicis. Tots aquells que treballen amb radiacions han d'entendre la física i la biologia de la radiació i prendre precaucions.
- Hi ha quatre grans categories de radiacions ionitzants. Ordenades segons la seua capacitat de penetració en la matèria són:
 - lons positius, com les partícules alfa i els protons (${}^4_2\text{He}$, ${}^1_1\text{p}$)
 - Són les partícules ionitzants amb més massa.
 - Açò implica que:
 - Tenen una capacitat de ionització gran, ja que, a causa de la seua gran massa i a la seua càrrega, arranquen molts electrons en el seu recorregut.
 - Tenen una capacitat de penetració menuda, ja que la seua gran massa i a la seua càrrega fan que hi haja molts xocs, cedint molta energia en cada un d'ells.
 - A causa de la gran energia que cedeixen en el seu recorregut, les partícules alfa poden produir greus danys biològics.
 - *Exemple de penetració:* la radiació alfa és detinguda per uns pocs cm d'aire i no arriba a travessar un full de paper.

<http://www.sociedadelainformacion.com/departfqtobarra/nuclear/>



També: <http://www.csn.es/publicaciones/proteccionradiologica2008.pdf>

- electrons i positrons (${}^0_{-1}e$, ${}^0_{+1}e$)
 - La seua massa és menuda.
 - Açò implica que:
 - Tenen una capacitat d'ionització mitjana, donada la seua massa menuda però càrrega apreciable.

- Tenen una capacitat de penetració mitjana, ja que la seua massa menuda fa que cedisquen poca energia en cada xoc. La seua capacitat de penetració és unes 100 vegades major que la de les partícules alfa.
- *Exemple de penetració:* la radiació beta és frenada per uns metres d'aire, una làmina d'alumini o uns cm d'aigua.
- o Raigs gamma i raigs X
 - Els raigs gamma tenen una energia major que la dels raigs X, però cap no té massa ni càrrega, ja que són fotons.
 - Açò implica que:
 - Per ells mateixos no tenen una capacitat d'ionització apreciable, però cedeixen energia als electrons que troben en el seu camí, que sí que produeixen ionització, és a dir, tenen una capacitat d'ionització menuda.
 - Tenen una gran capacitat de penetració, ja que l'absència de massa i càrrega fa que només perden energia cedint-la als electrons que troben. La seua capacitat de penetració és unes 100 vegades major que la de les partícules beta i 10 000 més que les alfa.
 - *Exemple de penetració:* La radiació gamma només es frena amb planxes de plom i murs grossos de formigó.
- o Neutrons
 - Són partícules amb una massa mitjana, però sense càrrega. Com els neutrons no tenen càrrega elèctrica, les interaccions es produeixen per col·lisions directes, en les quals sols actuen forces nuclears de curt abast.
 - Açò implica que:
 - Produeixen ionització de manera indirecta, per la qual cosa la seua capacitat d'ionització és menuda.
 - La probabilitat que ocorrega una interacció amb electrons en travessar un medi absorbent és ínfima, és el motiu pel qual tenen una capacitat de penetració gran.
 - A causa de la seua massa relativament gran, cedeixen energia en els xocs, per la qual cosa els neutrons poden produir grans efectes biològics.
 - *Exemple de penetració:* igual que la radiació gamma, els neutrons només es frenen amb planxes de plom i murs grossos de formigó.

5.6 (b) Unitats de radiació

- Es fan diferents tipus de mesures de radiació, segons l'aplicació, amb diferents unitats.
- **1) Activitat d'un àtom radioactiu**
 - o Hem definit anteriorment l'activitat com la velocitat de desintegració canviada de signe, és a dir, el nombre d'àtoms que es desintegren en la unitat de temps, sense signe.
 - o La seua expressió és: $A = \lambda N$, on $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, per tant, $A = \frac{N \ln 2}{T}$, essent T el període de desintegració.
 - o Unitats:
 - 1 Becquerel = 1 Bq = 1 desintegració/segon (és la unitat del SI)
 - 1 curie = 1 Ci = 3.7×10^{10} desintegracions/segon
 - o Activitat d'una massa de material radioactiu: tenint en compte que en un mol hi ha N_A àtoms

$$A = \lambda N = \lambda n N_A = \frac{n N_A \ln 2}{T}, \quad \text{on } n \text{ és el nombre de moles d'aquesta massa.}$$

• **2) Dosi absorbida (magnitud física)**

- Si a un material li arriba radiació, la dosi absorbida indica, d'aquesta radiació que li arriba, quanta és absorbida pel cos.
- Es defineix com l'energia absorbida per unitat de massa.
- Unitats:
 - 1 gray = 1 Gy = 1 J/kg (és la unitat del SI)
 - 1 rad = 0.01 J/kg
- La dosi absorbida és una magnitud física que depèn de les característiques físiques del cos (densitat, estructura atòmica...). No informa dels efectes biològics.

• **3) Dosi absorbida (magnitud biològica)**

- Si un organisme biològic rep la mateixa dosi de dues radiacions diferents, els efectes biològics poden no ser els mateixos.
- Es pren com a radiació de referència els raigs X d'energia 200 keV.
- Es defineix l'eficàcia biològica relativa (EBR) o factor de qualitat (FC) d'una radiació particular, com el factor multiplicador que relaciona l'efecte d'aquesta radiació amb la de referència.

TAULA 5.3: Valors típics de l'EBR
Noteu que l'EBR per als raigs X és 1.
(Taula 31.1, Kane)

| Radiació | EBR |
|---|-------|
| Raigs γ del ^{60}Co (1.17 i 1.33 MeV) | 0.7 |
| Raigs γ de 4 MeV | 0.6 |
| Partícules β | 1.0 |
| Raigs X de 200 keV | 1.0 |
| Protons (1 a 10 MeV) | 2 |
| Neutrons | 2-10 |
| Partícules α | 10-20 |

- D'aquesta forma, la dosi biològica equivalent es calcula com la dosi física multiplicada per l'EBR

$$dosis_{BIOL}(radiación) = EBR \times dosis_{FIS}(radiación)$$
- Unitats:
 - 1 sievert = 1 Sv = 1 EBR x Gy (és la unitat del SI)
 - 1 rem = EBR x 1 rad **(rem: relative efficiency man: dosi equivalent en l'home)**
- De la taula 5.3 es dedueix que
 - 1 rad de raigs γ del ^{60}Co , produeixen una dosi biològica equivalent de 0.7 rem.
 - 1 rad de neutrons ràpids (de 0.1 MeV), produeixen una dosi biològica equivalent de 10 rem.
 - Veiem, per tant, que l'efecte biològic dels neutrons és molt més gran que el dels raigs gamma, essent la dosi física la mateixa (1 rad).

PROBLEMA D'UNITATS DE RADIACIÓ

- 5.15 Es té un mil·limol de l'element X. Si el seu període de semidesintegració és de 47 minuts, (a) quina és la seua activitat radioactiva? (b) quant temps tardarà a reduir-se al 10%? **SOL:** 1.48 10^{17} Bq, 156 min.

- Solució:

- (a) Calculem la seua constant radioactiva: $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{47 \times 60} = 2.46 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$
- L'activitat per a una massa de $n = 0.001$ mol serà
 $A = \lambda \cdot n \cdot N_A = 2.46 \times 10^{-4} \cdot 0.001 \cdot 6.023 \times 10^{23} = 1.48 \times 10^{17} \text{ desint / s} = 1.48 \times 10^{17} \text{ Bq}$
- (b) Per al temps sol·licitat: $\frac{N}{N_o} = 0.1$. Com $\frac{N}{N_o} = e^{-\lambda t}$, aleshores $0.1 = e^{-\lambda t}$, cosa que és el mateix que $10 = e^{+\lambda t}$. Aplicant logaritmes neperians $\ln(10) = \lambda t$ i aïllant el temps
 $t = \frac{\ln(10)}{2.46 \times 10^{-4}} = 9.37 \times 10^3 \text{ s} = 156.1 \text{ min}$

PROBLEMA D'UNITATS DE RADIACIÓ

5.16.- Una font de ${}^{60}_{27}\text{Co}$ genera raigs gamma que produeixen una dosi absorbida de 4000 rad per hora en els teixits. L'eficàcia biològica relativa (EBR) per als raigs gamma del cobalt és 0.7. (a) Quant temps fa falta perquè siga absorbida una dosi de 300 rad? (b) Quant temps fa falta perquè siga absorbida una dosi equivalent de 300 rems? **SOL:** 4.5 min., 6.4 min.

- Solució:

- Calculem el temps que fa falta perquè s'absorbisca una dosi física de 300 rad mitjançant una simple regla de tres: $\text{dosis}_{FIS}({}^{60}_{27}\text{Co}) = \frac{300}{4000} \cdot 1 = 0.075 \text{ h} = 4.5 \text{ min}$
- Per saber en quant temps s'absorbeix una dosi de 300 rem (dosi biològica), primer la tenim que passar a rad (dosi física). Tenim que tindre en compte l'EBR del ${}^{60}_{27}\text{Co}$. Així, com que $\text{dosi}_{BIOL}(\text{radiació}) = \text{EBR} \times \text{dosi}_{FIS}(\text{radiació})$, aleshores

$$\text{dosi}_{FIS}({}^{60}_{27}\text{Co}) = \frac{\text{dosis}_{BIOL}({}^{60}_{27}\text{Co})}{\text{EBR}({}^{60}_{27}\text{Co})} = \frac{300}{0.7} = 429 \text{ rad}.$$
- Una vegada coneguda la dosi física, calculem la part proporcional:
 $\text{dosis}_{FIS}({}^{60}_{27}\text{Co}) = \frac{429}{4000} \cdot 1 = 0.107 \text{ h} = 6.4 \text{ min}$


5.6. (c) Efectes (perjudicials) de la radiació

- Efectes cel·lulars

- Quan la radiació travessa les cèl·lules vives pot alterar o perjudicar l'estructura de molècules importants. Açò pot dur a un funcionament defectuós o a la mort de les cèl·lules i, en última instància, a la mort de l'organisme.
- La radiació pot afectar (p. 511, Jou):
 - Les proteïnes: les radiacions tenen efectes indirectes sobre els aminoàcids aromàtics i aquells que contenen sofre.
 - Els àcids nucleics: són considerats l'element determinant de vulnerabilitat a efectes de la radiació, ja que, o bé conserven informació genètica, o bé juguen un paper decisiu en la síntesi de proteïnes. L'alteració d'un sol parell de bases en la seqüència de l'ADN pot ser catastròfica.

- Les membranes: la seua perforació pot tenir efectes molt negatius en l'àmbit de mitocòndries, de cloroplastos o d'isoenzims.
- Cèl·lules en general (p. 514, Frumento): els efectes poden ser deguts a alteracions bioquímiques que donen lloc a la inhibició de les seues funcions, a la formació de productes tòxics resultants de l'alteració de substàncies normals pels radicals lliures, a la difusió de substàncies com enzims alliberats, etc.
- En l'organisme en el seu conjunt, les cèl·lules més sensibles a la radiació són aquelles que estan creixent o multiplicant-se ràpidament. Exemples són els fetus, els xiquets i les cèl·lules canceroses.
- És possible ordenar els diferents tipus de cèl·lules o teixits en una sèrie que, en ordre decreixent de sensibilitat, és la següent (p. 514, Frumento):

| | |
|-------------------------|-----------------------|
| - Limfòcits | MOLT SENSIBLES |
| - Teixit hematopoètic | |
| - Epitelis | |
| - Cèl·lules connectives | |
| - Nervis | |
| - Cervell | |
| - Cèl·lules musculars | POC SENSIBLES |



- Dosi: Els efectes biològics de la radiació estan relacionats estretament amb les dosis. Vegeu la taula adjunta.

TAULA 5.4: Efectes biològics de la radiació (pag. 504, Jou)

| Dosi (en rem) | Dosi (en Sv) | Efectes |
|---------------|--------------|--|
| 0 a 25 rem | 0 a 0.25 Sv | conseqüències negligibles |
| 25 a 100 rem | 0.25 a 1 Sv | lleugers canvis en la sang |
| 100 a 200 rem | 1 a 2 Sv | perjudicis observables, però recuperables parcialment |
| 200 a 500 rem | 2 a 5 Sv | La probabilitat de morir creix ràpidament. Causes: afeccions de medul·la òssia, síndromes gastrointestinals i lesions en el sistema nerviós. |
| > a 500 rem | >a 5 Sv | La mort es produeix al cap de dies o setmanes. |

- Temps d'exposició:
 - Dosis subletals però adquirides de manera gradual poden produir càncer després d'un període latent de molts anys.
 - En general, l'augment en la taxa de càncer és directament proporcional a la dosi total acumulada, és a dir, els efectes no es dissipen amb el temps, sinó tot el contrari, s'acumulen amb el temps.
- Radiació a la qual estem exposats de forma crònica:
 - Radiació natural: els éssers vius sempre han estat exposats a una radiació crònica de baix nivell deguda als raigs còsmics i als radionúclids presents en el seu entorn.
 - Radiació artificial: actualment, a aquesta radiació natural s'afegeix una quantitat igual de radiació produïda artificialment per l'home. Vegeu taula adjunta.

TAULA 5.5: Fonts cròniques de radiació als EUA (Taula 31.3, Kane)

| Font | Dosi (mrem/any) | Dosi (mSv/any) |
|--------------------------|-----------------|----------------|
| Radiació còsmica | ≈ 44 | ≈ 0.44 |
| Raigs γ de roques | ≈ 26 | ≈ 0.26 |
| Radionúclids interns | ≈ 18 | ≈ 0.18 |
| mitjana: | ≈ 88 | ≈ 0.88 |
| Pluja radioactiva (1970) | ≈ 4 | ≈ 0.04 |
| Diagnòstic mèdic | ≈ 72 | ≈ 0.72 |
| Radiofàrmacs | ≈ 1 | ≈ 0.01 |
| altres | ≈ 2 | ≈ 0.02 |
| mitjana : | ≈ 79 | ≈ 0.59 |

- En alguns països (EUA) s'ha establert allò que s'anomena "dosi màxima permisible" (DMP) per al públic en general i per a gent que treballa amb radiació. Les exposicions de caràcter mèdic no s'inclouen.
- La taula adjunta indica que:
 - Un individu, de manera ocasional, pot estar sotmès a una dosi de 500 mrem en un any. És a dir, si rep una radiació per un accident de 500 mrem, ha d'estar allunyat durant un any de tota exposició. A partir d'aleshores, ja pot sotmetre's una altra vegada a la radiació sense perill.
 - La dosi màxima permesa durant un any per a la població en general és de 170 mrem/any. Per exemple, un individu podria estar sotmès a 340 mrem durant 6 mesos, però la resta de l'any hauria d'allunyar-se de tota mena de radiació. O estar sotmès a 17 mrem durant 10 mesos i la resta de l'any lliure de radiacions.
 - La població que treballa amb radiacions pot rebre de forma intensiva, o 5000 mrem/any, o 1250 mrem en 3 mesos o en cas d'embaràs 500 mrem durant el període de gravidesa. Noteu que 1250 mrem/3 mesos, multiplicant numerador i denominador per 4, proporciona la mateixa DMP de 5000 mrem/any.
- **NOTEU** que si es comparen aquests valors amb els donats en la taula 5.4, es pot comprovar que tots estan molt per davall de la mínima dosi amb efectes perjudicials (0 a 0.25 Sv)

TAULA 5.6: Dosis màximes permissibles (DMP) fixades pel "National Council on Radiation Protection" (EUA) (Taula 31.4, Kane)

| Tipus de població | DMP | DMP |
|---------------------------------------|-------------------|------------------|
| Població general: | | |
| per individu | 500 mrem/any | 5 mSv/any |
| mitjana | 170 mrem/any | 1.7 mSv/any |
| Població que treballa amb radiacions: | | |
| per individu i any | 5000 mrem/any | 50 mSv/any |
| per individu i 3 mesos | 1250 mrem/3 mesos | 12.5 mSv/3 mesos |
| dones embarassades | 500 mrem/ 9 mesos | 5 mSv/ 9 mesos |

EN RESUM:

- La PERILLOSITAT d'una exposició a la radiació depèn:
 - De la quantitat de radiació absorbida (dosi en Gy).
 - Del tipus de radiació (EBR).
 - Del temps d'exposició (efecte acumulatiu).
- **CURIOSITAT:**
 - NOTA del Consell de Seguretat Nuclear espanyol en relació amb els detectors de raigs X dels aeroports:

http://www.csn.es/index.php?option=com_faq&view=entries&Itemid=57&lang=es#pregunta20

CONSELL DE SEGURETAT NUCLEAR (CSN)

La missió del CSN és protegir als treballadors, la població i el medi ambient dels efectes nocius de les radiacions ionitzants, i aconseguir que les instal·lacions nuclears i radioactives siguin operades pels titulars de manera segura, i establint les mesures de prevenció i correcció enfront d'emergències radiològiques, siga quin siga el seu origen.

EXEMPLE d'una FAQ

http://www.csn.es/index.php?option=com_faq&view=entries&Itemid=57&lang=es

6- Quines mesures han de prendre els treballadors dels equips de raigs X per a la inspecció de paquets en els aeroports?

Els equips per a la inspecció de paquets en els aeroports espanyols, han de disposar d'aprovació del tipus d'aparell radioactiu d'acord amb l'annex II del Reglament sobre instal·lacions nuclears i radioactives, Reial Decret 1836/1999.

Açò implica que l'aparell ofereix suficient seguretat contra la fuga de radiacions ionitzants, tant en condicions normals d'ús com en altres que accidentalment puguen presentar-se, així com possibles utilitzacions incorrectes.

No presentarà en condicions normals de funcionament una taxa de dosi superior a 1 microsievert/h en cap punt situat a 0,1 m de la seua superfície accessible.

Per tant, no es requereix que les persones que treballen habitualment prop d'aquesta mena d'aparells adopten precaucions ni se sotmeten a revisions mèdiques especials.

- **CURIOSITAT:**

- Taula informativa sobre la dosi rebuda en realitzar una radiografia

| Tipus de radiografia | Dosi (mSv) | Dosi relativa | Equivalència radiació natural de fons |
|----------------------|------------|---------------|---------------------------------------|
| Tòrax | 0.02 | 1 | 3 dies |
| Abdomen | 1.0 | 50 | 6 mesos |
| Lumbar | 1.3 | 65 | 7 mesos |
| UIV | 2.5 | 125 | 14 mesos |
| EGD | 3.0 | 150 | 16 mesos |
| Ènema opac | 7.0 | 350 | 3.2 anys |
| TC crani | 2.3 | 119 | 1.0 anys |
| TC tòrax | 8 | 400 | 3.6 anys |
| TC abdomen | 10 | 500 | 4.5 anys |

TEMA 5: RADIOACTIVITAT

DEFECTE DE MASSA

- 5.1. Calcula l'energia d'enllaç per nucleó en MeV per als isòtops $^{16}_8\text{O}$ i $^{17}_8\text{O}$ que tenen masses de 15,99491 i 16,99913 u, respectivament. Quin dels dos isòtops és d'esperar que siga més estable? DADES: $1 u = 931 \text{ MeV}$; $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$; $m(\text{electró}) = 0.000548 \text{ u}$; $m(\text{protó}) = 1.00728 \text{ u}$; $m(\text{neutró}) = 1.00866 \text{ u}$. **SOL:** 7.97 MeV/nucleó, 7.74 MeV/nucleó. El primer ($^{16}_8\text{O}$).
- 5.2. En el procés de fissió del $^{235}_{92}\text{U}$ hi ha un defecte de massa de 0.2 u. Quina és l'energia despresa per la fissió d'un mol d'urani? Si en la combustió d' 1 kg de carbó es desprenen $3 \times 10^7 \text{ J}$, quantes vegades més gran és l'energia despresa per 1 kg d'urani? DADES: $1 u = 931 \text{ MeV}$; $N_A = 6.023 \times 10^{23} \text{ at/mol}$; $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$; $M_{\text{at}}(^{235}_{92}\text{U}) = 235 \text{ g/mol}$. **SOL:** $1.79 \times 10^{13} \text{ J}$, 2 500 000 vegades més gran.
- 5.3.- Una **kilotona** és una mesura d'energia, que equival a l'energia alliberada per 1000 tones de TNT (trinitotolué): $1 \text{ kt} = 4.184 \times 10^{12} \text{ J}$. La bomba d' Hiroshima (06 de Agost de 1945), que va produir la mort de 140.000 persones, tenia una energia d'unes 15 kilotones. En el procés de fissió del $^{235}_{92}\text{U}$ existeix un defecte de massa de 0.2 u Si suposem que tota l'energia de la bomba d' Hiroshima era conseqüència de la fissió de l' urani, quant $^{235}_{92}\text{U}$ contenia la bomba? DADES: $1 u = 931 \text{ MeV}$; $N_A = 6.023 \times 10^{23} \text{ at/mol}$; $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$; $M_{\text{at}}(^{235}_{92}\text{U}) = 235 \text{ g/mol}$.

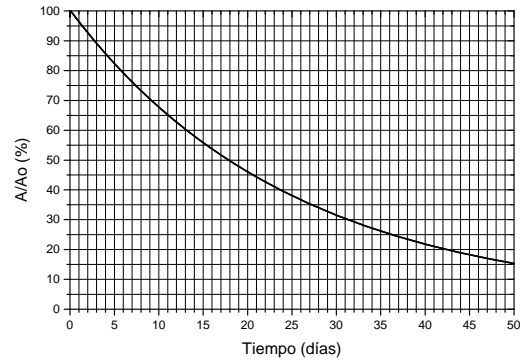
LLEIS DE DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA (descripció qualitativa)

- 5.4. Per a la família del radi, descriu la desintegració dels tres últims elements de la família.
- 5.5. El $^{24}_{11}\text{Na}$ es desintegra per emissió β . Determina: (a) el nucli resultant; (b) l'energia d'enllaç i l'energia d'enllaç per nucleó, expressades en MeV, del $^{24}_{11}\text{Na}$ i de l'element resultant. DADES: $1 u = 931 \text{ MeV}$; masses atòmiques en u: $m(^{24}_{11}\text{Na}) = 23.990967 \text{ u}$; $m(\text{nucli_resultant}) = 23.985045 \text{ u}$; $m(\text{electró}) = 0.000548 \text{ u}$; $m(\text{protó}) = 1.007276$; $m(\text{neutró}) = 1.008665$. **SOL:** $^{24}_{12}\text{Mg}$, 193.41 MeV, 8.06 MeV, 197.76 MeV, 8.24 MeV.

LLEIS DE DESINTEGRACIÓ RADIOACTIVA (descripció quantitativa)

- 5.6. Cada dilluns, a les 12 hores, es prepara la mateixa quantitat d'un isòtop radioactiu que té un període de semidesintegració de 8 dies, marcant la data de preparació en el recipient. Un dijous a les 12 h es mesura l'activitat d'una mostra, en la qual no apareix la data de preparació i es registren 4200 Bq, mentre que la preparada el dilluns d'aquesta setmana registra una activitat de 47500 Bq. Quant temps porta preparada la mostra sense etiqueta? **SOL:** 31 dies.
- 5.7. El ferro 59 s'administra a un pacient per a diagnosticar unes anomalies sanguínies. El seu període de semidesintegració és de 46.3 dies. Si no s'expulsa, quina fracció N/N_0 queda al cap de 30 dies? I al cap de 46.3 dies? El seu període biològic de semidesintegració és de 65 dies, quin serà el període efectiu de semidesintegració? Calcula amb aquest valor quina fracció N/N_0 queda de ^{59}Fe al cap de 30 dies i al cap de 46.3 dies. **SOL:** 63.8 % d'àtoms, 50 % d'àtoms, 46.3 % d'àtoms, 30.6 % d'àtoms. (*Kane, Exemples 30.1 i 30.2*)
- 5.8. La figura adjunta representa la variació amb el temps de l'activitat romanent respecte de la inicial (A/A_0), expressada en %, en un pacient a qui se li ha introduït un marcador (^{51}Cr) en la

sang per a realitzar un estudi de destrucció d'hematies (també coneguts com a eritròcits o glòbuls rojos). Calcula: (a) el període efectiu de semidesintegració. (b) Si el període físic de semidesintegració del ^{51}Cr és de 27.84 dies, calcula el període biològic de semidesintegració. (c) Si se sap que la vida mitjana dels eritròcits, en un subjecte normal, és de 120 dies, indica si és normal o no l'eliminació d'eritròcits en el pacient. (d) Quant de temps haurà de passar perquè l'activitat en el pacient es reduïska a un 10% de la inicial? **NOTA:** aquest valor no s'aprecia en la gràfica i ha de calcular-se. **SOL:** 18 dies, 50.9 dies, 59.8 dies.



DATAció

- 5.9. L'activitat de la fusta viva és de 1000 desintegracions/dia i la fusta trobada en un jaciment arqueològic té una activitat de 250 desintegracions/dia. Quina antiguitat té la mostra? **SOL:** 11460 anys.
- 5.10. Una mostra de fusta descoberta en unes excavacions té el 20% del ^{14}C present en l'atmosfera. Suposant que el nivell atmosfèric del ^{14}C ha romàs constant, quina és l'edat que té la mostra? **DADA:** Període de semidesintegració del ^{14}C = 5730 anys. **SOL:** 13305 anys.
- 5.11. En realitzar la datació de dues roques s'ha obtingut la relació isotòpica següent: (a) per a la mostra A, per cada àtom de ^{235}U , n'hi ha un de ^{207}Pb . (b) Per a la mostra B, per cada àtom de ^{235}U , hi ha tres àtoms de ^{207}Pb . Sabent que el període de semidesintegració de l'urani és de 710×10^6 anys, i que tot el plom procedeix de la desintegració de l'urani, quina edat tenen les dues mostres de roca? **SOL:** 710 milions d'anys, 1420 milions d'anys.
- 5.12. Com a continuació del problema anterior, considerem una mostra addicional (la C) en la qual la relació isotòpica és: per cada àtom de ^{235}U , n'hi ha dos de ^{207}Pb . Quina edat té la mostra C? **SOL:** 1125 milions d'anys.

REACCIONS NUCLEARS

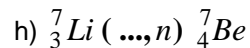
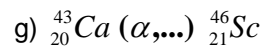
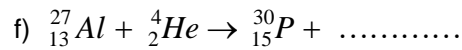
- 5.13. En el supòsit que el nucli $^{218}_{84}\text{Po}$ experimentara successivament els processos nuclears següents:



Quins serien els nombres atòmics i màssics dels nuclis resultants X, Y, Z, W dels esmentats processos? **SOL:** $^{214}_{82}\text{Pb}$, $^{214}_{83}\text{Bi}$, $^{214}_{83}\text{Bi}$, $^{214}_{82}\text{Pb}$.

- 5.14. Completa les següents reaccions nuclears:

- a) $^9_4\text{Be} + ^4_2\text{He} \rightarrow \dots + ^1_0\text{n}$
- b) $^{28}_{14}\text{Si} + ^2_1\text{H} \rightarrow \dots + ^1_0\text{n}$
- c) $^{27}_{13}\text{Al} + ^1_0\text{n} \rightarrow \dots + ^4_2\text{He}$
- d) $^{14}_7\text{N} + ^1_0\text{n} \rightarrow ^{11}_5\text{B} + \dots$
- e) $^9_4\text{Be} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^{10}_5\text{B} + \dots$



UNITATS DE RADIACIÓ

- 5.15. Es té un mil·limol de l'element X. Si el seu període de semidesintegració és de 47 minuts, (a) quina és la seua activitat radioactiva? (b) quant de temps tardarà a reduir-se al 10%? **SOL:** $1.48 \cdot 10^{17}$ Bq, 156 min.
- 5.16. Una font de ${}_{27}^{60}\text{Co}$ genera raigs gamma que produeixen una dosi absorbida de 40 Gy per hora en els teixits. L'eficàcia biològica relativa (EBR) per als raigs gamma del cobalt és 0.7. (a) Quant de temps fa falta perquè una dosi de 3 Gy siga absorbida? (b) Quant de temps fa falta perquè una dosi equivalent de 3 Sv siga absorbida? **SOL:** 4.5 min., 6.4 min.
- 5.17. Per a destruir el 60 per 100 d'una determinada població de bacteris es necessita una dosi de 4 Gy de raigs X de 200 keV. Si 1 Gy de partícules β^- de certa energia destrueixen quasi el mateix tant per cent de la població, quina és la dosi equivalent que destrueix aquest percentatge de població de bacteris?, quina és l'eficàcia relativa (EBR) de les esmentades partícules β^- ? **SOL:**