Universitat de València

Facultat de Filosofia i Ciències de l'Educació

Departament de Didàctica i Organització Escolar

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

TRATAMIENTO DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EDITADOS EN EL MARCO LEGISLATIVO DE LA LOMCE

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
Julio Tarín Ibáñez
Dirigida por:
Dr. Raúl Tárraga Mínguez
Dra. Mª Inmaculada Fernández Andrés

Valencia, 2019

Programa de Doctorado en Educación

Dr. Raúl Tárraga Mínguez, profesor titular del Departamento de Didáctica y Organización Escolar de la Universidad de Valencia y Dra. Mª Inmaculada Fernández Andrés, profesora titular del Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad de Valencia.

CERTIFICAN:

Que la tesis doctoral elaborada por Julio Tarín Ibáñez y titulada *"Tratamiento de los problemas aritméticos verbales en los libros de texto de Educación Primaria editados en el marco legislativo de la LOMCE"*, ha sido realizada bajo nuestra dirección. Considerando que este trabajo reúne las condiciones necesarias para optar al Grado de Doctor.

Para que así conste, firmamos el presente documento.

En Valencia, a 1 de junio de 2019.

Fdo: Dr. Raúl Tárraga Mínguez

Fdo: Dra. Mª Inmaculada Fernández Andrés

NOTA

El uso de un lenguaje no sexista debe ser un aspecto importante para el desarrollo de la igualdad de género, y asimismo una preocupación de todos los ciudadanos y ciudadanas, especialmente de aquellos y aquellas que nos dedicamos a la educación, puesto que *el lenguaje hace pensamiento*, constituyéndose así en un elemento poderoso de construcción y transformación de la realidad. No obstante, a pesar de la edición de numerosas guías y manuales, no existe un acuerdo por parte de la comunidad lingüística sobre cómo hacer uso de un lenguaje no sexista. Por ello, y también con el fin de evitar la redacción sobrecargada de esta tesis, he decidido utilizar, en ciertas ocasiones, el masculino genérico, considerando que las alusiones en este género siempre hacen referencia a hombres y mujeres.

A mis padres,
Juan y Pepa, que
aunque ya se fueron,
siempre estarán conmigo.

AGRADECIMIENTOS

A todas las personas que me han acompañado a lo largo de este viaje.

A mi director y directora, Raúl e Inma, por vuestra confianza en mí desde el primer momento, por vuestras orientaciones, por hacer fácil lo difícil, por las constantes palabras de ánimo, por vuestra cercanía. En definitiva, por vuestra calidad humana y profesional.

Al profesor Josetxu Orrantia, por todo el aprendizaje que adquirí durante mi estancia en la Universidad de Salamanca.

A Josu García Quintana, mi maestro, por enseñarme no sólo a “saber”, sino también a “saber ser”, y por mostrarme en aquel momento que otro tipo de educación era posible.

A Daniel y Alicia, amigos y compañeros del CEIP Torrefiel de Valencia, por enseñarme cada día a ser mejor maestro.

Y a mi familia, Isabel y Daniel, por estar siempre a mi lado.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Existe la idea generalizada de que un alumno ha aprendido a leer cuando es capaz de descifrar el código escrito. Sin embargo, la lectura es un proceso largo y complejo que, si bien comienza con la automatización del código de una lengua, no termina hasta que el alumno es capaz de comprender y/o juzgar lo que está escrito. De igual manera, desde una perspectiva restringida, se podría afirmar que un alumno está alfabetizado matemáticamente cuando es capaz de manipular los números y realizar con ellos las operaciones aritméticas básicas. En cambio, desde un punto de vista amplio, el concepto de "alfabetización matemática" contemplaría también la capacidad de utilizar las matemáticas para resolver las situaciones problemáticas a las que los estudiantes habrán de enfrentarse a lo largo de su vida cotidiana, valiéndose para ello del razonamiento.

Así, estas dos capacidades constituyen instrumentos primordiales de una sociedad desarrollada, que todos los ciudadanos deben dominar en la etapa adulta. No obstante, periódicamente se hacen públicos los resultados de los informes de pruebas internacionales (PIRLS y TIMSS de la IEA, en Educación Primaria; y PISA, de la OCDE, en Educación Secundaria)[1], que indican que tanto la lectura comprensiva como las matemáticas, constituyen el talón de Aquiles del aprendizaje escolar para un número considerable de estudiantes. En cualquier caso, más allá de los resultados de estas pruebas, bastaría con preguntar a los profesores para confirmar esta afirmación. En efecto, los docentes suelen manifestar que las principales dificultades que presentan los alumnos diariamente en las aulas aparecen de forma fundamental en el área de matemáticas, y en aquellas otras áreas curriculares donde las tareas requieren de la lectura comprensiva.

En el área de las matemáticas existe una tarea que, a pesar de su aparente sencillez, resulta especialmente ardua para los alumnos. Nos referimos a la resolución de los Problemas Aritméticos Verbales de estructura aditiva (en adelante, PAVs), objeto de estudio de esta tesis doctoral. En primer lugar, porque son muchos y muy complejos los procesos cognitivos que intervienen en esta tarea; y, en segundo lugar, porque se trata de los primeros problemas que se presentan al alumno en la escuela, y en ellos convergen los

[1] PIRLS (Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora) es un estudio de la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo) que evalúa la comprensión lectora cada cuatro años en 4º curso de Educación Primaria. TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) también es un estudio la IEA, que evalúa la competencia en matemáticas y ciencias de los alumnos de 4º de Educación Primaria y 2º de la Educación Secundaria Obligatoria. En el año 2015, última edición de este estudio, se evaluó a estudiantes de 52 países del mundo. La próxima edición de TIMSS se realizará en 2019. PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes) de la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico) evalúa la competencia lectora, matemática y científica en Educación Secundaria. La última edición de PISA se ha aplicado en 2018 y sus resultados se harán públicos en 2019.

conceptos y procedimientos aritméticos a los que el alumno se enfrenta también por primera vez.

Además, una de las características que definen este tipo de problemas es su doble naturaleza: conceptual o matemática y textual. En este sentido, a todo PAV subyace una ecuación matemática con datos numéricos, que se resolverá aplicando una o varias operaciones aritméticas, de ahí su naturaleza conceptual o matemática. Por ejemplo:

> Alberto tenía 54 euros. Consiguió 57 euros más. Se ha gastado algunos euros y al final le han sobrado 13 euros. ¿Cuánto dinero se ha gastado Alberto?

$$\hookrightarrow \quad 54 + 57 - X = 13.$$

Ahora bien, para poder resolver el problema del ejemplo, o cualquier otro PAV de estructura aditiva, el primer paso ha de ser necesariamente la lectura de su enunciado, de ahí su segunda naturaleza: textual. Como veremos más adelante, son numerosos los autores que consideran este tipo de problemas como *textos cortos*, *descripciones verbales o textuales, entidades discursivas, géneros textuales particulares o unidades textuales* (Bermejo y Rodríguez, 1987; Orrantia, 1993, 2003; Reusser, 1990; Semademi, 1995; Verschaffel, 2012; Verschaffel, Depaepe y Van Dooren, 2014; Vicente, 2006; Vicente y Manchado, 2017), donde confluye el lenguaje natural con el lenguaje simbólico de las matemáticas (Nesher, 2000), o donde se establece un nexo entre el carácter abstracto de las matemáticas y sus aplicaciones a la vida real (Verschaffel, Greer y De Corte, 2000). Por tanto, la resolución de un PAV requiere de la comprensión del problema como estructura matemática, pero también de su comprensión como enunciado textual. De esta manera, si los alumnos no comprenden el problema como texto, no lograrán extraer la esencia matemática que subyace a su enunciado.

Por otra parte, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de este tipo de problemas, o de cualquier otro tipo de contenido matemático, no se da en el vacío, sino que está mediatizado por diversos elementos contextuales, entre los que cobra una especial relevancia el libro de texto, al ser este el recurso material hegemónico en la institución escolar (Boesen et al., 2014; Jakoblonka y Johansson, 2012; Hiebert et al., 2003; Van Stiphout, 2011; Vicente, Rosales, Chamoso y Múñez, 2013). De hecho, el papel que juegan estos materiales curriculares en la práctica educativa es más decisivo incluso que las propias prescripciones del currículum oficial (Cai y Jiang, 2017; Monterrubio y Ortega, 2012; Stein y Smith, 2010). Por ello, los libros de texto constituyen ventanas desde las que nos podemos asomar a la realidad escolar o el currículum en la práctica.

Teniendo presente la relevancia de la resolución de problemas (en adelante, R.P) para el desarrollo cognitivo y actitudinal de los escolares, y dada la influencia del libro de texto en las prácticas instruccionales del aula, en la tesis doctoral que presentamos a lo largo de estas páginas nos hemos propuesto alcanzar dos objetivos generales:

Por un lado, analizar el tratamiento de los PAVs de estructura aditiva en los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria, publicados en el marco legislativo de la actual Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, (2013). Este análisis nos permitirá obtener una visión del estado actual de esta cuestión. Asimismo, teniendo en cuenta el estudio pionero en nuestro país, llevado a cabo por Orrantia, González y Vicente, (2005) podremos comprobar en qué medida se ha producido un cambio y/o mejora en el tratamiento de este tipo de problemas en los libros de texto con la entrada en vigor de la LOMCE (2013).

Por otro lado, considerando que los libros de texto del alumno son editados junto con las guías didácticas o guías del profesor, que los complementan, el segundo objetivo general de esta tesis se dirige a estudiar la relevancia de los PAVs en las pruebas de evaluación incluidas en estas guías. Este segundo análisis nos permitirá conocer qué currículum es realmente evaluado y, por tanto, valorado en la práctica educativa.

Para lograr estos objetivos, hemos estructurado esta tesis en dos partes: la **primera parte** consta de los **Capítulos I a III**, que constituyen el marco teórico donde se encuadra nuestro trabajo; la **segunda parte** comprende los **Capítulos IV a VI**, donde se describen nuestros estudios y se exponen las principales conclusiones que de ellos se derivan.

Antes de entrar de lleno en los contenidos centrales que vertebran esta tesis (los PAVs de estructura aditiva y los libros de texto), hemos considerado conveniente aproximarnos en el **Capítulo I** al concepto general de problema y R.P. Para ello, hemos trazado un recorrido a través de los diferentes focos, perspectivas y ámbitos desde los cuales se ha abordado su estudio. Esta aproximación nos ha permitido construir un espacio donde enmarcar las primeras ideas clave, que constituyen el punto de partida para el desarrollo del resto de los capítulos.

El **Capítulo II** gira alrededor del primer contenido central de esta tesis, esto es, los PAVs de estructura aditiva: su concepto, naturaleza, tipología y dificultades. En este capítulo veremos, por un lado, cómo de la propia conceptualización de estos problemas surge su doble naturaleza, conceptual o matemática y textual; y, por otro lado, cómo de su tipología, basada en su estructura semántica, surge uno de los factores principales que determinan su dificultad. En un segundo momento, describiremos los distintos modelos teóricos explicativos del proceso de R.P, profundizando en los modelos cognitivos, dada su especificidad en la resolución de los PAVs. Dentro de estos modelos, distinguiremos entre aquellos que han puesto el énfasis en la relevancia del conocimiento estrictamente matemático y aquellos otros que tienen en cuenta, asimismo, el procesamiento textual del problema. Por último, expondremos los estudios empíricos, que basándose en los modelos teóricos descritos y utilizando la metodología de la reescritura, han logrado comprobar qué tipo de modificaciones textuales incluidas en los enunciados de los problemas se muestran efectivas para ayudar a los alumnos a enfrentarse al proceso de la R.P. Sobre este aspecto, también distinguiremos entre los estudios que se han centrado en resaltar la estructura matemática de los PAVs, y los estudios que han enriquecido los enunciados para fomentar el procesamiento de los aspectos textuales.

El **Capítulo III** está dedicado al segundo contenido central de la tesis: los libros de texto. En este capítulo partimos de la idea de que cualquier contenido curricular, en este caso los PAVs, no aparece de forma aislada en el marco escolar, sino dentro de un contexto socio-político y cultural, que determina su proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, dado que el libro de texto encierra el currículum real presentado en el aula (Apple, 1992; Gimeno, 2010) este tercer capítulo se inicia presentando una visión del panorama actual sobre su uso e influencia, las líneas de investigación más relevantes dedicadas a su estudio, y los enfoques teóricos que la investigación reciente considera prioritarios. En suma, una serie de aspectos dirigidos a ofrecer una mirada amplia sobre nuestro objeto de estudio, que se verá reflejada de manera particular en las conclusiones finales, las implicaciones educativas que se derivan de nuestros estudios y las futuras vías de investigación. Posteriormente, en la segunda parte de este tercer capítulo, pasaremos a describir una serie de estudios actuales que se han ocupado de investigar el tratamiento de los problemas y la R.P en los libros de texto de matemáticas, editados a partir de la reforma de un sistema educativo. Esta descripción nos permitirá conocer el estado actual de esta cuestión, tanto en nuestro país como a nivel internacional.

Cada uno de estos tres capítulos finaliza con una síntesis, cuyo propósito es destacar las ideas más relevantes que sustentan nuestra investigación, facilitando asimismo la lectura del marco teórico.

En los **Capítulos IV y V** se presentan nuestros estudios. Comenzamos estos capítulos exponiendo el objetivo general que se persigue en cada uno de ellos, así como los objetivos específicos y las preguntas de investigación asociadas. Tras las predicciones, exponemos de forma argumentada la elección del método, el procedimiento seguido y los materiales utilizados. Por último, se presentan los resultados de la investigación, que son discutidos a la luz de los resultados obtenidos en los estudios precedentes.

Finalmente, en el **Capítulo VI** se exponen las conclusiones que se derivan de ambos estudios. Asimismo, se plantean las implicaciones educativas que pueden extraerse a partir de este trabajo, las limitaciones, y las futuras vías de investigación que permanecen abiertas.

PRIMERA PARTE

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO I

APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE PROBLEMA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

I.1. Introducción

Sin duda, tal como señala Remesal (2006), los problemas han constituido el motor que ha impulsado el desarrollo de la civilización humana desde sus inicios. Sin embargo, a pesar del gran volumen de investigación dedicado a este tema, actualmente no contamos todavía con una definición última y definitiva de *problema* aceptada de forma unánime (Burkhardt, 2014; Van Meriënboer, 2013; Xenofontos, 2010; Zhu y Fan, 2006). De hecho, para algunos autores como Santos-Trigo (2007) resulta paradójico que, transcurridas más de tres décadas de una intensa investigación en R.P y de sucesivas reformas del sistema educativo, la definición e identidad del *problema* continúe estando actualmente en el centro de la discusión de la educación matemática. Parece ser, pues, que el tiempo transcurrido desde la década de los ochenta, momento álgido en la investigación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en general, y de los problemas y la R.P, en particular, no ha sido suficiente para llegar a una delimitación conceptual consensuada. Tanto es así que incluso "dentro de una misma cultura o en un mismo sistema educativo, los desarrolladores del currículum, los profesores, los investigadores en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y los matemáticos no comparten los mismos puntos de vista sobre lo que es un problema" (Arcavi y Friedlander, 2007, p.356).

El consenso surge, no obstante, cuando se hace referencia a la polisemia de este término, provocada por "la variedad de disciplinas que los examinan, de ámbitos en que se examinan, y de puntos de vista que se adoptan para ello" (Puig, 1996, p.19). Este hecho ha tenido como consecuencia que el campo de estudio de los problemas y la R.P se caracterice por su amplitud y por su heterogeneidad, cualidades enriquecedoras que muestran el interés que ha suscitado el tema, pero igualmente cualidades asociadas a la generalidad, y por tanto a la vaguedad y a la imprecisión, que han provocado que los problemas y la R.P se conviertan en "términos paraguas".

En este sentido, Schoenfeld (1992) afirma que: "la resolución de problemas se ha utilizado con múltiples significados, que se extienden desde resolver ejercicios rutinarios, hasta hacer matemáticas como un profesional matemático" (p.334). Para este autor, la multiplicidad de significados existentes, incluso en ocasiones contradictorios, ha tenido como consecuencia que la literatura sobre este tema sea difícil de interpretar.

Al respecto, Castro (2003), pone de relieve la falta de un significado unívoco y preciso con el que poder caracterizar la expresión *problema y R.P* dentro de la investigación en educación matemática, disciplina que el autor compara con “una hidra mitológica de múltiples cabezas que afloran en este cuerpo de conocimiento” (p.14). Es más, según este autor, la confusión aumenta al intentar construir una teoría para la R.P desde una perspectiva general de investigación, que incluya tareas tan dispares como: “la resolución de anagramas, razonamiento silogístico, colocación de cerillas, la torre de Hanoi, hacer cruzar lobos y corderos a una parte de un río, etc.” (p.14).

La diversificación de significados adquiere una importancia añadida, pues no sólo afecta a la investigación educativa, sus consecuencias también se dejan ver en el plano de la práctica. Así, según Santos-Trigo (2008), muchas de las propuestas curriculares internacionales identifican explícitamente la R.P como un eje vertebrador de los contenidos matemáticos, y como una actividad central para el desarrollo del pensamiento de los alumnos. Sin embargo, existe una falta de claridad con respecto al significado de organizar el currículum de matemáticas bajo la perspectiva de la R.P. Existe, pues, un amplio consenso en relación a la importancia de la R.P que contrasta con la ausencia de un acuerdo en relación con lo que significa resolver un problema (Juidías y Rodríguez, 2006).

Para Callejo y Vila (2004), el tratamiento de la R.P presenta un panorama desalentador en el contexto escolar, pues el término *problema* se ha convertido en una especie de “cajón de sastre” que “se ha venido utilizando para hacer referencia a una amplia tipología de actividades que se proponen al alumnado con finalidades muy dispares” (p.30). Asimismo, Contreras (2009) sostiene que bajo la aparente uniformidad del término R.P se esconde una gama de significados diferentes, de manera que: “nos será fácil encontrar a dos profesores que nos aporten, en esencia, una misma definición del término; un poco menos fácil que le otorguen el mismo papel en el currículo; y bastante difícil que, de hecho, utilicen de igual forma la resolución de problemas en sus aulas” (p.38). Para este autor, la pluralidad de significados se debe al abuso de los términos *problema* y *ejercicio* de forma indistinta. A este respecto, más recientemente Vicente (2013) apunta que: “si analizamos con detalle los problemas que resuelven los alumnos y el modo en que los resuelven, vemos que en muchas ocasiones el objetivo de la resolución de problemas parece limitarse únicamente a que ejerciten las operaciones aritméticas” (p.73).

En suma, podría afirmarse que el primer problema que trae un *problema*, valga la redundancia, sea su propia conceptualización. En cualquier caso, de acuerdo con Puig (1996), nuestra intención no es cerrar la discusión sobre lo que es verdaderamente un problema, asunto que como ya señaló el autor, carecería de sentido. El propósito de este capítulo se dirige a ofrecer al lector un panorama, necesariamente selectivo e incompleto, sobre las diferentes concepciones de problema y R.P que han ido surgiendo desde principios del siglo pasado[2] (p. ej. Köhler, 1925), hasta la actualidad (p. ej. Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen, 2018), deteniéndonos en aquellos aspectos que consideramos más relevantes respecto a los propósitos de nuestro trabajo. Se trata, en definitiva, de una aproximación a los conceptos de problema y R.P; de una visión global, que sirva a la vez de punto de partida y de espacio donde enmarcar las primeras ideas clave de nuestra tesis.

I.2. Los problemas y la resolución de problemas desde un punto de vista coloquial: un apunte

Los diccionarios, normativos y descriptivos, nos ofrecen un primer acercamiento al significado del término *problema*. En todos ellos aparece una gran variedad de usos o acepciones coloquiales. Sin embargo, coinciden en caracterizarlo como una cuestión o proposición que entraña alguna "dificultad", o conlleva cierta "adversidad", y que hay que "averiguar" (Diccionario de uso del español. María Moliner, 2013, p.2400); "aclarar" (Diccionario de la lengua española. Real Academia Española, 2014, p. 1788); o "vencer" (Diccionario del español actual. Seco, Andrés y Ramos, 2011, p.3663). De acuerdo con estas definiciones, el problema es presentado como una cuestión compleja o dificultosa, que supone un obstáculo o impedimento (primer rasgo); pero también de forma implícita, como una cuestión dinámica (segundo rasgo), que implica una acción retadora, una búsqueda o deliberación por parte del sujeto, esto es, su resolución[3].

Estos rasgos coinciden con las dos fases establecidas por Dewey (1933), en lo que el autor denominó "pensamiento reflexivo" que interviene en la R.P:

1. "Un estado de duda, de vacilación, de perplejidad, de dificultad mental, en la que se origina el pensamiento.
2. Y un acto de busca, de caza, de investigación, para encontrar algún material que esclarezca la duda, que disipe la perplejidad" (Dewey, 1933, p.28).

[2] Los problemas han formado parte de la educación matemática desde la antigüedad clásica. Sin embargo, no será hasta comienzos del siglo XX cuando la R.P en sí misma fue tematizada en la escuela (Stanic y Kilpatrick, 1987).

[3] Puig (1996) define el *proceso de resolución* como: "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (p.31). Codina y Rivera (2001), distinguen entre *resolución* y *solución*: la *resolución* es la acción o proceso de resolver el problema que tiene como meta la *solución* o *resultado.* Puig y Cerdán (1988), por su parte, matizan que dar por acabada la tarea no implica necesariamente que el resolutor haya encontrado la *solución* del problema.

Como más adelante observará el lector, existe una coincidencia entre las definiciones coloquiales y científicas respecto a estos dos rasgos. La mayor parte de las definiciones analizadas ponen el acento en la existencia de una tarea o situación caracterizada por su dificultad, y en la presencia de un sujeto que se enfrenta a ella. Ahora bien, ¿son la tarea y el sujeto los dos únicos elementos constitutivos de un problema?; ¿en qué consiste resolver un problema?; ¿qué diferencia existe entre un ejercicio y un problema?; ¿dónde radica la dificultad del problema?, dicho de otro modo, ¿qué hace que un problema sea difícil para un alumno?; ¿basta con el conocimiento matemático para "vencer" esa dificultad?; ¿qué tipo de ayudas pueden resultar efectivas para facilitar a los alumnos el proceso de R.P? y en última instancia, ¿cuál es el papel de los problemas en los libros de texto y en la escuela? A lo largo de esta tesis intentaremos arrojar luz sobre estas y otras cuestiones.

I.3. Los problemas y la resolución de problemas: focos, perspectivas y ámbitos de estudio

Al comienzo del capítulo, siguiendo a Puig (1996), apuntábamos que la complejidad en la conceptualización del término *problema* reside en la variedad de disciplinas, ámbitos y puntos de vista adoptados para abordar su estudio. Más tarde, señalábamos también que el propósito de este primer capítulo era presentar un panorama general sobre las distintas definiciones que se han dado de problema y R.P, reparando al mismo tiempo en aquellas ideas centrales de nuestra tesis. Para ello, tal como se muestra en la figura 1, hemos trazado un recorrido que parte de los elementos o componentes de la "tríada de la educación matemática" (Bishop, 2000), que constituyen los tres focos de investigación de esta disciplina, pero donde también hemos integrado de forma paralela, las distintas perspectivas que han abordado el estudio de los problemas y la R.P, así como los ámbitos desde los cuales se ha abordado su estudio.

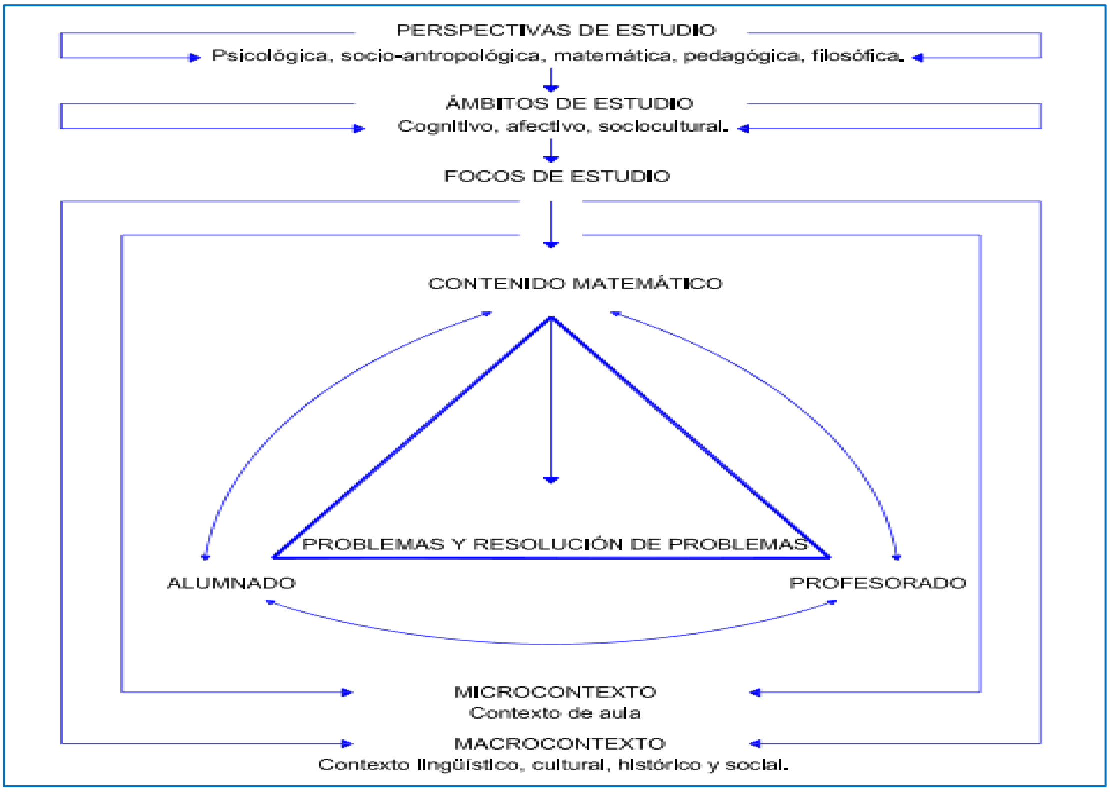


Figura 1. Focos, perspectivas y ámbitos de estudio de los problemas y la resolución de problemas.Elaboración propia.

I.3.1. Focos de estudio

De acuerdo con Bishop (2000), la educación matemática, como campo de estudio, puede definirse de una forma sencilla como: “el conjunto de relaciones entre una tríada de grupos de constructos que incluye el contenido matemático, el profesorado de matemáticas y el alumnado de matemáticas” (p.36). En esta tríada interactiva:

a) El *grupo contenido matemático* constituye un constructo extenso, ya que no sólo recoge el currículum intencional de las matemáticas, también se ocupa de la selección y la transposición didáctica al contexto educativo de los contenidos matemáticos. Además, este grupo incluye el entorno, que hace de la educación matemática un fenómeno cultural situado en un contexto social.

b) El *grupo alumnado* hace alusión tanto a los propios escolares como a su aprendizaje, con especial preocupación por aquellos alumnos que presentan dificultades de aprendizaje en matemáticas.

c) El *grupo profesorado* se refiere tanto a la figura del docente y a su enfoque didáctico, como al contexto social en el que opera, que influye en la interpretación que los profesores hacen de su propio rol.

Estos tres grupos conforman los tres focos de la investigación en educación matemática. Los tres interaccionan, y los tres se insertan en un contexto “micro”, la escuela, que recibe las influencias de la sociedad donde esta se ubica.

La tríada de Bishop (2000) constituye una visión amplia, que hace referencia a la educación matemática en general y, por consiguiente, a los tres focos de investigación presentes en el estudio de cualquier contenido matemático. Más específica es la propuesta de Puig (1996) que, siguiendo una especie de metáfora teatral, crea un sistema de categorización para organizar las distintas definiciones de problema y R.P, configurado por tres niveles de análisis o teorías de nivel I, II y III. Estos niveles difieren entre sí por la presencia-ausencia de los tres elementos que entran en la escena educativa, o según aquellos elementos en los que se pone el foco de atención, aunque intervengan otros:

- Nivel I: problema.
- Nivel II: problema, alumno.
- Nivel III: problema, alumno, profesor.

I.3.2. Perspectivas de estudio

Uno de los hitos que marcará el final del siglo pasado, especialmente el último cuarto de siglo, será la gran abundancia de literatura relacionada con la R.P. En la década de los años ochenta comienza a sistematizarse el estudio de los problemas y su resolución desde diferentes perspectivas. Concretamente, Kilpatrick (1985), que había caracterizado en 1969 la literatura sobre R.P hasta el momento de ateórica, asistemática y descoordinada, realizó una revisión retrospectiva de tipo disciplinar en la que distinguió cuatro perspectivas[4] bajo las cuales se había abordado hasta el momento el rol que juega el problema y su proceso de resolución:

a) La perspectiva psicológica destaca la idea de problema como *actividad* unida estrechamente al *sujeto* y a su aprendizaje.

b) La perspectiva socio-antropológica enfatiza la idea de problema como una tarea propia *de transacción o acuerdo,* concibiendo el aula de matemáticas como una situación social construida por los participantes.

[4] En nuestra revisión hemos incluido también la perspectiva filosófica por la relevancia de las aportaciones de autores como Agre (1982), Andler (1987) y Dewey (1933).

c) La perspectiva matemática subraya la idea de problema como co*nstrucción*; se entiende que toda la actividad matemática gira alrededor de un proceso de planteamiento y R.P.

d) La perspectiva pedagógica pone el acento en la idea de problema como *vehículo* desde una doble vertiente: *curricular,* el rol que desempeñan los problemas en la educación matemática, y *didáctica*, cómo enseñar a resolver problemas.

Dos años más tarde, Stanic y Kilpatrick (1987), argumentarán que los problemas pueden perseguir metas muy diferentes en la escuela, de manera que los objetivos planteados por el profesor determinarán el papel de la R.P en el aula. De acuerdo con esta premisa, Stanic y Kilpatrick trazan un recorrido histórico ligado al desarrollo de la psicología de la educación, la pedagogía y la didáctica de las matemáticas, con el fin de analizar y clasificar los diferentes modos de tratamiento que había recibido la R.P hasta ese momento, distinguiendo tres categorías, que no son mutuamente excluyentes, y que actualmente podemos encontrar, en mayor o menor medida, tanto en las prácticas docentes como en los libros de texto: problemas como *contexto,* como *habilidad* y como *arte.*

- Primera categoría: los problemas como *contexto*.

Esta primera categoría hace alusión al rol que juega la R.P dentro de situaciones concretas del aula. Dentro de ella podemos establecer un continuo que iría desde una vertiente ideal, problemas como *vehículo*, hasta lo que según Stanic y Kilpatrick (1987), podría denominarse desviaciones de esta vertiente ideal, problemas como *motivación, recreación y práctica rutinaria.*

- Los problemas como *vehículo*.

Los problemas como *vehículo* constituyen a la vez un objetivo y una vía para la R.P. Según Schroeder y Lester (1989), bajo esta perspectiva los problemas “no sólo se valoran como un propósito para el aprendizaje de las matemáticas, sino también como un medio fundamental de hacerlo” (p.33).

Esta opción está estrechamente ligada al *aprendizaje por descubrimiento* de Bruner (1962). Frente al *aprendizaje por recepción,* en el que el alumno recibe y asimila los conocimientos tal como se le presentan, esto es, de forma terminada, en el *aprendizaje por descubrimiento*, el profesor presenta los contenidos de forma incompleta o inacabada, con el fin de que el alumnado los asimile, reorganice y descubra relaciones o regularidades desde sus conocimientos previos. De esta manera, la enseñanza de un tema matemático comenzará con una situación problemática, que recogerá los contenidos clave del tema que se pretende trabajar y los procedimientos para trabajarlo. Para Bruner (1962), enseñar no es crear “bibliotecas vivientes”, sino más bien: “que los estudiantes piensen por ellos mismos, matemáticamente, a considerar cuestiones como lo hace un historiador, a tomar parte en el proceso de construir el conocimiento. El conocimiento es un proceso, no un resultado” (p. 34).

Coincidiendo con la llegada de la democracia, en un momento en que la R.P era considerada una cuestión menor, en España esta idea fue destacada por los Movimientos de Renovación Pedagógica (M.R.P)[5]. En concreto, el Grupo Cero de Valencia (1987), conceptualizó el problema como *“un viaje, y no un destino”* (p.93), enfatizando así el proceso de reflexión que implica la R.P, más que el producto o resultado.

Por otro lado, esta vertiente de problemas como *vehículo* fue respaldada por el Movimiento de la Educación Matemática Realista (*Realistic Mathematics Education*), iniciado por Freudenthal (1991). De acuerdo con Alsina (2009), son seis los principios fundamentales en los que se asienta este movimiento. De entre ellos, destacamos el primero, *principio de actividad,* por su relación con la idea de problema como *vehículo* asociada al *aprendizaje por descubrimiento*: las matemáticas se consideran una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder, y cuya finalidad es la *matematización*, es decir, hacer matemáticas más que aprenderlas como un producto terminado.

- Los problemas como *motivación*, *recreación y práctica rutinaria.*

La función de los problemas como *motivación* se dirige a despertar la curiosidad o llamar la atención hacia un nuevo concepto o procedimiento matemático introducido en el aula; por otro lado, el propósito de los problemas como *recreación* sería ofrecer una *diversión* tras el aprendizaje de ese concepto o procedimiento; mientras que el rol de los problemas como *práctica rutinaria* sería servir de contexto de aplicación de los contenidos matemáticos trabajados con una anterioridad más o menos inmediata, con el objetivo de asentar o reforzar lo que se consideran conceptos y destrezas básicas.

[5] Los M.R.P desde mediados de los años setenta constituyeron un revulsivo en la llamada *matemática moderna*, caracterizada por su alto nivel de abstracción, su lejanía a las situaciones de la vida real y un sistema tradicional de enseñanza (teoría seguida de ejercicios de aplicación). En definitiva, un currículum construido “de arriba-abajo”, donde tanto los programas de matemáticas como los libros de texto estaban totalmente dominados por la *matemática moderna*. De ahí que se comiencen a elaborar materiales alternativos, radicalmente opuestos a los libros de texto de las editoriales tradicionales, que constituían los auténticos intérpretes del currículum oficial (Callejo, 2015; Deulofeu y Gorgorió, 2000).

Esta última vertiente es la que con mayor frecuencia se utiliza actualmente para la organización didáctica de las sesiones de clase. Como señala Ruiz (2013), el enfoque organizativo de la "lección" se basa en la siguiente secuencia de pasos o momentos: teoría + ejemplo + práctica rutinaria, y a veces, la introducción de un ejercicio contextualizado, que no necesariamente un problema:

a) en la teoría se proporcionan las definiciones y los principales conocimientos asociados al tópico curricular;

b) en el siguiente paso, se proponen ejemplos que ilustran los conceptos y procedimientos asociados;

c) el tercer paso corresponde a la propuesta de ejercicios similares a los ejemplos en cuanto a su grado de dificultad, con ligeras variaciones;

d) al final se añade algún ejercicio contextualizado o "problema", cuyo nivel de complejidad no dista mucho del utilizado en los ejemplos y ejercicios.

Esta estructura organizativa es similar a la propuesta por los libros de texto de matemáticas de todas las editoriales analizadas en nuestros estudios. A pesar de que en el currículum oficial se afirma que los procesos de R.P "constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática (…), la piedra angular de la educación matemática (…)" (Real Decreto 126/2014, p.19386), los problemas quedan supeditados a la operación que se está estudiando en ese momento. Obsérvese como ejemplo la figura 2, donde se presenta la secuencia organizativa que sigue la editorial Anaya (3º curso, 2014, p.19) para tratar el tópico de la suma y la resta, que no difiere apenas del tratamiento de otras editoriales.

PRIMER PASO TEORÍA	SEGUNDO PASO EJEMPLO	TERCER PASO PRÁCTICA RUTINARIA	CUARTO PASO EJERCICIO CONTEXTUALIZADO (PROBLEMA)
¿QUÉ SABEMOS? Para sumar o restar números, se colocan uno debajo del otro, haciendo coincidir las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.	C D U + 7 2 5 2 0 4 C D U - 5 6 7 1 0 3	Coloca los números y calcula: a) 725 + 204. b) 562 + 210. c) 255 – 103. d) 748 – 320.	El año pasado, la altura de una planta era de 130 centímetros. Si ha crecido 27 centímetros, ¿cuál es su altura actual? 130 – 27. 130 + 27.

Figura 2. Secuencia organizativa de la unidad didáctica "La suma y la resta" Adaptada de Anaya,3º curso,2014,p.19.

En cualquier caso, más allá del área de matemáticas, los libros de texto de las diferentes áreas curriculares suelen presentar una estructura organizativa común, caracterizada como indican Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez (2010), por "una absoluta homogeneidad formal" (p.252).

- Segunda categoría: los problemas como *habilidad*.

En esta categoría, la R.P se entiende como una habilidad, que debe enseñarse junto con otras habilidades matemáticas. Así, bajo este planteamiento, la R.P se concibe como un conjunto o suma jerárquica de subhabilidades y estrategias heurísticas, pasos o etapas[6], que según Stanic y Kilpatrick (1987), son con frecuencia malinterpretadas, de manera que el proceso de R.P se convierte en un ejercicio rutinario, que se resuelve aplicando un algoritmo sin la intervención del razonamiento[7]. Esta cuestión será analizada en el segundo estudio de esta tesis.

- Tercera categoría: los problemas como *arte*.

En esta última categoría, toda la actividad del aula de matemáticas se dirige al desarrollo de la capacidad de R.P, que constituye el eje vertebrador y el objetivo último del currículo de matemáticas. Aunque existe una estrecha relación entre las categorías *problemas* como *arte* y como *vehículo*, según Remesal (2006), no son totalmente identificables. En la primera, se asimila totalmente la R.P con las matemáticas, puesto que se entiende que la R.P constituye la propia naturaleza de estas; sin embargo, en la segunda, a pesar de la relevancia que se concede a la R.P, esta actividad continúa siendo un "subconjunto" de las matemáticas, utilizado para trabajar otros conceptos y procedimientos matemáticos.

Esta visión de la función de los problemas como *arte* fue defendida por Halmos (1980), que en un artículo titulado *"The heart of mathematics"*, se preguntaba *en qué consisten realmente las matemáticas*. Para este autor, axiomas, teoremas, demostraciones, conceptos, fórmulas, etc., son elementos esenciales sin los cuales las matemáticas no podrían existir, sin embargo: "ninguno de ellos está en el corazón del sujeto. La razón princi-

---

[6] En 1910 el filósofo y pedagogo Dewey describió las etapas del pensamiento en la R.P, que fueron reelaboradas sustancialmente en 1933 en su obra *Cómo pensamos*: 1) Identificación de la situación problemática; 2) Definición precisa del problema; 3) Análisis medios-fines. Plan de solución; 4) Ejecución del Plan; 5) Asunción de las consecuencias; 6) Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización. De acuerdo con Castro (2008), las fases o etapas propuestas por Dewey son un "preludio" o antecedente de las que propuso Pólya en 1945, una guía de acción para que el profesor pudiera ayudar a sus alumnos de forma efectiva en el proceso de R.P: 1) Comprender el problema; 2) Concebir un plan; 3) Ejecutar el plan; 4) Verificar la solución obtenida.

[7] A pesar del tiempo transcurrido desde la observación de estos autores, los modelos de R.P propuestos por los libros de texto actuales no tienen en cuenta el razonamiento como paso necesario en el proceso de resolución. En el estudio de Sánchez y Vicente (2015), donde se toma como referencia el modelo de R.P propuesto por Verschaffel, Greer y De Corte, (2000), se concluye que, frente al modo de resolución genuino, que incluye el razonamiento, generalmente los libros de texto hacen uso del modo superficial.

pal de la existencia de los matemáticos es resolver problemas, por tanto, de lo que se componen realmente las matemáticas es de problemas y soluciones" (p.519). Posteriormente, en otro artículo, caracterizaba al matemático como "un artista y no como una mera calculadora" (Halmos, 1991, p.34).

En esta línea de pensamiento se expresó también el matemático De Guzmán (1984), para quien la R.P debía constituir el eje alrededor del cual giraran las matemáticas. Según este autor, se debería ofrecer a los alumnos la posibilidad de crear hábitos de pensamiento adecuados para la R.P, matemáticos y no matemáticos, pues: "del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas" (p.55). Igualmente, el matemático Santaló (1994) apoyó este enfoque cuando afirmaba que: "enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas" (citado en Corbalán, 2000, p.76).

En resumen, actualmente existe un acuerdo en distinguir tres perspectivas sobre el papel que desempeña la R.P en la enseñanza de las matemáticas (Blanco y Cárdenas, 2013; Cárdenas y Blanco, 2015; Ryve, 2006): (1) enseñanza *para* la R.P; (2) enseñanza *sobre* la R.P; y (3) enseñanza *vía* o *a través* de la R.P:

(1) Enseñanza *para* la R.P (el problema como *"práctica rutinaria"*). Se trata de la perspectiva tradicional respecto al papel de la R.P como aplicación de la teoría previamente estudiada. Esta perspectiva, predominante en los libros de texto actuales, se refleja al ubicar los problemas al final de cada unidad didáctica, o después de la introducción de algún concepto o algoritmo.

(2) Enseñanza *sobre* la R.P (el problema como *"habilidad"*). Se centra en las diferentes fases o pasos en el proceso de R.P. Su objetivo es que los alumnos adquieran determinadas habilidades, técnicas y actitudes que les conduzcan a ser buenos resolutores. Así, esta perspectiva se dirige hacia la enseñanza de estrategias específicas sobre la R.P que favorezcan la reflexión sobre el propio proceso de resolución. Esta perspectiva también se incluye en los libros de texto actuales, sin embargo, como veremos más adelante, los modelos de R.P propuestos por los libros de texto para enseñar a los alumnos a resolver problemas se caracterizan, en general, por su superficialidad y su falta de sistematicidad (Sánchez y Vicente, 2015).

(3) Enseñanza *vía* o *a través de* la R.P. Aquí podríamos situar dos perspectivas apuntadas por Stanic y Kilpatrick (1987), problemas como *vehículo* y como *arte,* con el matiz diferenciador entre ambas señalado por Remesal (2006). Bajo esta perspectiva, que considera la R.P como el aspecto central de las matemáticas, el punto de partida es el propio problema, ubicado normalmente al comienzo de la unidad didáctica, cuya resolución por parte del alumno irá provocando el desarrollo de determinadas técnicas matemáticas. En cualquier caso, la consideración de la R.P como un aspecto nuclear, establecido en diferentes documentos curriculares oficiales del área de matemáticas[8], no acaba de reflejarse ni en los libros de texto actuales, ni en las prácticas docentes.

I.3.3. Ámbitos de estudio

Otros factores que han contribuido a la multiplicidad de interpretaciones de los términos problema y R.P han sido los ámbitos desde los que se ha abordado su estudio, esto es, las dimensiones cognitiva, afectiva y sociocultural. A este respecto, Lesh y Zawojewski (2007) señalan que: "los patrones que forman la identidad en la resolución de problemas son complejos; involucran patrones de motivación variados, de reacciones afectivas, de desarrollo cognitivo y social en diferentes circunstancias dentro de una tarea dada" (p.776). Para una visión general de estos patrones identitarios hemos de remontarnos a los antecedentes de lo que fue denominado por De Corte, Greer y Verschaffel (1996), "las dos oleadas de la revolución cognitiva".

Desde los años veinte del siglo pasado, el conductismo fue el modelo dominante en la educación general y, por consiguiente, en la educación matemática. La perspectiva behaviorista centra su interés en la conducta directamente observable, que será estudiada en términos de estímulos (sucesos ambientales) y respuestas externas (comportamientos) sin tener en cuenta los procesos internos (pensamientos, sentimientos, intenciones del alumno), que subyacen al proceso de enseñanza-aprendizaje. Es más, la introspección, utilizada como método de investigación por las corrientes anteriores, estructuralismo y funcionalismo, supondrá un obstáculo para los conductistas. En consecuencia, el estudio de las

[8]Tanto en el Real Decreto 1513/2006, que regulaba las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria en la Ley Orgánica de Educación (2006), como en el Real Decreto 126/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria en la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad de la Educación (2013), se señala que los procesos de R.P: "constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática" (p. 43096 y p.19386). Igualmente, en ambos documentos se establece que la R.P debe constituir el "eje vertebrador" y "la columna vertebral" del resto de bloques de contenidos.

variables cognitivas y afectivas será desplazado a un lugar secundario, al ser consideradas procesos internos y subjetivos, y por ello difíciles de observar, cuantificar y controlar (De Corte et al., 1996).

Desde esta perspectiva, las matemáticas son percibidas como una materia abstracta, alejada de la realidad. Los contenidos matemáticos constituyen un conglomerado de datos y reglas, técnicas o procedimientos para su aplicación (visión instrumental) cuyos coletazos todavía pueden verse en los libros de texto actuales. En cuanto a los agentes educativos, el profesor, a través de la clase magistral transmitirá los contenidos que aparecerán prescritos en el libro de texto; la función del alumno, como mero receptor pasivo, consistirá en la memorización de los conocimientos (absorción y almacenamiento) a través del aprendizaje repetitivo. Así, para la teoría de la absorción, la matemática es concebida como un producto terminado y presentado desde el exterior, que el alumno debe imprimir en su mente a través de la ejecución reiterativa de ejercicios[9].

Un ejemplo tópico, pero no por ello irrelevante, es el aprendizaje de la noción de multiplicación. Es obvio que mediante repeticiones sucesivas un alumno de siete u ocho años aprenderá las tablas de multiplicar. Ahora bien, ¿conseguirá con ello transferir este aprendizaje a nuevos contextos?; ¿habrá comprendido que multiplicar es más ventajoso que sumar?

Con la "primera oleada de la revolución cognitiva" (De Corte et al., 1996), en la década de los años setenta, comienza a surgir un interés creciente hacia la comprensión de los procesos mentales que se ponen en marcha durante la ejecución de tareas matemáticas complejas, produciéndose así *"un giro hacia lo cognitivo"* (Sarabia e Iriarte, 2011, p.26). De igual manera, este interés se centra en la investigación sobre la repercusión de los principios de la teoría de la absorción en las creencias distorsionadas que alberga el alumnado sobre el significado de *aprender matemáticas*, sobre los estados emocionales que experimenta y, sobre las conductas que desarrolla (véase figura 3). Sin embargo, en la mayoría de estos estudios se establece una frontera entre el constructo cognitivo y el afectivo-social. Por esta razón, una de las principales críticas que recibe la psicología cognitiva de estos momentos es su interés por los aspectos cognitivos puros y la evitación de los aspectos afectivos y contextuales (Sarabia e Iriarte, 2011).

[9] A principios del siglo XX, desde el enfoque conductista, Thorndique destacó que el aprendizaje matemático debería basarse en "ejercicios", es decir, en la práctica continuada y masiva de las operaciones necesarias para resolver un problema. De este modo, se ponía el énfasis en el aprendizaje repetitivo frente al significativo.

PRINCIPIOS DE LA TEORÍA DE LA ABSORCIÓN

↓

"Las matemáticas son abstractas, basadas en reglas y alejadas de la realidad"
"Las matemáticas no tienen por qué tener sentido"
"Los niños aprenden rápidamente a identificar las matemáticas con la aritmética, en vez de hacerlo con la búsqueda de relaciones, es decir, con la resolución inteligente de problemas".

↕

CREENCIAS DEL ALUMNADO
SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Aprender matemáticas significa: "memorizar datos y procedimientos de manera preestablecida y rígida"
"La comprensión no desempeña ningún papel en las matemáticas"
"Cualquier cosa que no sea calcular es incorrecto o malo"
"Todos los problemas tienen que tener una única respuesta correcta"
"Sólo hay una manera correcta de resolver un problema".

↕

CREENCIAS DEL ALUMNADO SOBRE SÍ MISMO

"Los alumnos listos siempre responden correctamente y con rapidez"
"La incapacidad para responder correctamente indica una deficiencia mental"
"Una incapacidad total para responder es señal de una estupidez absoluta"
"La gente lista lo sabe todo, sólo preguntan los tontos"
"Soy incapaz de resolver tareas matemáticas, soy tonto"

↕

ESTADOS EMOCIONALES Y CONDUCTAS
QUE EXPERIMENTA EL ALUMNADO

Actitudes negativas hacia la asignatura; estados de ansiedad; impulsividad en las respuestas; conductas de autoprotección que minimizan la ansiedad inmediata, pero que refuerzan conductas de "disimulo" o conductas de "evitación": "no hacer nada", "no quiero que nadie vea lo tonto que soy"

Figura 3. Efectos de los principios de la teoría de la absorción sobre la dimensión afectiva del alumnado.Adaptada de Baroody, 1997, pp.75-84.

Durante este período, existe un consenso en señalar que la dimensión afectiva es más complicada de estudiar que la cognición pura, por ello, los fenómenos afectivos son eludidos por la investigación de ese momento. A este respecto, McLeod (1992) afirmará que "el deseo de eliminar complejidad ha sido una de las razones centrales para no prestar atención a las características afectivas" (p.577). Asimismo, estudios destacados de este período concluyen que las variables afectivas, además de poseer una alta complejidad, no tienen un peso relevante a la hora de explicar cómo los alumnos aprenden matemáticas (Nelson, 1993).

Durante la "segunda oleada de la revolución cognitiva" (De Corte et al., 1996), en la década de los ochenta, se desarrollan distintos modelos teóricos que intentarán explicar cómo los sujetos resuelven los problemas aritméticos, es decir, cuáles son los procesos cognitivos que se desarrollan desde el momento en que se presenta el problema hasta que se produce una respuesta numérica. Todos estos modelos tienen en común haberse desarrollado dentro del paradigma del procesamiento de la información, esto es, mediante programas de simulación en los que se establece una analogía entre la mente humana y el ordenador. También es común a todos ellos la idea de que durante la resolución de un problema se crea una representación mental del enunciado a partir de las relaciones que se establecen entre las cantidades, es decir, en función de la estructura semántica o matemática del problema (combinación, cambio, comparación, igualación). Ahora bien, estos modelos difieren, como veremos en el segundo capítulo de esta tesis, en el tipo de conocimientos necesarios para crear esa representación interna. Mientras que los modelos computacionales clásicos inciden de forma exclusiva en el conocimiento conceptual o matemático, para los modelos posteriores, en la construcción de esa representación mental, además del conocimiento conceptual intervienen otros tipos de conocimientos no estrictamente matemáticos. Así, para los modelos de R.P posteriores, la comprensión del problema como texto, esto es, la comprensión de la situación cualitativa descrita en el enunciado, constituye un aspecto necesario para una correcta creación de la representación mental del problema.

Por lo que se refiere a los ámbitos afectivo y sociocultural, Nesher y Kilpatrick (1990), manifestaron que la investigación en el aprendizaje de las matemáticas no podía prescindir de la dimensión social, ni siquiera cuando tiene lugar el aprendizaje individual, donde media la influencia del libro de texto:

> La totalidad del aprendizaje de las matemáticas tiene lugar dentro de circunstancias sociales. Este puede ir desde el aprendizaje individual, donde las influencias sociales se experimentan a distancia, siendo mediadas por el texto de un autor, hasta el aprendizaje en grupo, donde las influencias sociales son inmediatas. Todos los profesores, estudiantes y observadores educativos saben que existen muchas influencias sociales e interpersonales que tienen lugar en la clase de matemáticas. Por lo tanto, es imperativo que los investigadores intenten interpretar el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva social, si es que la investigación ha de tener alguna validez y credibilidad para el contexto del salón de clase (Nesher y Kilpatrick, 1990, p.139).

En 1983, Schoenfeld escribió un artículo donde defendía la tesis de que la conducta "puramente cognitiva" y totalmente libre de factores afectivos o sociales, entre otros, era extremadamente extraña. No obstante, advertía que las tesis que sostenía eran "altamente especulativas", y que las evidencias probatorias eran prácticamente "anecdóticas" (Tárraga, Fernández y Pastor, 2013). Sin embargo, a finales de la década de los ochenta, una parte importante de la investigación en educación matemática comienza a centrarse en la importancia de los aspectos afectivos[10] y socioculturales[11] en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La coincidencia de ambos tipos de investigación no es en absoluto casual, pues la dimensión afectiva se manifiesta en los contextos de interacción social y cultural, en un proceso de construcción conjunta y compartida de los conocimientos. Por tanto, indagar en la relación afectiva hacia las matemáticas demanda de la comprensión del contexto socio-cultural, tanto dentro como fuera del contexto escolar. De hecho, para la corriente socio-constructivista,[12] si la dimensión social y cultural tiene un impacto en el desarrollo cognitivo del alumno, este impacto puede extrapolarse al ámbito de la afectividad (Valencia, Páez y Echevarría, 1989).

Así, desde finales de la década de los ochenta hasta la actualidad, se ha desarrollado un número considerable de investigaciones[13] en lo que se ha venido en llamar el "dominio afectivo o alfabetización emocional matemática". Estas investigaciones, producto de la conjunción de la perspectiva cognitiva y socio-constructivista, han mostrado que entre los factores cognitivos, afectivos y socioculturales existen influencias recíprocas (Blanco, 2012).

Siguiendo a Sarabia e Iriarte (2011), estas investigaciones se dirigen a indagar en los factores contextuales esenciales en la formación y desarrollo del dominio afectivo respecto al aprendizaje matemático. Se entiende que el dominio afectivo está constituido por tres descriptores básicos: las actitudes y las creencias hacia las matemáticas, y la repercusión de estas en los estados emocionales hacia las mismas. Igualmente, se entiende que los factores contextuales se refieren tanto a elementos microcontextuales (contexto escolar, familiar) como macrocontextuales (contexto social, cultural). El propósito fundamental de la inves-

[10] El dominio afectivo constituye un extenso rango de estados de ánimo diferentes de la pura cognición, e incluye cuatro descriptores básicos o categorías de afecto ampliamente aceptadas por la investigación actual (Blanco, 2012; Gómez-Chacón, 2010; Sarabia e Iriarte, 2011.) Las tres primeras, actitudes, emociones y creencias, fueron identificadas por McLeod (1989,1992). Más tarde, De Bellis y Goldin (1997), añadieron un cuarto elemento, los valores éticos y morales, que influyen en la elección de motivaciones y prioridades de los alumnos.

[11] La importancia de la dimensión sociocultural ha sido puesta de relieve por numerosos estudios que van desde el análisis de contextos más reducidos (microcontextos), hasta contextos más amplios (macrocontextos). Los primeros se centran en el contexto de aula y analizan cómo esta cultura puede influir negativamente en la conducta matemática de los estudiantes a través de la enculturación (Bishop, 1999, 2005; Lerman, 1994). Entre los segundos, destacan los estudios transculturales que comparan la práctica matemática entre distintos países (véase una revisión en Robitaille y Travers, 1992); asimismo, toda la corriente etnomatemática liderada en Brasil por D´Ambrosio (1993, 2011); o la escuela nórdica de la educación matemática crítica, Mellin-Olsen (1987) en Noruega, y Skovsmose (1999) en Dinamarca.

[12] Según Valencia et al. (1989) son proposiciones básicas de la corriente socio-constructivista: 1. Las estructuras sociales determinan la emoción. 2. La determinación social de la emoción explica que haya diferencias emocionales entre culturas y subculturas. 3. La persona construye la emoción a partir de normas sociales. 4. Las emociones tienen una función social.

[13] Blanco (2012) ha realizado una revisión de las investigaciones sobre la relación entre el dominio cognitivo y el dominio afectivo en la educación matemática. En Gómez-Chacón (2010); Mellado, Blanco y Borrachero (2012); Sarabia e Iriarte (2011), se puede encontrar una síntesis de las principales aportaciones de la investigación sobre las influencias del ámbito afectivo en la educación matemática.

tigación bajo este paradigma será el análisis de la influencia de los estados emocionales de los alumnos ante tareas matemáticas de alta complejidad como la R.P. Con este fin, se desarrollarán modelos teóricos sustentados en este paradigma, (psicología cognitiva y aproximación socio-constructivista) cuyos máximos exponentes son Mandler (1989), McLeod (1989, 1992) y Goldin (1982).

La década de los ochenta supuso, pues, un punto de inflexión en el estudio del campo de la educación matemática, gracias al surgimiento de un nuevo cuerpo de investigación dirigido a comprender las dimensiones cognitiva y afectiva en los contextos sociales donde tienen lugar. Además, el impulso en la investigación de los factores afectivos se acompañó de la publicación de documentos con propuestas teóricas, como el Informe Cockcroft (1985), donde se manifestaba la necesidad de renovar el currículum de matemáticas considerando, entre otros aspectos, la relevancia de las actitudes como determinantes de los logros del alumnado, y las emociones como respuestas afectivas vinculadas a la consecución o no de dichos logros. En síntesis, estas son algunas ideas que se ponían de relieve en este informe:

- El aprendizaje de la asignatura de matemáticas conlleva la adopción de unas actitudes que, "una vez formadas son persistentes y difíciles de cambiar" (punto 345, p. 125). En este sentido, el papel del profesor es esencial puesto que, "aun de modo inconsciente, está transmitiendo un mensaje que influye, sin duda, en las actitudes de los alumnos" (punto 345, p.125).
- "Las matemáticas constituyen un área especialmente vulnerable a las prácticas docentes insatisfactorias. No hay un área de conocimiento en la que el profesor pueda influir en mayor medida sobre las actitudes y la comprensión de los alumnos que las matemáticas" (punto 619, p.227).
- Además, según este informe, las actitudes negativas que pueden generarse no solamente son inhibidoras del aprendizaje, sino también persistentes durante la vida adulta (punto 345, p.125). De hecho, en la descripción del estudio que dio origen al informe se manifestaba que, si bien es cierto que muchas personas son capaces de enfrentarse con confianza a situaciones cotidianas que exigen el uso de las matemáticas, muchas otras ante tareas aparentemente simples y fáciles experimentan "sentimientos de ansiedad, impotencia, miedo e incluso culpabilidad" (punto 20, p.9).

El Informe Cockcroft se publicó en un momento en que en España se debatía cuál debía ser el papel de las matemáticas en el currículum escolar (Rivière, 2002). Su influencia fue tan decisiva que, en muchos documentos oficiales, incluso en las leyes educativas posteriores a la publicación de este informe se recogieron, en mayor o menor medida, las ideas y argumentos expresados en torno a la importancia de los factores afectivos. Así, la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990), estableció en su artículo 1 que el sistema educativo debía orientarse hacia la consecución del pleno desarrollo de la personalidad del alumno, situando la dimensión afectiva en el mismo nivel que la cognitiva. En esta ley se definieron los objetivos educativos en términos de capacidades, concediendo una especial importancia al aprendizaje de procedimientos y actitudes. Entre los objetivos generales del área de matemáticas, figuraba el siguiente: "Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana. Disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones" (R.D. 1006 /1991, p.31).

Posteriormente, la Ley Orgánica de Educación (LOE, 2006), tuvo como pretensión en el área de matemáticas, no sólo transmitir contenidos conceptuales y procedimentales, sino ir más lejos desarrollando unas actitudes, tendencias, valores y sentimientos positivos hacia esta disciplina (Sarabia e Iriarte, 2011). En el preámbulo de esta ley se consideraba la educación como el medio más adecuado para la conformación de la identidad personal del alumno "integrando la dimensión cognoscitiva, la afectiva y la axiológica" (LOE, 2006. Preámbulo, p.4). Por último, en la actual Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE, 2013), se persigue la potenciación del aprendizaje por competencias clave, que supone según esta ley, "una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales" (R.D.126/2014, p.2). Más adelante, al referirse al currículo del área de matemáticas se afirma que se ha formulado "partiendo del desarrollo cognitivo y emocional en el que se encuentra el alumnado de esta etapa, de la concreción de su pensamiento, de sus posibilidades cognitivas, de su interés por aprender y relacionarse con sus iguales y con el entorno" (R.D. 126/2014, p.32). Asimismo, uno de los contenidos del área se refiere a la: "Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico" (R.D. 126/2014, p.35).

Por otro lado, nos gustaría traer aquí las manifestaciones de algunos autores que, en diferentes décadas, se han hecho eco de las consecuencias sociales y afectivas, al priorizar, como señala Valero (2012), los aspectos de la cognición e intentar explicar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde visiones reducidas.

No cabe duda de que tradicionalmente las matemáticas han sido la materia más prestigiosa a nivel social, e incluso la materia a la que se le ha atribuido un valor predictivo sobre el éxito social futuro de los estudiantes, en función del nivel de rendimiento académico en la escuela. Así lo expresó Guerrero (1989), cuando afirmaba: "la realidad es que permanece muy extendido el 'mito de las matemáticas', según el cual los niveles de inteligencia, el triunfo social e incluso las expectativas del futuro bienestar están en relación directa con las buenas calificaciones en esta área" (p.57).

Rivière, en 1990, escribía un capítulo sobre las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva cognitiva, pero desde las primeras páginas admitía, por un lado, la importancia del componente afectivo: "para muchos alumnos, la experiencia de las matemáticas escolares no es fuente de satisfacciones, sino de frustraciones y sentimientos despreciativos" (p.155); y por otro lado, la importancia del componente sociocultural: "desde su misma constitución como saber deductivo, la matemática se revistió de un cierto carácter elitista y selectivo que, desafortunadamente, aún no ha perdido del todo (…). Las matemáticas constituyen actualmente el 'filtro selectivo' básico de todos los sistemas educativos" (p.155).

Desde la perspectiva crítica, Giménez (2001), sostenía la idea de que las matemáticas se asocian a alguna suerte de "don", "talento natural" o "habilidad especial", contribuyéndose con ello a convertirla en una disciplina exclusiva y excluyente: exclusiva, porque "son raros los casos en los que se aprecia un interés natural por las matemáticas, los *dotados*; y excluyente, porque "se convierten en un medio particularmente apropiado para la selección social, dejando de lado la experiencia de aprendizaje colectivo que debe impartirse" (p.20).

En la misma línea de pensamiento, Pérez Echevarría (1994), ponía de manifiesto que tradicionalmente, frente a otras materias escolares, las matemáticas y la R.P matemáticos han implicado la participación de determinadas capacidades intelectuales: "un alumno podía aprobar la historia simplemente 'estudiando' (es decir 'memorizando de forma mecánica'), pero para aprobar las matemáticas también era necesario 'comprenderlas' y para comprenderlas 'se tenía que valer' o se tenía que ser inteligente" (p. 45).

Tanto Bishop (1999) como Hilton (2000), coincidían en las repercusiones emocionales que provoca la enseñanza de las matemáticas en la escuela: sentimientos de incompetencia, desagrado, e incluso de fobia. Asimismo, coincidían en un segundo tipo de repercusiones de orden social, consecuencia de los sentimientos negativos que las matemáticas despiertan. Al respecto, según Bishop (1999), "en muchos países es totalmente aceptable, en el ámbito social, confesar la ignorancia que se tiene de las matemáticas, fanfarronear sobre la propia incapacidad para enfrentarse a ellas" (p.15). Para Hilton (2000), muchos adultos, después de años enfrentándose a las matemáticas, sólo se sienten cómodos con las operaciones básicas de la aritmética elemental. Estas personas, según el autor: "son propensas a hacer pública su falta de conocimiento matemático como si fuera una virtud positiva, creando así la absurda leyenda de que ser matemáticamente analfabeto es incluso encomiable" (p.79).

Estas ideas de las matemáticas como factor de exclusión también fueron recogidas en el informe Cockcroft (1985), al que aludíamos anteriormente, que se hizo eco de las críticas "no del todo infundadas, según las cuales las matemáticas cumplen un importante papel de selección dentro del currículo escolar" (prólogo, p.8). Este informe no sólo supuso un punto de inflexión a la hora de destacar la importancia de los aspectos afectivo-sociales y su vínculo con los aspectos cognitivos, constituyó a su vez un revulsivo en el ámbito de la educación matemática, y el punto de partida de multitud de trabajos que se desarrollaron posteriormente. A nuestro juicio, quizá su principal mérito fue sacar a la luz cuestiones de diversa índole que todavía permanecen en el centro de los debates pedagógico-didácticos, y que ocupan buena parte de la investigación actual.

El informe Cockcroft fue elaborado con el propósito de analizar la situación de las matemáticas en el sistema educativo de Gran Bretaña, por tanto, como señala Rivière (2002), muchas de sus conclusiones y reflexiones no se podían transferir a nuestro sistema educativo, sin embargo, otras muchas sí. En concreto, el prólogo, redactado por Joaquín Pérez Navarro, constituye un lúcido análisis del sistema educativo español en aquel momento, donde se ponían de manifiesto, entre otras cuestiones, la necesidad de nuevos diseños curriculares; la inadecuada formación inicial de los profesores; o la escasez del presupuesto dedicado a la educación por parte de la administración educativa, que se reflejaba entre otros aspectos, en la insuficiencia de medios y facilidades para la formación continua del profesorado. Del mismo modo, se cuestionaba la brecha teoría-praxis, argumentando que, si bien la investigación didáctica llevada a cabo por los especialistas es una ayuda valiosa, "ni aborda todos los problemas que se plantean en el aula, ni sus resultados tienen en general una aplicabilidad directa" (prólogo, p.10). Se proponía, finalmente, como respuesta a muchos de los problemas de la educación matemática de aquel momento, *la propia innovación y experimentación en el aula*, que según Pérez Navarro estaba infravalorada, así como otros instrumentos de cambio e innovación, *los proyectos de desarrollo curricular* diseñados por los propios profesores. A este respecto, el autor señalaba: "conviene hacer notar que, si bien el modo de financiación de estos proyectos es variable, en general su estructura y objetivos los alejan de la lógica del beneficio comercial, constituyéndose así en una valiosa alternativa al libro de texto tradicional" (prólogo, p.10).

Por otro lado, en el propio texto de un informe extenso de casi cuatrocientas páginas se justificaba la necesidad de las matemáticas en la vida, la presencia de estas en la escuela, y se ahondaba en los diferentes factores que facilitaban o dificultaban su proceso de enseñanza-aprendizaje. En referencia al primer aspecto central de esta tesis, la R.P, el informe incidía en estos puntos:

- La necesidad de aplicar las matemáticas a las situaciones cotidianas: "las matemáticas sólo son útiles en la medida en que puedan aplicarse a una situación concreta" (punto 249, p.90).
- Considerar la R.P como una actividad consustancial a las matemáticas (punto 249, p.90).
- Concebir los problemas como una tarea diferente a la repetición de los ejercicios ya practicados (punto 321, p.116).
- Valorar el planteamiento (invención) de los problemas por parte de los alumnos como una tarea compleja que no debe subestimarse (punto 229, p.83).

Con respecto, al segundo aspecto central de esta tesis, los libros de texto, se sugería que:

- (Los libros de texto) "han de emplearse siempre con cuidado y en función de las necesidades de los alumnos" (punto 313, p.113). Se recomendaba flexibilizar su uso, y se añadía que: "ningún libro de texto, por bueno que sea, será un instrumento de validez universal; siempre habrá que emprender actividades adicionales de índole muy diversa" (punto 313, p.114).

En conclusión, nos gustaría insistir en la relevancia de este informe puesto que, a pesar de los años transcurridos desde su publicación, todavía permanece sin dilucidarse en la práctica docente la respuesta a dos cuestiones esenciales, que fueron planteadas por este informe en la década de los años ochenta:

- "¿Qué matemática han de aprender los alumnos?"
- "¿Cómo han de enseñarse?" (prólogo, p.13).

I.4. El concepto de problema y resolución de problemas desde la tríada de la educación matemática

Con el objeto de aproximarnos al concepto de problema y R.P, hemos optado por una estructura organizativa que parte de los distintos focos de estudio de la educación matemática: el contenido, el alumno, el profesor y el contexto donde se produce la interacción entre estos elementos. A su vez, hemos intentado integrar las diferentes perspectivas y ámbitos de estudio que acabamos de describir, puesto que es aquí donde cobran su verdadero sentido. Así, nuestro propósito es doble: por un lado, establecer una conexión entre los focos, perspectivas y ámbitos, de manera que el lector comprenda que no se trata de elementos aislados, sino de visiones globales acerca de la educación matemática, en general, y de la R.P, en particular; y, por otro lado, determinar los efectos derivados en la práctica educativa de algunas de estas visiones.

I.4.1. Las definiciones en términos absolutos

Comenzaremos esta aproximación con un grupo de definiciones que aparecen en términos absolutos, es decir, independientemente del resolutor. Según la tríada propuesta por Bishop (2000), formarían parte del constructo contenido, y según el esquema de Puig (1996), nos situarían en un Nivel I de análisis: el problema. Este tipo de definiciones, que todavía aparecen en el siglo XX, son un reflejo de la tradición griega y de los siglos XVII y XVIII (Blanco, 1996; Vila, 2001). Sin embargo, son mucho menos frecuentes que aquellas otras que definen el problema en relación con el resolutor. Véanse en la tabla 1 algunos ejemplos de estas definiciones en diferentes décadas del siglo pasado:

Tabla 1. Definiciones de problema en términos absolutos. Elaboración propia.

Skinner, (1966).	“Una pregunta para la que no existe por el momento ninguna respuesta” (citado en Goldin, 1982, p.225).
Radford y Burton, (1974).	"Cualquier situación en la que el resultado final no puede ser contactado de inmediato" (citado en Goldin, 1982, p.39).
Goldin, (1982).	“Una tarea es un problema cuando se detectan pasos o procesos entre el planteamiento de la tarea y la respuesta” (Goldin, 1982, p.97).

I.4.2. La dependencia del resolutor

I.4.2.1. La idea de obstrucción

Es obvio que para que podamos hablar de *problema* debe existir un cierto grado de dificultad para la persona que se enfrenta a su resolución, de lo contrario no sería un problema. Por tanto, el resolutor se encuentra ante un obstáculo que le impide llegar a la solución de forma inmediata. Así lo expresa Agre (1982), que desde la filosofía de la educación emplea la expresión metafórica "baluarte, escudo o impedimento para la acción" (p.124); por otro lado, cita a Chadwick (1971), que sintetiza este concepto por medio de la ecuación: "problema = objetivo + impedimento al objetivo" ; y finalmente, establece una condición necesaria que debe de cumplir un problema para ser juzgado como tal: "para calificar como problema el proceso de resolución o de definición tiene que juzgarse que posea al menos un poco de dificultad" (p.130).

Tanto en las definiciones que se han dado desde la educación matemática, como desde la psicología, la dificultad radica en la presencia de un obstáculo para hallar la solución, de manera que el resolutor no conoce medios o caminos evidentes para obtenerla (Krulik y Rudnik, 1980). Dicho de otra forma, existe un objetivo que queremos alcanzar, pero no podemos conseguirlo de forma inmediata. El problema en sí mismo aparece en el momento en que debemos determinar cómo lograr dicho objetivo. En este sentido, lo que caracteriza al problema no puede establecerse sin referencia al resolutor, con lo cual ya podríamos hablar de la interacción de dos de los elementos de la tríada de la educación matemática propuesta por Bishop (2000), o de un Nivel II de análisis: problema-alumno, según Puig (1996). Presentamos algunas definiciones de este tipo en la tabla 2:

Tabla 2. Definiciones de problema en términos de obstrucción.Elaboración propia.

Resnick y Glaser, (1976).	El término 'problema' se refiere a: "una situación en que se le pide a un individuo que ejecute una tarea con la que previamente no se había encontrado y para la que las instrucciones proporcionadas externamente no especifican por completo el modo de solución" (Resnick y Glasser, 1976, p.208).
Charles y Lester, (1982).	"Una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución" (Charles y Lester, 1982, p.5).
Kilpatrick, (1985).	"Una situación o tarea en la cual una meta quiere ser lograda y una ruta directa a ella está bloqueada" (Kilpatrick, 1985, p.2).
Brown, (1985).	"Un problema es una cierta meta que uno intenta conseguir, tal que quien lo intenta no conoce cuál es el procedimiento que es necesario para conseguirlo en el momento en que se le plantea el problema" (Brown, 1985, p.6).

Chi y Glaser, (1986).	"Un problema es una situación en la que se intenta alcanzar un objetivo y se hace necesario encontrar un medio para conseguirlo" (Chi y Glasser, 1986, p.295).
Blum y Niss, (1991).	"Una situación que conlleva ciertas cuestiones abiertas que retan intelectualmente a alguien que no posee inmediatamente métodos, procedimientos, algoritmos, etc., directos, suficientes para responder" (Blum y Niss, 1991, p.37).
Stenberg, (1995).	"Es uno de los tipos fundamentales de pensamiento que implica la resolución de una dificultad, la superación de obstáculos, el responder a una pregunta o la consecución de un objetivo" (Stenberg, 1995, p.36).
Díaz y Poblete, (2001).	(Un problema) "implica una situación que supone una meta para ser alcanzada, pero existen obstáculos para alcanzar ese objetivo, lo cual requiere necesariamente de una deliberación, ya que se parte del desconocimiento del algoritmo útil para resolverlo" (Díaz y Poblete, 2001, p.35).
Dossey, (2017)	Un problema matemático implica: "una lucha individual con una situación donde no se sabe de inmediato cómo proceder, o no se tiene un algoritmo que permita avanzar hacia la solución" (Dossey, 2017, p.61).
Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen, (2018).	"Entendemos por problemas, tareas matemáticas no rutinarias para cuya resolución los alumnos no disponen inmediatamente de una estrategia de solución" (Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen, 2018, p.827).

I.4.2.2. La dicotomía problema-ejercicio

De acuerdo con las definiciones anteriores, las características que hacen que una tarea matemática se considere "un problema" son la presencia de un obstáculo y la inexistencia de un procedimiento de solución, directo o inmediato, al alcance del resolutor. De lo contrario, esta tarea sería lo que Pólya (1945) denominó un "problema rutinario", o lo que otros autores denominan, con un término más distintivo, un "ejercicio" (Burkhardt, 2014; Manouchehri, Zhang y Liu, 2012; Schoenfeld, 1985b). He aquí algunas definiciones:

Un ejercicio es "una situación donde al alumno le viene rápidamente a su mente un modo de responder la pregunta formulada (…) porque resulta ser la práctica de una rutina en la cual ya ha sido iniciado" (Díaz y Poblete, 2001, p.36).

"Los ejercicios tienen como objetivo aplicar los conocimientos y conseguir agilidad en las estrategias de cálculo" (Luque, 2002, p.40).

"Un ejercicio no está contextualizado, tiene una formulación explícita, única y cerrada, y para su resolución -por un proceso único y de carácter exacto- se prevé el uso de algoritmos previamente conocidos" (Contreras, 2009, p.57).

"En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que se puede conocer o no, pero una vez localizado se aplica y se halla la respuesta" (Valverde, 2013, 79).

Desde el ámbito de la educación matemática, el problema también ha sido conceptualizado por oposición al ejercicio. En este tipo de definiciones (véase tabla 3) muy similares a las expuestas en la tabla 2, también se pone de relieve el carácter mecánico del ejercicio frente al carácter reflexivo del problema, en función de la presencia/ausencia de caminos o vías (procedimientos, algoritmos, esquemas o estrategias, etc.) que conducen directamente a la solución. Sin embargo, en estas definiciones aparecen explícitamente los términos *ejercicio* y *problema*, enfatizando de este modo la oposición entre ambos. Esta caracterización la encontramos en la definición de Kantowski (1981), una de las definiciones clásicas más citadas en la literatura sobre el tema; la misma idea es expresada por Schoenfeld (1985a), con una mayor riqueza argumentativa. Asimismo, aparece en la definición de Díaz y Poblete (2001), por un lado, y en la de Castro y Ruiz (2015), por otro lado, que sitúan la diferencia entre el ejercicio y el problema en el contexto escolar; y finalmente, en la definición de Alsina (2006), donde se contraponen estos dos términos y se especifican las implicaciones de los mismos:

Tabla 3. Definiciones de problema en contraposición a ejercicio. Elaboración propia.

Kantowski, (1981).	"Un problema es una situación que se diferencia de un ejercicio en que el resolutor no tiene un procedimiento o algoritmo que conduzca con certeza a una solución" (Kantowski, 1981, p.113).
Schoenfeld, (1985).	Para Schoenfeld (1985a), la palabra *problema* hace alusión a una tarea que resulta difícil para la persona que debe resolverlo: "más aún, esa dificultad ha de ser un atolladero intelectual más que de cálculo (…)" (p.74). "Por enunciar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema" (p.74).
Díaz y Poblete, (2001).	Según Díaz y Poblete (2001), las tareas que se desarrollan en el aula de matemáticas pueden ser de diferente naturaleza: "los *ejercicios*, para los cuales la estrategia de solución es inmediatamente conocida; y los *problemas,* para los que no hay condiciones de resolución fácilmente definidas" (p.34).
Alsina, (2006).	Los verdaderos problemas son situaciones nuevas de las que no se conoce de antemano la solución ni el camino o las estrategias para encontrar la solución. *Implican pensar*. Los ejercicios sirven para aplicar un determinado contenido matemático que ha sido enseñado previamente. *Implican mecanizar* (p.114).

Castro y Ruiz, (2015).	Para Castro y Ruiz (2015), según el desafío que supongan las tareas que se proponen a los alumnos, podemos distinguir entre ejercicios y problemas: Llamamos ejercicio a una tarea de reproducción para cuya respuesta una persona dispone de una rutina o de un método para obtener la solución. Puesto que el resolutor conoce un camino a seguir para alcanzar la solución, los ejercicios se resuelven de forma automática, de forma rutinaria y sólo contribuyen a desarrollar destrezas. Problema es una tarea matemática escolar cuyo resolutor no conoce un procedimiento estándar que determine su solución y, además, quiere encontrar dicha solución (p.94).

Dumas-Carré y Larchen (1987), todavía profundizan más en esta distinción, proponiendo tres categorías jerárquicas:

- Si la tarea consiste en un reconocimiento-repetición de una situación “problemática” idéntica a una ya conocida y, por tanto, no genera incertidumbre, entonces estamos hablando de un *ejercicio.*
- Si la tarea consiste en la identificación-reproducción de una situación problemática que pertenece a la misma categoría que un modelo ya estudiado, debiéndose identificar el tipo de problema para trasladar su razonamiento al nuevo problema, entonces estaríamos en un paso intermedio entre el *ejercicio* y el *problema.*
- Si, por el contrario, la tarea consiste en un esfuerzo de construcción, de manera que la situación problemática no puede ser reducida a otra ya conocida, entonces se trata de un *problema.*

Los ejercicios y los problemas se sitúan, por tanto, en los dos polos extremos de un mismo continuo. La característica principal que diferenciaría un problema de un ejercicio es que, en este último caso disponemos de mecanismos o vías que nos permiten llegar a la solución de forma automática, sin necesidad de un pensamiento reflexivo. En el problema, como tal desafío, no es evidente el camino a seguir, la solución no es obvia, de hecho, si no hay que reflexionar no hay problema.

Esta distinción conceptual, con la que parecen estar de acuerdo la mayoría de autores, contrasta con la práctica educativa. Efectivamente, ya en el año 1987, Pereda publicó una obra dirigida a maestros de E.G.B (Educación General Básica) con propuestas específicas para trabajar la R.P en el aula desde una perspectiva renovadora. Este autor presentó una descripción de las prácticas habituales del aula en las que el papel de la R.P quedaba relegado primordialmente al final de la “lección" y era, “materia de deberes para casa”. Los problemas, además, se subordinaban a la práctica del cálculo, tratándose como simples ejercicios y llevándose a cabo de forma individual.

Igualmente, en la misma década, Resnick y Ford (1981), señalaban que la enseñanza de la R.P no consistía en repetir ejercicios ni fórmulas de manera rutinaria, sino en enseñar el substrato matemático de conceptos y estructuras matemáticas en contraposición al cálculo. Por su parte, Worth (1982), llamaba la atención sobre la necesidad de cambiar la concepción de problema que tienen los alumnos mediante un cambio actitudinal que les permitiera afrontar la R.P desde una posición más autónoma, lejos del típico *“¿qué hago?”*.

Esta concepción del problema asimilada a un ejercicio repetitivo y mecánico de cálculo, que actualmente todavía subsiste, tiene sus orígenes en el largo período de lo que Simon (citado en Pozo, Monereo y Castelló, 2007, p.216) llamó la *“glaciación conductista”* iniciada en los años veinte del siglo pasado. Según Martínez Montero (2002), los ejemplos de la supeditación del problema a la operación aritmética se producen diariamente en la escuela cuando ante un problema, el alumno pregunta al maestro si hay que sumar o restar. El interés del alumno se centra en la operación aritmética con la que resolverá el problema y lo dará por finalizado, con independencia de su comprensión. Wertheimer (1991), ejemplificó de forma anecdótica esta idea con las palabras que un niño dirige a su padre: “Mira, papá, en la escuela soy muy bueno en aritmética. Puedo sumar, restar, multiplicar, dividir y hacer cualquier otra operación, la que se te ocurra, muy rápido y sin errores. El problema es que a menudo no sé cuál de ellas usar.” (p.125).

Precisamente esto es lo que Canals (2010) denomina el *problema* de los *problemas:*

> Los problemas son para hacer pensar, no para hacer calcular (…) El error, de entrada, es que muchos alumnos, inseguros delante de un problema, intentan “adivinar” cuál es la operación que tienen que realizar, suma, resta, división… Y son muchas veces los propios maestros quienes los llevan a este error inicial de actitud con preguntas como “¿qué tienes que hacer, una suma o una resta?”. Éste es el camino contrario al razonamiento (p. 23).

Juidías y Rodríguez (2007) sintetizan de este modo la diferencia entre los problemas y los ejercicios en la tabla 4.

Tabla 4. Diferencias entre problemas y ejercicios. Adaptada de Juidías y Rodríguez, 2007, p.261.

PROBLEMA	EJERCICIO
▪ El sujeto se enfrenta a una dificultad para la que no dispone de una solución inmediata. ▪ El sujeto se implica en su solución. ▪ Se requiere la utilización estratégica de procedimientos previamente conocidos. ▪ Supone una demanda cognitiva de alto nivel. ▪ La determinación de la información relevante es clave en la R.P.	▪ Puede resolverse aplicando directamente un procedimiento previamente adquirido. ▪ La aplicación rutinaria del algoritmo no exige un interés especial para que el sujeto resuelva la tarea. ▪ Se requiere la aplicación rutinaria de técnicas automatizadas. Éstas son necesarias y suficientes para la resolución. ▪ Supone una demanda cognitiva de bajo nivel. ▪ No es necesario discernir la información relevante de la irrelevante, porque toda la información que aparece en el enunciado es necesaria para la solución.

I.4.2.3. El umbral de problematicidad

Como acabamos de ver, el problema se caracteriza frente al ejercicio por la existencia de una dificultad. Ahora bien, para algunos autores esta dificultad no puede considerarse en términos absolutos; la obstrucción o bloqueo que experimenta el sujeto constituye una idea relativa y personal, que adquiere en muchas ocasiones un carácter móvil, resbaladizo y difuso. Si una tarea es percibida como un problema, depende en gran medida de los conocimientos y experiencias previas del individuo (Lesh y Zawojewski, 2007; Lester, 2013; Manouchehri et al., 2012.). Esta idea también ha sido puesta de manifiesto por autores como Gaulin (1982), Agre (1982), Schoenfeld (1985a, 1989, 2013), o Santos-Trigo (2007). Véase la siguiente tabla:

Tabla 5. Ideas acerca del carácter relativo de la dificultad de los problemas.

Gaulin, (1982).	Gaulin (1982), afirma que la diferencia entre un ejercicio y un "verdadero problema" es relativa: "lo que para una persona constituye un problema no rutinario puede ser muy bien un simple ejercicio para otra persona; todo depende de los conocimientos y experiencias anteriores de los alumnos" (p.40).
Agre, (1982).	"Una persona puede decir que eso no es un problema para ella porque no le importa en absoluto o porque, o bien no le supone ninguna dificultad, o bien, en el polo opuesto, le resulta inabordable" (Agre, 1982, p.124). "Lo que es un problema para una persona puede no serlo para otra, y lo que es un problema para una persona un día puede no serlo un próximo día" (p.130).

Schoenfeld, (1985a).	Según Schoenfeld (1985a), la dificultad no es una propiedad de la tarea. Lo que hace que una tarea sea un problema es "la relación particular que se establece entre el individuo y la tarea" (p.74). Por tanto, el concepto de problema puede variar dependiendo de la persona: "una tarea que requiere importantes esfuerzos para algunos estudiantes podría ser un ejercicio rutinario para otros" (p.74).
Schoenfeld, (1989).	"Las tareas no son 'problemas' por sí mismas; que una tarea sea un problema para alguien dependerá de lo que esa persona sepa" (Schoenfeld, 1989, p.148).
Schoenfeld, (2013).	Schoenfeld (2013), señala que lo que en un principio puede suponer un problema, puede convertirse posteriormente en un ejercicio. El hecho de que una tarea sea un problema puede cambiar con el tiempo, pues: "la persona que ha trabajado y resuelto un problema, no es la misma persona que comenzó a trabajar en él, y abordará el próximo problema sabiendo más que antes" (p.20).
Santos-Trigo, (2007).	La existencia de un problema: "no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea" (Santos-Trigo, 2007, p.48).

Las ideas expresadas por estos autores se ajustan al concepto de "umbral de problematicidad" desarrollado por Elshout (1985), que será diferente para cada persona, y por encima del cual se puede considerar que una situación constituye un verdadero problema para las personas implicadas. A este respecto, Garret (1987) también afirma que la existencia de dificultades no es una característica intrínseca de los problemas, puesto que la facilidad o dificultad en la resolución depende de los conocimientos previos del resolutor. Garret sitúa el umbral de problematicidad en función del sujeto que se enfrenta al problema: si domina todos los conceptos y procedimientos necesarios se encontrará ante un ejercicio, mientras que si los desconoce tendrá un problema.

I.4.2.4. Tener un problema

Retomando la revisión retrospectiva realizada por Kilpatrick en 1985, en la que se distinguen cuatro perspectivas de estudio de los problemas, decíamos que desde la perspectiva psicológica se pone el énfasis en la idea de problema como *actividad*, pero unida de forma estrecha al *sujeto*. En palabras de Puig (1996): "lo que da carácter de problema está en el lado del sujeto, definiéndose más qué es *tener un problema* que *problema*" (p.19). Así, desde la psicología, el foco de atención se centra más en comprender cómo los sujetos resuelven los problemas, de manera que hacen de la actividad propia de resolver problemas su objeto de estudio. Una de las definiciones más clásicas de esta disciplina es la de Brownell (1942):

> La resolución de problemas se refiere: a) sólo a tareas conceptuales o perceptivas; b) cuya naturaleza el sujeto es capaz de comprender gracias a su naturaleza original, a un aprendizaje previo, o a la organización de la tarea; pero c) para las que, en ese momento, desconoce cualquier medio directo de realización; d) el sujeto experimenta perplejidad ante la situación problemática, pero no experimenta total confusión (…) La resolución del problema resulta ser el proceso mediante el cual el sujeto se desprende de su problema (…) Definidos así, se pueden pensar los problemas como si ocuparan un territorio intermedio en un continuo que se extiende desde los "enigmas" en un extremo, hasta las situaciones completamente familiares y comprensibles, en el otro (p. 416).

Observe el lector que los rasgos que definen la actividad problemática están más cerca del sujeto que de la propia tarea: el sujeto "es capaz de comprender", "experimenta perplejidad", "no experimenta total confusión". Es más, la R.P es entendida por Brownell como el proceso por el cual el sujeto se desprende del problema. De cualquier modo, las distintas definiciones que aparecen en esta disciplina variarán sustancialmente dependiendo de la perspectiva psicológica adoptada.

Desde la psicología conductista, el problema se define a través de procesos de asociación estímulo-respuesta o acto-efecto, sin la intervención de un pensamiento complejo. Un ejemplo de esta concepción es la definición que ofrece Greeno (1978) de lo que es un problema para el conductismo: "se presenta un problema cuando la respuesta que es necesaria para conseguir una meta es menos fuerte que otras respuestas, o cuando se requieren varias respuestas y es poco probable que todas ellas puedan ser ejecutadas" (p.239). Desde este enfoque asociacionista, el aspecto fundamental para conocer cómo se soluciona un problema radica en describir los determinantes de la respuesta correcta de la persona que resuelve el problema. El postulado fundamental de esta perspectiva se basa en que la respuesta que ha sido más frecuentemente reforzada es la de más fácil asociación con el estímulo. Por otro lado, se enfatiza la importancia del aprendizaje de conductas por ensayo y error. Resolver problemas, como por ejemplo la salida de un laberinto o la construcción de un rompecabezas, consiste en ir probando diferentes respuestas al azar hasta lograr que una de ellas funcione, de forma que se pueda resolver el problema. Por ello, el proceso de R.P se concibe como un aprendizaje de respuestas.

Los teóricos de la Gestalt, sin embargo, proponen un enfoque diferente al desarrollado por el conductismo, que se sitúa en el extremo contrario. Radicalmente opuesta es la definición que también ofrece Greeno (1978) de lo que es un problema para la psicología de la Gestalt: "los problemas se analizaban como situaciones cuyas representaciones cognitivas tienen brechas o inconsistencias, y la resolución del problema encuentra un camino para organizar la situación" (p.239). La psicología de la Gestalt se centra principalmente en dos cuestiones, la percepción y el pensamiento, enfatizando asimismo la importancia de la comprensión en la R.P, que no puede ser el resultado de un proceso mecánico (pensamiento reproductivo). Para estos psicólogos, la solución de un problema implica una comprensión en profundidad del mismo, fruto de una reestructuración perceptiva, de una forma diferente de percibir el problema. La Gestalt centra su atención en la estructura del problema, la comprensión estructural de sus partes y la reorganización de la situación problemática, que conduce a la meta (García Madruga, 2006).

Sin duda, una de las contribuciones más importantes del enfoque gestáltico es la distinción que estableció Wertheimer (1945) entre dos tipos de pensamiento: reproductivo y productivo. El primero se basa en la aplicación de habilidades, destrezas o conocimientos, que han sido adquiridos con anterioridad en el transcurso de experiencias pasadas; el segundo, se basa en la creación de una solución nueva al problema mediante la reestructuración y búsqueda de una nueva organización. Esta reestructuración tiene lugar por *insight* o comprensión súbita de una solución viable, que se alcanza cuando la persona llega a la percepción estructural del mismo.

Desde la psicología cognitiva surgen las teorías del procesamiento de la información, que establecen una analogía entre la mente humana como procesadora de información y un ordenador. De este modo, se adoptan los programas del ordenador como metáfora del funcionamiento cognitivo humano. Estas teorías integran las aportaciones del asociacionismo (el papel del conocimiento basado en la experiencia previa) y las gestálticas, (la importancia de la comprensión en profundidad de la situación problemática). La teoría de solución de problemas de Newell y Simon (1972) plantea que: el sujeto, en el momento de enfrentarse al problema, se encuentra en un *estado inicial* caracterizado por sus conocimientos y experiencias previas, sus habilidades, sus motivaciones, etc.; desea llegar a un *estado final*, que es el objetivo o la meta que precisa alcanzar; pero, para ello debe pasar por el *espacio del problema*, conformado por todas las posibles operaciones mentales necesarias para alcanzar el estado final. El espacio del problema es pues, el lugar donde realmente se sitúa el problema.

Siguiendo a García Madruga (2006), a partir de estos componentes, los psicólogos del procesamiento de la información se han referido a dos procesos esenciales en la R.P: los procesos de *comprensión* y de *solución.* El proceso de *comprensión* consiste en integrar la información dada en el problema con los conocimientos previos que ya posee el sujeto. Este proceso, que se centra en la representación mental del problema, resulta clave, ya que según la claridad y precisión con que el sujeto construya el *espacio del problema* (estado inicial, meta, operadores o procedimientos para alcanzar la solución) esta será encontrada con más o menos dificultad. Tras el proceso de *comprensión*, el sujeto se enfrenta al proceso de *solución*, que consiste en aplicar de forma correcta las estrategias y procedimientos adecuados que le permitan lograr la solución.

Sintetizando, desde este punto de vista, la R.P se caracteriza por la presencia de brechas o separación de estados, por un lado, y acciones o procesos, por otro lado, que el sujeto debe traspasar. Algunos ejemplos de definiciones de este tipo son los siguientes:

Tabla 6. Definiciones de problema en términos de brechas o separación de estados.Elaboración propia.

Hayes, (1980).	"Siempre que haya una brecha entre donde se está en este momento y donde se quiere estar, y no se sepa cómo encontrar el camino para cruzarla, se tiene un problema" (Hayes, 1980, p.141).
Mayer, (1983).	"Cualquier definición de 'problema' debería de consistir en las tres ideas siguientes: (1) el problema está actualmente en un cierto estado, pero… (2) se desea que esté en otro estado, y (3) no hay una manera obvia y directa de realizar el cambio" (Mayer, 1983, p.5).
Bransford y Stein, (1988).	"Un problema es un obstáculo que separa la situación actual de una meta deseada". Consecuentemente, "resolver un problema consiste en pasar de una situación a la otra" (Bransford y Stein, 1988, p.22).
Luceño, (1999).	Toda situación en la que haya un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida; cuando es conocida deja de ser un problema (Luceño, 1999, p.13).
De Guzmán, (2001).	Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra (De Guzmán, 2001, p.11).

Esta brecha supone, pues, un cierto grado de dificultad, una barrera que se necesita traspasar, sin contar para ello con los medios necesarios para sortearla de forma directa e inmediata. Por ello, según Köhler (1925) el resolutor se ve obligado a actuar mediante "rodeos", término que, desde la perspectiva cognitiva, recoge posteriormente García Madruga (2002) en la siguiente definición:

> Se puede afirmar que existe un problema siempre que queremos conseguir algo y no sabemos cómo hacerlo, es decir, los métodos que tenemos a nuestro alcance no nos sirven. Dicho de otro modo, tenemos una meta más o menos clara y no existe un camino inmediato y directo para alcanzarla; por lo tanto, nos vemos obligados a elegir una vía indirecta, a dar un rodeo (p.27).

I.4.2.5. Las ideas de reconocimiento y aceptación

Para algunos autores como Saiz (2009), el primer paso en el proceso de R.P es la conciencia o planteamiento del problema, esto es, el reconocimiento reflexivo de que se tiene o se está ante un problema. El argumento de Saiz se sustenta en la concepción del problema como motor de cualquier cambio, como una actividad intelectual que realiza el resolutor cuando quiere lograr algo que no tiene, cuando desea alcanzar una meta determinada. De acuerdo con este autor, si queremos que nuestra situación cambie, entonces "debemos comprender por qué no tenemos lo que buscamos, para poder conseguir eso que deseamos" (p.184). Por tanto, a la conciencia o reconocimiento del problema (orden cognitivo) le sigue la aceptación del mismo (orden afectivo), que no es otra cosa que la intencionalidad, la actitud o predisposición positiva por parte del resolutor: "el pensamiento posee un carácter esencialmente propositivo" (p.184). De esta misma forma lo expresa Baron (2000), que sitúa el origen del pensamiento en la necesidad o el deseo de lograr algo. El origen del pensamiento, afirma el autor, posee un carácter propositivo, intencional: "pensamos para solucionar problemas" (p.6).

Según Pozo y Postigo (1994), el que una tarea llegue a ser un problema va a depender no sólo del reconocimiento de su dificultad, sino también de la actitud ante la tarea, de manera que el problema sólo existe para quien se lo tome como tal: "uno sólo ve un problema si está dispuesto a asumir que ahí hay un problema, es decir, que hay una distancia entre lo que sabemos y lo que queremos saber, y que esa distancia merece el esfuerzo de ser recorrida." (p.205).

Desde la filosofía, tanto Agre (1982) como Andler (1987), hacen hincapié en la idea del *reconocimiento*. Según Agre, la primera condición que debe cumplir una situación para que pueda considerarse problemática es la existencia de un sujeto que reconozca la situación *conscientemente*; para Andler, el primer rasgo fundamental de un problema es la decisión del sujeto de crearlo o reconocerlo: "el problema debe su existencia a mi decisión de crearlo, o de reconocerlo como tal" (p.100).

Por otro lado, desde el constructivismo radical, Confrey (1991) afirma que: "para el constructivista, el problema sólo queda definido respecto al resolutor. Un problema es sólo un problema en la medida en que es sentido problemático para el resolutor" (p.117).

El constructivismo radical también ha considerado la relevancia del ámbito afectivo y las tres dimensiones que lo integran: actitudes, emociones y creencias. Dicha relevancia aparece de forma patente en el tercer supuesto de este enfoque, enunciado por Confrey (1991):

> Los problemas poseen discrepancias, obstáculos que el estudiante quiere resolver y así cataliza la acción. Para aceptar algo como problemático un individuo tiene que creer que puede ser resuelto – y actuar como si el problema y la solución fueran preexistentes. El ciclo de identificación de situaciones problemáticas, actuar y operar sobre ellos y después reflexionar sobre los resultados tiene carga emocional, es motivador y exigente (p.119).

Centrándonos en la segunda idea que da título a este epígrafe, (la idea de *aceptación*) desde la psicología cognitiva, Simon (1978), sin dejar de lado la idea de obstrucción, se refirió de forma explícita a la aceptación de la situación problemática por parte del sujeto: "una persona se enfrenta a un problema cuando acepta una tarea, pero no sabe cómo realizarla" (p.198). Muy similar es la definición propuesta por House, Wallace y Johnson (1983), que también contemplaron las ideas de obstrucción y aceptación. Según estos autores, el problema es una situación que implica un objetivo o propósito, sin embargo: "hay obstáculos para alcanzar ese propósito, y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo (…) Debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema" (p.10).

Desde la educación matemática, también se han destacado esas dos mismas ideas. Véanse las definiciones de la tabla 7:

Tabla 7. Definiciones de problema en términos de obstrucción y aceptación. Elaboración propia.

Lester, (1987).	"Una situación que un individuo o un grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone de un camino rápido y directo que le lleve a la solución" (citado en Pérez Echevarría, 1994, p.17).

Schoenfeld, (1992).	Schoenfeld (1992) define el problema como: "una tarea en la cual el alumno está interesado e involucrado y para la cual desea obtener una solución, pero no dispone de un medio matemático accesible para lograrla" (p. 148). El autor señala que por simple que parezca esta definición, tiene ciertas consecuencias significativas: "el involucrarse es importante en la resolución de problemas; una tarea no es un problema para una persona hasta que no lo ha hecho propio" (p.148). La idea de aceptación también es destacada por el autor cuando habla del papel del docente en la R.P: "Ayudar a los alumnos a aceptar los desafíos: un problema no es tal hasta que uno no quiera resolverlo" (p.56).
Blanco, (1996).	"Se requiere en todo caso una voluntad de atacar el problema provocado, por la necesidad de la solución o bien por algún tipo de motivación" (Blanco, 1996, p.23).
Castro y Ruiz, (2015).	"Problema es una tarea matemática escolar cuyo resolutor no conoce un procedimiento estándar que determine su solución y, además, quiere encontrar dicha solución" (Castro y Ruiz, 2015, p. 94).
Dossey, (2017).	Dossey (2017), define el problema como "una situación en la que no se sabe cómo proceder de forma inmediata (…)" y en la que "el individuo tiene que estar dispuesto y ser capaz de participar realmente en la búsqueda de una solución" (Dossey, 2017, p.62).

Callejo y Vila (2004), también tienen presente la idea de obstrucción, pero su definición se diferencia de las anteriores por su alusión explícita al ámbito afectivo:

> Reservaremos pues el término problema para designar una situación, planteada con finalidad educativa, que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno/resolutor o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos etc. para afrontar una situación nueva (p.31).

Más allá de la idea de aceptación, que como hemos apuntado constituye un aspecto fundamental del ámbito afectivo-actitudinal, algunos autores se han referido a los otros dos aspectos del dominio afectivo: las emociones y las creencias. En 1945, Pólya en el preámbulo de su célebre obra "How to solve it" utilizaba una serie de expresiones ligadas al plano emocional para referirse a la R.P:

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero existe un poco de descubrimiento, en la solución de cualquier problema. Su problema puede ser modesto; pero si reta su curiosidad y pone en juego sus capacidades de

> inventiva, y lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento (p.5).

El término "tensión" también ha sido utilizado por otros autores para aludir al estado emocional que experimenta el sujeto ante el problema. En concreto, Faludi en 1973, habla de: "un estado subjetivo de tensión" (p.124). Gil, Blanco y Guerrero (2006), afirman que la afectividad es el motor que impulsa, bien a la solución del problema, bien al bloqueo de la misma, en cualquier caso: "se suele experimentar una tensión en la búsqueda de un plan de resolución, tensión que en algunos casos puede desembocar en interés y en otros, en ansiedad." (p.553). Para Gardiner (2008), el término "problema" posee una connotación negativa que sugiere "una tensión no deseada y no resuelta", mientras que el término "resolución" encierra la noción de "liberación de la tensión" (p.995).

Otros autores, también han utilizado términos alusivos al plano emocional. Por un lado, Agre (1982), afirma que el problema debe ser una situación que genere cierta *incomodidad*, es decir, debe ser *indeseable,* por tanto, el sujeto debe sentir el deseo de liberarse de esa situación; por otro lado, Perales (1993), define el problema como: "cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, un cierto grado de *incertidumbre* y, por el otro, una conducta tendente a la búsqueda de su solución" (p. 170). Más explícito fue Pólya (1945), cuando señalaba que: "sería un error el creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual; la determinación, las emociones, juegan un papel importante" (p. 80).

Finalmente, tanto Kilpatrick (1985) como De Guzmán (2007), se muestran contundentes al referirse a la relevancia del ámbito afectivo. Para Kilpatrick: "ningún programa de formación en R.P tendrá éxito si tiene efectos negativos sobre las actitudes y las creencias de los estudiantes" (p.9); De Guzmán, por su parte, estaba convencido de que una gran parte de los fracasos de los alumnos en matemáticas se debe a "un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo" (p.28).

I.4.3. El profesor, el libro de texto y el contexto

Cuando entra en escena el profesor, damos por hecho que éste actúa dentro del contexto escolar, situándonos en tres de las perspectivas apuntadas por Kilpatrick (1985), a las que hemos hecho referencia anteriormente: la socio-antropológica, que concibe el aula como una situación social construida por los participantes; la matemática, que preconiza que la actividad del aula debe girar en torno al planteamiento y R.P; y la pedagógica, que desde el punto de vista didáctico, se ocuparía de cómo enseñar a resolver problemas, y desde el punto de vista curricular se interesaría por indagar sobre el rol que desempeñan los problemas en el aula y en los libros de texto, como material hegemónico. Desde la tríada de la educación matemática propuesta por Bishop (2000), se produce ya la interacción de todos los elementos: el alumno como resolutor del problema; el profesor, que lo plantea; y el contenido, en el doble sentido en que el autor utiliza este constructo: como contenido curricular (el problema) y como espacio o entorno en que se da la situación de enseñanza-aprendizaje (el contexto).

Puig (1996) propone una definición[14] para el Nivel III (problema, alumno, profesor), donde el problema queda situado en el contexto escolar. Por tanto, el profesor es quien lo plantea y el alumno, que no es un mero resolutor, quien debe encontrar la solución: "Un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar, y para la cual no ha producido sentido" (p. 28).

Para Charnay (1994), el problema no se reduce a la situación propuesta (enunciado y pregunta) sino que:

> Se define como una terna situación-alumno-entorno. Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una determinada situación que 'hace problema' para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (…). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar. Por fin, el entorno es el elemento del problema, en particular las condiciones didácticas de la resolución (organización de la clase, intercambios, expectativas explícitas o implícitas del docente) (p.62).

En la definición de Charnay se reitera una idea vista con anterioridad: la dificultad del problema, que representa un obstáculo relativo para el alumno. Pero en esta terna, aparece un nuevo elemento con un peso específico, el "entorno", configurado por las condiciones didácticas, donde el profesor cobra un papel fundamental puesto que su función es establecerlas.

[14] Con el objeto de precisar esta definición, el propio autor realiza una serie de consideraciones. Con respecto a la condición de que el alumno *"desee abordar"* apunta hacia un límite en su estudio, ya que no tiene en cuenta cuestiones relacionadas con la motivación. Por otro lado, el término "significativo" es introducido para eliminar los enigmas del campo de los problemas escolares, y finalmente, con la frase *"para la cual no ha producido sentido"*, intenta englobar las diferentes formas de acabar un problema que se presentan en los sistemas educativos.

Edo (2005), manifiesta que la actividad alrededor de unos contenidos y tareas escolares del alumno es inseparable de la figura del profesor, por tanto, esta relación es de naturaleza social: "en una situación didáctica, la interacción entre profesor, alumnos y la tarea o contenido escolar constituye el contexto en el que se proporcionan ayudas a los procesos de construcción de conocimientos matemáticos" (p.126). Más recientemente, Socas (2011), sin restar importancia al tipo de tareas que se desarrollan en el aula, concibe la figura del profesor como un elemento básico que desempeña un papel determinante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para este autor las principales funciones de los profesores y futuros profesores de matemáticas son el conocimiento y la organización del contenido matemático que se debe enseñar, que no es otra cosa que ser capaz de traducirlo en expectativas de aprendizaje; además, la gestión de ese contenido para poder diseñar situaciones problemáticas que se ajusten a los diferentes niveles y posibilidades de los alumnos; y finalmente, el análisis de las producciones de los alumnos, para trabajar a partir de sus dificultades, obstáculos y errores. La formación del profesorado de matemáticas tiene como finalidad "mejorar las creencias del profesor, el conocimiento y la práctica, y contribuir al crecimiento cognitivo y afectivo de los estudiantes" (p.222).

La importancia del contexto en el que se plantea un problema y la intención con que el profesor lo plantea es puesta de relieve por Callejo y Vila (2004), que consideran que: "en el contexto escolar el problema no puede desligarse de los alumnos a los que se les proponen y de la intencionalidad del profesor que lo selecciona para una situación concreta de enseñanza-aprendizaje" (p.31). Así, un problema puede ser presentado por el profesor en diferentes contextos con diversas finalidades. De hecho, Pólya (1945), distinguió cuatro tipos de problemas en función de la finalidad pedagógica que persigue el profesor y del momento o situación en que se proponen:

a) *"regla bajo la nariz*": problemas en los que la regla que hay que aplicar salta a la vista, porque acaba de ser presentada o estudiada en clase.

b) *"aplicación con cierta elección"*: problemas en los que hay que escoger la regla que se debe aplicar, regla que se ha trabajado en clase recientemente.

c) *"elección de una combinación"*: problemas en los que hay que escoger una combinación de reglas previamente estudiadas.

d) *"nivel investigativo"*: problemas en los que hay que investigar. Se trata de problemas para cuya resolución se exige una combinación original de reglas y el uso de un razonamiento plausible.

Obviamente, los cuatro primeros tipos de tareas propuestos por Pólya no constituyen realmente problemas, sino ejercicios, aunque sean estos tipos de tareas los más frecuentes en los libros de texto utilizados en la práctica escolar. De acuerdo con la clasificación de Dumas-Carré y Larchen (1987), descrita anteriormente, el primer tipo propuesto por Pólya se correspondería con los ejercicios de *repetición* en la clasificación de Dumas Carré y Larchen; el segundo y tercer tipo tienen relación con la categoría de identificación-reproducción; y el último tipo serían verdaderos problemas, ya que existe un *esfuerzo de construcción.*

Según Remesal (2006), los trabajos de Schoenfeld (1989, 1991), muestran de forma patente las consecuencias nefastas del uso excesivo, o incluso peor, exclusivo, de los problemas del tipo primero a tercero, que provocan el desarrollo de un conjunto de creencias erróneas por parte del alumnado: (1) todo problema presentado por el profesor o por el libro de texto tiene sentido y puede resolverse; (2) todo problema tiene una única respuesta, precisa y numérica; (3) la solución del problema puede y debe obtenerse mediante la ejecución de una o varias operaciones aritméticas con los números que aparecen en el enunciado, y casi con toda seguridad con todos ellos; (4) el problema tiene toda la información necesaria para hallar la solución, por tanto no debe buscarse información adicional; (5) se puede alcanzar la solución mediante la aplicación de una técnica o algoritmo recientemente trabajada en clase.

Se trata de todo un conjunto de cláusulas que gobiernan de forma subyacente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la R.P en el aula de matemáticas, y que se conocen en la literatura sobre este tema como “contrato didáctico o experimental” (Greer, 1997, p.305). Las causas de las creencias que conforman el establecimiento de este “contrato” deben buscarse en un proceso de enculturación que se desarrolla gradualmente desde que el niño entra en la escuela (De Corte y Verschaffel, 1985; Gerofsky, 1996; Kilpatrick, 1987; Lave, 1992; Reusser y Stebler, 1997; Schoenfeld, 1991). A su vez, esta enculturación se debe, en gran medida, a dos aspectos de la práctica educativa: por un lado, *qué* resuelven los alumnos, es decir, el tipo de problemas que resuelven; por otro lado, *cómo* los resuelven, es decir, el modo en que se concibe y trata el proceso de R.P en la práctica diaria del aula (Verschaffel, 2012; Vicente, van Dooren y Verschaffel, 2008).

El libro de texto, como recurso material hegemónico, constituye un elemento determinante del contexto donde se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje, un factor decisivo a la hora de explicar el proceso de enculturación, puesto que mediatiza la visión que tienen, tanto docentes como discentes, de los problemas y de su proceso de resolución.

Precisamente, una de las principales críticas que ha recibido el libro de texto se dirige a cuestionar el rol que desempeñan los problemas. En este sentido, Garret (1987) afirma que los problemas que se presentan habitualmente en ellos, no son verdaderos problemas, sino ejercicios que tienen como propósito aplicar un procedimiento que se ha explicado en clase con anterioridad. Duch (1996), realizó una clasificación de problemas distinguiendo tres categorías de acuerdo con el grado de complejidad, situando en la categoría de menor nivel los "típicos problemas" del final de un capítulo de manual escolar. Igualmente, Bridges y Hallinger (1995) presentaron otra clasificación de cuatro categorías de problemas, y denominaron al primer tipo *problema rutinario,* el predominante en los libros de texto.

El tercer capítulo de esta tesis se centra en el libro de texto, no obstante, nos gustaría finalizar este primer capítulo mostrando algunas de las críticas vertidas por diversos autores sobre este recurso material en diferentes décadas (véase tabla 8). En estas críticas se reitera la idea del uso, y en algunos casos "abuso" de los ejercicios frente a los problemas (Castro y Ruiz, 2015; De Guzmán, 2001; Hernández, 2004; Reusser y Stebler, 1997; Schoenfeld, 1989; Verschaffel, 2012); también se señalan las consecuencias de la práctica indiscriminada de los ejercicios, esto es, la desvalorización de las matemáticas y la desmotivación y el fracaso de los alumnos (Juidías y Rodríguez, 2007). Otras críticas se dirigen a subrayar el olvido del desarrollo de la personalidad integral del alumno (De Guzmán, 1984); compartimentar una realidad que es global (Canals, 2010); ofrecer una visión distorsionada de la realidad (Nesher, 2000; Verschaffel, 2012; Vicente 2013); o determinar (Informe Cockcroft, 1985), e incluso subordinar y, por tanto, desvalorizar la profesión docente (Bishop, 1999; Romberg y Carpenter, 1988). No faltan críticas a la metodología, al modo cómo enseñan, y al grado de confianza que los maestros depositan en el proceso de R.P propuesto en los libros de texto (Vicente, 2013). Las críticas devienen más duras cuando se habla de los libros de texto como "males de nuestra enseñanza actual" (De Guzmán, 1984); "producto del liberalismo capitalista de nuestra sociedad" (Canals, 2010); o de su carácter de "cuestionario" (De Guzmán, 1984) o "formulario" (Canals, 2010).

Tabla 8. Críticas a los libros de texto de matemáticas. Elaboración propia.

De Guzmán, (1984).	De los males de nuestra enseñanza actual una buena responsabilidad incumbe al espíritu predominante en la generalidad de los libros de texto existentes en la actualidad, tanto de EGB como de BUP y COU. Parecen estar escritos para responder a un cuestionario, olvidando totalmente el objetivo primordial de estas etapas de la enseñanza, la formación de la personalidad integral del alumno utilizando como medio su contacto con el mundo de la matemática (p.94).

Informe Cockcroft, (1985). Prólogo de Pérez Navarro.	Es cierto que, para ser precisos, los programas oficiales son guías escuetas publicadas en el BOE, a las que se puede dar contenido de muy diversas maneras. Sin embargo, su énfasis en la enumeración de temas, y las propias características de la industria editorial, han conducido a los libros de texto que tenemos. Estos libros de texto, que en general reflejan los aspectos negativos de los programas, han determinado gran parte, quizá la mayor parte, de la práctica docente de nuestro país en la enseñanza de las matemáticas" (Informe Crockcroft. Prólogo, p. 13).
Romberg y Carpenter, (1988).	"El libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro" (p.867).
Schoenfeld, (1989).	En la mayoría de los libros de texto, la mayor parte de los problemas se pueden resolver mediante la aplicación directa de un procedimiento que se ilustra en el capítulo: "en cambio, la resolución real de los problemas enfrenta directamente a las personas con una dificultad. Saben dónde están y dónde quieren llegar, pero no tienen los medios para llegar hasta allí (p.148).
Reusser y Stebler, (1997).	Sólo unos pocos problemas empleados en las aulas y en los libros de matemáticas invitan o desafían a activar y utilizar su conocimiento sobre el mundo real y su experiencia. La mayoría de los problemas usados en la instrucción se elaboran de manera semánticamente empobrecida, a modo de viñetas verbales. Los alumnos no sólo saben por su experiencia matemática escolar que todos los problemas son indudablemente resolubles, sino que también saben que cualquier cosa numérica incluida en un problema es relevante para su resolución, y que todo lo que es relevante para su resolución está incluido en el texto del problema. Siguiendo este código, los enunciados de muchos problemas degeneran en ecuaciones mal disimuladas (p.323).
Bishop, (1999).	"Muchas clases de matemáticas de todo el mundo son testimonio de la subordinación de la enseñanza basada en el enseñante a la enseñanza basada en el libro de texto (…)" (p.199) "Pero, ¿de quién son estos libros?, ¿quién los escribe?, ¿conocen los autores a los alumnos que los usarán o a los enseñantes que se basarán en ellos para enseñar? (…) Deberíamos dejar que el enseñante controle los materiales, no al revés (p.28).
Nesher, (2000).	"Los enunciados que los libros de texto presentan al alumnado no describen la realidad, sino que son meros recursos pedagógicos que crean textos artificiales" (p.115).
De Guzmán, (2001).	"Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de meros ejercicios y carentes de verdaderos problemas. La apariencia exterior puede ser engañosa" (p.11).
Hernández, (2004).	En nuestro país, los libros de texto siguen centrados en la ejecución aislada de algoritmos (…) Este masivo trabajo mecánico se produce en detrimento de la puesta en marcha de procesos cognitivos más complejos como el razonamiento o la representación, procesos que entran en juego a la hora de resolver problemas verbales. En la mayoría de las editoriales analizadas el trabajo con problemas se limita a una mera muestra que, por su gran escasez, casi no puede dejar huella en los alumnos" (p.71).

Juidías y Rodríguez, (2007).	El énfasis, puesto hasta la fecha, tanto en el aula como en los libros de texto, sobre los ejercicios de aplicación para la ejercitación y la valoración de los conocimientos y destrezas matemáticos puede haber contribuido a la desvalorización de las matemáticas como disciplina de probada utilidad, a la desmotivación de los alumnos e, incluso, al fracaso de una buena parte de éstos (p.262).
Canals, (2010).	Se necesita gente que investigue en didáctica, en el sentido de probar, corregir, reintentar (…) No se puede ir con un formulario estudiado, un libro de texto (…). Yo los quitaría (…) Hay maestros que los ven muy útiles. Adelante pues, si los encuentran útiles, siempre que sepan prescindir de ellos cuando sea necesario. Pero acaban siendo víctimas del libro de texto. (Canals, 2010, en Bienés, 2010, p.47). Las editoriales son empresas que quieren vender su producto. El tema de los libros de texto en las escuelas es un aspecto más del liberalismo capitalista de nuestra sociedad (…). Una educación de calidad ha de partir de la experiencia vital del niño, el saber no es compartimentado, como aparece en los libros de texto. Las cosas vividas son más auténticas, siempre motivarán más a los alumnos que aquello que encuentran escrito en la página de un libro de texto (Canals, 2010, en Biniés, 2010, p.57).
Verschaffel, (2012).	Según Verschaffel (2012), la mayoría de los problemas presentados por los libros de texto se enuncian con formas semánticamente pobres, (estereotipadas), y con palabras clave y otro tipo de “pistas”, para que el alumno identifique y ejecute de forma rutinaria la operación necesaria que le lleve de forma inmediata a la solución. Asimismo, en estos problemas, apenas se incluye información irrelevante, y por lo general, se pide una respuesta numérica precisa y única. Por otra parte, en los enunciados de estos problemas, se presuponen ideas que contradicen conocimientos del mundo real, de modo que: “no debería sorprender que una buena parte del alumnado desarrolle, gradual pero inevitablemente, percepciones y tácticas ante la resolución de problemas verbales con dosis importantes de falta de sentido” (Verschaffel, 2012, p.35).
Vicente, (2013).	En resumen, mi opinión es que los problemas de matemáticas que se encuentran los alumnos en sus libros de texto no ayudan como sería deseable a la aplicación de los conocimientos adquiridos en las clases, porque la simulación que hacen de la realidad es bastante distorsionada. (…) Además del tipo de problemas que proponen los libros, otros dos aspectos de la vida en las aulas que tampoco ayudan a que los alumnos desarrollen su habilidad para resolver problemas de matemáticas son, por una parte, el modo en que los libros enseñan a resolver problemas a los alumnos, y por otra, el grado de confianza que los maestros parecen depositar en el proceso de resolución propuesto por los libros (p.74).
Castro y Ruiz, (2015).	Es discutible considerar como tareas de resolución de problemas las propuestas en un libro de texto, que ofrece ejercicios de cálculo, por ejemplo, sumas de tres números como la siguiente: 370 + 875 +692, y a continuación pide que se apliquen y resuelvan cuestiones como: La madre de Juan fue al supermercado y gastó 370 euros en una televisión, 875 en un sofá y 692 en un ordenador ¿Cuánto ha gastado en total? (p.92).

I.5. Síntesis del Capítulo I

- A lo largo de este primer capítulo hemos intentado ofrecer al lector un panorama general que englobara las distintas definiciones que se han dado de problema y R.P desde principios del siglo pasado hasta la actualidad. La revisión de estos conceptos se ha estructurado en función de los tres focos de estudio de la educación matemática propuestos por Bishop (2000), así como los tres niveles de análisis planteados por Puig (1996). En cada uno de estos focos-niveles, hemos incorporado, por un lado, una serie de ideas y conceptos aportados por diferentes disciplinas (idea de dificultad, obstrucción, reconocimiento y aceptación, umbral de problematicidad, etc.), que ayudasen a comprender la evolución y el estado actual de esta cuestión; y por otro lado, hemos integrado un elemento clave de nuestra tesis, el libro de texto, que quedaría situado dentro de esta clasificación en el último nivel, el contexto, donde entran en la escena educativa la totalidad de los elementos constitutivos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

- El estudio de los problemas y la R.P ha sido abordado desde diferentes focos, perspectivas y ámbitos de estudio, razón por la que la conceptualización de estos términos permanece controvertida. El tratamiento de los problemas y la R.P en los libros de texto y en las prácticas educativas del aula ha contribuido a acentuar esta confusión conceptual, al no establecerse claramente los límites entre *ejercicios* y *problemas*.

- Stanic y Kilpatrick (1987) distinguieron tres perspectivas, todavía vigentes, en función del papel que desempeña la R.P en el aula: problemas como *contexto*, como *habilidad* y como *arte*. Lejos de la vertiente ideal (*enseñanza vía o a través de*), que considera la R.P como un aspecto nuclear de las matemáticas, en las prácticas habituales del aula y en los libros de texto los problemas son tratados como *práctica rutinaria* para la ejercitación de los contenidos explicados previamente (*enseñanza para*), y como *habilidad o subhabilidades* mal interpretadas, donde se inhibe el razonamiento (*enseñanza sobre*).

- Las dos "oleadas de la revolución cognitiva" (De Corte et al., 1996) supusieron un cambio decisivo a la hora de abordar la investigación de los problemas y la R.P, hasta ese momento dominada por el paradigma conductista.

- Durante la "primera oleada", en la década de los setenta, se produce un *"giro hacia lo cognitivo"*. Asimismo, comienza a despertarse un interés por la investigación de los factores afectivos y contextuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. No obstante, se establece una frontera entre la dimensión cognitiva y la dimensión afectivo-social.

- Durante la "segunda oleada" de la revolución cognitiva, en la década de los ochenta, se desarrollaron distintos modelos computacionales explicativos de los procesos cognitivos que subyacen a la R.P. Todos los modelos coinciden en señalar la relevancia del conocimiento conceptual o matemático en el proceso de R.P, sin embargo, para los modelos posteriores a los computacionales clásicos, además del conocimiento conceptual, son necesarios otros tipos de conocimientos no estrictamente matemáticos. Esta "segunda oleada" supuso igualmente una visión más integradora en la investigación de la R.P, al no desvincular los procesos internos (cognitivos y afectivos) del alumno del contexto social y cultural donde tienen lugar (Greer, 1996).

- A pesar de los avances en educación matemática durante la década de los ochenta, actualmente persiste la disociación entre la investigación, los discursos de las políticas de las reformas y la práctica educativa. Si bien a nivel teórico se reconoce la importancia de la integración de los factores cognitivos, afectivos y socioculturales, en la práctica educativa se produce una visión reducida del proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, al separar los factores afectivos y socioculturales de los cognitivos. Las dificultades del aprendizaje de las matemáticas, en general, y de la R.P, en particular, son explicadas principalmente en términos cognitivos.

- La publicación del informe Cockcroft, en la década de los ochenta, constituyó un revulsivo a la hora de entender en qué debía consistir el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este informe se plantearon multitud de cuestiones que todavía permanecen sin una respuesta definitiva en la práctica docente, entre otras: *"¿qué matemática han de aprender los alumnos?" y ¿cómo han de enseñarse?"* (Informe Cockcroft, prólogo, p. 13).

- Muchas de las críticas recibidas por los libros de texto de matemáticas se han dirigido a cuestionar su utilidad como un recurso material efectivo para abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la R.P. Estas críticas se han centrado principalmente en aspectos pedagógico-didácticos, como los tipos de problemas que se incluyen en los textos escolares, más cercanos a la función del ejercicio; el carácter superficial de los modos de resolución; la desprofesionalización docente; la distorsión de la realidad, o la compartimentación del conocimiento. Asimismo, han sido cuestionados aspectos axiológicos, como el olvido del desarrollo de la personalidad integral del alumno; o sociales, como la economía política del libro de texto, esto es, la influencia ejercida por el mercado editorial.

- Finalmente, en las figuras 4 y 5 se presenta una síntesis de las ideas más relevantes relacionadas con los conceptos de problema y R.P, así como las principales críticas recibidas por el libro de texto de matemáticas desde la década de los años ochenta del siglo pasado.

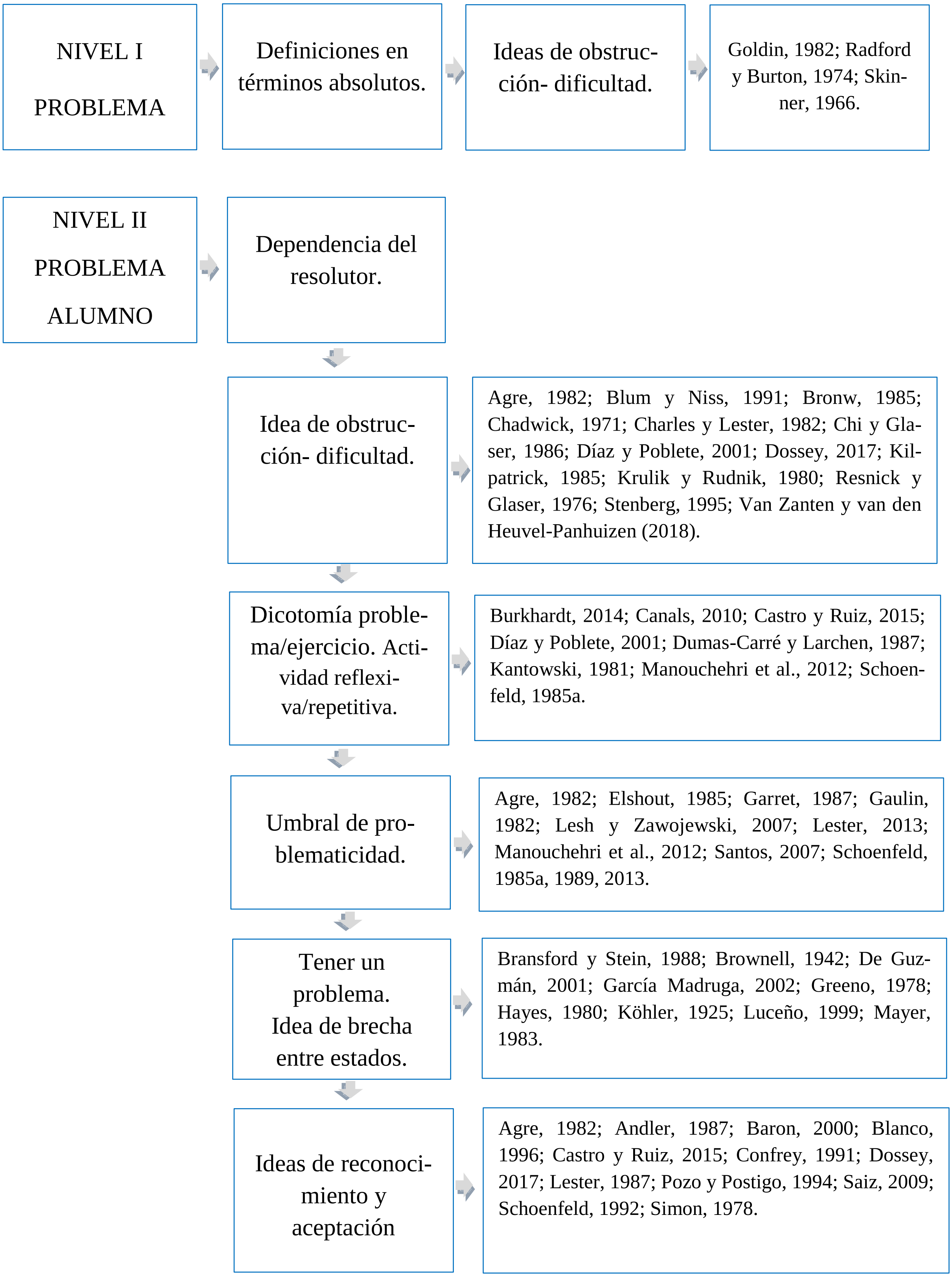
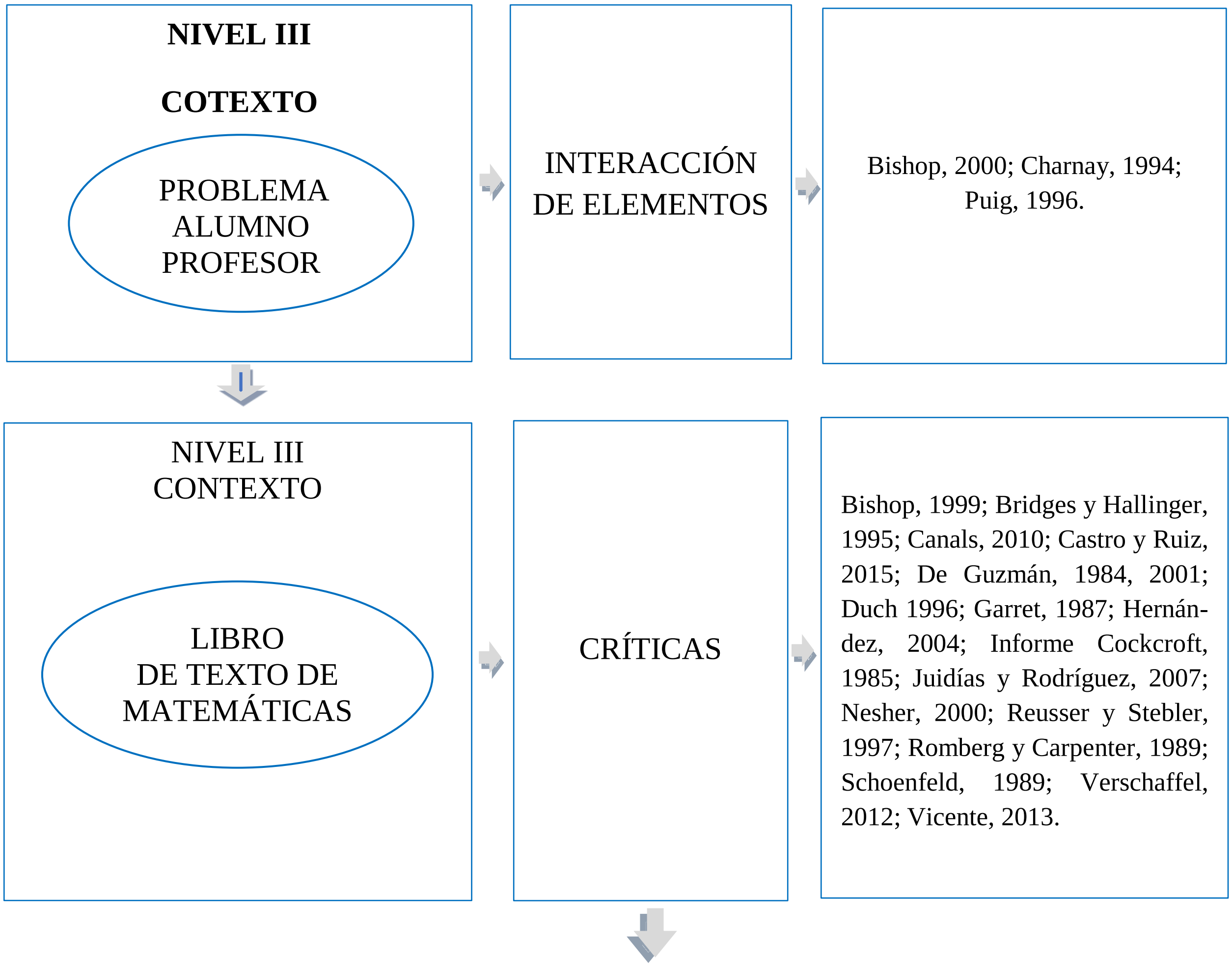


Figura 4. Relación de ideas y autores sobre la definición de problema y resolución de problemas.Elaboración propia.



- Supeditación del problema al ejercicio.
- Cuestionamiento del tipo de problemas propuestos: ¿*qué* se enseña?;

  y de los modos de enseñanza: ¿*cómo* se enseña?
- Subordinación y control de la función docente.
- Compartimentación del saber.
- Simulación distorsionada de la realidad.
- Producto del liberalismo capitalista de nuestra sociedad.
- Desvalorización de las matemáticas, desmotivación y fracaso de los alumnos.
- Olvido de la formación de la personalidad integral de los alumnos.

Figura 5. Principales críticas dirigidas al libro de texto de matemáticas. Elaboración propia.

CAPÍTULO II

LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES DE ESTRUCTURA ADITIVA

II.1. Introducción

A lo largo de escolaridad obligatoria los alumnos habrán de enfrentarse a la resolución de diferentes tareas matemáticas. Tal como señalan Vicente y Orrantia (2007), para resolver algunas de ellas los alumnos: "necesitarán conocimientos exclusivamente matemáticos, mientras que para resolver otras, además de esos conocimientos matemáticos, necesitarán otros acerca del mundo real, adquiridos a lo largo de la experiencia vital" (p.61). Así, estos autores establecen un continuo entre las distintas tareas matemáticas, de acuerdo con la relevancia que cobra la comprensión situacional para resolverlas.

Como hemos visto en el capítulo anterior, en un extremo de ese continuo se situarían las tareas rutinarias, esto es, los ejercicios, que aparecen desligados de cualquier contexto situacional, y para cuya resolución basta con aplicar de forma mecánica la operación aritmética correspondiente. En el polo opuesto de este continuo, se situarían las tareas no rutinarias, es decir, los problemas. Además, en función del criterio sobre la importancia de la comprensión situacional en la R.P, podemos precisar todavía más esta distinción, separando los problemas realistas de los problemas algebraicos y aritméticos.

La resolución de los problemas realistas o auténticos problemas, requiere de "un razonamiento basado en el mundo real" (Vicente y Orrantia, 2007, p.61), de ahí que la interpretación del contexto situacional que envuelve al problema se haga imprescindible para su resolución. De hecho, la utilización exclusiva del conocimiento matemático para resolver estos problemas puede llevar al sujeto a soluciones sin sentido. Por ejemplo, es célebre el problema realista de "el autobús" planteado por Verschaffel, De Corte y Lausure en 1994:

> *450 soldados deben ser transportados a su lugar de entrenamiento. En cada autobús pueden entrar 36 soldados. ¿Cuántos autobuses serán necesarios?*

Esta situación problemática va más allá de la aplicación del algoritmo, ya que requiere de la interpretación del resto de una división no exacta (número de soldados que quedarían fuera del autobús) para ajustar el cociente (solicitar un autobús más, para que todos los soldados puedan trasladarse). De este modo, la resolución de este problema no termina con la aplicación del algoritmo correspondiente, se hace necesaria la interpretación de la situación descrita en el enunciado del problema.

Por otro lado, los *story word problems* también son problemas de enunciado verbal, pero se diferencian de los problemas realistas por la posibilidad que ofrecen de ser resueltos, a veces, sin la intervención del conocimiento situacional. No obstante, como veremos en la segunda parte de este capítulo, según algunos modelos teóricos es necesaria la comprensión de la situación en la que se inserta el problema para su correcta resolución.

Dentro de los *story word problems*, podemos diferenciar entre aquellos problemas que resuelven con operaciones algebraicas, y aquellos otros que se resuelven con operaciones aritméticas. Los problemas algebraicos proponen situaciones que se resuelven mediante el uso de expresiones compuestas de constantes y variables (números y letras). En nuestro sistema educativo, forman parte del currículo del área de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria. Por otro lado, los problemas aritméticos verbales (PAVs), objeto de nuestra tesis, son más sencillos de resolver, y forman parte del currículo de la Educación Primaria.

En la primera parte de este capítulo, detallaremos los principales rasgos que conforman los PAVs a través de su concepto, naturaleza, tipología y dificultades. A partir de estos aspectos, responderemos, en primer lugar, a estas dos cuestiones: ¿por qué este tipo de problemas posee una doble naturaleza?, y ¿por qué algunos tipos de PAVs son más difíciles de resolver que otros? Posteriormente, en la segunda parte del capítulo, describiremos los diferentes modelos teóricos explicativos del proceso de R.P, así como los estudios empíricos de reescritura. Esta descripción nos permitirá responder, en segundo lugar, a estas otras dos cuestiones: ¿en qué consiste resolver un problema?, y ¿qué tipo de ayudas textuales pueden resultar efectivas para facilitar a los alumnos el proceso de resolución?

II.2. Concepto y naturaleza

Para conceptualizar los **PAVs de estructura aditiva** y establecer su naturaleza, partiremos de la siguiente definición: "descripción verbal de una situación problemática de la que surgen una o más preguntas, cuya respuesta puede obtenerse mediante la aplicación de operaciones matemáticas a los datos numéricos presentes en el enunciado" (Verschaffel et al., 2014, p.641). Por otra parte, bajo la expresión **"de estructura aditiva"** se agrupan aquellos problemas para cuya resolución es necesario el conocimiento operativo de la adición y la sustracción. De igual forma, para la resolución de los problemas aritméticos "de estructura multiplicativa" sería necesario el conocimiento operativo de la multiplicación y la división.

Si reparamos en esta definición, observaremos que son dos los rasgos atribuidos por Verschaffel et al. (2014) al problema:

En primer lugar, estos autores hablan de una "descripción verbal", que hace referencia al formato textual con que se formulan estos problemas: un enunciado verbal con una o varias preguntas. Por tanto, el alumno a la hora de enfrentarse a la resolución de un PAV, tendrá necesariamente que hacer uso de la lectura, de ahí su **naturaleza textual.**

En segundo lugar, los autores hablan del modo de obtener la respuesta requerida por esa/as pregunta/s: "mediante la aplicación de operaciones matemáticas a los datos numéricos presentes en el enunciado" En consecuencia, tras la lectura, el alumno tendrá que utilizar sus conocimientos matemáticos para: en primer lugar, determinar qué tipo de relaciones se establecen entre los conjuntos del problema; en segundo lugar, decidir qué operación debe aplicarse; y en tercer lugar, ejecutarla correctamente, de ahí su **naturaleza conceptual o matemática.**

Tal como apuntamos en la introducción de esta tesis, un aspecto fundamental para entender nuestro trabajo de investigación es tener presente esta doble naturaleza de los PAVs: conceptual o matemática y textual.

- Conceptual**,** porque a la estructura del problema subyace una ecuación matemática con datos numéricos, que deberá ser resulta aplicando uno o varios algoritmos.

Por ejemplo:

> Laura tenía 21 metros de cable. Compró algunos metros más. Ha gastado 95 metros y al final le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros compró Laura?
>
> ↳ Ecuación matemática subyacente: 21 + X – 95 = 11.

- Textual, porque si bien la resolución del problema termina con la ejecución de una o varias operaciones aritméticas, que dan lugar a la respuesta numérica, como hemos afirmado, el problema siempre comienza con la lectura de un enunciado textual. Los PAVs son, por tanto, textos específicos con unas características propias, pero aun así son "verdaderos textos" o "auténticas entidades discursivas" (Orrantia, 2006, p.171). Y como en todo texto, la lectura es la herramienta que permitirá a los alumnos comprender y resolver la situación problemática (Vicente, 2006). Como bien apuntan Bermejo y Rodríguez (1987), la comprensión de los problemas verbales presenta grandes similitudes con la compresión de textos, por ello la resolución de estos va más allá del conocimiento matemático. De hecho, muchos autores, al referirse a los problemas verbales han hecho alusión a su carácter textual:

"Un problema aritmético de enunciado verbal es una unidad textual autocontenida, situada en el contexto de la clase de matemáticas." (Nesher, 2000, p.114).

"(…) las estructuras abstractas de las matemáticas se relacionan con fenómenos del mundo real en general, y con la interpretación de problemas verbales como género textual en particular" (Verschaffel, 2012, p.29).

"En su versión más clásica, los problemas verbales toman la forma de textos cortos donde se describe lo esencial de una situación (…)" (Verschaffel et al., 2000, p.28).

"En términos globales, la resolución de un problema comienza con un texto lingüístico y termina con una operación que da lugar a una solución numérica" (Orrantia, 2006, p.169).

"Los problemas aritméticos verbales son descripciones textuales de situaciones que se suponen comprensibles para los lectores, en las que se pueden contextualizar preguntas matemáticas" (Vicente y Manchado, 2017, p.254).

Resumiendo, los PAVs tienen una doble naturaleza, por tanto, una comprensión genuina de los mismos implica comprender el *problema como estructura matemática* y *como texto.* Tanto es así que para su resolución *"*es necesario construir un puente: se requiere un vínculo entre la semántica del lenguaje de las matemáticas y la semántica del lenguaje del mundo en que se quieren aplicar" (Nesher, 2000, p.112). Este puente donde convergen ambos lenguajes son los PAVs.

II.3. Tipología de problemas aritméticos verbales de estructura aditiva

Las primeras clasificaciones sobre los diferentes tipos de PAVs de estructura aditiva atendían a variables superficiales, tales como el número de palabras existentes en el problema, el orden de las proposiciones en el enunciado, el tipo de vocabulario, o la complejidad sintáctica del texto problema (Nesher, 1981). Sin embargo, con la "segunda oleada de la revolución cognitiva" (De Corte et al., 1996), en la década de los años ochenta, se desarrollaron diferentes estudios cuyo objeto fue analizar cómo los niños resolvían problemas aritméticos de estructura aditiva. Según Orrantia y Rodríguez (2008), de estos estudios surgió un elemento clave que ha orientado en buena medida la investigación posterior, nos referimos a la distinción de tres tipos de problemas (*cambio, combinación y comparación*), que se diferencian entre sí por su estructura semántica subyacente, variable con una influencia relevante en su nivel de dificultad.

Así, una de las clasificaciones que surgió durante esta "segunda oleada de la revolución cognitiva" y que más aceptación ha recibido en el ámbito de la resolución de PAVs de estructura aditiva, fue la propuesta por Heller y Greeno (1978). Estos autores distinguieron tres categorías de PAVs de estructura aditiva, en función de ciertas formas básicas que vertebran los enunciados y, por tanto, las relaciones numéricas contenidas en ellos, es decir, la estructura semántica subyacente: problemas de *cambio*, problemas de *combinación* y problemas de *comparación.* Posteriormente, Carpenter y Moser (1983), incluyeron una cuarta categoría denominada problemas de *igualación*, que combina las categorías de cambio y comparación: una acción (un cambio) se realiza con una de las cantidades con el fin de igualarla a otra cantidad con la que ha sido comparada.

A partir de esta clasificación, Fuson (1992) diferenció dos categorías de problemas en función de dos aspectos relacionados: si el problema implica una operación *unitaria* o *binaria*, y si el problema presenta una estructura *estática* o *dinámica*:

Desde la *concepción unitaria*, se parte de un conjunto de base, que es modificado añadiendo (sumando), o quitando (restando) otro conjunto, y dando como resultado un tercer conjunto. Por ejemplo: *Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó/perdió 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?* En este problema, se parte de un conjunto inicial (5 canicas), al que se le aplica una acción de añadir o quitar otro conjunto (3 canicas), y que da como resultado un tercer conjunto final (8 canicas o 2 canicas).

Desde la *concepción binaria* el planteamiento es diferente. Por ejemplo: *Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?* En este caso, se parte de la existencia de dos conjuntos disjuntos iniciales (3 canicas y 5 canicas), y no un único conjunto como en el caso anterior, que se unen posteriormente para obtener un tercer conjunto final (8 canicas).

Aunque desde ambas concepciones se puede llegar a resultados idénticos, las diferencias son evidentes: la concepción unitaria plantea una acción que modifica el primer conjunto mediante el segundo conjunto, mientras que en la binaria no hay acción en el planteamiento de ambos conjuntos. Por ello, en el primer caso se habla de una situación *dinámica*, propia de la secuencia prototípica de los textos narrativos, y en el segundo de una situación *estática*, propia de la secuencia prototípica de los textos descriptivos. En las figuras 6, 7 y 8 se presentan los ejemplos de estas secuencias:

- Secuencia narrativa: *Juan tenía 8 canicas. Por la mañana ganó 3. ¿Cuántas canicas tiene ahora?* (Problema de cambio, *dinámico*).
- Secuencia descriptiva: *En un camión hay 23 cajas de manzanas, 28 de peras y 37 de naranjas. ¿Cuántas cajas de fruta hay en el camión?* (Problema de combinación, *estático*).
- Secuencia descriptiva: *Una grúa mide 12 metros de alto y un edificio mide 9 metros más que la grúa. ¿Cuánto mide el edificio?* (Problema de comparación, *estático*).

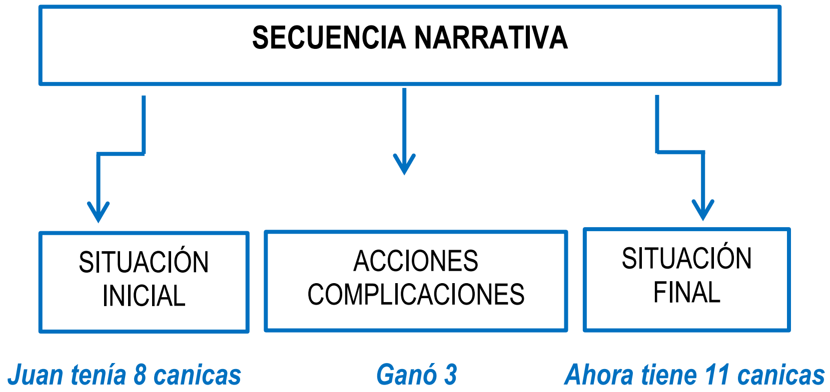


Figura 6. Superestructura de los textos narrativos aplicada a un problema de cambio. Elaboración propia.

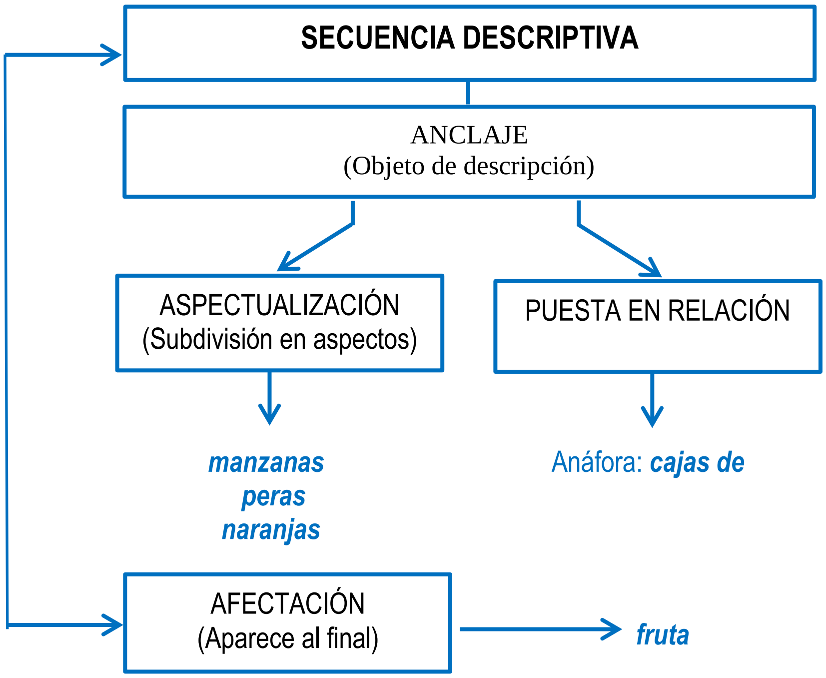


Figura 7. Superestructura de los textos descriptivos aplicada a un problema de combinación. Elaboración propia.

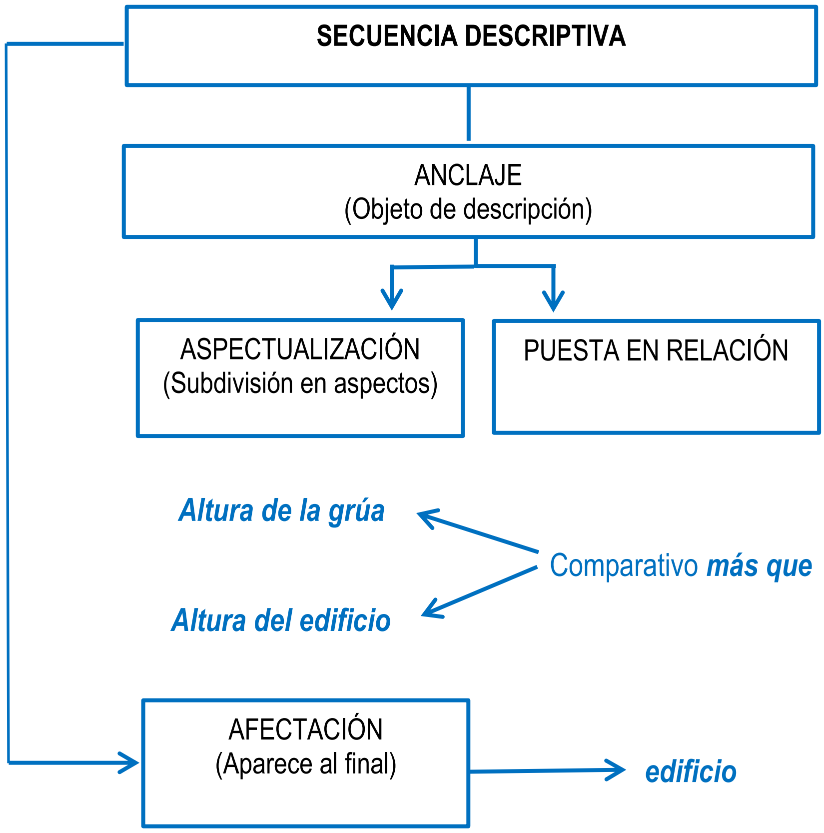


Figura 8. Superestructura de los textos descriptivos aplicada a un problema de comparación. Elaboración propia.

Partiendo de los criterios anteriores, veamos de forma pormenorizada la descripción de cada uno de los distintos tipos de PAVs de estructura aditiva, objeto de análisis de nuestra tesis.

II.3.1. Los problemas simples

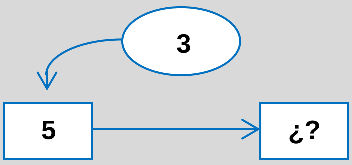
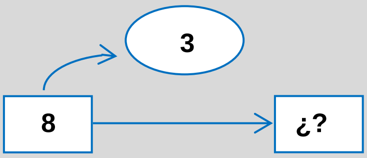
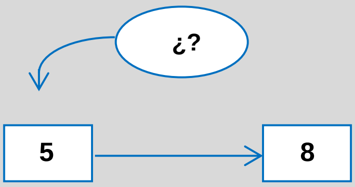
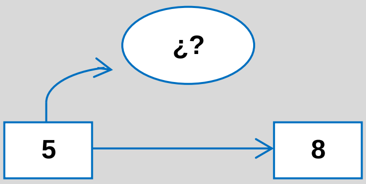
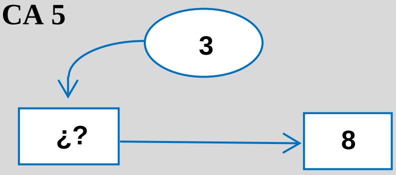
- **Los problemas de cambio**

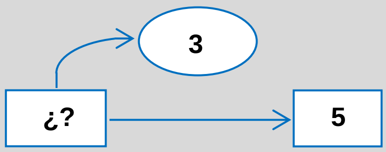
Estos problemas parten de una cantidad inicial, a la que se añade o se quita una segunda cantidad, para dar como resultado una tercera cantidad final que será mayor (en el caso de *cambio a más*) , o menor (en el caso de *cambio a menos*).

La estructura de este tipo de problemas es *dinámica,* ya que el cambio o transformación se produce a partir de una acción sobre el número de elementos del conjunto inicial, de manera que este se modifica dando como resultado un conjunto final.

En estos problemas la incógnita o cantidad desconocida puede ser cualquiera de los tres conjuntos implicados: el conjunto inicial, el conjunto de cambio o transformación, o el conjunto final. Así, se puede buscar el conjunto final, conociendo el conjunto inicial y el de cambio; o bien, el conjunto de cambio, conociendo el conjunto inicial y final; o bien, el conjunto inicial, conociendo el conjunto de cambio y final. Cada una de estas tres posibilidades se puede enfocar desde dos puntos de vista: la cantidad crece (aumento mediante ganancia), o decrece (disminución mediante pérdida). De ahí que sean seis los tipos de problemas de cambio como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 9. Tipos de problemas de cambio. Adaptada de Heller y Greeno, 1978.

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
CA 1 	CAMBIO 1 Se parte de una cantidad inicial, que se incrementa mediante una acción de añadir. La pregunta se refiere al conjunto final. ENUNCIANO TIPO Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA 2 	CAMBIO 2 Se parte de una cantidad inicial, que sufre un decremento. La pregunta hace referencia al conjunto final. ENUNCIANO TIPO Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA 3 	CAMBIO 3 Se parte de una cantidad inicial, que sufre un cambio de cantidad desconocida, y que da como resultado un conjunto final conocido y mayor que el conjunto inicial. La pregunta hace referencia al conjunto de cambio. ENUNCIANO TIPO Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó algunas canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
CA 4 	CAMBIO 4 Se parte de una cantidad inicial, que experimenta un cambio de cantidad desconocida, y que da como resultado una cantidad conocida y menor que la inicial. La pregunta hace referencia al conjunto de cambio. ENUNCIANO TIPO Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
CA 5 	CAMBIO 5 Se parte de una cantidad inicial desconocida, que se incrementa con un conjunto de cantidad conocida, y que da como resultado otra cantidad conocida. ENUNCIANO TIPO Juan tenía algunas canicas. En una partida ganó 3 canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?

CA 6  	CAMBIO 6 Se parte de una cantidad inicial desconocida, que sufre un decremento con un conjunto de cantidad conocida, y que da como resultado otra cantidad conocida. ENUNCIANO TIPO Juan tenía algunas canicas. En una partida perdió 3 canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?

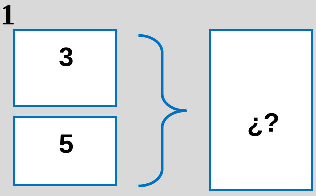
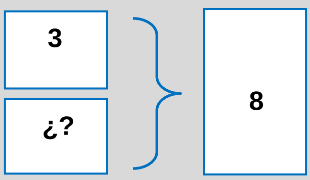
- **Los problemas de combinación**

Esta segunda categoría recoge aquellos problemas donde se combina una cantidad con otra para dar como resultado una tercera cantidad. Dicho de otro modo, en este tipo de problemas de parte-todo se pone en juego una concepción binaria de las operaciones.

A diferencia de las situaciones de cambio, las de combinación son *estáticas*, ya que no se producen modificaciones en las cantidades implicadas.

Puesto que el papel que tienen las partes es simétrico, dentro de esta categoría se distinguen sólo dos tipos de problemas: uno dirigido a la obtención *del todo* a partir de *las partes*, y otro en el que se trata de hallar el valor de *una de las partes*, conocida *la otra parte y el todo*. Por tanto, sólo hay dos tipos de problemas de combinación tal como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 10. Tipos de problemas de combinación. Adaptada de Heller y Greeno, 1978.

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
CO 1  	COMBINACIÓN 1 Las dos partes se reúnen para formar un todo. ENUCIADO TIPO Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?
CO 2  	COMBINACIÓN 2 Se conoce el todo y una de las partes. Se pregunta por la otra parte. ENUNCIADO TIPO Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas (o Pedro tiene 5 canicas). ¿Cuántas canicas tiene Pedro (o Juan)?

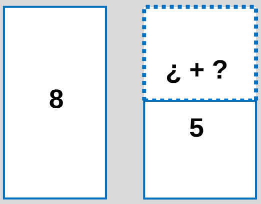
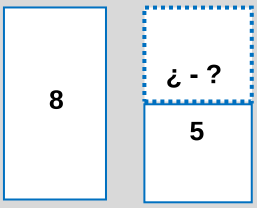
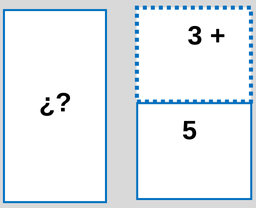
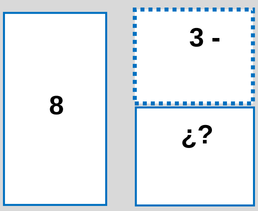
- **Los problemas de comparación**

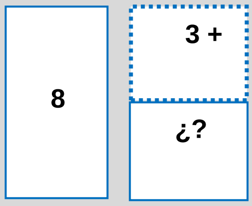
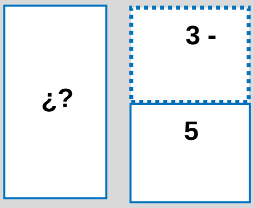
Al igual que los problemas de combinación, pero a diferencia de los de cambio, los conjuntos que constituyen los problemas de comparación no experimentan modificaciones, por lo que se consideran situaciones *estáticas*.

En esta categoría se establece una comparación entre un primer conjunto, denominado de *referencia o referente*, con un segundo conjunto, que recibe el nombre de conjunto *comparado o referido*, con el fin de llegar a un tercer conjunto que representa la *diferencia* entre ambos. La incógnita puede aparecer en el conjunto diferencia, conociendo el conjunto referente y referido; también en el conjunto referido, conociendo el conjunto diferencia y referente; y si la incógnita alude al conjunto referente, entonces se conocen los conjuntos diferencia y referido.

En función de la relación comparativa *"más que"* o *"menos que"* esta categoría está integrada por seis tipos de problemas que se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 11. Tipos de problemas de comparación. Adaptada de Heller y Greeno, 1978.

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
CP 1 	COMPARACIÓN 1 Se conoce el conjunto de referencia y el de comparación. La pregunta alude al conjunto diferencia en términos de "cuántos más" elementos tiene el conjunto comparado respecto al referente. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?
CP 2 	COMPARACIÓN 2 También se conoce el conjunto de referencia y el de comparación. La pregunta alude al conjunto diferencia, pero en términos de "cuántos menos" elementos tiene el conjunto comparado respecto al de referencia. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro menos que Juan?
CP 3 	COMPARACIÓN 3 Se conoce el conjunto referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado, indicando "cuántos más" tiene. Se pregunta por este conjunto comparado. ENUNCIADO TIPO Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
CP 4 	COMPARACIÓN 4 Se conoce el conjunto de referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado, indicando el número de elementos "menos" que tiene. Se pregunta por el conjunto comparado. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

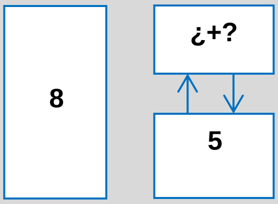
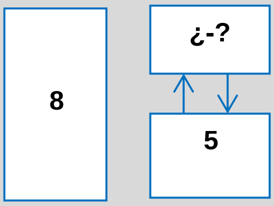
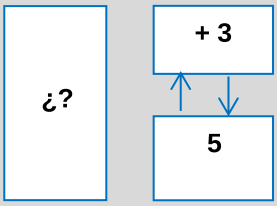
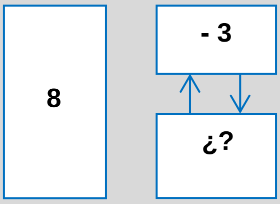
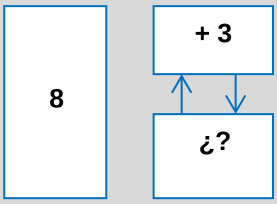
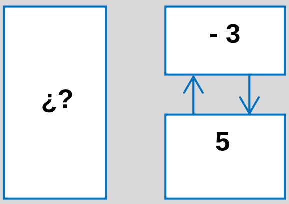
CP 5 	COMPARACIÓN 5 Se conoce el conjunto comparado y el de diferencia, apuntando cuántos elementos "más" tiene el de referencia. Se pregunta por ese conjunto de referencia. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
CP 6 	COMPARACIÓN 6 Se conoce el conjunto comparado y la diferencia expresada en términos de cuántos "menos" tiene el conjunto comparado respecto al de referencia. Se pregunta por ese conjunto de referencia. ENUNCIADO TIPO Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

- **Los problemas de igualación**

Desde el punto de vista conceptual estos problemas no suponen un nuevo tipo, sino un caso especial de los problemas de comparación, ya que se inscriben dentro de una misma estructura semántica. No obstante, mientras que los problemas de comparación son estáticos (las cantidades no se modifican), los problemas de igualación demandan una transformación de una cantidad en otra, adoptando así un carácter dinámico. Estos problemas implican la combinación de problemas de comparación y cambio, esto es, una situación *dinámica* dentro de otra, más global, *estática*.

En estos problemas existe un *conjunto mayor*, otro *menor* y un *conjunto diferencia*, que habría que añadir o quitar para igualar los conjuntos. Dentro de esta categoría se pueden presentar tres situaciones: en la primera, la incógnita aparece en el conjunto diferencia, siendo conocidos los conjuntos mayor y menor; en la segunda, la incógnita es el conjunto mayor, siendo conocidos los conjuntos menor y diferencia; y en la tercera, la incógnita se presenta en el conjunto menor, dados los conjuntos mayor y diferencia. Puesto que en esta categoría también puede darse un incremento o una disminución, nos encontramos con seis subtipos de problemas, tal como se muestra en esta tabla:

Tabla 12. Tipos de problemas de igualación. Adaptada de Carpenter y Moser, 1983.

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
IG 1  	IGUALACIÓN 1 Se conoce el conjunto mayor y el menor, y se pregunta por la diferencia en términos de cuánto hay que añadir al comparado para igualar los dos conjuntos. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que dar a Pedro para tener las mismas que Juan?
IG 2  	IGUALACIÓN 2 También se conoce el conjunto mayor y el comparado, y se pregunta por la diferencia en términos de cuánto hay que quitar al mayor para que los dos conjuntos sean iguales. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tienen que quitar a Juan para que tenga las mismas que Pedro?
IG 3  	IGUALACIÓN 3 Se conoce el conjunto menor y la diferencia que habría que añadirle para igualarlo con el mayor, que es el desconocido. ENUNCIADO TIPO Pedro tiene 5 canicas. Si le dieran 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
IG 4  	IGUALACIÓN 4 Se conoce el conjunto mayor y la diferencia que habría que quitarle a éste para igualarlo con el menor, que en este caso es la cantidad desconocida. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Si le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG 5  	IGUALACIÓN 5 Se conoce el conjunto mayor y la diferencia que habría que añadirle al menor, que es el desconocido, para que ambos fueran iguales. ENUNCIADO TIPO Juan tiene 8 canicas. Si Pedro tuviera 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG 6  	IGUALACIÓN 6 Se conoce el conjunto menor y la diferencia existente respecto al conjunto mayor, que habría que quitar al mayor para que ambas cantidades fueran iguales. ENUNCIADO TIPO Pedro tiene 5 canicas. Si a Juan le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

En suma, existen veinte tipos de PAVs de estructura aditiva simples o de una sola operación, que se distinguen entre sí por la estructura semántica subyacente (*cambio, combinación, comparación e igualación*); por el carácter *dinámico/estático* de la relación entre los conjuntos del problema; por *la ubicación de los datos y la incógnita*; y por el *incremento* (suma) o *decremento* (resta) que experimentan las cantidades. En la siguiente tabla se muestra una síntesis de estos aspectos.

Tabla 13. Características de los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva.

ESTRUCTURA SEMÁNTICA			**UBICACIÓN DATOS**		**UBICACIÓN INCÓGNITA**
TIPOS	**CARACTER**	**CANTIDAD**	**PARTE INFORMATIVA**		**PREGUNTA**
CO 1	ESTÁTICO	Incremento	Parte	Parte	TODO
CO 2		Decremento	Todo	Parte	PARTE
CA 1	DINÁMICO	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
CA 2		Decremento	inicial	cambio	FINAL
CA 3	DINÁMICO	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
CA 4		Decremento	inicial	final	CAMBIO
CA 5	DINÁMICO	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
CA 6		Decremento	cambio	final	INICIAL
CP 1	ESTÁTICO	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
CP 2		Decremento	referente	referido	DIFERENCIA
CP 3	ESTÁTICO	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
CP 4		Decremento	referente	diferencia	REFERIDO
CP 5	ESTÁTICO	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
CP 6		Decremento	diferencia	referido	REFERENTE
IG 1	DINÁMICO Y	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
IG 2	ESTÁTICO	Decremento	mayor	menor	DIFERENCIA
IG 3	DINÁMICO Y	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
IG 4	ESTÁTICO	Decremento	menor	diferencia	MAYOR
IG 5	DINÁMICO Y	Incremento	Conjunto	Conjunto	CONJUNTO
IG 6	ESTÁTICO	Decremento	mayor	diferencia	MENOR

CO = combinación; CA = cambio; CP = comparación; IG = igualación.

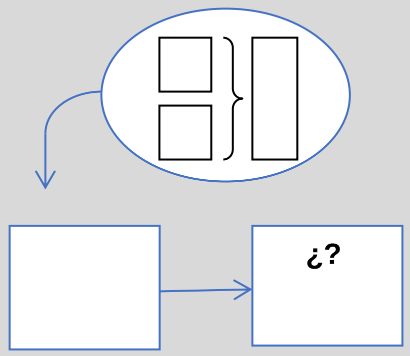
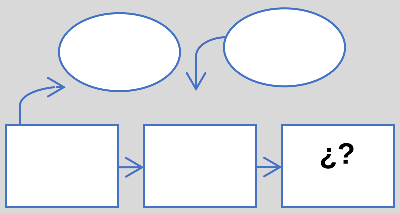
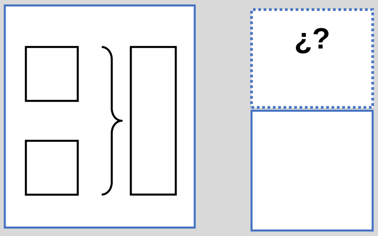
II.3.2. Los problemas compuestos

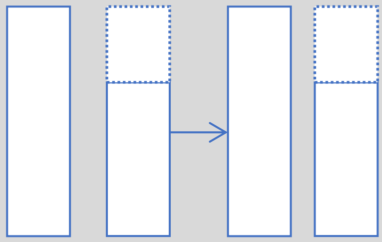
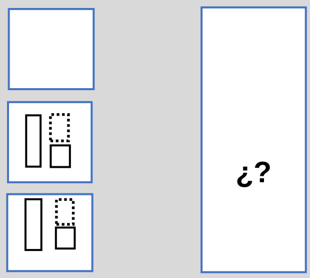
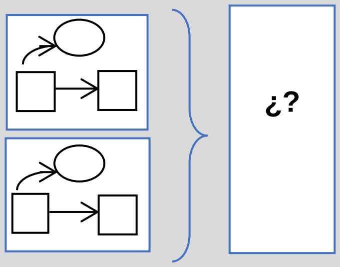
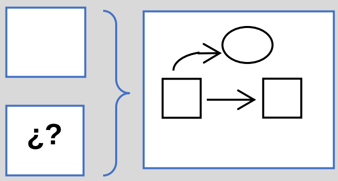
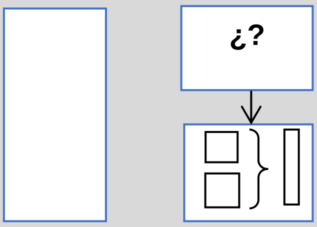
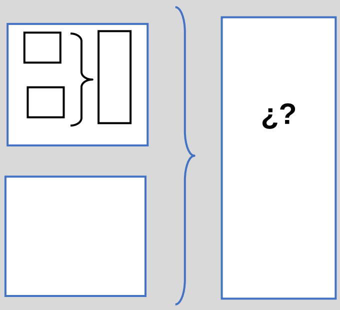
Los problemas simples, como acabamos de ver, se resuelven con una operación aritmética empleada una sola vez. Un problema compuesto de *n* etapas es aquel en el que se necesitan *n* operaciones para llegar a su solución. Nuestros estudios se centran también en el análisis de los problemas compuestos de estructura aditiva que pasamos a describir.

Obviamente, este tipo de problemas resulta más difícil de resolver que los problemas simples, puesto que su dificultad equivale a la suma de las dificultades de los dos o más problemas simples que los componen, más la dificultad añadida que se deriva de la intersección que se produce entre ambos. No obstante, como apunta Vergnaud (2001), queremos aclarar que su dificultad, tal como ocurre en los problemas simples, no radica meramente en el dominio y aplicación de los algoritmos de adición y sustracción, sino en la determinación de las relaciones semánticas vistas más atrás.

En un problema compuesto, la estructura semántica principal se identifica a partir de la pregunta del enunciado. Para clasificar estos problemas hemos seguido la propuesta de Orrantia et al. (2005), que distinguen once tipos de problemas compuestos (de la A a la K), aunque estos autores matizan que podrían identificarse nuevas categorías, bien combinando otras categorías simples, o bien a partir de la combinación de categorías compuestas.

Tabla 14. Categorías utilizadas para la clasificación de los problemas de dos o más operaciones. Tomado de Orrantia et al. (2005).

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
	CATEGORÍA A Problemas que combinan la estructura de cambio con la estructura de combinación, siendo la de cambio la estructura principal. La estructura de combinación puede aparecer en cualquiera de los conjuntos de la estructura de cambio. Y lógicamente el dato desconocido puede aparecer también en cualquiera de los conjuntos de la estructura principal. ENUNCIADO TIPO Sergio tenía 150 euros. El día de su cumpleaños su padre le regaló 35 euros y su madre 46 euros. ¿Cuánto dinero tiene Sergio ahora?
	CATEGORÍA B En esta categoría la estructura de cambio se repite sucesivamente. ENUNCIADO TIPO En un autobús viajaban 56 personas. En la primera parada bajaron 16 personas y en la segunda parada se subieron 12 personas. ¿Cuántas personas viajan ahora en el autobús?
	CATEGORÍA C La estructura principal es de comparación 1 ó 2 y el conjunto mayor o menor, o ambos se obtienen a partir de combinación. ENUNCIADO TIPO Luis tiene un álbum con 750 cromos y otro álbum con 380 cromos. Susana tiene un álbum con 560 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Luis más que Laura?

	CATEGORÍA D En esta categoría la estructura de comparación se repite sucesivamente (dos, tres o más veces) ENUNCIADO TIPO Alfredo tiene 26 canicas. Ramón tiene 7 canicas menos que Alfredo y Rosa tiene 9 canicas más que Ramón. ¿Cuántas canicas tiene Rosa?
	CATEGORÍA E Esta categoría es similar a la anterior, pero combinada con la estructura de combinación 1, por la tanto ésta actúa de estructura principal. En este caso, una o más de las "partes" vienen dadas por una comparación. ENUNCIADO TIPO En una bolsa hay 154 caramelos de fresa, 27 caramelos más de naranja que de fresa y 19 caramelos de limón más que de naranja. ¿Cuántos caramelos hay en total?
	CATEGORÍA F La estructura principal es de combinación 1 y una o más partes se obtienen a partir de la estructura de cambio. ENUNCIADO TIPO Roberto compró una camisa y un jersey. La camisa costaba 46 euros y el jersey costaba 37 euros. En cada prenda le hicieron una rebaja de 9 euros. ¿Cuánto se gastó Roberto en la compra de las dos prendas?
	CATEGORÍA G La categoría principal es de combinación 2, y el conjunto "todo" se obtiene a partir de un cambio 3 ó 4. ENUNCIADO TIPO Un juego de montaje tiene 130 piezas. Para hacer un barco Pedro ha utilizado 45 piezas grandes y el resto pequeñas, y le han sobrado 18 piezas. ¿Cuántas piezas pequeñas ha utilizado Pedro para hacer el barco?
	CATEGORÍA H La estructura principal es igualación 1, y el conjunto menor se obtiene a partir de una combinación 1. ENUNCIADO TIPO Carlos y Alba están haciendo un puzle de 5800 piezas. Carlos ha colocado ya 1214 piezas y Alba 897 piezas. ¿Cuántas piezas les faltan para terminar el puzle?
	CATEGORÍA I La estructura principal es de combinación 1, obteniéndose una de las partes a partir de una combinación 2. Éste es un caso especial de problemas ya que necesita ir acompañado de una estructura multiplicativa, puesto que de otra forma el cálculo de la parte de combinación 2 sería irrelevante. ENUNCIADO TIPO Una botella de litro de zumo de tomate pesa llena 1350 gr. Y vacía 385 gr. El bidón de 5 litros de zumo de tomate vacío pesa 675 gr ¿Cuánto pesa el bidón lleno?
CATEGORÍA J. Se combinan las categorías A (como principal) y F. CATEGORÍA K. Se combinan las categorías A (como principal) y E.	

II.3.3. Dificultades de los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva

Algunos PAVs resultan más difíciles de resolver que otros. Veamos en las siguientes líneas qué factores determinan su dificultad.

Existe un consenso en señalar que la estructura semántica de los PAVs constituye un factor explicativo de su dificultad (Bermejo y Rodríguez, 1988; Carpenter y Moser, 1983; Nesher, 1981; Orrantia, Morán, Gracia y González, 1994; Riley, Greeno y Heller, 1983). En general, los problemas de cambio son los más sencillos, debido probablemente a su estructura basada en una concepción unitaria. A estos problemas les seguirían los de combinación 1 (problemas que preguntan por el total, dadas las partes), aunque según Briars y Larkin (1984), las diferencias entre los problemas de cambio y combinación tienden a desaparecer por la similitud entre ambas categorías, puesto que la existencia de una acción implícita en los problemas de combinación posibilita que estos puedan resolverse por medio de un esquema unitario. Posteriormente, en este orden de dificultad se situarían los problemas de igualación, y finalmente los que entrañan más dificultad son los de comparación.

Ahora bien, este orden de dificultad establecido de acuerdo a la estructura semántica del problema debe matizarse, ya que existe otro factor más relevante incluso: la ubicación de la incógnita o conjunto desconocido. Como hemos podido observar en la tabla 13, la incógnita puede aparecer en cualquiera de los tres conjuntos, de modo que son tres las posibilidades existentes en los problemas de cambio (conjunto inicial, conjunto de cambio y conjunto final); tres en el caso de los problemas de comparación (conjunto referente, conjunto referido o comparado y conjunto diferencia); tres en el caso de los problemas de igualación (conjunto mayor, conjunto menor y diferencia); y dos en el caso de los problemas de combinación (una de las dos partes, o el total). Además, hemos de tener presente que los PAVs se expresan en términos aditivos (*"ganar", "juntar", "añadir" "más que" etc.*) o sustractivos, (*"perder", "rebajar", "descontar", "menos que" etc.*) por tanto, contamos con veinte tipos de PAVs de estructura aditiva: seis de cambio, seis de comparación, seis de igualación y dos de combinación.

La ubicación de la incógnita, como acabamos de comentar, constituye un factor relevante a la hora de explicar la dificultad del problema (Bermejo, 2012; Haylock y Cockburn, 2004; Hiebert, 1982, Riley et al., 1983; Sarama y Clements, 2009). En general, los alumnos presentan menores dificultades cuando la incógnita se sitúa en el resultado (a + b = ¿?); la dificultad aumenta cuando el término desconocido se sitúa en el segundo sumando (a + ¿? = c); y la máxima dificultad aparece cuando el término desconocido es el primero (¿? + b = c).

De acuerdo con este factor, Lewis y Mayer (1987) propusieron una clasificación de tipo dicotómico para categorizar los problemas de estructura aditiva, fundamentada en la relación entre la estructura superficial del problema y el algoritmo necesario para resolverlo. La estructura superficial de los problemas puede aparecer expresada mediante un lenguaje *consistente* o *inconsistente*. Así, los problemas canónicos o expresados con un lenguaje consistente resultan más fáciles de resolver que los problemas no canónicos o inconsistentes.

La mayor facilidad de los problemas consistentes radica en la existencia de una coherencia entre la estructura superficial del problema y la operación aritmética con que se resuelve.

Por ejemplo:

Juan tiene 3 canicas. En una partida ***gana*** *5canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan ahora?* 3 + 5 = 8 (ganar = sumar).

Juan tiene 8 canicas. En una partida ***pierde*** *5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan ahora?* 8 - 5 = 3 (perder = restar).

Sin embargo, en los problemas inconsistentes, esta "palabra clave" indica la operación contraria a la que hay que aplicar. Esto es, en los inconsistentes, (no coherentes) aparecen términos como "ganar", que requieren de una operación de resta para ser resueltos; o, al contrario, aparecen términos como "perder" en los que hay que sumar. Por ejemplo:

Juan tiene algunas canicas. En una partida ***gana*** *5 canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas ¿Cuántas canicas tenía?* 8 -5 = 3 (ganar = restar).

Juan tiene algunas canicas. En una partida ***pierde*** *5 canicas. Ahora Juan tiene 3 canicas ¿Cuántas canicas tenía?* 5 + 3 = 8 (perder = sumar).

De acuerdo con la hipótesis de la consistencia propuesta por de Lewis y Mayer (1987):

Tabla 15. Tipos de PAVs consistentes e inconsistentes.Adaptada de Lewis y Mayer (1987).

Son problemas **consistentes:**									
CO1	CA1	CA2	CA4	CP2	CP3	CP4	IG2	IG3	IG4
Son problemas **inconsistentes:**									
CO2	CA3	CA5	CA6	CP1	CP5	CP6	IG1	IG5	IG6

CO = combinación; CA = cambio; CP = comparación; IG = igualación.

Por otra parte, a la hora de enfrentarse a un problema, muchos alumnos hacen uso de estrategias superficiales de resolución. Una de ellas, quizá la más utilizada, es la "estrategia de la palabra clave" (Hegarty, Mayer y Monk, 1995; Nesher y Teubal, 1975; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992), también denominada "estrategia de traducción directa o literal" (Stigler, Lee y Stevenson, 1995), que consiste en seleccionar los datos del problema, "agarrarse a los números", según la expresión de Littefield y Rieser (1993), y operar con ellos tomando como referencia los términos lingüísticos que aparecen en la estructura superficial del enunciado del problema. Como acabamos de ver, la utilización de esta estrategia superficial posibilita la resolución de los problemas consistentes, pero para resolver los problemas inconsistentes se necesitan conocimientos más avanzados y estrategias más sofisticadas de resolución.

Así, por ejemplo, para resolver el problema *"Jan tiene 7 conejos. Él tiene 4 conejos más que Thomas. ¿Cuántos conejos tienen entre los dos?"*, habría que determinar, en primer lugar, el número de conejos que tiene el segundo personaje, es decir, habría que resolver un problema de comparación inconsistente expresado con el término lingüístico "más que", aplicando el algoritmo de la resta. Posteriormente, en un segundo momento, habría que sumar las dos partes para obtener el todo, esto es, resolver un problema de combinación consistente. Sin embargo, un número importante de alumnos resolvería el problema directamente a partir de la palabra clave, sumando los dos datos del problema y concluyendo que *Jan y Thomas tienen 11 conejos entre los dos.* Esta es la conclusión a la que llega una alumna de 8 años, tal como se muestra en el siguiente ejemplo tomado de Hasseman (2005, p.91), donde se transcribe un fragmento del diálogo que mantiene con su profesor:

- **P**: "Por favor, lee el texto" (La estudiante lee el texto y dice: "7 +4")
- **P**: ¿Cómo lo has hecho? ¿Por qué haces el cálculo de esta manera?
- **A**: "Porque pone "¿Cuántos conejos tienen entre los dos niños?"; y 7+4 es igual a 11"
- **P**: ¿Por qué sumas 7+4? (pasan 16 segundos) ¿Cuántos conejos tiene Jan?
- **A**: "7"
- **P**: "Y, ¿cuántos tiene Thomas?"
- **A**: "4"
- **P**: "¿4?" (La chica asiente con la cabeza) "¿Dónde dice esto en el texto?" La alumna señala el texto.
- **P**: "Por favor, lee el texto"
- **A**: "Él tiene 4 conejos más que Thomas"
- **P**: "¿Quién es él?"
- **A**: "Jan"

- **P**: "Muy bien. Esto quiere decir que Jan tiene 4 conejos más que Thomas… y, ¿cuántos conejos tiene Thomas?"
- **A**: "4".
- **P**: "¿4?"

(La alumna asiente con la cabeza).

II.4. Modelos teóricos sobre la resolución de problemas

II.4.1. Modelos heurísticos

Hasta el momento hemos descrito qué son los PAVs, por qué se puede hablar de la doble naturaleza que los caracteriza, cuál es su tipología y qué factores determinan su nivel de dificultad. En esta segunda parte del capítulo intentaremos dar respuesta a dos cuestiones fundamentales: ¿en qué consiste resolver un problema? y ¿qué tipo de ayudas textuales pueden resultar efectivas para facilitar a los alumnos el proceso de resolución?

Para responder a la primera cuestión se han desarrollado dos tipos de modelos teóricos explicativos del proceso de R.P: por un lado, los modelos generales basados en heurísticos (Bransford y Stein, 1988; De Guzmán, 1991; Lester, Lambdin y Preston, 1997; Montague, 1988; Pólya, 1945; Schoenfeld 1980,1985; Puig y Cerdán, 1988;Verchaffel, De Corte y Vierstraete,1999); y por otro lado, los modelos procedentes del ámbito de la psicología cognitiva, a los que dedicaremos una mayor atención en este capítulo, puesto que se centran específicamente en el tipo de problemas objeto de nuestra tesis: los PAVs.

Los primeros modelos tratan de explicar a través de una serie de pasos generales o heurísticos cómo los alumnos resuelven cualquier tipo de problema (aritméticos, algebraicos, geométricos…). Por tanto, su principal ventaja es la amplitud y la flexibilidad, ya que pueden adaptarse a distintas situaciones problemáticas. Se considera que el modelo basado en heurísticos propuesto por Pólya (1945) fue el pionero en la descripción de las fases para resolver los problemas, aunque con anterioridad Dewey ya había descrito en 1933 las etapas del pensamiento en el proceso de R.P. En cualquier caso, el modelo de Pólya fue un referente para el desarrollo de los modelos heurísticos posteriores en los que se proponen distintas fases para resolver los problemas: una primera fase de análisis y comprensión de la información proporcionada en el enunciado del problema; una segunda fase de planificación tendente a la búsqueda de la estrategia adecuada, esto es, un plan de actuación; una tercera fase más automática, estrechamente ligada a la anterior, en la que se ejecuta el plan mediante la aplicación del algoritmo correspondiente; y una cuarta fase final de verificación-reflexión del proceso seguido y del sentido del resultado obtenido.

Veamos el siguiente ejemplo: *En un huerto hay 17 árboles frutales. De ellos, 14 son naranjos. ¿Cuántos son limoneros?*

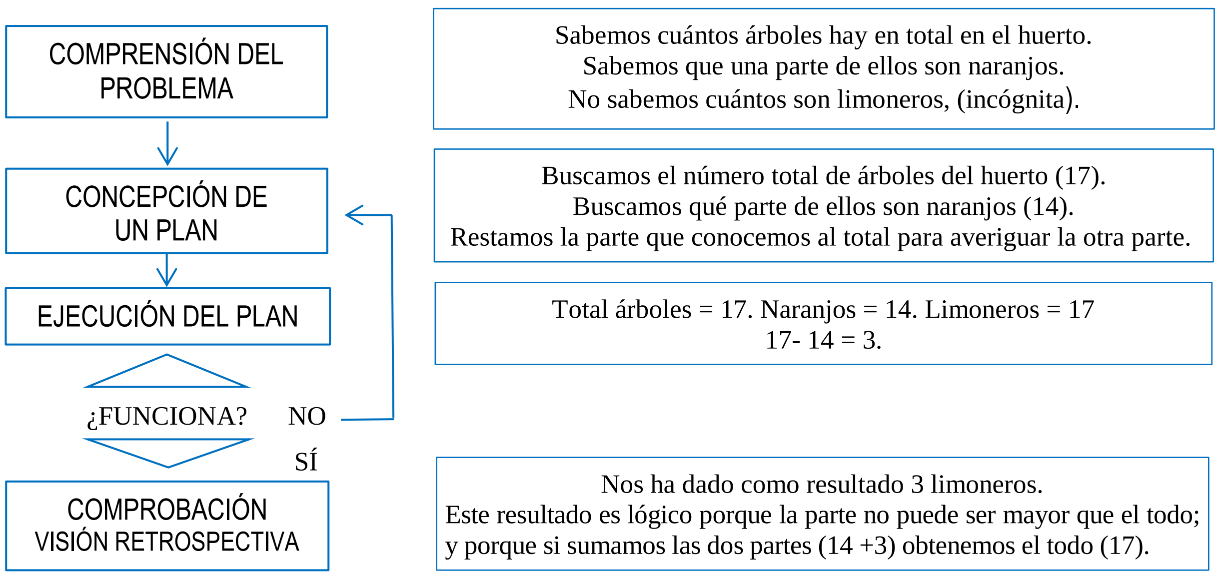


Figura 9. Resolución de un problema adaptado al modelo de Pólya (1945). Elaboración propia.

Por otra parte, el segundo grupo de modelos, los procedentes del ámbito de la psicología cognitiva, tienen como desventaja no ser tan genéricos como los modelos heurísticos, ya que sólo pueden aplicarse a los PAVs. Sin embargo, precisamente por no ser tan amplios, su nivel de especificidad y concreción es mucho mayor, de manera que no se limitan a realizar descripciones genéricas del proceso de R.P, sino que profundizan en los procesos mentales implicados en la resolución. De ellos hablaremos detenidamente en los siguientes epígrafes.

II.4.2. Modelos cognitivos

Como apuntamos en el capítulo anterior, desde los años veinte hasta los años setenta del siglo pasado las matemáticas estuvieron bajo el dominio del paradigma conductista. A partir de las dos “oleadas de la revolución cognitiva” (De Corte et al., 1996), surgirá un conjunto de modelos teóricos centrados en conocer y explicar los procesos cognitivos que subyacen a la tarea de resolver problemas. En todos estos modelos aparece implícita la idea de la creación de una representación mental del problema durante el proceso de resolución. También es común a todos ellos su desarrollo mediante programas de simulación, es decir, programas computacionales. No obstante, estos modelos se diferencian entre sí en la relevancia que otorgan al tipo de información o conocimientos necesarios para construir esa representación interna. De ahí que se establezca una distinción entre: los primeros modelos, modelos computaciones clásicos, que inciden de forma exclusiva en la información estrictamente matemática; y los modelos computacionales posteriores, procedentes del ámbito de la comprensión de textos, para los que además de la información cuantitativa, es necesaria también otro tipo de información de carácter cualitativo.

II.4.2.1. Modelos computacionales clásicos

- **Modelo de Riley, Greeno y Heller (1983)**

Los modelos computacionales clásicos, el modelo de Riley et al. (1983), y el modelo de Briars y Larkin (1984), inciden exclusivamente en el conocimiento matemático, tanto como origen de los procesos cognitivos que desarrollan los sujetos a la hora de enfrentarse a la R.P, como causa explicativa de las diferencias existentes en la dificultad que presentan los distintos tipos de problemas.

La implementación de estos dos modelos fue llevada a cabo mediante la introducción en un sistema informático de distintos parámetros para procesar información puramente matemática, de manera que cualquier otro tipo de información, que también procesa un sujeto al resolver un problema, era obviado por el sistema. En concreto, el modelo de Riley et al. (1983) se diseñó con tres parámetros de conocimiento matemático para que fuera capaz de resolver los problemas:

- Esquemas de problema o información de tipo esquemático, que permitiera procesar el problema palabra por palabra para generar una representación de la estructura semántica del mismo.
- Esquemas de acción que, a través de unas reglas de producción, permitieran ejecutar los pasos necesarios para resolver los problemas, de acuerdo con la estructura semántica generada en el paso anterior.
- Conocimiento estratégico o procedimental para poder trazar un plan de resolución de arriba-abajo.

Tras el diseño, se procedió a la implementación del modelo, simulando tres niveles de conocimiento matemático coincidentes con la capacidad de los niños para resolver problemas en diferentes momentos de su desarrollo evolutivo. En el primer nivel, el modelo pudo resolver los problemas de cambio 1, 2 y 4 (consistentes) pero no los problemas de cambio 3, 5 y 6 (inconsistentes); en el segundo nivel, pudo resolver los problemas de cambio 3 (inconsistentes); y en el tercer nivel pudo resolver los problemas de cambio 5 y 6 (inconsistentes).

De acuerdo con los resultados obtenidos al implementar el modelo, se puede concluir que el elemento esencial que diferenció los tres niveles de implementación es el conocimiento matemático, más concretamente el conocimiento esquemático de la estructura parte-todo del problema. Mediante este conocimiento es posible generar una representación de la estructura matemática del problema, que organiza las cantidades y las relaciones entre ellas. De esta manera, podemos saber que de las tres partes o conjuntos de que consta un problema, uno actúa como el "todo", y los otros dos como "partes" de una estructura "parte-parte-todo" (Orrantia, 2003). Por tanto, las diferencias respecto a la mayor o menor competencia de los niños en la R.P se deben a la adquisición o no de estos esquemas.

- **Modelo de Briars y Larkin (1984)**

El modelo CHIPS[15] de Briars y Larkin (1984), al igual que el modelo de Riley et al. (1983), pone el énfasis en el conocimiento matemático para explicar el proceso de R.P. Además, ambos modelos coinciden en tres aspectos: la distinción de tres niveles de conocimiento matemático; la resolución de los mismos tipos de problemas; y las predicciones sobre el rendimiento de los niños en función del rendimiento de sus respectivos modelos. Sin embargo**,** difieren en la forma de operacionalizar este conocimiento matemático.

Este modelo simula los mismos procesos mentales que un niño pondría en marcha si empleara una colección fichas u otros objetos para solucionar un problema. Su funcionamiento es el siguiente:

Antes de ser formulado el problema hay un *conjunto fuente* con una colección de fichas disponibles. Cuando se formula el problema, el modelo comienza a procesar el enunciado de forma secuencial, de manera que toma cada vez una palabra y reacciona, bien no haciendo nada, bien procesándola y ejecutando una acción sobre la colección de fichas. De forma simultánea, almacena en su memoria de trabajo una serie de *elementos* que decidirán posteriormente de qué tipo de problema se trata. Cada uno de estos *elementos* está representado por una ficha. Para llevar a cabo este proceso, el modelo cuenta también con tres niveles de conocimiento matemático con diferentes capacidades:

[15] CHIPS: Concrete Human-Like Inferential Problem Solver (Resolutor de Problemas, Inferencial y Similar al Humano). Chips significa además "ficha", aludiendo así a la característica principal del modelo, esto es, el uso de fichas u otros objetos para representar y resolver los problemas.

- Elementos de rol único: capacidad de mover y contar fichas, teniendo en cuenta que cada ficha pertenece a un solo conjunto.
- Elementos de doble rol: capacidad de considerar una misma ficha como perteneciente a dos conjuntos a la vez.

Estos dos primeros niveles de conocimiento son muy similares a los niveles propuestos por Riley et al. (1983). Sin embargo, las principales diferencias entre ambos modelos se encuentran en el tercer nivel, el nivel más avanzado de conocimiento matemático:

- Re-representación: capacidad de almacenamiento y capacidad de modificar la estructura del problema para resolverlo.

El modelo dispone de un *esquema de transferencia* y de un *esquema de equivalencia de subconjuntos y de reversibilidad.* El esquema de transferencia permite almacenar el número de fichas en un conjunto inicial, el número de fichas añadidas y quitadas, y el número de fichas del conjunto final. Por otra parte, el esquema de equivalencia almacena dos subconjuntos y el superconjunto que los contiene. De este modo, si el problema no puede resolverse por modelado directo (con elementos de rol único o de doble rol) el modelo hace uso de estos esquemas para invertir los roles de los dos subconjuntos y así resolver el problema.

El modelo puede resolver problemas con indicios de acción (problemas de cambio) y problemas que presentan relaciones estáticas entre conjuntos (problemas combinación y comparación). Con el objeto de comprobar hasta qué punto el rendimiento de CHIPS se ajustaba al de los alumnos, el modelo fue implementado con todos los tipos de problemas que era capaz de resolver. La conclusión fue que el programa justificaba una gran parte de los errores cometidos por los alumnos.

En síntesis, tanto el modelo de Riley et al. (1983) como el modelo de Briars y Larkin (1984), comparten el mérito de haber aportado las primeras explicaciones acerca de los procesos cognitivos que subyacen a la resolución de los PAVs. Sin embargo, su principal limitación es que el proceso de resolución de estos problemas queda restringido de forma exclusiva al conocimiento matemático y a la estructura matemática del problema, eludiendo así el resto de la información no matemática, que se ha mostrado relevante para la resolución (Verschaffel et al., 2000).

II.4.2.2. Modelos computacionales posteriores

Tal como señalábamos al principio de este capítulo, los PAVs se caracterizan por poseer una doble naturaleza: conceptual o matemática, y textual. Por tanto, cuando un sujeto se enfrenta a su resolución se encuentra ante un texto cuya información, tanto cuantitativa como no cuantitativa, deberá ser procesada para llegar a una correcta comprensión y resolución. Éste es el punto de partida de los modelos computacionales posteriores a los clásicos, que describimos a continuación.

- **Modelo de Kintsch y Greeno (1985)**

Para desarrollar su modelo, Kintsch y Greeno (1985) parten, por un lado, de la teoría general de comprensión de textos desarrollada por Kintsch y van Dijk (1978) y van Dijk y Kintsch (1983); por otro lado, del conocimiento matemático necesario para representar los problemas y las estrategias para resolverlos de Riley et al. (1983).

De acuerdo con la teoría general de la comprensión, la lectura de un texto por parte de un sujeto puede dar como resultado dos niveles de representación mental, y en consecuencia dos niveles de comprensión: la *base del texto* y el *modelo de la situación*. Kintsch y van Dijk (1978, 1983) hablan de la *base del texto* cuando el lector ha construido una representación en la que ha incorporado pocos conocimientos previos. En este caso, el lector será capaz de recordar bien las ideas del texto, pero sin incorporar apenas conocimientos anteriores. Sin embargo, si el lector es capaz de construir una representación de la información del texto, integrando bien sus conocimientos previos almacenados en la memoria a largo plazo, entonces podemos hablar ya de la construcción del *modelo de la situación*. En este segundo caso, el lector será capaz de hacer un gran número de inferencias[16], que constituyen el núcleo de la comprensión. Ahora bien, es necesario señalar que no se trata de dos representaciones diferentes, ya que el lector cuando lee el texto obtiene una única representación. Se trata de dos niveles diferentes, uno con menos conocimientos previos integrados, y otro con más.

[16] Elosúa define las inferencias como *"procesos de recuperación del conocimiento del sujeto para cubrir un espacio o hueco que no resuelve el texto"* (Elosúa, 2000, p. 73). Siguiendo a esta autora, una de las funciones de las inferencias es la de relacionar los conocimientos previos del lector con el texto, esto es, construir un puente entre nuestro conocimiento previo y la información leída en el texto. No obstante, las inferencias van más allá de las informaciones que el texto proporciona explícitamente. Así, cualquier información que el lector extrae del texto y no está explícitamente contenida en él, constituye una inferencia. Por ejemplo, el logro de una adecuada interpretación de la frase: "*Los Menéndez de Llanes vieron los Picos de Europa mientras iban volando hacia Inglaterra",* supone inferir que: a) "Los Menéndez de Llanes" son una familia; b) Están de viaje en avión a Inglaterra; c) Ven los Picos de Europa a través de la ventanilla del avión. La comprensión de esta frase supone la construcción de un modelo mental en el que el lector ha integrado la información explícita del texto con sus conocimientos previos. (Ejemplo tomado de García Madruga, 2006, p.94).

La principal característica del modelo de Kintsch y Greeno (1985) es que establece estos mismos dos niveles para la representación del problema: un *texto base* y un *modelo de la situación o modelo del problema*, donde se incluirían los conocimientos previos que posee el sujeto sobre el mundo y sobre los problemas aritméticos, y donde se excluirían, si fuese necesario, la información superflua que no fuera necesaria para la R.P.

El modelo de la situación del problema actuaría como nexo entre el texto base y un tercer elemento: el *modelo matemático*, donde se encontrarían las estrategias necesarias para solucionar el problema. Los autores utilizan el siguiente problema de combinación para explicar la implementación del modelo: *"Juan tiene tres canicas. Pedro tiene cinco canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?"*

En primer lugar, mediante un análisis proposicional[17], el modelo crea el texto base transformando el enunciado del problema:

Px1 = Juan

P2 TIENE (x1, P3)

P3 TRES (canicas)

Las tres primeras proposiciones se derivan de la frase: *"Juan tiene tres canicas"*. La proposición TRES (canicas) genera la representación de un conjunto. Las tres proposiciones se clasifican en el texto base en las categorías de objeto, cantidad y especificación, y los argumentos *canicas 3 y Juan* se toma del texto base y se asignan a espacios del esquema utilizado para la creación del modelo del problema.

En segundo lugar, el modelo extrae las proposiciones P4, P5 y P6, de la segunda frase del problema:

P4 x2 = Pedro

P5 TIENE (x2, P6)

P6 CINCO (canicas)

La proposición CINCO (canicas) genera la representación del segundo conjunto tanto en el texto base como en el modelo de la situación.

[17] En el análisis proposicional el significado de una frase puede representarse mediante una proposición. Cada proposición contiene un predicado, que funciona como término relacional y que se expresa mediante un verbo, adjetivo o adverbio. Cada predicado puede estar acompañado por diferentes argumentos (agente, objeto, meta, etc.), modificadores y circunstancias temporales y espaciales. En el siguiente ejemplo tomado de Elosúa (2000, p.116), *"Ayer, María le regaló a Juan el libro antiguo en la biblioteca"*, al predicado REGALAR le acompañan los ARGUMENTOS: MARÍA (agente), LIBRO (objeto), ANTIGUO (modificador), META (Juan), CIRCUNSTANCIAS DE TIEMPO (ayer) y CIRCUNSTANCIAS DE LUGAR (biblioteca). De manera que el análisis proposicional quedaría tal como sigue: P1 REGALAR (MARÍA, P3, JUAN) P2 ANTIGUO (LIBRO) P3 AYER (P1) P4 EN BIBLIOTECA (P1)

En tercer lugar, a partir de la pregunta se generan las proposiciones P7 y P8:

P7 CUÁNTAS CANICAS

P8 TIENEN ENTRE LOS DOS.

La representación del tercer conjunto se añade al texto base y al modelo de la situación, con la especificación de P8 en el texto base y el argumento *Juan* (parte) *y Pedro* (parte) en el modelo del problema. La proposición P7 se encarga de identificar la cantidad del tercer conjunto como meta del problema. La proposición P8 asigna al tercer conjunto como el total. Una vez que se ha completado el esquema totalmente, se produce la estrategia de conteo para calcular la cantidad que le corresponde al conjunto desconocido, en este ejemplo, el total.

Aunque el modelo de Kintsch y Greeno (1985) tiene su base en los modelos procedentes del ámbito de la comprensión de textos, según Reusser (1990), en este modelo no existe una comprensión textual completa, sino un texto base y un modelo del problema de carácter cuantitativo. Para este autor la representación mental que crea este modelo se limita a explicitar conjuntos y relaciones entre los conjuntos, y no trata de comprender de manera cualitativa toda la información no estrictamente matemática que aparece en los enunciados de los problemas. Una segunda limitación del modelo, estrechamente relacionada con la anterior, es que los problemas utilizados por estos autores en sus estudios aparecen altamente estandarizados (Staub y Reusser, 1995), de manera que: todo lo que es necesario para su resolución se encentra en el enunciado, y todo lo que se encuentra en el enunciado es necesario para su resolución (Voyer y Golet, 2013). En cualquier caso, este modelo tiene el valor de haber marcado el inicio de un segundo grupo de modelos posteriores a los computacionales clásicos, para los que además de la información cuantitativa, es necesaria también otro tipo de información de carácter cualitativo.

- **Estudio de Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer (1988)**

Tomando como base el modelo de Kintsch y Greeno (1985), Cummins et al. (1988) llevaron a cabo un estudio que trataba de encontrar otros factores, distintos al conocimiento matemático, que pudieran explicar las dificultades que muestran los alumnos en el proceso de R.P.

La hipótesis de la que parten estos autores es que, para una comprensión correcta del problema no es suficiente con hacer uso de los conocimientos matemáticos, tal como habían propuesto los modelos computacionales clásicos, sino también de los conocimientos lingüísticos. Para estos autores, la causa de la mayor dificultad de algunos problemas frente a otros se debe a que: "*emplean formas lingüísticas que no se proyectan adecuadamente sobre las estructuras de conocimiento conceptual existentes en el niño"* (Cummins et al; 1988, p.407). La idea que subyace a esta hipótesis es la existencia de determinados problemas que contienen ciertas formas o expresiones lingüísticas para cuya resolución son necesarios conocimientos lingüísticos y matemáticos elevados, de ahí que la causa de los errores que cometen los alumnos pueda estar justificada por deficiencias en uno de estos dos tipos de conocimientos o en ambos. Para verificar esta hipótesis, los autores diseñaron e implementaron un estudio con dos partes: la primera parte, tenía como objetivo analizar y categorizar los tipos de errores que con mayor frecuencia cometían los alumnos en el proceso de R.P; en la segunda parte, se pretendía contrastar estos errores con los cometidos por el modelo de Kintsch y Greeno (1985).

En la primera parte del estudio, los alumnos tenían que resolver el problema presentado y recordarlo en voz alta antes o después de resolverlo. El recuerdo se registraba para analizar posteriormente la representación que el alumno había construido en su memoria. Las hipótesis planteadas fueron dos:

- Los alumnos que repitan correctamente el problema serán capaces de resolverlo correctamente; asimismo, los alumnos que lo resuelvan correctamente serán capaces de repetirlo correctamente.
- La causa de los errores cometidos por los alumnos se debe fundamentalmente a transformaciones de problemas más difíciles para hacerlos más fáciles.

Los resultados obtenidos corroboraron ambas hipótesis. Con respecto a la primera, los alumnos que repitieron correctamente el texto del problema fueron los que mejor lo resolvieron y viceversa. En referencia a la segunda hipótesis, los autores encontraron que los errores cometidos por los alumnos aparecían de forma sistemática dependiendo del tipo de problema:

- Los problemas de cambio y comparación provocaban principalmente errores de *violación de la estructura* y *recuerdo sin sentido.* En el primer caso, los alumnos transformaban el problema original en otro problema con distinta forma lingüística y distinta estructura matemática. En el segundo caso, el problema enunciado en voz alta por los alumnos se distorsionaba y perdía su verdadero sentido.

- Los problemas de combinación provocaban errores de *doble conjunto total.* En este caso, el recuerdo del problema se refería al conjunto total. Por ejemplo:

  Problema: *Juan y Pedro tienen 5 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan?*

  Recuerdo del alumno: *Juan y Pedro tienen 5 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?*

Tras la tipificación de los errores, el propósito de la segunda parte del estudio fue indagar en las causas explicativas, conceptuales o lingüísticas, que determinan la comprensión errónea de los problemas por parte de los alumnos, de manera que plantearon de nuevo dos hipótesis:

- De acuerdo con los modelos computaciones clásicos, los errores en la comprensión del problema se deben a deficiencias en el conocimiento matemático de los alumnos.
- Los alumnos disponen de ese conocimiento matemático, pero no son capaces de proyectar determinadas expresiones lingüísticas del problema.

Con el fin de determinar cuál de las dos hipótesis justificaba en mayor medida los errores, los autores utilizaron el modelo computacional de Kintsch y Greeno (1985), implementándolo con diferentes tipos de problemas y diferentes niveles conocimiento: conocimiento conceptual, conocimiento de la situación, conocimiento lingüístico.

El modelo simuló fielmente el tipo de errores cometidos por los niños sólo en 4 de los 18 problemas en el nivel de conocimiento matemático limitado; en 7 de los 18 problemas en el nivel de conocimiento de la situación limitado; y en 15 de 18 problemas en el nivel de conocimiento lingüístico limitado.

La conclusión del estudio de Cummins et al. (1988) fue que las dificultades que comportan determinados tipos de problemas se deben principalmente a factores relacionados con la comprensión del lenguaje utilizado en el enunciado. Existen ciertas formas lingüísticas (p.e. "algunos", "tiene más que", "entre los dos", "cada uno", etc.) para enunciar los problemas, que resultan especialmente difíciles de interpretar para los alumnos. Así, para estos autores la causa que subyace al fracaso de la tarea de resolver problemas es fundamentalmente el procesamiento lingüístico, que puede o no permitir el acceso al conocimiento conceptual.

- **El *Situation Problem Solver* (SPS) de Reusser (1988,1990)**

El SPS es un modelo computacional producto de la evolución del modelo de Kintsch y Greeno (1985). No obstante, mientras que éste último resolvía los problemas generando dos niveles representacionales, un *texto base* proposicional y un *modelo de la situación* ligado a la estructura matemática del problema, Reusser (1988, 1990), introduce en su modelo un tercer nivel representacional que contribuye a modelizar el paso entre el texto base y el modelo del problema, esto es, el Modelo Episódico de la Situación (en adelante, M.E.S).

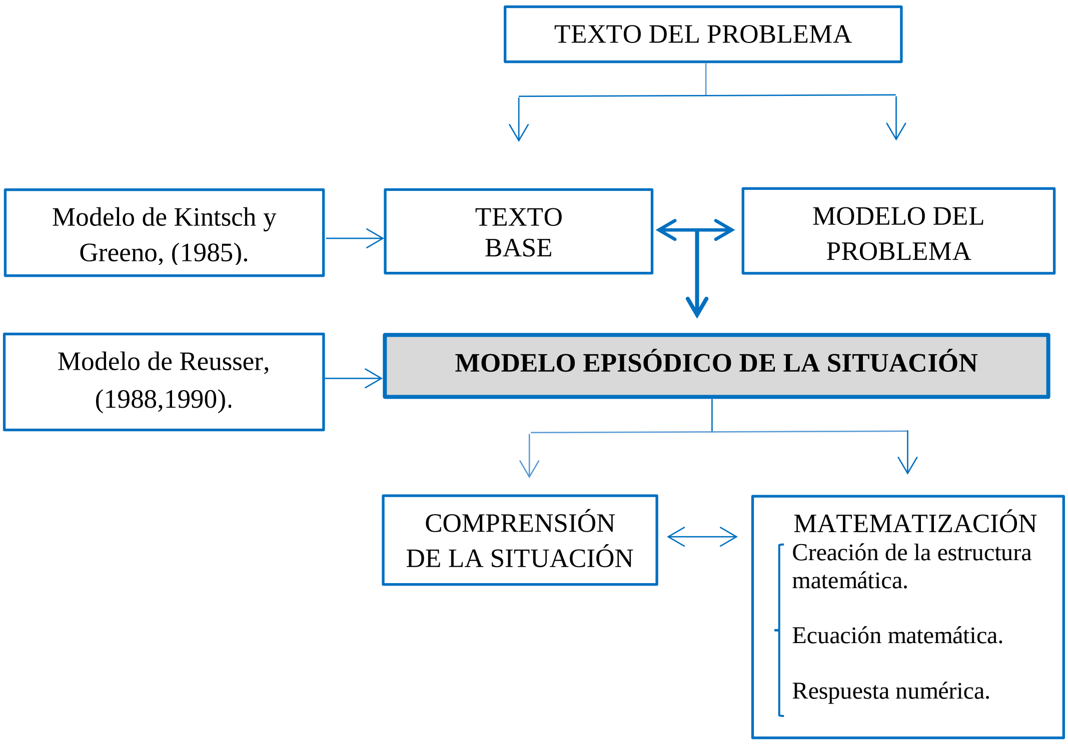


Figura 10. Integración del MES (Reusser,1988,1990) entre el texto base y el modelo de la situación. Elaboración propia.

El postulado del que parte Reusser es que las dificultades que presentan los alumnos en el proceso de R.P se fundamentan en una carencia de *"comprensión estratégica, tanto del lenguaje implicado como de la situación denotada por su descripción verbal, más que en una falta de capacidades aritméticas"* (Reusser, 1990, p.477). En consecuencia, las causas de estas dificultades no se deben de modo exclusivo a aspectos de índole matemática, sino también a una falta de comprensión de ciertas expresiones lingüísticas, pero sobre todo a factores estrechamente vinculados al contexto situacional en que aparece enunciado el problema: agentes, eventos, metas e intenciones; cadenas causales y temporales; nivel de explicitud, número de inferencias; relaciones consistentes e inconsistentes, etc. En este sentido, para poder comprender de forma profunda un problema hace falta generar tres tipos de conocimiento: en primer lugar, siguiendo los modelos clásicos, el conocimiento matemático; en segundo lugar, el conocimiento lingüístico, propuesto en el estudio de Cummins et al. (1988); y en tercer lugar, el conocimiento del mundo aludido en el texto del problema.

El M.E.S es una representación mental cualitativa de la situación descrita en el enunciado del problema, que contiene los personajes, sus acciones, sus metas o intenciones, junto con la estructura temporal y la secuencia causal. Por tanto, sus rasgos fundamentales son su carácter cualitativo y su carácter situacional:

- Tiene un carácter cualitativo, porque a diferencia del modelo de Kintsch y Greeno (1985), en el M.E.S no hay un paso directo de la representación proposicional, (texto base) a la representación cuantitativa del problema. Como el lector puede observar en la figura 10, antes de generarse la representación cuantitativa (matemática) ha de crearse una representación intermedia (el M.E.S) que sirve de nexo entre las dos representaciones.
- Tiene un carácter situacional, porque más allá de la representación matemática, conjuntos y relaciones entre los conjuntos en el modelo de Kintsch y Greeno, (1985), el M.E.S introduce personajes con unas intenciones o metas determinadas, que les impulsan a realizar ciertas acciones, que se articulan mediante estructuras o cadenas temporales y causales.

Por otro lado, a grandes rasgos, el M.E.S funciona a través de estos pasos:

- Comprensión del texto**.** Al igual que en el modelo de Kintsch y Greeno (1985), para comprender el texto del problema, en un primer paso este modelo reduce las frases del enunciado a sus proposiciones correspondientes, construyendo así el texto base.
- Comprensión de la situación y generación del M.E.S. En el segundo paso, el modelo construye la representación cualitativa del problema, analizando la estructura temporal y causal de la situación descrita y especificando los agentes, las acciones y la relación entre ellos. Esta representación cualitativa, es decir, el propio M.E.S, se crea a partir de la información proporcionada por el texto base, pero también a partir de inferencias basadas en los conocimientos previos. Es

importante señalar que hasta que no se ha generado el M.E.S, no se puede llevar a cabo la matematización del problema, proceso que, debido a su abstracción, requiere de una comprensión profunda.

- Construcción del modelo del problema**.** En el tercer paso, el modelo activa su conocimiento matemático (conocimiento sobre los esquemas) para construir una representación de la estructura matemática del problema, esto es, el modelo del problema. A continuación, el modelo proyecta el M.E.S sobre el conocimiento matemático para que las relaciones situacionales generadas en el paso anterior se transformen en relaciones matemáticas y posibiliten dar una respuesta a la pregunta del problema (matematización).
- Reducción del modelo del problema y cálculo. En el cuarto paso, el modelo del problema se reduce a una ecuación matemática, que se resuelve expresando el resultado mediante una frase.
- Generación de la repuesta e interpretación del resultado a partir del modelo de la situación.

He aquí un ejemplo:

“Pedro quería renovar la instalación eléctrica de su casa. Pedro tenía algunos metros de cable que le habían sobrado de una instalación anterior. Como Pedro se dio cuenta de que esos metros de cable no serían suficientes para toda la instalación compró 75 metros de cable más. Después de comprar el cable tenía 117 metros. Entonces Pedro se preguntó ¿Cuántos metros de cable tenía al principio?” (Ejemplo tomado de Vicente y Orrantia, 2007, p.65).

El modelo propuesto por Reusser comenzaría a resolver este problema con el análisis proposicional del enunciado, de manera que reduciría sus frases al conjunto de proposiciones correspondientes. En un segundo momento, el modelo construiría una representación cualitativa del problema, es decir, el M.E.S, donde quedaría representado el personaje del problema (Pedro); sus acciones (renovar, comprar…); las metas o intenciones del personaje, (quería renovar la instalación eléctrica de su casa); la estructura causal (necesita cable porque quería renovar la instalación eléctrica de su casa, compró más cable porque se dio cuenta de que no tenía suficiente); la secuencia temporal (al comenzar la instalación tenía algo de cable, después compró más cable, al final tiene otra cantidad de cable). En un tercer momento, el modelo proyectaría toda la información cualitativa, generada en el paso anterior, sobre el modelo matemático, consistente, en este ejemplo, en un esquema de cambio con conjunto inicial desconocido. Por último, el modelo matemático de este problema se reduciría a la ecuación (X +75 =117) y se aplicaría el conocimiento matemático para resolver el problema mediante un algoritmo: en este ejemplo, una resta.

Recapitulando, frente a los modelos computacionales clásicos, que otorgan la relevancia al conocimiento estrictamente conceptual o matemático, se han desarrollado posteriormente otros modelos que ponen el foco de atención en distintos tipos de conocimientos: el conocimiento lingüístico (Cummins et al., 1988) y el conocimiento situacional (Reusser, 1988,1990). El siguiente modelo que presentamos se sitúa en la misma línea que el modelo de Reusser (1988,1990), al subrayar la importancia del conocimiento del mundo real, aunque con las particularidades que se describen a continuación.

- **Modelo de Construcción-Integración de Kintsch (1988)**

Para desarrollar este modelo, Kintsch (1988) parte del modelo anterior de Kintsch y Greeno (1985), que resolvía los problemas creando dos niveles de representación, el *texto base* y el *modelo del problema.* De manera que, en el modelo Construcción-Integración (en adelante, C-I) también se generan estos dos niveles representacionales, aunque de forma muy distinta. Este modelo consta de dos momentos o fases que pasamos a describir para dar cuenta de su funcionamiento:

En la primera fase, denominada de *construcción,* tanto en el texto base como en el modelo de la situación se genera una cantidad mucho mayor de proposiciones que en el modelo anterior. Estas proposiciones no se generan únicamente sobre las informaciones explicitadas en el texto del problema, sino también a partir de las inferencias que realiza el sujeto a partir de sus conocimientos previos sobre el mundo real.

Así pues, el texto base se construye a partir de numerosas proposiciones: proposiciones del enunciado del problema, proposiciones provenientes de los conocimientos previos que posee el propio modelo relacionadas con las proposiciones del enunciado y proposiciones que el propio modelo infiere. Una vez generadas todas estas proposiciones, el modelo asigna un valor determinado a los pares de proposiciones (proposición del enunciado del problema y proposición inferida a través de los conocimientos previos del modelo) que depende de la fuerza de las conexiones entre los pares de proposiciones. El resultado de la fase de construcción es la creación de un texto base, caracterizado con respecto a los modelos anteriores por una mayor riqueza, pero también por una mayor incoherencia, puesto que consta tanto de proposiciones correctas, que facilitan la comprensión, como incorrectas, que la dificultan.

La segunda fase, denominada de *integración*, tiene como objeto incorporar el texto base, generado en la fase anterior en un todo coherente, que es en definitiva el modelo de la situación. Para conseguir este propósito, de todo el conjunto de proposiciones generadas en la fase anterior, el modelo elimina aquellas con un bajo nivel de activación, es decir, las que menor conexión tienen con el resto y preserva aquellas otras relevantes, altamente conectadas entre sí. Esta fase de integración se va procesando en ciclos, correspondiendo generalmente cada ciclo con una frase. En cada ciclo se va construyendo una red de proposiciones en las que se va integrando la información de ciclos anteriores que permanezca activa en la memoria de trabajo. Una vez integrados todos los ciclos, la red queda construida. Por último, para generar la representación final del texto del problema el modelo utiliza vectores de activación, que posee cada proposición: los conceptos y proposiciones con vectores altos de activación entran a formar parte del texto base y, al contrario, se eliminan aquellos otros con valores negativos.

En resumen, en un primer momento de construcción, el modelo genera el texto base a partir del enunciado del problema y de sus conocimientos previos. En un segundo momento de integración, el texto base se integra en un todo coherente, el modelo de la situación. Una de las principales diferencias entre el modelo C-I de Kintsch (1988) y el modelo de Kintsch y Greeno (1985) es que mientras que en este último la generación del texto base se creaba a partir de la información cuantitativa presente en el enunciado del problema, en el modelo C-I se atiende también a la información situacional, de manera que la interpretación del enunciado del problema es el resultado de la combinación de la información matemática y la información situacional.

II.5. Estudios empíricos de reescritura

Al inicio de la segunda parte de este capítulo, nos planteábamos dos preguntas: ¿en qué consiste resolver un problema? y ¿qué tipo de ayudas pueden resultar efectivas para facilitar al alumno el proceso de resolución? La descripción de los distintos modelos computacionales, nos ha permitido responder a la primera de las preguntas. Sabemos ya cuáles son los procesos que subyacen a la tarea de la R.P, sin embargo, la segunda pregunta permanece todavía sin responder.

A partir de estos modelos, se han desarrollado una serie de estudios basados en la metodología de la reescritura, que parten de la idea de que ciertos cambios en los enunciados de los problemas pueden tener consecuencias positivas en el rendimiento de los alumnos. De este modo, la idea básica que sustenta estos estudios es que la modificación de determinados aspectos de los enunciados (matemáticos, lingüísticos o situacionales) ayudarán a los alumnos a una mejora de su comprensión y, por ende, a una correcta ejecución de los problemas. Estos estudios de reescritura, que pasamos seguidamente a describir, pueden ser clasificados en dos grupos: en primer lugar, aquellos que han hecho uso de la reescritura para ayudar a procesar los aspectos matemáticos de los problemas (Cummins, 1991; Davis-Dorsey, Ross y Morrison, 1991 ; De Corte, Verschaffel y De Win 1985); en segundo lugar, aquellos que han modificado los enunciados de los problemas para ayudar a procesar los aspectos lingüísticos y situacionales (Hudson, 1983; Staub y Reusser, 1992; Stern y Lehrndorfer, 1992).

Antes de seguir con la descripción de estos estudios nos gustaría matizar que hemos optado por esta clasificación por motivos de claridad expositiva. Sin embargo, advertimos al lector que en algunos de estos estudios se llevaron a cabo los dos tipos de reescritura.

II.5.1. Modificaciones conceptuales

- **Estudio de De Corte et al. (1985)**

De acuerdo con estos autores, cuando un sujeto resuelve un problema “construye una representación mental del problema global y abstracta, en términos de conjuntos y relaciones” (De Corte et al., 1985, p.462). Asimismo, según estos autores, la facilidad o dificultad que puede suponer la resolución de un problema para un alumno depende del nivel de conocimiento conceptual que posea ese alumno; la estructura semántica del problema (tipo de relaciones conceptuales que se dan entre los conjuntos del problema); y también del nivel de explicitud con que esas relaciones aparecen en el enunciado del problema. Partiendo de estas ideas, De Corte et al. (1985) llevaron a cabo el primer estudio de reescritura donde se hacían explícitas las relaciones matemáticas entre los conjuntos del problema.

Así, los autores reescribieron problemas de cambio 5, combinación 2 y comparación 1, enfatizando la estructura matemática de los problemas y las relaciones entre los conjuntos. Por ejemplo, a partir del problema estándar de combinación 2 “*Pedro y Juan tenían 9 nueces. Tres pertenecen a Pedro. ¿Cuántas nueces tiene Juan?”*, se hicieron explícitas las relaciones parte-todo mediante la inclusión de términos que resaltaban las relaciones matemáticas de las dos partes que componen el todo: *"Pedro y Juan tenían 9 nueces entre los dos. Tres* ***de esas nueces*** *pertenecen a Pedro.* ***El resto*** *pertenece a Juan. ¿Cuántas nueces tiene Juan?"* (De Corte et al., 1985, p.464).

Posteriormente, se aplicaron las dos versiones de los problemas, estándar y reescrita, a alumnos de 1º y 2º de Educación Primaria, mostrándose un rendimiento superior en la resolución de los problemas reescritos, especialmente en los alumnos de 1º curso. De este modo, este tipo de reescritura se mostró más efectiva, incluso con alumnos de menor nivel educativo y por tanto, con un menor desarrollo del conocimiento matemático.

El estudio se acompañó de un análisis cualitativo de los errores más frecuentes cometidos por los alumnos, que consistieron fundamentalmente en la elección del algoritmo incorrecto (suma por resta) y ofrecer como respuesta el primer dato del enunciado del problema. Los autores atribuyeron las causas de estos errores a una comprensión deficitaria de las relaciones parte-todo que se establecen entre los conjuntos, a una interpretación errónea de determinadas palabras del enunciado, y a la aplicación de la estrategia superficial de la "palabra clave", muy común entre los niños que consiste, como hemos visto anteriormente, en encontrar una solución centrándose únicamente en los números y en las "palabras clave", (p.ej. *más o ganar* = sumar; *menos o perder* = restar) sin intentar comprender en profundidad la situación problemática planteada.

- **Estudio de Cummins (1991)**

Cummins desarrolló en 1991 un estudio muy diferente al realizado en 1988 y muy similar al estudio de De Corte et al. (1985). Su trabajo se centró en problemas de combinación 2, que Cummins reescribe de forma análoga a los problemas reescritos por De Corte et al. (1985), con una única diferencia: la sustitución del término *"entre los dos"*, por el término *"juntos"*: *"Pedro y Juan tenían 9 nueces* ***entre los dos*** *(…)"* (De Corte et al, 1985); *"Pedro y Juan tenían 9 nueces* ***juntos*** *(…)"* (Cummins, 1991).

La razón de este cambio se justifica en la interpretación errónea que muchos niños hacen de la expresión *"entre los dos",* que es entendida a menudo como *"cada uno".* Así, el único cambio que realiza este autor es la introducción en la primera frase del problema del término *"juntos",* quedando redactado el resto del problema de forma idéntica al problema reescrito por De Corte et al. (1985): *"(...) Tres* ***de esas nueces*** *pertenecen a Pedro.* ***El resto*** *pertenece a Juan. ¿Cuántas nueces tiene Juan?"*

El autor aplicó las dos versiones de los problemas, estándar y reescrita, a niños de 1º de Educación Primaria, mostrándose al igual que en el estudio de De Corte et al. (1985) un rendimiento mayor en la resolución de los problemas reescritos, incluso superior que en el estudio de estos autores.

- **Estudio de Davis-Dorsey et al. (1991)**

En el estudio de estos autores se reescribieron problemas estándar inconsistentes de cambio 3 y 5, combinación 2 y comparación 1, incluyendo información relacionada con la comprensión textual y conceptual del enunciado.

Para poder mejorar la comprensión textual de los problemas se llevó a cabo un proceso de dos pasos: en primer lugar, mediante un cuestionario, los autores obtuvieron información sobre los alumnos (gustos e intereses, actividades preferidas, nombres de sus amigos, etc.) es decir, informaciones que resultasen significativas para ellos; posteriormente, reescribieron los problemas estándar haciendo uso de esa información personal. Por ejemplo:

> ***"Mejor amigo"*** *ha caminado 3/5 de km. para ver* ***"película favorita".*** *Después ha caminado a casa de* ***"otro amigo". "Mejor amigo"*** *ha caminado 4/5 de km. en total. ¿Cuánto camino* ***"mejor amigo"*** *ha caminado desde el cine hasta la casa de* ***"otro amigo"****?* (Ejemplo tomado de Vicente, 2006, p.110. Adaptado de Davis-Dorsey et al., 1991, p.63).

Por otro lado, con el fin de mejorar la comprensión matemática, en los problemas de cambio y combinación, los autores reescribieron los problemas destacando los roles conceptuales de los conjuntos. En concreto, en los problemas de cambio 3, se incluyó la expresión *"en total"*:

> *"Lucy tiene 5 canicas. Clara le dio algunas canicas más. Ahora Lucy tiene 12 canicas* ***en total.*** *¿Cuántas canicas le dio Clara?"* (Ejemplo tomado de Vicente, 2006, p. 115. Adaptado de Davis Dorsey et al., 1991, p.63).

Para los problemas de comparación se optó, como ya hizo Hudson (1983), por evitar el término comparativo *"más que",* que en este estudio fue sustituido por la conjunción adversativa *"pero".* Por ejemplo: *"Hay 8 pájaros,* **pero** *sólo hay 3 gusanos. ¿Cuántos pájaros no tendrán un gusano?"*

Los resultados de este estudio mostraron que la personalización de los problemas fue efectiva con los alumnos de 5º curso, tanto de forma independiente como en combinación con la reescritura conceptual. Igualmente, la personalización de los problemas también fue efectiva con los alumnos de 2º curso, pero en combinación con la reescritura conceptual. Sin embargo, la reescritura conceptual no resultó útil de forma independiente en ambos cursos.

Según los autores, los problemas personalizados, con un mayor nivel de significatividad para los alumnos, lograron generar una motivación que les ayudó a codificar y procesar la información más fácilmente. En consecuencia, los autores concluyeron que la reescritura más eficaz no está relacionada tanto con la creación de un modelo cualitativo de la situación, como con la personalización del problema, esto es, con la motivación intrínseca que genera en los alumnos.

II.5.2. Modificaciones lingüísticas y situacionales

- **Estudio de Hudson (1983)**

Hudson (1983), fue el primer autor que consideró que los factores lingüísticos podían suponer una dificultad para los alumnos a la hora de resolver problemas. Para verificar su hipótesis diseñó una tarea con un problema de comparación con diferencia desconocida. En concreto, este autor pretendía: *"sortear las dificultades que genera la comprensión del término* ***"más que"*** (Hudson, 1983, p.84).

La tarea consistió en formular dos preguntas a niños de 5 y 6 años, a la vez que se les mostraban una serie de tarjetas con dibujos en las que se expresaban cantidades. La primera era la pregunta estandarizada en los problemas de comparación: "*Aquí hay algunos pájaros y algunos gusanos ¿Cuántos pájaros* ***más que*** *gusanos hay?"* La segunda pregunta aparecía dentro de este contexto: *"Aquí hay algunos pájaros y algunos gusanos. Supón que los pájaros compiten entre ellos y cada uno intenta coger un gusano. ¿Tendrán todos los pájaros un gusano?* ***¿Cuántos pájaros no tendrán gusano?"***

A pesar de que la estructura semántica de ambas versiones del problema es la misma, los resultados indicaron que los alumnos resolvían con mayor facilidad el problema reescrito. Hudson atribuyó la efectividad de este tipo de reescritura a que en la versión estándar los niños interpretaban de manera errónea la expresión lingüística *"más que",* término comparativo que se eludía en la versión reescrita. Sin embargo, para Staub y Reusser (1995) la mayor facilidad del problema reescrito se debe a las modificaciones lingüísticas, pero también a la introducción de modificaciones de tipo situacional (*los pájaros compiten entre ellos y cada uno intenta coger un gusano*). Así, el contexto situacional en el que se inserta el problema también es modificado, de manera que el problema cobra un carácter más dinámico y comprensible para los niños. En conclusión, según estos autores la situación descrita en el problema resulta cercana a las experiencias de los niños, de ahí la mayor facilidad en su resolución.

- **Estudio de Stern y Lehrndorfer (1992)**

El propósito de estos autores fue enriquecer el contexto situacional de los problemas, pero sin alterar su formulación estándar. Para ello, reescribieron únicamente problemas de comparación con dos versiones. En la primera de ellas, el problema estándar aparecía precedido de un contexto situacional competitivo. Por ejemplo:

> *"Pedro es el hermano mayor de Laura. Como es mayor, su habitación es mayor y sus juguetes son más caros que los de Laura. Pedro además tiene una paga mayor que la de Laura y tiene una bici nueva mientras que la de Laura es la bici antigua de Pedro. Cuando Pedro hace sus deberes, Laura hace unos cuantos garabatos. Pedro tiene 9 lápices, Laura tiene 4 lápices. ¿Cuántos lápices tiene Laura menos que Pedro?"* (Stern y Lehndorfer, 1995, p.264).

Asimismo, en esta primera versión podían darse dos tipos de relaciones entre el problema y el contexto situacional competitivo que les precedía: compatibilidad o incompatibilidad. Se daba una relación de compatibilidad cuando en el contexto competitivo el conjunto mayor pertenecía al personaje de mayor edad (Pedro frente a Laura); la relación de incompatibilidad es la inversa, esto es, el conjunto mayor pertenece al personaje de menor edad (Laura frente a Pedro).

En la segunda versión, el contexto situacional que predecía la formulación estándar era de carácter neutro, no competitivo. Por ejemplo:

> *"Berta y Lidia están en la misma clase en el colegio. Su profesora es la Sra. Martínez. Ella hace muchas cosas agradables con los niños. Ayer fueron al zoo. Hoy están dibujando los animales. Berta tiene 6 lápices. Lidia tiene 4 lápices. ¿Cuántos lápices tiene Lidia menos que Berta?"* (Stern y Lehndorfer, 1995, p.264).

Los resultados obtenidos en este estudio indicaron que los problemas precedidos de contextos situacionales competitivos eran resueltos por los alumnos con mayor facilidad que aquellos otros precedidos de contextos neutros. Igualmente, los problemas precedidos de contextos competitivos compatibles resultaron más fáciles de resolver que los precedidos por contextos competitivos incompatibles.

Según los autores, el principal obstáculo con que se encuentran los alumnos a la hora de resolver problemas de comparación tiene su origen en la dificultad para reconocer el contexto donde se presentan estas situaciones comparativas. De este modo, el tipo de reescritura que explicita el contexto (en este estudio, un contexto competitivo compatible) provoca la activación del conocimiento conceptual necesario para resolver estos problemas.

- **Estudio de Staub y Reusser (1992)**

En el estudio de reescritura llevado a cabo por estos autores se introdujeron cuatro tipos diferentes de modificaciones en problemas inconsistentes de cambio 5 y 6: en primer lugar, con el fin de explicitar el conjunto inicial desconocido de estos problemas, se sustituyeron los verbos que expresaban situaciones estáticas por verbos que hacían referencia a acciones de transferencia-ganancia; en segundo lugar, se alteró la estructura temporal de los acontecimientos; en tercer lugar, se procuró que el sujeto de todas las oraciones fuera el protagonista del problema; por último, se eliminaron los pronombres.

Los resultados de este estudio mostraron que los alumnos resolvían con mayor facilidad la versión estándar de los problemas que la versión reescrita por los autores. De acuerdo con Vicente y Orrantia (2007), este estudio presenta dos limitaciones importantes: por un lado, todas las modificaciones efectuadas por los autores se introdujeron en el mismo problema y no se crearon versiones distintas para introducir por separado cada modificación; por otro lado, hubo una falta de homogeneidad con respecto al tipo de modificaciones introducidas: sintácticas (sujeto = protagonista; omisión de pronombres); matemáticas (explicitación del conjunto inicial); y situacionales (alteración de la secuencia temporal).

II.5.3. Estudios actuales

- **Estudio de Moreau y Coquin-Viennot (2003)**

Los estudios empíricos de reescritura situacional, que pasamos a describir a continuación, intentarán superar las limitaciones de los estudios previos. En concreto, el estudio realizado por Moreau y Coquin-Viennot (2003), constituye un intento claro de comprobar la validez del Modelo Episódico de la Situación (M.E.S) propuesto por Reusser (1988,1990). Así, en este estudio las autoras se propusieron como objetivo constatar la construcción de dos niveles de representación mental diferentes, pero complementarios: el modelo matemático del problema y el M.E.S, que como hemos visto anteriormente, es un nivel de representación cualitativo que se genera con anterioridad a la representación cuantitativa del problema.

Para llevar a cabo este estudio, se partió de la reescritura de problemas de cambio de dos operaciones, introduciendo en las versiones estándar tres tipos de información diferente: información numérica; información cualitativa para facilitar la creación del M.E.S (informaciones sobre los personajes, sobre los eventos y sus consecuencias, sobre expresiones temporales o circunstanciales, etc.); e información descriptiva irrelevante para comprender y resolver el problema.

El siguiente paso consistió en la aplicación de dos tareas cuyo propósito era comprobar si los alumnos de 10 años eran capaces de generar los dos niveles de representación:

En la primera, se les pidió que seleccionaran la información para "hacer que el problema fuera lo más breve posible", sin que se produjese una pérdida de su significado. Esta tarea permitía comprobar si los alumnos creaban el modelo matemático del problema. En ese caso, se seleccionaría la información numérica, suprimiendo al mismo tiempo el resto de información situacional.

En la segunda tarea, se les pidió que seleccionaran la información para "hacer que el problema fuera más fácil de comprender", de manera que se pudiera constatar si los alumnos generaban el modelo de la situación. Para ello, habría que seleccionar tanto la información numérica como la información situacional, pero no la información descriptiva superflua, que resultaba irrelevante para la creación del modelo de la situación.

Los resultados de este estudio revelaron que los alumnos, especialmente los de mayor rendimiento, generaban los dos niveles de representación, seleccionando en la primera de las tareas únicamente la información numérica; y en la segunda la información situacional relevante. Así, las autoras concluyen que el modelo propuesto por Reusser (1988,1990) es más adecuado para explicar el proceso de R.P que el modelo de Kintsch y Greeno (1985).

En conclusión, en este estudio se constata que los sujetos durante el proceso de R.P crean dos niveles de representación diferentes, sin embargo, cuenta con una limitación importante: las tareas propuestas por las autoras no consistieron en resolver problemas, sino en seleccionar informaciones de distinto tipo. Por tanto, no se comprueba si la versión reescrita del problema es más fácil de resolver que la versión estándar y esto provoca, a su vez, que se produzca un aumento en el rendimiento de los alumnos (Vicente y Orrantia, 2007).

■ Estudios de Vicente (2006); Vicente y Orrantia (2007); Vicente, Orrantia y Verschaffel (2007, 2008a, 2008b)

Estos autores realizaron cuatro estudios de reescritura con problemas de cambio de dos operaciones y dos niveles de dificultad, que fueron aplicados a una muestra de alumnos de 3º, 4º y 5º curso de Educación Primaria.

Con respecto al nivel de dificultad, los problemas fáciles estaban compuestos por un problema de cambio 1 y otro problema de cambio 4 (consistentes):

> *"Pedro tenía 37 metros de cable. Compró 100 metros de cable más. Ha gastado algunos metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable ha gastado?* (Vicente, 2006, p.173).

Los problemas difíciles se componían de un problema de cambio 3 y otro problema de cambio 6 (inconsistentes):

> *"Pedro tenía 37 metros de cable. Compró algunos metros de cable más. Ha gastado 126 metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró?* (Vicente, 2006, p.173).

Por otro lado, en cuanto al formato textual, se partió de una versión estándar para llevar a cabo dos tipos de reescritura: matemática y situacional. Este problema contenía únicamente la información necesaria para resolverlo:

> *"Pedro tenía 37 metros de cable. Compró X metros de cable más. Ha gastado Y metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró/ha gastado?* (Vicente, 2006, p.175).

La reescritura matemática fue la misma en los cuatro estudios. Con este tipo de reescritura se pretendía resaltar la estructura conceptual del problema, haciéndose más explícitas las relaciones matemáticas entre los conjuntos:

> *"Pedro tenía 47 metros de cable. Compró X metros de cable más* ***y los juntó con los que tenía. Del total de metros de cable que juntó*** *ha utilizado Y metros y le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró/ha utilizado?"* (Vicente, 2006, p.177).

De acuerdo con el modelo de Reusser (1988, 1990), mediante la reescritura situacional se explicitaban las intenciones del personaje, al mismo tiempo que se establecía una secuencia causal y temporal:

*“**Pedro quería renovar la instalación eléctrica de su casa.*** Pedro tenía 47 metros de cable **que *le habían sobrado de una instalación anterior***. ***Como Pedro se dio cuenta de que esos metros de cable no serían suficientes para toda la instalación*** compró X metros de cable más. ***Después de comprar el cable comenzó la instalación***. ***Al hacer la instalación*** ha utilizado Y metros de cable, ***y cuando acaba comprueba que*** le han sobrado 11 metros de cable. ***Entonces Pedro se pregunta.*** ¿Cuántos metros de cable compré/ he utilizado? (Vicente, 2006, p.176).

Puesto que los resultados del primer estudio indicaron que únicamente la versión reescrita con información matemática mejoraba el rendimiento de los alumnos en los problemas más difíciles, esta versión de reescritura situacional fue modificándose a lo largo de los cuatro estudios.

En el segundo estudio se elaboraron tres versiones distintas con información situacional: la primera, con información temporal; la segunda, con información causal; la tercera, con una combinación de ambos tipos de información. En esta ocasión, los resultados mostraron que sólo hubo un incremento no significativo del rendimiento de los alumnos en la versión temporal de los problemas fáciles.

El tercero de los estudios fue realizado para comprobar si la falta de efectividad de la información temporal se debía a que la situación descrita en el problema no entrañaba suficiente dificultad y, por ello, los alumnos no necesitaban una ayuda para comprenderlo. Para constatar la validez de esta explicación, los autores introdujeron una nueva variable: el nivel de dificultad situacional del problema, que operacionalizan mediante la alteración del orden temporal de los acontecimientos. Así, en este tercer estudio, además de considerar la variable facilidad/dificultad del problema desde el punto de vista matemático, se consideró la variable facilidad/dificultad del problema desde el punto de vista situacional. De acuerdo con ello, se reescribieron los problemas con dos versiones: en la primera de ellas, situacionalmente fácil, se describían los acontecimientos siguiendo un orden natural; en la segunda, situacionalmente difícil, se presentaban los sucesos de forma desordenada. Los resultados de este tercer estudio fueron los mismos que los obtenidos en los estudios anteriores: la información matemática mejoró el rendimiento de los alumnos, pero no así la información temporal, en ninguna de las dos versiones reescritas.

El cuarto de los estudios se llevó a cabo mediante tres versiones de reescritura de problemas: estándar, matemática y situacional-temporal; con dos tipos de formatos: formato de texto escrito con inclusión de imágenes y formato exclusivamente textual, sin dibujos; y dos niveles de dificultad: fácil y difícil.

En este estudio la reescritura situacional se focalizaba en la dimensión temporal del M.E.S, mediante marcadores temporales que señalaban las secuencias de los eventos:

> *"**Hace unos días** Pedro tenía 47 metros de cable. **Ayer** compró X metros de cable más. **Esta mañana** ha comenzado una instalación. **Al hacer la instalación** ha gastado Y metros y **cuando acabó** le han sobrado 11 metros de cable. ¿Cuántos metros de cable compró/ha gastado?* (Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008a, p.474).

Un primer resultado de este último estudio fue que los dibujos no ayudaron a la R.P, según los autores porque *"su diseño no fue el más apropiado"* (Vicente y Orrantia, 2007, p.79). No obstante, para los autores, el resultado más relevante no se refería al formato textual/imagen de la tarea, sino a la influencia de la información situacional. En efecto, las versiones situacionales-temporales de los problemas generaron un nivel de acierto por parte de los alumnos significativamente mayor que las versiones estándar.

La interpretación de este resultado por parte de los autores fue que, a diferencia de los tres estudios anteriores, en este estudio los alumnos disponían de ayudas (versiones de los problemas con información matemática) que propiciaron un efecto de aprendizaje desde los problemas difíciles con información matemática a los problemas con información situacional-temporal, y no a los problemas estándar.

La conclusión que se desprende es que la información situacional resulta útil para resolver problemas, sólo cuando se poseen "claves matemáticas" (explicitación de la estructura matemática) que ayuden a interpretar esta información. En palabras de los autores, "la creación de un modelo de la situación es un paso clave en la resolución de problemas siempre y cuando el alumno disponga del conocimiento matemático necesario para interpretar ese modelo desde el punto de vista matemático" (Vicente et al., 2007).

■ Estudios de Orrantia, Tarín y Vicente (2011)

A lo largo de estas páginas hemos visto que los resultados de los diferentes estudios empíricos de reescritura no siempre avalan la efectividad de la reescritura situacional. Así, en el último de estos trabajos (Vicente, 2007; Vicente et al., 2007, 2008a 2008b), si bien los resultados mostraron un efecto positivo de la información situacional-temporal, la reescritura con información causal e intencional no fue efectiva, al no existir una conexión entre esta y la estructura semántica del problema. Dicho de otro modo, este tipo de reescritura no logró establecer un puente entre el modelo de la situación y el conocimiento matemático. En este sentido, cabría cuestionar si la incorporación de información situacional al enunciado del problema resulta irrelevante para la tarea de R.P.

Según Orrantia et al. (2011), hay que tener en cuenta dos aspectos a la hora de plantear qué tipo de información situacional introducir en los enunciados, aspectos que, en cierta medida, reflejan algunas de las limitaciones de los estudios previos. Por un lado, *el rol* que esta información juega en el proceso de resolución, y por otro, *la naturaleza* de esta información.

Con respecto al *rol,* los modelos computacionales posteriores a los clásicos comparten la idea de que la función del modelo de la situación es facilitar la construcción del modelo matemático del problema, que permitirá su resolución. En otras palabras, la información situacional sirve de puente para conectar el texto del problema con el conocimiento matemático necesario para resolverlo. Y respecto a la *naturaleza,* estos modelos son menos explícitos, pero según Orrantia et al. (2011), se debería contar con un marco de referencia que permita operacionalizar qué tipo de información situacional incorporar, más allá de la idea genérica de reflejar en el enunciado situaciones reales próximas a las experiencias de los niños.

En el trabajo de estos autores se parte de esa limitación y se plantea como propósito analizar si la introducción de información situacional relacionada con la estructura causal e intencional tiene efectos positivos en el proceso de R.P, cuando este tipo de información está conectada de forma directa con el esquema semántico. En concreto, los autores realizaron dos estudios que perseguían estos objetivos: analizar hasta qué punto la incorporación de ese tipo de información situacional en el enunciado del problema influye, por un lado, en su resolución, y por otro, en la representación del texto que los alumnos construyen en la memoria.

Para llevar a cabo estos estudios se tomó como marco de referencia los modelos de comprensión del texto, donde existen evidencias de que este tipo de información situacional desempeña un papel fundamental en la comprensión del discurso. Se operó con información situacional de tipo causal e intencional dentro del marco de estos modelos, fundamentalmente por dos razones:

En primer lugar, como hemos apuntado al principio de este capítulo, los enunciados de los problemas pueden ser considerados como entidades discursivas similares a cualquier otro texto, puesto que para su comprensión no sólo interviene el conocimiento matemático, sino también el conocimiento de tipo lingüístico y situacional. Tal es así que se puede establecer una analogía entre las estructuras de los diferentes tipos de PAVs y las estructuras de determinados textos (véanse las figuras 6, 7 y 8 en el epígrafe II.3). En concreto, la estructura de los problemas de cambio, que fueron utilizados en este estudio, es similar a los textos narrativos, puesto que ambos reflejan situaciones del mundo real donde unos *personajes* ejecutan *acciones* para conseguir ciertas *metas* dentro de unas circunstancias *espaciales* y *temporales.*

En segundo lugar, el marco de referencia del discurso permite operacionalizar la información situacional a partir de una serie de dimensiones. Para los propósitos de este estudio, los autores se centraron en la dimensión relacionada con las inferencias causales guiadas por las metas o intenciones de un personaje, dado que la investigación en comprensión narrativa ha demostrado que la creación de estas inferencias es un aspecto relevante en la comprensión (Albrecht y Myers, 1995; Suh y Trabasso, 1993; Van den Broek, 1990). Las metas dirigen las acciones de los personajes y permiten al lector integrar las acciones con información textual presentada previamente y así formar una red causal coherente (Graesser, Singer y Trabasso, 1994; Magliano, Zwaann y Graesser, 1998; Trabasso y Sperry, 1985; Trabasso y Van den Broek, 1985). Como señala León (2004), el texto narrativo genera un tipo de comprensión orientada a una meta que puede argumentarse en términos de explicación causal. Este procedimiento resulta necesario para construir una representación globalmente coherente del texto, y en este caso, causalmente coherente. La búsqueda de causas, motivos, propósitos, intenciones… del personaje resulta necesaria para la construcción de un modelo de la situación causal que permita al alumno realizar las inferencias necesarias para resolver el problema con efectividad. En este sentido, la naturaleza de reescritura situacional incluida en los enunciados consistió en "introducir metas explícitas de los personajes para ejecutar determinadas acciones para hacer aumentar o disminuir conjuntos, y de esta manera permitir a los alumnos construir una representación causal coherente del texto problema" (Orrantia et al., 2011 p.83). El siguiente problema es un ejemplo:

> *"Juan tenía 25 euros.* ***Juan quería conseguir algún dinero más porque quería comprarse un juguete y no le llegaba.*** *Para ello, Juan pidió algunos euros a sus padres.* ***Después, como ya tenía dinero suficiente,*** *se gastó 78 euros en el juguete, y al final le sobraron 14 euros. ¿Cuánto dinero le dieron a Juan sus padres?"* (Orrantia et al., 2011, p. 84).

Siguiendo a estos autores, desde el punto de vista matemático, se activaría el esquema semántico de cambio: se parte de una cantidad inicial conocida, (25€) sobre la que se ejerce un cambio añadiendo (cambio a más) para dar un resultado. Puesto que este problema es compuesto, sobre la cantidad resultante se ejerce nuevamente un cambio quitando (cambio a menos) que da lugar al resultado final: conjunto inicial (25€); cambio + (¿?); resultado (¿?); cambio (78€); resultado (14€).

Por otro lado, la naturaleza de la información situacional introducida genera una estructura causal: un evento inicial (no tener dinero suficiente para comprar un juguete) crea una meta (querer conseguir más dinero) que desencadena acciones destinadas a conseguir la meta (pedir dinero a sus padres) las cuales dan lugar a un resultado (tener dinero suficiente) que causa una reacción (poder comprar el juguete). De esta manera, la estructura resultante se corresponde con la estructura prototípica de los textos narrativos, pero, además, el hecho más importante es que "la estructura causal conecta directamente con el esquema matemático del problema" (Orrantia et al., 2011, p.84). A diferencia de la reescritura propuesta por estudios anteriores, la vinculación entre la estructura matemática del problema y las claves situacionales introducidas queda de relieve al aplicar el sistema de análisis proposicional propuesto por Graesser y Goodman[18] (1985). De acuerdo con este sistema de análisis, la estructura de los problemas estándar sería la siguiente:

1. EF1: Juan tenía 25 euros; Estado Físico.
2. M+1: Juan pidió algunos euros a sus padres; Meta: acción.
3. M+2: Gastó 78 euros; Meta: acción.
4. EVF1: Al final le han sobrado 14 euros; Evento Físico.

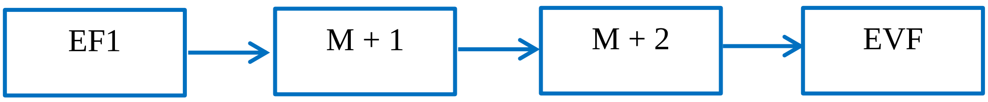


Figura 11. Representación gráfica de la estructura del problema estándar reescrito por Orrantia et al. (2011).Elaboración propia.

[18] El modelo de análisis proposicional de Graesser y Goodman (1985) presenta el conocimiento como "una red de nodos de frases etiquetadas que se relacionan a través de arcos etiquetados" (p.114). Los nodos pueden organizarse en una serie de categorías: Estado Físico (EF); Evento Físico (EVF); Estado Interno (EI); Evento Interno (EVI); Meta (M); y Estilo (E). Los arcos o nexos de unión entre los nodos se organizan en función de cinco categorías: Razón (R); Iniciación (I); Consecuencia (C); Modo (M); Propiedad (P). Este sistema de análisis fue diseñado para analizar las relaciones entre los diferentes nodos de significado y los tipos de vínculos que los unen.

Sobre la estructura secuencial de los problemas estándar reescritos se vinculan una serie de nodos de significado y arcos de conexión que responden al objetivo de resaltar la estructura causal de la situación.

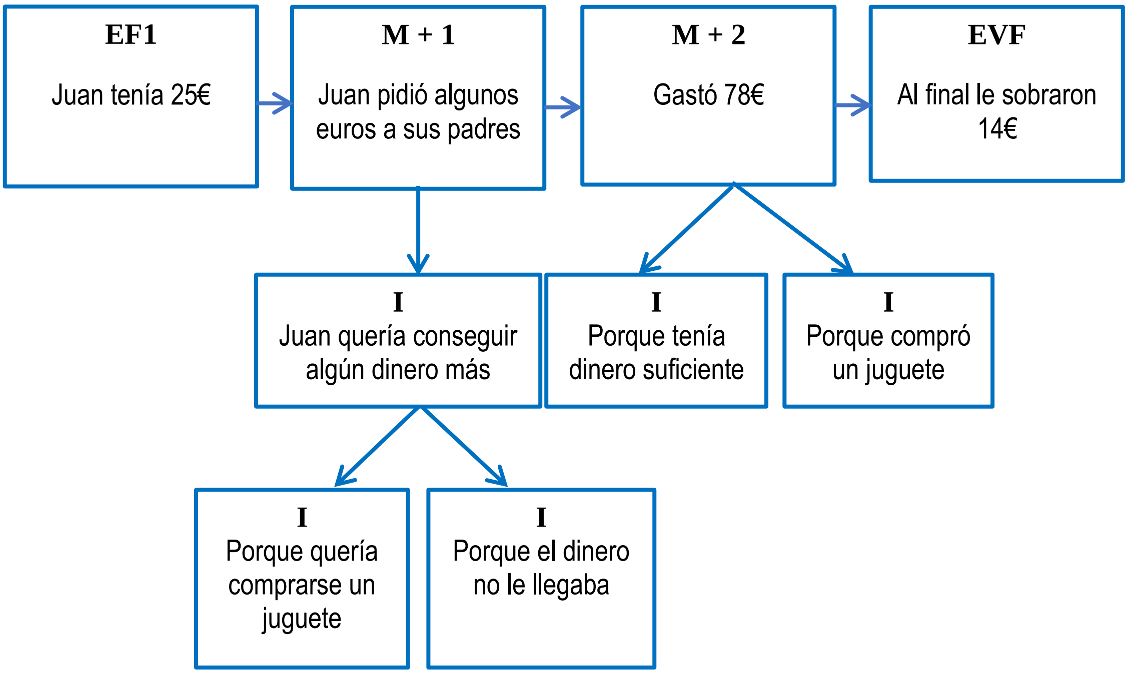


Figura 12. Representación gráfica de la estructura del problema reescrito situacionalmente por Orrantia et al. (2011). Elaboración propia.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se llevaron a cabo dos estudios: en el primero de ellos, los problemas reescritos situacionalmente fueron comparados con problemas estándar (sólo con información necesaria y suficiente para operar con el esquema matemático); en el segundo estudio, que pretendía analizar la representación del problema que los alumnos construyen en la memoria a través del recuerdo, los problemas con información situacional se compararon con problemas que también incluían información situacional, pero en este caso irrelevante para la construcción del esquema matemático.

Para el primero de los estudios se construyeron ocho problemas experimentales con una estructura de cambio de dos operaciones: conjunto inicial, cambio 1, resultado (implícito) cambio 2 y resultado final. La mitad de los problemas eran estándar y contenían únicamente la información necesaria para resolver el problema:

> "Juan tenía 25€. Consiguió X€ más. Se gastó Y€, y al final le han sobrado 14€. ¿Cuántos euros consiguió/ gastó? (Orrantia et al., 2011, p. 85).

Los problemas con información situacional se construyeron de acuerdo con la fundamentación que venimos exponiendo y el ejemplo presentado más arriba. La prueba estaba conformada por los ocho problemas experimentales y por dieciocho ítems de relleno para variar las tareas de los alumnos y evitar así los efectos de aprendizaje y las respuestas estereotipadas. Por otro lado, los problemas fueron aplicados a una muestra de alumnos de 4º y 6º curso de Educación Primaria, clasificados en función de su competencia aritmética.

Los resultados del primer estudio confirmaron que los problemas con información situacional eran resueltos con mayor efectividad por los alumnos que los problemas estándar, concluyendo que cuando la información situacional-causal está conectada con el esquema matemático del enunciado se produce una mejora en el rendimiento de los alumnos.

Para el segundo estudio se reescribieron cuatro problemas experimentales siguiendo los criterios del primer estudio. Dos de ellos contenían información situacional relevante y dos irrelevante, cada uno con diferente grado de dificultad. En los primeros, se utilizaron los mismos criterios de reescritura: estructura causal ligada al esquema matemático. En los segundos, la información situacional relevante fue sustituida por información situacional irrelevante, es decir, conservaba la misma estructura causal, pero no permitía conectar el texto del problema con el esquema matemático.

Por ejemplo:

> "Ana tenía 45 adornos navideños. Ana ponía el árbol de navidad todos los años porque era una tradición familiar y quedaba muy decorativo. La pasada navidad Ana se fue a una tienda cercana y compró 58 adornos navideños. Después se acercó a su casa y utilizó algunos adornos para decorar el árbol. Al final le sobraron 17 adornos. ¿Cuántos adornos navideños utilizó Ana para decorar el árbol?" (Orrantia et al., 2011, p.87).

Del mismo modo que en el primer estudio, los resultados sobre ejecución mostraron que los problemas reescritos con información situacional relevante eran resueltos mejor que los reescritos con información situacional irrelevante. Ahora bien, estos resultados estuvieron mediatizados por el nivel de competencia matemática, de manera que los alumnos con un nivel de conocimiento conceptual alto fueron los que se beneficiaron de la información situacional introducida. Por tanto, si en el primer estudio se concluía que la información situacional desempeña el rol de conectar el texto del problema con el conocimiento matemático, ahora se pudo concluir que este efecto es así siempre y cuando este conocimiento exista. En otras palabras, la información situacional no sustituye el conocimiento matemático, pero sí ayuda a entrar en contacto con este.

Los resultados del recuerdo estructural apoyan la idea de que la información situacional relevante ayuda a crear una representación coherente del enunciado del problema en la memoria. Sin embargo, son los alumnos con un nivel de conocimiento conceptual más bajo los que se benefician más del contexto situacional para recordar el problema, es decir, aquellos menos beneficiados por este contexto en la ejecución de los problemas. Esto no quiere decir que las medidas de ejecución y de recuerdo no tengan ninguna relación. Si consideramos el recuerdo como una medida de comprensión del enunciado, esta sería una condición necesaria pero no suficiente para resolver el problema. Como ya se ha apuntado, el conocimiento matemático es fundamental en la resolución, por lo tanto, resolver implica conectar la representación textual (medida con el recuerdo) con el conocimiento matemático que permite resolver el problema. Así, aunque a los alumnos con niveles más bajos la información situacional relevante no les ayudó a resolver mejor los problemas, esta información sí les ayudó a aproximarse a crear una representación más coherente del problema.

En conclusión, los resultados de este trabajo muestran que la incorporación de información situacional en el enunciado de los problemas mejora tanto la ejecución como la representación que se crea en la memoria.

Según los autores, las implicaciones educativas que se derivan de estos estudios se relacionan con el tipo de problemas a los que los alumnos se enfrentan diariamente en la escuela. Así, deberían incorporarse prácticas educativas con problemas que permitiesen operar con ambos tipos de representaciones (cuantitativa y cualitativa), relacionadas con el modelo de la situación.

II.6. Síntesis del Capítulo II

- En la primera parte de este capítulo hemos conceptualizado los PAVs, objeto de nuestra tesis. Asimismo, hemos establecido su doble naturaleza, su tipología y los factores que determinan su dificultad.
- Para conceptualizar los PAVs hemos partido de la definición propuesta por Verschaffel et al. (2014). Según estos autores, los PAVs son descripciones verbales de situaciones problemáticas con preguntas a las que hay que responder aplicando operaciones matemáticas a los datos numéricos del enunciado. De la propia

conceptualización surge su doble naturaleza: conceptual o matemática y textual. Conceptual, porque a la estructura del problema subyace una ecuación matemática con datos eminentemente cuantitativos; textual, porque si bien la resolución del problema termina con la ejecución de una o varias operaciones matemáticas, la lectura es el punto de partida para su comprensión y resolución. Así, podemos afirmar que los PAVs constituyen un tipo de problemas en los que converge el lenguaje natural con el lenguaje de las matemáticas.

- Una de las clasificaciones que más atención ha recibido es la propuesta por Heller y Greeno (1978), que distinguieron tres categorías de PAVs de estructura aditiva simples (cambio, combinación y comparación) en función de las relaciones numéricas establecidas en los enunciados, es decir, la estructura semántica subyacente. Posteriormente, Carpenter y Moser (1983), incluyeron la categoría de igualación. Estas cuatro categorías se dividen a su vez en veinte subcategorías: seis de cambio, comparación e igualación, y dos de combinación. Los PAVs compuestos, por otra parte, se forman a partir de la combinación de categorías simples o compuestas.
- La dificultad que presentan los PAVs de estructura aditiva está mediatizada por su estructura semántica. Sin embargo, un factor todavía más determinante es la ubicación de la incógnita. Este factor permite distinguir entre problemas expresados con un lenguaje consiste o un lenguaje inconsistente o no coherente, en función de la relación que se establece entre la estructura superficial del problema y el algoritmo necesario para resolverlo.
- En la segunda parte de este capítulo hemos intentado dar respuesta a dos cuestiones: la primera, ¿en qué consiste la resolución de un problema?; la segunda, ¿qué tipo de ayudas textuales pueden resultar efectivas para facilitar a los alumnos el proceso de R.P?
- A la hora de explicar el proceso de R.P, se han distinguido dos tipos de modelos: los modelos heurísticos y los modelos cognitivos. Los primeros se caracterizan por ser más genéricos y tienen la ventaja, por tanto, de poder ser aplicados a distintos tipos de situaciones problemáticas. Sin embargo, los modelos cognitivos son más específicos, puesto que sólo pueden aplicarse a los PAVs. Este mayor nivel de especificidad permite, lejos de hacer descripciones generales, profundizar en los procesos cognitivos implicados en la resolución.

- La principal diferencia entre los distintos modelos cognitivos es la relevancia que otorgan al tipo de información o conocimientos necesarios para construir una representación interna del problema. Mientras que los primeros modelos computacionales, los clásicos (Briars y Larkin, 1984; Riley et al., 1983), inciden de forma exclusiva en la información matemática, para los modelos computacionales procedentes del ámbito de la comprensión de textos (Kintsch, 1988; Kintsch y Greeno, 1985; Reusser, 1988, 1990), además de esa información de tipo cuantitativo, se hace necesaria también la información de carácter cualitativo.

- Partiendo de los distintos modelos cognitivos, se han llevado a cabo estudios empíricos de reescritura que han tratado de ofrecer ayudas para facilitar a los alumnos el proceso de comprensión y resolución de los problemas. Estos estudios pueden clasificarse en dos grupos: por un lado, los estudios centrados en la reescritura de tipo conceptual, que han resaltado la estructura matemática de los problemas; por otro lado, los estudios que han enriquecido los problemas para fomentar el procesamiento de los aspectos lingüísticos y situacionales. Algunos de estos estudios han propuesto ambos tipos de reescritura.

- Los estudios empíricos de reescritura han mostrado que la explicitación en el enunciado del problema de las relaciones conceptuales entre los conjuntos, esto es, la estructura matemática, resulta eficaz para ayudar a los alumnos a resolver problemas. Sin embargo, la eficacia de los estudios centrados en la modificación de los aspectos lingüísticos y situacionales ha sido más controvertida. Estos últimos estudios se caracterizan por ser más numerosos y heterogéneos. La heterogeneidad de criterios y formatos de reescritura es una de las razones de la discrepancia en los resultados sobre su efectividad.

- La reescritura conceptual en los estudios de De Corte et al. (1985) y Cummins (1991), aumentó el rendimiento de los alumnos, especialmente en este último estudio. Sin embargo, la reescritura propuesta en el estudio de Davis-Dorsey et al. (1992), donde se utilizaron varios criterios para reescribir los problemas, los resultados no fueron tan positivos como los obtenidos por los autores anteriores. Por otro lado, la reescritura de Hudson (1983) mostró una gran influencia en la ejecución de los alumnos. El tipo de reescritura propuesto en el estudio de Stern y Lehndorfer (1992) también se mostró útil, pero no así el tipo de reescritura utilizado en el estudio de Staub y Reusser

(1992), donde hubo una falta de homogeneidad en los criterios referentes al tipo de modificaciones introducidas.

- El estudio realizado por Moreau y Coquin-Viennot (2003) se caracterizó por una operacionalización nítida de la reescritura situacional de tipo intencional-causal y comprobó la validez del M.E.S (Reusser, 1988,1990). Sin embargo, presentó una limitación importante: la tarea propuesta no era la resolución del problema.
- Vicente et al. (2007, 2008a, 2000b), llevaron a cabo cuatro estudios para comprobar la efectividad de la reescritura situacional-temporal. En el último de estos estudios se evidenció que este tipo de información situacional resulta útil a los alumnos siempre que estos dispongan de "claves matemáticas" (explicitación de la estructura matemática del problema) que les ayuden a interpretar esa información.
- En el de Orrantia et al. (2011) se mostró que la información situacional de tipo causal e intencional ayuda a los alumnos a resolver los problemas cuando se relaciona directamente con el esquema matemático del problema.

CAPÍTULO III

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS LIBROS DE TEXTO

III.1. Introducción

En los capítulos precedentes hemos abordado el estudio de dos aspectos de nuestra tesis: por un lado, hemos intentado aproximarnos al concepto de problema y R.P; por otro lado, hemos profundizado en un tipo concreto de problemas que constituye el contenido y objeto de análisis de nuestros trabajos de investigación, los PAVs de estructura aditiva. Sin embargo, como afirmábamos al comienzo del primer capítulo, Bishop (2000) conceptualiza el "contenido matemático" como un constructo extenso, que no sólo alude a los contenidos curriculares del área de matemáticas (en este caso, los PAVs de estructura aditiva), sino también al contexto educativo donde tiene lugar la transposición didáctica de dichos contenidos. En este sentido, otro aspecto central de nuestra tesis es el libro de texto o manual escolar, recurso material hegemónico en la institución escolar, que actúa como mediador entre las prescripciones del currículum oficial y la práctica educativa, y que encierra, por tanto, el currículum real que se presenta en el contexto escolar. Siguiendo el pensamiento de Apple (1992), lo que aprenden los alumnos no es definido realmente por los programas curriculares, sino por los libros de texto.

El primer propósito de este capítulo es presentar una visión del panorama actual, tanto en el contexto nacional como internacional, del uso e influencia del libro de texto en las prácticas educativas de las aulas, las principales líneas de investigación dedicadas a su estudio, y los enfoques teóricos que actualmente la investigación educativa considera prioritarios.

En un segundo momento, nos adentraremos en el ámbito específico de las matemáticas, para describir una serie de estudios actuales que se han ocupado de investigar el papel que desempeñan los problemas y la R.P en los libros de texto de matemáticas, tanto en nuestro país como a nivel internacional.

III.2. La investigación sobre el libro de texto: estado de la cuestión

III.2.1. Panorama actual sobre el uso e influencia del libro de texto en el aula

Los libros de texto, al igual que otros materiales curriculares, como por ejemplo los cuadernos de clase del alumno, constituyen ventanas que nos permiten asomarnos a la realidad escolar o al currículum en la práctica. De hecho, autores como Gimeno (2015), al hablar de las diferentes concreciones curriculares, se refiere a los libros de texto como "el currículum creado para ser consumido por profesores y alumnos" (p.49), de manera que los materiales curriculares en general, y los libros de texto en particular, constituyen "auténticos traductores del currículum como proyecto y como texto plasmado en prácticas concretas" (Gimeno, 2010, p.33).

Actualmente, los materiales curriculares están experimentando un proceso de transformación en lo que se ha venido a denominar *la era de la revolución digital*. No obstante, la investigación actual muestra que los libros de texto siguen siendo el recurso educativo hegemónico en la mayoría de los países, sistemas educativos y aulas (Escudero, 2015; Fuchs y Bock, 2018; Hansen, 2018; Knudsen, 2011). Es más, la investigación sobre la influencia de los libros de texto en las prácticas docentes y en los procesos de selección de los mismos concluye que, incluso en la educación superior, los libros de texto son considerados una voz de autoridad (Knight, 2015).

El uso del libro de texto como material dominante en las aulas es un hecho constatado en las revisiones de los estudios desarrollados en los últimos años. Ahora bien, en la revisión de Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez (2010), se señala que si bien el profesorado hace uso del libro de texto como principal recurso de instrucción, no puede afirmarse que éste sea el único material curricular empleado por los docentes. Por otro lado, en la revisión de Watt (2015), donde también se confirma el uso preponderante del libro de texto, se pone de manifiesto la existencia de una gran heterogeneidad con respecto a las formas con que los profesores hacen uso de este recurso material.

Siguiendo a Hansen (2018), en Finlandia se han desarrollado dos estudios clave en los que se analizan las distintas percepciones que los profesores tienen de los libros de texto, así como la frecuencia de su uso y las modificaciones que efectúan en ellos.

En el primero de estos estudios, Heinonen (2005), a partir de entrevistas semiestructuradas y cuestionarios, identificó cuatro tipos de profesores: *los innovadores individuales*, que desarrollan la enseñanza independientemente de los libros de texto y del currículum oficial; *los dependientes* de los materiales curriculares, que siguen el libro de texto; *los innovadores orientados al currículum*, que basan la enseñanza tomando como referencia el currículum oficial y buscando la creación de un aprendizaje centrado en la experiencia del alumno; y *los innovadores orientados a objetivos*, que enfocan la enseñanza reformulando el currículum prescrito y utilizando los libros de texto de manera selectiva.

En el segundo de estos estudios finlandeses, Pehkonen (2004), utilizó la entrevista semiestructurada para conocer las percepciones de los profesores de Educación Primaria sobre los libros de texto de matemáticas. Los resultados de este estudio mostraron tres formas de concebir el libro de texto: *justificación, crítica y culpa*.

- Enfoque de la *justificación*: los docentes hablan de los libros de texto como una garantía de calidad para la enseñanza, un apoyo en las reformas educativas y una ayuda e inspiración para lograr cambios en la enseñanza.
- Enfoque de la *crítica:* los docentes aluden a los libros de texto como una carga, un obstáculo y una restricción de la libertad para tomar sus propias decisiones. El libro de texto lleva al profesorado a la pasividad, instrumentaliza y mecaniza la enseñanza, y minimiza e incluso anula la interacción entre profesores y alumnos.
- Enfoque de la *culpa:* el docente se siente culpable porque hace uso del libro de texto y sabe, al mismo tiempo, que esto conlleva una pérdida de profesionalidad al delegar su responsabilidad en los autores de las editoriales. En este enfoque se justifica la cesión de la función docente al libro de texto, argumentando la escasa disponibilidad del tiempo necesario para elaborar los propios materiales curriculares.

En síntesis, estos dos estudios finlandeses confirman la tesis de Watt (2015): si bien el libro de texto constituye el material curricular predominante, los profesores se mueven entre los dos polos extremos de un mismo continuo: la dependencia y la autonomía. En cualquier caso, las razones que llevan al docente al uso de los libros de texto son complejas y no se reducen exclusivamente a los argumentos utilizados por los profesores en los enfoques de la *justificación* y la *culpa*. Para Guarro (2005), la deficiente formación del profesorado, tanto inicial como permanente, no consigue capacitarle para enfrentarse con autonomía a su propia práctica, de ahí que necesite recurrir a “preelaboraciones curriculares” que faciliten su trabajo. En este sentido, Fernández Reirís (2015), sostiene que para los docentes: “los libros de texto actúan como un mapa de navegación que reduce la incertidumbre y la complejidad de la enseñanza” (p.63). Además, como señala Torres (2009), en la escuela sigue predominando una concepción tecnocrática del trabajo docente, que tiene como máximo exponente el libro de texto. Desde esta racionalidad se preconizan diseños curriculares homogéneos (válidos para cualquier contexto y alumno) que deben ser pensados y elaborados por expertos, y aplicados de forma rutinaria y mecánica por maestros.

El uso que hace el profesorado de los materiales curriculares en el aula y su influencia en las prácticas docentes ha sido investigado recientemente a nivel internacional por Horsley y Sikorová (2014). Estos autores se plantearon dos objetivos de investigación: por un lado, conocer qué tipo de recursos son utilizados en las aulas de diferentes países; por otro lado, establecer el rol que desempeña el libro de texto entre esos recursos, es decir, estudiar hasta qué punto el libro de texto constituye el material básico y primordial de la instrucción o, por el contrario, se trata de un recurso complementario con un estatus idéntico al resto de materiales curriculares.

Para desarrollar este estudio, los autores partieron de los resultados sobre el uso de libros de texto de las pruebas TIMSS de los años 2003, 2007 y 2011. El análisis comparativo de estos resultados mostró que, además del libro de texto, los docentes utilizan otros recursos, fundamentalmente libros de consulta, fichas de trabajo y recursos digitales. Sin embargo, los libros de texto son la base de la instrucción en el contexto educativo internacional. Es más, con respecto a los resultados de años anteriores, los datos de 2011 indicaron que, el uso de los libros de texto como material básico de instrucción había aumentado de forma notable, mientras que su uso como material complementario había disminuido. A partir de estos resultados, y con respecto al resto de materiales utilizados por el docente, concretamente los recursos digitales, Horsley y Sikorová (2014) concluyen que:

> La educación digital aún está por llegar a las aulas; es poco probable que llegue pronto; no se puede afirmar que se haya logrado; y la afirmación de los políticos de que el ordenador portátil o la tablet es el libro de texto del futuro, es evidentemente falsa (p.58).

El fenómeno de la digitalización ha impulsado desde la década de los años noventa numerosos estudios, que en la actualidad centran su interés prioritario en el libro de texto digital[19], aunque aluden igualmente al libro de texto impreso. Algunas de las conclusiones de estos estudios son las siguientes:

- Si bien es cierto que algunos materiales y libros de texto destacan por su calidad y por la integración de la tecnología digital en su diseño (ver, por ejemplo, Rives, 2011), en general el sector editorial no ha mejorado sustancialmente la calidad de

[19] Rodríguez Rodríguez y Rodríguez Regueira (2016), apuntan que habitualmente se confunden los contenidos digitales y los soportes que los albergan. Los contenidos digitales o electrónicos son denominados de maneras muy diversas: libros de texto digitales, libros de texto electrónicos, libros multimedia, libros interactivos en red, digital-textbook, e-textbook, etc. Estos contenidos se almacenan utilizando diferentes dispositivos. En general, se denomina e-reader al dispositivo diseñado de forma específica para la lectura de textos

los libros de texto digitales. A pesar de pequeñas mejoras en algunos aspectos relacionados con la interactividad y la legibilidad, la investigación actual muestra la baja calidad de los libros de texto, tanto impresos como digitales (Vicente, 2010; Zapico, 2012).

- A la hora de diseñar los materiales digitales, la industria editorial debería contar con profesionales cualificados pedagógicamente. Asimismo, resulta fundamental que los materiales y libros de texto digitales se sometiesen a procesos de experimentación durante su desarrollo, ya que en general, las editoriales no llevan a cabo ningún tipo de investigación exploratoria (Rodríguez Regueira y Rodríguez Rodríguez, 2015). Con respecto al libro de texto impreso, Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez (2010) señalan que:

  > No es una práctica habitual de las editoriales imprimir ediciones experimentales para someterlas a prueba en el aula (…) una buena parte de los estudios también ponen de relieve que la mayoría de los editores asumen que el autor ya probó su técnica y contenido en el aula antes de verter su material en el manuscrito (p.249).

- Según Peirats, Gallardo, San Martín y Cortés (2015), actualmente son escasas las editoriales que centran su producción de forma exclusiva en el libro de texto digital, puesto que sus ingresos siguen obteniéndose del libro de texto impreso. Estos autores hablan, por tanto de "un futuro incierto en cuanto a la materialización en las aulas de los libros de texto digitales" (p.59). Del mismo modo se expresa Misra (2015), para quien "no se ve aún un futuro claro donde los libros de texto impresos sean reemplazados por los libros de texto digitales" (p.109).
- Numerosos estudios desarrollados en los últimos años sobre el libro de texto digital han puesto de relieve la necesidad de mejorar su uso. Según Mardis, Everhart, Smith, Newsum y Baker (2010), entre las posibilidades que ofrecen los recursos digitales figura la gran variedad de actividades que pueden ser adaptadas por el profesor a distintas situaciones y contextos de aprendizaje, abordando así las necesidades específicas de apoyo educativo de los alumnos. No obstante, investigaciones recientes sobre el análisis de la diversidad en libros de texto impresos y digitales indican la escasa atención dedicada a la diversidad del alumnado (Delgado de Paiva, 2008; Mardis et al., 2010, Niehaus, 2018).

- A pesar del potencial de uso que ofrecen los libros de texto digitales, algunas investigaciones muestran que, en general, este tipo de recurso contribuye a la réplica de prácticas de enseñanza tradicionales y excluye otro tipo de prácticas metodológicas más innovadoras (Kim y Jung, 2010). Otras investigaciones señalan la inexistencia de cambios pedagógicos significativos con respecto al libro de texto impreso (Rodríguez, Horsley y Knudsen 2011; Vicente 2010; Zapico 2012). Asimismo, uno de los hallazgos esenciales de la investigación actual es que hay pocas diferencias, si las hay, en los resultados de aprendizaje entre los diferentes tipos de materiales curriculares (Hansen, 2018; Jones y Brown, 2011; Mardis et al., 2010).

- Al igual que el libro de texto impreso, el libro de texto digital condiciona en gran medida la práctica docente, dado el alto grado de dependencia de los profesores con respecto a los libros de texto, independientemente de su formato (Rodríguez Regueira y Rodríguez Rodríguez 2015; Rodríguez Rodríguez, 2011; Rodríguez Rodríguez y Montero, 2012; Vicente, 2010; Watt, 2015). En este sentido, autores como Gimeno (2009), hablan de “la paradoja de tener una única fuente de conocimiento en la denominada sociedad de la información” (p.29).

Dos cuestiones finales sobre el uso e influencia del libro de texto:

(1) Un asunto de especial interés es la disfunción existente entre los hallazgos de la investigación educativa y su escasa repercusión en la práctica cotidiana de las aulas. Ante esta disfunción, Martínez Bonafé (2008) plantea que, la investigación ha mostrado las limitaciones del uso del libro de texto en los procesos de innovación del trabajo del maestro, sin embargo, “la cultura hegemónica en la escuela sigue reproduciendo del libro de texto la imagen de un recurso necesario e insustituible para la enseñanza” (p.68). Autores como Rodríguez Regueira y Rodríguez Rodríguez (2015) y Travé y Pozuelos (2008), también se hacen eco de este alejamiento y hablan de la necesidad de cuestionar por qué la difusión de la investigación educativa no llega a las escuelas. Tal y como señalan estos autores, se trata de una cuestión que no es novedosa, pero sí fundamental a la hora de desarrollar futuras investigaciones respecto a la mejora del uso del libro de texto y respecto a otras prácticas alternativas.

(2) Finalmente, en relación a esta última cuestión, Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez (2010), manifiestan que la preocupación por la investigación sobre las prác-

ticas alternativas al libro de texto ha sido escasa. Faltan estudios que analicen en profundidad propuestas y prácticas existentes donde los libros de texto no tienen cabida. Entre ellas, la larga y potente tradición de renovación pedagógica impulsada a lo largo del siglo XX, enfrentada a la "pedagogía escolástica"[20] Autores como Freinet, Freire, Dewey o Stenhouse, para quienes el libro de texto fue un artefacto inútil, mostraron otras posibilidades de organizar el proyecto curricular.

III.2.2. Líneas actuales de investigación sobre el libro de texto

Actualmente contamos con un considerable número de trabajos sobre el libro de texto, tanto en el contexto nacional como en el internacional, cuya principal característica es la heterogeneidad de líneas de investigación desde las cuales se ha abordado su estudio: el uso e influencia del libro de texto en la práctica educativa; la elaboración de modelos de evaluación de materiales curriculares; los aspectos ideológicos subyacentes en el libro de texto; la economía política; la repercusión de las políticas reformistas sobre los materiales curriculares, etc.

En España, dos revisiones destacadas son las realizadas por Travé y Pozuelos (2008) y por Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez (2010). En el ámbito internacional, la revisión más reciente es la de Fuchs y Bock (2018). A partir de estas revisiones, describiremos el estado actual de tres de las líneas en las que la investigación ha sido más prolija.

- **Aspectos ideológicos subyacentes en el libro de texto**

La investigación sobre los contenidos y los valores de carácter moral y cívico transmitidos por los libros de texto respecto a raza, clase y género, ha ido creciendo exponencialmente desde los años setenta hasta la actualidad, evidenciándose que los textos escolares siguen reflejando y transmitiendo los modelos sociales dominantes, contribuyendo de esta manera a reproducir sesgos, estereotipos y prejuicios sexistas, clasistas, racistas y homófobos (Chisholm, 2018;Fuchs y Henne, 2018; Sancho Höhne y Heerdegen, 2018).

En la década de los años setenta la crítica al libro de texto se centró principalmente en su contenido ideológico. Por primera vez, los investigadores afirmaron que los libros de texto, independientemente de los temas que tratasen, eran portadores y difusores de conte-

[20] De acuerdo con Martínez Bonafé (2008), el libro de texto surge en el seno de una pedagogía nacida en los monasterios de la Edad Media, institucionalizada principalmente por las órdenes religiosas de los Jesuitas y Salesianos, y universalizada con el desarrollo del capitalismo, las revoluciones burguesas y la creación de los estados nacionales entre los siglos XVII y XIX. Fue Celestin Freinet quien denominó "pedagogía escolástica" a esta tradición pedagógica de carácter religioso

nido político. Uno de los autores que más profundizó en el discurso ideológico subyacente en el libro de texto fue M. W. Apple, para quien temas como minorías, raza, género o clase social constituían factores relevantes en la producción del conocimiento legítimo en los libros de texto (Fuchs y Henne, 2018).

En España, no será hasta los años noventa cuando comienzan a aparecer abundantes estudios que ponen de relieve que el libro de texto no es un producto "aséptico" o "neutral", sino que "reproduce los valores e ideología de los grupos dominantes" (Travé y Pozuelos, 2008, p.5) y contribuye a crear "sesgos, estereotipos y prejuicios sexistas, clasistas y racistas" (Blanco, 2008, p.13). Actualmente, una parte importante de la investigación sigue centrada en el análisis del contenido ideológico transmitido en el libro de texto. Los estudios actuales trazan una analogía entre los libros de texto y la sociedad, al suponer plausiblemente que los libros de texto continúan reproduciendo estructuras sociales de desigualdad, de ahí la importancia de su análisis (Sancho Höhne y Heerdegen, 2018). Este supuesto se fundamenta, por una parte, en el hecho de que el libro de texto es la representación de facto del currículo, puesto que tiene un estatus "altamente arraigado" (Wilmot y Naidoo, 2014, p. 324) e "incuestionable" (Jochim, 2014, p.1) y por otra parte, por el hecho de que "muchos profesores confían en su contenido para impartir sus clases" (Hawkins, 2012, p. 238). Veamos las conclusiones de algunas investigaciones actuales:

- Los estudios actuales sobre raza en los libros de texto revelan presentaciones racistas y representaciones estereotipadas de las personas negras. Además, se caracterizan por la supresión del tema histórico del "dominio blanco" (Fuchs y Henne, 2018). A partir del análisis de diecinueve libros de texto de historia, Brow y Brown (2010), analizan cómo los actos de violencia racial contra afroamericanos reciben una atención mínima y/o distorsionada en los libros de texto estadounidenses. Los resultados de este estudio muestran el limitado conocimiento histórico y sociocultural sobre el racismo que se proporciona a los alumnos a través de los libros de texto, así como la escasa atención prestada a este tema en el currículum oficial. Por otro lado, en el estudio etnográfico de Bryan (2012), donde se combinan entrevistas a alumnos con el análisis discursivo de veinte libros de texto representativos de las principales editoriales, se concluye que el sistema educativo irlandés refuerza, en lugar de eliminar, las teorías populares del racismo y respalda el marco ideológico en el que éste se sustenta, al dar definiciones y explicaciones que individualizan, minimizan y naturalizan el racismo.

- Según Chisholm (2018), todos los estudios revisados sobre género en los libros de texto llegan a la misma conclusión: la mujer aparece subrepresentada o representada de forma negativa; el libro de texto sigue presentando una imagen sesgada y/o tergiversada de la mujer. Según esta autora, actualmente son escasos los cambios producidos sobre la representación de las mujeres en los libros de texto en EE.UU, desde que Trecker puso de relieve en 1973 la necesidad de mostrar una actitud igualitaria y libre de prejuicios sexistas en los libros de texto de este país. La inercia al cambio del discurso sexista en el libro de texto se refleja en la investigación de Olivo (2012), donde tras casi cuarenta años del estudio pionero de Trecker (1973), se concluye que los libros de texto estadounidenses excluyen a las mujeres de las narrativas políticas. Las escasas referencias que aparecen se centran casi de forma exclusiva en mujeres blancas de clase media. Esta representación sesgada de la mujer en los libros de texto estadounidenses no es una excepción. Siguiendo a Chisholm (2018), una de las características principales del discurso sexista del libro de texto es su universalidad: los resultados de diferentes estudios en diversos países muestran que el sesgo de género tiene un carácter ubicuo, excepto en Suecia, donde se han implementado con éxito políticas para eliminar el sexismo en los libros de texto y en los planes de estudio. Otro rasgo de este discurso es su notable uniformidad en los libros de texto de todo el mundo, ya que implica patrones casi idénticos de subrepresentación, estereotipos asociados a roles domésticos y una minimización del papel decisivo de las mujeres en la sociedad.
- Los principales hallazgos de la mayoría de los estudios analizados sobre el tratamiento de la sexualidad y la identidad de género muestran que, el colectivo de personas LGBTI, (Lesbianas, Gays, Bisexuales, Transexuales e Intergénero) apenas está presente en los libros de texto, incluso en países que se consideran progresistas e inclusivos. Es más, las escasas referencias a este colectivo son de tipo negativo (Sancho Höhne y Heerdegen, 2018). Tanto en el estudio de Pointner (2012), como en el de Jochim (2014), se concluye que los libros de texto de la escuela primaria no muestran formas o estilos de vida plurales, sino que transmiten una única "visión ideal" heteronormativa. Según Wylie (2012), el heterosexismo en los libros de texto no es un fenómeno aislado, sino que forma parte de un proceso más amplio de heterosexismo institucionalizado y de homofobia. La heteronormatividad transmitida por los libros de texto, además de constituir un panorama inexacto de la realidad, contribuye a perpetuar la intolerancia.

- Finalmente, a pesar de las desigualdades existentes a nivel mundial entre clases sociales, la investigación sobre este tema en los libros de texto parece haber disminuido en los últimos años, al menos con respecto a los estudios sobre raza y género. Según Chisholm (2018), la investigación sobre este tema resultaría más fructífera si se tuviera en cuenta la naturaleza relacional entre raza, género y clase social.

- **Economía política del libro de texto**

El libro de texto no es únicamente el material donde se concreta el “saber legítimo”, es además un producto de la industria editorial, condicionado por un proceso de producción y comercialización sujeto a las leyes del funcionamiento del mercado. Esta línea de investigación, denominada en la literatura sobre el tema *economía política del libro de texto*, se ha ocupado del estudio de la realidad del mundo editorial (diseño, producción, edición, distribución, consumo, etc.), es decir, cuestiones desligadas aparentemente de los aspectos pedagógico-didácticos, cuyo análisis desvela el enorme poder regulador del sector editorial sobre la práctica docente.

M.W. Apple también fue uno de los primeros autores que puso de relieve que los libros de texto son el resultado de políticas económicas al servicio de los mercados. El objetivo de esta línea de investigación ha sido, y sigue siendo, arrojar luz sobre cómo llega a las escuelas el “saber legítimo”, quién toma las decisiones con respecto al contenido de los libros de texto y quién decide qué libros de texto utilizar (Roldán, 2018). Pensemos que si el libro de texto constituye el currículum enseñado, quienes lo elaboran serán los agentes más decisivos en el proceso de enseñanza. Las editoriales son, efectivamente, quienes interpretan, redefinen y seleccionan el currículum oficial, convirtiéndose de este modo en un mediador determinante a la hora de definir el currículum real en la escuela (Area, 2000; Apple, 1989). Algunas de las conclusiones que arroja la investigación actual sobre este tema son las siguientes:

- Desde principios del siglo XX, pero sobre todo desde la década de los años noventa, se constata una acelerada tendencia hacia la concentración del mercado editorial en grandes monopolios y oligopolios. El mercado de libros de texto alemán, por ejemplo, contaba en el año 1906 con 288 editoriales; en el año 1925 esta cifra disminuyó drásticamente a 80; en el año 2012 el mercado editorial estaba dominado únicamente por 3 empresas (Macgilchrist, 2015). En España, la industria editorial del libro de texto está vinculada a grandes grupos de poder ideológico y político, que controlan la información de acuerdo con sus intereses (Torres, 2014). El negocio de los libros de texto se concentra en dos poderosos grupos empresariales de carácter laico (Santillana, del grupo PRISA y Anaya del grupo Hachette), y en un grupo de editoriales controladas por la Iglesia católica (S.M, Marianistas; Edebé, Salesianos; Edelvives, Maristas; Bruño, escuelas cristianas La Salle), entre otras.

- Con el fin de evitar la competencia, las editoriales más grandes y poderosas actúan a través de fusiones y adquisiciones, creando de esta manera "marcas múltiples"[21] (Pinto, 2007), para poder comercializar sus productos de manera más efectiva. Las editoriales más pequeñas, que han sido absorbidas por los monopolios y oligopolios, mantienen sus nombres intactos.
- El aumento de la concentración de los libros de texto en grandes empresas editoriales no sólo reduce la calidad, sino que lleva a la "estandarización y al isomorfismo" (Höhne, 2018, p.119). La aparente variedad y diversificación de la oferta no se corresponde con una riqueza pedagógica del material curricular: "lo que muestran las investigaciones al respecto es que no hay una variedad real de posibilidades diferentes de desarrollo curricular." (Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010, p.252).
- Un tema de especial interés es el proceso de comercialización de los libros de texto, y de forma particular, los programas de gratuidad actualmente generalizados en las distintas Comunidades Autónomas, aunque con la adopción de diferentes modelos[22]. Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez (2010), señalan que se trata de una supuesta medida de justicia social que "refuerza la homogeneización, dificulta la posibilidad de alternativas y acentúa la omnipresencia del texto escolar" (p.256). Para estos autores, una pregunta clave que muy pocos se han planteado es: "por qué gratuidad de los libros de texto y no de otros materiales y recursos?" (p.256). Por su parte, Travé y Pozuelos (2008), apuntan la necesidad de reflexionar sobre el apoyo institucional que las Comunidades Autónomas prestan a las escuelas a través de las políticas de gratuidad de los libros de texto. De acuerdo con estos autores, es nece-

[21]Grupo Anaya (Pirámide, Cátedra, Alianza Editorial, Algaida, Tecnos, Bóveda, Biblograf etc.); Grupo S.M (Barco de Vapor, Gran Angular, Xerme, Cruïlla, Ikasmina, etc.); Grupo Santillana (Norma, Richmond, Salamandra, Loqueleo, Voramar, Zubia, Obradoiro, Grazalema etc.); Grupo Edebé (Rodeira, Giltza, Marjal, Guadiel, etc.); Grupo Edelvives (Baula, Tambre, Ibaizabal, Alhucema, etc.).

[22] En el informe sobre "El libro educativo en España" para el curso 2018-2019 de la Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza (ANELE) se presentan los distintos modelos de gratuidad adoptados por cada Comunidad Autónoma. htpp: // anele.org/.es

sario investigar "qué aporta este tipo de campañas políticas que, en gran medida, acredita ante las familias y la sociedad civil la hegemonía del libro de texto, obviando otros materiales curriculares" (p.7).

- **Repercusión de las políticas reformistas sobre los materiales curriculares**

Una línea de investigación que cobra especial relevancia en esta tesis, puesto que constituye uno de los objetivos centrales de la misma, es la *repercusión de las políticas reformistas sobre los materiales curriculares.* Supuestamente, cualquier proceso de reforma de un sistema educativo debería comportar una reconceptualización en la elaboración de los materiales curriculares, que propiciara cambios para la mejora de la práctica de la enseñanza. No obstante, un número considerable de estudios, enmarcados en la línea de investigación de *materiales curriculares en las distintas áreas del currículum y didácticas específicas,* pone de manifiesto que los materiales editados para el desarrollo de las reformas educativas no se caracterizan por mejoras sustanciales (Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010). Un rasgo común de estos materiales es la falta de coherencia entre el discurso reformista que la nueva ley educativa quiere poner en marcha y el currículum presentado en los libros de texto, que siguen concibiéndose en cada reforma educativa como el principal material de instrucción.

En los sucesivos cambios de gobierno en España y en las diferentes políticas de reforma que se han puesto en marcha no hubo mejoras sustanciales. Se han reproducido los mismos modelos curriculares, con las mismas prácticas escolares, sistematizadas por los mismos libros de texto. Es más, las reformas del sistema educativo: "dejaron en todos los casos intocable, y en algunos casos reforzada la necesidad del texto escolar" (Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010, p.257). De ahí que autores como Torres (2015), afirmen que las verdaderas intenciones, que en muchas ocasiones ocultan las reformas de los sistemas educativos, se desvelan en los recursos destinados por la administración a la implementación de dichas reformas, entre otros, los materiales curriculares que se promueven o refuerzan.

Roldán (2018), en una revisión sobre el estado actual de la investigación del libro de texto en educación, señala que una de las líneas más prometedoras para el desarrollo de futuras investigaciones es el papel que desempeña el libro de texto en los procesos de reforma de las políticas educativas. Además, como veremos más adelante, según la autora, los marcos teóricos más propicios para el desarrollo de esta y otras líneas de investigación son aquellos que proponen un enfoque relacional, es decir, marcos teóricos centrados en el estudio del significado y la función del libro de texto como parte de una red de elementos contextuales interconectados, donde actúan diferentes instancias y agentes educativos.

La repercusión de las políticas reformistas sobre los libros de texto tiene un especial interés para los objetivos de nuestra tesis, puesto que una de nuestras pretensiones es analizar si los libros de texto de matemáticas editados en el marco normativo de la LOMCE (2013), han comportado cambios significativos en el tratamiento de los problemas.

III.2.3. Enfoques actuales en la investigación educativa del libro de texto

La investigación educativa sobre los libros de texto se dirige actualmente hacia el uso de enfoques exploratorios centrados en la comprensión del contexto donde el fenómeno tiene lugar (Hansen, 2018). Numerosos investigadores ponen el énfasis en la idea de que el significado del libro de texto se construye activamente en su contexto de uso, y por tanto, va más allá de lo que está impreso en sus páginas. Los libros de texto y su contenido textual no son entidades estáticas que se limitan a transmitir un mensaje, sino que deben ser entendidos como artefactos textuales con formas materiales que desempeñan un papel activo (Kolbeck y Röhl, 2018).

Si el estudio del libro de texto se plantea únicamente en términos de su contenido, aislándolo de su uso en el aula, se corre el riesgo de concebirlo como “una colección estática de ideas” (Weinberg y Wiesner, 2011, p.50). De ahí que se argumente la necesidad de tener en cuenta su naturaleza dinámica y las relaciones que se establecen con los distintos elementos contextuales (Fuchs, Niehaus y Stoletzki, 2014; Horsley y Walker 2005; Matthes, 2014; Repoussi y Tutiaux-Guillon 2010).

Siguiendo a Roldán (2018), los marcos teóricos más prometedores para el estudio del libro de texto son aquellos que proponen un enfoque relacional. Tres de estos enfoques teóricos son: el neo-institucionalismo, la gramática de la escuela, y la teoría del actor-red.

- **El neo-institucionalismo**

De acuerdo con Roldán (2018), el uso generalizado a escala global de los libros de texto a lo largo de la historia puede considerarse uno de los elementos característicos de lo que el neo-institucionalismo sociológico (teoría de la “cultura global” o de la “sociedad global”) ha denominado “la cultura mundial de la escolarización”, esto es, un conjunto de principios, políticas y prácticas educativas comunes que se han desarrollado globalmente en diferentes países en los dos últimos siglos con la institucionalización de la educación. El enfoque neo-institucionalista trata de explicar el poder simbólico de esta “cultura global”, que actúa como un guion para muchos países a la hora de desarrollar políticas y normas educativas, de acuerdo con un estándar internacional.

Si bien la realidad se muestra diversa, las políticas de Estado presentan a menudo tendencias educativas convergentes de carácter transnacional. Para el neo-institucionalismo sociológico, la causa de este isomorfismo se encuentra en los modelos culturales internacionales, que establecen qué es lo apropiado. En un intento por conservar su estatus y legitimarse ante sus pares internacionales (otros estados-nación u organizaciones internacionales, que adoptaron ciertas medidas con anterioridad) los actores nacionales adoptan políticas, normas o prácticas que ya poseen un reconocimiento global (Astiz, 2011). Algunos estudios han utilizado este enfoque para confirmar la existencia de dicha cultura mundial, al examinar el tratamiento de ciertos temas en un gran número de libros de texto en todo el mundo, por ejemplo, el aumento de temas de derechos humanos en los libros de texto de ciencias sociales (Bromley y Lerch, 2018).

- **Gramática de la escuela**

Algunos investigadores consideran que los libros de texto deben estudiarse como parte de la denominada *gramática de la escuela* (“grammar of schooling”). Este concepto, desarrollado por Tyack y Tobin (1994), hace alusión al conjunto de reglas y prácticas que gobiernan y estructuran el trabajo en la institución escolar, habiéndose convertido y aceptado como la forma natural de organización de la vida escolar (Bolívar, 2015).

Para algunos autores como Tröhler y Oelkers (2005), los materiales curriculares deben ser considerados como parte de esa gramática, ya que sólo adquieren significado al integrarse en la estructura de la vida escolar. Asimismo, Heinze (2010), señala que los libros de texto deben analizarse en el contexto educativo en el que se utilizan y que su conocimiento se entiende como "el resultado de un proceso social de selección, legitimación y adaptación a nivel nacional" (p.125). Este autor describe cuatro dimensiones de la gramática de la escuela para abordar el estudio de los libros de texto: (1) “Gramática de la educación”, *(Pädagogisierung)* o una comprensión de las diferencias entre generaciones, y una definición de lo que cada nueva generación requiere; (2) “Gramática de la institucionalización de la instrucción”, *(Verschulung)* o el marco institucional en el que se implementan los libros de texto, es decir, el contexto educativo en el que se utilizan; (3) "Gramática de la adquisición de conocimiento" *(Wissenserwerb)* o los procesos de selección, transformación pedagógico-didáctica, exclusión y legitimación del conocimiento por parte del libro de texto; (4) "Gramática de la regulación" *(Steuerung)* o los procesos y condiciones legales implementadas para regular y mantener el sistema escolar. El concepto de *gramática de la escuela* es clave para entender por qué muchos de los pretendidos cambios o reformas educativas se han quedado en un nivel discursivo, sin llegar al núcleo de la práctica educativa.

- **Teoría del Actor-Red**

El último de estos enfoques relacionales para abordar el estudio de los libros de texto es la Teoría del Actor-Red, conocida también por su acrónimo en inglés ANT ("Actor-Network Theory"). Bruno Latour, principal precursor de esta teoría, considera que los libros de texto no son meros instrumentos que se limitan a transmitir un mensaje curricular neutro, sino que poseen un papel mediador que transforma la práctica educativa (Kolbeck y Röhl, 2018).

El objeto de esta teoría es estudiar la realidad social, que es percibida como un conjunto de interconexiones entre *actantes* en una *red de relaciones.* Para esta teoría el concepto de *actante* es neutro, ya que no distingue entre entidades humanas y no humanas; por otra parte, este concepto es muy amplio, porque abarca cualquier entidad que desempeñe un papel activo en esta *red de relaciones*: "el conocimiento, el currículum, los docentes, las identidades, las políticas educativas, las rutinas, las aulas, el alumnado y, por supuesto, los libros de texto" (Roldán, 2018, p.110).

La ANT no centra el foco de atención en una entidad concreta como elemento fijo y aislado (p.ej. el libro de texto), sino en el papel activo que esta cobra al interactuar con otros elementos contextuales (Fenwick y Edwards, 2012). En este caso, la red de entidades en la que se insertan los libros de texto puede extenderse desde cualquier otro material que se encuentre en el aula hasta la realidad de las políticas de edición, las políticas curriculares, o los discursos pedagógicos en torno a este material curricular.

III.3. Tratamiento de los problemas en los libros de texto de matemáticas

Como verá seguidamente el lector, el panorama descrito al principio de este capítulo sobre el papel hegemónico del libro de texto no varía en absoluto en el ámbito de la educación matemática. Se puede afirmar con rotundidad que, tanto a nivel nacional como internacional, el libro de texto ocupa una posición sólida en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de manera que este artefacto constituye el principal recurso material utilizado por los profesores en la práctica diaria del aula (Boesen et al., 2014; Jablonka y Johansson, 2010; Mullis, Martin y Foy, 2008; Stein, Remillard y Smith, 2007; Van Stiphout, 2011). De hecho, los libros de texto de matemáticas determinan en gran medida qué enseñan los profesores y, en consecuencia, qué aprenden los alumnos, puesto que, en muchas ocasiones, su papel es incluso más decisivo que las propias prescripciones del currículum oficial (Cai y Jiang, 2017; Kolovou, Van den Heuvel-Panhuizen y Bakker, 2009; Monterrubio y Ortega, 2012; Stein y Smith, 2010; Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007). Así, si un contenido matemático no aparece incluido en el libro de texto, probablemente no será estudiado en el aula (Reys, Reys, Lapan, Holliday y Wasman, 2003; Stein et al., 2007; Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen y Doorman, 2015).

A pesar de que el libro de texto puede ser utilizado con cierta flexibilidad, la investigación apunta que, en general, el comportamiento de los profesores es muy consistente con los contenidos, el orden de presentación, y el enfoque metodológico adoptado por el libro de texto de matemáticas (Despina y Harikleia, 2014; Thomson y Fleming, 2004; Vincent y Stacey, 2008; Vicente et al., 2018). De este modo, las editoriales se convierten en el agente más decisivo a la hora de determinar el currículum real, que es establecido en función de las creencias de un determinado autor o grupo de autores sobre los contenidos matemáticos que deben ser considerados relevantes, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, sobre lo que es un problema, y sobre el papel que debe desempeñar la R.P en el aula (López, Guerrero, Carrillo y Contreras, 2015).

Wijaya et al. (2015) señalan que, como consecuencia de esta influencia y sus efectos en la práctica educativa, muchos estudios internacionales se han dirigido a investigar el tratamiento de diferentes contenidos matemáticos en los libros de texto, entre ellos, los problemas y su proceso de resolución. Precisamente, la segunda parte de este capítulo tiene como objeto presentar algunos de los principales estudios actuales que se han centrado en el papel que desempeñan los problemas y la R.P en los libros de texto de matemáticas de diferentes países.

III.3.1. Estudios internacionales sobre los problemas y la R.P en los libros de texto

- **Estudio de Despina y Harikleia, (2014)**

Basándose en las investigaciones precedentes llevadas a cabo en Turquía por Olkun y Toluk (2002), y en Malasia por Parmjit y Teoh (2010), Despina y Harikleia, (2014), realizaron un estudio cuyo propósito fue, por un lado, analizar el tratamiento de los PAVs de estructura aditiva en los libros de texto de los dos primeros cursos de la escuela primaria en Grecia; y por otro lado, evaluar el nivel de logro alcanzado por los alumnos de 6 y 7 años en la resolución de este tipo de problemas. Concretamente, en este estudio se pretendía dar respuesta a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué tipos de PAVs de estructura aditiva se presentan con mayor frecuencia en los libros de texto de los dos primeros niveles de Educación Primaria?

b) ¿Existe una relación entre el nivel de logro alcanzado por los alumnos en la resolución de PAVs y la frecuencia de presentación de este tipo de problemas en los libros de texto?

Para desarrollar el estudio se procedió, en un primer momento, al vaciado de los PAVs de estructura aditiva contenidos en todos los materiales utilizados por los alumnos de los grados A y B en Grecia (1º y 2º de Educación Primaria): libros de texto y cuadernos de trabajo también publicados por las editoriales de este país. Todos los PAVs que podían ser resueltos utilizando los algoritmos de suma y resta con números naturales fueron incluidos en el análisis. Sin embargo, se excluyeron las ecuaciones matemáticas del tipo “6 + 2 = ¿?”, desligadas de un contexto situacional.

En un segundo momento, los PAVs fueron clasificados de acuerdo con el sistema de categorización propuesto por Van de Walle (1998), en función de la ubicación de la incógnita o conjunto desconocido (véase tabla 16).

Tal como se comentó en el segundo capítulo de esta tesis (epígrafe II.3.3) la ubicación de la incógnita es un factor relevante a la hora de determinar la dificultad de los PAVs de estructura aditiva. Al referirnos a este factor, decíamos que los alumnos presentan menores dificultades en la resolución de estos problemas cuando la incógnita o conjunto desconocido se sitúa en el resultado (a + b = ¿?); la dificultad aumenta cuando el conjunto desconocido se sitúa en el segundo sumando (a + ¿? = c); y la máxima dificultad aparece cuando el conjunto desconocido es el primero (¿? + b = c). De esta manera, Van de Walle establece 4 categorías generales de PAVs de estructura aditiva con un total de 11 tipos de problemas, clasificados en función de la ubicación de la incógnita: juntar o unir (3), separar (3), compartir (2), y comparar (3).

Tabla 16. Sistema de clasificación adaptado de Van de Walle (1998) por Despina y Harikleia, (2014).

CATEGORÍA JUNTAR	
Resultado desconocido	María tenía 8 lápices. Jorge le dio 4 más. ¿Cuántos lápices tiene María en total?
Cambio desconocido	María tenía 9 manzanas. Jorge le dio algunas más. Ahora María tiene 15 manzanas. ¿Cuántas manzanas le dio Jorge?
Inicio desconocido	María tenía algunos caramelos. Jorge le dio 5 más. Ahora María tiene 11 caramelos. ¿Cuántos caramelos tenía María al principio?
CATEGORÍA SEPARAR	
Resultado desconocido	María tenía 12 flores. Le dio 5 flores a Jorge. ¿Cuántas flores tiene María ahora?
Cambio desconocido	María tiene 15 peces. Le dio algunos a Jorge. Ahora a María le quedan 8 peces. ¿Cuántos peces le dio a Jorge?
Inicio desconocido	María tenía algunas galletas. Le dio 6 galletas a Jorge. Ahora a María le quedan 8 galletas. ¿Cuántas galletas tenía María al principio?
CATEGORÍA COMPARTIR	
Todo desconocido	Jorge tiene 4 lápices azules y 8 lápices rojos. ¿Cuántos lápices tiene en total?
Parte desconocida	María tiene 11 lápices. 4 de ellos son azules y el resto son rojos. ¿Cuántos lápices rojos tiene María?
CATEGORÍA COMPARAR	
Diferencia desconocida	Jorge tiene 13 globos y María tiene 2 globos. ¿Cuántos globos tiene Jorge más que María?
Cantidad mayor desconocida	María tiene 10 libros. Jorge tiene 4 libros más que María. ¿Cuántos libros tiene Jorge?
Cantidad menor desconocida	María tiene 15 dulces. Jorge tiene 6 dulces menos que María. ¿Cuántos dulces tiene Jorge?

Finalmente, en el último paso del proceso se evaluó el nivel de rendimiento en la resolución de PAVs a partir de una muestra de 80 alumnos de ambos cursos. Para ello, se utilizaron los 11 subtipos de PAVs establecidos por Van de Walle (1998). Los problemas de la prueba de evaluación aplicada por los autores son los que figuran en la tabla 16.

Al igual que en los estudios precedentes, realizados por Olkun y Toluk (2002) y por Parmjt y Teoh (2010), los resultados indicaron que la frecuencia de presentación de los diferentes tipos de PAVs en los libros de texto de ambos cursos se mostraba muy desigual.

Los problemas más fáciles aparecían de forma muy frecuente: problemas de juntar y separar con resultado desconocido y problemas de compartir con el todo desconocido. Los problemas más difíciles, sin embargo, tuvieron una escasa presencia: problemas de juntar con cambio desconocido; compartir con parte desconocida; y comparar con diferencia desconocida. Incluso, entre los problemas más difíciles, hubo subtipos cuya presencia fue nula: en concreto, no aparecieron problemas de juntar con inicio desconocido en los libros de texto de ambos niveles educativos; tampoco aparecieron problemas de separar con inicio y cambio desconocido en los libros de texto del primer nivel.

Por otra parte, no se dio una correlación estadísticamente significativa entre el nivel de logro alcanzado por los alumnos de ambos cursos y la frecuencia de presentación de los PAVs en los libros de texto. Según las autoras, esta ausencia de significatividad pudo deberse al resultado particular del subtipo de problemas de comparación (cantidad mayor desconocida), que pese a estar infrarrepresentado en los libros de texto de ambos niveles educativos (1.3% en 1º curso y 0% en 2º curso) fue resuelto por los alumnos con un nivel de logro que rozaba el techo de la prueba (95%).

Desafortunadamente, las autoras no ofrecen los resultados de correlaciones entre las dos variables analizadas por separado, para cada tipología de problemas. Este análisis más pormenorizado de los resultados hubiese permitido una mejor comprensión de la relación entre la frecuencia de presentación de las diferentes categorías de problemas en los libros de texto y nivel de rendimiento alcanzado por los alumnos en cada una de ellas.

Otros resultados destacados de este estudio fueron los siguientes:

a) Se evidenció que la proporción de PAVs incluidos en los libros de texto de estos niveles educativos resultaba muy escasa (83 problemas en el 1º curso y 111 problemas en el 2º curso) lo que supone que las oportunidades que se ofrecen a los alumnos para aprender a resolver problemas se limitan a la realización de dos o tres problemas por semana.

b) También se constató una escasa variabilidad de subtipos de PAVs. La tipología de problemas incluidos en los libros de texto de ambos cursos resultó ser básicamente la misma, de manera que en el 2º curso, nivel más avanzado, no se incluyeron apenas nuevos subtipos de problemas.

Esta investigación respalda las conclusiones de los dos estudios precedentes sobre las implicaciones educativas que una presentación excesiva o insuficiente de determinados tipos de PAVs de estructura aditiva puede comportar en el desarrollo de las habilidades de R.P de los alumnos. Según las autoras, es posible, por un lado, que la comprensión conceptual de las diferentes situaciones aditivas se vea inhibida debido a las escasas oportunidades que se ofrecen a los alumnos en los libros de texto y también es posible, por otro lado, que los alumnos se estén enfrentando a ciertas dificultades al no estar expuestos a una variabilidad suficiente de tipos de problemas.

- **Estudio de Tarim, (2017)**

Tarim (2017), llevó a cabo en Turquía un estudio similar al realizado por Despina y Harikleia (2014), donde planteó como primer objetivo investigar el nivel de desempeño de los alumnos en la resolución de PAVs; y como segundo objetivo, identificar la frecuencia de presentación de este tipo de problemas en los libros de texto.

La muestra de este estudio estaba compuesta por un total de 158 alumnos de 3º curso de Educación Primaria. Los materiales analizados fueron los libros de texto y fichas de trabajo de los alumnos de los tres primeros niveles de esta etapa educativa. Al igual que en el estudio de Despina y Harikleia (2014), la autora adoptó el sistema de categorización de PAVs de estructura aditiva propuesto por Van de Walle (1998), tanto para el diseño de la prueba de evaluación de los alumnos, como para el análisis del contenido de los libros de texto.

Los resultados de este estudio fueron similares a los obtenidos por Despina y Harikleia (2014). Con respecto al nivel de logro en la resolución de los distintos tipos de PAVs, los alumnos resolvieron con mayor facilidad los problemas de juntar con resultado desconocido (94.9%) y los problemas de compartir con todo desconocido (93.7%). Contrariamente, las mayores dificultades se dieron, por un lado, en la resolución de los problemas de juntar y separar con inicio desconocido (65.8%) y (65.2%) respectivamente y por otro lado, en los problemas de compartir con parte desconocida (64.6%).

Con respecto a los problemas de comparación, el nivel de logro alcanzado por los alumnos varió sustancialmente dependiendo de la consistencia/inconsistencia del problema. Así, por ejemplo, el problema de comparación diferencia desconocida (consistente), fue resuelto correctamente por el 74.7% de los alumnos: “Cemre tiene 56 galletas y Selim tiene 34. ¿Cuántas galletas tiene Selim menos que Cemre?” (p.644). Sin embargo, en el problema de comparación diferencia desconocida, (inconsistente) el porcentaje de acierto disminuyó hasta un 59%: “Ayla tiene 29 caramelos y su hermana Elif tiene 44. ¿Cuántos caramelos tiene Elif más que Ayla?" (p.644). Igualmente, en el resto de problemas de comparación, los porcentajes de acierto variaron entre un 42.4% y un 81.6% en función de la consistencia/inconsistencia entre la estructura superficial del problema y el algoritmo necesario para resolverlo. Según la autora, los errores cometidos en la resolución de los problemas inconsistentes se debían a la aplicación por parte de los alumnos de estrategias de tipo superficial, en concreto la "estrategia de la palabra clave", descrita en el segundo capítulo de esta tesis (ver epígrafe II.3.3). Obsérvese que, en el primero de los problemas anteriores, la palabra clave "menos" coincide con la operación de resta que debe aplicarse para hallar la solución; sin embargo, en el segundo problema, aparece la palabra "más" y debe efectuarse una resta.

Por otra parte, en cuanto a la frecuencia de presentación de los PAVs en los libros de texto, los resultados mostraron que los problemas más numerosos eran precisamente los más sencillos de resolver. Los problemas de juntar con resultado desconocido (28.77%) y los problemas de separar con resultado desconocido (27.33%) representaban más de la mitad de los 139 problemas analizados (56.10%). Los problemas de compartir con el todo desconocido (11.51%) fueron más frecuentes que los problemas de compartir con una parte desconocida (4.31%). No hubo apenas PAVs con inicio desconocido (más difíciles de resolver): separar con inicio desconocido (5.75%) y juntar con inicio desconocido (0.71%). De manera similar, los problemas de comparación aparecieron escasamente en los libros de texto de los tres niveles de Educación Primaria analizados: en los problemas con diferencia desconocida inconsistentes, el porcentaje tan solo fue de un 6.47%; el resto de problemas de comparación inconsistentes apenas tuvo representación.

Finalmente, otro resultado relevante de este estudio fue que el número de PAVs presentados en los libros de texto, lejos de aumentar, iba disminuyendo de un nivel educativo a otro superior. De este modo, de los 139 problemas analizados por la autora, 91 se encontraron en los libros de texto del primer curso, mientras que en el segundo curso hubo 36 y en el tercer curso tan solo 12.

En definitiva, los libros de texto turcos no parecen responder a una planificación sistemática donde se tengan en cuenta aspectos básicos como la facilidad o dificultad de los problemas, o la presencia equilibrada de las diferentes categorías de PAVs. Por otro lado, los resultados de este estudio son coincidentes con los obtenidos por Olkun y Toluk (2002), también en Turquía. Este hecho evidencia que, transcurridos quince años, los libros de texto utilizados en las escuelas de primaria turcas siguen sin ofrecer a los alumnos las suficientes oportunidades para aprender a resolver problemas, dada la escasa frecuencia y variabilidad de PAVs de estructura aditiva presentados en estos materiales curriculares.

- **Estudio de Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen, (2018)**

El estudio realizado por Kolovou et al. (2009) reveló que los libros de texto de matemáticas utilizados en Educación Primaria en el sistema educativo holandés apenas ofrecían oportunidades a los alumnos para aprender a resolver problemas. El propósito del estudio de replicación llevado a cabo por de Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen (2018), fue comprobar hasta qué punto las características de los libros de texto holandeses habían cambiado tras casi una década. En concreto, el interés de los autores se dirigió a investigar, en primer lugar, en qué medida los libros de texto utilizados actualmente por los alumnos holandeses incluyen: *tareas rutinarias*, que pueden resolverse aplicando directamente un algoritmo o imitando un procedimiento utilizado tras una explicación o un ejemplo; *tareas no rutinarias*, esto es, problemas para cuya resolución los alumnos no disponen de una estrategia de solución directa y se requiere, por tanto, de un modo de resolución genuino donde intervenga el razonamiento; y *tareas intermedias*, en las que la demanda cognitiva es superior a la de las tareas rutinarias, pero sin alcanzar el grado de exigencia y dificultad de los problemas no rutinarios. Por otra parte, el segundo objetivo del estudio se dirigió a investigar qué tipo de estrategias son utilizadas por los libros de texto para facilitar al alumnado el proceso de aprendizaje de la R.P. Finalmente, los autores se plantearon como tercer objetivo, conocer hasta qué punto los libros de texto de matemáticas utilizados actualmente en el sistema educativo holandés pueden ser considerados inclusivos, es decir, hasta qué punto ofrecen suficientes oportunidades para aprender a resolver problemas a los alumnos con diferentes niveles de habilidad matemática.

Para llevar a cabo esta investigación, los autores analizaron las tres mismas series de libros de texto utilizadas con anterioridad en el estudio de Kolovou et al. (2009), correspondientes al 4º y 6º nivel de la Educación Primaria en Holanda (alumnos de 9-10 y 11-12 años respectivamente). Estas tres series (“De Wereld in Getallen”, “Pluspunt”, y “Alles Telt”) son utilizadas aproximadamente en el 90% de las escuelas holandesas. Además, dado el alto rendimiento en R.P de los alumnos de Singapur, establecido en las pruebas internacionales, los autores decidieron incluir en su estudio una cuarta editorial (“Rekenwonders”) la versión holandesa traducida y adaptada de un libro de texto de Singapur. En el estudio fueron analizados todos los materiales curriculares que componían cada serie de libros: libros del alumno (libros de texto, cuadernos de trabajo y fichas complementarias) y guías didácticas del profesor.

Con el fin de determinar si los libros de texto de matemáticas actuales habían cambiado con respecto a los utilizados hacía una década, los autores se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

a) ¿Hasta qué punto los libros de texto de matemáticas utilizados en las escuelas de Educación Primaria holandesas contienen tareas que puedan considerarse verdaderos problemas?

b) ¿De qué modo estos libros de texto facilitan a los alumnos la oportunidad de aprender a resolver problemas?

c) ¿Se pueden considerar inclusivos los libros de texto de matemáticas actuales?

Los resultados encontrados en este estudio fueron los siguientes:

Con respecto al primer objetivo, los resultados mostraron que en todas las series de libros de texto analizadas, la categoría más frecuente en ambos niveles educativos fue la correspondiente a los problemas rutinarios, con porcentajes que variaban entre el 91% y el 97%. Por el contrario, la presencia de problemas no rutinarios resultó muy escasa, oscilando entre un 0% y un 5% en los libros de cuarto curso; y entre un 2% y un 8% en los libros de sexto curso. La presencia de los problemas con una dificultad intermedia también fue muy escasa, oscilando entre un 2% y un 4% en los libros de cuarto curso y entre un 1% y un 8% en los libros de sexto curso. De las cuatro series de libros de texto fue “Rekenwonders” la que presentó un mayor número de problemas no rutinarios.

Estos resultados son similares a los encontrados por Marchis (2012), que también analizó esta variable a partir de dos libros de texto de 3º curso de Educación Primaria, utilizados en el sistema educativo de Rumanía. En concreto, los resultados de este estudio mostraron que, de los 286 problemas presentados en los dos libros de texto, no hubo ningún problema que pudiera considerarse no rutinario. Asimismo, los porcentajes de los problemas rutinarios en ambos libros de texto variaron entre un 83.2% y un 85.2%, mientras que los porcentajes de los problemas con dificultad intermedia oscilaron entre un 16.8% y un 14.8%.

En cuanto a las estrategias con que los libros de texto facilitan a los alumnos el proceso de aprendizaje de la R.P se encontraron grandes diferencias entre la serie de libros "Rekenwonders" y las otras tres series de libros de texto holandesas. Únicamente "Rekenwonders" ofrecía, de un modo regular y sistemático, pautas instruccionales a profesores y alumnos, que según los autores pueden ser consideradas facilitadores del aprendizaje de la R.P. Uno de estos facilitadores era el aprendizaje de la heurística, que se incluía explícitamente en esta serie de libros de texto como un objetivo de aprendizaje. De este modo, en la guía didáctica se proporcionaban sugerencias a los profesores sobre las preguntas que debían formular a los alumnos para que estos fueran conscientes del proceso de R.P. Estas preguntas se dirigían, por ejemplo, a realizar predicciones, localizar datos o incógnitas, verificar el proceso de resolución seguido, o construir una representación mental adecuada del problema. Asimismo, en el libro del alumno se ofrecían esquemas de representación para la resolución de problemas verbales y secciones con resúmenes y reflexiones sobre un contenido de aprendizaje matemático particular. Sin embargo, en las tres series de libros holandeses, apenas se ofrecían ayudas para facilitar el aprendizaje de la R.P de los alumnos, en comparación con las proporcionadas en "Rekenwonders".

Por último, en referencia al carácter inclusivo de los libros de texto, se observó que las tres series de libros holandeses organizaban las tareas de R.P en tres niveles de aprendizaje: tareas destinadas a casi todos los alumnos, tareas más exigentes cognitivamente para alumnos con una mayor habilidad matemática y tareas menos exigentes para alumnos con menores habilidades matemáticas. La serie de libros "Rekenwonders", sin embargo, organizaba las tareas de R.P en dos niveles: tareas destinadas a todos los alumnos y tareas más exigentes para alumnos con mayores habilidades matemáticas. Así, en esta serie de libros de texto, los alumnos con menores habilidades matemáticas también tenían la oportunidad de realizar las tareas destinadas a todos los alumnos mientras que, en las series de libros holandesas, estos alumnos sólo tenían la oportunidad de realizar las tareas más fáciles. De este modo, Rekenwonders ofrecía a los alumnos con un menor rendimiento en matemáticas tareas con mayor grado de desafío que las series de libros holandesas.

Teniendo en cuenta que los libros de texto de las series "De Wereld in Getallen", "Pluspunt" y "Alles Telt" son utilizadas actualmente en el 90% de las escuelas holandesas, los autores concluyen que las oportunidades que los libros de texto holandeses ofrecen a los alumnos para aprender a resolver problemas continúan siendo muy limitadas. Los libros de texto holandeses proporcionan una escasa cantidad de tareas de R.P; apenas incorporan estrategias de aprendizaje de R.P; y las tareas de R.P que presentan se dirigen principalmente a los alumnos que ya poseen un buen nivel de rendimiento en matemáticas. A la vista de estos resultados, se puede afirmar que la situación actual en las escuelas holandesas no ha cambiado con respecto a la situación descrita por Kolovou et al. (2009), hace una década.

Finalmente, basándose en los resultados de las investigaciones desarrolladas por Jonsson, Norqvist, Liljekvist y Lithner, (2014); Peltenburg, Van den Heuvel-Panhuizen y Robitzsch, (2012); Stein y Lane (1996), los autores de este estudio manifiestan que contrariamente a la creencia de que solo los alumnos más capaces pueden enfrentarse a la R.P con altos niveles de dificultad, todos los alumnos (con independencia de sus habilidades) pueden beneficiarse de la oportunidad de trabajar en tareas de R.P con demandas cognitivas de alto nivel. Por lo tanto, una manera en la que los libros de texto pueden contribuir a mejorar el aprendizaje de la R.P es incluyendo tareas destinadas a todos los alumnos.

- **Estudio de Brehmer, Ryve y Van Steenbrugge, (2016)**

Con motivo de la reforma educativa llevada a cabo en Suecia en el año 2011, Brehmer et al. (2016), desarrollaron una investigación sobre el tratamiento de la R.P en los libros de texto de matemáticas de Educación Secundaria. Una de las variables analizada por estos autores fue el contexto situacional de los problemas a partir de los libros de texto editados por tres importantes editoriales suecas.

Según los autores, el interés por estudiar el contexto situacional de los problemas radica en los resultados de estudios precedentes, que muestran cómo el contexto ayuda al resolutor a generar una representación mental del problema y a impulsar su motivación para resolverlo, tal como apuntan Davis-Dorsey, Ross y Morrison, (1991) (véase capítulo II, epígrafe II.5.1). De hecho, para que una tarea puede ser llamada problema es necesario que exista un interés o predisposición hacia su resolución (Hagland, Hedrén y Taflin 2005; Jonassen, 2000) (véase capítulo I, epígrafe I.4.2.5). Teniendo en cuenta esta idea, para categorizar los diferentes contextos donde puede surgir el problema, los autores utilizaron los criterios establecidos en el informe PISA 2012 de la OCDE (2013): contexto *personal*, relacionado con la vida cotidiana de las personas; contexto *social*, relacionado con el individuo como parte de la sociedad, tanto a nivel internacional como nacional y local; contexto *ocupacional-laboral*, relacionado con los lugares de trabajo; contexto *científico*, relacionado con el uso de las matemáticas en la ciencia y la tecnología. A esta clasificación los autores añadieron una quinta categoría denominada *matemática pura*, sin relación con ningún contexto.

Los resultados del análisis de esta variable indicaron que, de los cinco tipos de contextos situacionales establecidos, la mayoría de los problemas analizados en los libros de texto de las tres editoriales aparecían en contextos matemáticos puros, es decir, contextos poco motivadores, que ni suscitan ningún tipo de interés a los alumnos, ni les ayudan a generar una representación mental del problema. En concreto, este tipo de contextos representó un 62.50% y fue seguido por los contextos ocupacional (16.03%) personal (10.58%) científico (9.62%) y social (0.64%).

Asimismo, otra de las variables analizadas por los autores fue la ubicación de los problemas en la unidad didáctica. Como vimos en el primer capítulo de esta tesis (epígrafe I.3.2) la ubicación del problema no es un aspecto irrelevante, al contrario, el estudio de esta variable permite conocer el papel que los problemas desempeñan en el libro de texto y, por tanto, el tipo de aprendizaje que promueven. A este respecto, los resultados mostraron que, en los libros de texto de las tres editoriales analizadas la gran mayoría de los problemas, (84.62%) se localizaba al final de la unidad didáctica. La visión de estos libros de texto sobre el aprendizaje de la R.P reflejaba un tipo de enseñanza basada fundamentalmente en el aprendizaje de procedimientos algorítmicos (aprender *para*). Se trata, por tanto, de una visión instrumental sobre la R.P, esto es, aprender primero las herramientas o instrumentos matemáticos para posteriormente aplicarlos al problema. Este hallazgo coincide con los resultados obtenidos en otros estudios internacionales sobre R.P, que revelan una tendencia por parte de los libros de texto a focalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la adquisición de habilidades y procedimientos algorítmicos (Bruin-Muurling, 2010; Li, Chen y An, 2009; Van Stiphout, 2011).

A partir de estos resultados, se concluye que la importancia concedida por los documentos curriculares oficiales suecos al proceso de R.P contrasta con las características que actualmente presentan los libros de texto de matemáticas en Suecia. El diseño de los libros de texto no enfatiza la R.P como un aspecto nuclear en el aprendizaje de las matemáticas, de manera que probablemente resulte difícil que los alumnos desarrollen esta capacidad utilizando exclusivamente este material curricular. Por ello, según los autores, el profesorado debe buscar formas alternativas para abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la R.P en el aula y no depositar su confianza exclusivamente en el libro de texto.

■ Estudio de Wijaya et al. (2015)

Estos autores también realizaron una investigación dirigida a estudiar el contexto situacional de los problemas presentados por tres libros de texto de 8º nivel en Indonesia. Entre otras variables, se analizó, por un lado, el tipo o naturaleza del contexto y por otro lado, el tipo de información incluido en el enunciado del problema. Para ello, los autores establecieron un marco de análisis con tres subcategorías para cada una de estas dos variables, que se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 17. Adaptación del marco de análisis utilizado por Wijaya et al. (2015).

TAREA	SUBCATEGORÍA	EXPLICACIÓN
NATURALEZA	■ Sin contexto	■ Se refiere sólo a objetos matemáticos, símbolos o estructuras.
	■ Contexto camuflado	■ No se necesitan experiencias de la vida cotidiana o de un razonamiento basado en el sentido común. ■ Las operaciones matemáticas necesarias para resolver el problema son obvias. ■ La solución se puede encontrar combinando todos los números del enunciado del problema.
	■ Contexto relevante y esencial	■ Se necesita del uso del razonamiento basado en el sentido común para comprender y resolver el problema. ■ La operación matemática no es obvia.
INFORMACIÓN	■ Coincidente	■ Las tareas contienen exactamente la información necesaria y suficiente para encontrar la solución.
	■ Ausente (Datos de menos)	■ Las tareas contienen menos información de la necesaria, por lo que los alumnos deben obtener datos adicionales.
	■ Superflua (Datos de más)	■ Las tareas contienen más información de la necesaria, por lo que los alumnos necesitan seleccionar información.

Siguiendo a De Lange (1995), los autores distinguieron entre: (1) tareas que se presentan bajo la forma de una ecuación matemática, esto es, desprovistas totalmente de un contexto situacional; (2) tareas con un contexto "camuflado", es decir, tareas formuladas mediante el uso del lenguaje verbal para cuya resolución no es necesario apelar a los conocimientos o experiencias de la vida real; (3) y por último, tareas con un contexto "relevante y esencial", también formuladas mediante el lenguaje verbal, pero para cuya resolución se necesita de la interacción entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos acerca del mundo real. Según los autores, esta definición de tareas con un contexto "relevante y esencial" coincide con lo que en PISA (OCDE, 2003), se denominan problemas con "contextos extramatemáticos" presentados en situaciones reales o imaginadas por los alumnos, que pueden incluir diferentes tipos de información: personal, ocupacional, científica, pública, etc. La resolución de estas tareas implica un proceso de matematización en el que, en general, intervienen los siguientes pasos: (1) comprensión del problema contextualizado en un entorno real; (2) transformación del problema del mundo real en un problema matemático; (3) resolución del problema matemático; (4) interpretación de la solución matemática en términos de la vida real (Blum y Leiss, 2007).

Por otra parte, de acuerdo con Verschaffel, van Dooren, Greer, y Mukhopadhyay, (2010), para los autores de este estudio, resolver una tarea matemática no consiste en realizar operaciones con todos los datos presentados en el enunciado. El contexto situacional de la tarea puede contener más información de la necesaria (datos de más); o incluso puede carecer de la información necesaria para resolverla (datos de menos). En cualquiera de estos dos casos, el proceso de resolución requiere de una interpretación del contexto por parte del alumno.

Con respecto a la primera variable analizada, los resultados indicaron que la gran mayoría de las tareas presentadas por los tres libros de texto aparecían desprovistas de un contexto situacional. En concreto, los porcentajes correspondientes a esta subcategoría en cada uno de los tres libros analizados (MJHS, MKA y MS)[23]fueron los siguientes: MJHS (92%); MKA (91%); y MS (84%). Por otro lado, los porcentajes de las tareas presenta das en un contexto camuflado fueron superiores a los porcentajes de las tareas presentadas

en un contexto relevante: MJHS (6% frente a 2%); MKA (5%, frente a 4%); y MS (13% frente a 3%).

Estos resultados son similares a los encontrados en el estudio descrito anteriormente, llevado a cabo en Suecia por Brehmer et al. (2016). Asimismo coinciden con los resultados obtenidos por Ozer y Sezer (2014), que realizaron un estudio comparativo a partir del análisis de los libros de texto de 8º curso de tres países: Singapur, EE.UU y Turquía. Los resultados de este estudio mostraron que el 77% de los problemas presentados en el libro de texto de Singapur; el 72% de los problemas del libro de texto de EE.UU; y el 61% de los problemas del libro de texto de Turquía, aparecían en un contexto puramente matemático.

[23] Los libros analizados por los autores fueron: Mathematics for Junior High School, (MJHS); Matematika: Konsep dan Aplikasinya, (MKA); y Matematika, (MS).

Por otra parte, en relación a la segunda variable analizada, esto es, el tipo de información incluida se encontró que, la mayor parte de los problemas presentados por los tres libros de texto contenían únicamente la información necesaria y suficiente para su resolución: MJHS (86%); MKA (85%); y MS (89%). Los porcentajes de tareas con datos de menos fueron los siguientes: MJHS (14%); MKA (15%); y MS, (10%); mientras que los porcentajes de las tareas con datos de más fueron incluso menores: MJHS (0%); MKA (0%); y MS (1%).

A la vista de estos resultados, los autores ponen el énfasis en la necesidad de que los libros de texto incluyan más tareas matemáticas en contextos significativos, que ayuden a los alumnos a integrar la información matemática con la información no matemática acerca del mundo real. Asimismo, los autores concluyen que los libros de texto analizados no ofrecen a los alumnos las suficientes oportunidades para que: (1) seleccionen la información relevante de una situación problemática (descartando datos superfluos, datos de más); (2) localicen informaciones ausentes, pero necesarias (datos de menos). De acuerdo con distintos autores, plantear tareas matemáticas con datos de más o datos de menos constituye una manera de alentar a los alumnos a considerar el contexto como un elemento relevante a la hora de abordar el proceso de R.P (Maass, 2007). Este tipo de tareas son cruciales para el desarrollo de la capacidad de resolver problemas (Greer, Verschaffel y Mukhopadhyay, 2007). Por tanto, deben ofrecerse a los alumnos suficientes oportunidades para trabajar con diferentes tipos de información: coincidente, ausente, y superflua (Maass, 2010).

- **Estudio de Cai y Jiang, (2017)**

De acuerdo con Cai y Jiang (2017), tradicionalmente se ha concedido más importancia a la resolución de los problemas que a su planteamiento por parte de los alumnos. Sin embargo, en la actualidad ha surgido un interés en que sean los propios alumnos quienes inventen los problemas. Este tipo de tarea supone una alta exigencia cognitiva, promueve la comprensión matemática de los alumnos, fomenta su capacidad de razonamiento y despierta su motivación (Cai, Hwang, Jiang y Silber, 2015).

Dado que la investigación sobre este tema es todavía muy escasa, los autores se plantearon realizar dos estudios con el objeto de analizar en qué medida los libros de texto ofrecían suficientes oportunidades a los alumnos para que fueran ellos mismos quienes plantearan los problemas, es decir, para que inventaran problemas total o parcialmente.

En el primer estudio, se realizó un análisis de tipo histórico a partir de las tres series de libros de texto de Educación Primaria más utilizadas en China en las tres últimas décadas. En el segundo estudio, se llevó a cabo un análisis de tipo comparativo entre la serie de libros de texto de Educación Primaria más utilizada actualmente en China y dos series de libros de texto de esta misma etapa educativa utilizadas en EE.UU. En ambos estudios se analizaron los libros de texto de todos los niveles de la etapa primaria (de 1º a 6º curso).

Para clasificar las tareas de planteamiento de problemas (en adelante, TPP) que aparecían en estos libros de texto, los autores establecieron un sistema con cuatro categorías:

A. Plantear un problema que se pueda resolver a partir de una operación matemática dada.

B. Plantear un problema con la misma estructura matemática que el problema dado.

C. Plantear preguntas a partir de un problema dado, en el que se ofrece como ejemplo una pregunta.

D. Plantear preguntas a partir de un problema dado, en el que no se ofrece una pregunta como ejemplo.

Los resultados del primer estudio mostraron que los porcentajes de TPP eran muy escasos en las tres series de libros de texto chinos analizados. No obstante, hubo algunas diferencias: las dos últimas ediciones de estos libros de texto (años 2000 y 2010) presentaban una mayor proporción de TPP que la serie más antigua (año 1990) aunque esta diferencia no llegó a alcanzar un nivel de significatividad. Por otra parte, los resultados indicaron que, en general, la frecuencia de las TPP correspondiente a las categorías A y B, es decir, inventar el enunciado (inventar totalmente) fue decreciendo desde la primera edición de los libros hasta la última, mientras que la frecuencia de las TPP correspondientes a las categorías C y D, esto es, inventar las preguntas (inventar parcialmente) fue aumentado desde la primera hasta la última edición de libros de texto.

En el segundo estudio, se evidenció que la frecuencia de presentación de TPP era muy baja en todos los libros de texto analizados: 3.43% en la serie de libros china; 0.99% en una de las series de libros estadounidenses; 1.47% en la otra serie estadounidense. Sin embargo, hubo discrepancias en relación al tipo de categoría:

- En la serie de libros de texto china, las categorías más frecuentes fueron C y D (inventar preguntas) mientras que en las dos series de libros de texto estadounidenses se dio la tendencia inversa, de modo que las categorías más frecuentes fueron A y B (inventar enunciados).

- En la serie china, la categoría C (79.19%) fue significativamente mayor que en las dos series estadounidenses (1.92% y 5.0%, respectivamente). Contrariamente a este resultado, en las dos series estadounidenses, la categoría A (84.62 y 68.75%, respectivamente) fue significativamente mayor que en la serie china (0.67%).
- En la serie china, la segunda categoría más frecuente fue la D (18.12%) porcentaje significativamente mayor que en las dos series estadounidenses (0% y 0.50%, respectivamente).
- Por último, en las dos series estadounidenses, la segunda categoría más frecuente fue B (13.46% y 23.75%, respectivamente) porcentajes significativamente mayores que en la serie china (2.01%).

Esta escasa proporción de TPP también se constató en el estudio de Marchis (2012), donde se estudió la frecuencia de este tipo de tareas en dos libros de texto de 3º curso de Educación Primaria de Rumanía. Los resultados de este estudio indicaron que, de un total de 286 problemas analizados, tan sólo en seis ocasiones se pedía a los alumnos que plantearan parcial o totalmente el problema.

En suma, según los autores, los planes de estudio de las últimas reformas educativas llevadas a cabo en China y en EE.UU han puesto de relieve la importancia de que los alumnos desarrollen la capacidad de plantear problemas. Sin embargo, los resultados de estos dos estudios muestran que los libros de texto utilizados en ambos países continúan ofreciendo escasas oportunidades para el desarrollo de esta habilidad. Por tanto, los autores enfatizan la necesidad de integrar sistemáticamente este tipo de tareas en la actividad diaria del aula.

III.3.2. Estudios sobre los problemas y la R.P en los libros de texto españoles

- **Estudio de Orrantia et al. (2005)**

Con respecto a las variables analizadas en los estudios que presentamos en la segunda parte de esta tesis, el estudio pionero en España fue el realizado por Orrantia et al. (2005). Los libros de texto analizados por estos autores fueron editados en los años 1999 y 2001, dentro del marco legislativo de la LOGSE (1990) y de acuerdo por tanto, con las directrices normativas establecidas por el currículum oficial del área de matemáticas en el Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio.

En este estudio se llevó a cabo el análisis de los PAVs de estructura aditiva de tres editoriales (Santillana, Anaya y S.M) en los seis niveles educativos que conforman la Educación Primaria. En concreto, se estudiaron tres variables que según los autores forman parte, en cierta medida, de los marcos teóricos de dos proyectos internacionales de evaluación: PISA y TIMSS. Estas variables fueron: la estructura semántica de los problemas, el grado de desafío subyacente y el contexto situacional en el que aparecen.

Los resultados obtenidos permitieron ofrecer un panorama del tipo de problemas que habitualmente resuelven los alumnos en el aula, esto es, una visión general de las prácticas promovidas por los libros de texto y el rol que desempeñan los problemas en la práctica educativa.

Con respecto a la primera de las variables estudiadas, la estructura semántica de los problemas, los resultados evidenciaron que, en general, las tres editoriales mostraban un panorama similar, caracterizado por una alta frecuencia de problemas consistentes frente a inconsistentes y una variabilidad muy limitada de los diferentes subtipos de problemas:

- La categoría de problemas más frecuente fue la de combinación, especialmente el subtipo combinación 1, el más numeroso de toda la muestra con diferencias notables.
- En cuanto a la categoría de cambio, predominaron los problemas de cambio 2, seguidos de los de cambio 1. El resto de subtipos de esta categoría resultó prácticamente inexistente.
- En referencia a la categoría de comparación, el subtipo que apareció con mayor frecuencia fue el de comparación 1, seguido con diferencias considerables de los subtipos de comparación consistentes 4, 3 y 2. La presencia de los subtipos de comparación inconsistentes 5 y 6 fue nula.
- La categoría de problemas simples menos frecuente fue la de igualación, concentrándose prácticamente en el subtipo de igualación 1.

Por otra parte, los resultados del análisis de los problemas simples no difirieron de los obtenidos en los problemas compuestos. Así, por ejemplo, en las categorías de problemas A, B y F, la mayoría de los cambios eran de tipo 1 ó 2 (consistentes); o en las categorías D y E no hubo ninguna parte de comparación 5 ó 6 (inconsistentes). En conclusión, el análisis de los problemas compuestos reveló la tendencia encontrada en los problemas simples.

En relación a la segunda de las variables estudiadas, los resultados indicaron que, de la totalidad de problemas analizados sólo una pequeña proporción presentaba algún tipo de desafío. En el análisis de esta variable, los autores sí encontraron diferencias entre la editorial Santillana y las otras dos editoriales, que contenía más problemas desafiantes. Ahora bien, los problemas presentados por Santillana perdían su grado de desafío al anunciar de antemano a los alumnos que a los problemas que debían resolver les faltaban o les sobraban datos (datos de menos/datos de más). Igualmente, en esta editorial la proporción de problemas que los alumnos debían inventar totalmente (tarea más difícil) era muy inferior con respecto a los problemas de invención parcial (inventar sólo la pregunta o datos).

Por último, los resultados referentes a la variable contexto situacional mostraron que, los problemas presentados por los libros de texto aparecían en contextos altamente estereotipados o estandarizados, con muy escasa o incluso nula información situacional que ayudara a los alumnos a resolverlos. De hecho, de la reducida proporción de problemas con información situacional, las categorías más numerosas fueron las menos relevantes para la generación del Modelo Episódico de la Situación (M.E.S) propuesto por Reusser (1988,1990). En el análisis de esta variable también hubo diferencias importantes entre la editorial S.M, que presentó un mayor número de problemas reescritos situacionalmente y las editoriales Santillana y Anaya, con porcentajes muy similares. Sin embargo, como se ha comentado, el tipo de información situacional que fue incluido en los problemas de esta editorial resultaba poco relevante para la creación del M.E.S.

A tenor de estos resultados, los autores concluyeron que los PAVs de estructura aditiva presentados por los libros de texto se caracterizaban por una baja variedad de subtipos y una alta frecuencia de problemas para cuya resolución no era necesario aplicar un conocimiento conceptual avanzado, ni sofisticadas estrategias de resolución. Por tanto, estos problemas podían ser resueltos por los alumnos mediante estrategias superficiales (p.ej., la estrategia de la "palabra clave") que puede aplicarse sin necesidad de una comprensión profunda del problema.

Por otro lado, la principal característica de los PAVs con algún nivel de desafío fue su escasez. Además, como hemos comentado más atrás, estos problemas aparecían en contextos donde los alumnos conocían a priori el tipo de desafío.

Por último, el contexto situacional de los PAVs se caracterizó por su naturaleza altamente estereotipada. Los problemas aparecían en contextos situacionales estándar: premisas muy concretas con datos y preguntas, y una escasa información situacional relevante.

En conclusión, dados estos resultados, los autores del estudio consideran necesario plantear, por un lado, "qué constituye realmente un problema" (Orrantia et al., 2005, p.445) y por otro lado, "cuál es el verdadero rol que los problemas tienen en los libros de texto" (p.445). Según los autores, una parte considerable de los problemas que aparecen en los libros de texto analizados se aproxima más a la función de un *ejercicio* que a la función de un verdadero *problema.* Los problemas deberían constituir un fin en sí mismos, puesto que como argumentan los autores, el conocimiento conceptual desempeña un papel relevante en el proceso de R.P y este tipo de conocimiento se desarrolla en el propio proceso de resolución (Orrantia, 2003; Orrantia et al; 2005). Sin embargo, la función de los problemas en los libros de texto queda supeditada a la ejercitación de las operaciones que los alumnos están estudiando en ese momento, más que al desarrollo de estrategias sofisticadas de resolución, donde es necesaria la intervención del razonamiento (Orrantia et al., 2005). La tendencia por parte de los libros de texto a considerar los problemas como un mero ejercicio rutinario de las operaciones provoca que se desvirtúe la verdadera función de los problemas.

- **Estudio de Chamoso, Vicente, Manchado y Múñez, (2014)**

Un segundo estudio publicado un año después de la promulgación de la LOMCE (2013), fue el realizado por Chamoso et al. (2014), aunque los problemas analizados fueron los presentados por un libro de texto editado en el marco normativo de la LOE (2006), de acuerdo, por tanto, con el Real Decreto 1513/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria.

El primer objetivo de este trabajo fue caracterizar el grado de autenticidad[24] de los problemas que habitualmente los alumnos resuelven en el aula, esto es, analizar las posibles conexiones entre los problemas presentados por el libro de texto y las situaciones problemáticas con las que los alumnos se enfrentan en su vida diaria. Por otro lado, se planteó como segundo objetivo, analizar algunas de las variables estudiadas por Orrantia et al. (2005) en su estudio pionero y poder comprobar, de esta manera, si el panorama descrito por estos autores había cambiado.

[24] Un problema auténtico puede ser definido como aquel que "representa alguna situación de la vida real de manera que aspectos importantes de esa situación se simulan en un grado razonable" (Palm, 2008, p.40). De acuerdo con Vicente y Manchado (2017), la autenticidad o familiaridad del contexto propuesto por los problemas "hace que los alumnos los comprendan y resuelvan mejor" (p.255).

Los materiales utilizados para este análisis fueron los libros de texto y cuadernos complementarios de matemáticas, de 1º a 6º de Educación Primaria de la editorial Santillana. Por otra parte, para caracterizar la autenticidad de los problemas, los autores partieron de tres aspectos propuestos por Palm y Nyström (2009): (1) Evento: si la situación descrita en el problema tiene una alta probabilidad de suceder fuera de la escuela; (2) Pregunta: si existe una coherencia entre la situación propuesta en el problema y lo que se pide resolver al alumno; (3) Información y datos: si existe un propósito específico y razonable, no alejado de la vida real del alumno, junto con unas cantidades adecuadas. Asimismo, la categorización de los problemas se basó en el sistema de análisis creado por Palm (2008) y depurado por Depaepe et al. (2010), donde se establece una clasificación gradual del nivel de autenticidad de los problemas, de los más auténticos a los más desajustados con la realidad: problemas auténticos, estándar ajustados, estándar, contenedor, ejercicio camuflado y problema absurdo. Véase la siguiente tabla:

Tabla 18. Categorías para establecer el grado de autenticidad de los problemas. Adaptado de Chamoso et al. (2013).

AUTÉNTICO
La situación es próxima al alumno fuera de la escuela; la pregunta tiene sentido; existe un propósito concreto; los datos son adecuados. Ejemplo: **“***Félix quiere pesar a su perro, pero no consigue que esté quieto encima de la báscula. Explica lo que has hecho para calcular cuánto pesa el perro y halla tú ese peso”* (3º curso E.P). El texto se acompaña de una imagen con tres viñetas: 1ª. Félix sube a la báscula con el perro y dice: *“pesamos 29 kilos”.* 2ª. Félix se sube solo a la báscula y dice: *“peso 25 kilos”.*
ESTÁNDAR AJUSTADO
La situación es cercana al alumno; las cantidades son razonables; resultan similares a los auténticos, pero sin un propósito evidente y concreto. Ejemplo: *“Carmen salió de casa con 50 € para hacer la compra. Primero, gastó 27 € en la pescadería y, después, 14 € en la frutería. ¿Cuánto dinero le sobró?”* (4º curso E.P).
ESTÁNDAR
El alumno podría encontrar la situación descrita en la vida real; los datos son adecuados, pero no específicos, o bien los datos son específicos, pero en situaciones no próximas al alumno. Las situaciones son más alejadas que en los problemas estándar ajustados. Ejemplo: *“A un lago han llegado 5 autocares con 50 personas en cada uno. ¿Cuántas personas han llegado?”* (4º curso E.P).
CONTENEDOR
Las situaciones descritas, aun siendo conocidas por el alumno, no son cercanas ni por evento, ni por especificidad de los datos; cabe casi cualquier situación con cualquier magnitud de los conjuntos y cualquier acción sobre ellos; los datos pueden ser ridículamente exactos y poco específicos. Ejemplo: *“En un almacén se envasaron 42 cajas de cerezas. En cada caja pusieron 3 kilos. ¿Cuántos kilos se envasaron?”* (4º curso E.P)

EJERCICIO CAMUFLADO
Proponen situaciones, generalmente extrañas, en las que es evidente que lo importante es ejercitar la operación objeto de estudio; se diferencian del estándar en que la pregunta tiene poco sentido. Ejemplo: *"Un sello mide 6 cm y 4 mm de largo y 3 cm y 7 mm de ancho. ¿Cuántos milímetros mide de largo más que de ancho?"* (4º curso E.P).
ABSURDO
Describen situaciones ajenas a la vida cotidiana del alumno; los datos se presentan de manera grotesca, o se plantea una pregunta con escaso sentido con relación a la situación propuesta. Ejemplo: *"Leonor compra doce cuartos de kilo de garbanzos y Concha compra seis medios kilos. ¿Cuántos kilos compra cada una? ¿Quién compra más?"* (5º curso E.P).

Los resultados del análisis de esta variable mostraron que:

1) Más del 75% de los problemas se distribuyó entre las categorías estándar, estándar ajustado y contenedor, mientras que los problemas absurdos representaron un 8.5% del total, y los auténticos un 2.3%.

2) La proporción de problemas desajustados iba aumentando con el nivel educativo: en los niveles inferiores, el porcentaje de problemas absurdos y ejercicios camuflados fue mínimo, mientras que los problemas auténticos y estándar ajustados presentaron porcentajes en torno al 50%; al contrario, en los niveles superiores el porcentaje de problemas absurdos y ejercicios camuflados fue considerablemente mayor que en los niveles inferiores.

Por otra parte, en relación con las variables analizadas en el estudio de Orrantia et al. (2005), los resultados de este estudio indicaron que:

1) Entre los PAVs de estructura aditiva, la categoría más frecuente fue la de combinación, (55.30%) seguida de las categorías de cambio (26.27%) y comparación, (17.26%). La categoría de igualación fue casi inexistente (1.17%).

2) La proporción de problemas consistentes (73%) fundamentalmente de combinación 1, cambio 1 y 2, resultó ser muy superior a la de problemas inconsistentes (27%) de los cuales los más frecuentes fueron los de combinación 2, los más fáciles de resolver.

3) Además, en este estudio se analizaron los PAVs de estructura multiplicativa, encontrándose que, tanto los problemas que se resolvían con una multiplicación (59.72%) como los que se resolvían con una división (40.28%) presentaban un ni-

vel de frecuencia muy similar. En cambio, hubo diferencias en cuanto a la variabilidad: por un lado, casi todos los problemas de multiplicación se concentraron en la categoría de razón (57,19%) frente a las categorías de comparación (2.46%) y producto cartesiano (0.07%); por otro lado, la mayoría de los problemas de división se distribuyeron en las categorías de partición (20.18%) y cuotición (16.38%) frente a la categoría de comparación (3.75%).

Una primera conclusión de este estudio es que los problemas matemáticos presentados por los libros de texto se plantean distantes de la vida real de los alumnos. Con respecto a los problemas estándar ajustados, los autores proponen su transformación en problemas auténticos, basándose en los resultados positivos encontrados en el estudio de reescritura intencional realizado por Orrantia et al. (2011), que hemos descrito en el segundo capítulo de esta tesis (epígrafe II.5.3). Dadas las características de los problemas estándar ajustados (situaciones cercanas, preguntas coherentes, pero carencia de un propósito o meta) según los autores bastaría con incluir un propósito a la situación descrita en el enunciado de estos problemas para convertirlos en auténticos. Por otro lado, los problemas estándar y contenedor (aproximadamente la mitad de la muestra) presentan situaciones relativamente conocidas por los alumnos y alejadas de su vida cotidiana. Este tipo de problemas, habitualmente los más frecuentes en los libros de texto, tiene como rol ejercitar las operaciones aritméticas desvirtuando así la verdadera finalidad de la R.P. Para los autores sería conveniente que en estos problemas se presentaran situaciones más cercanas y concretas, esto es, más auténticas.

En referencia a las diferencias por niveles, los autores concluyen que el aumento de ejercicios camuflados y problemas absurdos (inhibidores del proceso de razonamiento) en los niveles superiores, en detrimento de problemas auténticos y estándar ajustados, apunta hacia la idea de que la brecha entre las matemáticas de la escuela y las situaciones de la vida real aumentan con el nivel escolar. Una explicación plausible que ofrecen los autores sobre este hecho es que el progreso de los alumnos a lo largo de la escolaridad hace que vaya aumentando la complejidad de los conceptos y procedimientos matemáticos a los que tiene que enfrentarse, y por ello, aumenta también la dificultad para elaborar situaciones problemáticas auténticas.

Por otro lado, los autores apuntan que la escasa variedad de PAVs de estructura aditiva y la baja proporción de problemas inconsistentes presentados por esta editorial en sus libros de texto corroboran los resultados obtenidos en el estudio precedente de Orrantia et al. (2005). Para la resolución de este tipo de problemas no es necesario el uso de estrategias sofisticadas, puesto que pueden resolverse aplicando estrategias superficiales que acaban siendo automatizadas por los alumnos y que no les serán de utilidad a la hora de enfrentarse con problemas que presenten una mayor dificultad. Es más, siguiendo a Rosales, Orrantia, Vicente y Chamoso, (2008a, 2008b) y a Rosales, Vicente, Chamoso, Múnez y Orrantia, (2012), los autores señalan que este modo de resolución superficial, frecuente en los libros de texto, puede influir igualmente en las prácticas docentes, de manera que los maestros reduzcan el proceso de resolución a la selección de los datos y la ejecución de las operaciones, excluyendo el razonamiento como paso de este proceso.

Por último, la distribución de los problemas de estructura multiplicativa, concentrados prácticamente en una sola categoría (problemas de razón) muestra: "el significado limitado del concepto de multiplicación" y "la visión limitada de las situaciones de estructura multiplicativa" que ofrece el libro de texto (Chamoso et al., 2014, p.276). De igual manera que sucede con los PAVs de estructura aditiva, esta visión reducida de los PAVs de estructura multiplicativa puede provocar, como apuntan los autores, que los alumnos presenten dificultades para identificar otras situaciones donde la multiplicación también sea de utilidad (p.ej. multiplicación comparativa y producto cartesiano).

- **Estudio de Sánchez y Vicente, (2015)**

A diferencia de los estudios anteriores, centrados en *qué* tipos de problemas se resuelven en los libros de texto, el estudio de estos autores se focalizó en *cómo* se resuelven, esto es, en los modelos de resolución propuestos por los libros de texto para enseñar a los alumnos a resolver PAVs de estructura aditiva. Más específicamente, el propósito de este estudio se dirigió a comprobar si estos modelos incluían el razonamiento como paso necesario para la resolución y de esta forma verificar si los libros de texto, como materiales curriculares frecuentemente utilizados por los alumnos, son adecuados para aprender a resolver problemas reflexivamente. Así, siguiendo la propuesta de Verschaffel, Greer y De Corte, (2000) en la que se distingue entre dos modos de resolución, superficial y genuino, los autores analizaron los distintos modelos presentados por los libros de texto de las editoriales Santillana, Anaya y S.M, en los seis niveles de la Educación Primaria.

Para implementar la propuesta de Verschaffel et al. (2000), se establecieron una serie de categorías de análisis (véase Anexo I) estructuradas en pasos o procesos y subprocesos:

paso 1, datos; paso 2, razonamiento; paso 3, estrategias de resolución; paso 4, operaciones; paso 5, resultado; paso 6, comprobación del resultado; y paso 7, inventar.

Se consideró propio del modelo genuino de resolución el paso correspondiente al razonamiento, o cualquier otra combinación de pasos en la que el razonamiento estuviera incluido.

Los resultados obtenidos en este estudio fueron los siguientes:

- El modelo que apareció con mayor frecuencia fue el correspondiente al procesamiento superficial de los problemas, en concreto, el modelo de tres pasos: Datos-Operaciones-Resultado. A este le siguió el modelo de cinco pasos: Datos-Estrategias-Operación-Resultado-Comprobar, y el modelo de cuatro pasos: Datos-Operaciones-Resultado-Comprobar. El modelo menos frecuente, (3%) fue el modelo completo, que incluía el razonamiento como paso necesario para la resolución.
- Los resultados obtenidos en las tres editoriales fueron similares en cuanto al escaso espacio dedicado al razonamiento, especialmente en Anaya y Santillana. La editorial S.M fue la que presentó un mayor número de modelos completos, pero aun así estos modelos fueron escasos.
- Los modelos superficiales que se presentaron en las tres editoriales se caracterizaron por una gran heterogeneidad. La editorial Santillana fue la presentó una mayor variabilidad de modelos, mientras que Anaya fue la que se mostró más sistemática.
- Por último, los resultados por niveles educativos indicaron que, en los modelos de resolución de los cursos superiores se incluía con mayor frecuencia el razonamiento que en los modelos de los primeros cursos.

Como hemos visto, los autores de este estudio siguen la propuesta de Verschaffel et al. (2000), según la cual pueden distinguirse dos modos de resolución: superficial y genuino. Los problemas fáciles pueden ser resueltos a través de un modo superficial, de tal forma que para su resolución bastaría con aplicar tres pasos: extracción de los datos; selección de la operación o la estrategia de resolución superficial (p.ej., método de la "palabra clave" o última operación estudiada en clase); y presentación del resultado (sin comprobación o verificación de la solución desde el punto de vista matemático y situacional). Sin embargo, los problemas difíciles, matemática y situacionalmente, requieren de la aplicación de un modelo genuino, ya que su resolución implica: por un lado, razonamientos matemáticos sobre las relaciones entre las cantidades que se presentan en el enunciado; y por otro lado, razonamientos sobre los conocimientos del mundo real, que permiten interpretar los resultados y dar una respuesta coherente.

De acuerdo con esta propuesta y a la luz de los resultados obtenidos, Sánchez y Vicente (2015), concluyen que el modelo de resolución propuesto por los libros de texto para el aprendizaje de la R.P se caracteriza, en general, por dos rasgos: su superficialidad y su falta de sistematicidad.

De los diferentes pasos propuestos para la R.P, el razonamiento ocupa un escaso espacio en las tres editoriales analizadas, principalmente en Anaya y Santillana, de ahí que los autores concluyan que los modelos presentados son superficiales e incompletos. Es más, los modelos superficiales, que inhiben el razonamiento, son los más frecuentes en los cursos inferiores. Siguiendo a los autores del estudio, este hecho puede tener consecuencias negativas en el aprendizaje del proceso de R.P, pues es precisamente en los primeros cursos cuando los alumnos aprenden a resolver problemas de manera formal. Por tanto, en los niveles iniciales se hace necesario interiorizar el razonamiento como un paso necesario que deberá ponerse en marcha en los momentos en que los alumnos se enfrenten a la resolución de problemas más complejos. Igualmente, la gran cantidad de modelos de resolución presentados en las tres editoriales, especialmente en Santillana, puede conducir a una falta de sistematicidad a la hora de enseñar a los alumnos los procesos y subprocesos implicados en la R.P.

Por otro lado, a partir de los resultados de este estudio y basándose en otros trabajos de investigación acerca de la interacción profesor-alumnos en el proceso de R.P en las aulas, los autores plantean una serie de consideraciones respecto a la práctica docente y la influencia del libro de texto como material predominante:

- De acuerdo con Ramos (2015), los autores señalan que es muy probable que la experiencia que los maestros van adquiriendo a lo largo del tiempo, a través del uso de los libros de texto, influya en sus conocimientos pedagógicos acerca de cómo enseñar a los alumnos a resolver problemas. Así, a la hora de plantearse qué modelo puede resultar más efectivo para desarrollar el proceso de enseñanza de la R.P, los maestros se inclinan hacia la elección de problemas estereotipados y modelos de resolución superficiales, en detrimento de problemas desafiantes y modelos de resolución genuinos que incluyen el razonamiento. En el estudio de Ramos (2015), los resultados mostraron que un 91% de los maestros optaron por los problemas estereotipados y un 76% por los modelos superficiales.

- Asimismo, Sánchez y Vicente (2015) apuntan que, estudios previos muestran evidencias de que los maestros son propensos a plantear la R.P como si se tratase de una tarea mecánica, tanto con problemas estereotipados o desprovistos de un contexto situacional (Depaepe et al., 2010; Rosales et al., 2008b), como con problemas con información matemática y situacional que posibilitan el uso de estrategias de razonamiento (Rosales et al., 2012).
- Como consecuencia de estas prácticas docentes, los autores plantean la posibilidad de que el uso continuado de los libros de texto influya tanto en el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos como en los conocimientos pedagógicos de los profesores. En este sentido, si los alumnos únicamente se enfrentan a una escasa variedad de problemas, para cuya resolución el libro de texto propone modelos superficiales, estaremos limitando el desarrollo del razonamiento situacional y matemático necesario para enfrentarse a problemas más complejos que requieren la utilización de modelos genuinos. Igualmente, el uso continuado del libro de texto por parte del profesor puede provocar que se consoliden ciertas ideas erróneas, como que la forma más idónea para enseñar a los alumnos a resolver problemas sea a través de problemas estereotipados y modelos de resolución superficiales.
- En cualquier caso, para los autores estas conclusiones son "tentativas" y por tanto, se requeriría de otras investigaciones en las que se vinculara el nivel de rendimiento matemático del alumnado y los conocimientos pedagógicos del profesorado con la utilización de determinados libros de texto y los modelos (superficial/genuino) que estos proponen para llevar a cabo la R.P.

En resumen, la descripción de los estudios de Chamoso et al. (2014) y de Orrantia et al. (2005), nos ha permitido poner de relieve que la propuesta de los libros de texto españoles se caracteriza por la presentación de situaciones problemáticas con niveles bajos de dificultad, de naturaleza altamente estereotipada y ajenas a la vida real y a las experiencias de los alumnos. El estudio de Sánchez y Vicente (2015), viene a completar el panorama presentado por estos dos estudios previos y añade nuevas conclusiones a partir del análisis de los modelos de R.P predominantes en los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria.

- **Estudio de Vicente, Manchado y Verschaffel, (2018)**

El estudio más reciente hasta el momento es el desarrollado por Vicente et al. (2018), aunque debemos señalar que las ediciones de los libros de texto analizados por estos autores son de los años 2009 y 2010 y por tanto este estudio, al igual que los dos últimos que han sido descritos, se enmarca a nivel legislativo en la LOE (2006).

En este trabajo se analizaron los PAVs de estructura aditiva y de estructura multiplicativa de dos editoriales (Santillana y S.M) en todos los niveles educativos de la Educación Primaria. Así, con respecto al estudio pionero de Orrantia et al. (2005), se amplió la tipología de PAVs, al incluir también los problemas multiplicativos, aunque se contó con una editorial menos.

El objetivo de los autores fue conocer los distintos niveles de complejidad de los PAVs incluidos en los libros de texto de matemáticas, esto es, analizar hasta qué punto los problemas presentados por los libros de texto ofrecían a los alumnos suficientes oportunidades para ejercitarse en la resolución de cualquier subtipo de problema (Vicente et al., 2018). Además, los autores se plantearon como propósito actualizar el estudio desarrollado por Orrantia et al. (2005), con el fin de constatar si se habían producido cambios en la variedad de PAVs presentados por los libros de texto y de esta manera ofrecer un panorama actual de esta cuestión.

Con respecto a los niveles de complejidad, se distinguieron dos categorías de análisis:

a) Complejidad procedimental: número de pasos necesarios para resolver el PAV.

b) Complejidad semántico-matemática: estructura y subestructura semántica del PAV.

Asimismo, dentro de la complejidad procedimental, siguiendo a Hierbert et al. (2003), se distinguieron, a su vez, tres niveles:

a) Complejidad baja: PAVs que no contienen subproblemas y que se resuelven por medio de una única operación.

b) Complejidad moderada: PAVs que contienen un subproblema y que se resuelven con dos operaciones.

c) Complejidad alta: PAVs que contienen dos o más subproblemas y que se resuelven con tres o más operaciones.

Por otro lado, a partir de los PAVs de cambio, combinación, comparación e igualación, se determinaron tres niveles de complejidad semántico-matemática, acordes al modelo de estrategias de resolución propuesto por Riley y Greeno, (1988):

a) Complejidad baja: no es necesaria la creación de una representación mental del problema para la resolución (PAVs de combinación 1 y cambio, comparación e igualación 1 y 2).

b) Complejidad media: PAVs que requieren una representación mental, esto es, implican conjuntos cuya cantidad es desconocida pero que pueden determinarse ejecutando determinadas acciones basándose en las relaciones entre los conjuntos (PAVs de cambio, comparación e igualación 3 y 4).

c) Complejidad alta: es necesaria la transformación de la representación mental inicial del PAV mediante la aplicación del conocimiento conceptual parte-todo (PAVs de combinación 5 y cambio, comparación e igualación 5 y 6).

Para determinar la complejidad semántico-matemática de los PAVs de estructura multiplicativa, los autores se basaron en una adaptación de las clasificaciones propuestas por Greer (1992) y Vergnaud (1991): razón (grupos iguales) comparación multiplicativa (escalares) producto cartesiano y matriz rectangular:

a) Complejidad baja: PAVs de razón simple.

b) Complejidad media: PAVS de razón múltiple y comparación multiplicativa consistentes.

c) Complejidad alta: PAVs de comparación multiplicativa inconsistentes, producto cartesiano y matriz rectangular.

Los resultados revelaron que la mayor parte de los PAVs presentados por los libros de texto eran de baja complejidad procedimental (53.45%). Los PAVs de complejidad moderada representaron el 35.99% del total de problemas analizados, y los PAVs de alta complejidad procedimental representaron el 10.56%. Este tipo de complejidad aumentaba con el nivel académico, pero aun así la complejidad procedimental se mostró baja. Por lo que se refiere a las dos editoriales analizadas, sí hubo diferencias significativas entre ellas: Santillana incluyó más PAVs de complejidad procedimental moderada y alta que

S.M, aunque ambas presentaron proporciones bajas de PAVs con alta complejidad procedimental.

Con respecto a la complejidad semántico-matemática de los PAVs aditivos y multiplicativos, el 77.21% fueron de complejidad baja, el 19.19% media, y el 3.19% alta.

En los cursos superiores no se encontraron PAVs con mayor complejidad que en los inferiores, ni tampoco hubo diferencias notables entre los resultados de las dos editoriales analizadas.

Por otro lado, los PAVs de estructura aditiva más frecuentes fueron los de combinación (57.53%) seguidos de los de cambio (25.28%) comparación (16.20%) e igualación (0.89%). La mayor parte de estos problemas fueron de baja complejidad (73.60%). Los PAVs de complejidad media representaron un 25.37%, y los de complejidad baja, un 1.03%.

Finalmente, en referencia a los PAVs de estructura multiplicativa, el 81.09% fueron de baja complejidad, el 13.92% de complejidad media, y el 5% de complejidad alta. La mayoría de los PAVs en ambas editoriales pertenecían a las categorías de proporción simple.

A partir de estos resultados, los autores concluyen que la dieta instruccional propuesta por los libros de texto se caracteriza por una escasa variedad de PAVs aditivos y multiplicativos, que pueden ser resueltos por los alumnos mediante estrategias superficiales. Según los autores, llevar a cabo el proceso de enseñanza de la R.P mediante estos libros de texto "podría promover que los alumnos desarrollaran únicamente estrategias superficiales de resolución en detrimento del modo genuino" (Vicente et al., 2018, p.100). Dada la simplicidad de los PAVs presentados por los libros de texto "difícilmente podrían considerarse herramientas eficaces para que los alumnos aprendan a resolver cualquier tipo de PAV" (Vicente et al., 2018, p.100).

Por otro lado, en referencia al segundo objetivo planteado, los autores concluyen que no existe evolución alguna respecto al panorama presentado en el estudio de Orrantia et al. (2005). Recordemos que en este estudio pionero en España, los resultados del análisis de la estructura semántica de los PAVs mostraban un panorama caracterizado por una variedad muy limitada de subtipos de problemas y por una alta frecuencia de problemas consistentes frente a inconsistentes, de manera que para resolver estos problemas no se requería de estrategias sofisticadas de resolución.

Teniendo en cuenta, por un lado, las fechas de edición (1999-2001) de los libros de texto analizados por Orrantia et al. (2005) y las fechas de edición de este estudio (2009-2010), y por otro lado, el transcurso a lo largo de ese intervalo de tiempo de tres reformas educativas (LOGSE, 1990; LOCE, 2002, y LOE, 2006), los autores señalan que: "los libros parecen mostrarse ajenos a las sucesivas reformas educativas realizadas en nuestro país" (Vicente et al., 2018). Es más, según los autores, llevar a cabo reformas educativas que eluden las cuestiones más cercanas a la práctica educativa (en este caso la cuestión de los libros de texto) puede limitar el aprendizaje de los alumnos, puesto que como ya se apuntó al principio de este capítulo, los libros de texto son los materiales curriculares que definen realmente lo que aprenden los alumnos.

De acuerdo con estas conclusiones, los autores plantean cuatro propuestas de mejora relativas al contenido (los PAVs), la metodología, la función docente y las políticas educativas del libro de texto:

- En primer lugar, incluir de manera conjunta en los libros de texto una mayor proporción de PAVs (aditivos y multiplicativos) con una complejidad procedimental alta y una complejidad semántico-matemática media y alta.
- Asimismo, de acuerdo con el estudio de Sánchez y Vicente (2015), superar el modelo de R.P superficial, predominante en los libros de texto, e incluir en las secciones o apartados dedicados por el libro de texto a la enseñanza de la R.P el modelo genuino, que contempla el razonamiento como un paso necesario en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la R.P.
- De igual modo, formar a los profesores en el análisis y mejora de los PAVs presentados en los libros de texto. Este conocimiento les permitiría conocer las características de los PAVs, y de este modo poder compensar las carencias de estos materiales curriculares.
- Por último, lograr nuevas políticas educativas, fundamentadas en un currículum sólido, que orienten cuestiones clave de la cultura escolar como el libro de texto.

III.4. Síntesis del Capítulo III

- La investigación actual muestra que el libro de texto continúa siendo el recurso educativo hegemónico en la mayoría de los países, sistemas educativos y aulas (Escudero, 2015; Fuchs y Bock, 2018; Hansen, 2018; Knudsen, 2011, Parcerisa, 2009).

- Si bien el profesorado hace uso del libro de texto como principal recurso de instrucción, no puede afirmarse que éste sea el único material curricular empleado por los docentes (Horsley y Sikorová, 2014; Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010).
- Tampoco puede afirmarse que exista una homogeneidad con respecto a las formas con que los profesores utilizan el libro de texto (Hansen, 2018; Heinonen, 2005; Pehkonen, 2004; Watt, 2015). No obstante, en general, el comportamiento de los docentes suele ser muy consistente con los contenidos y el enfoque metodológico adoptado por el libro de texto (Despina y Harikleia, 2014; Thomson y Fleming, 2004; Vincent y Stacey, 2008; Vicente et al., 2018).
- A pesar del proceso de transformación que actualmente están experimentando los materiales curriculares en la denominada *era de la revolución digital*, el libro de texto impreso no ha sido reemplazado por el libro de texto digital, cuyo futuro se muestra incierto (Horsley y Sikorová, 2014; Misra, 2015; Peirats et al., 2015). En cualquier caso, la investigación apunta que, en general, el uso del libro de texto digital no supone cambios pedagógicos significativos con respecto al libro de texto impreso (Rodríguez, Horsley y Knudsen 2011; Vicente 2010; Zapico 2012).
- El estudio del libro de texto ha sido abordado desde diferentes líneas de investigación: su uso e influencia en la práctica educativa, los aspectos ideológicos subyacentes, la economía política, la repercusión de las políticas reformistas, la elaboración de materiales alternativos, etc.
- En la actualidad, los libros de texto siguen reflejando y transmitiendo los modelos sociales dominantes, contribuyendo así a reproducir sesgos, estereotipos y prejuicios sexistas, clasistas, racistas y homófobos (Chisholm, 2018; Fuchs y Henne, 2018; Sancho Höhne y Heerdegen, 2018).
- Los libros de texto son el resultado de políticas económicas al servicio de los mercados (Apple, 1992; Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010; Torres, 2014). Las editoriales seleccionan e interpretan el currículum oficial, convirtiéndose de este modo en un mediador determinante a la hora de definir el currículum real en la escuela (Area, 2000; Apple, 1989).
- Cada reforma educativa sigue concibiendo el libro de texto como el principal material de instrucción (Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010), sin embargo, los diferentes estudios descritos en este capítulo, tanto a nivel nacional como internacional,

ponen de relieve que los libros de texto editados para el desarrollo de las reformas de los sistemas educativos no se caracterizan por mejoras sustanciales.

- La preocupación por la investigación sobre elaboración de materiales y prácticas alternativas al libro de texto ha sido escasa (Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010).
- Existe una dicotomía entre los hallazgos de la investigación educativa, que revelan las limitaciones del libro de texto, y la escasa repercusión de estos hallazgos en las prácticas cotidianas de las aulas, donde este material curricular sigue siendo hegemónico (Martínez Bonafé, 2008; Rodríguez Regueira y Rodríguez Rodríguez, 2015; Travé y Pozuelos, 2008).
- Actualmente, los marcos teóricos más prometedores para el estudio del libro de texto son aquellos que proponen un enfoque relacional, centrado en la comprensión del contexto donde el fenómeno tiene lugar: neo-institucionalismo, gramática de la escuela, y teoría del actor-red. Estos enfoques ponen el énfasis en la idea de que el significado del libro de texto se construye de forma activa, a través de las relaciones que se establecen con otros elementos contextuales (Hansen, 2018; Kolbeck y Röhl, 2018; Roldán, 2018; Weinberg y Wiesner, 2011).
- Tanto el estudio de Despina y Harikleia (2014), en Grecia, como el estudio de Tarim (2017), en Turquía, revelaron que, los PAVs de estructura aditiva presentados por los libros de texto de matemáticas con mayor frecuencia eran los más fáciles de resolver. Asimismo, en ambos estudios se constató una escasa variedad de subtipos de PAVs, e igualmente una escasa proporción de este tipo de problemas frente a otras tareas matemáticas. Estos resultados fueron similares a los obtenidos en dos estudios precedentes, llevados a cabo por Olkun y Toluk (2002), y por Parmjt y Teoh (2010), en Turquía y Malasia, respectivamente.
- Uno de los hallazgos del estudio realizado por Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen (2018), en Holanda, fue que los libros de texto de matemáticas presentaban una alta frecuencia de problemas rutinarios, que podían resolverse aplicando directamente un algoritmo, o imitando un procedimiento matemático utilizado tras una explicación o un ejemplo. Por el contrario, apenas se incluían problemas con una dificultad intermedia o problemas no rutinarios con un mayor nivel de complejidad cognitiva. Este resultado también fue encontrado por Marchis (2012), en el estudio llevado a cabo con los libros de texto de matemáticas utilizados en el sistema educativo rumano.

- El estudio de Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen (2018), también mostró que los libros de texto de matemáticas holandeses, apenas incorporaban estrategias para facilitar a los alumnos el proceso de aprendizaje de la R.P. Asimismo, en referencia al carácter inclusivo de los libros de texto, los autores concluyeron que estos materiales curriculares no ofrecían suficientes oportunidades para aprender a resolver problemas a los alumnos con diferentes niveles de competencia matemática. Todos los resultados de este estudio fueron coincidentes con los obtenidos por Kolovou et al. (2009).
- Dos de las variables analizadas en el estudio de Brehmer et al. (2016) fueron el contexto situacional de los problemas y su ubicación en la unidad didáctica de los libros de texto suecos de la Educación Secundaria. Con respecto a la primera variable, los resultados mostraron que la mayoría de los problemas aparecían en *contextos matemáticos puros,* que no suscitan ningún tipo de interés a los alumnos, ni les ayudan a generar una representación mental del problema. En cuanto a la segunda variable, los resultados indicaron que la gran mayoría de los problemas se localizaba al final de la unidad didáctica, lo cual refleja la visión instrumental que los libros de texto tienen de los problemas y de su proceso de resolución: *aprender para*, en lugar de *aprender a través de*. Este resultado coincide con estudios realizados en otros países, que revelan una tendencia por parte de los libros de texto a focalizar el proceso de enseñanza- aprendizaje de los problemas en la adquisición de habilidades y procedimientos algorítmicos (Bruin-Muurling, 2010; Li, Chen y An, 2009; Van Stiphout, 2011).
- En el estudio realizado por Wijaya et al. (2015) también se evidenció que la gran mayoría de los problemas presentados por los libros de texto de matemáticas en Indonesia aparecían en un contexto "puramente matemático". Este mismo resultado también fue hallado en el estudio comparativo llevado a cabo por Ozer y Sezer (2014), con libros de texto de tres países (Singapur, EE.UU y Turquía). Por otra parte, en el estudio de Wijaya et al. (2015) también se constató que la mayor parte de los problemas contenían únicamente la información necesaria y suficiente para su resolución, es decir, los libros de texto apenas incluían situaciones problemáticas desafiantes con información ausente (datos de menos) o información superflua (datos de más).
- Los resultados del estudio comparativo llevado a cabo por Cai y Jiang (2017) indicaron que los libros de texto chinos y estadounidenses apenas incluían tareas que tuvieran como objeto el planteamiento de los problemas por parte de los alumnos, es decir, que fueran los propios estudiantes quienes inventasen los problemas total o parcialmente.

Con anterioridad, en el estudio realizado por Marchis (2012), también se encontró este mismo resultado.

- En España, el estudio pionero de Orrantia et al. (2005) mostró que los libros de texto diseñados en el marco legislativo de la LOGSE (1990) se caracterizaban por presentar: una alta frecuencia de PAVs de estructura aditiva consistentes, los más fáciles de resolver; una escasa presencia de problemas con un cierto grado de desafío; y una alta proporción de problemas con una naturaleza altamente estandarizada. Así, la mayor parte de los problemas analizados por estos autores podían ser resueltos mediante estrategias superficiales que no promovían el desarrollo del razonamiento. A la vista de estos resultados, los autores cuestionan la función que desempeñan los problemas en los libros de texto: los problemas deberían ser un fin en sí mismos y no una actividad rutinaria al servicio de la ejercitación de las operaciones aritméticas (Orrantia et al., 2005).
- Un segundo estudio realizado en España a partir de un libro de texto editado en el marco normativo de la LOE (2006), fue el de Chamoso et al. (2014). En este trabajo se analizaron tanto los PAVs de estructura aditiva como los de estructura multiplicativa, con una doble finalidad: por un lado, caracterizar el grado de autenticidad de los problemas presentados por el libro de texto y, por otro lado, comprobar las posibles variaciones entre los resultados de este estudio y el estudio precedente de Orrantia et al. (2005). Los resultados indicaron que la mayoría de los PAVs, aditivos y multiplicativos, presentados por el libro de texto, resultaban poco desafiantes y se planteaban distantes a la vida real de los alumnos. Al igual que en el estudio de Orrantia et al. (2005), se concluye que para la resolución de estos problemas apenas se hace necesario el razonamiento. Es más, ambos estudios coinciden en señalar que la dieta instruccional de problemas presentada por los libros de texto puede tener como consecuencia que los alumnos desarrollen sólo estrategias superficiales de resolución y que terminen por interiorizar una idea errónea del verdadero propósito del proceso de R.P, esto es, el desarrollo del razonamiento (Chamoso et al., 2014).
- Sánchez y Vicente (2015), se plantearon como objetivo analizar los modelos de resolución de problemas propuestos por los libros de texto de tres editoriales, también en el marco normativo de la LOE (2006). A partir de los resultados obtenidos, los autores concluyen que los modelos de resolución propuestos por los libros de texto son en general, superficiales, porque dejan un escaso espacio al razonamiento; además, son asistemáticos, porque se proponen una gran diversidad de modelos con procesos y subpro-

cesos diferentes. Los autores plantean la posibilidad de que el uso continuado de los libros de texto tenga una influencia directa en la competencia matemática de los alumnos, puesto que la propuesta de los libros de texto se caracteriza por una variedad muy limitada de problemas y por la presencia de modelos de resolución superficiales y asistemáticos.

- El último de los estudios realizado en España ha sido el de Vicente et al. (2018), donde se analizaron los PAVs de estructura aditiva y multiplicativa de los libros de texto de dos editoriales de los años 2009 y 2010, es decir, vigentes durante el período legislativo de la LOE (2006). Los resultados de este estudio mostraron que, la mayoría de los PAVs presentados por los libros de texto se caracterizaba por su baja complejidad, tanto procedimental como semántico-matemática, de manera que estos problemas podían ser resueltos mediante estrategias de resolución superficiales. Los autores concluyen que no ha habido evolución alguna con respecto al panorama descrito en el estudio pionero de Orrantia et al. (2005), de manera que las sucesivas reformas educativas llevadas a cabo en España no han supuesto un cambio sustantivo en los libros de texto.

.

SEGUNDA PARTE

DESARROLLO DE LOS ESTUDIOS

CAPÍTULO IV

ESTUDIO I

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

IV.1. Objetivos de investigación

El objetivo general de nuestro primer estudio es analizar el tratamiento de los PAVs de estructura aditiva en los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria, publicados en el marco legislativo actual (LOMCE, 2013). Este análisis nos permitirá, por un lado, presentar un panorama general del estado actual de la cuestión; por otro lado, teniendo en cuenta el estudio pionero en nuestro país, realizado por Orrantia et al. (2005), nos posibilitará comprobar en qué medida se ha producido una mejora en el tratamiento de este tipo de problemas con la entrada en vigor de la LOMCE (2013).

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar los PAVs de estructura aditiva presentados en los libros de texto de matemáticas de acuerdo con estas variables: la estructura semántica, el grado de desafío y el contexto situacional de los problemas.
2. Analizar el rol que desempeñan estos problemas en los libros de texto.

A partir de estos objetivos perseguimos dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

1. En referencia al primer objetivo:

   En primer lugar, puesto que la estructura semántica de los problemas determina su grado de dificultad, ¿cuál es la frecuencia y variabilidad de las estructuras semánticas de los problemas que aparecen en los libros de texto? En segundo lugar, ¿qué proporción de problemas presentan algún tipo de desafío más allá de la elección y ejecución del algoritmo con que se resuelve el problema?, y ¿de qué naturaleza es? Por último, ¿qué proporción de problemas aparecen en un contexto situacional diferente a las situaciones estándar, (premisas con datos y preguntas) ?, y ¿de qué tipo es la información situacional?

2. Con respecto al segundo objetivo:

   ¿Cuál es la verdadera función de los problemas en los libros de texto: el desarrollo del razonamiento o la práctica rutinaria de operaciones?

En suma, ¿qué resuelven los alumnos habitualmente en las aulas?; ¿a qué tipo de situaciones problemáticas se enfrentan los alumnos a lo largo de la Educación Primaria?; ¿qué tipo de prácticas educativas están promoviendo los libros de texto de matemáticas?

IV.2. Hipótesis

A la luz del marco teórico presentado y de acuerdo con el estudio llevado a cabo por Orrantia et al. (2005), que constituye el punto de partida de nuestra investigación, prevemos encontrar un panorama similar al descrito por estos autores. Con respecto a la estructura semántica, los problemas más frecuentes serán aquellos que presenten un menor nivel de dificultad (problemas consistentes). Asimismo, los problemas desafiantes, que van más allá de la selección de los datos y la aplicación de las operaciones, serán escasos. Finalmente, en relación al contexto situacional, predominarán los contextos estándar, de manera que la información situacional incluida en los problemas para mejorar su comprensión resultará escasa o nula. Estas predicciones, que apuntan hacia la obtención de unos hallazgos similares a los encontrados en el estudio de Orrantia et al. (2005), se sustentan en las siguientes consideraciones:

a) En primer lugar, las reformas de los sistemas educativos no implican necesariamente cambios profundos, ni mejoras en la práctica educativa (Aldrich, 1998; Bolívar, 2013; Escudero, 2000; De Puelles, 2006; Torres, 2015; Viñao, 2002). De hecho, los resultados de los estudios descritos en el marco teórico de esta tesis muestran que, las reformas educativas llevadas a cabo en distintos países no comportaron cambios ni mejoras en el tratamiento de los problemas y la R.P en los libros de texto de matemáticas.

b) Los libros de texto se caracterizan, en general, por su homogeneidad formal, por su estandarización e isomorfismo, por su escasa evolución y por su resistencia al cambio (Cantarero, 1997; Martínez Bonafé y Rodríguez Rodríguez, 2010; Höhne, 2018).

Por otro lado, con respecto al segundo objetivo específico planteado y de acuerdo con el papel que habitualmente desempeñan los problemas en los libros de texto de matemáticas, prevemos que una parte considerable de los problemas analizados estarán supeditados a la ejercitación de las operaciones aritméticas, más que al desarrollo del razonamiento (Bruin-Muurling, 2010; Castro y Ruiz, 2015; Li et al., 2009; Sánchez y Vicente, 2015; Säljö y Wyndhamn, 1987; Schoenfeld, 1989,1991; Sowder, 1988; Stern, 1992; Stigler, Fuson, Han y Kim, 1986; Van Stiphout, 2011; Vincent y Stacey, 2008; Verschaffel, 2012).

IV.3. Método

Para la obtención, registro y análisis de la información se utilizó como método, el análisis didáctico en educación matemática, que se sustenta en las reglas generales del análisis, esto es, “la distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios elementales” (Rico y Fernández-Cano, 2013, p.19). Sobre la base del proceso de análisis, se produce posteriormente el proceso de síntesis, de ahí que el análisis suponga una fase escrutadora y disgregadora (Zalta, 2012) y la síntesis una fase reductiva e interpretativa (Rico y Fernández-Cano, 2013). Si bien el análisis didáctico implica diferentes dimensiones, nosotros nos hemos centrado en el análisis del contenido, que es definido por Cohen, Manion y Morrison (2011), como “un conjunto de procedimientos sistemáticos para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos” (p.563). El análisis del contenido constituye una técnica de investigación cuyo objeto es la elaboración de inferencias a partir de textos u otros materiales escritos, entendiendo por “textos” todo material que se supone debe ser leído e interpretado, (p.ej. producciones escolares de los alumnos, libros de texto, etc.).

Siguiendo a Rico y Fernández-Cano (2013), hemos resumido en cinco las potencialidades de este método, aplicadas a nuestro estudio:

1. Se trata de un método fértil, porque ha podido ser utilizado tanto desde una perspectiva cuantitativa, (análisis del contenido explícito) como cualitativa (análisis del contenido latente).
2. Acata procedimientos sistemáticos, ya que el método está gobernado por reglas para cada una de las variables que se han analizado en nuestro estudio.
3. Estas reglas se han transformado en un sistema de categorización que ha permitido analizar un número considerable de problemas procedentes de diferentes libros de texto, extraer rasgos coincidentes y divergentes, resumir grandes cantidades de datos y obtener conclusiones.
4. El uso de categorías lo convierten en un método riguroso y verificable, ya que las reglas para el análisis son explícitas, transparentes y públicas y, por tanto, la verificación es posible mediante un nuevo análisis o replicación.
5. Por último, la flexibilidad es otro de sus rasgos distintivos, ya que se ha podido adoptar un sistema de categorización ya creado y utilizado en un estudio anterior, en concreto, el análisis de los PAVs de estructura aditiva en los libros de

texto de Educación Primaria, realizado por Orrantia et al. (2005). Además, otro aspecto que refleja la flexibilidad del método es su adaptación a nuestros objetivos de investigación y a las particularidades que han ido surgiendo durante el proceso de análisis de los datos.

IV.3.1. Materiales

La muestra de este primer estudio estuvo compuesta por los libros de texto de matemáticas de tres proyectos editoriales[25]: Grupo Santillana (proyecto "Saber hacer"); Grupo Anaya (proyecto "Aprender es crecer"); y Ediciones S.M (proyecto "Savia") publicados entre los años 2014-2015 con la entrada en vigor de la LOMCE (2013).

Dos fueron fundamentalmente las razones de esta elección: en primer lugar, pensamos que se trata de tres de las editoriales con mayor difusión en los centros educativos de nuestro país, aunque no disponemos de datos concretos que lo acrediten[26]; en segundo lugar, al tratarse de las mismas editoriales utilizadas en el estudio de Orrantia et al. (2005), se ha podido obtener una visión de la evolución de nuestro objeto de estudio tras más de una década.

En total fueron analizados dieciocho libros de texto y doscientas cuarenta y nueve unidades didácticas, teniendo en cuenta que la editorial S.M distribuye los contenidos de los seis cursos que conforman la Educación Primaria en doce unidades, y las editoriales Anaya y Santillana en quince, excepto esta última editorial, que distribuye los contenidos de 6º curso en doce unidades didácticas.

IV.3.2. Procedimiento

Tras la selección de los libros de texto, se realizó un vaciado de los problemas de cada una de las unidades didácticas que conformaban la muestra de nuestro estudio. El siguiente paso consistió en la codificación de los problemas en un sistema de categorización (véase Anexo II) con el fin de analizar las cuatro variables enunciadas en los objetivos de investigación.

[25] Santillana pertenece al grupo PRISA, uno de los principales grupos empresariales de comunicación a nivel internacional (http:// www.prisa.com). Anaya es una empresa editorial controlada por el grupo francés Hachette, que engloba diferentes sellos editoriales (http:// www.cga.es). S.M es el grupo editorial de la Fundación Santa María, creada por la Compañía de María (Marianistas) de España (http:// fundación-sm.com).

[26] Con el fin de conocer con exactitud el ranking de ventas en el mercado editorial y, por tanto, la presencia de estas editoriales en los centros educativos, se realizaron consultas al Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD), a la Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza (ANELE), y a los departamentos de marketing de los grupos editoriales Santillana, Anaya, S.M, Vicens Vives, Edebé y Edelvives. No se obtuvo respuesta por parte de estos organismos.

Una cuestión fundamental para la codificación fue delimitar los conceptos de *ejercicio* y *problema*, asunto ampliamente abordado en el primer capítulo de esta tesis (véase epígrafe I.4.2.2). Para ello, tuvimos en cuenta las diferencias entre ambos conceptos, que de acuerdo con numerosos autores (Alsina, 2006; Burkhardt, 2014; Castro y Ruiz, 2015; Díaz y Poblete, 2001; Dumas-Carré y Larchen, 1987; Juidías y Rodríguez, 2007; Kantowski, 1981; Manouchehri et al., 2014; Schoenfeld, 1985a), podemos sintetizar de este modo: el *ejercicio* es una tarea rutinaria, mecánica y reproductiva que conduce directamente a la solución mediante la aplicación de conocimientos aprendidos previamente; el *problema*, por el contrario, se concibe como una tarea no rutinaria, como un desafío o una situación retadora y reflexiva, donde no se dispone de mecanismos o vías que permitan llegar a la solución de forma automática. Del mismo modo, tuvimos presente la doble naturaleza de los problemas: conceptual o matemática y textual. Tal como se señaló en el segundo capítulo de esta tesis (véase epígrafe II.2) los enunciados de los problemas pueden ser considerados descripciones verbales, textos con características propias (Bermejo y Rodríguez, 1987; Nesher, 2000; Orrantia, 1993; Semademi, 1995; Verschaffel, 2012; Verschaffel et al., 2000; Verchaffel et al., 2014; Vicente, 2006). Por ello, en nuestro análisis, siguiendo a Orrantia et al., 2005, para poder considerar un problema como tal, éste debía estar expresado mediante el lenguaje verbal. De este modo, *"Paloma llevaba 38 cajas de fruta en la furgoneta. Deja 15 cajas en una frutería. ¿Cuántas cajas le quedan?"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso), sería un ejemplo de problema, pero 38 - 15 = ¿?, sería un ejercicio de cálculo desligado de un contexto lingüístico y situacional.

Asimismo, siguiendo a Orrantia et al., 2005, tareas expresadas mediante el lenguaje verbal como *"¿Cuánto dinero hay en la hucha? Datos: 7 monedas de 10 céntimos y 3 billetes de 10 euros"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3º curso), tampoco fueron codificados como problemas puesto que, aunque la descripción sea verbal, no se hace referencia a un contexto problemático significativo, sino más bien a un cálculo numérico.

En ocasiones, los problemas no aparecían expresados de forma totalmente verbal. Sobre todo, en los primeros cursos, era habitual la introducción de elementos pictóricos, que daban lugar a combinaciones entre palabras e imágenes. En estos casos también se siguieron los criterios establecidos en el estudio de Orrantia et al., 2005:

a) Sí fueron incluidas en el análisis situaciones problemáticas en las que los datos se presentaban con dibujos. Por ejemplo, dos cajas de gusanos: en la primera, el dibujo de un gusano y una etiqueta con el numeral 9 (**9**); en la segunda, el dibujo de un gusano y una etiqueta con el numeral 4 (**4**); y la pregunta: *"¿cuántos gusanos de seda hay en total?"* (Editorial Santillana. Libro del alumno. 1º curso). Sin embargo, no fue aceptada como premisa: (dibujo de nueve gusanos).

b) No fueron incluidas situaciones que no se presentaban como realmente problemáticas, al no aparecer una pregunta explícita, por ej. *"Aprendo a resolver problemas. Escribe los números"*. Dibujo de una maleta (); dibujo de cinco maletas (); dibujo de seis maletas (). Frase para completar con números: "(…) maleta y (…) maletas son (…) maletas". Espacios para escribir los sumandos y el resultado: "(…) + (…) = (…)" (Editorial S.M. Libro del alumno, 1º curso).

Asimismo, de acuerdo con el criterio adoptado en el estudio de Orrantia et al. (2005), no se codificaron como problemas aquellas situaciones en las que no aparecía explícitamente la pregunta, aunque la descripción fuera totalmente verbal, por ej. *"Problemas con porcentajes. Calcula los nuevos precios de cada artículo. Después, contesta. En los grandes almacenes están de rebajas. Los artículos de precio superior a 150 € los han rebajado un 15 %, y los de precio inferior, un 8 %. Datos: bolso = 100 €; televisor = 300 €; bicicleta = 180 €; mp3 = 50€)"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5ºcurso).

También se tuvo en cuenta un criterio no contemplado en el estudio de Orrantia et al. (2005), al menos explícitamente. En algunos problemas, tras la presentación de la información, se formulaban varias preguntas, por ej. *"Una biblioteca tiene 715 socios adultos y 595 infantiles. ¿Cuántos socios adultos hay más que infantiles? ¿Cuántos socios hay en total en la biblioteca?"* (Editorial S.M. Libro del alumno, 3º curso). En estos casos, el problema se codificó tantas veces como preguntas se planteaban, ya que la pregunta determina la estructura semántica del problema, dando lugar a categorías diferentes. De este modo, de acuerdo con la primera pregunta del ejemplo, el problema es de comparación 1; mientras que, de acuerdo con la segunda pregunta, el problema es de combinación 1.

Por último, fueron codificadas las situaciones problemáticas que aparecían resueltas en el libro de texto para ejemplificar, mediante la aplicación de un algoritmo, un contenido introducido en la unidad didáctica. Aunque estas situaciones apareciesen resueltas, ofrecían al alumnado la oportunidad de conocer o reconocer un tipo concreto de problema.

IV.3.3. Codificación

- **Variable 1: estructura semántica de los problemas**

Como hemos apuntado en el segundo capítulo de esta tesis, los PAVs de estructura aditiva pueden clasificarse en función de su estructura semántica (véase epígrafe II.3) siendo ésta uno de los principales factores explicativos de su dificultad (véase epígrafe II.3.3). Para el análisis de esta variable, se codificaron tanto los PAVs de estructura aditiva simples o de una operación como los PAVs compuestos de dos o más operaciones (véase codificación en Anexo II, primera columna).

Los PAVs de estructura aditiva simples fueron codificados de acuerdo con cuatro categorías: problemas de cambio, combinación y comparación (Heller y Greeno, 1978) y problemas de igualación (Carpenter y Moser, 1983). En total, se contaba con veinte tipos diferentes de problemas, teniendo en cuenta que estos autores distinguen dos problemas de combinación, y seis problemas de cambio, comparación e igualación, respectivamente.

A pesar de que los problemas de combinación 1 y 2 con tres o más partes pueden considerarse problemas compuestos, siguiendo a Orrantia et al. (2005), estos problemas fueron codificados en la categoría de problemas simples de combinación, puesto que la estructura semántica básica no cambia (parte, parte…todo), por ej. *"Celia ha hecho un centro de flores. Ha utilizado 6 margaritas, 4 rosas y 8 lirios. ¿Cuántas flores ha utilizado en total?"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).

Para la codificación de los PAVs de estructura aditiva compuestos, se siguió el sistema de categorización propuesto por Orrantia et al. (2005), también descrito en el segundo capítulo de esta tesis (véase epígrafe II.3.2). Este sistema recoge once categorías de problemas, no obstante, como advierten los autores, pueden identificarse nuevas categorías, bien combinando diferentes categorías simples, bien combinando diferentes categorías compuestas.

Puesto que nuestro estudio se centra en el análisis de los PAVs de estructura aditiva (suma y resta), no fueron incluidos los problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división), por ej. *"En un parque hay 8 filas. En cada fila hay 5 pinos. ¿Cuántos pinos hay en el parque?"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3º curso). Sin embargo, sí se incluyeron los problemas de dos o más operaciones donde aparecían estructuras aditivas combinadas con estructuras multiplicativas, por ej. *"Fabiana trabaja en una librería. Cada día, por la mañana, manda 9 correos con los nuevos pedidos y, por la tarde, manda otros 6* *correos nuevos. ¿Cuántos correos manda en total de lunes a viernes?"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3º curso). Este tipo de problemas se codificaron dentro de la categoría correspondiente a su estructura aditiva, en este caso combinación 1. Todos los problemas de este tipo aparecen indicados entre paréntesis en las tablas de resultados.

- **Variable 2: grado de desafío de los problemas**

El interés de esta segunda variable radica en la visión que ofrecen los libros de texto acerca del grado de desafío subyacente a los problemas que resuelven los alumnos en el aula. Con la expresión "grado de desafío" nos referimos a aquellos problemas que van más allá de la selección de datos y la ejecución de la operación correspondiente (véase codificación en Anexo II, segunda columna). Para el análisis de esta variable también partimos del sistema de categorización utilizado en el estudio de Orrantia et al. (2005), que contempla las categorías generales que se recogen en la figura 13: información e invención. No obstante, durante el análisis nos encontramos con problemas cuyas demandas contenían abundantes matices, que también fueron consideradas en la codificación siempre y cuando constituyeran un verdadero "desafío", dicho de otro modo, siempre que la tarea requiriera de un cierto grado de razonamiento.

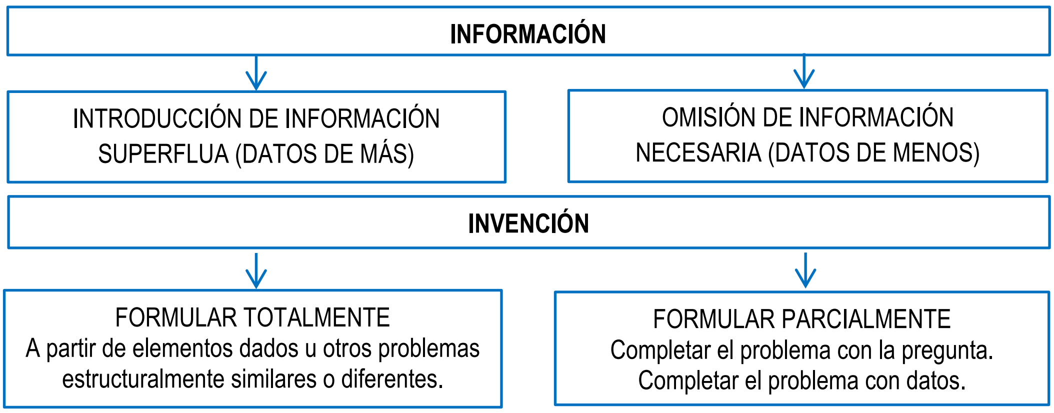


Figura 13. Categorías de problemas según la naturaleza del desafío. Elaboración propia.

- Información: problemas con datos de más.

En el problema aparece información irrelevante que debe ser descartada para una correcta resolución. Ejemplo, *"Hemos contado 43 gazapos y 9 conejas en la conejera. Todos los gazapos son grises, menos 19 que son blancos ¿Cuántos gazapos grises hay?"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 2º curso).

- Información: problemas con datos de menos.

En el problema se omiten informaciones necesarias para su resolución. Ejemplo, “En una sala de cine hay 175 butacas. Si en la última sesión no se han ocupado todas, ¿cuántas butacas hay vacías?”. (Editorial Santillana, Libro del alumno, 3º curso).

- Invención: formular totalmente.

Formular un problema a partir de elementos dados (datos y/o preguntas). Por ej. *“¿Cuánto cuestan las entradas de los niños menos que la de los adultos?” Datos: entrada de niños 8 euros y entradas de adultos 12 euros”* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso); o formularlo a partir de otro problema con la misma o diferente estructura semántica. Ejemplo, *“Escribe un problema similar a los de esta página que se pueda resolver representando gráficamente los datos”* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).

- Inventar parcialmente: completar el problema con la pregunta.

Ejemplo *“En un hotel esperan alojar a 560 turistas hoy. Ya hay 325 instalados desde ayer y esta mañana han llegado 136. El resto llegará por la tarde”* (Editorial S.M. Libro del alumno, 3º curso).

- Inventar parcialmente: completar el problema con la pregunta, dada la operación que resuelve el problema.

Ejemplo: *“Los voluntarios de la operación kilo han recogido 179 kg de alimentos hoy. A lo largo de la semana han recogido 637 kg en total. (Operación: 637-179)”* (Editorial S.M, Libro del alumno, 3º curso).

Inventar parcialmente: inventar una pregunta sin utilizar todos los datos del enunciado.

Ejemplo, *“Marta tiene 12 años, su hermano Juan 9 años, su prima Sara 7 años y su primo Alberto 4 años”* (Editorial Santilla. Libro del alumno, 4º curso).

- Inventar parcialmente: inventar preguntas intermedias en problemas de más de una operación.

Ejemplo, *“En una carrera ciclista, los cuatro corredores del equipo bebieron 28 botellas de agua de un cuarto de litro. César bebió un litro y 3/4 de litro; Alberto dos litros y 1/4 de litro; David, dos litros, y Luis, el resto. ¿Qué cantidad de agua bebió Luis?”* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 5º curso).

- Inventar parcialmente: elegir la pregunta, dadas varias alternativas de respuesta.

Ejemplo, *"Nerea tiene un vídeo de animales venenosos que dura 115 minutos y Carla tiene un vídeo sobre reptiles que dura 97 minutos. Elige y subraya la pregunta. ¿Cuántos animales venenosos salen en el video? ¿Cuántos minutos dura el vídeo de Carla? ¿Cuántos minutos más dura el vídeo de Nerea que el de Carla?"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 2º curso).

- Inventar parcialmente con datos.

Ejemplo, *"Una veterinaria atendió ayer a (...) mascotas. La mayoría de ellas (...) fueron perros y el resto fueron (...) ¿A cuántos (...) más que (...) atendió la veterinaria?"* (Editorial Santillana, Libro del alumno, 3º curso).

La categoría de invención ha sido denominada de diversas formas: "formulación" (Kilpatrick, 1987), "generación" (Silver, 1994), "planteamiento" (Bronw y Walter (1990); asimismo, han sido abundantes los criterios utilizados por la investigación en educación matemática para clasificar este tipo de tareas (para esta cuestión, véase la revisión realizada por Ayllón, 2012). Como hemos comentado, para la codificación de esta variable, hemos seguido la propuesta inicial de Orrantia et al. (2005). No obstante, hemos incluido también una categoría que aparecía con cierta frecuencia y que denominamos "reconstrucción". Se trata de problemas con enunciados incoherentes textualmente, bien porque las proposiciones del problema, bien porque los datos, no siguen un orden lógico.

Ejemplo, *"Después, subió siete plantas. ¿En qué planta se subió? Si, tras todo esto, Margarita se bajó del ascensor en la quinta planta. Primero bajó cuatro plantas y, a continuación, bajó una planta más. Margarita entró en el ascensor de unos grandes almacenes"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 6º curso).

Ejemplo, *"En la fábrica trabajan 400 días de los 340 días de cada año. Cada día envasan 13 botes, que venden a 365 euros cada uno. ¿Cuánto dinero obtienen al año por la venta?"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 4º curso).

En ocasiones, también nos encontramos con problemas en los que se demandaba a los alumnos una tarea con un doble desafío. Se trata de diferentes combinaciones de los tipos de desafío anteriores, que se muestran en la siguiente figura:

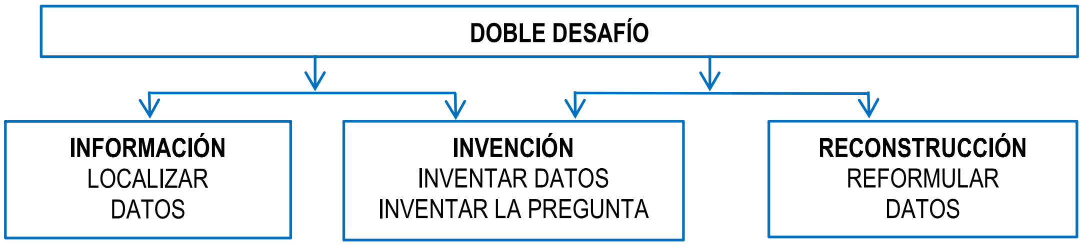


Figura 14. Combinaciones de tipos de desafíos presentados en los problemas. Elaboración propia.

- Información e invención: averiguar el dato que sobra (dato de más), e inventar el dato que falta (dato de menos).

Ejemplo, *"Un depósito de gasolina se ha llenado en dos días. El primer día echaron el doble de gasolina que el segundo. Ayer se vendieron 765 l, y hoy, 813 l. ¿Cuánto cuesta la gasolina que queda en el bidón?"* (Imagen: bidón con 9.900 litros) (Editorial S.M. Libro del alumno, 4º curso).

- Información e invención: averiguar el dato que sobra (dato de más) e inventar una pregunta con ese dato.

Ejemplo, *"Marta tenía 50 euros, Salva 35 euros y Lucas 48 euros. Los tres fueron de compras y Salva compró un juego de mesa por 27 euros. ¿Cuánto dinero le quedó a Salva?"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 4º curso).

- Reconstrucción e invención: ordenar los datos del enunciado e inventar el dato que falta (datos de menos).

Ejemplo, *"Cuatro amigos se han colocado en fila, ordenados de mayor a menor estatura. Jon mide 128 cm, Maite mide 145 cm, Toñi 137 cm y Paco algo menos que Toñi. ¿Cuál es la suma de las estaturas de los cuatro amigos?"* (Editorial Santillana, Libro del alumno, 3º curso).

- Reconstrucción e invención: ordenar los datos del enunciado e inventar la pregunta.

Ejemplo, "*Micaela entrenó durante tres días. El primero entrenó menos, 45 minutos; el segundo algo más, 29 minutos, y el tercero aún más, 32 minutos"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso).

- **Variable 3: contexto situacional de los problemas**

Para la codificación de esta variable se aplicaron las mismas categorías establecidas en el estudio de Orrantia et al. (2005) Véase la codificación en Anexo II, tercera columna.

Los problemas estándar son aquellos que están desprovistos de cualquier tipo de información situacional. Se trata de problemas muy escuetos desde el punto de vista de la información que proporcionan: únicamente premisas con datos y preguntas. Según Staub y Reusser (1995), en estos problemas toda la información necesaria para resolver el problema está presente en el enunciado y toda la información del enunciado es necesaria para la resolución. Sin embargo, como hemos visto en el segundo capítulo de esta tesis, los problemas estándar pueden enriquecerse mediante la inclusión de información situacional:

- Descripción: información descriptiva referida a los personajes; p.ej. *"Teo y Pepa son granjeros (...)"* (Editorial Santillana, Libro del alumno, 2º curso).
- Intención: información intencional referida a necesidades, fines, metas, propósitos o motivos del protagonista; p.ej. *"Iván quiere comprar unas gafas de bucear* (…)" (Editorial Santillana. Libro del aluno, 2º curso).
- Acción: información referida a las acciones e interacciones con coactores, objetos e instrumentos; p.ej. *"Alejandra está completando un puzle del sistema solar"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 1º curso).
- Causa: información referida a las relaciones causales entre personajes o acontecimientos; p.ej. "*Un agricultor ha recogido 450 kilos de uvas. Ha retirado 63 kilos por estar estropeadas* (…)" (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso).
- Tiempo: Información que alude a la estructura temporal en los problemas de cambio más allá de los marcadores de tiempo; p.ej. *"En un autobús había 42 personas. Al llegar a la parada* (…)" (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).

Igualmente, fueron codificadas las posibles combinaciones de las categorías anteriores:

- Acción + Intención; p.ej. *"Esta semana recogimos dinero para ayudar a los niños de un país donde ha ocurrido una inundación (...)"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 1º curso).
- Intención + Acción; p.ej. *"Para celebrar su cumpleaños, Gema está pasando el día con sus amigos (...)"* (Editorial Santillana. Libro del aluno, 2º curso).
- Causal + Acción; p.ej. *"Por su cumpleaños, Daniel ha invitado a sus amigos a merendar (...)"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).
- Acción + Descriptivo; p.ej. *"En las fiestas del pueblo han hecho un concurso de cocina al aire libre. Es un concurso muy especial. ¡Todo es enorme! (...)"* (Editorial S.M. Libro del alumno, 1º curso).

- **Variable 4: rol del problema**

En ocasiones, las tareas propuestas por los libros de texto aparecen agrupadas bajo epígrafes (p.ej. "problemas"; "resuelvo problemas", etc.) cuando en realidad se trata de *ejercicios* cuyo objeto suele ser la aplicación de conceptos, fórmulas o algoritmos matemáticos tratados en las últimas clases. Asimismo, otra práctica habitual en los libros de texto, que desvirtúa el verdadero rol de los problemas, es su presentación en contextos donde los alumnos pueden anticipar la operación con la que resolverán el problema, incluso antes de su lectura (p.ej. aparece un epígrafe que indica: "sumas de tres números").

Este tipo de situaciones, junto con las tres variables que acabamos de describir, hace que nos cuestionemos cuál es el verdadero rol de los problemas en los libros de texto: ¿la función del problema es el desarrollo del razonamiento, o un pretexto para la ejecución de la última operación aritmética estudiada? A pesar de que se ha reparado sobre este asunto en numerosas ocasiones, esta cuestión no se ha tratado todavía de forma expresa en el contexto de los libros de texto españoles, al menos hasta donde llega nuestro conocimiento. Sin embargo, estudios realizados en otros países han demostrado que el criterio adoptado por los libros de texto para agrupar los problemas es la última operación estudiada, desvirtuando así la verdadera naturaleza del problema (Säljö y Wyndhamn, 1987; Schoenfeld, 1991; Sowder, 1988; Stern, 1992; Stigler et al., 1986). Asimismo, otros estudios han comprobado que suele ser frecuente la presencia de ciertas "palabras clave", que anuncian al alumno el algoritmo que debe aplicarse para llegar a la solución, sin necesidad de una comprensión genuina del problema (Hegarty et al., 1995; Nesher y Teubal, 1975; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992).

Con el propósito de dilucidar en qué medida los problemas presentados por los libros de texto constituyen verdaderos desafíos, o por el contrario su función está más bien orientada a la práctica de ejercicios, nos planteamos estudiar esta cuarta variable, cuya codificación puede verse en el Anexo II, cuarta columna. Para ello, establecimos un sistema de categorización que contemplaba las siguientes situaciones:

A. Situaciones ocultas

Se trata de ejercicios, que bajo diferentes epígrafes son presentados, y por tanto considerados como problemas por el libro de texto. Por ejemplo:

Editorial Santillana: *"Problemas"; "Solución de problemas"; "Problemas. Resuelve"; "Problemas. Lee y resuelve"; "Problemas. Piensa y resuelve"; "Problemas. Piensa y contesta".*

Editorial Anaya: *"Problemas"; "Resuelvo problemas"; "Resuelvo problemas. Lee y resuelve"; "Aprendo a resolver problemas".*

Editorial S.M: *"Problemas"; "Resuelvo problemas"; "Aprendo a resolver problemas"; "Problemas. Me entreno antes de resolver"; "Problemas. Leo, pienso y resuelvo"; "Problemas. Estrategias"; "Problemas. Utiliza tus estrategias".*

Su principal finalidad es el aprendizaje de los contenidos estudiados en una unidad temática concreta, mediante la práctica más o menos repetitiva de ejercicios como: calcular, contar, ordenar, comparar, aproximar cantidades, transformar unidades de medida, etc.

No se ajustan a la definición de problema propuesta en el marco teórico de esta tesis pues, aunque se presentan en forma de descripción verbal y plantean una o más preguntas (en forma directa o indirecta) la solución no se halla mediante la aplicación de operaciones aritméticas a los datos disponibles en el enunciado. Veamos algunos ejemplos:

Epígrafe: *"Resuelvo problemas".* Tarea: "*En una línea de metro pasan tres trenes en una hora. En el primero viajaban 23 personas, en el segundo 21 y en el tercero, 35. ¿En qué tren viajaban más personas?"* (Editorial S.M. Libro del alumno, 1º curso) Finalidad de la tarea: comparación de números de dos dígitos.

Epígrafe: *"Problemas".* Tarea: *"Laura reparte una chocolatina de 8 onzas entre sus amigos. Juan y Sara comen 2 onzas cada uno, Antón 3, y Laura 1. ¿Qué fracción come cada uno? Ordénalas de menor a mayor"*. Finalidad de la tarea: expresión y comparación de fracciones.

Este tipo de situaciones fueron codificadas con la letra "A". Véase Anexo II, cuarta columna.

B. Situaciones explícitas

Se trata de situaciones "problemáticas" en las que el libro de texto informa explícitamente, bajo diferentes epígrafes, del algoritmo que el alumno debe aplicar, de manera que el problema se convierte en un pretexto para la ejercitación de las operaciones aritméticas: *"situaciones de suma"; "sumas con números hasta el 19"; "problemas de suma y resta"; "restas contando a partir del sustraendo"; "sumas de tres números"; "sumas con números de dos cifras"; "problemas de resta"; "sumas sin llevar"; "restas sin llevar"; etc.* Algunos ejemplos:

Epígrafe: *"Resta de números decimales" "Alberto tenía 18,65 €. Se compró un balón por 7,90 €. ¿Cuánto dinero le quedó?"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3º curso).

Epígrafe: *"La suma con llevadas" "Fernando colecciona postales. Tiene 284 postales de flores y 768 de animales ¿Cuántas postales tiene?"* (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3º curso).

En otras ocasiones, la relevancia de todo el proceso de resolución se reduce a la aplicación del algoritmo. En estos casos, los libros de texto hacen uso de diversos epígrafes donde la "problematicidad" consiste en decidir si el problema es aditivo o sustractivo.

Ejemplos:

Epígrafe: *"Piensa si tienes que sumar o restar y resuelve" "Alicia tiene una cinta que mide 12 centímetros. Corta un trozo de 5 centímetros. ¿Cuántos centímetros de cinta quedan? Solución. Quedan (...)"* (Editorial Santillana. Libro del alumno, 1º curso).

Epígrafe: *"Aprendo a resolver problemas. ¿Qué operación resuelve el problema?" "Marca: María guardó 6 pelotas y después otras 3 más. ¿Cuántas pelotas guardó?"* (Opciones para marcar: suma/resta). (Editorial S.M. Libro del alumno, 1º curso).

Por último, situaciones donde la información del algoritmo que resuelve el problema, se inserta en el propio enunciado. Ejemplo:

"Olga compra un cuaderno y un rotulador. ¿Cuánto tiene que pagar? (Precio del cuaderno 1.45 euros y precio del rotulador 0.80). Expresa todos los precios en céntimos y <u>después suma</u>. Tiene que pagar (...) euros y (...) céntimos." (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).

Este tipo de situaciones fueron codificadas con la letra "B". Véase Anexo II, cuarta columna.

IV.3.4. Fiabilidad

Para asegurar que el proceso de codificación de los problemas tuviese las suficientes garantías, se llevó a cabo un procedimiento de fiabilidad interjueces. En primer lugar, el autor de la tesis realizó la codificación de todos los problemas identificados tras el vaciado de los libros de texto, en todas las variables mencionadas en el epígrafe anterior. Posteriormente, y de manera independiente a la codificación del autor, el primer director de la tesis doctoral llevó a cabo la codificación de 120 problemas, seleccionados de forma aleatoria entre el conjunto de problemas incluidos en la unidad de análisis, lo que representa un 10% del total. A continuación, se calculó el índice Kappa de Cohen para determinar el grado de acuerdo entre ambas codificaciones en las diferentes variables evaluadas. Este índice tiene en cuenta, no sólo el grado de acuerdo entre jueces, sino también el grado de acuerdo que puede atribuirse al azar, proporcionando así un indicador más fiable que únicamente el porcentaje de acuerdo.

El cálculo se realizó con el paquete estadístico SPSS. Los resultados se muestran en la tabla 19.

Tabla 19. Valor e interpretación del índice Kappa de Cohen para el acuerdo entre dos jueces. Autor de la tesis y uno de los directores.

Acuerdo entre los dos evaluadores en los 120 problemas.	**% global de acuerdo**	**κ de Cohen**	**I.C. (95%)**	**Rango concordancia (Landis y Koch, 1977)**
Estructura Semántica	88.33%	.83	(.76 -.90)	Casi perfecto
Grado Desafío	95.83%	.94	(.90 -.99)	Casi perfecto
Información Situacional	90.83%	.89	(.93-.95)	Casi perfecto

Finalmente, cuatro doctores en educación o psicología de la educación accedieron de manera voluntaria y desinteresada a realizar una serie de tareas en las que les solicitaba codificar una selección de los problemas que componen la unidad de análisis de la presente tesis. Véase Anexo IV, tareas 1 a 3.

En concreto, cada colaborador realizó las siguientes tareas:

a) Codificar diez problemas de acuerdo con su estructura semántica.

b) Determinar el tipo de desafío que presentaban cinco problemas.

c) Indicar el tipo de información situacional introducido en cinco problemas.

La variable correspondiente al rol del problema no se sometió al procedimiento de fiabilidad interjueces, dado que las señales que acompañaban a estas tareas resultaban suficientemente explícitas. Estas tareas, como hemos apuntado, se presentaban al alumnado bajo epígrafes del tipo: *"Resuelvo problemas"; "Aprendo a resolver problemas"; "Situaciones de suma"; "Restas sin llevar",* etc.

Los problemas codificados por cada uno de los colaboradores fueron seleccionados de manera aleatoria de entre total de problemas que componían la unidad de análisis. Con el objetivo de cubrir un mayor número de problemas en total, los problemas que codificaron cada uno de los evaluadores fueron diferentes. Por tanto, en total se codificaron 40 problemas en la tarea a; y 20 problemas diferentes para las tareas b y c.

Como pretendíamos utilizar el mismo instrumento de fiabilidad para los estudios 1 y 2, los problemas fueron seleccionados de forma aleatoria, tanto del conjunto de problemas de los libros de texto del alumno (estudio 1 de la tesis) como del conjunto de problemas de las pruebas de evaluación de las guías del profesor (estudio 2 de la tesis).

Una vez realizada esta tarea por parte de los cuatro evaluadores, se siguió el mismo procedimiento que en el caso anterior para calcular el índice Kappa de Cohen como indicativo de la fiabilidad de los 4 jueces. Los resultados de este acuerdo se muestran en la tabla 20.

Tabla 20. Valor e interpretación del índice Kappa de Cohen para el acuerdo entre cinco jueces. Autor de la tesis y cuatro doctores en educación y psicología de la educación.

Acuerdo entre los cinco jueces. Autor de la tesis + 4 jueces.	**% global de acuerdo**	**κ de Cohen**	**I.C. (95%)**	**Rango concordancia (Landis y Koch,1977)**
Estructura Semántica (10 problemas)	68%	.67	(.51 - .83)	Sustancial
Grado Desafío (5 problemas)	100%	1	-	Perfecto
Información Situacional (5 problemas)	84%	.82	(.60 - .1)	Casi perfecto

IV.4. Resultados

■ Análisis de la estructura semántica

Los resultados correspondientes a la estructura semántica del total de 1.900 problemas analizados se presentan en la tabla 21.

Dentro de las distintas categorías de problemas simples, la más frecuente es la combinación, (40.0%) seguida de la de cambio (31.4%) y con una diferencia notable se sitúan las categorías de comparación (13.2%) e igualación (0.90%) esta última apenas inexistente.

En referencia a la categoría de combinación, el subtipo combinación 1 (33.89%) de naturaleza consistente, es el que provoca que esta categoría sea la más frecuente, dado que el subtipo combinación 2 (6.15%) inconsistente, es uno de los subtipos que con menor frecuencia aparece en todos los niveles educativos.

Con respecto a la categoría de cambio, la mayor proporción de problemas aparece en el subtipo cambio 2 (21.21%) seguido con una proporción más baja del subtipo cambio 1 (10.05%), ambas de naturaleza consistente. El resto de subcategorías de cambio son apenas inexistentes. En cuanto a la categoría de comparación, el subtipo más numeroso es el de comparación 1 (7.10%) inconsistente.

Tabla 21. Resultados de la frecuencia y variabilidad de la estructura semántica de los problemas analizados por niveles educativos.

	1º curso		**2º curso**		**3º curso**		**4ºcurso**		**5ºcurso**		**6ºcurso**		**TOTAL**
CA1	27		9(6)		35(6)		35(1)		9(15)		33(15)		
CA2	47	CA=74	46	CA=61	49(38)	CA=130	26(55)	CA=117	27(68)	CA=119	18(29)	CA=96	CA=31.40%
CA4		38.3%		21.1%	1	28.5%		30.3%		34.4%		41.3%	
CA6					1						(1)		
CB1	84	CB=92	111(10)	CB=141	43(103)	CB=196	67(70)	CB=151	40(60)	CB=113	9(47)	CB=68	CB=40.0%
CB2	8	47.6%	20	48.7%	48(2)	43%	3(11)	39.1%	3(10)	32.7%	6(6)	29.3%	
CP1	5		41(2)		27(6)		17(6)		16(8)		4(3)		
CP2	1	CP =23	16	CP=75	9(3)	CP=66	6(3)	CP=37	7(2)	CP=38	1	CP=14	CP=13.20%
CP3	10	11.9%	10	26%	7	14.5%	2	9.5%	2	11%	2(1)	6%	
CP4	7		6		10(2)		2(1)		2(1)		2(1)		
CP5					2								
IG1	2	IG=2	2	IG=2	3(3)	IG=9	(1)	IG=2	(2)	IG=2		IG=17	IG=0.90%
IG2		1%		0.6%	3	2%	(1)	0.5%		0.5%			
TOTAL SIMPLES	191	98.90%	261(18)	96%	238(163)	88%	158(149)	79.50%	106(166)	78.80%	75(103)	76.70%	1628 (85.50%)
CONSISTENTES	176	91.1%	214	74%	340	74.7%	269	69.6%	233	67.5%	158	68.1%	1390
INCONSISTENTES	15	7.7%	65	22.4%	61	13.4%	38	9.8%	39	11.3%	20	8.6%	238
A	2	1%	4	1.3%	23(5)	6.1%	40(18)	15%	20(21)	11.8%	6(29)	15%	8.80%
B			4	1.3%	9(2)	2.4%	5(1)	1.5%	5(6)	3.1%	7(7)	6%	2.40%
C			2	0.6%	6	1.3%	2	0.5%	1(1)	0.5%			0.60%
D					5	1%	3	0.7%	2	0.5%	2	0.8%	0.60%
E					4	0.8%	5(1)	1.5%	4(5)	2.6%	(2)	0.8%	1.10%
F							3(1)	1%	2(3)	1.4%	(1)	0.43%	0.50%
G									(1)	0.2%			0.05%
I									1(1)	0.5%			0.10%
TOTAL COMPUESTOS	2	1%	10	3.40%	47(7)	11.80%	58(21)	20.40%	35(38)	21.10%	15(39)	23.20%	272 (14.50%)
TOTAL	193	10.10%	271(18)	15.20%	285(170)	24%	216(170)	20.30%	141(204)	18.10%	90(142)	12.20%	1196(704)

CA = Cambio; CB = Combinación; CP = Comparación; IG = Igualación. Entre paréntesis: problemas con estructura aditiva + multiplicativa

.

El resto de subtipos, o tienen una presencia mínima, comparación 2 (2.52%) comparación 3 y 4 (1.78%); o nula, comparación 5 y 6 (0.10% y 0%, respectivamente).

Los problemas de igualación son los que presentan los índices más bajos tanto con respecto a la frecuencia como a la variabilidad, pues de los seis subtipos sólo son incluidos con porcentajes mínimos el subtipo igualación 1 (0.68%) e igualación 2 (0.22%).

En síntesis, de acuerdo con la hipótesis de la consistencia propuesta por Lewis y Mayer (1987), descrita en el segundo capítulo de esta tesis (epígrafe II.3.3), del total de problemas simples analizados (1628) el 85.3% son consistentes, frente al 14.6% que resultan ser inconsistentes, más difíciles de resolver.

Por otro lado, tal como se puede observar en la tabla 21, los problemas mixtos que combinan estructuras aditivas y multiplicativas (aparecen en la tabla 21 entre paréntesis) comienzan a ser incluidos por las editoriales a partir del 2º nivel de Educación Primaria, momento en que se introduce en el currículo del área de matemáticas (último trimestre de este nivel) el algoritmo de la multiplicación. Los primeros problemas con ambas estructuras que se incluyen en los libros de texto son los de combinación 1 y cambio 1, y en menor medida, los de comparación 1. A partir del 3º nivel se introducen los problemas de cambio 2 y combinación 2, comparación 2 y 4, e igualación 1.

Un resultado relevante se refiere a la diferencia en cuanto a la frecuencia de los problemas simples, que representan un 85.5% del total, frente a los compuestos, que aparecen en una proporción mucho menor, un 14.5%. Además de la baja frecuencia de los problemas compuestos, otro dato destacable es su escasa variabilidad. Si bien es cierto que de las once categorías de problemas compuestos propuestas por Orrantia et al. (2005) las tres editoriales analizadas incluyen ocho de ellas, las proporciones son tan bajas que nos llevan a concluir que esta variabilidad sólo es aparente. En realidad, la mayor parte de los problemas compuestos se concentran en la categoría A (8,80%) y B (2.40%). El resto de categorías muestran valores que oscilan entre 0.05% y 1.10%. Asimismo, es importante destacar que en prácticamente todos los problemas de la categoría A, la estructura principal es de cambio 1 ó 2 (más fáciles); en la categoría B, los cambios que se repiten sucesivamente también son del subtipo 1 y 2, en ningún momento aparece el resto de subtipos de cambio.

Por lo que respecta al análisis por editoriales (véase tabla 22) Santillana es la editorial que incluye un mayor número de problemas en sus libros de texto, un total de 988 problemas (52%), dato que representa más del doble de los problemas incluidos por las otras dos editoriales: S.M, 487 problemas (25.6%) y Anaya, 425 problemas (22.3%).

Tabla 22. Resultados de la frecuencia y variabilidad de los problemas por editoriales.

	SANTILLANA		**ANAYA**		**S.M**	
CA1	33(14)		41(15)		75(6)	
CA2	120(118)	CA =286	40(50)	CA =146	54(29)	CA =166
CA3		29%		34.3%		34%
CA4					1	
CA6	(1)				1	
CB1	151(154)	CB=394	92(63)	CB=167	112(73)	CB= 202
CB2	67(22)	39.8%	7(5)	39.2%	13(4)	41.4%
CP1	50(17)		28(1)		32(7)	
CP2	19(7)	CP=137	6(1)	CP=43	9	CP=67
CP3	18(1)	13.8%	4	10.1%	11	13.7%
CP4	20(5)		3		6	
CP5					2	
IG1	(3)	IG= 4	6	IG=6	3(3)	IG=7
IG2	(1)	0.4%		1.4%	1	1.7%
TOTAL SIMPLES	478(343)	83%	227(135)	85.1%	320(122)	90.7%
CONSISTENTES	661	67%	315	74.1%	377	77.4%
INCONSISTENTES	160	16.1%	47	11%	65	13.3%
A	54(42)	9.7%	24(19)	10.1%	17(12)	6.0%
B	19(8)	2.7%	4(3)	1.6%	7(5)	0.4%
C	9(1)	1.%	1	0.2%	1	0.2%
D	6(2)	0.8%	4(1)	1.1%	2	0.4%
E	9(8)	1.7%	3	0.7%	1	0.2%
F	4(3)	0.7%	1(2)	0.7%		
G			(1)	0.2%		
I	2	0.2%				
TOTAL COMPUESTOS	103(64)	17%	37(26)	14.8%	28(17)	9.2%
TOTAL	581(407)	988 (52.0%)	264(161)	425 (22.3%)	348(139)	487 (25.6%)

CA = Cambio; CB = Combinación; CP = Comparación; IG = Igualación. Entre paréntesis: problemas con estructura aditiva + multiplicativa.

En las tres editoriales los problemas más frecuentes son los de combinación: S.M (41.4%) Santillana (39.8%) y Anaya (39.2%). Ahora bien, dentro de esta categoría existen diferencias notables entre la editorial Santillana, que incluye 89 problemas de combinación 2, (22.6%) inconsistentes y las editoriales S.M y Anaya que únicamente incluyen 17 (8.4%) y 12 (7.8%) problemas de este subtipo respectivamente.

La segunda categoría de problemas más frecuente en las tres editoriales son los problemas de cambio, sin diferencias notables: Anaya (34.3%) S.M (34%) y Santillana (29%). En las tres editoriales los subtipos más frecuentes son las de cambio 2 y 1. La editorial Santillana incluye también los problemas de cambio 6, y S.M los problemas de cambio 4 y 6, pero en una proporción tan baja que resulta irrelevante para el análisis.

En este orden de frecuencia, los problemas de comparación ocupan el tercer lugar con resultados similares: Santillana (13.8%) S.M (13.7%) y Anaya (10.1%). Los problemas de comparación 1 (inconsistentes) son los más frecuentes en las tres editoriales. Ahora bien, al igual que ocurría con los problemas de combinación 2, con estos problemas también se produce una diferencia considerable entre la editorial Santillana, con 67 problemas de comparación 1 (49.6%), frente a las editoriales S.M y Anaya, con 39 (28.8%) y 29 (21.4%) problemas respectivamente.

En cuanto a la distribución de problemas de acuerdo con su consistencia e inconsistencia, los resultados indican una mayor proporción de problemas consistentes (más fáciles de resolver) en las tres editoriales, sin apenas diferencias: S.M (77.4%), Anaya (74.1%) y Santillana (67%).

Finalmente, el análisis de los problemas compuestos revela que, mientras que las editoriales Santillana (17%) y Anaya (14.8%) presentan porcentajes similares, S.M (9.2%) es la editorial que menos problemas de este tipo incluye. Como se puede observar en la tabla, la mayor parte de problemas compuestos en las tres editoriales corresponde a la categoría A, seguida de la categoría B. La presencia del resto de categorías de problemas compuestos en las tres editoriales es irrelevante.

- **Análisis comparativo del nivel de complejidad semántico-matemática de los PAVs de estructura aditiva simples.**

En la tabla 23 se muestra el análisis comparativo de los resultados de nuestro estudio con los resultados obtenidos en estudios precedentes respecto al nivel complejidad semántico-matemática de los PAVs de estructura aditiva presentados en los libros de texto.

Tabla 23. Análisis comparativo del nivel de complejidad semántico/matemático de los PAVs.

CATEGORÍAS PAVS	Orrantia et al. (2005)	Chamoso et al. (2013)	Vicente et al. (2018)	Estudio 1. (2019)
CAMBIO	19.03%	26.27%	25.28%	31.42%
CA 1	3.54%	6.22%	23.05%	10.05%
CA 2	13.43%	16.89%		21.21%
CA 3	0.97%	1.17%	1.37%	0
CA 4	0.70%	1.17%		0.05%
CA 5	0.22%	0.29%	0.86%	0
CA 6	0.11%	0.53%		0.10%
COMBINACIÓN	51.17%	55.30%	57.53%	40.05%
CO 1	40.08%	38.12%	40.08%	33.89%
CO 2	11.09%	17.18%	17.46%	6.15%
COMPARACIÓN	13.15%	17.26%	16.20%	13.31%
CP1	8.63%	7.57%	10.10%	7.10%
CP2	1.14%	3.70%		2.52%
CP3	1.25%	3.64%	5.95%	1.78%
CP4	2.05%	2.17%		1.78%
CP5	0.05%	0.06%	0.16%	0.10%
CP6	0	0.12%		0
IGUALACIÓN	4.05%	1.17%	0.89%	0.90%
IG1	3.77%	1.17%	0.89%	0.68%
IG2	0	0		0.21%

El primer resultado coincidente es que en los cuatro estudios el orden de frecuencia de presentación de las distintas categorías de problemas es el mismo: combinación, cambio, comparación e igualación. Además, en los cuatro estudios, es precisamente la subcategoría de combinación 1, de naturaleza consistente, la que provoca que la categoría general de combinación presente los porcentajes más altos de toda la muestra de problemas, puesto que la subcategoría de combinación 2, de naturaleza inconsistente, aparece en una proporción mucho más baja, especialmente en nuestro estudio. Esta es la principal diferencia entre nuestro estudio y los precedentes: el escaso porcentaje de problemas de combinación 2.

Con respecto a la categoría de problemas de cambio, en los cuatro estudios la mayor proporción de los problemas se concentran en las subcategorías de cambio 1 y 2 (ambas consistentes). Asimismo, excepto en el estudio de Vicente et al. (2018), donde los datos no permiten hacer esta diferencia, en los demás estudios la subcategoría de cambio 2 se presenta con una frecuencia considerablemente mayor que la subcategoría 1. Pero posiblemente, el resultado más importante con respecto a esta categoría es que en los cuatro estudios, tanto las subcategorías de cambio 3 y 4 (dificultad media) como los problemas de cambio 5 y 6 (dificultad alta) son apenas inexistentes, de manera que la variabilidad de esta categoría de problemas queda reducida a los problemas más fáciles de resolver (cambio 1 y 2).

En la categoría de comparación, los cuatro estudios también muestran resultados similares. Además, en los cuatro se produce el mismo efecto que ocurría con la categoría de cambio, esto es, la mayor proporción de problemas se concentra en las subcategorías de comparación 1 y 2, mientras que el resto de subcategorías de comparación, de dificultad media y alta, se presentan con una frecuencia muy baja. Así, al igual que la categoría de cambio, la categoría de comparación se caracteriza por una distribución muy desigual de las distintas subcategorías. Por último, en los cuatro estudios, la categoría de problemas de igualación es casi inexistente. De las seis subcategorías de problemas de este tipo, sólo aparecen los problemas de igualación 1, 2 y 3, en una proporción muy baja.

- **Análisis comparativo de la frecuencia y variabilidad de los PAVs de estructura aditiva compuestos.**

Con respecto a la frecuencia de los problemas compuestos, en el estudio de Orrantia et al. (2005) fueron analizados un total de 1749 PAVs (87.42% simples y 12.52% compuestos). En nuestro estudio se han analizado un total de 1900 PAVs (85.50% simples y 14.50% compuestos). Por tanto, los resultados referentes a la frecuencia de estas dos categorías de problemas en los libros de texto se muestran muy similares.

En cuanto a los resultados sobre la variabilidad de las diferentes categorías de problemas compuestos, al observar la tabla 24, se evidencia que en ambos estudios esta variabilidad es aparente. Decimos “aparente” porque, aunque todas las categorías de problemas están representadas, los porcentajes son tan bajos que la presencia de cada una de ellas resulta casi inexistente. En realidad, la presencia de los problemas compuestos se concentra en las categorías A y B, también con porcentajes muy bajos, que no suponen un nivel de dificultad elevado. Los problemas compuestos de la categoría A se componen de estructuras de combinación 1 y cambio 2 (consistentes); por su parte, en los problemas compuestos de la categoría B la estructura de cambio consistente se repite sucesivamente.

Tabla 24. Análisis comparativo de la frecuencia y variabilidad de los PAVs de estructura aditiva compuestos.

	CATEGORÍAS DE PAVS DE ESTRUCTURA ADITIVA COMPUESTOS								
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Orrantia et al. (2005)	5.60%	3.31%	1.50%	0.57%	0.40%	0.74%	0.05%	0.11%	0.05%
Tesis (2019)	8.80%	2.40%	0.60%	0.60%	1.10%	0.50%	0.05%	0.00%	0.10%

- **Análisis del grado de desafío**

Tal como se aprecia en la tabla 25, el número de problemas que presentan algún tipo de desafío es muy escaso. Del total de 1900 problemas analizados, en tan solo 402 (21%) se propone algún tipo de tarea que vaya más allá de la elección y aplicación de la operación.

Tabla 25. Resultados de la frecuencia y variabilidad de problemas que presentan algún grado de desafío por niveles educativos y editoriales.

SANTILLANA

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	TOTAL
DATOS MÁS	2						2(1%)
DATOS MENOS		3	9				12(5.6%)
INV.TOTAL		3	28	11	6		48(22.6%)
INV.PARCIAL	4	1	61	6	14	19	105(49.5%)
RECONSTRUIR			8	5			13(6.1%)
DOBLE DESAFÍO			10	12	10		32(15%)
TOTAL	6(2.8%)	7(3.3%)	116(54.8%)	34(16%)	30(14.1%)	19(9%)	212(52.7%)

ANAYA

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	TOTAL
DATOS MÁS	4	4		3	3	1	15 (20.3%)
DATOS MENOS		2	1				3(4.0%)
INV.TOTAL		4	6		1		11(14.8%)
INV.PARCIAL		7	4	6	5	4	26(35.2%)
RECONSTRUIR		2	5		3	8	19(25.7%)
DOBLE DESAFÍO				1			
TOTAL	4(5.4%)	19(25.7%)	16(21.7%)	10(13.5%)	12(16.2%)	13(17.5%)	74 (18.5%)

S.M

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	TOTAL
DATOS MÁS		4					4(3.4%)
DATOS MENOS	7	6	6				19(16.3%)
INV.TOTAL	1		10	4	1	1	17(14.7%)
INV. PARCIAL	13	10	14	22	3	1	63(54.4%)
RECONSTRUIR	4	2		3			9(7.8%)
DOBLE DESAFÍO				4			4(3.4%)
TOTAL	25(21.5%)	22(19%)	30(25.8%)	33(28.5%)	4(3.5%)	2(1.7%)	116(28.8%)

TOTAL CURSOS

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	TOTAL
DATOS MÁS	6	8		3	3	1	21(5.2%)
DATOS MENOS	7	11	16				34(8.4%)
INV.TOTAL	1	7	44	15	8	1	76(19.0%)
INV. PARCIAL	17	18	79	34	22	24	194(48.2%)
RECONSTRUIR	4	4	13	9	3	8	41(10.10%)
DOBLE DESAFÍO			10	16	10		36(9.0%)
TOTAL CURSOS	35(8.7%)	48(12%)	162(40.2%)	77(19.2%)	46(11.4%)	34(8.4%)	402

TOTAL NIVELES

1º y 2º	3º y 4º	5º y 6º	TOTAL
83 (20.6%)	239 (59.4%)	80 (20.0%)	402 (21%)

Santillana, con un 52.7%, es la editorial con una mayor frecuencia de problemas de este tipo, seguida de S.M con un 28.8%, y Anaya con un 18.5%. Sin embargo, si observamos la tabla 26 nos encontramos con un dato interesante: es precisamente Santillana (47.6%), la editorial que con mayor frecuencia desvela el desafío del problema con anterioridad a su resolución; seguidamente aparecen con resultados muy próximos entre sí las editoriales S.M (29%) y Anaya (23.2%). Este hecho provoca, como es obvio, la pérdida del desafío.

Tabla 26. Frecuencia de problemas en los que se hace explícito el desafío.

NIVELES EDUCATIVOS	EDITORIALES SANTILLANA	ANAYA	S.M	TOTAL
1º	2	5	8	15 (17.4%)
2º	3	4	9	16 (18.6%)
3º	13	3	3	19 (22.1%)
4º	14	4	5	23 (26.7%)
5º	9	4		13 (15.1%)
6º				
TOTAL	41 (47.6%)	20 (23.2%)	25 (29%)	86

Por otro lado, el análisis global de los resultados por categorías indica que el tipo de desafío más numeroso en las tres editoriales es el de invención parcial (48.2%) con una diferencia sustancial frente a invención total (19%) que supone un reto cognitivo más elevado para los alumnos.

Con una diferencia notable con respecto a la categoría de inventar parcialmente, aparece el resto de categorías con algunas diferencias entre las editoriales. La categoría de doble desafío es prácticamente inexistente en S.M (3.4%) e inexistente en Anaya, mientras que en Santillana aparece con una frecuencia del 15%. En la categoría de información (datos de menos) S.M (16.3%) se distancia de las otras dos editoriales Santillana (5.6%) y Anaya (4%), y en la categoría de información (datos de más) se da la tendencia inversa: Anaya es la editorial con una mayor proporción de problemas con este tipo de desafío (20.3%), mientras que en S.M (3.4%) y Santillana (1%) es apenas inexistente.

En cualquier caso, estos datos deben interpretarse con cautela, teniendo en cuenta como se refleja en la tabla 26, que en muchos de estos problemas se avisa con anterioridad al alumnado del desafío al que va a enfrentarse, produciéndose de este modo la pérdida del nivel de dificultad.

Por último, el análisis por niveles educativos muestra que es en los cursos intermedios donde se concentra la mayoría de problemas desafiantes, 3º y 4º (59.4%), especialmente en 3º curso (40.2%). Sin diferencias notables entre sí, les siguen los niveles inferiores (20.6%) y los superiores (20.0%).

■ Análisis del contexto situacional

En la tabla 27 se muestran los resultados del análisis del contexto situacional.

Tabla 27. Resultados de la frecuencia y variabilidad de los problemas con información situacional

SANTILLANA	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**TOTAL**
ACCIÓN	4	23	28	10	21	5	91(56.5%)
INTENCIÓN	1	5	11	2	7	4	30(18.6%)
DESCRICIÓN	1	1	9	1	2	1	15(9.3%)
TEMPORAL							
CAUSAL			1		3		4(2.4%)
ACCIÓN + INTENCIÓN	1		4		6		11(6.8%)
ACCIÓN + DESCRIPCIÓN		1	2	4	2		9(5.5%)
ACCIÓN + TEMPORAL							
ACCIÓN + CAUSA			1				1(0.6%)
TOTAL SANTILLANA	7(4.3%)	30(18.6%)	56(34.7%)	17(1.5%)	41(25.4%)	10(6.2%)	161 (50.8%)
ANAYA	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**TOTAL**
ACCIÓN	4	2	14	9	5	1	35(52.2%)
INTENCIÓN		1	1	4	5	2	13(19.4%)
DESCRICIÓN	1				1	1	3(4.4%)
TEMPORAL		1				1	2(3%)
CAUSAL							
ACCIÓN + INTENCIÓN	2		6	1			9(13.4%)
ACCIÓN + DESCRIPCIÓN		2	1	1			4(6%)
ACCIÓN + TEMPORAL							
ACCIÓN + CAUSA			1				1(1.5%)
TOTAL ANAYA	7(10.4%)	6(9%)	23(34.3%)	15(22.3%)	11(16.4%)	5(7.4%)	67(212%)
S.M	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**TOTAL**
ACCIÓN	6	9	6	7	4	14	46(51.6%)
INTENCIÓN	2	4	4	6	1	2	19(21.3%)
DESCRIPCIÓN		1		1			2(2.2%)
TEMPORAL					1		1(1.1%)
CAUSAL							
ACCIÓN + INTENCIÓN		3	7	2	2	2	16(18%)
ACCIÓN + DESCRIPCIÓN	3	2					5(5.6%)
ACCIÓN + TEMPORAL							
ACCIÓN + CAUSA							
TOTAL S.M	11(12.3%)	19(21.3%)	17(19.1%)	16(18%)	8(9%)	18(20.2%)	89(28%)
TOTAL CURSOS	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**TOTAL**
ACCIÓN	14	34	48	26	30	20	172 (54.5%)
INTENCIÓN	3	10	16	12	13	8	62 (19.5%)
DESCRIPCIÓN	2	2	9	2	3	2	20 (6.3%)
TEMPORAL	1				1	1	3(1.0%)
CAUSAL			1		3		4(1.2%)
ACCIÓN + INTENCIÓN	3	3	17	3	8	2	36(11.3%)
ACCIÓN + DESCRIPCIÓN	3	5	3	5	2		18(5.6%)
ACCIÓN + TEMPORAL							
ACCIÓN + CAUSA			2				2(0.6%)
TOTAL	25(7.8%)	55(17.3%)	96(30.2%)	48(15.1%)	60(19%)	33(10%)	317

TOTAL NIVELES	**1º y 2º**	**3º y 4º**	**5º y 6º**	**TOTAL**
	80 (25.2%)	144 (45.4%)	93 (29.3%)	317

El primer resultado destacable se refiere a la escasa proporción de problemas en los que se ha introducido información situacional. Del total de problemas analizados, tan sólo 317 (16.6%) se presentan en contextos situacionales más o menos enriquecidos con información cualitativa. La gran mayoría de los problemas, por tanto, sigue el patrón prototípico de los problemas estándar. La proporción de problemas de este tipo es incluso menor que la de problemas con algún tipo de desafío.

Por lo que se refiere a la frecuencia y variabilidad de las distintas categorías, el primer dato relevante es la inexistencia de problemas reescritos de forma completa, es decir, problemas que incluyan todas las categorías propuestas para el análisis. Otro resultado importante, es la diferencia considerable entre la categoría de acciones desligadas de cualquier tipo de información situacional (54.5%) y el resto de categorías: intenciones, propósitos, metas (19.5%); estructuras temporales (1%); causales (12%); y las que combinan acciones y causas (0.6%), más relevantes para la creación del M.E.S.

El análisis de esta variable por editoriales indica que Santillana es la editorial con una mayor proporción de problemas en los que se ha incluido información situacional de algún tipo (52.7%) seguida de las editoriales S.M (28.8%) y Anaya (18.5%). Las tres editoriales siguen el mismo patrón de variabilidad descrita: las categorías más frecuentes en todas ellas son las acciones (Santillana, 56%; Anaya, 52.2%; S.M, 51.6%) seguidas de las intenciones (S.M, 21.3%; Santillana, 19.5%, Anaya, 18.6%) y el resto de categorías con porcentajes muy bajos.

Por último, si atendemos a la frecuencia por niveles educativos, observamos que se produce la misma tendencia en los resultados que en el análisis de la variable anterior (grado de desafío). La mayor proporción de problemas con información situacional se encuentra en los niveles intermedios: 3º y 4º (45.4%), muy especialmente en 3º curso (30.2%). A estos niveles, les siguen sin diferencias notables entre ellos los niveles superiores (29.3%) e inferiores (25.2%).

- **Análisis del rol del problema**

Los últimos resultados que presentamos hacen referencia a la variable rol del problema, esto es, la función que desempeña el problema en los libros de texto. Para ello, hemos analizado dos tipos situaciones que aparecen habitualmente en los textos escolares: por un lado, aquellas situaciones que son consideradas como “problemas” por el propio libro de texto (aparece un epígrafe en la unidad didáctica que así lo especifica) pero que en realidad son ejercicios que tienen como objeto prácticas más o menos rutinarias de los contenidos y procedimientos estudiados en el aula (véase tabla 28, situaciones A) ; por otro lado, aquellas situaciones que constituyen verdaderos problemas, pero que pierden este carácter al indicarse de forma explícita la operación que debe ejecutar el alumnado para llegar a la solución (véase tabla 28, situaciones B).

Tabla 28. Frecuencia de las variables A y B.

	SANTILLANA		**ANAYA**		**SM**	
	A	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
1º	3	5	1	18	9	18
2º		48		18		5
3º	36	23	8	14	33	20
4º	49	29	7	28	13	16
5º	69	13	18	4	34	23
6º	11	9	2	9	42	9
TOTAL EDITORIALES	168 (50.10%)	127 (41.20%)	36 (10.70%)	91 (29.40%)	131 (39.10%)	91 (29.40%)

	1º y 2º		**3º y 4º**		**5º y 6º**	
	A	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
TOTAL NIVELES	13 (3.80%)	112 (36.20)	146 (43.50%)	130 (42%)	176 (52.70%)	67 (21.70%)

	SITUACIONES A	**SITUACIONES B**
TOTAL SITUACIONES	335 (17.60%)	309 (16.20%)

Situaciones A: situaciones no problemáticas consideradas como tales por los libros de texto.
Situaciones B: situaciones problemáticas con información sobre el algoritmo que debe aplicarse.

Un análisis cualitativo del primer grupo de situaciones (A), nos permite concluir que los libros de texto utilizan distintos epígrafes para identificar como “problemas” situaciones que en realidad constituyen ejercicios (leer y escribir números, contar, comparar, ordenar, aproximar, operar, transformar, etc.) al servicio de los contenidos curriculares del “bloque 2. Números” (operaciones) y del “bloque 3. Medidas”, establecidos por el currículum oficial del área de matemáticas.

Este tipo de situaciones, al servicio del bloque de números y operaciones, va progresando desde el 1º nivel (números naturales de hasta 2 cifras), hasta el 6º nivel (números naturales de más de 9 cifras). La progresión de las operaciones comienza en los niveles iniciales, (1º y 2º) con los algoritmos de suma y resta, pasa por la introducción de la multiplicación en el último trimestre del 2º nivel, y termina en 6º con la división, que ha sido introducida en el 3º nivel, junto con las fracciones y los números decimales.

Asimismo, a partir del 3º nivel, estos pseudoproblemas se ponen al servicio del bloque de medida, en el momento en que en el currículum oficial se introducen los contenidos correspondientes a medidas de longitud, capacidad y masa, y poco después al bloque de geometría.

Por otro lado, el análisis cuantitativo de los resultados que se muestran en la tabla 28 indica que, este tipo de situaciones suponen el 17.60% de las tareas que realiza el alumnado en el aula. Con respecto al análisis por niveles educativos, la aparición de estas situaciones pseudoproblemáticas va aumentando progresivamente a medida que aumenta el nivel educativo: niveles inferiores, 1º y 2º (3.80%); niveles intermedios, 3º y 4º (43.50%); y niveles superiores, 5º y 6 (52.70%). Por otro lado, el análisis por editoriales muestra que es la editorial Santillana la que con mayor frecuencia introduce este tipo de tareas (50.1%) seguida de la editorial S.M (39%) y con una notable diferencia la editorial Anaya (10.7%).

En cuanto al segundo tipo de situaciones (B), esto es, problemas donde aparece información expresa sobre el algoritmo que debe aplicarse, representa un 16.20% de las tareas realizas por el alumnado. El análisis de los resultados por niveles educativos revela que es en los niveles intermedios, 3º y 4º (42.0%) donde los libros de texto hacen un mayor uso de este tipo de prácticas; a este resultado, le siguen los niveles inferiores, 1º y 2º (36.20%) y los superiores, 5º y 6º (21.70%). Asimismo, el análisis por editoriales refleja de nuevo que es Santillana (41.2%) la editorial que con mayor frecuencia introduce este tipo de situaciones. Tras esta editorial, aparecen Anaya y S.M con el mismo porcentaje, (29.40%).

En resumen, si tenemos en cuenta los resultados de la frecuencia de los dos tipos de situaciones analizados (33.80%) junto con los resultados de los estudios que han demostrado que el criterio adoptado por los libros de texto para agrupar los problemas es la última operación estudiada (Bruin-Muurling, 2010; Castro y Ruiz, 2015; Li et al., 2009; Sánchez y Vicente, 2015; Säljö y Wyndhamn, 1987; Schoenfeld, 1989,1991; Sowder, 1988; Stern, 1992; Stigler, Fuson, Han y Kim, 1986; Van Stiphout, 2011; Vincent y Stacey, 2008; Verschaffel, 2012), podemos concluir que son abundantes las ocasiones en las que la función del problema se supedita a la ejecución de la operación matemática. De todo ello damos cuenta en el siguiente epígrafe dedicado a la discusión.

IV.5. Discusión

Tal como ha quedado reflejado en el marco teórico de esta tesis, la investigación actual ha puesto de manifiesto que el libro de texto desempeña un papel hegemónico en la mayoría de los sistemas educativos (Escudero, 2015; Fuchs y Bock, 2018; Hansen, 2018; Knudsen, 2011; Parcerisa, 2009). Aunque no es el único material curricular utilizado por los docentes, ni tampoco existe una homogeneidad en cuanto a su uso, su influencia es tan decisiva que autores como Apple (1992) o Gimeno (2010, 2015) al referirse a la concreción de los diferentes niveles curriculares, hablan del libro de texto como el currículum real plasmado en la práctica o el auténtico intérprete del currículum oficial.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no está exento de esta influencia. Son numerosos los autores que desde el ámbito de estudio de la educación matemática se han hecho eco de esta realidad y han puesto de relieve la hegemonía del libro de texto en esta área de conocimiento (Boesen et al., 2014; Jablonka y Johansson, 2010; Mullis et al., 2008; Stein et al., 2007; van Stiphout, 2011).

Dada esta influencia y sus efectos en la práctica educativa, algunos autores como Wijaya et al. (2015), señalan que muchos estudios se han dirigido a investigar el tratamiento de diferentes contenidos matemáticos en los libros de texto, entre ellos los PAVs de estructura aditiva, que constituyen el objeto de nuestra tesis. En España, el estudio pionero fue realizado por Orrantia et al. (2005), en el marco legislativo de la LOGSE, (1990). Posteriormente, se han llevado a cabo otras investigaciones en nuestro país, que han analizado algunas de las variables estudiadas por Orrantia et al. (2005) en los libros de texto editados en el marco normativo de la LOE (2006).

En nuestro primer estudio, nos hemos planteado como objetivo general analizar el tratamiento de los PAVs de estructura aditiva en los libros de texto de matemáticas de Educación Primaria, editados con la entrada en vigor de la LOMCE (2013). Este análisis pretendía, por un lado, ofrecer una visión sobre el panorama actual de esta cuestión, y por otro lado, transcurrida más de una década desde el estudio de Orrantia et al. (2005), comprobar hasta qué punto se ha producido un cambio y/o mejora en el tratamiento de este tipo de problemas en los libros de texto de matemáticas, utilizados actualmente en nuestro sistema educativo. Para alcanzar este objetivo, hemos analizado los PAVs de estructura aditiva incluidos en los libros de texto de los seis niveles educativos de la Educación Primaria de tres de los proyectos editoriales con mayor difusión en las escuelas de nuestro país: Santillana, Anaya y S.M.

Este objetivo general se ha concretado de forma específica en el análisis de la frecuencia y variabilidad de las diferentes estructuras semánticas de los problemas; la presencia/ausencia de problemas con algún tipo de desafío; el contexto situacional donde aparecen los problemas; y finalmente, el rol que desempeñan los problemas en los libros de texto de matemáticas actuales. En suma, puesto que los libros de texto determinan en gran medida la práctica docente, en nuestro primer estudio nos hemos planteado como propósito caracterizar las situaciones problemáticas presentadas por estos materiales curriculares, y de este modo poder llegar a conocer, en primer lugar, a qué tipos de problemas se enfrentan los alumnos a lo largo de la Educación Primaria; en segundo lugar, cuáles son las prácticas educativas que estos materiales promueven, esto es, cuál es la verdadera función que desempeñan los problemas en los libros de texto; y por último, cuál ha sido la evolución del tratamiento de los problemas desde la entrada en vigor de la LOGSE (1990).

Con respecto a la caracterización de los diferentes tipos de PAVs de estructura aditiva, los resultados referentes a la estructura semántica han mostrado un panorama caracterizado por una alta frecuencia de problemas consistentes (85.30%) los más fáciles de resolver, frente a los inconsistentes (14.60%); y por una escasa variabilidad de las diferentes subcategorías de problemas. La categoría de combinación se ha concentrado en los problemas de combinación 1 (33.89%) frente a los de combinación 2 (6.15%) más difíciles de resolver. Por otra parte, la categoría de cambio se ha reducido a la presentación de los problemas de cambio 1 y 2 (10.05% y 21.21% respectivamente) siendo el resto de categorías de dificultad media (cambio 3 y 4) y dificultad alta (cambio 5 y 6) mucho menos frecuentes. Con la categoría de comparación se ha producido un efecto similar: la escasa proporción de este tipo de problemas se concentra únicamente en la subcategoría de comparación 1 (7.10%). Finalmente, la categoría de igualación se ha mostrado casi inexistente, (0.68%).

Por otro lado, los PAVs compuestos son incluidos por los libros de texto de forma muy escasa (14.50%) y con una aparente variabilidad. Si bien es cierto que todas las categorías de problemas compuestos propuestas en la clasificación de Orrantia et al. (2005) están presentes, la frecuencia de estos problemas resulta tan baja que la variabilidad sólo es aparente. En el estudio precedente de Orrantia et al. (2005), donde también fueron analizados los problemas de más de una operación, también se obtuvieron resultados similares.

En definitiva, de acuerdo con el análisis de la estructura semántica de los problemas y en consonancia con la primera hipótesis planteada en nuestro estudio, se puede afirmar que los dos rasgos que sintetizan el panorama de los problemas presentados por los libros de texto de matemáticas de las escuelas de nuestro país son: la alta frecuencia de PAVs consistentes y la reducida variabilidad de las diferentes subcategorías de PAVs. Teniendo en cuenta estas características, se puede concluir que el uso de estrategias superficiales resulta suficiente para resolver la mayor parte de los problemas presentados en estos materiales curriculares, de manera que el proceso de R.P se convierte en una tarea rutinaria y mecánica (Kolovou et al., 2009; Jiménez, 2012; Jiménez y Verschaffel, 2014; Santos-Trigo, 2008; Schoenfeld, 2007).

Asimismo, de acuerdo con nuestra segunda hipótesis, este panorama no difiere del panorama presentado en el estudio pionero en nuestro país llevado a cabo por Orrantia et al. (2005). Tampoco difiere de los estudios previos realizados en España con libros de texto editados en el marco normativo de la LOE (2006), ni de los estudios internacionales donde también se ha analizado la frecuencia y variabilidad de los PAVs de estructura aditiva. En concreto, los estudios de Olkun y Toluk, (2002) y Parmjt y Teoh, (2010); y más recientemente, los estudios de Despina y Harikleia, (2014) y Tarim, (2017). Además, en los estudios internacionales donde se han analizado los distintos niveles de dificultad de los problemas, llevados a cabo por Marchis, (2012) y por Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen, (2018), también se concluye que los libros de texto presentan una alta frecuencia de problemas rutinarios, que pueden resolverse mediante el uso de estrategias superficiales sin necesidad de que medie el razonamiento. Se trata, en conclusión, de un panorama caracterizado por una visión restringida y distorsionada del verdadero papel que deben cumplir los problemas en la escuela y del tipo de estrategias que deben desarrollarse para resolverlos. Nuestro análisis revela que la función de la mayor parte de los problemas incluidos en los libros de texto se centra principalmente en el desarrollo de habilidades de cálculo y estrategias superficiales de resolución, donde no se hace necesaria la intervención del razonamiento.

En referencia a la caracterización de los problemas atendiendo al grado de desafío subyacente y a su naturaleza, de acuerdo con nuestras predicciones, hemos podido constatar que al igual que en el estudio de Orrantia et al. (2005), la inclusión de este tipo de problemas por parte de los libros de texto resulta muy limitada. Tal y como se desprende de los resultados del análisis de esta variable, tan solo en un 21% de la totalidad de los problemas analizados se propone algún tipo de desafío que vaya más allá de la elección y aplicación de la operación. Además, otra cuestión interesante para la discusión, también coincidente con el estudio de Orrantia et al. (2005), se refiere al hecho de que, de las tres editoriales analizadas, Santillana es la que presenta un mayor número de problemas "desafiantes". Sin embargo, también es la editorial que con mayor frecuencia incluye los problemas en contextos donde se anuncia a priori a los alumnos el tipo de desafío, reduciéndose o perdiéndose, consecuentemente, la verdadera función que debe tener este tipo de problemas: realizar un razonamiento que vaya más allá de la ejecución de un algoritmo con los números presentados en el enunciado, que conduzca de forma directa y rutinaria a la solución.

Parece ser que la escasez de este tipo de problemas es una característica compartida por los libros de texto de otros sistemas educativos. En el estudio de Wijaya et al. (2015), también se ha evidenciado una reducida proporción de problemas con información ausente (datos de menos) o información superflua (datos de más) de manera que la gran mayoría de los problemas aparecen en contextos altamente estereotipados. Los problemas contenían únicamente lo que estos autores denominan "información coincidente", es decir, los datos necesarios y suficientes para su resolución. Como hemos señalado en el marco teórico de esta tesis, el planteamiento de este tipo de problemas resulta clave para desarrollar la capacidad de resolver problemas (Greer et al., 2007), puesto que constituye una manera de ayudar a los alumnos a que consideren el contexto como un elemento relevante para abordar la resolución (Maass, 2007). Dada la importancia de esta idea, nos gustaría reiterar que el proceso genuino de la R.P va más allá de la ejecución de las operaciones con todos los datos presentados en el enunciado. El enunciado del problema puede contener información superflua o insuficiente, por tanto el proceso de resolución requiere de una interpretación del contexto por parte del alumno (Verschaffel et al., 2010). No obstante, de acuerdo con los resultados de los estudios precedentes realizados por Orrantia et al. (2005) y por Wijaya et al. (2015), y de acuerdo asimismo con los resultados obtenidos en nuestro estudio, la frecuencia de los problemas con este tipo de informaciones resulta muy limitada. En consecuencia, no es de extrañar que los alumnos infieran que resolver un problema signifique "hacer algo con (todos) los números dados en el enunciado" (Orrantia et al., 2005, p.444). Tampoco es extraño que los alumnos desarrollen estrategias de resolución superficiales y pasivas, que demandan poco esfuerzo cognitivo, de manera que ante situaciones problemáticas como por ejemplo el célebre problema de "la edad del capitán", propuesto por el

IREM de Grenoble en 1980 (*"Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Qué edad tiene el capitán?"*) un 75% de alumnos de edades comprendidas entre los 6 y 9 años contestasen que el capitán tenía 36 años. Como se apuntó en el marco teórico de esta tesis, la causa de esta conducta es un reflejo del proceso de enculturación matemática que comienza en el momento en que el niño entra en la escuela, donde va interiorizando progresivamente las cláusulas que conforman el denominado "contrato didáctico o experimental" (Greer, 1997), entre otras: cualquier problema presentado por el libro de texto o por el profesor tiene sentido y puede resolverse; o la respuesta se puede obtener ejecutando una o varias operaciones aritméticas con todos los números presentados en el enunciado, etc.

La variable relativa al grado y naturaleza del desafío también ha sido analizada a partir de las tareas propuestas en los libros de texto sobre la invención de problemas. Tanto en el estudio de Orrantia et al. (2005), como en nuestro estudio, la frecuencia de la categoría de inventar se ha mostrado superior a la categoría de información (ausente-superflua), aunque en ambos estudios este tipo de tareas también resultan muy escasas. Otra cuestión relevante para la discusión, igualmente coincidente con el estudio de Orrantia et al. (2005), se refiere a que en ambos estudios la frecuencia de los problemas de invención total (19%), que requieren un mayor nivel de razonamiento, ha resultado muy inferior a la frecuencia de los problemas de invención parcial (48.20%). Además, en nuestro estudio también se han analizado las tareas que hemos denominado "doble desafío" (9.0%), es decir, tareas en las que se combinaba la invención con la información, o la invención con la reconstrucción de los problemas (10.10%) encontrándose que la frecuencia de este tipo de tareas, más complejas todavía, se mostraba incluso más baja que las tareas de invención total. La conclusión que se desprende con respecto a la frecuencia de presentación de las tareas de invención es que cuanto mayor es la complejidad de la tarea, menor es la frecuencia de su inclusión en los libros de texto analizados. En cualquier caso, al igual que ocurría con las tareas de información ausente o superflua, la escasa proporción de tareas de inventar no es una característica particular de los libros de texto españoles. Este hallazgo también ha sido corroborado por estudios que han analizado esta variable en los libros de texto de otros países.

En el estudio llevado a cabo por Marchis (2012), también se encontró este mismo resultado. Más recientemente, en el estudio comparativo realizado por Cai y Jiang (2017), se concluye que los libros de texto chinos y estadounidenses apenas incluyen tareas que tengan como propósito el planteamiento de los problemas por parte de los alumnos.

Si bien cierto que el objetivo principal de la propuesta de problemas de un determinado proyecto curricular debe centrarse en el proceso de resolución, también es cierto que esta propuesta debe incluir tareas de planteamiento de problemas que, "debe ser esencial en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos" (Blanco y Cárdenas, 2013; Singer y Voica, 2013). Como apunta Castro (2008), la invención de problemas por parte del alumno es una actividad consustancial a la R.P, cuyo valor educativo tanto a nivel cognitivo como actitudinal, ha sido enfatizado desde hace tiempo por muchos investigadores en educación matemática. En concreto, Silver (1994), habló de la invención de problemas como una actividad dirigida a mejorar la capacidad matemática general de los alumnos, la capacidad específica para resolver problemas, la capacidad creativa y la enseñanza orientada a la indagación. Asimismo, consideró esta actividad como una ventana para observar el nivel de comprensión matemática de los alumnos y como un medio para mejorar su disposición hacia las matemáticas (intereses, actitudes, motivación). Del mismo modo, Cai et al. (2015) afirman que la invención de problemas supone una alta exigencia cognitiva, promueve la comprensión matemática de los alumnos, fomenta su capacidad de razonamiento y despierta su motivación.

En otro orden de ideas, al referirnos anteriormente al grado y naturaleza del desafío, comentábamos que la mayoría de los problemas eran presentados por los libros de texto en contextos altamente estandarizados (premisas muy concretas con datos y preguntas). Este carácter estereotipado también se muestra en el análisis sobre la variable contexto situacional donde aparecen los problemas, evidenciándose tal y como planteamos en nuestras predicciones que, al igual que en el estudio de Orrantia et al., 2005, son muy escasas las situaciones problemáticas enriquecidas con información situacional de tipo cualitativo que pueden contribuir a la comprensión del problema por parte de los alumnos. Esta información situacional resulta especialmente relevante cuando ayuda a establecer un nexo entre la situación descrita y la estructura matemática subyacente (esquema matemático o semántico del problema). En este sentido, la información situacional de tipo causal e intencional (propósitos, metas, intenciones de los personajes) tiene efectos positivos en el proceso de R.P cuando se vincula con el esquema semántico del problema (Orrantia et al., 2011). Sin embargo, los resultados de nuestro estudio indican que este tipo de información cualitativa, que favorece el razonamiento situacional y matemático, resulta muy limitado.

El análisis del contexto situacional también ha sido abordado por otros estudios, tanto nacionales como internacionales, aunque con criterios y sistemas de categorización distintos. En España, Chamoso et al. (2014), basándose en una categorización gradual sobre la autenticidad de los problemas (situaciones problemáticas similares a las de la vida real) analizaron la familiaridad o autenticidad de los contextos situacionales donde se proponen los problemas. Una de las principales conclusiones de este estudio es que los problemas presentados por el libro de texto analizado se plantean distantes de la vida real de los alumnos, de manera que no existe una conexión entre las situaciones problemáticas propuestas por el libro de texto y las situaciones problemáticas a las que habitualmente se enfrentan los alumnos en su vida cotidiana. En el ámbito internacional, varios estudios actuales, han puesto de manifiesto que, de los distintos criterios establecidos por el informe PISA 2012 (OCDE 2013) para categorizar los contextos donde puede surgir un problema, habitualmente los problemas presentados por los libros de texto aparecen en contextos "puramente matemáticos", es decir, con una formulación estándar desligada de contextos situacionales enriquecidos cualitativamente (Brehmer, 2016; Ozer y Sezer, 2014; Wijaya et al., 2015).

En resumen, los resultados de nuestro estudio acerca de esta variable muestran que, son escasas las ocasiones en que los libros de texto de nuestro sistema educativo incluyen problemas en contextos significativos. Por tanto, más allá de formulaciones estereotipadas, se hace necesaria la inclusión de los problemas en contextos enriquecidos situacionalmente que susciten el interés de los alumnos y que les ayuden a integrar la información matemática con la información no matemática, aspecto que tal y como ha mostrado la investigación, mejoraría la comprensión y resolución de los problemas.

Hasta el momento hemos visto que los problemas presentados por los libros de texto analizados se caracterizan por una alta frecuencia de problemas consistentes, una escasa variabilidad de las estructuras semánticas, un limitado número de problemas de naturaleza desafiante y por la presencia de contextos situacionales altamente estandarizados. Todas estas características, coincidentes con el estudio pionero de Orrantia et al. (2005), nos permiten ofrecer ya una primera respuesta a las preguntas de investigación que planteábamos al principio de nuestro estudio: las situaciones problemáticas a las que se enfrentan los alumnos habitualmente en las aulas están más próximas a la función de los *ejercicios* que a la función de los *problemas*, de acuerdo con la distinción conceptual realizada en el primer capítulo de esta tesis.

El estudio de estas tres variables nos ha permitido conocer la función de los problemas en los libros de texto analizados. Sin embargo, hemos querido ir todavía más lejos analizando directamente el rol que desempeña el problema a partir de la información que recibe el alumno en el contexto donde se ubican los problemas. En este sentido, una práctica habitual de los libros de texto, que desvirtúa la verdadera función del problema, consiste en anunciar de antemano si un problema omite datos o incluye información extra (De Corte y Verschaffel, 1985; Hernández, 2004; Jiménez, 2012; Puchalska y Semademi, 1987); u ofrecer "pistas" para que el alumno identifique de forma inmediata la operación (Verschaffel, 2012). Con respecto a esta variable, los resultados de nuestro estudio han mostrado que una parte considerable de los enunciados de los problemas aparecen precedidos de epígrafes donde se indica de forma explícita al alumno la operación que tiene que realizar para resolver y dar por terminado el "problema", o epígrafes donde se anuncia al alumno que va a resolver un "problema" cuando realmente va a realizar un "ejercicio". Este tipo de situaciones, relativamente frecuentes en los libros de texto analizados, tienen como consecuencia no sólo que se desvirtúe la verdadera función de los problemas supeditándolos a la ejercitación de la última operación estudiada en la unidad didáctica, sino también que se desvirtúe el verdadero concepto de lo que es un problema, contribuyendo de esta manera a la confusión conceptual de la que dábamos cuenta en el primer capítulo de esta tesis, que repercute, sin duda, en las concepciones que sobre los términos *ejercicio* y *problema* tienen tanto docentes como discentes. De hecho, una cuestión que consideramos fundamental es que los libros de texto analizados y sus guías didácticas correspondientes no definen en ningún momento qué entienden por *problema.*

Por otro lado, nuestro sistema educativo se caracteriza por una rápida sucesión de leyes educativas. La actual LOMCE (2013), es la octava ley orgánica en nuestro país, desde la promulgación en 1970 de la LGE durante el tardofranquismo. Desde el estudio de Orrantia et al. (2005) con libros de texto publicados en el marco legislativo de la LOGSE (1990) y hasta el momento actual, en España se han sucedido dos reformas educativas (LOE, 2006 y LOMCE, 2013), sin contar con la LOCE (2002), que no llegó a aplicarse. El segundo objetivo general planteado en nuestro estudio se dirigía precisamente a comprobar la evolución del tratamiento de los problemas en los libros de texto desde el estudio pionero de Orrantia et al. (2005), transcurrida más de una década. Como hemos podido observar, el panorama descrito se muestra similar al presentado por estos autores en todas las variables analizadas. De este modo, se puede concluir que las editoriales, el agente más decisivo a la hora de determinar el currículum real, se muestran resistentes al cambio.

Aun así, parece ser que ésta no es una situación específica de nuestro sistema educativo. En efecto, los libros de texto de matemáticas diseñados para implementar las reformas educativas de diferentes países no se han caracterizado por cambios y mejoras sustanciales, ni por una coherencia entre el currículum oficial promulgado por la nueva ley y el currículum presentado en los libros de texto de matemáticas. Ejemplos de esta situación son las investigaciones internacionales que hemos descrito (Brehmer et al., 2016; Cai y Jiang, 2017; Tarim, 2017; Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen, 2018), desarrolladas, entre otros propósitos, para comprobar las repercusiones de las reformas educativas en los libros de texto de matemáticas en diferentes sistemas educativos.

CAPÍTULO V

ESTUDIO II

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS ARITMÉTICO VERBALES EN LAS PRUEBAS DE EVALUACIÓN DE LAS GUÍAS DIDÁCTICAS

V.1. Objetivos de investigación

Nuestro primer estudio tenía como objetivo general analizar el tratamiento de los PAVs de estructura aditiva en los libros de texto de matemáticas actuales. Ahora bien, el libro de texto no aparece en la escena educativa como un elemento aislado. La guía didáctica o guía del profesor[27], que complementa al libro de texto, constituye asimismo un instrumento decisivo a la hora de determinar qué currículo es realmente enseñado y evaluado en la escuela.

Así, con el propósito de conocer qué tipos de aprendizajes matemáticos son evaluados, y por tanto valorados, en este segundo estudio nos hemos planteado como objetivo general: analizar la relevancia de los problemas en las pruebas de evaluación del área de matemáticas en Educación Primaria, publicadas en las guías didácticas de seis editoriales. Para alcanzar este objetivo general, hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

1. Examinar los tipos de ítems diseñados en las pruebas de evaluación, distinguiendo entre ejercicios y problemas.
2. Comprobar si las guías didácticas de las editoriales analizadas evalúan los distintos pasos del proceso de R.P a partir de modelos donde se incluye el razonamiento.
3. Caracterizar los tipos de problemas propuestos en las pruebas de evaluación, de acuerdo con tres variables: la estructura semántica, el grado de desafío y el contexto situacional en el que aparece.

V.2. Hipótesis

a) De acuerdo con los resultados de nuestro primer estudio, donde se analizaba el rol de los problemas en los libros de texto, prevemos que las pruebas de evaluación de las guías didácticas de las editoriales tenderán a incluir una mayor proporción de ejercicios frente a problemas para evaluar el nivel de competencia curricular de los alumnos en el área de matemáticas.
b) En consonancia con los resultados obtenidos en el estudio de Sánchez y Vicente (2015), donde se analizaban los modelos de resolución propuestos por los libros de

[27] Tras la promulgación de la Ley General de Educación en 1970, (Ley "Villar Palasí") surge una nueva modalidad editorial que vendrá a sustituir a los anteriores "solucionarios": las guías del profesor. A partir de ese momento se inicia una nueva fase, todavía vigente, en la que será la guía, y no el profesor, quien se encargará de interpretar y operativizar las prescripciones del currículum oficial: qué, cómo y cuándo enseñar; pero también, qué, cómo y cuándo evaluar (Beltrán, 1992).

texto de las editoriales Santillana Anaya y S.M, prevemos encontrar en los modelos propuestos en estas pruebas de evaluación una mayor presencia de pasos relacionados con el modelo superficial, frente al modelo genuino donde se incluye el razonamiento.

c) A tenor de los resultados de nuestro primer estudio, esperamos encontrar un panorama similar en cuanto a la caracterización de los problemas respecto a las tres variables analizadas. Una explicación plausible de esta hipótesis, al menos desde el punto de vista teórico, es la existencia de una coherencia entre lo que se enseña y lo que se evalúa, es decir, entre los problemas presentados en el libro de texto del alumno y los problemas presentados en las pruebas de evaluación de las guías del profesor.

V.3. Método

Al igual que en el estudio anterior, en el presente estudio se utilizó como método para la obtención, registro y análisis de la información, el análisis didáctico en educación matemática. Concretamente, nos centramos en la técnica del análisis del contenido, que ha sido descrita anteriormente.

V.3.1. Materiales

En este segundo estudio se utilizaron los mismos proyectos editoriales seleccionados para el primer estudio: Grupo Santillana (proyecto “Saber hacer”); Grupo Anaya (proyecto “Aprender es crecer”); y Ediciones S.M (proyecto “Savia”). Además, con el fin de obtener una visión más amplia de nuestros objetivos de investigación, se añadieron a la muestra tres proyectos editoriales[28] más, también publicados entre los años 2014-2015 con la entrada en vigor de la LOMCE (2013): Vicens Vives (proyecto “Aula Activa”); Grupo Edebé (proyecto “Talentia”); y Grupo Edelvives (proyecto “Superpixépolis”).

El análisis no se centró en el libro de texto del alumno, sino en la guía del profesor o guía didáctica, concretamente en las distintas pruebas de evaluación que cada editorial propone como modelo para evaluar los aprendizajes adquiridos por los alumnos, tanto al comienzo de un curso escolar, como al término de este.

[28] Vicens Vives es el grupo editorial fundado por el historiador y docente Jaume Vicens Vives (http://www.vicensvives.com). Edebé aparece en el mercado editorial a principios de los años 80 como continuación de Ediciones Don Bosco, fundada por la Congregación Salesiana (http://www.edebé.com). La editorial Luis Vives, denominada así por el humanista Luis Vives o, por su acrónimo Edelvives, fue fundada por la Congregación de los Hermanos Maristas (http://www.edelvives.com).

Teniendo en cuenta que son seis las editoriales seleccionadas, seis los niveles educativos que conforman la Educación Primaria, y dos las pruebas de evaluación propuestas por cada editorial (evaluación inicial y evaluación final), fueron analizadas setenta y dos pruebas de evaluación. A este total hay que añadir seis pruebas más, ya que la editorial Santillana presenta para cada nivel educativo una prueba complementaria de evaluación final de grado avanzado. Por tanto, el número final de pruebas analizadas fue de setenta y ocho.

V.3.2. Procedimiento

En primer lugar, se realizó un vaciado de los ítems de las distintas pruebas de evaluación propuestas por las seis editoriales. Posteriormente, se creó un sistema de codificación, que aparece en el Anexo III, para analizar la frecuencia y variabilidad de las cinco variables objeto de estudio:

a) En relación al primer objetivo, los tipos de ítems propuestos por las guías didácticas.

b) Respecto al segundo objetivo, los diferentes pasos que constituyen un modelo de resolución de problemas: superficial o genuino.

c) En cuanto al tercer objetivo, la caracterización de los problemas de acuerdo con su estructura semántica, el grado de desafío que presentan y el contexto situacional donde aparecen.

Para llevar a cabo el proceso de codificación se siguieron las mismas consideraciones y criterios generales establecidos en el primer estudio de esta tesis, que sintetizamos a continuación:

1. Consideraciones sobre el concepto de problema.

   a) Una situación es concebida como un problema, en la medida en que no se dispone de procedimientos de tipo reproductivo, rutinas sobreaprendidas y automatizadas que permiten solucionarlo de forma más o menos inmediata, sino que requiere un proceso de razonamiento y toma de decisiones.

   b) A diferencia del ejercicio, que no se asocia a ningún contexto situacional concreto, los PAVs pueden considerarse como verdaderos textos, esto es, auténticas entidades discursivas (Reusser, 1990; Orrantia, 1993, 2003).

c) Un problema se caracteriza por la descripción verbal de una situación problemática, por el planteamiento de una o más preguntas, y por la aplicación de operaciones aritméticas a los datos disponibles (Semademi, 1995; Verschaffel et al., 2014).

d) Asimismo, para establecer de forma más nítida las diferencias entre los conceptos de ejercicio y problema, se tuvieron en cuenta las tres dimensiones cognitivas establecidas en las pruebas de evaluación internacionales TIMMS de la IEA (2015,2019). Véase Anexo V.

2. Criterios generales.

a) Un problema es considerado como tal si está expresado mediante el lenguaje verbal. Así, por ejemplo, *“El patio de los pequeños mide 63 pasos, y el de los mayores, 97 pasos. ¿Cuántos pasos más tiene el patio de los mayores?”* (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 1° curso) fue considerado como un problema, pero *97 - 63 = ¿?* fue considerado como un ejercicio de cálculo. Este tipo de tareas fue codificado en el bloque de números.

b) Asimismo, situaciones expresadas mediante el lenguaje verbal como *“¿Cuánto falta para un euro? Datos: una moneda de 50 céntimos, una moneda de 20 céntimos y una moneda de 10 céntimos”* (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso) tampoco fueron consideradas problemas, porque aun tratándose de una descripción verbal, no aparece dentro de un contexto situacional. Este tipo de tareas también fue codificado en el bloque de números.

c) Igualmente, tampoco fueron consideradas como problemas aquellas situaciones en las que no aparecía explícitamente una pregunta. Por ejemplo, *“Daniela salió de casa a las 8:30 de la mañana. El trayecto al aeropuerto duró 30 minutos. Aparcar y facturar el equipaje, media hora. Cuando terminó, se fue a la sala de embarque y esperó 15 minutos, antes del despegue del avión. El avión despegó a las (...)”* (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso). Del mismo modo que en los ejemplos anteriores, estas situaciones fueron codificadas en el bloque de números.

d) En aquellos casos en que los problemas no aparecían expresados de forma totalmente verbal, esto es, combinaciones entre lenguaje verbal y elementos pictóricos, se adoptaron los mismos criterios de codificación descritos en nuestro primer estudio. No obstante, en este estudio, no surgió ningún caso de este tipo, de manera que no hubo necesidad de hacer uso de este criterio.

e) Finalmente, aquellos problemas en los que, tras la presentación de la información, se formulaban varias preguntas, por ejemplo, *"Los diez libros que se utilizan en el curso de segundo cuestan 235 euros y el material escolar cuesta 97 euros. Al comprar los libros y el material escolar, Silvia ha pagado con un billete de 500 €. ¿Cuánto cuestan los libros y el material escolar? ¿Cuánto dinero le han devuelto? ¿Cuánto paga por los libros una familia con 3 hijos?"* (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso), fueron codificados tantas veces como preguntas se planteaban, puesto que, como señalamos en nuestro primer estudio, es la pregunta la que determina la estructura semántica del problema, dando lugar a tantas categorías como preguntas son formuladas. De esta manera, en el problema del ejemplo se distinguen tres categorías codificadas independientemente: problema de combinación 1 (primera pregunta), problema de cambio 2 (segunda pregunta) y problema de estructura multiplicativa (problema 3).

V.3.3. Codificación

- **Variable: frecuencia y variabilidad de los ítems de las pruebas de evaluación**

Para la codificación de los ítems se utilizó como referencia los estándares de aprendizaje evaluables de los cinco bloques de contenidos del área de matemáticas, publicados en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. La codificación de esta primera variable aparece en el Anexo III, primera columna.

Estos cinco bloques de contenidos son:

- Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Bloque 2. Números.
- Bloque 3. Medida.
- Bloque 4. Geometría.
- Bloque 5. Estadística y probabilidad.

Los estándares de aprendizaje, derivados de los criterios de evaluación, y estos a su vez de los contenidos prescritos por el currículum oficial, aparecen en el Anexo V. Con el fin de facilitar al lector la comprensión del proceso de codificación, presentamos a continuación cada uno de los cinco bloques, determinando sus principales contenidos y ejemplificándolos con ítems extraídos de las pruebas de evaluación analizadas.

■ Bloque1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

De acuerdo con el Real Decreto 126/2014, este bloque constituye el eje vertebrador del resto de bloques de contenidos, y por ello se ha formulado con la intención de que forme parte del quehacer diario en el aula para trabajar el resto de contenidos. Forman parte de este bloque los distintos pasos que constituyen el proceso de resolución de un problema, que se articulan en torno a un método o modelo, así como el desarrollo de una actitud positiva hacia las matemáticas.

Ejemplos:

"Carla ha comprado 11 chicles de menta, 13 chicles de fresa y 9 chicles de melón. <u>Estima cuántos</u> chicles ha comprado Carla en total. <u>Calcula cuántos</u> chicles ha comprado Carla en total y <u>comprueba el resultado de tu estimación</u>" (Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 3º curso).

"<u>Resuelve este problema</u> y <u>explica los pasos que has seguido para hacerlo.</u> El dentista visitó a los alumnos y alumnas del colegio de Manuel y les enseñó cómo limpiarse los dientes y la lengua con un cepillo de dientes. Después regaló un cepillo a cada escolar. Si llevó una caja con 320 cepillos y otra caja con el doble, ¿cuántos cepillos de dientes llevó el dentista al colegio de Manuel?" (Edelvives. Guía didáctica, Evaluación inicial, 4º curso).

Este tipo de ítems fue codificado de dos formas distintas, puesto que son varias las tareas que se solicitan a los alumnos: por un lado, como problema en el que se demanda la resolución, se codificó en la categoría correspondiente a su estructura semántica; por otro lado, como tarea en la que se pide llevar a cabo uno o varios pasos del proceso de resolución, se codificó en el bloque 1 de contenidos. Obsérvese en los ejemplos anteriores que, mientras que en el primer problema se pide al alumno llevar a cabo dos pasos del proceso, en el segundo problema la demanda consiste en llevar a cabo todos los pasos de resolución. De acuerdo con la idea que acabamos de exponer, para codificar los ítems de los distintos bloques de contenidos utilizamos como referencia los estándares de aprendizaje evaluables del Real Decreto 126/2014, pero dado que en este documento no se diferencia entre diferentes tipos de modelos de resolución, seguimos también la propuesta de Sánchez y Vicente (2015) para la codificación de los ítems del bloque 1. Estos autores, basándose en los modos de resolución de problemas (superficial y genuino) planteados por Verschaffel et al. (2000), realizaron un estudio con el objeto de comprobar si los modelos propuestos por los libros de texto incluían el razonamiento como paso necesario para resolver los problemas. En el Anexo I se muestra una síntesis de esta propuesta.

Siguiendo a estos autores, para la codificación de los ítems del bloque 1 se establecieron siete categorías, que se corresponden con los siete pasos que conforman el proceso de resolución un problema:

- Paso 1. Datos.
- Paso 2. Razonamiento.
- Paso 3. Estrategias de resolución.
- Paso 4. Operaciones.
- Paso 5. Resultado.
- Paso 6. Comprobación del resultado.
- Paso 7. Inventar.

Asimismo, se tuvieron en cuenta las subcategorías que establecen estos autores dentro de cada una de las siete categorías, que también aparecen en el Anexo I. Los pasos correspondientes a datos, estrategias de resolución, elección de operaciones, expresión y comprobación del resultado, e inventar, se consideraron como propios del modelo superficial de resolución; mientras que todas las combinaciones de los pasos anteriores que incluyeran el razonamiento (paso 2), fueron consideradas como propias del modelo genuino.

Por último, los ítems de este bloque en los que se demandaban varias tareas fueron codificados tantas veces como tareas eran demandadas. Por ejemplo, el problema: *"El equipo de baloncesto de Manuel ha hecho 37 canastas y el de Pablo ha conseguido 43 canastas. ¿Cuántas canastas ha conseguido más el equipo de Pablo que el de Manuel? <u>Lee atentamente el enunciado</u>, <u>identifica la pregunta</u> y <u>calcula la solución</u>"* (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso), se codificó dentro de las categorías de datos (lee atentamente el enunciado); estrategias (identifica la pregunta); y operaciones (calcula la solución).

- **Bloque 2. Números**

Este bloque contempla dos categorías conceptuales: el desarrollo del sentido numérico o alfabetización numérica, y la operatividad. En la primera categoría se incluye la lectura, escritura y orden de distintos tipos de números (naturales, fracciones, decimales, romanos). En la segunda categoría se incluye el conocimiento, la utilización y automatización de los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números; el cálculo, teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones y aplicando las propiedades de las mismas; la iniciación en el uso de porcentajes y proporcionalidad directa.

Ejemplo, *"Multiplica de dos maneras distintas y compara los resultados (Datos: 6, 8 y 9). ¿Qué propiedad has aplicado?"* (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso).

- **Bloque 3. Medida**

En este bloque también se contemplan dos categorías conceptuales: en primer lugar, el conocimiento, la utilización y la transformación de las distintas unidades de medida relativas a la longitud, superficie, peso/masa, capacidad, tiempo y sistema monetario; en segundo lugar, el uso del instrumento de medida más pertinente, de acuerdo con el tipo de medición. Ejemplo, *"Indica cuáles de las siguientes cantidades equivalen a 2h 6 min: a) 136 minutos; b) 7.560 segundos; c) 120 minutos 360 segundos; d) 126 minutos"* (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación final, 5º curso).

- **Bloque 4. Geometría**

Este bloque está organizado en una única categoría conceptual enfocada al conocimiento, utilización, clasificación, reproducción y representación de objetos en el plano y en el espacio. Forman parte de este bloque las nociones geométricas básicas (paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie); las figuras planas y el cálculo de sus áreas (triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide y trapecio); los poliedros, prismas, pirámides y cuerpos redondos (cono, cilindro y esfera). Ejemplo, *"Identifica cada poliedro regular. Indica cuántas caras tiene: tetraedro, dodecaedro, icosaedro"* (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final, 6º curso).

- **Bloque 5. Estadística y probabilidad**

Este último bloque se articula en torno a dos categorías conceptuales. Por un lado, los contenidos que permiten el tratamiento de la información: recogida y registro de informaciones cuantificables; utilización de recursos de representación gráfica como tablas de datos, bloques de barras y diagramas lineales; lectura e interpretación de representaciones gráficas de un conjunto de datos. Por otro lado, los contenidos relacionados con la predicción de resultados y el cálculo de probabilidades. Ejemplo, *"Tiras dos monedas al aire. Escribe posible, imposible o seguro: a) salen dos caras; b) salen tres cruces; c) no sale ninguna cara; d) solo salen caras y cruces. ¿Hay algún suceso más probable que los otros? ¿Cuál?"* (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicial, 4º curso).

Por otra parte, se establecieron tres criterios de categorización para codificar una serie de ítems que aparecieron en las pruebas de evaluación de los primeros niveles, sobre todo en el primer nivel de Educación Primaria, que no se ajustaban a los estándares de aprendizaje evaluables adoptados como criterios de categorización. Estos criterios fueron los siguientes:

1. Se codificaron en el bloque de números los ítems ligados a la noción de cantidad (muchos, pocos, ninguno, alguno, todos, más que, menos que, tantos como, etc.) Se tata de ítems que evalúan conocimientos de carácter protomatemático, o esquemas protocuantitativos[29] en la terminología de Resnick, (1992). Estos esquemas operan de manera perceptual y permiten al alumno de 3 ó 4 años realizar juicios de cantidad sin precisión numérica. Ejemplo, *"Observa las imágenes y completa las oraciones con las siguientes etiquetas: pocos/muchos. Hay…pulpos; hay…peces; hay…regalos. Haz un dibujo con pocos regalos"* (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 1º curso).

2. Por último, fueron codificados en el bloque de geometría los ítems que introducen a los alumnos en nociones básicas relacionadas con la orientación y localización (dentro, fuera; arriba, abajo; lejos, cerca, etc.) Se trata de conceptos que se centran en invariantes proyectivos[30] y no en invariantes métricos, y que constituyen un pilar básico en la construcción de la representación del espacio en niños de edad temprana (Vecino, 2011). Por ejemplo, *"Observa al pescadero. Co-*

[29] Se codificaron en el bloque de medida aquellos ítems que, aunque no corresponden a medidas normalizadas, están relacionadas con nociones relativas a la magnitud, y cuya construcción por parte del alumno arranca en la etapa de Educación Infantil (Belmonte, 2011). Nos referimos a conceptos básicos de masa/peso, (pesa más, pesa menos, etc.); capacidad, (cabe más, cabe menos, etc.); tamaño, (más grande, más pequeño, etc.); tiempo, (hoy, ayer, mañana, etc.). Ejemplo, *"Rodea el hombre con la nariz más grande y colorea el hombre que tiene la nariz más pequeña"* (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 1º curso).

[30] La escuela piagetiana puso de manifiesto tres tipos de geometrías cuyos invariantes aparecen en las primeras representaciones espaciales de los niños: la geometría topológica, la geometría proyectiva y la geometría métrica. Los principales invariantes de la geometría proyectiva son la orientación y la localización espacial, invariantes que se traducen en nociones como: delante-detrás, encina-debajo, sobre- bajo, derecha-izquierda, entre, al lado y enfrente (Vecino, 2011).

lorea de rojo las cajas que están a la derecha del pescadero y de amarillo las que están a su izquierda. Después completa las oraciones: El cuchillo está en la mano (…) del pescadero. En la mano (…) tiene un pescado. La manguera está a la (…) del pescadero" (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 1º curso).

- **Variable: estructura semántica de los problemas**

Por lo que respecta a la estructura semántica de los problemas, se utilizó el mismo sistema de categorización que en el estudio anterior (véase Anexo III, segunda columna). Los problemas de estructura aditiva simples fueron categorizados de acuerdo con las dieciocho categorías propuestas por Heller y Greeno (1978): dos subtipos de problemas de combinación, seis de cambio, y seis de comparación; así como los seis subtipos de problemas de igualación propuestos por Carpenter y Moser (1983). Para la categorización de los problemas de estructura aditiva compuestos o de más de una operación, se siguió el sistema de categorización propuesto por Orrantia et al. (2005), que recoge once categorías, aunque como apuntan los autores, se contempla la posibilidad de identificación de nuevas categorías.

También se codificaron los problemas que combinan estructuras aditivas con estructuras multiplicativas. En estos casos, los problemas fueron codificados en la categoría de la parte de la estructura aditiva correspondiente. Estos problemas aparecen indicados entre paréntesis en la tabla de resultados. Por ejemplo, *"Lidia ha hecho 20 mosaicos y César ha hecho la mitad que ella. Teo ha hecho el doble de mosaicos que Lidia. ¿Cuántos mosaicos han hecho entre todos?"* (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso).

Puesto que estábamos interesados en conocer toda la tipología de problemas utilizados por las editoriales en las pruebas de evaluación, en este segundo estudio sí se codificaron los problemas con estructura multiplicativa y sin estructura aditiva, es decir, aquellos problemas que se resuelven mediante una multiplicación y/o división.

- **Variable: grado de desafío de los problemas**

Con respecto al análisis del grado de desafío que presentan algunos problemas, se adoptó el mismo sistema de categorización utilizado en el estudio anterior. Este sistema de categorización, clasifica los problemas que presentan algún nivel de desafío en las categorías de información (datos de más / datos de menos), e invención (inventar totalmente /

inventar parcialmente). Tal y como hemos argumentado en el estudio anterior, añadimos al sistema dos nuevas categorías: reconstrucción, y doble desafío, para clasificar aquellos problemas que solicitaban a los alumnos dos tareas diferentes. Véase la codificación en el Anexo III, segunda columna.

- **Variable: contexto situacional de los problemas**

Finalmente, para llevar a cabo el análisis del contexto situacional en el que se presentan los problemas, se adoptó, al igual que en nuestro primer estudio, el sistema de categorización utilizado por Orrantia et al. (2005), que se fundamenta en el trabajo de Reusser (1988, 1990). En este sistema se distinguen, por un lado, una serie de categorías básicas de información situacional (descripción, intención, acción, causa y tiempo); por otro lado, categorías resultantes de la combinación de las anteriores. En el epígrafe dedicado a la codificación de nuestro primer estudio, se describe este sistema de categorización. Véase la codificación en el Anexo III, tercera columna.

V.3.4. Fiabilidad

Tal como se indicó en el primer estudio de esta tesis, para asegurar el proceso de codificación fue utilizado el mismo instrumento de fiabilidad para los Estudios 1 y 2. Por tanto, los problemas fueron seleccionados aleatoriamente tanto del conjunto de problemas de los libros de texto del alumno (Estudio 1) como del conjunto de problemas de las pruebas de evaluación de las guías didácticas (Estudio 2) para las siguientes variables:

a) Estructura semántica de los problemas.

b) Nivel de desafío y naturaleza.

c) Tipo de información situacional incluida en los problemas.

Véanse los resultados de la fiabilidad para la codificación de estas variables en las tablas 19 y 20 (epígrafe IV.3.4. del Estudio 1).

Dado que en este segundo estudio se contaba con una variable más, la frecuencia y variabilidad de los diferentes tipos de ítems incluidos en las pruebas de evaluación por las editoriales, para asegurar el proceso de codificación se llevó a cabo un procedimiento de fiabilidad interjueces con esta variable. En primer lugar, el autor de la tesis realizó la codificación de todos los ítems distinguiendo el bloque de contenido al que pertenecían. Asimismo, en el caso de los problemas (bloque 1) se señalaron los pasos contemplados en el proceso de resolución. En segundo lugar, el primer director de la tesis llevó a cabo, de forma independiente al autor, la codificación de 120 ítems seleccionados de manera aleatoria entre el conjunto de ítems incluidos en la unidad de análisis. Posteriormente, se calculó el índice Kappa con el paquete estadístico SPSS 27, y de esta manera se pudo establecer el grado de acuerdo entre ambas codificaciones. Los resultados se muestran en la tabla 29:

Tabla 29. Valor e interpretación del índice Kappa de Cohen para el acuerdo entre dos jueces. Autor de la tesis y uno de los directores.

Acuerdo entre los dos evaluadores (120 ítems)	% global de acuerdo	κ de Cohen	I.C. (95%)	Rango de concordancia (Landis y Koch, 1977)
Bloques contenido	95.83%	.95	.90-.99	Casi perfecto

En un segundo momento, cuatro doctores en educación o psicología de la Educación llevaron a cabo la codificación de un total de 40 ítems también seleccionados aleatoriamente de entre los ítems que componían la unidad de análisis (véase Anexo IV, tarea 4). Por último, se siguió el mismo procedimiento que en el caso anterior para calcular el índice Kappa de Cohen como indicativo de la fiabilidad de los 4 jueces. Los resultados de este acuerdo se muestran en la tabla 30:

Tabla 30. Valor e interpretación del índice Kappa de Cohen para el acuerdo entre cinco jueces. Autor de la tesis y cuatro doctores en educación y psicología de la educación.

Acuerdo entre 5 jueces (autor de la tesis + 4 jueces externos)	% global de acuerdo	κ de Cohen	I.C. (95%)	Rango de concordancia (Landis y Koch, 1977)
Bloques contenido	95%	.90	.77-1.0	Casi perfecto

V.4. Resultados

- **Distribución de los ítems en las pruebas de evaluación**

En primer lugar, se presentan los resultados del análisis de la frecuencia de la totalidad de los ítems de las pruebas de evaluación propuestas por las distintas editoriales, distinguiendo entre ejercicios y problemas. En la tabla 31 se muestran los resultados de la distribución en estas dos categorías por editoriales.

Tabla 31. Resultados totales de la frecuencia de ítems en las pruebas de evaluación, distinguiendo entre ejercicios y problemas.

EDITORIALES	**ÍTEMS**	**EJERCICIOS**		**PROBLEMAS**	
SANTILLANA (B+ A)	421	315	(74.8%)	106	(25.0%)
ANAYA	159	139	(87.5%)	19+1*	(12.5%)
S.M	110	88	(80.0%)	21+1*	(20.0%)
VICENS VIVES	384	311	(81.0%)	73	(19.0%)
EDEBÉ	203	169	(83.2%)	33+1*	(16.8%)
EDELVIVES	627	554	(88.2%)	68+5*	(11.6%)
TOTAL	1904	1576	(82.7%)	320+8*	(17.3%)

Editorial Santillana (B + A): pruebas de nivel básico (B) + pruebas de nivel avanzado (A). Los números con asterisco corresponden a problemas con algún grado de desafío.

Tal como se puede observar, la distribución del total de ítems (1904) se muestra muy desigual. Las pruebas de evaluación analizadas están constituidas principalmente por ejercicios (1576), que representan el 82.7% de los ítems propuestos al alumnado, frente a los problemas (328), que representan tan sólo el 17.3% de la totalidad. La inspección de la tabla indica que, en términos generales, las seis editoriales muestran un panorama similar en cuanto a la baja frecuencia de ítems dedicados a evaluar problemas frente a ítems que evalúan ejercicios. Ahora bien, existen algunas diferencias: la editorial Edebé (16.8%) se sitúa justo en la media; las editoriales Edelvives (11.6%) y Anaya, (12.5%) son las que presentan una menor proporción de problemas; mientras que Vicens Vives (19%) S.M (20%) y Santillana (25%) por este orden, son las editoriales con una mayor proporción de problemas en comparación con ejercicios.

En la tabla 32 se presentan los resultados de la frecuencia y variabilidad de los ítems, atendiendo a los cinco bloques de contenidos establecidos por el currículum oficial. Para el análisis de los resultados, debe tenerse en cuenta que en el bloque 1 se evalúan procesos, métodos y actitudes en la R.P, mientras que en los restantes bloques se evalúan ejercicios relacionados con números (bloque 2) medidas (bloque 3) geometría (bloque 4) y estadística y probabilidad (bloque 5).

Tabla 32. Resultados de la frecuencia y variabilidad de los ítems por bloques de contenidos.

BLOQUES DE CONTENIDOS										
EDITORIALES	**BLOQUE 1.**		**BLOQUE 2.**		**BLOQUE 3.**		**BLOQUE 4.**		**BLOQUE 5.**	
SANTILLANA			197	23.3%	50	18.6%	60	16.3%	8	6.8%
ANAYA			88	10.4%	24	9.0%	22	6.0%	5	4.2%
S.M			55	6.5%	9	3.3%	22	6.0%	2	1.7%
VICENS VIVES			150	18%	53	20%	72	19.6%	36	30.7%
EDEBÉ			86	10.2%	27	10%	39	10.6%	17	14.5%
EDELVIVES	22	3.8%	248	29.4%	105	39.1%	152	41.4%	49	42.0%
TOTAL	22	1.3%	824	51.5%	268	16.7%	367	23.0%	117	7.3%

B.1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; B.2. Números; B.3. Medida; B.4. Geometría; B.5. Estadística y probabilidad. Editorial Santillana (B + A): pruebas de nivel básico (B) + pruebas de nivel avanzado (A).

La distribución de los ejercicios en bloques de contenidos se muestra muy irregular. Las editoriales, en las pruebas de evaluación, destinan la mitad de los ítems a evaluar el bloque de números y operaciones (51.5%); en segundo lugar, se sitúan los bloques de geometría (23%) y medida (16.7%) con porcentajes más próximos; y muy lejos del bloque de números, aparecen los bloques de estadística y probabilidad (7.3%) y de procesos, métodos y actitudes en R.P, este último con una presencia casi nula, pues tan sólo representa el 1.3% del total.

Sin duda, el resultado más relevante corresponde al bloque de procesos, métodos y actitudes en matemáticas con una presencia, como hemos comentado, casi nula. Además, como se puede observar en la tabla 32, de las seis editoriales analizadas, este bloque únicamente es considerado como evaluable por la editorial Edelvives, que incluye tan sólo 22 (3.8%) de los 627 ítems dedicados a evaluar el resto de los contenidos de los cinco bloques.

En la tabla 33 se muestran los resultados de la frecuencia de estos ítems, por categorías (pasos en el proceso de resolución) y niveles educativos. Como se puede observar, a partir de estos 22 ítems se identifican 36 pasos correspondientes al proceso de resolución. Teniendo en cuenta que el modo de resolución puede ser genuino (si se incluye el razonamiento o combinación de este paso con los demás) y superficial (si no se incluye razonamiento) el análisis de los datos indica que sólo el 30.5% de los pasos corresponde al modelo genuino, mientras que el 69.5% restante corresponde al modelo superficial, con esta frecuencia de categorías: comprobación del resultado (25%), operaciones (17%), resultado (14%), datos (8%), estrategias (5.5%), e inventar (0%).

Tabla 33. Resultados de la frecuencia de los ítems del bloque de procesos, métodos y actitudes, en la editorial Edelvives: categorías y niveles educativos.

NIVEL	ÍTEM	PASO 1	PASO 2	PASO 3	PASO 4	PASO 5	PASO 6	PASO 7	TOTAL
1º	1		1	1					6(17%)
	2		1		1				
	3					1	1		
2º	4		1						9(25%)
	5	1			1				
	6				1		1		
	7	1		1	1				
	8	1							
3º	9				1		1		8(22%)
	10				1	1	1		
	11		1						
	12		1						
	13		1						
4º	14		1						3(8%)
	15		1						
	16						1		
5º	17					1	1		5(14%)
	18		1						
	19					1	1		
6º	20		1						5(14%)
	21					1	1		
	22		1				1		
TOTAL		3 (8.0%)	11 (30.5%)	2 (5.5%)	6 (17%)	5 (14%)	9 (25%)	0	36

Paso 1. Datos; Paso 2. Razonamiento; Paso 3. Estrategias de resolución; Paso 4. Operaciones; Paso 5. Resultado; Paso 6. Comprobación del resultado; Paso 7. Inventar.

El razonamiento se incluye en 8 ítems como un único paso y en 3 ítems combinado con los pasos correspondientes a estrategias, operaciones y comprobación del resultado. En el resto de los 11 ítems, donde no se incluye el razonamiento como paso, la categoría más frecuente es la combinación de resultados y comprobación; y las categorías menos frecuentes son estrategias, que se incluye en un solo ítem, e inventar que es inexistente.

El análisis de los resultados muestra igualmente que la frecuencia del conjunto de categorías en los distintos niveles educativos es similar (1º curso, 17%; 2º curso, 25%; 3º curso, 22%; 5º y 6º, 14%) excepto en 4º curso, con un 8%.

Una cuestión importante para la discusión es que a pesar de que el bloque 1 contempla también las actitudes, además de los procesos y métodos, estas no son consideradas por ninguna editorial como objeto de evaluación.

■ **Distribución de los PAVs en las pruebas de evaluación: frecuencia y variabilidad atendiendo a su estructura semántica**

Seguidamente, en la tabla 34 se muestran los resultados totales de la frecuencia y variabilidad de las distintas categorías de problemas analizadas en las pruebas de evaluación propuestas por las seis editoriales en cada nivel educativo.

Tal como se refleja en esta tabla, la mayor presencia de la categoría de combinación se debe a la inclusión de los problemas de combinación 1, que son los de mayor frecuencia en todas las pruebas de evaluación de todos los niveles educativos; sin embargo, los problemas de combinación 2, constituyen uno de los tipos de problemas con una frecuencia más baja. Con los problemas de cambio ocurre algo similar. En esta categoría, los problemas más abundantes son los de cambio 2, también presentes en todos los niveles educativos; por el contrario, la categoría de cambio 1, es casi inexistente. Asimismo, es importante señalar que el resto de las categorías de cambio (3, 4, 5 y 6) no se incluyen.

Por lo que respecta a los problemas de comparación, de las seis categorías sólo aparecen cuatro: la más numerosa es la de comparación 1, aunque con una frecuencia muy baja; a esta categoría le siguen los problemas de comparación 2, 3 y 4, que constituyen los problemas simples menos frecuentes de la muestra.

Tabla 34. Resultados totales de la frecuencia y variabilidad de los problemas en las pruebas de evaluación en cada nivel educativo.

	1º curso		**2º curso**		**3º curso**		**4ºcurso**		**5ºcurso**		**6ºcurso**		**TOTAL**
CA1	1	CA	1	CA	1	CA	1	CA	1	CA		CA	CA
CA2	1	13.3%	8(2)	29%	7(4)	18.4%	4(8)	17.5%	3(3)	10.1%	2(7)	13.4%	20.3%
			10(1)		12(6)		3(17)		2(18)		4(4)		
CB1	8	CB		CB		CB		CB		CB		CB	CB
CB2	1	60%		29%		27.6%	2(1)	31%		29.9%	(5)	19.4%	32.8%
CP1	2		(2)		4		1				2		
CP2		CP	(2)	CP		CP		CP		CP		CP	CP
CP3	1	20%		10.5%		6.1%		1.3%		1.4%		2.9%	7%
									(1)				
TOTAL SIMPLES	14	93.3%	19(7)	68.5%	24(10)	52.1%	11(26)	49.8%	6(22)	41.4%	8(16)	35.7%	57%
CONSISTENTES	11	73.3%	24	63.2%	30	45.9%	33	44.4%	28	41.4%	17	25.3%	49%
INCONSISTENTES	3	19.9%	2	5.2%	4	6.1%	4	5.3%	0	0%	7	10.4%	8%
A					2(1)	6.15%	6(3)	12.1%	2(4)	8.7%	2(6)	12%	6.4%
B									2	3%	2	3%	1%
C									1	1.4%			1.4%
D			(1)	2.6%	(1)	2.05%			(1)	1.4%	(1)	1.5%	1.2%
E			(1)	2.6%			2	2.6%			(1)	1.5%	1.1%
F					2	4.1%			1	1.4%			0.9%
TOTAL COMPUESTOS	0	0	(2)	5.2%	4(2)	12.3%	8(3)	14.8%	6(5)	16%	4(8)	18%	11%
TOTAL SIMPLES Y COMPUESTOS	14	93.3%	19(9)	73.7%	28(12)	64.4%	19(29)	64.6%	12(27)	56.5%	12(24)	53.7%	68%
CON ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA	0	0	6	15.7%	23	35.3%	25	33.7%	30	43.4%	31	46.2%	29%
CON DESAFÍO	1*	6.6%	4*	10.5%	2*	3%	1*	1.3%					3%
TOTAL	15	4.5%	38	11.5%	65	20%	74	22.5%	69	21%	67	20.5%	100%

CA= Cambio; CB = Combinación; CP = Comparación. Con asterisco, problemas con desafío. Entre paréntesis, problemas con estructura aditiva + multiplicativa.

De acuerdo con la hipótesis de la consistencia (Lewis y Mayer, 1987) en la tabla 34 podemos apreciar que del total de problemas simples (57%) los problemas consistentes (más fáciles de resolver) representan el 49%, frente a los problemas inconsistentes (más difíciles) con un 8%.

En referencia a los problemas de estructura aditiva compuestos, el análisis de los resultados ofrece un panorama similar, tanto en lo concerniente a la baja frecuencia (11%) como a la escasa variabilidad. Así, de las once categorías de problemas compuestos propuestas por Orrantia, et al. (2005), sólo son incluidas en las pruebas de evaluación seis categorías: por un lado, la categoría A, la más numerosa; por otro lado, las categorías B, C, D, E y F, con diferencias muy poco destacables. Además, adoptando de nuevo la clasificación de Lewis y Mayer (1987), el análisis de estos problemas nos indica, por un lado, que las categorías A, B y F están conformadas por estructuras de cambio consistentes; por otro lado, las estructuras de las categorías C, D y E son de comparación, igualmente consistentes.

Por último, vemos que tanto los problemas de estructura multiplicativa, como los que combinan estructuras aditivas con multiplicativas (estos últimos aparecen en la tabla 34 entre paréntesis) comienzan a ser utilizados por las editoriales en las pruebas de evaluación de segundo nivel de Educación Primara, momento en el que el algoritmo de la multiplicación se introduce en el currículum oficial. A partir de este nivel educativo, se produce un incremento notable de estos dos tipos de problemas como ocurría en el estudio anterior.

En la tabla 35 se presentan los resultados de la frecuencia y variabilidad de los problemas por editoriales.

Tabla 35. Resultados totales de la frecuencia y variabilidad de los problemas por editoriales.

	SANTILLANA A+B		**ANAYA**		**S.M**		**VICENS VIVES**		**EDEBÉ**		**EDELVIVES**	
CA1		CA		CA	2	CA		CA	1	CA	2	CA
CA2	5(13)	17%	2(1)	15%	3	23%	4(5)	12.3%	2(2)	14.7%	8(3)	17.8%
CB1	11(16)	CB	5(1)	CB	2(3)	CB	5(7)	CB	2(5)	CB	14(13)	CB
CB2	2(2)	29.2%	2	40%	(1)	32%	(1)	17.8%	1	23.5%	3	41%
CP1	4				1		3				1	
CP2	1	CP				CP		CP				CP
CP3	1	6.6%				4.5%	1	5.4%				1.3%
CP4	(1)											
TOTAL SIMPLES	24(32)	52.8%	9(2)	55%	8(4)	54.5%	13(13)	35.6%	6(7)	38.2%	28(16)	60.2%
CONSISTENTES	52	49%	9	41%	11	50%	22	30.1%	12	35.2%	40	54.7%
INCONSISTENTES	4	3.7%	2	9%	1	4.5%	4	5.5%	1	3%	4	5.4%
A	2(11)	12.2%	3(1)	20%			1(1)	2.7%	4	11.7%	4(1)	7%
B	2	2%					1	1.3%				
C	1	1%										
D	(3)	2.8%										
E	(3)	2.8%										
F	4	3.7%							1	3%		
TOTAL COMPUESTOS	9(17)	24.5%	3(1)	20%		0%	3	4.1%	5	14.7%	4(1)	7%
CON E. MULTIPLICATICA	24	22.6%	4	20%	9	41%	44	60.2%	15	44.1%	19	26%
CON DESAFÍO			1*	5%	1*	4.5%			1*	3%	5*	6.8%
TOTAL (328)	57(49)	32.3%	20	6%	22	6.7%	53(20)	22.2%	27(7)	10.3%	56(17)	22.2%

CA= Cambio; CB= Combinación; CP = Comparación. Con asterisco, problemas con desafío. Entre paréntesis, estructura aditiva + multiplicativa

Por lo que respecta a la distribución de los problemas simples, cuatro de las seis editoriales presentan porcentajes próximos a la media (57%): Santillana (52.8%) S.M (54.5%) Anaya (55%) y Edelvives (60%). Las editoriales Edebé (38.2%) y Vicens Vives (35.6%) son las que menor proporción de problemas simples incluyen en las pruebas de evaluación.

En todas las editoriales la categoría más frecuente es la de combinación, concretamente combinación 1; la categoría de combinación 2 es incluida por todas las editoriales, aunque en una proporción muy baja. La segunda categoría más frecuente es la de cambio 2, que también es incluida por todas las editoriales; sin embargo, la categoría de cambio 1 sólo es incluida y en una proporción muy baja, por tres de las seis editoriales (S.M, Edelvives y Edebé); el resto de categorías de cambio no es incluido por ninguna editorial.

La categoría menos frecuente con mucha diferencia es la comparación: Santillana es la editorial con una mayor frecuencia y variabilidad en la presentación de esta categoría de problemas, pues de los seis tipos de problemas de comparación incluye cuatro; Vicens Vives, la segunda editorial con mayor proporción de problemas de comparación, incluye dos tipos; S.M y Edelvives, incluyen un solo tipo; y en las editoriales Anaya y Edebé, esta categoría es inexistente. Por otra parte, no existen diferencias destacables entre las editoriales en la presentación de problemas consistentes e inconsistentes; la frecuencia de problemas consistentes es significativamente mayor en todas las editoriales: Santillana (49% / 3.7%), Anaya (41% / 9%), S.M (50% / 4.5%), Vicens Vives (30.1% / 5.5%), Edebé, (35.2% / 3%), Edelvives (54.7% / 5.4%).

En relación a los problemas compuestos, Santillana (24.5%) y Anaya (20%) son las editoriales con un mayor porcentaje de problemas de este tipo; a estas dos editoriales les siguen Edebé (14.7%), Edelvives (7%), Vicens Vives (4.1%), y S.M, que no presenta ningún problema compuesto en la totalidad de las pruebas de evaluación. La tabla 35 refleja que las editoriales que presentan una menor frecuencia de problemas compuestos son precisamente las que presentan una mayor frecuencia de problemas de estructura multiplicativa.

- **Análisis del grado de desafío**

Tal como se observa en la tabla 36, la presencia de los problemas con algún grado de desafío es prácticamente nula. Este tipo de problemas representa tan solo el 3% del total de problemas utilizados por las editoriales para evaluar el nivel curricular de los alumnos en el área de matemáticas.

Tabla 36. Resultados de la frecuencia y variabilidad de problemas que presentan algún grado de desafío por niveles educativos y editoriales. INV (inventar). INF (información).

	NIVELES EDUCATIVOS													
EDITORIALES	**1º**		**2º**		**3º**		**4º**		**5º**		**6º**		**TOTAL**	
SANTILLANA														
ANAYA			1										1	
S.M	1												1	
VICENS VIVES														
EDEBÉ					1								1	
EDELVIVES			3		1		1						5	
TOTAL	1		4		2		1						8 (3%)	
	INV	INF	INV	INF	INV	INF	INV	INF	INV	INF	INV	INF	INV	INF

Con respecto a la editorial Santillana, un dato que resulta relevante se refiere al hecho de que esta editorial, como hemos visto en nuestro primer estudio, es la que más problemas con grado de desafío incluye en el libro de texto del alumno y, sin embargo, en las pruebas de evaluación propuestas no incluye ningún problema de este tipo. Algo similar ocurre con las editoriales Anaya y S.M. Aunque en menor proporción que Santillana, también incluyen problemas de este tipo en sus libros de texto y paradójicamente estos problemas no forman parte de la evaluación. Tan sólo incluyen un problema en todas las pruebas, al igual que la editorial Edebé. La editorial Vicens Vives no presenta ningún problema con algún grado de desafío, mientras que la editorial Edelvives es la que más presenta, aunque de forma muy escasa.

El análisis de los datos por niveles educativos revela que los problemas de este tipo se concentran en los cuatro primeros cursos de la Educación Primaria, siendo inexistentes en los dos últimos. Finalmente, si atendemos al tipo de desafío, vemos que la categoría de información (detectar datos de más y datos de menos) no es incluida. Sólo se contempla, por tanto, la categoría de invención, y dentro ella, únicamente aparece un problema que debe ser inventado totalmente; los siete restantes demandan al alumnado identificar la pregunta a partir de un enunciado (inventar parcialmente).

- **Análisis del contexto situacional**

Como se puede observar en las tablas 37.a y 37.b, de los 328 problemas incluidos en las pruebas de evaluación, sólo 48 contienen información situacional de algún tipo, dato que representa el 14.6% de la totalidad de los problemas incluidos en las pruebas de evaluación por las seis editoriales analizadas. Las categorías más abundantes son las acciones de los protagonistas de los problemas; el resto de categorías aparece en una proporción muy baja sin que existan diferencias considerables entre ellas. Estos datos son coincidentes con los obtenidos en nuestro primer estudio.

El análisis por editoriales revela que la única diferencia relevante respecto a la frecuencia y variabilidad en la inclusión de información situacional la constituyen las editoriales Edelvives (18 problemas) frente a Anaya (1 problema). El resto de las editoriales muestran una proporción muy similar.

En cuanto al análisis por niveles, la información situacional en los problemas comienza a incluirse a partir del 3º curso de Educación Primaria, lo cual significa que, en los primeros cursos, momento en que los alumnos comienzan a resolver problemas de manera formal, las ayudas para la comprensión son menores.

Tabla 37.a. Resultados de la frecuencia y variabilidad de los problemas atendiendo el contexto situacional donde aparecen: Santillana, Anaya y S.M.

	SANTILLANA							ANAYA							S.M						
INFORMACIÓN SITUACIONAL	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**TOTAL**	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**TOTAL**	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**TOTAL**
ACCIONES			1	1			2				1							1	2		3
DESCRIPTIVO																	1				1
TEMPORAL																					
CAUSAL																					
INTENCIONAL			1		2	1	4														
COMPLETO																					
ACCIÓN + DESCRIPTIVO																					
ACCIÓN + TEMPORAL																					
ACCIÓN + CAUSAL																					
ACCIÓN + INTENCIONAL																					
DESCRIPTIVO + ACCIÓN																					
INTENCIONAL + ACCIÓN																		1			1
TOTAL			2	1	2	1	6				1			1			1	2	2		5

Tabla 37.b. Resultados de la frecuencia y variabilidad de los problemas atendiendo el contexto situacional donde aparecen: Vicens Vives, Edebé y Edelvives

	VICENS VIVES							EDEBÉ							EDELVIVES						
INFORMACIÓN SITUACIONAL	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**TOTAL**	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**TOTAL**	1º	2º	3º	4º	5º	6º	**TOTAL**
ACCIONES				3	1		4			1	1	2	1	5	1				2	1	4
DESCRIPTIVO					1		1			2				2				2	1		3
TEMPORAL																					
CAUSAL													1	1							
INTENCIONAL			1				1					1		1			1	1			2
COMPLETO																					
ACCIÓN + DESCRIPTIVO			1				1										1	1	2		4
ACCIÓN + TEMPORAL																					
ACCIÓN + CAUSAL			1				1												1		1
ACCIÓN + INTENCIONAL																1			1		2
DESCRIPTIVO + ACCIÓN				1			1												1		1
INTENCIONAL + ACCIÓN																				1	1
TOTAL			3	4	2		9			3	1	3	2	9	1	1	2	4	8	2	18

V.5. Discusión

La evaluación del aprendizaje de los alumnos constituye un elemento curricular de primer orden a la hora de conocer qué currículo es realmente valorado y, por tanto, enseñado. Los contenidos que son evaluados, la función que se atribuye a la evaluación (que idealmente tiene que ser una *función reparadora*) y, asimismo las formas (instrumentos) para llevarla a cabo, son elementos que traducen las prácticas educativas promovidas en las aulas. Al igual que los libros de texto, que han sido analizados en nuestro primer estudio, las pruebas de evaluación incluidas en las guías didácticas de las editoriales, son ventanas que nos permiten asomarnos a la realidad escolar.

Dado el alcance de estas pruebas como un instrumento para acercarnos al currículum en la práctica, el objetivo general de nuestro segundo estudio se ha dirigido a analizar la relevancia de los PAVs en las pruebas de evaluación del área de matemáticas en Educación Primaria, publicadas en las guías didácticas de seis editoriales de nuestro país. Este objetivo general se ha concretado en el análisis de los diferentes ítems diseñados en cada prueba de evaluación que nos ha permitido, en primer lugar, distinguir la proporción de tareas rutinarias, entendidas como ejercicios de aplicación mecánica, de las tareas no rutinarias, entendidas como situaciones problemáticas presentadas en un contexto situacional para cuya resolución se hace necesaria la intervención del razonamiento. En segundo lugar, comprobar en qué medida estas pruebas contienen ítems para evaluar el proceso de R.P, y en ese caso, qué pasos del proceso son evaluados. Por último, caracterizar, tal y como se hizo en nuestro primer estudio, los problemas incluidos por las editoriales en las pruebas de evaluación de acuerdo con tres variables: la estructura semántica, el grado de desafío y el contexto situacional en el que aparecen.

Tal como se desprende de los resultados de este estudio, la gran mayoría de los ítems presentados por todas las editoriales (82.70%) evalúan tareas reproductivas más próximas a la función del ejercicio que a la función del problema. Todos los bloques de contenido son evaluados, aunque de forma prioritaria la evaluación se focaliza en el bloque de numeración. De acuerdo con el marco de evaluación internacional establecido por TIMSS de la IEA (2015, 2019), véase Anexo VI, esta propuesta de tareas se acerca más a las dimensiones relativas al conocimiento y la aplicación de este conocimiento (recordar, reconocer, clasificar, ordenar, representar, calcular), que a la dimensión cognitiva relativa al razonamiento. En consecuencia, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en nuestro primer estudio, podemos afirmar que existe una relación entre el tipo de tareas que habitualmente realizan los alumnos en clase, mediatizadas por el libro de texto, y el tipo de tareas que las editoriales incluyen en sus guías didácticas para evaluar los logros obtenidos.

Por otro lado, con respecto a la evaluación del proceso de R.P hemos podido constatar que, de las seis editoriales analizadas sólo Edelvives ha incluido en las pruebas de evaluación ítems específicos que permitan a los profesores conocer qué tipos de estrategias siguen los alumnos para resolver los problemas, es decir, si el alumno sigue una estrategia superficial saltando de los datos a la operación y de ésta a la expresión del resultado, o si por el contrario sigue una estrategia genuina en la que se incluye el razonamiento. Sin embargo, los ítems dedicados por esta editorial a evaluar este proceso son muy escasos y no se plantean de forma sistemática a lo largo de todas las pruebas de evaluación de cada nivel educativo. Además, la función de la mayor parte de estos ítems se dirige a evaluar un único paso del proceso de resolución de forma aislada, véase el ejemplo 1, y no a comprobar si el alumno sigue estrategias de resolución donde se incluyen todos los pasos del proceso, especialmente el razonamiento, como se muestra en los ejemplos 2 y 3:

> Ejemplo 1. *Resuelve el problema y comprueba los resultados obtenidos. En un centro de salud han vacunado contra la gripe a 4570 personas. Si 309 de los vacunados eran niños, ¿cuántos adultos se vacunaron?* (Editorial Edelvives, prueba de evaluación 4º curso).

> Ejemplo 2. *Resuelve el siguiente problema y explica cómo lo has hecho. Sandra y Jorge han colgado 45 globos para la fiesta de cumpleaños de su hermano pequeño. Si Sandra ha colgado 25 globos, ¿cuántos globos ha colgado Jorge?* (Editorial Edelvives, prueba de evaluación, 3º curso).

> Ejemplo 3. *El año pasado había 92 chicos y 83 chicas en el Colegio Atlas. Este año hay 210 estudiantes, de los cuales 97 son chicos. ¿Cuántas chicas más hay este año que el año pasado? Muestra cómo lo has hecho.* (Ítem liberado de la prueba de evaluación TIMSS, 2007, 4º curso. Dominio cognitivo: razonamiento).

De acuerdo con los resultados obtenidos en el estudio realizado por Sánchez y Vicente (2015), donde se analizaban los modelos de resolución propuestos por los libros de texto de las editoriales Santillana Anaya y S.M, una de las hipótesis que planteamos en nuestro estudio fue encontrar en las pruebas de evaluación de estas editoriales un panorama similar al presentado por estos autores, caracterizado por una mayor frecuencia del modelo superficial frente al modelo de resolución genuino. Sin embargo, nuestros resultados muestran que estas tres editoriales no incluyen ningún ítem dedicado a evaluar el proceso de R.P. Como hemos comentado, los problemas presentados en las pruebas de evaluación por estas tres editoriales, y asimismo por las editoriales Edebé y Vicens-Vives, son escasos y la función que desempeñan en la evaluación se limita a su resolución, es decir, a la verificación del resultado ofrecido por el alumno mediante la ejecución de un algoritmo, sin solicitar en ningún momento explicaciones o justificaciones razonadas del proceso que se ha seguido hasta dar por finalizado el problema. En consecuencia, resulta paradójico que las editoriales incluyan modelos para el aprendizaje de la R.P en los libros de texto, aunque mayoritariamente incompletos y asistemáticos como muestra la investigación de Sánchez y Vicente (2015), y sin embargo no se contemple la evaluación del proceso de R.P en las pruebas de evaluación de las guías didácticas diseñadas por las mismas editoriales.

Siguiendo a Blanco y Cárdenas (2013), si asumimos que la evaluación es un elemento consustancial al proceso de enseñanza-aprendizaje, debería existir una conexión entre los contenidos y procesos de aprendizaje que el currículum señala como logros que deben alcanzarse y su evaluación. Esto es, el proceso de la R.P debería tener un reflejo en la evaluación, puesto que todo lo que no se evalúa, *se devalúa*: "los alumnos consideran importantes los aspectos de la instrucción que los profesores enfatizan y evalúan regularmente" (Lester y Kroll, 1991, p. 277). Es más: "el sistema de evaluación juega un papel fundamental porque sus finalidades y métodos ejercen más influencia en *cómo* y *qué* aprenden los estudiantes que cualquier otro elemento del proceso de aprendizaje" (Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2011, p.2). De acuerdo con las ideas de estos autores, cabría cuestionar la utilidad del uso de este tipo de pruebas estandarizadas. En primer lugar, como instrumentos efectivos para que el alumno tenga la oportunidad de explicar todo el proceso de reflexión llevado a cabo, desde que inicia la lectura del enunciado del problema hasta que lo da por terminado tras la verificación razonada del resultado. En segundo lugar, como instrumentos que ejercen una influencia en el alumno a la hora de otorgar un significado a la R.P, que debe ser entendida como un proceso de deliberación en el que se incluyen distintos pasos, fundamentalmente el razonamiento, y no el producto o resultado de una operación aritmética, enfatizando así la visión de los problemas y su resolución como un *viaje*, más que un *destino.*

Del mismo modo, en este segundo estudio también hemos podido constatar que la evaluación de cualquier otro aspecto que vaya más allá del ámbito puramente cognitivo es inexistente. No olvidemos que el currículum oficial organiza los contenidos matemáticos en torno a cinco bloques, de los cuales el primero de ellos *"procesos, métodos y actitudes en matemáticas"* considera central: "el Bloque 1 se ha formulado con la intención de que sea la columna vertebral del resto de los bloques y de esta manera forme parte del quehacer diario en el aula…" (R.D 126/2014, p.33).

Al igual que en el primero de nuestros estudios, también nos hemos planteado caracterizar los problemas incluidos en las pruebas de evaluación de acuerdo con tres variables: la estructura semántica, el grado de desafío subyacente y el contexto situacional donde aparecen. El análisis de estas tres variables nos ha permitido evidenciar que no existen diferencias entre las características de los problemas presentados por las editoriales en los libros de texto y los problemas de las pruebas de evaluación de las guías didácticas, al menos en las editoriales Santillana, Anaya y S.M, cuyos libros de texto han sido analizados en los dos estudios presentados en esta tesis. En ambos tipos de materiales curriculares se muestra un panorama similar caracterizado por una reducida proporción de problemas inconsistentes y una escasa variabilidad de las diferentes categorías de problemas. También son escasas las situaciones problemáticas que comportan un cierto nivel de desafío, o el enriquecimiento del contexto situacional donde se presenta el problema. En definitiva, las pruebas de evaluación diseñadas por las editoriales analizadas se muestran distantes de los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables prescriptivos en el R.D 126/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES FINALES

VI.1. Conclusiones

En la tesis doctoral que ahora concluye se han presentado dos estudios. En el primero de ellos se planteaba un doble propósito: en primer lugar, presentar una visión del panorama actual sobre el tratamiento de los PAVs de estructura aditiva en los libros de texto de matemáticas; en segundo lugar, estudiar la evolución de ese tratamiento a partir del estudio pionero de Orrantia et al. (2005), realizado con libros de texto editados en el marco normativo de la LOGSE (1990). Ahora bien, los libros de texto no aparecen en la escena educativa de forma aislada, sino complementados por las guías didácticas o guías del profesor, que desde la promulgación de la LGE (1970) constituyen instrumentos decisivos en la determinación del currículum que realmente es enseñado y evaluado en la escuela (Beltrán, 1992). Por ello, el segundo de nuestros estudios se ha dirigido a analizar el tratamiento de los problemas y su proceso de resolución en las pruebas de evaluación diseñas e incluidas por las editoriales en las guías docentes.

A la luz del marco teórico descrito en la primera parte de esta tesis y de los dos estudios llevados a cabo, las conclusiones que se derivan son las siguientes:

■ Primera conclusión

Con respecto al primer objetivo general, los resultados obtenidos nos han permitido constatar que los libros de texto de matemáticas actuales están lejos de constituir materiales útiles para abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la R.P en la escuela. El análisis de las cuatro variables del primer estudio indica que:

- La gran mayoría de los problemas incluidos en los libros de texto se caracteriza por: un bajo nivel de dificultad y una escasa variabilidad de los distintos tipos de estructuras semánticas. En consecuencia, los alumnos pueden resolver estos problemas utilizando procedimientos superficiales, sin necesidad de una comprensión genuina de los enunciados y el uso de estrategias sofisticadas de resolución.

- Igualmente, hemos podido comprobar el bajo nivel de dificultad, al analizar el grado de desafío subyacente a los problemas. De este modo, se puede concluir que resultan muy limitadas las oportunidades que los libros de texto ofrecen a los alumnos para que se enfrenten a situaciones problemáticas con un cierto nivel de desafío. En este sentido, apenas aparecen tareas en las que sea el propio alumno quien plantee el problema; o tareas en las que se deba hacer un razonamiento para inferir que faltan o sobran datos en el enunciado (información omitida o superflua). La mayoría de los problemas aparece en contextos muy estereotipados, únicamente con la información suficiente y necesaria para su resolución (información coincidente).

- Este carácter estandarizado también se ha evidenciado al analizar el contexto situacional donde aparecen los problemas. Son muy escasas las ocasiones en las que los problemas aparecen enriquecidos con información situacional relevante (metas, intenciones, propósitos, causas), que vinculada al modelo matemático del problema puede favorecer el razonamiento situacional y matemático del alumno (Orrantia et al., 2011).

- El estudio de estas tres variables, junto con el análisis del contexto donde se ubican los problemas nos permite concluir que los libros de texto de matemáticas ofrecen una visión instrumental sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la R.P focalizada más en la adquisición de habilidades y procedimientos algorítmicos que en el desarrollo de estrategias genuinas de resolución. El problema se concibe como un instrumento al servicio de las operaciones de cálculo.

- Esta función de los *problemas*, asimilada a la función de los *ejercicios*, contribuye a la confusión conceptual existente en la práctica educativa entre estos dos términos (Callejo y Vila, 2004; Contreras, 2009; Santos-Trigo, 2008) provocando de este modo que se desvirtúe el verdadero papel que deben desempeñar los problemas en la escuela (Castro y Ruiz, 2015; Orrantia et al., 2005; Schoenfeld, 1989; Verschaffel, 2012; Vicente, 2013).

- **Segunda conclusión**

Esta descripción nos ha permitido dar respuesta al segundo objetivo general planteado en nuestro primer estudio. En vista de los resultados obtenidos podemos concluir que, no se observa una evolución con respecto al panorama presentado en el estudio pionero de Orrantia et al. (2005), llevado a cabo con los libros de texto de matemáticas editados durante el período de vigencia de la LOGSE (1990). Los resultados de las distintas variables analizadas en ambos estudios se muestran similares.

- **Tercera conclusión**

La conclusión anterior lleva implícita una tercera: los libros de texto de matemáticas permanecen ajenos a las sucesivas reformas implantadas en el sistema educativo de nuestro país. Habitualmente, el concepto de “reforma” se asocia a los conceptos de “cambio”, “mejora”, o “progreso” educativo. También se supone que una reforma del sistema educativo debe conllevar una transformación de los materiales, que van a concretar en la práctica del aula las nuevas propuestas curriculares. Sin embargo, tanto el análisis de los libros de texto de nuestro estudio, como el análisis de los libros de texto de los estudios precedentes en nuestro país en el marco de la LOE (2006), evidencia que estos materiales curriculares no han supuesto un cambio, ni mucho menos una mejora o innovación en el tratamiento de los problemas.

El panorama descrito en la discusión de esta tesis contrasta con la propuesta curricular del Real Decreto 126/2014, por el cual se establece el currículo de las distintas áreas que conforman la Educación Primaria. En este documento prescriptivo se indica que el proceso de R.P constituye uno de los *ejes principales* de la actividad matemática, *fuente y soporte principal* de su aprendizaje y *piedra angular* de la educación matemática; además, en referencia a los modos de aprendizaje de las matemáticas, se habla de la utilización *de contextos funcionales* relacionados con las situaciones de la vida diaria; igualmente, se establece como criterio de evaluación que el alumno distinga entre *problemas y ejercicios*, y que aplique las estrategias de resolución adecuadas para cada caso; otros criterios de evaluación aluden al *planteamiento de los problemas* por parte del alumno y a su enfrentamiento con *situaciones problemáticas abiertas*, sin solución única y cerrada.

Existe pues, una falta de coherencia entre el discurso reformista que la ley actual ha puesto en marcha desde el año 2013 y el currículum presentado por los libros de texto de matemáticas. La retórica del discurso reformista difícilmente puede llegar al núcleo de la práctica educativa mientras medie entre ambas el libro de texto, que constituye el verdadero intérprete del currículum.

Pero los libros de texto no sólo permanecen ajenos a las reformas, también permanecen ajenos a las aportaciones de la investigación educativa, tal como hemos podido comprobar al describir los diferentes estudios llevados a cabo tanto a nivel nacional como a nivel internacional, perpetuándose así la brecha entre la teoría y la práctica.

- **Cuarta conclusión**

Del mismo modo, hemos podido comprobar que, al igual que en el estudio de Orrantia et al. (2005), tampoco existen diferencias destacables en nuestro estudio con respecto a los resultados obtenidos entre los libros de texto de las tres editoriales que constituían el material de análisis común en ambos estudios. Salvo algunas excepciones, el rasgo principal que caracteriza los tres proyectos editoriales analizados es su homogeneidad. Dado que estas editoriales son las más utilizadas en las escuelas, se podría afirmar que la oferta del mercado editorial de nuestro país no se caracteriza precisamente por una variedad y diversificación real a la hora de diseñar el tipo de problemas a los que deben enfrentarse los alumnos en la etapa primaria, ni a la hora de establecer la función que deben cumplir los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de tal forma que se puede concluir que los libros de texto de la tres editoriales analizadas enseñan lo mismo de la misma manera.

- **Quinta conclusión**

A este respecto, la uniformidad, como sinónimo de universalidad, que presentan los libros de texto analizados, contrasta con la realidad educativa de cada centro y cada aula, que se muestra diversa. Las editoriales diseñan sus libros de texto para un perfil prototípico de alumno, por tanto, resulta cuanto menos cuestionable la idea de que la elección por parte del profesor de cualquier tipo de material preelaborado pueda resultar válida para cualquier contexto educativo: “los libros de texto se redactan para perfiles muy generales de alumnos y profesores, que no coinciden con la realidad de cada centro y aula (Rico, 2015, p.38).

- **Sexta conclusión**

Con el propósito de conocer qué contenidos son realmente *evaluados* y por tanto, *valorados*, el segundo de nuestros estudios se ha dirigido a analizar el tratamiento de los problemas en las pruebas de evaluación diseñadas por las editoriales.

Si atendemos a una de las preguntas fundamentales de la evaluación, *¿qué se evalúa?*, los resultados de este segundo estudio muestran que la evaluación se centra prioritariamente en tareas más propias de la dimensión reproductiva, cuyo objeto es valorar el nivel de adquisición de conocimientos o la aplicación de estos conocimientos a situaciones con un escaso nivel de complejidad cognitiva. Al igual que en los libros de texto utilizados por los alumnos, la naturaleza de los problemas incluidos en las pruebas de evaluación de las guías del profesor se caracteriza por su reducido nivel de dificultad y por su escasa variabilidad. También resultan muy limitados los problemas que implican un cierto nivel de desafío, o las situaciones problemáticas formuladas más allá de lo que se considera un contexto situacional estereotipado. Por ello, no es extraño que el alumno desarrolle creencias inexactas sobre lo que significa realmente *"hacer matemáticas"*, puesto que este significado depende en buena medida del tipo de tareas que desarrolla en el aula (Schoenfeld, 1992, 1994), pero también de la forma que adquiere la evaluación (Jiménez, 2012).

- **Séptima conclusión**

Es más, estas pruebas no se han mostrado como herramientas útiles para evaluar el tipo de estrategias utilizadas por los alumnos en el proceso de R.P, de manera que difícilmente se puede saber qué pasos del proceso de resolución sigue el alumno a la hora de resolver un problema. En este sentido, la evaluación pierde su función informativa y en consecuencia, queda excluido el proceso de toma de decisiones por parte del profesor, así como la función reparadora que debe tener la evaluación.

- **Octava conclusión**

Las guías didácticas se presentan como documentos voluminosos, incluso más extensos que el propio libro de texto al que complementan. En ellas aparece reflejado el discurso teórico de la nueva ley educativa en forma de consideraciones y sugerencias sobre el proceso de evaluación. Se propone la conveniencia de utilizar distintos tipos de evaluación (heteroevaluación, autoevaluación, coevaluación) o diversos instrumentos para llevarla a cabo, entre los que cobra un papel relevante el sistema de rúbricas en el que aparecen detallados los indicadores de evaluación en distintos niveles de consecución. Sin embargo, las seis editoriales analizadas concretan su propuesta evaluativa en diseños preelaborados tipo *examen, control, test*, para que el profesor los aplique y registre los resultados en unas rúbricas también preelaboradas. De manera que, dentro de un discurso pedagógico pretendidamente renovador, se siguen promoviendo en realidad las prácticas tradicionales de evaluación: "si realmente queremos saber qué hay de nuevo en la práctica de aula respecto a los discursos de las reformas, bastaría con indagar y comprobar qué hay de nuevo en las formas de evaluar" (Álvarez, 2018, p.109).

VI.2. Implicaciones educativas

Como apuntábamos al principio de esta tesis, sabemos por los resultados de los informes publicados por organismos internacionales (PIRLS y TIMSS de la IEA; PISA de la OCDE) que tanto la lectura comprensiva como las matemáticas, y particularmente la R.P, constituyen el punto débil para un número importante de estudiantes. Asimismo, como hemos podido ver tanto en el marco teórico como en los dos estudios presentados, los libros de texto no ofrecen una solución efectiva a las dificultades que presenta el alumnado a la hora de aprender a resolver problemas. Al contrario, estos materiales contribuyen a desvirtuar la función que deben desempeñar los problemas en el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos, competencia que de acuerdo con el marco normativo actual, no sólo alude al ámbito cognitivo, sino también al ámbito social y afectivo (actitudes, emociones y creencias) esto es, a su desarrollo integral.

Por todo ello, una primera implicación educativa que se desprende de nuestros estudios es la necesidad de que las editoriales, en el diseño y desarrollo de los libros de texto de matemáticas y en las pruebas de evaluación de las guías didácticas, repensaran el concepto de *problema* y el sentido y la función que debe cumplir *la resolución de problemas* en la escuela. Este sería posiblemente un primer paso, un punto de partida que determinaría la efectividad de la propuesta curricular que una determinada editorial pretende desarrollar para una etapa educativa concreta. Difícilmente una propuesta curricular puede resultar válida si la función del problema, eje vertebrador del currículum del área de matemáticas, se supedita a la función del ejercicio y si el proceso de resolución se reduce al desarrollo de estrategias superficiales. De este modo, dada la gran influencia que el libro de texto ejerce sobre la práctica educativa, una reconceptualización del problema y su función contribuiría a modificar las cláusulas del "contrato didáctico" (Greer, 1997), que rigen las interacciones profesor-alumnos, y por tanto ayudaría a cambiar las creencias sobre lo que significa resolver un problema y las actitudes sobre la importancia y la utilidad de aprender a resolver problemas.

Por otro lado, siguiendo a Lester (2013), nos gustaría hacernos eco de dos principios instruccionales que la investigación educativa ha puesto de relieve: (1) *el principio de compromiso prolongado*, según el cual, para que se produzca una mejora en la habilidad de R.P, los alumnos tienen que "trabajar en tareas problemáticas de una manera regular, durante un período prolongado de tiempo" (p.272); y (2) *el principio de variedad de tareas,* que señala que los alumnos mejorarán como solucionadores de problemas "sólo si se les brindan oportunidades para resolver una variedad de tipos de tareas problemáticas" (p.272). De acuerdo con estos dos principios instruccionales, la segunda implicación educativa se refiere a que en el diseño y desarrollo de los libros de texto o cualquier otro material alternativo, deberían incluirse con mayor frecuencia y de forma sistemática más problemas, frente a otras tareas de tipo rutinario. Ahora bien, no se trata sólo de aumentar la cantidad de problemas. Este cambio cuantitativo por sí solo no supondría una mejora; se trata más bien de un cambio cualitativo que, en consonancia con el segundo principio formulado por Lester (2013), consistiría en aumentar asimismo la variedad de situaciones problemáticas que implicaran mayores niveles de desafío, tendentes a favorecer el desarrollo del razonamiento. Sin embargo, como hemos visto a la largo de esta tesis, la investigación ha puesto de manifiesto en numerosas ocasiones que los libros de texto no se caracterizan precisamente por su tendencia al cambio.

Si asumimos que los libros de texto, independientemente de las reformas educativas, van a seguir reproduciendo las mismas prácticas escolares, la implicación educativa que se deriva es que los cambios han de pasar necesariamente por la acción del profesor, que de acuerdo con Álvarez (2001) debe modificar su función tradicional de "impartidor de información o intérprete de los libros de texto" (p.69). Ahora bien, hemos de tener presente que la acción docente está determinada en buena medida por la consciencia de la necesidad de un cambio y por los conocimientos necesarios para efectuarlo. Siguiendo a Pérez Gómez (1997), los cambios y reformas propuestos por las políticas educativas resultan ineficaces porque se imponen sobre la voluntad, el convencimiento y la competencia de los agentes implicados.

A nuestro juicio, la acción del profesor puede discurrir entre lo que podríamos denominar una "perspectiva de mínimos" hasta una "vertiente de máximos". La primera consistiría en compensar las limitaciones de los libros de texto, usándolos de manera flexible como un recurso material más entre otros posibles, seleccionando y/o modificando aquellos aspectos que puedan ser de utilidad para que una determinada propuesta editorial resulte provechosa. Desde esta perspectiva, la función de los textos escolares consistiría en una ayuda para que el profesor los utilice "como apoyo a su trabajo en el aula, pero no como guía de actuación didáctica para dirigir el trabajo cotidiano de modo prescriptivo" (Rico, 2015, p.38).

Desde lo que hemos denominado una "perspectiva de máximos", la acción del profesor se focalizaría en la elaboración de propuestas curriculares propias, que fueran más allá del actual enfoque tradicional de tipo disciplinar, en el que como señala Torres (2015), el libro de texto suele ser el único recurso didáctico utilizado. Resulta paradójico, por ejemplo, que hablemos de la estandarización de los contextos situacionales donde los libros de texto presentan los problemas, de su escaso nivel de autenticidad o de su desconexión con la vida real, y no nos cuestionemos que el propio currículum prescrito presenta el conocimiento compartimentado en áreas disciplinares, sin ningún tipo de relación entre ellas. Lograr una conexión entre el currículum escolar y la realidad o superar la brecha que separa las matemáticas escolares de las matemáticas del mundo real, pasa también por mostrar al alumno las relaciones entre los conocimientos que se presentan en la escuela en compartimentos estancos. Por ello, a nuestro modo de ver, los contenidos matemáticos, y la R.P como contenido nuclear, deberían presentarse integrados en proyectos interdisciplinares o globalizados llevados a cabo por los propios profesores. En estas propuestas integrales, muy arraigadas en Educación Infantil y con escasa incidencia en Educación Primaria (Carbonell, 2010, 2018; Torres, 2015), la R.P cobraría su verdadero sentido (Barrantes y Zapata, 2010). Es más, dado que las matemáticas poseen un gran potencial de adaptación a la interdisciplinariedad (Balbuena, 2000), a nuestro modo de ver, este enfoque didáctico contribuiría enormemente a que los alumnos visibilizaran su utilidad en diferentes contextos de la vida diaria.

Ahora bien, resulta quimérico pensar que es posible pasar de una situación de total dependencia del libro de texto a otra situación en la que este recurso material tuviese una escasa o nula incidencia en las prácticas docentes, al menos en un corto período de tiempo. En primer lugar, porque los textos escolares tienen una larga y consolidada tradición en la escuela (Area, 2000). En segundo lugar, porque los cambios educativos obedecen a procesos de amplia duración, más que a reformas "de arriba-abajo" en las que se ignora la "*cultura o gramática escolar*" de los actores de la práctica educativa (Bolívar, 2015; Carbonell, 2010; De Puelles, 2006; Tyack y Tobin, 1994; Viñao, 2006). En tercer lugar, porque las funciones del profesorado se sobrecargan de forma creciente con nuevas demandas y responsabilidades, en muchas ocasiones de carácter burocrático que limitan los tiempos, de manera que el docente se ve abocado al uso de "preelaboraciones curriculares". Por último, porque como hemos comentado anteriormente, cualquier acción dirigida al cambio debe pasar por la consciencia de la necesidad de ese cambio y por los conocimientos necesarios para efectuarlo.

Este último aspecto implica la necesidad de cuestionar el papel que desempeña la formación inicial y permanente del profesorado como un aspecto clave para lograr un cambio. De hecho, el estudio TEDS-M de la IEA (INEE, 2013) sobre la formación inicial de los futuros profesores de Educación Primaria, realizado entre los años 2006-2010, ha constatado entre otros aspectos que, los conocimientos, las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y las actitudes ante ellas de los futuros profesores son factores relevantes a la hora de explicar el bajo rendimiento en matemáticas de los alumnos. En consecuencia, los planes de estudio sobre la formación inicial deberían contemplar la necesidad de dotar a los futuros profesores de criterios para analizar los textos escolares y comprobar si una determinada propuesta curricular puede resultar efectiva, modificando o adaptando al contexto de aula esas propuestas, o en el mejor de los casos elaborando propuestas propias. No obstante, para llevar a cabo este tipo de análisis son necesarios conocimientos sólidos sobre la R.P y su proceso de enseñanza-aprendizaje; creencias ajustadas sobre lo que son las matemáticas (¿un conjunto de reglas fijas que hay que memorizar y aplicar, o un proceso de indagación?); y actitudes que repercutan positivamente en los escolares.

Finalmente, también cabría cuestionar el papel que desempeña la administración educativa, cuyas políticas no contribuyen en absoluto a cambiar esta realidad. En concreto, las políticas de gratuidad de los libros de texto mediante la implantación del sistema del "banco de libros", generalizado en todas las Comunidades Autónomas, naturalizan la presencia del libro de texto en las escuelas como algo propio de la normalidad pedagógica y lo convierten de esta forma en *el material por excelenca*. Esta naturalización llega también a las familias. Según la ANELE (2014), un 71,90% de las familias "consideran imprescindible el libro de texto en la educación de sus hijos, tanto en los centros educativos como en el hogar" (p.2). Además, la obligatoriedad de un período mínimo de cuatro años de continuidad en el centro escolar de los mismos libros de texto refuerza el poder de control que ejerce el mercado editorial sobre la educación, a la vez que potencia su uso hegemónico en la escuela. De hecho, también según la ANELE (2014), "el libro de texto es la principal herramienta de los docentes. El 81.30% de ellos reconocen emplearlo bastante o mucho en su labor diaria" (p.2).

VI.3. Limitaciones de los estudios

Nuestro primer estudio ha actualizado el análisis llevado a cabo por Orrantia et al. (2005) y nos ha permitido evidenciar que, desde la promulgación de la LOGSE (1990) hasta el momento actual, los libros de texto de matemáticas permanecen resistentes al cambio. Al igual que en el estudio pionero de estos autores, una de las variables analizadas ha sido la frecuencia y variabilidad de los diferentes tipos de estructuras semánticas de los PAVs de estructura aditiva, pero en ninguno de estos dos estudios se ha efectuado un análisis de los PAVs de estructura multiplicativa, aunque sí han sido tenidos en cuenta los problemas de dos o más operaciones donde aparecían estructuras aditivas combinadas con estructuras multiplicativas. Estudios posteriores realizados en nuestro país (Chamoso et al., 2014; Vicente et al., 2018), sí analizaron los PAVs de estructura multiplicativa en libros de texto editados durante los años de vigencia de la LOE (2006), ofreciendo de este modo una visión más completa de las diferentes tipologías de PAVs incluidos en los libros de texto (aditivos y multiplicativos), aunque la muestra de libros utilizados para el análisis fue más reducida: en el estudio de Chamoso et al. (2014), el análisis se realizó con una sola editorial (Santillana), mientras que en el de Vicente et al. (2018), se utilizaron dos (Santillana y S.M).Por tanto, una primera limitación de nuestro estudio es no haber ofrecido una visión más amplia del tratamiento de los problemas en los libros de texto editados en el marco normativo de la LOMCE (2013), al no incluir en nuestro análisis los PAVs de estructura multiplicativa.

Por otro lado, y también respecto a esta misma variable, nuestro estudio se centra en el análisis de la complejidad semántico-matemática de los PAVs y no aborda el análisis que también se realiza en el estudio de Vicente et al. (2018) sobre la complejidad procedimental.

VI.4. Futuras vías de investigación

Dado que los resultados de nuestro primer estudio indican que no existen diferencias significativas en el tratamiento de los problemas entre los libros de texto de las diferentes editoriales analizadas, y dado asimismo que existen otros tipos de materiales curriculares en el mercado editorial, resultaría conveniente el análisis de propuestas minoritarias que podrían resultar una alternativa a los libros de texto de las editoriales con mayor difusión en las escuelas de nuestro país. Sobre este aspecto, disponemos de algunos datos obtenidos a partir de una primera revisión de estos materiales, aunque se requeriría un análisis sistemático y profundo (véase Anexo VII).

Igualmente, serían necesarios estudios comparativos, como el realizado por Van Zanten y Van den Heuvel-Panhuizen (2018), descrito en el tercer capítulo de esta tesis, en los que se analizaran las características de los libros de texto utilizados en países donde de acuerdo con informes internacionales (TIMSS de la IEA) los alumnos obtienen altos rendimientos en matemáticas: países asiáticos como Corea del Sur, Singapur o Japón; y países europeos como Finlandia o Noruega. Estos estudios deberían dirigirse, entre otros aspectos, al análisis de los tipos y características de los problemas; los modelos utilizados para abordar la resolución, así como las ayudas ofrecidas a los alumnos durante este proceso; la organización de las unidades didácticas, concretamente la ubicación de los problemas dentro de las mismas; las características de las pruebas utilizadas para evaluar el nivel de competencia curricular en R.P; y finalmente, los modos cómo es atendida la diversidad del alumnado. Además, en estos estudios deberían contemplarse los factores políticos y económicos que conforman los sistemas educativos de estos países, no desligándose la dimensión educativa de la dimensión social.

Otra vía de investigación, que nos permitiría acercarnos al conocimiento de la realidad escolar, sería el estudio de los factores que determinan la elección y uso de los libros de texto de matemáticas de una determina propuesta editorial en los centros educativos. En este sentido, el análisis de los criterios adoptados por el profesorado para esta elección, así como su fundamentación, constituiría un medio para indagar en los conocimientos que poseen los profesores en ejercicio sobre la función que deben desempeñar los problemas en la etapa de la Educación Primaria y el tipo de prácticas que deben promoverse. Además, de acuerdo con los enfoques relaciones propuestos por la investigación actual para el estudio de los libros de texto, descritos en el tercer capítulo de esta tesis, este estudio permitiría ahondar en el conocimiento de lo que se ha denominado la "*cultura escolar o gramática de la escuela*", la parte más resistente a las reformas educativas llevadas a cabo "de arriba-abajo", que obvian al profesorado como agente potencial de los cambios reales. Así, esta vía de investigación nos permitiría conocer, entre otros aspectos, la cultura democrática de los centros, esto es, si las decisiones en torno a la elección de los libros de texto son externas o internas, de tipo unipersonal o colegiada; la presencia/ausencia de criterios de análisis sólidos y consensuados que guían la toma de decisiones y su inclusión en el Proyecto Educativo de Centro como un documento relevante que orienta la práctica educativa; las posibilidades y facilidades que ofrece el centro escolar al claustro de profesores para el uso de materiales alternativos o proyectos de elaboración propia; o los mecanismos utilizados por el mercado editorial para ejercer su influencia sobre las decisiones del profesorado en los momentos en que la normativa vigente permite un cambio en los textos escolares.

Por otro lado, si como comenta Fernández Enguita (2009, p.107): “el maestro y el profesor son no la totalidad, pero sí lo esencial de los recursos de la actividad escolar”, la calidad del profesorado, como se ha manifestado en numerosas ocasiones, constituye el factor más decisivo para que se produzca una mejora en el rendimiento de los estudiantes. En consecuencia, la formación inicial y permanente del profesorado se revela como un aspecto fundamental para la transformación y mejora de un sistema educativo: “ningún sistema educativo puede ser mejor que su profesorado” (Ros-Garrido y García Rubio, 2014, p.105). De acuerdo con estas ideas, los estudios sobre los conocimientos adquiridos por los estudiantes de Magisterio al término de su formación universitaria, así como los estudios sobre la oferta formativa de los centros de formación permanente del profesorado en ejercicio, nos permitiría conocer el nivel de adecuación de la formación inicial y permanente a las necesidades reales de los docentes en la práctica educativa.

Por último, con respecto a la evaluación, también resultaría útil el análisis de las pruebas prescriptivas diseñadas por las distintas Comunidades Autónomas para evaluar el nivel de competencia matemática de los estudiantes al término del tercer y sexto curso de la Educación Primaria (LOMCE, 2013, artículo 20, y R.D.126/2014, artículo 12.3). Este estudio nos proporcionaría una información valiosa sobre la relevancia que se otorga en estas pruebas a los problemas y a su proceso de resolución; su grado de coherencia con el discurso normativo por el que establece el currículum básico del área de matemáticas en la etapa de la Educación Primaria; e igualmente, el grado de coherencia entre el diseño de estas pruebas diagnósticas y las pruebas internacionales (TIMSS de la IEA) en las que España participa desde el año 1995. Por otro lado, más allá del análisis de estas pruebas en sí mismas, en el estudio que proponemos como futura vía de investigación debería cuestionarse la función real que se persigue la administración educativa con la evaluación diagnóstica. En este sentido, deberíamos plantearnos obtener respuestas sobre el tipo y la calidad de la información proporcionada a los centros educativos una vez finalizado el proceso de diseño y aplicación de las pruebas; igualmente resultaría interesante conocer el tipo de ayudas, en caso de que existan, ofrecidas a los docentes para que se produzca el proceso de reparación y mejora que debe perseguir la evaluación.

BIBLIOGRAFÍA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agre, G.P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies in Mathematics, 13* (2), 121-142.

Albrecht, J.E. & Myers, J.L. (1995). Role of context in accessing distant information during reading. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 21* (6), 145-169. doi: 10.1037/0278-7393.21.6.1459

Aldrich, R. (1998). The Role of the Individual in Educational Reform. En C. Majorek, E.W. Johaningmeiery y F. Simon (Eds.), *Scholing in Changing Societies: Historical and Comparative Perspectives* (pp.345-357). Gante: Paedagogica Historica, Supplementary series.

Alsina, A. (2006). ¿Para qué sirven los problemas en la clase de matemáticas? *UNO, Revista de didáctica de las matemáticas, 43,* 113-118.

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Congreso de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Álvarez, J.M. (2001). *Entender la didáctica, entender el currículum*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Álvarez, J.M. (2018). Hablamos de evaluación formativa. La eficacia y validez de lo obvio: Lecciones aprendidas desde la práctica docente reflexiva. En J. Gimeno (Coord.), *Cambiar los contenidos, cambiar la educación* (pp.91-116). Madrid: Morata.

Andler, D. (1987). Problème une clé universelle? En I. Stengers (Ed.), *D'une science à l'autre. Des concepts nomades* (pp.119-158). Paris: Editions du Seuil.

ANELE (Asociación Nacional de Editores de Libros y material de Enseñanza). *La Edición de Libros de Texto en España.* Octubre de 2014. https://anele@anele.org

Apple, M.W. (1989). *Maestros y textos*. Madrid: Paidós.

Apple, M.W. (1992). The text and cultural politics. *Educational Researcher*, *21* (7), 4-11. doi: 10.3102/0013189X021007004

Arcavi, A. & Friedlander, A. (2007). Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (5), 355-364. doi: 10.1007/s11858-007-0050-3

Area, M. (2000). Los materiales curriculares en los procesos de diseminación y desarrollo del currículum. En J.M. Escudero (Edit.), *Diseño, desarrollo e innovación del currículum* (pp. 189-204). Madrid: Síntesis.

Astiz, M.F. (2011). Los desafíos de la educación comparada contemporánea para informar el debate político-educativo: una nueva perspectiva teórica-metodológica. *Revista Latinoamericana de Educación Comparada, 2,* 63-73.

Ayllón, M. F. (2012). *Invención-Resolución de problemas por los alumnos de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Balbuena, L. (2000). La interdisciplinariedad: una moda o una necesidad. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 23,* 44-56.

Barrantes, M. y Zapata, M.A. (2010). La resolución de problemas aritméticos y su tratamiento didáctico en la Educación Primaria. *Campo Abierto, 29* (1), 77-95.

Baron, J. (2000). *Thinking and deciding*. Cambridge: University Press.

Baroody, A. (1997). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Belmonte, J.M. (2011). La construcción de magnitudes lineales en Educación infantil. En Mª.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (p.317-345). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Beltrán, F. (1992). La reforma del currículo. *Revista de Educación, 1,* 193-207.

Bermejo, V. (2012). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Madrid: CCS.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y aprendizaje,10*, 39-40.doi: 10.1080/02103702.1987.10822176

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1988). La genèse de l´opération d´addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education. Número especial,* 75-76. doi: 10.1007/BF03326328

Biniés, P. (2008). *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals. O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante.* Barcelona: Graó.

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Bishop, A.J. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos? En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.35-54). Barcelona: Graó.

Bishop, A.J. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Investigación y Pedagogía.

Blanco, L.J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma: revista sobre enseñanza y* aprendizaje *de las matemáticas, 21,* 11-20.

Blanco, L.J. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la Educación Matemática* (pp.171-183). Barcelona: Graó.

Blanco, L.J. y Cárdenas, J.A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo de matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto, 32* (1), 137-153.

Blanco, N. (2008). Los saberes de las mujeres y la transmisión cultural en los materiales curriculares. *Revista Investigación en la escuela, 65,* 11-22.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Sugarloaf". En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing. doi: 10.1533/9780857099419.5.221

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and ussues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 37-68. doi: 10.1007/BF00302716

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior, 33,* 72–87. doi: 10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Bolívar, A. (2013). ¿Cómo incide la LOMCE en la organización de los centros? *Forum Aragón: revista de FEAE-Aragón sobre organización y gestión educativa, 7,* 9-12.

Bolívar, A. (2015). The Comprehensive School in Spain: A Review of its Development Cycle and Crises. *European Journal of Education, 23* (3), 213-228. doi: 10.1177/1474904115592496

Bransford, J. y Stein, B. (1988). *Solución ideal de problemas*: *guía para mejor pensar, aprender y crear.* Barcelona: Labor.

Brehmer, D., Ryve, A., & Van Steenbrugge, H. (2016). Problem solving in Swedish mathematics textbooks for upper secondary school. *Scandinavian Journal of educational research, 60* (6), 577-593. doi: 10.1080/00313831.2015.1066427

Briars, D.J. & Larkin, J.H. (1984). An integrated models of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1* (3), 245-269. doi: 10.1207/s1532690xci0103_1

Bridges, E.M. & Hallinger, P. (1995). *Implementing problem based learning in leadership development*. Eugene (Oregon) Clearinghouse on Educational Management: University of Oregon.

Bromley, P. & Lerch, J. (2018). Human Rights as Cultural Globalisation: The Rise of Human Rights in Textbooks. En E. Fuchs & A. Bock (Eds.), *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.345-356). New York: Hanbooks. doi: 10.1057/978-1-137-53142-1_25

Brown, A. L. & Brown, K.D. (2010). Strange Fruit Indeed. Interrogating Contemporary Textbooks Representations of Racial Violence Toward African Americans. *Teachers College Record, 112* (1), 31–67.

Bronw, S. I. (1985). Problem-solving and teacher education: The humanism muddles. *Studies in Mathematics Education, 4,* 3-29.

Bronw, S.I & Walter, M.I. (1990). *The art of problem posing*. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Brownell, W.A. (1942). Problem solving. In N. B. Henry (Ed.), *The psychology of learning.* Chicago: University of Chicago Press.

Bruin-Muurling, G. (2010). *The development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum* (PhD Thesis). Eindhoven School of Education, Eindhoven University of Technology, Eindhoven.

Bruner, J. (1962). *The process of education.* Harvard: University Press.

Bryan, A. (2012). "You've Got to Teach People That Racism Is Wrong and Then They Won't Be Racist": Curricular Representations and Young People's Understandings of "Race" and Racism. *Journal of Curriculum Studies, 44* (5), 599–629. doi: 10.1080/00220272.2012.699557

Burkhardt, H. (2014). Curriculum design and systematic change. En Y. Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics curriculum in school education* (pp. 13–34). Advances in Mathematics Education. Dordrecht: Springer.

Cáceres, M.J. (2010). *Las reflexiones que los maestros en formación incluyen en su portafolios sobre su aprendizaje didáctico matemático en el aula universitaria.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: some answered and unanswered questions. En F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). New York, NY: Springer.

Cai, J. & Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. International Journal of Science and Mathematics Education, *15* (8), 1521-1540. doi: 10.1007/s10763-016-9758-2

Callejo, M.L. (2015). Aprender (a enseñar) matemáticas. Prácticas de resolución de problemas, creencias y desarrollo profesional. En N. Planas (coord.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp.93-110). Barcelona: Graó.

Callejo, M.L. y Vila, A. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid: Narcea.

Cantarero, J.E. (1997). Los nuevos libros de texto: el currículum real de la Reforma. *Investigación en la escuela*, 31, pp.73-87.

Carbonell, J. (2010). Las reformas y la innovación pedagógica: Discursos y prácticas. En J. Gimeno Sacristán (Comp.), *Saberes e incertidumbres sobre el currículum* (pp.604-619). Madrid: Morata.

Carbonell, J. (2018). El lugar del conocimiento en las pedagogías del siglo XXI. En J. Gimeno Sacristán (Coord.), *Cambiar los contenidos, cambiar la educación* (pp.39-53). Madrid: Morata.

Cárdenas, J.A. y Blanco, L.J (2015). La resolución de problemas de matemáticas como contenido en el currículo de primaria. En L.J. Blanco, J.A. Cárdenas y A. Caballero, *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de primaria* (pp.23-38). Manuales Universidad de Extremadura.

Carpenter, T. & Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtration concepts. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and processes* (pp.7-44). NY: Academic Press. doi: 10.2307/748348

Castro, E. (2003). La Resolución de Problemas desde la Investigación en Educación Matemática. En J.M. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Actas de las Jornadas Investigación en el Aula de Matemáticas. Resolución de Problemas* (p.11-28). Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES"

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Actas del XII Congreso de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.113-140). Badajoz: SEIEM.

Castro, E. y Ruiz, J.F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp.89-105). Madrid: Pirámide.

Chamoso, J. M., Cáceres, M. J. y Azcárate, P. (2011). La reflexión como elemento de formación docente en matemáticas: análisis e instrumentos. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp.1-38). Recife, Brasil: CIAEM.

Chamoso, J.M., Vicente, S., Manchado, E. y Múñez, D. (2014). Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ¿son solo problemas para el aula? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 12,* 261-279.

Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching Problem Solving: What, why and how*. Palo Alto: Dale Seymour Publications.

Charnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones* (pp.51-64). Barcelona: Paidós.

Chi, M. y Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. En R. F. Sternerg (Ed.), *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información* (pp.303-324). Barcelona: Labor.

Chisholm, L. (2018). Representations of Class, Race, and Gender in Textboos. En E. Fuchs & A. Bock (Eds.), *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.225-237). New York: Hanbooks. doi: 10.1057/978-1-137-53142-1_16

Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft.* Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Codina, A. y Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp.125-136). Granada: Universidad de Granada.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* Londres, Reino Unido: Routlegdge.

Confrey, J. (1991). Learning to listen: a student's understanding of powers of ten. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp.111-138). Netherlands: Springer. doi: 10.1007/0-306-47201-5_6

Contreras, L.C. (2009). El papel de la resolución de problemas en el aula. *Revista electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología, 1* (1), 37-98.

Corbalán, F. (2000). El currículum en la ESO. En J. M. Goñi (Coord.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp.67-82). Barcelona: Graó.

Cummins, D. D. (1991). Children´s interpretationns of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction, 8* (3), 261-289. doi: 10.1207/s1532690xci0803_2

Cummins, D.D., Kintch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20*, 405-438. doi: 10.1016/0010-0285(88)90011-4

D´Ambrosio, U. (1993). *Etnomatemática. Arte ou técnica de explicar e conhecer.* São Paulo: Ática.

D´Ambrosio, U. (2011). *Uma síntese sociocultural da história da matemática*. São Paulo: PROEM.

Davis-Dorsey, J., Ross, S.M., & Morrison, G.R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word-problems. *Journal of Educational Psychology, 83*, 61-68. doi: 10.1037/0022-0663.83.1.61

De Bellis, V.A. & Goldin, G.A. (1997). The affective domain in mathematical problem-solving. In *PME Conference, 3*, 2-209.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D. C. Berliner & R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp.491-549). Nueva York: MacMillan.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders´ initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

De Corte, E., Verschaffel, L. & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on childrens problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology, 77*, 460-470. doi: 10.1037/0022-0663.77.4.460

De Guzmán, M. (1984). El papel de las matemáticas en el proceso educativo inicial. *Enseñanza de las Ciencias 2*, 94-95.

De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor.* Barcelona: Labor.

De Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la educción matemática. *Sigma: revista de matemáticas, 19*, 5-25.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*,19-58.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics* (pp. 87–172). Albany: SUNY Press.

Delgado de Paiva, M. (2008). *As Dificultades de aprendizagem e os materiais curriculares: um estudo dos manuais escolares do primeiro ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento. Universidad de Santiago de Compostela.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education, 26*, 152–160. doi: 10.1016/j.tate.2009.03.016

De Puelles, M. (2006). *Problemas actuales de política educativa*. Madrid: Morata.

Despina, D. & Harikleia, L. (2014). Addition and Subtraction Word Problems in Greek Grade A and Grade B Mathematics Textbooks: distribution and Children's Understanding. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 8,* 340-356.

Deulofeu y Gorgorió (2000). Planteamientos para el cambio. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 15-31). Barcelona: Graó.

Dewey, J. (1933). *How we think: a restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston: D.C. Heath. Versión en castellano: *Cómo pensamos* (1989). Barcelona: Paidós.

Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*. *Revista de didáctica de las matemáticas, 45,* 33-41.

Dossey, J. (2017). Problem solving from a mathematical standpoint. En B. Csapó & J. Funke (Eds.), *The nature of problem solving: Using research to inspire 21st century learning* (pp. 59–72) Paris: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264273955-6

Duch, B. (1996). Problems: A Key Factor in PBL. http://www.udel.edu/pbl/cte/spr96-phys.html

Dumas-Carré, A. & Larchen, C. (1987). The stepping stones of learning and evaluation. *International Journal of Science Education,9* (1) 93-104. doi: 10.1080/0950069870090110

Edo, M. (2005). Educación matemática versus instrucción matemática en Infantil. En A. Pequito, y A. Pinheiro (Ed.), *Proceeding of the First International Congress on Learning in Chilhood Education* (pp.125-137). Porto, Portugal: Gailivro.

Elosúa, M.R. (2000). *Procesos de la comprensión, memoria y aprendizaje de textos.* Alcorcón: Sanz y Torres.

Elshout, J. J. (1985). *Problem solving and education, state of the art paper*. Earli conference Lewen. Junio de 1985.

Escudero, J.M. (2000). El cambio en educación, las reformas y la renovación pedagógica. En J.M. Escudero (Edit.), *Diseño, desarrollo e innovación del currículum* (pp.67-96). Madrid: Síntesis.

Escudero, J.M. (2015). Prologue. *Digital Textbooks: What's New?* (pp.4-6) Santiago de Compostela: Servizo de Publicacións da USC/IARTEM.

Faludi, A. (1973). *Planning theory*. Oxford: Pergamon Press.

Fenwick, T. & Edwards, R. (2012). *Researching Education Through Actor-Network Theory*. Malden, MA: Wiley-Blackwell. doi: 10.1002/9781118275825

Fernández Enguita, M. (2009). *Educar en tiempos inciertos*. Madrid: Morata.

Fernández Reirís, A. (2015). Exploration on new roles and changes in E-Books in Education. En R. Rodríguez, E. Bruillard y M. Horsley (Eds.). *Digital Textbooks: What's New?* (pp.52-60) Santiago de Compostela: Servizo de Publicacións da USC/IARTEM.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Fuchs, E. & Bock, A. (2018). *The Palgrave Handbook of Textbook Studies*. New York: Hanbooks. doi: 10.1057/978-1-137-53142-1

Fuchs, E. & Henne, K. (2018). History of textbook research. En E. Fuchs & A. Bock (Eds.). *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.25-55). New York: Hanbooks. doi: 10.1057/978-1-137-53142-1_3

Fuchs, E., Niehaus, I., & Stoletzki, A. (2014). *Das Schulbuch in der Forschung: Analysen und Empfehlungen für die Bildungspraxis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtration. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). NY: McMillan.

García Madruga, J.A. (2002). Resolución de problemas. En T. Serra, M. Torra y P. Abrantes (Coords.), *La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiencias* (pp.27-33). Barcelona: Graó.

García Madruga, J.A. (2006). *Lectura y conocimiento. Cognición y desarrollo humano.* Barcelona: Paidós.

Gardiner, A. (2008). The art of problem solving. En T. Gowers, J. Barrow-Green & I. Leader (Eds.), *The Princeton Companion to Mathematics* (pp.955-966). Princeton University Press, Princeton, NJ.

Garrett, R. M. (1987). Issues in Science Education: problem-solving, creativity and originality. *International Journal of Science Education*, *9* (2), 125-137. doi: 10.1080/0950069870090201

Gaulin, C. (1982). La résolution de problèmes: le mot d´ordre pour les années 1980-90. Quoi en penser? *La didactique mathématique au primaire. Actes du colloque Mathématique.* Département des Sciences de l´Éducation. Université du Québec au Chicoutimi.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 16* (2), 36-45.

Gil, N., Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 340,* 551-569.

Giménez, J. (2001). Manifiesto 2000 para el año de las matemáticas. 50 años de CIEAEM. Presente y futuro. En J. Giménez (Coord.), *Matemáticas en Europa: diversas perspectivas* (pp.13-23). Barcelona: Graó.

Gimeno, J. (2009). Grandeza y miseria del libro de texto. En J. Rodríguez, M. Horsley y S. Knudsen. *International Conference on Textbooks and Educational Media* (pp.19-30). Santiago de Compostela: IARTEM.

Gimeno, J. (2010). ¿Qué significa el currículum? En J. Gimeno (Comp.), *Saberes e incertidumbres sobre el currículum* (pp.21-43). Madrid: Morata.

Gimeno, J. (2015). El currículum como estudio del contenido de la enseñanza. En J. Gimeno, M.A. Santos, J. Torres, P. Jackson y A. Marrero (Eds.), *Ensayos sobre el currículum: teoría y práctica* (pp.29-62). Madrid: Morata.

Goldin, G.A (1982). The measure of problem-solving outcomes. En F.J. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem-solving. Issues in Rechearch* (pp.87-101). Philadelphia (PN): The Franklin Institute Press.

Gómez-Chacón, I.M. (2010). Tendencias actuales en la investigación en matemáticas y afecto. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A Sierra (Eds.), *Actas del XIV Congreso de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.121-140). Lleida: SEIEM.

Graesser, A.C. & Goodman, S.M (1985). Implicit knowledge, question answering and the representation of expository text. En B.K. Britton & J.B Black (Eds.), *Understanding expository texts* (pp. 109-171). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Graesser, A.C., Singer, M., & Trabasso, T. (1994). Constructing inferences during narrative text comprehension. *Psychological Rewiew*, *101*, 371-395.

Greeno, J. G. (1978). Natures of problem-solving abilities. En W.K. Estes (Ed.), *Handbook of learning and cognitive processes*. *Human information* (pp.239-270). Oxford: Lawrence Erlbaum.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York, NY: Macmillan.

Greer, B. (1996). Theories of mathematics education: the role of cognitive analyses. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 179-196). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7,* 293-307. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00006-6

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 89–98). New York: Springer.

Grupo Cero (1987). *Un proyecto de currículum en matemáticas*. Valencia: Mestral Libros.

Guarro, A. (2005). *Los procesos de cambio educativo en una sociedad compleja. Diseño, desarrollo e innovación del currículum.* Madrid: Morata.

Guerrero, J. (1989). Ámbitos y funciones del currículum matemático. *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 14,* 57-62.

Hagland, K., Hedren, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation.* Stockholm: Liber.

Halmos, P.R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87* (7), 519-524. doi: 10.1080/00029890.1980.11995081

Halmos, P.R. (1991) ¿Qué es un matemático? *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 20,* 33-40.

Hansen, T.I. (2018). Textbook Use. En E. Fuchs y A. Bock (Eds.), *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.369-398). New York: Hanbooks. doi: 10.1057/978-1-137-53142-1_27

Hasemann, K. (2005). Problemas lingüísticos y de comprensión matemática. Resultados de un experimento docente llevado a cabo en segundo de primaria. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas,39*, 91-100.

Hawkins, J. (2012). Don't Ask About and Don't Tell the Lies My Teacher Told to Me. En H. Hickman & B. J. Porfilio (Eds.), *The New Politics of the Textbook: Problematizing the Portrayal of Marginalized Groups in Textbooks* (pp. 235-257). Rotterdam, Boston, Taipei: Sense Publishers. doi: 10.1007/9789460919121_014

Hayes, J.R. (1980). Teaching problem solving mechanisms. En D.T. Tuma & F. Reif (Eds.), *Problem solving and education: Issues in teaching and research* (pp.141-147). N.J: Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

Hegarty, M., Mayer, R.E. & Monk, C.A. (1995). Comprehension of aritmetic word problem: a comparision os successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of educational psychology,87* (1),18-32.

Heinonen, J.P. (2005). *Opetussunnitelmat vai oppimateriaalit. Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja opppimateriaalien merkityksestä opetuksessa*. Helsingfors: Helsingfors Universitet.

Heinze, C. (2010). Historical Textbook Research: Textbooks in the Context of the "Grammar of Schooling". *Journal of Educational Media, Memory, and Society, 2* (2), 122–131. doi: 10.3167/jemms.2010.020209

Heller J.I. & Greeno, J.G. (1978). *Semantic processing in arithmetic word problem solving.* Paper presentado en Midwestern Psychological Association Convention. Chicago.

Hernández, M.L. (2004). Libros de texto, algoritmos y problemas verbales: ¿cuál es el resultado de mezclar estos ingredientes? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 35,* 66-73.

Hiebert, J. (1982). The position of unknown set in children´s solutions of verbal arithmetic problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 341-349. doi: 10.2307/749008

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J. & Stigler, P. (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington, DC: National Center for Education Statistics (NCES).

Hilton, P. (2000). Necesidad de una reforma. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.79-90). Barcelona: Graó.

Höhne, T. (2018). Educational media, reproduction and technology: towards a critical political economy of educational media. En E. Fuchs & A. Bock (Eds.), *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.115-126). New York: Hanbooks.

Horsley, M. & Sikorová, Z. (2014). Classroom Teaching and Learning Resources: International Comparisons from TIMSS - A Preliminary Review. *Orbis Scholae*, *8* (2), 43–60.

Horsley, M. & Walker, R. (2005). Textbook Pedagogy: A Sociocultural Analysis. En M. Horsley, S. V. Knudsen, y S. Selander (Eds.), *Has Past Passed? Textbooks and Educational Media for the 21st Century. The 7th IARTEM Volume* (pp. 47–69). Stockholm: HLS.

House, P. A., Wallace, M.L. & Johnson, M. A. (1983). *Problem solving as a focus. How? When? Whose responsibility? The agenda in action.* Virginia: NTCM.

Hudson, T. (1983). Correspondances and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84-90. doi: 10.2307/1129864

IEA (2015). TIMSS. *Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe español: resultados y contexto*. Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

IEA (2019). TIMSS. *Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Marcos de la Evaluación*. Ministerio de Educación y Formación Profesional.

INEE (2013). TEDS-M. *Informe Español. Estudio internacional sobre la formación en matemáticas de los maestros.* Volumen II. Ministerio de Educación y Formación Profesional. http://www.mecd.gob.es/inee/

IREM (1980). Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques de Grenoble. *Bulletin de l´Association des Professeurs de Mathématiques de l´Enseignement Public, 323,* 235-243.

Jablonka, E. & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. En B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, B. D. Söndergaard, & L. Haapasalo (Eds.). *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark and Contributions from Finland* (pp.363–372). Charlotte, NC: IAP.

Jiménez, L. (2012). La aplicación del conocimiento contextualizado en la resolución de problemas matemáticos: un estudio sobre las dificultades de los niños en la resolución de problemas no rutinarios. *Cultura y Educación, 24*(3),351-362. doi: 10.1174/113564012802845640

Jiménez, L. & Verschaffel, L. (2014). Development of Children´s solutions of non standard arithmetic word problem solving. *Revista de Psicodidáctica, 19* (1), 93-123. doi: 10.1387/RevPsicodidact.7865

Jochim, V. (2014). "Weil Mädchen anders lernen"- Die Konstruktion von Geschlecht in Grundschulbüchern und ihre heteronormative Wirkmächtigkeit. *Eckert. Working Papers* 9.

Jonassen, D.H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational technology research and development, 48* (4), 63-85.

Jones, D. & Brown, C. (2011). Reading engagement: A comparison between e-books and traditional print books in an elementary classroom. *International Journal of Instruction, 4* (2), 5-22.

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 36*, 20–32. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.08.003

Juidías, J. y Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 342*, 257-286.

Kantowski, M.G. (1981). Problem solving. En E. Fennema (Ed.), *Mathematics Education Research: Implications for the 80* (pp.111-116). NCTM: Reston.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. En E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp.1-15). New Jersey: Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp.123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kim, J. H. y Jung, H.Y. (2010). South Korean Digital Textbook Project. Computers in the Schools. *Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research 27*, 247-265. doi: 10.1080/07380569.2010.523887

Kintsch, W. (1988). Comprehension: *A paradign for cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kintsch, W. & Greeno, J. (1985). Undertanding and solving word arithmetic problem. *Psychological Review, 92,* 109-129.

Kintsch, W. & van Dijk, T.A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review, 8,* 363-94. doi: 10.1037/0033-295X.85.5.363

Knight, B.A. (2015). Teachers use of textbooks in the digital age. *Cogent Education, 2*, 1-10. doi: 10.1080/2331186X.2015.1015812

Knudsen, S. V. (2011). *Internasjonal forskning på læremidler: en kunnskapsstatus*. Borre: Høgskolen i Vestfold.

Köhler, N. (1925). *The mentality of apes.* Nueva York: Liveright.

Kolbeck, G. y Röhl, T. (2018). Textbook Practices: Reading Texts, Touching Books. En *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.399-410). New York: Hanbooks.

Kolovou, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Bakker, A. (2009). Non routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks. A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8* (2), 31–68.

Krulik, S. & Rudnik, K. (1980). *Problem solving in school mathematics*. *Year Book*. Reston, VA: NCTM.

Landis, J.R. & Koch, G.G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, *33*(1), 159- 174.

Lave, J. (1992). Word problems: A microcosm of theories of learning. En P. Light y G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp.74-92). Nueva York: Harvester Wheatsheaf.

León, J.A. (2004). ¿Por qué las personas no comprenden lo que leen? *Psicología Educativa*, *10* (2), 101-106.

Lerman, S. (1994). *Cultural perspectives on the mathematics classroom*. Dordrecht: Kluwer.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F.K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem solving instruction. *The Mathematics Enthusiast, 10* (1), 245–278.

Lester, F.K. & Kroll, D.L. (1991). Evaluation: a new vision. *Mathematics teacher, 84*, 276-284.

Lester, F.K., Lambdin, D.V., & Preston, R.V. (1997). A new vision of the nature and purposes of assessment in the athematics classroom. En G.D. Phye (Ed.), *Handbook of classroom assesment: Learning, adjustment, and achievement* (pp.287-319). San Diego, CA: Academic Press.

Lewis, A.B. & Mayer, R. E. (1987) Student´s miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79* (4), 363-371. doi: 10.1037/0022-0663.79.4.363

Ley Orgánica 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. B.O.E núm. 187, de 6 de agosto de 1970.

Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo, de 3 de octubre. B.O.E núm. 238, de 4 de octubre de 1990.

Ley Orgánica 10/2002 de Calidad de la Educación, de 23 de diciembre. B.O.E núm. 307, de 24 de diciembre de 2002.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo de Educación. B.O.E. núm. 106, de 4 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. B.O.E núm. 295, de 10 de diciembre de 2013.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM, 41* (6), 809–826. doi: 10.1007/s11858-009-0177-5

Littefield, J. & Riesser, J.J. (1993). Semantic feactures of similarity and children´s strategies for identification of relevant information in mathematics story problems. *Cognition & Instruction, 11*, 133-188. doi: 10.1207/s1532690xci1102_2

López, E.M., Guerrero, A.C., Carrillo, J. y Contreras, L.C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 73-94.

Luceño, J.L. (1999). *La resolución de problemas aritméticos en el aula.* Málaga: Aljibe.

Luque, F. (2002). Experiencias sobre la resolución de problemas en el aula de Secundaria.

En J.M. Cardeñoso, E. Castro, A. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Actas de las Jornadas Investigación en el Aula de Matemáticas. Resolución de Problemas* (p.219-226). Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES"

Maass, K. (2007). Modelling tasks for low achieving students-first results of an empirical study. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 5* (pp. 2120–2129). Cyprus: Larnaca.

Maass, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik Didaktik, 31* (2), 285–311. doi: 10.1007/s13138-010-0010-2

Macgilchrist, F. (2015). Bildungsmedienverlage: zur Ökonomisierung in der Schulbuchproduktion. *Die deutsche Schule, 107* (1), 49–61.

Magliano, J.P., Zwaan, R.A., & Graesser, A.C. (1998). The role situational continuity in narrative understanding. En H.E. Van Oostendorp & S.R. Goldman (Eds.), *The* *construction of mental representations during reading* (pp.219-245). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: reflections and prospect. En D.B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective* (pp. 237-244). New York: Springer-Verlag.

Manouchehri, A., Zhang, P., & Liu, Y. (2012). *Forces hindering development of mathematical problem solving among school children*. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Marchis, I. (2012). Non routine problems in primary mathematics workbooks from Romania. *Acta Didactica Napocensia, 5* (3),49-55.

Mardis, M., Everhart, N., Smith, D., Newsum, J., & Baker, S. (2010). *From Paper to Pixel: Digital Textbook and Florida´s Schools.* The Florida State University Palm Center.

Martínez Bonafé, J. (2008). Los libros de texto como práctica discursiva. *Revista de la Asociación de Sociología de la Educación, 1* (1) 62-73.

Martínez Bonafé, J. y Rodríguez Rodríguez, J. (2010). El currículum y el libro de texto. Una dialéctica siempre abierta. En J. Gimeno Sacristán (Comp.), *Saberes e incertidumbres sobre el currículum* (pp.246-268). Madrid: Morata.

Martínez Montero, J. (2002). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales.* Barcelona: Praxis.

Matthes, E. (2014). Aktuelle Tendenzen der Schulbuch- bzw. Der Bildungsforschung. En D. Wrobel & A. Müller (Eds.), *Bildungsmedien für den Deutschunterricht: Vielfalt-Entwicklungen - Herausforderungen* (pp. 17–26). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition.* Nueva York: W.H. Freeman & Company (Traducción al castellano: *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós).

McLeod, D.B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new views of affect in mathematics education. En D.B. McLeod & V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective* (pp.245-258). Nueva York: Springer-Verlag.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.575-596). Nueva York: McMillan.

Mellado, V., Blanco, J. L., Borrachero, A.B., y Cárdenas, J.A. (2012). *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas*. Gobierno de Extremadura: Grupo de investigación DEPROFE.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Misra, P. K. (2015). Digital textbooks in India: Emergence, promotion and future predictions. En R. Rodríguez, E. Bruillard y M. Horsley (Eds.), *Digital Textbooks: What's*

New? (pp.101-111). Santiago de Compostela: Servizo de Publicacións da USC/IARTEM.

Moliner, M. (2013). *Diccionario de uso del español.* Madrid: Gredos.

Montague, M. (1988). Strategy instruction and mathematical problem solving. *Reading, writing and learning disabilities, 4,* 275-290. doi: 10.1080/0748763880040405

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación, 358,* 471-496.

Moreau, S. & Coquin-Viennot, D. (2003). Comprehension of arithemitic word problems by fifth-grade pupils: representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology, 73,* 109 -121. doi: 10.1348/000709903762869941

Mullis, I., Martin, M., & Foy, P. (2008). TIMSS 2007 *international mathematics report.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Nelson, D. (1993). Roles of cognition, emotion and social interaction in mathematics and science education. En L. Penner, G. Batsche, H. Knoff & D. Nelson (Eds.), *The challenge in mathematics and science education* (pp. 51-60), Washington: American Psychological Association.

Nesher, P. (1981). Levels of description in the analysis of addition and substraction. En T.P. Carpenter, J.M. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and substraction: Developmental perspective* (pp.25-38). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.109-123). Barcelona: Graó.

Nesher, P. & Kilpatrick, J. (1990). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University.

Nesher, P. y Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 41-51. doi: 10.1007/BF00590023

Newell, A. & Simon, H.A (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall.

Niehaus, I. (2018). How Diverse Are Our Textbooks? Research Findings in International Perspective. In E. Fuchs y A. Bock (Eds.), *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.329-344). New York: Hanbooks.

OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework-mathematics, reading, science, and problem solving knowledge and skills.* Paris: OECD.

OCDE (2013) PISA 2012. *Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos: informe español.* Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Olivo, C. (2012). Bringing women in Gender and American Government and politics textbooks. *Journal of Political Science Education, 8* (2), 131–146. doi: 10.1080/15512169.2012.667676

Olkun, S. & Toluk, Z. (2002). Textbooks, word problems and student success on addition and subtraction. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved October 20, 2017, from http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/olkuntoluk.pdf

Orrantia, J. (1993). *Comprensión y razonamiento matemático. Donde las matemáticas necesitan del lenguaje.* Conferencia inaugural del curso 1993-94 de las Escuelas Superiores Universitarias de Psicología del Lenguaje y Logopedia. Universidad Pontificia de Salamanca.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aditiva. *Infancia y Aprendizaje, 26* (4), 451-468. doi: 10.1174/021037003322553842

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagógica 23* (71), 158-180.

Orrantia, J. (2011). Las dificultades de aprendizaje: las matemáticas. En E. Martín y T. Mauri (coords.), *Orientación educativa. Atención a la diversidad y educación inclusiva* (pp.69-87). Barcelona: Graó/Ministerio de Educación.

Orrantia, J., González, B. y Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y aprendizaje, 28* (4), 429-451. doi: 10.1174/021037005774518929

Orrantia, J., Morán, M.C., Gracia, A.D. y González, L. (1994) ¡Tenemos un problema! Propuesta de un programa para enseñar a resolver problemas de matemáticas. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 28*, 15-28. doi: 10.1174/021470395763771828

Orrantia, J. y Rodríguez, L. (2008). Aprendizaje de las matemáticas y práctica educativa. *Cultura y Educación, 20* (4), 381-389. doi: 10.1174/113564008786542190

Orrantia, J., Tarín, J. y Vicente, S. (2011). El uso de la información situacional en la resolución de problemas aritméticos. *Infancia y Aprendizaje, 34* (1), 81-94. doi: 10.1174/021037011794390094

Ozer, E. & Sezer, R. (2014). A Comparative Analysis of Questions in American, Singaporean, and Turkish Mathematics Textbooks Based on the Topics Covered in 8th Grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice, 14* (1), 411-421.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 37-58. doi: 10.1007/s10649-007-9083-3

Palm, T. & Nyström, P. (2009). Gender Aspects of Sense Making in Word Problem Solving. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1* (1), 59-76.

Parcerisa, A. (2009). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Graó.

Parmjit, S. & Teoh, S.H. (2010). An analysis of addition and subtraction Word problems in mathematics textbooks used in Malaysian primary school classrooms. *Brunei International Journal of Science and Mathematics Education, 2* (1), 68-85. doi: 10.1207/s1532690xci0303_1

Pehkonen, L. (2004). The Magic Circle of the Textbook-An Option or an Obstacle for Teacher Change. En Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol.3, pp. 513-520) Bergen, Norway.

Peirats, J., Gallardo, M.I., San Martín, A., y Cortés, S. (2015). Los contenidos curriculares digitalizados: voces y silencios en el ámbito editorial. *Educatio Siglo XXI, 33* (3), 39-62. doi: 10.6018/j/240801

Peltenburg, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2012). *Special education students*' *ability to solve elementary combinatorics problems*. Paper presented at EARLI SIG 15, Utrecht, the Netherlands.

Perales, F.J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las ciencias, 11* (2), 170-178.

Pereda, L. (1987). *Didáctica de la resolución de problemas*. Bilbao: Desclée de Brouwer.

Pérez Echeverría, M.P. (1994). La solución de problemas en matemáticas. En J.I. Pozo (Coord.), *La solución de problemas* (pp.54-79). Madrid: Santillana Aula XXI.

Pérez Gómez, A.I. (1995). Autonomía profesional del docente y control democrático de la práctica educativa. En P. Manzano (Coord.), *Volver a pensar la educación* (pp.339-353). Madrid: Morata.

Pinto, L. E. (2007). Textbook publishing, textbooks, and democracy: A Case Study. *Journal of Thought, 42* (1), 99–121.

Pointner, A. (2010). Schule zwischen Vielfalt und Norm(alis)ierung: eine Analyse von Grundschulbüchern im Sinne einer Pädagogik vielfältiger Lebensweisen. En A. P. Mörth & B. Hey (Eds.), *Geschlecht und Didaktik*. Graz: Leykam.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Pricenton University Press. (Versión en castellano: *Cómo plantear y resolver problemas,* 1965. Méjico: Trillas).

Pozo, J.I., Monereo, C. y Castelló, M. (2007). El uso estratégico del conocimiento. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Coord.), *Psicología de la educación escolar* (pp.211-258). Madrid: Alianza Editorial.

Pozo, J.I. y Postigo, Y. (1994). La solución de problemas como contenido procedimental de la educación obligatoria. En J.I. Pozo (Coord.). *La solución de problemas* (pp.179-213). Madrid: Santillana Aula XXI.

Puchalska, E. & Semademi, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetical problems with missing, surplus or contradictory data. *For the Learning of Mathematics, 7* (3), 9-16.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Ramos, M. (2015). *El papel de los conocimientos del profesorado sobre resolución de problemas y su incidencia en la práctica educativa en las aulas de Educación Primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Real Academia Española, (2014). *Diccionario de la lengua española*. Barcelona: Espasa.

Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria. B.O.E núm. 220, de 13 de septiembre de 1991.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. B.O.E núm.293, de 8 de diciembre de 2006.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. B.O.E núm. 52, de 1 de marzo de 2014.

Remesal, A. (2006). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos.* Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Repoussi, M. & Tutiaux-Guillon, N. (2010). New Trends in History Textbook Research: Issues and Methodologies Toward a School Historiography. *Journal of Educational Media, Memory and, Society, 2* (1), 154-170. doi: 10.3167/jemms.2010.020109

Resnick, L.B. (1992). From protoquantities to operators: Buuilding mathematical competence on a foundation of everday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putman, & R.A. Hattrup (Eds.) *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NJ.LEA.

Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction.* Hillsdale. N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B. & Glaser, R. (1976). Problem solving and intelligence. En L.B. Resnick, (Ed.), *The nature of intelligence* (pp.205-230). Hilsdale, N.J: Erlbaum.

Reusser, K. (1988) Problem solving Beyond the logic Thigs: Contextual Effects on Understanding and Solving Word Problems. *Instructional Science, 17,* 309-338. doi: 10.1007/BF00056219

Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. En H. Mandl, E. De Corte, N. Bennett & H.F. Friedrich (Eds.), *Learning and Instruction* (pp.477-498). Oxford: Pergamon.

Reusser, K. & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspensión of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction, 7,* 309-328.

Reys, R., Reys, B., Lapan, R., Holliday, G., & Wasman, D. (2003). Assessing the impact of standards-based middle grades mathematics curriculum materials on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 34* (1), 74-95. doi: 10.2307/30034700

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp.21-39). Madrid: Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina. (Eds.). *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp.1-23). Comares: Granada.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities of solving problems. *Cognition & Instruction, 5,* 49–101. doi: 10.1207/s1532690xci0501_2

Riley, M.S., Greeno, J.G., & Heller, J.I. (1983). Development of children´s problem-solving ability in arithmetc. En H. Ginsburg (Comp.), *The development of mathemathical thinking* (pp.153-196). Nueva York: Academic Press.

Rives, M. (2011). Proyecto Dinosaurios. En J. Hernández, F. Pennessi, D. Sobrino y A. Vázquez. *Experiencias educativas en las aulas del siglo XXI. Innovación con TIC* (pp.78-81). Barcelona: Ariel.

Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar* (pp.155-182). Madrid: Alianza.

Rivière, V. (2002). Un informe muy citado. *Revista Suma,40,* 133-140.

Robitaille, D. F. & Travers, K.J. (1992). International studies of achievement in mathematics teaching and learning. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.687-702). Nueva York: Macmillan.

Rodríguez Regueira, N. & Rodríguez Rodríguez, J. (2015). The digital textbook. A look at the current state of the art. In R. Rodríguez Rodríguez, E. Bruillard y M. Horsley (Eds.). *Digital Textbooks: What's New?* (pp.7-36) Santiago de Compostela: Servizo de Publicacións da USC/IARTEM.

Rodríguez Rodríguez, J. (2011). Production and adaptation of materials for teachers and students: understanding socio-cultural diversity in marginalised and disadvantaged contexts. *IARTEM e-Journal, 4* (1), 100 -125.

Rodríguez Rodríguez, J., Horsley, M., & Knudsen, S.V. (2011). 10th International Conference on textbooks and Educational Media. Santiago de Compostela: IARTEM.

Rodríguez Rodríguez, J. y Montero, M. L. (2012). The opinion of primary-schook teachers regarding textbooks and printed curricular materials developed to support their teaching activities. *Educational Media International, 49* (2), 123-139. doi: 10.1080/09523987.2012.683962

Rodríguez Rodríguez, J. y Rodríguez Regueira, N. (2016). Revisión de la investigación publicada sobre el libro de texto digital en revistas, publicaciones y congresos internacionales de referencia. *Revista de currículum y formación del profesorado, 20* (1), 10-31.

Roldán, E. (2018). Textbook and Education. En E. Fuchs & A. Bock (Eds.), *The Palgrave Handbook of Textbook Studies* (pp.103-114). New York: Hanbooks.

Romberg, T.A & Carpenter, T.P. (1988). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Witrock (Ed.), *The third Handbook of Research on Teaching.* New York: Mcmillan.

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S. y Chamoso, J. M. (2008a). La resolución de problemas aritméticos en el aula. ¿Qué hacen los profesores cuando trabajan conjuntamente con sus alumnos? *Cultura y Educación, 20* (4) pp.423-439. doi: 10.1174/113564008786542253

Rosales, J., Orrantia, J., Vicente, S., & Chamoso, J. M. (2008b). Studying mathematics problem-solving classrooms. A comparison between the discourse of in-service teachers and student teachers. *European Journal of Psychology of Education, 23,*275-294. doi: 10.1007/BF03173000

Rosales, J., Vicente, S., Chamoso, J.M., Múñez, D. & Orrantia, J. (2012). Teacher student interaction in joint word problem solving. The role of situational and mathematical in mainstream classrooms. *Teaching and Teacher Education, 28,*1185-1195. doi: 10.1016/j.tate.2012.07.007

Ros-Garrido, A. y García Rubio, J. (2014). La calidad en la formación del profesorado del sistema educativo y de los certificados de profesionalidad. *Edetania, 50,* 101-119.

Ruiz, A. (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 10,*1-111.

Ryve, A. (2006). *Approaching mathematical discourse-Two analytical frameworks and their relation to problema solving interactions.* PhD Thesis, Mälardalen University. Departament of Mathematics and Physics.

Saiz, C. (2009). Solución de problemas. En C. Saiz (Coord.), *Pensamiento crítico. Conceptos básicos y actividades prácticas,* (pp.183-207). Madrid: Pirámide.

Säljö, R. & Wyndhamn, J. (1987). The formal setting as context for cognitive activities. An empirical study of arithmetic operations under conflicting premises for comunication. *European Journal of Psychology of Education*, *2* (3), 233-245. doi: 10.1007/BF03172730

Sánchez, M.R. y Vicente, S. (2015). Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles. *Cultura y Educación, 27* (4), 710-725.

Sancho Höhne, M. & Heerdegen, D. (2018). On normativity and absence: representation of LGBTI in textbook research. En E. Fuchs y A. Bock (Eds.), *The Palgrave Hand-*

book of Textbook Studies (pp.239-250). New York: Hanbooks. doi: 10.1057/978-1-137-53142-1_17

Santos-Trigo, L.M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, L.M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds.), *Actas del XII Congreso de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.159-187). Badajoz: SEIEM.

Sarabia, A. e Iriarte, C. (2011). *El aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?* Pamplona: EUNSA. Ediciones Universidad de Navarra, S.A.

Sarama, J. & Clements, H.D. (2009). *Early childhood mathematics education research*. New York and London: Routledge. doi: 10.4324/9780203883785

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *American Mathematical Monthly, 87* (10), 794-805. doi: 10.1080/00029890.1980.11995155

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*, 329-363. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80003-2

Schoenfeld, A. H. (1985a). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En M.E.C. (Ed.), *La enseñanza de las matemáticas a debate* (pp.25-30). Madrid: MEC.

Schoenfeld, A. H. (1985b). *Mathematical problem solving.* San Diego (CA): Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. B. Resnick L. y Klopfer (Comp.), *Currículum y cognición* (pp.141-170). Argentina: Aique.

Schoenfeld, A.H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J.F. Voss, D.N. Perkins y J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp.311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A.H (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp.334-389). Nueva York: MacMillan.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13* (1), 55-80.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM- The International journal on Mathematics Education, 39,* 537-551. doi: 10.1007/s11858-007-0038-z

Schoenfeld, A.H (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast, 10* (1), 9-34.

Schroeder, T. L. & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp.31-56). Reston: NCTM.

Seco, M., Andrés, O y Ramos, G. (2011). *Diccionario del español actual.* Madrid: Aguilar.

Semademi, Z. (1995). Developing children's understanding of verbal arithmetical problems. En M. Hejn & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Elementary Math Teaching* (pp. 27-32). Praga: Facultad de Educación, Universidad Charles.

Silver, E.A. (1994). On mathematical problema posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Simon, H.A. (1978). Information-Processing Theory of Human Problem Solving. En W.K. Estes (Eds.), *Handbook of Learning and Cognitive Processes,* (Vol.5, pp.271-295). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Singer. F. M. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics, 83* (1), 9-26. doi: 10.1007/s10649-012-9422-x

Skovmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una Empresa Docente. (Edición original en inglés de 1994).

Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI, 29* (2), 199-224.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erl baum Associates.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1987). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. En R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.1-22). Reston, (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Staub, F. & Reusser, K. (1992). *The role of presentational factors in understanding and solving mathematical word problems.* Paper presentado en el meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Staub, F. & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. En C.A. Weaver, S. Mannes & C.R. Fletcher (Eds.), *Discourse Comprehension: Essays in honor of Walter Kintsch,* (pp.285-305). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stein, M., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2* (1), 50-80. doi: 10.1080/1380361960020103

Stein, M., Remillard, J. T., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influence student learning. En F. K. Lester Jr. (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 319–369). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stein, M., & Smith, M. (2010). The influence of curriculum on students' learning. En B. J. Reys, R. E. Reys & R. Rubenstein (Eds.), *Mathematics curriculum. Issues, trends, and future directions* (pp. 351– 362). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Stenberg, R. (1995). *In search of the human mind.* Londres: Hartcout Brace.

Stern, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben "gelöst"? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. *Der Mathematikunterricht, 28* (5), 7-29.

Stern, E. & Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word-problems. *Cognitive Development, 7,* 259-268. doi: 10.1016/0885-2014(92)90014-I

Stigler, J.W., Fuson, K, C., Han, M., & Kim, M.S. (1986). An analysis of addition and subtraction Word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 3,* 153-171. doi: 10.1207/s1532690xci0303_1

Stigler, J.W., Lee, S.Y., & Stevenson, H.W. (1995). *Mathematical Knowledge of Japanese, Chinese and American elementary school children.* V.A: National Council of Teachers of Mathematics.

Suh, S. Y. & Trabasso, T. (1993). Inferences during reading: Converging evidence from discourse analysis, talk-aloud protocols, and recognition priming. *Journal of Memory and Language, 32*, 279-300. doi: 10.1006/jmla.1993.1015

Tarim, K. (2017). Problem Solving Levels of Elementary School Students on Mathematical Word Problems and The Distribution of These Problems in Textbooks. *Çukurova University. Faculty of Education Journal, 46* (2), 639-648. doi: 10.14812/cuefd.306025

Tárraga, R., Fernández, M.I. y Pastor, G. (2013). La dimensión emocional ante la solución de problemas de matemáticas en estudiantes con dificultades de aprendizaje. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero y J.A. Cárdenas (Coods.), *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas* (Vol.1, pp.103-116). Gobierno de Extremadura: Grupo de investigación DEPROFE.

Thomson, S. & Fleming, N. (2004). Summing it up: Mathematics achievement in Australian schools in TIMMS 2002. *TIMSS Australia Monograph Series, 3.*

Törner, G., Schoenfeld, A. H., & K. M. Reiss (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (5-6), 353. doi: 10.1007/s11858-007-0053-0

Torres, J. (2009). *La desmotivación del profesorado*. Madrid: Morata.

Torres, J. (2014). Organización de los contenidos y relevancia cultural. *Cuadernos de Pedagogía, 447*, 50-53.

Torres, J. (2015). Políticas educativas: Revoluciones y reformas. En J. Gimeno Sacristán, M.A. Santos Guerra, J. Torres, P.W. Jackson y J. Marrero. *Ensayos sobre el currículum: Teoría y práctica* (141-147). Madrid: Morata.

Trabasso, T. & Sperry, L. (1985). Casual relatedness and importance of story events. *Journal of Memory and Language, 24*, 595-611. doi: 10.1016/0749-596X(85)90048-8

Trabasso, T.& Van Den Broek, P.W. (1985). Casual thinking and the representation of narrative events. *Journal of Memory and Language, 24,* 612-630. doi: 10.1016/0749-596X(85)90049-X

Travé, G. y Pozuelos, F. J. (2008). Consideraciones didácticas acerca de las líneas de investigación en materiales curriculares. A modo de presentación. *Revista Investigación en la escuela, 65*, 3-10.

Trecker, J. L. (1973). Women in US High School Textbooks. *International Review of Education, 19* (1), 133–139.

Tröhler, D. & Oelkers, J. (2005). Historische Lehrmittelforschung und Steuerung des Schulsystems. En E. Matthes y C. Heinze (Eds.), *Das Schulbuch zwischen Lehrplan und Unterrichtspraxis* (pp. 95–107). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Tyack, D. & Tobin, W. (1994). The “Grammar” of Schooling: Why Has It Been So Hard to Change? *American Educational Research Journal, 31* (3), 453–479. doi: 10.3102/00028312031003453

Valencia, J., Páez, D. y Echevarría, A. (1989). Teorías sociopsicológicas de las emociones. En A. Echevarría y D. Páez (Eds.), *Emociones: perspectivas psicosociales* (pp. 141-232). Madrid: Editorial Fundamentos.

Valero, P. (2012). La inclusión de visiones sobre lo “social” y lo “político” en educación matemática. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp.187- 203). Barcelona: Graó.

Valverde, G. (2013). *Competencias Matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Van de Walle, J.A. (1998). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. New York: Longman.

Van den Broek, P. (1990). Causal inferences and the comprehension of narrative texts. En A. C. Graesser & G. H. Bower (Eds.), *Inferences and text comprehension* (pp. 175-196). San Diego: Academic Press.

Van Dijk, T.A. & Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. Nueva York: Academic Press.

Van Meriënboer, J. (2013). Perspectives on problem solving and instruction. *Computers & Education, 64*, 153–160.

Van Stiphout, I. M. (2011). *The development of algebraic proficiency*. Proefschrift, Technische Universiteit Eindhoven.

Van Zanten, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school mathematics textbooks. *ZDM: the international journal on mathematics education, 50* (7), 827-838. doi: 10.1007/s11858-018-0973-x

Vecino, F. (2011). El espacio como modelo teórico para el desarrollo de las geometrías. Situaciones de introducción a las mismas. En Mª.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil* (p.281-314). Madrid: Pearson. Prentice Hall.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las Matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (2001). Problemas aditivos y multiplicativos. En E. Fernández (Coord.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp.189-228). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Verschaffel, L. (2012). Los problemas aritméticos verbales y la modelización matemática. En N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp.27-41). Barcelona: Graó.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lausure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school atihmetic word problems. *Learning and Instruction, 4,* 237-294. doi: 10.1016/0959-4752(94)90002-7

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer´s consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84* (1), 85-94. doi: 10.1037/0022-0663.84.1.85

Verschaffel, L., De Corte, E., & Vierstraete, H. (1999). Upper Elementary school pupil´s difficulties in modelling and solving non-standard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (3), 265-285.

Verschaffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2014). Word problems in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 641–645). Dordrecht: Springer.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31* (1), 9–29. doi: 10.1007/s13138-010-0007-x

Vicente, R. (2010). "Os materiais didácticos e musicais en educación infantil. Un estudo descritivo e interpretativo da percepción docente en Galicia". Tese de Doutoramento. Santiago de Compostela. Departamento de Didáctica e Organización Escolar.

Vicente, S. (2006). *Conocimiento matemático y situacional y su influencia en la resolución de situaciones problemáticas de estructura aditiva*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Vicente, S. (2013). Problemas con los problemas. Por una nueva aritmética en clase. *Cuadernos de Pedagogía, 437,* 72-76.

Vicente, S. y Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA, 11* (4), 253-279.

Vicente, S., Manchado, E., y Verschaffel, L. (2018). Resolución de problemas aritméticos verbales. Un análisis de los libros de texto españoles. *Cultura y Educación, 30* (1), 87-104. doi: 10.1080/11356405.2017.1421606

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación, 19* (1) ,61-85. doi: 10.1174/113564007780191232

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2007). Influence of situational and conceptual rewording on word problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 77,* 829-840. doi: 10.1348/000709907x178200

Vicente, S., Orrantia, J., y Verschaffel, L. (2008a). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje, 31* (4), 463- 483. doi: 10.1174/021037008786140959

Vicente, S; Orrantia, J., y Verschaffel, L. (2008b). Influence of situational and mathematical information on situationally dificult word problems. *Studia Psychologica, 50,* 337-336.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J. M. y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clasesde matemáticas españolas de Educación Primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación,25*, 535-548. doi: 10.1174/113564013808906799

Vicente, S., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2008). *Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. Cultura y Educación, 20* (4), 391-406. doi: 10.1174/113564008786542235

Vincent, J. & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbook cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20* (1), 82-107. doi: 10.1007/BF03217470

Vila, A. (2001). *Resolució de problemas de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l´alumnat. Alguns efectes sobre l´abordatge dels problemas.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Viñao, A. (2006). *Sistemas educativos, culturas escolares y reformas*. Madrid: Morata.

Voyer, D. & Golet, M.P (2013). La compréhension de problèmes écrits d´arithmétique au regard de l´habilité en lectura d´élèves de sixième année (11 ans). *Revue des sciencies de l´éducation, 39* (3), 491-513.

Watt, M. (2015). Research on Textbook Use in the United States of America. *IARTEM e Journal, 7* (2), 48-72.

Weinberg, A. y Wiesner, E. (2011). Understanding Mathematics Textbooks Through Reader-Oriented Theory. *Educational Studies in Mathematics, 76* (1), 49–63. doi: 10. 1007/s 10649-0 10-9264-3

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking.* Nueva York: Harper & Row. (Versión en castellano: *El pensamiento productivo*, 1991. Barcelona: Paidós).

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89* (1), 41-65. doi: 0.1 007/s 1 0649-0 1 5 -9595- 1

Wilmot, M. y Naidoo, D. (2014). “Keeping Things Straight”: The Representation of Sexualities in Life Orientation Textbooks. *Sex Education: Sexuality, Society and Learning, 14* (3), 323–337. doi: 10.1080/14681811.2014.896252

Worth, J. (1982). Problem solving in intermediate grades: helping your students learn to solving problems. *Arithmetic Teacher, 29* (6) 16-19.

Wylie, S. S. (2012). Uncovering and Destabilizing Heteronormative Narratives in World History Textbooks. En H. Hickman & B. J. Porfilio (Eds.), *The New Politics of the Textbook: Problematizing the Portrayal of Marginalized Groups in Textbooks* (pp. 129–148). Rotterdam, Boston, Taipei: Sense Publishers.

Xenofontos, C. (2010). *International comparative research on mathematical problem solving: Suggestions for new research directions*. Paper presented at the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, France.

Zalta, E. (2012). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Standford, CA: Center for the Study of Language and Information. Disponible en http://plato.stanford.edu

Zapico, M. H. (2012). *Presenza, conceptualización e tratamento da vellez no currículo escolar: quimera ou realidade? Análise da imaxe das persoas maiores nos materiais curriculares de Educación Primaria de Galicia.* Tese de Doutoramento. Santiago de Compostela. Departamento de Didáctica e Organización Escolar.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4* (4), 609–626. doi: 10.1007/*s10763*-006-9036-9

ANEXOS

ANEXO I

Modelos y pasos en la resolución de problemas
(Adaptado de Sánchez y Vicente, 2005).

MODELO SUPERFICIAL	MODELO GENUINO
▪ Selección de los datos sin necesidad de comprender de forma genuina el enunciado del problema. ▪ Deducción de la estrategia de resolución o la operación aritmética que se debe ejecutar, apoyándose en características superficiales. Por ejemplo: el uso de una la palabra clave (más, menos) que indique al alumno si debe sumar o restar; o una característica contextual como la aplicación del algoritmo que se está estudiando en ese momento. ▪ Solución del problema, sin comprobar si es aceptable desde el punto de vista matemático o situacional.	▪ Lectura del problema y extracción de los datos relevantes. ▪ Comprensión de la situación descrita: primero, de manera cualitativa (personajes, acciones, intenciones), para crear un modelo de la situación; posteriormente, de manera conceptual (matemática), proyectando la información cualitativa en el modelo matemático del problema, a través de la aplicación de los conocimientos previos de carácter matemático. ▪ Deducción, a partir del modelo matemático, de las estrategias de resolución y operaciones matemáticas. ▪ Aplicación de las estrategias y resolución de las operaciones. ▪ Comprobación del resultado obtenido de acuerdo con el modelo situacional y matemático.

PASO 1. DATOS.

Extraer o completar los datos del problema.
Leerlo detenidamente; explicarlo.
Omitir datos irrelevantes.
Ordenar un enunciado que se presenta desordenado.
Extraer datos de un gráfico o una tabla.

PASO 2. RAZONAMIENTO.

Modelo de la situación. Comprender la situación cualitativa descrita por el problema. Valorar qué aspectos cualitativos de la situación deben considerarse antes de establecer las relaciones entre las cantidades del problema.
Razonamiento matemático. Establecer las relaciones matemáticas necesarias entre las cantidades del problema para deducir la operación aritmética que lo resuelve.

PASO 3. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN.
Hacer una tabla; buscar una regla o patrón; utilizar problemas más sencillos; estimar el resultado; empezar por el final; ensayo y error; modelo físico: presentación de un modelo, normalmente un dibujo; eliminar posibilidades: posibles soluciones, combinaciones de datos del problema; utilizar la recta numérica; usar dibujos para representar incógnitas; determinar número de operaciones necesarias para resolver el problema; buscar operaciones o preguntas intermedias.

PASO 4. OPERACIONES.

Elección de operación/es concreta/s y su resolución.

PASO 5. RESULTADO.

Expresión del resultado.

PASO 6. COMPROBACIÓN DEL RESULTADO.

Comprobación genérica: cuando no se aportan criterios sobre cómo hacer la comprobación). Comprobación específica matemática: mediante operaciones o razonando si un resultado es matemáticamente correcto o no.
Comprobación específica situacional, de acuerdo con la situación cualitativa propuesta.

PASO 7. INVENTAR

Inventar alguna parte del problema (pregunta, datos, enunciado completo, etc.).

Pasos del modelo de resolución superficial: datos, estrategias de resolución, elección de operaciones, expresión y comprobación del resultado e inventar.
Pasos del modelo de resolución genuino: todas las combinaciones de los pasos anteriores que incluyan el razonamiento

ANEXO II

Codificación de los problemas del Estudio I por cursos y editoriales atendiendo a las variables analizadas.

ANEXO III

Codificación de los ítems del Estudio II por cursos y editoriales atendiendo a las variables analizadas.

NOTA

Dada la gran extensión de los Anexos II (242 páginas) y III (153 páginas), hemos decidido separarlos de este documento y situarlos en la web para que el lector de esta tesis pueda examinarlos.

Las url son las siguientes:

ANEXO II https://www.uv.es/tamin/anexo_ii.pdf

ANEXO III https://www.uv.es/tamin/anexo_iii.pdf

ANEXO IV

Procedimiento de fiabilidad interjueces diseño de las tareas (tarea 1)

¿QUÉ TAREAS TE PEDIMOS COMO EXPERTO/A?

TAREA 1.

Clasificar 10 problemas matemáticos, extraídos de diferentes libros de texto y guías didácticas, en función de su **estructura semántica.**

¿CÓMO PUEDO RECONOCER LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA?

A continuación, tienes información sobre los distintos tipos de problemas:

1º Los problemas de **estructura aditiva** son aquellos que se resuelven utilizando los algoritmos de suma y resta.

2º Estos problemas se clasifican en **simples y compuestos**: los problemas simples se resuelven con una sola operación de suma o resta; los compuestos se resuelven con dos o más operaciones de suma o resta.
Ejemplos:

a) Problema simple: En un autobús viajan 16 mujeres y 12 hombres. ¿Cuántas personas viajan en el autobús?
b) Problema compuesto: En un autobús viajaban 56 personas. En la primera parada se bajaron 16 personas y en la segunda para se subieron 12 personas. ¿Cuántas personas viajan ahora en el autobús?

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA SIMPLES

3º Los **problemas simples**, o de una sola operación, se dividen en 20 categorías, según se requiera para su resolución un cambio, una combinación, una comparación, o una igualación:
Ejemplos:

a) Problema de cambio: María tenía 8 pelotas y le regalan 5, ¿cuántas pelotas tiene ahora?
b) Problema de combinación: Carlos tiene 6 lápices verdes y 7 lápices rojos, ¿cuántos lápices tiene ahora?
c) Problema de comparación: Teresa tiene 6 galletas y Antonio tiene 9. ¿Cuántas galletas tiene Antonio más que Teresa?
d) Problema de igualación: Tengo 14 euros y mi hermano tiene 8. ¿Cuántos euros necesita recibir mi hermano para tener los mismos que yo?
e)

Problemas de cambio.
Teniendo en cuenta que la cantidad desconocida puede ser cualquiera de los tres conjuntos implicados: conjunto inicial, conjunto de cambio (la cantidad que se añade o se quita), o bien conjunto final, y que además el problema puede estar expresado en términos de "ganancia" o "pérdida", existen 6 tipos diferentes de problemas de cambio.

Problemas de combinación

Se consideran solamente 2 tipos de problemas de combinación: los que preguntan por el todo, dadas las dos partes; y los que preguntan por una parte, dado el todo y la otra parte.

Estos problemas, al igual que los de comparación, y a diferencia de los de cambio, presentan situaciones estáticas.

Problemas de comparación

En este tipo de problemas, como su propio nombre indica, se compara un conjunto denominado de referencia, con un segundo conjunto, que recibe el nombre de conjunto comparado, de manera que surge un tercer conjunto que representa la diferencia entre ambos.

La cantidad desconocida puede ser el conjunto referente, el conjunto comparado o la diferencia; además, al igual que en los problemas de cambio, en función de la relación comparativa "más que" o "menos que" podemos diferenciar 6 tipos de problemas de comparación.

Problemas de igualación

Existe un cuarto tipo de problemas simples, los de igualación, que implican una acción dinámica (un cambio) dentro de una situación estática (una comparación). En estos problemas se produce un cambio en uno de los conjuntos que se comparan, bien el mayor o bien el menor, con el fin de igualar ambos conjuntos como resultado final. Estos problemas también se dividen en 6 categorías.

**LOS PROBLEMAS SIMPLES DE ESTRUCTURA ADITIVA
SE ENCUENTRAN EN EL ANEXO A**

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA COMPUESTOS

4º Los problemas compuestos, o problemas de más de una operación, son aquellos en los que bien se repite una categoría simple, bien se combinan varias categorías simples.

Ejemplos:

a) Pedro está en la casilla 64. Primero avanza veintitrés casillas; después, retrocede 16. ¿En qué casilla tiene que colocar la ficha?
b) En el postre, Paula comió 16 cerezas; Cristina 8 cerezas más que Paula, y Alicia, 12 cerezas menos que Cristina. ¿Cuántas cerezas comió Alicia?

En el primer problema se repite la estructura de cambio; en el segundo, es la estructura de comparación la que se repite.

Ejemplos:

a) En la panadería han hecho hoy 268 barras de pan chapata y 306 barras de pan candeal. Han vendido 482 barras. ¿Cuántas barras han quedado sin vender?
b) En un almacén hay 246 pantalones cortos, 198 pantalones largos y 173 camisetas. ¿Cuántos pantalones hay más que camisetas?

En el primer problema se combina la estructura de combinación con la de cambio; en el segundo, se combina la estructura de combinación con la de comparación.

**LOS PROBLEMAS COMPUESTOS DE ESTRUCTURA ADITIVA
SE ENCUENTRAN EN EL ANEXO B.**

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

5º Los problemas de estructura multiplicativa son aquellos que se resuelven con los algoritmos de multiplicación y/o división.
Pueden resolverse sólo con una multiplicación, sólo con una división, o también con ambos algoritmos, pero nunca aparecen las operaciones de suma y resta, ya que no son problemas de estructura aditiva.
Ejemplos:

a) En la mesa hay 4 cajas de lápices. Cada caja contiene 6 lápices. ¿Cuántos lápices hay en total?
b) En la mesa hay 24 lápices. Los quiero colocar en cajas de 6 lápices. ¿Cuántas cajas necesito?
c) Andrea compró 4 cajas de lápices con 6 lápices en cada caja. Después los repartió entre sus tres amigas. ¿Cuántos lápices obtuvo cada una de las amigas de Andrea?

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA+ MULTIPLICA

6º Por último, existen problemas en los que se combina la estructura aditiva (algoritmos de suma y/o resta) con la estructura multiplicativa (algoritmos de multiplicación y/ o división), ya que se requiere algún tipo de transformación numérica como porcentajes, fracciones, conversiones de medida etc. En estos casos el problema se clasifica dentro de la categoría correspondiente a la parte de la estructura aditiva, aunque también se señala que el problema tiene una parte multiplicativa.
Ejemplos:

a) En la taquilla del circo se vendieron 345 entradas a 15 euros y 212 entradas a 20 euros. ¿Cuánto dinero se recaudó en la caja?
b) Un camión cisterna transporta 250 hl de agua. Descarga 6400 l para el riego de una huerta y 2 kl 250 l para consumo humano. ¿Cuántos litros quedan en el camión?
c) En un garaje hay 250 coches; 3/5 de los coches son rojos y el resto azules. ¿Cuántos coches azules hay?

El primer problema es de combinación 1, pero para resolverse hemos de utilizar el algoritmo de la multiplicación, por tanto, se codificará como problema de ESTRUCTURA ADITIVA + MULTIPLICATIVA COMBINACIÓN 1.
El segundo problema es compuesto (categoría A), pero requiere una conversión de unidades de medida, por tanto, se hace uso también de la estructura multiplicativa. Así, ese problema se codificará como de ESTRUCTURA ADITIVA + MULTIPLICATIVA CATEGORÍA A.
El tercer problema es de combinación 2, pero para su resolución se necesita calcular la fracción de un número, por tanto, se codificará como de ESTRUCTURA ADITIVA + MULTIPLICATIVA COMBINACIÓN 2.

TENIENDO EN CUENTA ESTA INFORMACIÓN, TE PEDIMOS QUE COMPLETES LA SIGUIENTE TABLA:

Identifica cada uno de estos 10 problemas escribiendo en la casilla correspondiente el tipo al que pertenece.

Ejemplos:

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**TIPO**
En la biblioteca del colegio Torrefiel hay 258 libros y en la biblioteca del colegio Sanchis Guarner 169. ¿Cuántos libros hay en las dos bibliotecas?	COMBINACIÓN 1
La biblioteca del colegio Torrefiel tenía 258 libros. La Asociación de Madres y Padres de Alumnos/as ha donado 56 libros y la Asociación de Vecinos del Barrio ha donado 132. ¿Cuántos libros hay ahora en la biblioteca del colegio?	COMPUESTO CATEGORÍA A
En la biblioteca del colegio Torrefiel hay 258 libros. Está previsto que el próximo año tenga el doble. ¿Cuántos libros tendrá la biblioteca el próximo año?	ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA
En la biblioteca del colegio Torrefiel hay 258 libros y en la biblioteca del colegio Sanchis Guarner 169. Si reparten los libros entre los dos colegios. ¿Cuántos libros tendrá cada biblioteca?	E. ADITIVA. + MULTIPLICATIVA COMBINACIÓN 1
La biblioteca del colegio Torrefiel tenía 258 libros. La Asociación de Madres y Padres de Alumnos/as ha donado 56 libros y la Asociación de Vecinos del Barrio ha donado la mitad. ¿Cuántos libros hay ahora en la biblioteca del colegio?	E. ADITIVA. + MULTIPLICATIVA COMPUESTO A

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS

ESTRUCTURA ADITIVA SMPLES				**ESTRUCTURA ADITIVA COMPUESTOS**	
CAMBIO 1	COMBINACIÓN 1	COMPARACIÓN 1	IGUALACIÓN 1	CATEGORÍA A	CATEGORÍA F
CAMBIO 2	COMBINACIÓN 2	COMPARACIÓN 2	IGUALACIÓN 2	CATEGORÍA B	CATEGORÍA G
CAMBIO 3		COMPARACIÓN 3	IGUALACIÓN 3	CATEGORÍA C	CATEGORÍA H
CAMBIO 4		COMPARACIÓN 4	IGUALACIÓN 4	CATEGORÍA D	CATEGORÍA I
CAMBIO 5		COMPARACIÓN 5	IGUALACIÓN 5	CATEGORÍA E	CATEGORÍA J
CAMBIO 6		COMPARACIÓN 6	IGUALACIÓN 6		
ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA Problemas que se resuelven sólo con las operaciones de multiplicación y/o división.				**ESTRUCTURAS COMBINADAS** Cualquier problema de estructura aditiva (simples o compuestos) en los que también interviene la multiplicación y/o división.	

VER ANEXOS A Y B

TAREA 1 (VERSIÓN 1)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**TIPO**
1. El mes pasado, Leandro vendió 172 revistas y este mes ha vendido 309. ¿Cuántas revistas ha vendido este mes más que el mes pasado? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso).	
2. Marcos se va de vacaciones con su familia pero ha tenido que controlar el peso de su maleta para que le dejen subir. Ahora pesa 4 kg. Fíjate en el dibujo y responde. Si la maleta de la madre pesa el doble que la de su hijo, ¿cuánto pesa? (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación final 2º curso).	
3. El circo tiene 610 butacas. Han entrado 206 adultos y 288 niños. ¿Cuántas butacas han quedado vacías? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3er curso).	
4. Para regalar a sus sobrinos, Manuel compró dos bicicletas de 165 euros cada una y tres balones de rugby a 27 euros la unidad. Si entregó 450 euros, ¿cuánto le devolvieron? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 5º curso).	
5. En cada uno de los 4 vagones de un tren iban 20 personas. En una parada bajaron 35 personas y subieron 25. ¿Cuántas personas quedaron? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 6º curso).	
6. Flavio tiene en su casa colmenas y ha llegado el día de cosechar y envasar la miel. Para ello preparó 20 frascos de cuarto de litro, 4 de medio litro y 15 de 20 cl. ¿Cuántos litros de miel podrá envasar? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 4º curso).	
7. En un colegio hay 600 alumnos de Primaria. Un tercio de los alumnos se van de excursión al campo. ¿Qué fracción de alumnos se queda en el colegio? (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación final 4º curso).	
8. Marta preparó el lunes 18 tartas. El martes hizo 7 tartas menos que el lunes y el miércoles, 9 tartas más que el martes. ¿Cuántas tartas hizo el miércoles? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso).	
9. Marcos está haciendo una colección que tiene 25 cromos. Si tiene 12 cromos. ¿Cuántos cromos le faltan para completar la colección? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 1er curso).	
10. Un barco puede transportar 563 viajeros. Si ha hecho 25 viajes totalmente lleno. ¿Cuántas personas ha transportado? (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial 4º curso).	

TAREA 1 (VERSIÓN 2)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	TIPO
1. La maleta pesa 9 kilos. Edu saca unas botas que pesan 2 kilos. ¿Cuántos kilos pesa ahora la maleta? Ahora pesa (…). (Editorial Santillana. Libro del alumno, 1er curso).	
2. Si en el parque hay 6 columpios y la mitad están ocupados, ¿cuántos columpios están ocupados? ¿Cuántos están libres? (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).	
3. En la clase de dibujo había 45 alumnos. Primero se apuntaron 18 alumnos más y, después, se borraron 7 alumnos. ¿Cuántos alumnos quedaron? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso).	
4. Diego tiene 9 euros. Su amigo Álex tiene 4 veces más dinero que él y su amiga Silvia tiene 2 euros más que Álex. ¿Cuánto dinero tiene Silvia? (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso)	
5. El patio de los pequeños mide 63 pasos, y el de los mayores, 97 pasos. ¿Cuántos pasos más tiene el patio de los mayores? (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 1er curso)	
6. Lidia ha hecho 20 mosaicos y César ha hecho la mitad que ella. Teo ha hecho el doble de mosaicos que Lidia. ¿Cuántos mosaicos han hecho entre todos? (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso).	
7. María tenía 3 bandejas con 20 pasteles cada una. Ayer cocinó 19 pasteles más. ¿Cuántos pasteles tiene ahora? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	
8. En la estantería de un supermercado hay 100 garrafas de 5 litros de aceite que se venden a 3 euros el litro. ¿Cuánto cuesta una garrafa? (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 3er curso).	
9. Juan ha andado 570 m de casa al colegio y luego ha caminado 430 m hasta el campo de tenis. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido? (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).	
10. Diana tenía 1.432 fotos en el ordenador. Hoy ha borrado 67 que no le gustaban y ha guardado 298 fotos nuevas. ¿Cuántas fotos tiene ahora Diana en el ordenador? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	

TAREA 1 (VERSIÓN 3)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**TIPO**
1. Entre el sábado y el domingo, Miguel ha hecho varias excursiones con su motocicleta. El sábado recorrió 273 kilómetros, y el domingo, 189 kilómetros menos que el sábado ¿Cuántos kilómetros recorrió en total? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 4º curso).	
2. En la clase de cuarto hay una caja con 121 rotuladores. Irene ha cogido 23 rotuladores e Isabel 18. ¿Cuántos rotuladores quedan en la caja? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 4º curso).	
3. Paula compró para su granja 38 conejos. Después, compró 90 gallinas más que conejos. ¿Cuántas gallinas tiene Paula en la granja? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	
4. Una empresa de repartos tiene que entregar 1.200 paquetes. Ayer repartieron un octavo de los paquetes y hoy dos quintos. ¿Qué fracción de los paquetes han repartido ya? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 6º curso).	
5. Antonio y Alejandra van con sus tres hijos de excursión al zoo. Han visto tres elefantes asiáticos y el cuidador les ha explicado que comen únicamente hierba fresca, aproximadamente unos 220 kg de hierba al día. ¿Cuántos kilos de hierba comerán los tres elefantes en una semana? (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación final, 3er curso).	
6. Lorena tiene 176 €, Luis tiene 50 € y su hermana Carla tiene la mitad que Lorena. ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	
7. Ezequiel se fue de acampada con sus amigos. En el mapa que les mandaron del camping decía que desde la entrada debían recorrer por el sendero principal 3,7 dam hasta un gran árbol, allí girar a la derecha y recorrer unos 500 dm donde encontrarían un puesto en el que les entregarían la tienda. Por último, tenían que caminar otros 0,7 hm para llegar a la parcela donde armar la tienda. a) ¿Cuántos metros caminaron para llegar al puesto donde les entregaron la tienda? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 4º curso).	
8. Un billete de avión hasta París cuesta 135,75 €, y un billete de tren hasta la playa más cercana, 39,90 €. ¿Cuánto cuesta el billete de avión más que el de tren? (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso).	
9. La entrada al zoo cuesta 23 euros. Si vamos 9 amigos, ¿cuánto pagaremos en total? (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso)	
10. Un grupo musical, que hace conciertos en todo el mundo, transporta todo el material que necesita en camiones y furgonetas. En su última actuación utilizó 14 camiones, cada uno con 3.500 kg de material, y 6 furgonetas, cada una con 1.355 kg. ¿Cuánto pesa en total todo el material que transportan? (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso).	

TAREA 1 (VERSIÓN 4)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	TIPO
1. Mercedes tiene 17 tebeos y ha leído 5. ¿Cuántos tebeos le faltan por leer? (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso)	
2. Ángel y Óscar se juntaron en el parque para jugar a las canicas. Ángel tiene 10 canicas verdes, 2 azules y 5 blancas, Óscar tiene el doble de canicas que Ángel. ¿Cuántas canicas tiene Óscar? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 4º curso).	
3. Pedro tiene 67 años y Julia 47. ¿Cuántos años más tiene Pedro que Julia? Pedro tiene años más. (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).	
4. Un tren de largo recorrido sale de la estación con un total de 320 pasajeros. En la primera parada bajan el 25 % de los pasajeros y en la segunda, un tercio de los que quedaban. ¿Cuántos pasajeros quedan en el tren? ¿Qué porcentaje del total inicial de pasajeros son? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 6º curso).	
5. En una ciudad había 2092 autobuses, han retirado 857 y han comprado 1.146 ecológicos. ¿Cuántos autobuses más tiene ahora? (Editorial S.M. Libro del alumno, 4º curso).	
6. De un carrete de cable de 500 metros, se ha utilizado la mitad para arreglar una de las tirolinas del parque, y la cuarta parte, para arreglar otra. ¿Cuántos metros de cable han sobrado? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 4º curso).	
7. En 3ºB se han sentado por grupos. Han hecho 6 grupos de 4 mesas y las han ocupado todas, ¿cuántos alumnos hay en 3º B? Hay (…) alumnos (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).	
8. Un ascensor sube hasta el décimo noveno piso, después baja 7 pisos y vuelve a subir 3 más. ¿En qué piso para? (Editorial S.M. Libro del alumno, 3er curso).	
9. A la madre de Manuel le encanta tomar fotografías con una vieja cámara fotográfica que utiliza carretes de 35 milímetros. Todavía tiene guardados sin utilizar 52 carretes de 24 fotos y 108 carretes de 36 fotos. ¿Cuántas fotografías podrá hacer? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 5º curso).	
10. Nerea ha comprado 156 cuentas de colores para hacer pulseras. Si cada cuenta cuesta 5 céntimos, ¿cuánto se ha gastado en total? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).	

TAREA 1 (ANEXO A)
TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS SIMPLES O DE UNA OPERACIÓN

TABLA 1. Tipología de problemas de cambio.

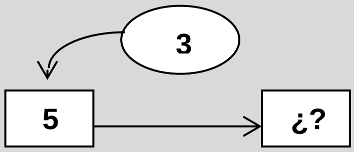
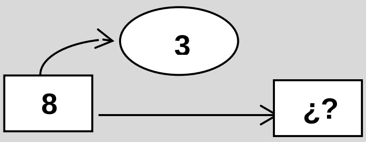
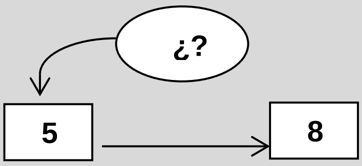
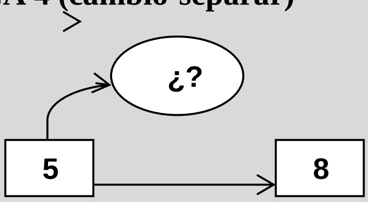
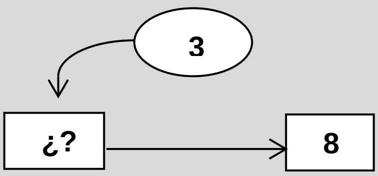
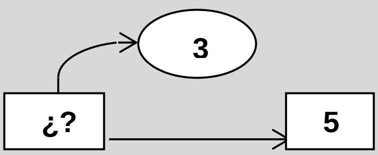
TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
CA 1 (cambio-añadir) 	**CAMBIO 1** Se parte de una cantidad inicial que se incrementa mediante una acción de añadir. La pregunta se refiere al conjunto final. **ENUNCIANO TIPO** Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA 2 (cambio-quitar) 	**CAMBIO 2** Se parte de una cantidad inicial que sufre un decremento. La pregunta hace referencia al conjunto final. **ENUNCIANO TIPO** Juan tenía 5 canicas. En una partida perdió 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?
CA 3 (cambio-juntar) 	**CAMBIO 3** Se parte de una cantidad inicial que sufre un cambio de cantidad desconocida y que da como resultado un conjunto final conocido y mayor que el conjunto inicial. La pregunta hace referencia al conjunto de cambio. **ENUNCIANO TIPO** Juan tenía 5 canicas. En una partida ganó algunas canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
CA 4 (cambio-separar) 	**CAMBIO 4** Se parte de una cantidad inicial que experimenta un cambio de cantidad desconocida y que da como resultado una cantidad conocida y menor que la inicial. La pregunta hace referencia al conjunto de cambio. **ENUNCIANO TIPO** Juan tenía 8 canicas. En una partida perdió algunas canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?
CA 5 (cambio-juntar) 	**CAMBIO 5** Se parte de una cantidad inicial desconocida que se incrementa con un conjunto de cantidad conocida y que da como resultado otra cantidad conocida. **ENUNCIANO TIPO** Juan tenía algunas canicas. En una partida ganó 3 canicas. Ahora Juan tiene 8 canicas. ¿Cuántas canicas ganó Juan?
CA 6 (cambio-separar) 	**CAMBIO 6** Se parte de una cantidad inicial desconocida que sufre un decremento con un conjunto de cantidad conocida y que da como resultado otra cantidad conocida. **ENUNCIANO TIPO** Juan tenía algunas canicas. En una partida perdió 3 canicas. Ahora Juan tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas perdió Juan?

TABLA 2. Tipología de problemas de combinación

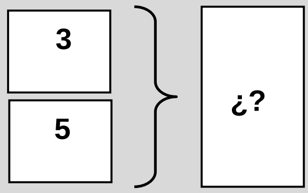
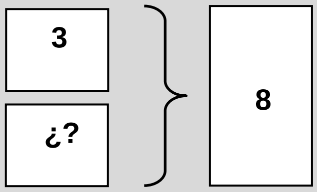
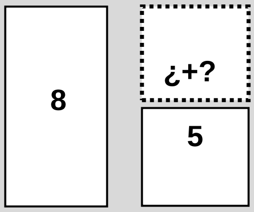
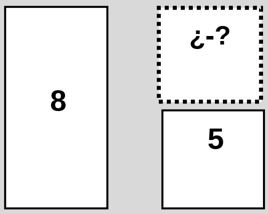
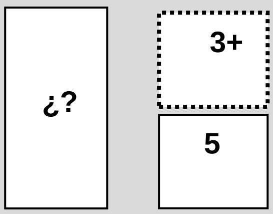
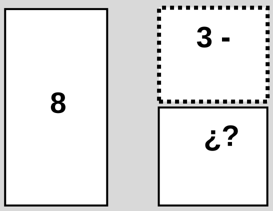
TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
CO 1 	**COMBINACIÓN 1** Las dos partes se reúnen para formar un todo. **ENUCIADO TIPO** Juan tiene 3 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?
CO 2 	**COMBINACIÓN 2** Se conoce el todo y una de las partes. Se pregunta por la otra parte. **ENUNCIADO TIPO** Juan y Pedro tienen 8 canicas entre los dos. Juan tiene 3 canicas (o Pedro tiene 5 canicas). ¿Cuántas canicas tiene Pedro (o Juan)?

TABLA 3. Tipología de problemas de comparación.

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
CP 1 	**COMPARACIÓN 1** Se conoce el conjunto de referencia y el de comparación. La pregunta alude al conjunto diferencia en términos de “cuántos más” elementos tiene el conjunto comparado respecto al referente. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Juan más que Pedro?
CP 2 	**COMPARACIÓN 2** También se conoce el conjunto de referencia y el de comparación. La pregunta alude al conjunto diferencia, pero en términos de “Cuántos menos” elementos tiene el conjunto comparado respecto al de referencia. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Pedro menos que Juan?
CP 3 	**COMPARACIÓN 3** Se conoce el conjunto referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado indicando “cuántos más” tiene. Se pregunta por este conjunto comparado. **ENUNCIADO TIPO** Pedro tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?
CP 4 	**COMPARACIÓN 4** Se conoce el conjunto de referencia y la diferencia respecto al conjunto comparado indicando el número de elementos “menos” que tiene. Se pregunta por el conjunto comparado. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

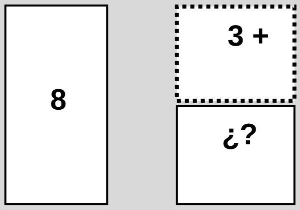
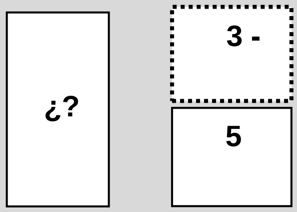
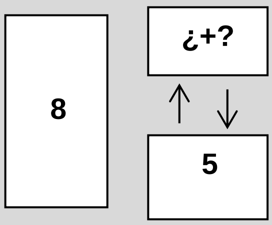
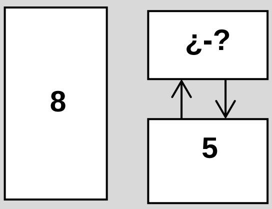
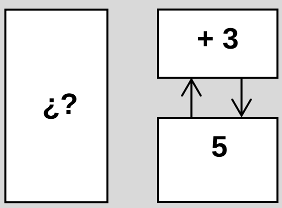
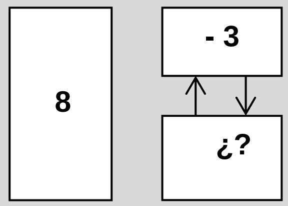
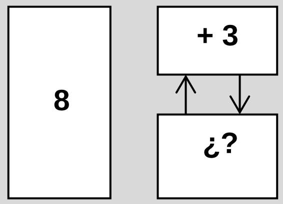
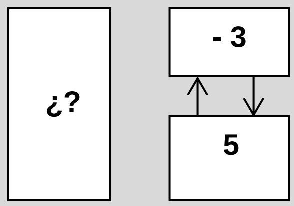
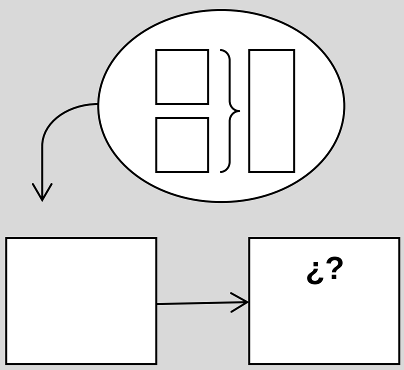
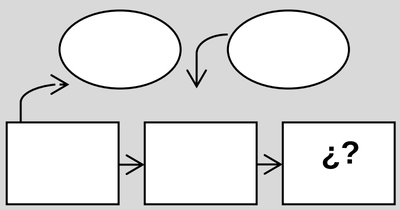
CP 5 	**COMPARACIÓN 5** Se conoce el conjunto comparado y el de diferencia apuntando cuántos elementos “más” tiene el de referencia. Se pregunta por ese conjunto de referencia. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Juan tiene 3 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
CP 6 	**COMPARACIÓN 6** Se conoce el conjunto comparado y la diferencia expresada en términos de cuántos “menos” tiene el conjunto comparado respecto al de referencia. Se pregunta por ese conjunto de referencia. **ENUNCIADO TIPO** Pedro tiene 5 canicas. Pedro tiene 3 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

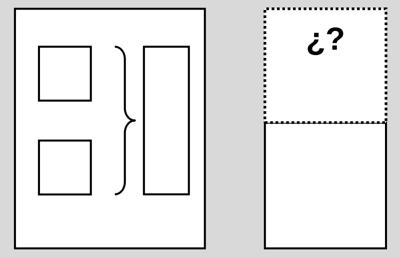
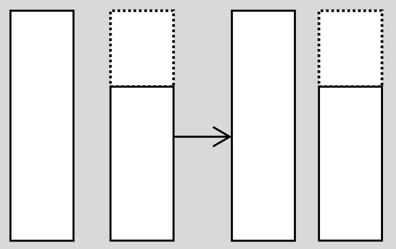
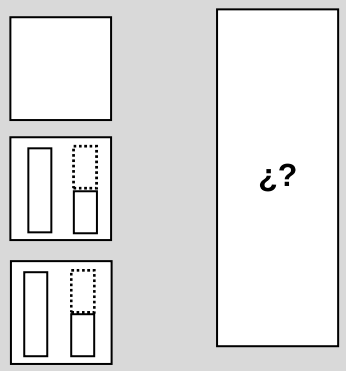
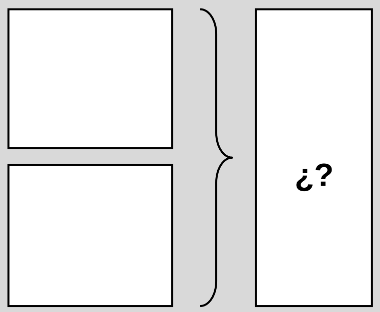
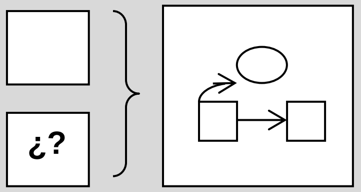
TABLA 4. Tipología de problemas de igualación.

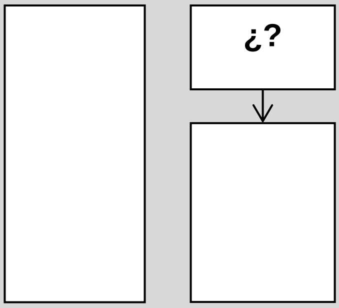
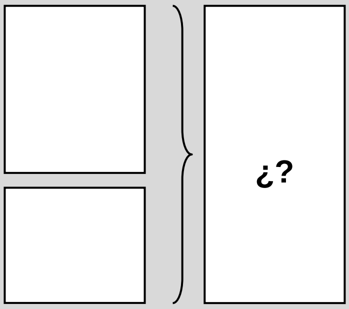
TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
IG 1 	**IGUALACIÓN 1** Se conoce el conjunto mayor y el menor y se pregunta por la diferencia en términos de cuánto hay que añadir al comparado para igualar los dos conjuntos. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tiene que dar Pedro para tener las mismas que Juan?
IG 2 	**IGUALACIÓN 2** También se conoce el conjunto mayor y el comparado, y se pregunta por la diferencia en términos de cuánto hay que quitar al mayor para que los dos conjuntos sean iguales. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Pedro tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas le tiene que quitar a Juan para tener las mismas que Pedro?
IG 3 	**IGUALACIÓN 3** Se conoce el conjunto menor y la diferencia que habría que añadirle para igualarlo con el mayor, que es el desconocido. **ENUNCIADO TIPO** Pedro tiene 5 canicas. Si le dieran 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

IG 4 	**IGUALACIÓN 4** Se conoce el conjunto mayor y la diferencia que habría que quitarle a éste para igualarlo con el menor, que en este caso es la cantidad desconocida. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Si le quitaran 3 canicas tendrías las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG 5 	**IGUALACIÓN 5** Se conoce el conjunto mayor y la diferencia que habría que añadirle al menor, que es el desconocido, para que ambos fueran iguales. **ENUNCIADO TIPO** Juan tiene 8 canicas. Si Pedro tuviera 3 canicas más tendría las mismas que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
IG 6 	**IGUALACIÓN 6** Se conoce el conjunto menor y la diferencia existente respecto al conjunto mayor, que habría que quitar al mayor para que ambas cantidades fueran iguales. **ENUNCIADO TIPO** Pedro tiene 5 canicas. Si a Juan le quitaran 3 canicas tendría las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Juan?

TAREA 1 (ANEXO B)
TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS COMPUESTOS
O DE MÁS DE UNA OPERACIÓN (Orrantia, 2005)

TIPO DE PROBLEMAS	EXPLICACIÓN Y ENUNCIADO TIPO
	**CATEGORÍA A** Problemas que combinan la estructura de cambio con la estructura de combinación, siendo la de cambio la estructura principal. La estructura de combinación puede aparecer en cualquiera de los conjuntos de la estructura de cambio. Y lógicamente el dato desconocido puede aparecer también en cualquiera de los conjuntos de la estructura principal. **ENUNCIADO TIPO** Sergio tenía 150 euros. El día de su cumpleaños su padre le regaló 35 euros y su madre 46 euros. ¿Cuánto dinero tiene Sergio ahora?
	**CATEGORÍA B** En esta categoría la estructura de cambio se repite sucesivamente. **ENUNCIADO TIPO** En un autobús viajaban 56 personas. En la primera parada bajaron 16 personas y en la segunda parada se subieron 12 personas. ¿Cuántas personas viajan ahora en el autobús?

	**CATEGORÍA C** La estructura principal es de comparación 1 ó 2 y el conjunto mayor o menor o ambos se obtienen a partir de combinación. **ENUNCIADO TIPO** Luis tiene un álbum con 750 cromos y otro álbum con 380 cromos. Susana tiene un álbum con 560 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Luis más que Laura?
	**CATEGORÍA D** En esta categoría la estructura de comparación se repite sucesivamente (dos, tres o más veces) **ENUNCIADO TIPO** Alfredo tiene 26 canicas. Ramón tiene 7 canicas menos que Alfredo y Rosa tiene 9 canicas más que Ramón. ¿Cuántas canicas tiene Rosa?
	**CATEGORÍA E** Esta categoría es similar a la anterior, pero combinada con la estructura de combinación 1, por la tanto ésta actúa de estructura principal. En este caso, una o más de las “partes” vienen dadas por una comparación. **ENUNCIADO TIPO** En una bolsa hay 154 caramelos de fresa, 27 caramelos más de naranja que de fresa y 19 caramelos de limón más que de naranja. ¿Cuántos caramelos hay en total?
	**CATEGORÍA F** La estructura principal es de combinación 1 y una o más partes se obtienen a partir de la estructura de cambio. **ENUNCIADO TIPO** Roberto compró una camisa y un jersey. La camisa costaba 46 euros y el jersey costaba 37 euros. En cada prenda le hicieron una rebaja de 9 euros. ¿Cuánto se gastó Roberto en la compra de las dos prendas?
	**CATEGORÍA G** La categoría principal es de combinación 2, y el conjunto “todo” se obtiene a partir de un cambio 3 ó 4. **ENUNCIADO TIPO** Un juego de montaje tiene 130 piezas. Para hacer un barco Pedro ha utilizado 45 piezas grandes y el resto pequeñas, y le han sobrado 18 piezas. ¿Cuántas piezas pequeñas ha utilizado Pedro para hacer el barco?

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>CATEGORÍA H
La estructura principal es igualación 1, y el conjunto menor se obtiene a partir de una combinación 1.
ENUNCIADO TIPO
Carlos y Alba están haciendo un puzle de 5800 piezas. Carlos ha colocado ya 1214 piezas y Alba 897 piezas. ¿Cuántas piezas les faltan para terminar el puzle?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>CATEGORÍA I
La estructura principal es de combinación 1, obteniéndose una de las partes a partir de una combinación 2. Éste es un caso especial de problemas ya que necesita ir acompañado de una estructura multiplicativa, puesto que de otra forma el cálculo de la parte de combinación 2 sería irrelevante.
ENUNCIADO TIPO
Una botella de litro de zumo de tomate pesa llena 1350 gr. Y vacía 385 gr. El bidón de 5 litros de zumo de tomate vacío pesa 675 gr ¿Cuánto pesa el bidón lleno?</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">CATEGORÍA J
Se combinan las categorías A (como principal) y F.
ENUNCIADO TIPO
Roberto compró una camisa y un jersey. La camisa costaba 46 euros y el jersey costaba 37 euros. En cada prenda le hicieron una rebaja de 9 euros. Si llevaba en el bolsillo 95 euros, ¿cuánto le sobró?</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">CATEGORÍA K
Se combinan las categorías A (como principal) y E.
ENUNCIADO TIPO
Juan tenía una bolsa con 154 caramelos de fresa, 27 caramelos más de naranja que de fresa y 19 caramelos más de limón que de naranja. Si entre Juan y sus amigos se comieron 95 caramelos, ¿cuántos caramelos quedan ahora en la bolsa?</td>
</tr>
</table>

ANEXO IV

Procedimiento de fiabilidad interjueces diseño de las tareas (tarea 2)

¿QUÉ TAREAS TE PEDIMOS COMO EXPERTO/A?

TAREA 2.

Clasificar 5 problemas matemáticos extraídos de diferentes pruebas de evaluación de las guías de libros de texto. Esta clasificación debe hacerse en función del **grado de desafío** que presenta el problema, es decir, problemas que presentan algún desafío que vaya más allá de la selección de los números para ejecutar las operaciones.
Se presentan estas categorías:

A. INFORMACIÓN
A.1. Situaciones problemáticas en las que se aporte información irrelevante (Introducción de información superflua: datos de más).
A.2. Situaciones problemáticas en las que se omitan datos necesarios para la solución (Omisión de información necesaria: datos de menos).

B. INVENCIÓN
B.1.Situaciones problemáticas que requieran una formulación o reformulación del problema a partir de elementos dados, o a partir de otros problemas estructuralmente similares (Inventar o formular totalmente el problema: generar un problema).
B.2. Situaciones problemáticas que requieran completar problemas, bien con los datos, o bien con la pregunta (Inventar o formular parcialmente: completar un problema).

Ejemplos:

A.1. Si ayer jueves pescaron 13 atunes y 21 meros, ¿cuántos atunes han pescado en los dos días? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 1er curso).

A.2. En una sala de cine hay 175 butacas. Si en la última sesión no se han ocupado todas, ¿cuántas butacas hay vacías?". (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).

B.1. Escribe un problema similar a los de esta página que se pueda resolver representando gráficamente los datos. (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).

B.2. Completa con la pregunta el enunciado de este problema.
En un hotel esperan alojar a 560 turistas hoy. Ya hay 325 instalados desde ayer y esta mañana han llegado 136. El resto llegará por la tarde. (Editorial S.M. Libro del alumno, 3er curso).

TENIENDO EN CUENTA ESTA INFORMACIÓN, TE PEDIMOS QUE COMPLETES LA SIGUIENTE TABLA

Escribe en la casilla correspondiente el tipo de desafío que presentan estas 5 situaciones problemáticas:

1. Inventar totalmente; 2. Inventar parcialmente; 3. Información (datos de más); 4. Información (datos de menos).

Ejemplos:

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	TIPO DE DESAFÍO
Observa la ilustración e inventa un problema cuya solución sea: Juan ha crecido 25 cm. (Editorial S.M. Libro del alumno, 4º curso).	INVENTAR TOTALMENTE
Hoy, algunos esquiadores se han quedado en el albergue por la ventisca, pero trescientos veinticinco han subido a las pistas. ¿Cuántos esquiadores había en la estación de esquí? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).	INFORMACIÓN DATOS DE MENOS

TAREA 2 (VERSIÓN 1)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	TIPO DE DESAFÍO
1. Escribe un problema cuya solución sea: Marta no podrá comprar el bañador y la toalla. (Editorial Santillana. Libro del alumno, 4º curso).	
2. La semana pasada, Raúl hizo varias excursiones en bicicleta. El lunes recorrió 12,9 kilómetros; el martes 3,35 kilómetros menos que el lunes, el miércoles 10,48 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros recorrió entre lunes y martes? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 4º curso).	
3. Escribe la pregunta y resuelve: Carla quiere comprar esta tableta. (Imagen con una tableta y su precio: 100 euros). Sólo tiene 63 euros. (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3er curso).	
4. María tenía en un acuario 28 peces de colores. Hoy su abuelo le ha regalado algunos peces más. ¿Cuántos peces tiene ahora María? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).	
5. Lee el enunciado de este problema y complétalo con una pregunta para que se resuelva restando. Después, calcula la solución. En una frutería ayer vendieron 66 kg de naranjas y hoy, 48 kg. (Editorial S.M. Libro del alumno, 3er curso).	

TAREA 2 (VERSIÓN 2)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**TIPO DE DESAFÍO**
1. Escribe la pregunta y resuelve: Carla quiere comprar esta tableta. Sólo tiene 63 euros. (Imagen con una tableta y su precio: 100 euros). (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3er curso).	
2. En una parcela hay plantados 75 manzanos, 30 chopos, 45 perales y 14 robles. La mitad de los árboles frutales tienen una plaga. ¿Cuántos árboles frutales se han librado de la plaga? (Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	
3. Silvia tiene 15 años y su padre tiene bastantes años más que ella. ¿Cuántos años tienen entre los dos? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso)	
4. Gema invitó a su fiesta de cumpleaños a 21 amigos. Algunos amigos no pudieron ir. ¿Cuántos amigos fueron a la fiesta? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).	
5. Escribe un enunciado para esta situación y resuélvelo. (Imágenes: en la primera imagen una niña pesa 29 kg; en la segunda imagen, la niña con su perro pesa (36 kg). (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3er curso).	

TAREA 2 (VERSIÓN 3)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**TIPO DE DESAFÍO**
1. En un *camping* en la playa hay alojados 80 niños, 78 niñas, 137 hombres y 213 mujeres. De los adultos, tres quintos han ido a la playa esta mañana. ¿Cuántos adultos no han ido a la playa esta mañana? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	
2. Escribe un problema similar a los de esta página que se pueda resolver representando gráficamente los datos. (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	
3. Lee el enunciado y complétalo en tu cuaderno. Tiene que poder resolverse con la operación que se indica. En una finca hay 2307 olivos en total y han podado 1903 de ellos. Averigua. (Operación: 2307-1903). (Editorial S.M. Libro del alumno, 3er curso).	
4. Completa el enunciado de este problema y resuélvelo. Los voluntarios de la operación kilo han recogido 179 kg de alimentos hoy. A lo largo de la semana han recogido 637 kg en total. (Editorial S.M. Libro del alumno, 3er curso).	
5. Miguel compró una mochila que costaba 15 euros y una carpeta. ¿Cuánto se gastó Miguel en total? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso)	

TAREA 2 (VERSIÓN 4)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	TIPO DE DESAFÍO
1. La asociación de ciclistas quiere comprar unas zapatillas, una camiseta y un pantalón para cada uno de sus socios. ¿Cuánto les costará en total?	
2. Lee los problemas y resuelve. Daniel tiene 37 cromos de la liga, 28 cromos del mundial y 25 cromos de animales. ¿Cuántos cromos de fútbol tiene en total? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso)	
3. Silvia tiene 15 años y su padre tiene bastantes años más que ella. ¿Cuántos años tienen entre los dos? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	
4. En el siguiente problema falta la pregunta. En el colegio han organizado un torneo de bolos. Se han apuntado 25 niños y 36 niñas. (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso)	
5. Escribe un problema que sea más sencillo de resolver con una tabla. Puedes hacerlo similar a los problemas de esta página. (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	

ANEXO IV

Procedimiento de fiabilidad interjueces diseño de las tareas (tarea 3)

¿QUÉ TAREAS TE PEDIMOS COMO EXPERTO/A?

TAREA 3.

Clasificar 5 problemas extraídos de diferentes libros de texto y guías didácticas, en función del **contexto situacional** en que aparece el problema.

¿QUÉ ES EL CONTEXTO SITUACIONAL?

Un problema estándar es aquel que está desprovisto de cualquier tipo de información situacional. Se trata de problemas muy escuetos desde el punto de vista de la información que proporcionan: únicamente premisas con datos y preguntas.

Un ejemplo de este tipo de problemas sería el siguiente:

"Un autobús tiene 59 asientos. Hay 7 vacíos, ¿Cuántos asientos hay ocupados? (Santillana, 2º curso).

Sin embargo, puede darse el caso de que los problemas aparezcan enriquecidos desde el punto de vista textual con información situacional de diferentes tipos:

A. Descripción: información descriptiva referida a los personajes, por ejemplo: *Teo y Pepa son granjeros* (…) (Santillana, 2º curso).
B. Intención: información intencional referida a necesidades, finalidades, metas, propósitos o motivos de los personajes, ejemplo: *Iván quiere comprar unas gafas de bucear* (…) (Santillana, 2º curso).
C. Acción: información referida a las acciones e interacciones con coactores, objetos e instrumentos, ejemplo: *Alejandra está completando un puzle del sistema solar* (…) (Anaya 1º curso).
D. Causa: información referida a las relaciones causales entre personajes y acontecimientos, ejemplo: Un agricultor ha recogido 450 kilos de uvas. Ha retirado 63 kilos por estar estropedas (…) (Santillana, 4º curso).
E. Tiempo: Información que alude a la estructura temporal en los problemas de cambio, ejemplo: *En un autobús había 42 personas (...). Al llegar a la parada bajaron (...)* (Santillana, 2º curso).
F. Acción + Finalidad: *Esta semana recogimos dinero para ayudar a los niños de un país donde ha ocurrido una inundación (...)* (Anaya, 1º curso).
G. Intención + Acción: *Para celebrar su cumpleaños, Gemma está pasando el día con sus amigos (...)* (Santillana, 2º curso).
H. Causa + Acción: *Por su cumpleaños, Daniel ha inviato a sus amigos a merendar (...)* (Santillana, 2º curso).
I. Acción + Descripción: *En las fiestas del pueblo han hecho un concurso de cocina al aire libre. Es un concurso muy especial, ¡Todo es enorme! (...)* (S.M, 1º curso).

TENIENDO EN CUENTA ESTA INFORMACIÓN, TE PEDIMOS QUE COMPLETES LA SIGUIENTE TABLA:

Escribe en la casilla correspondiente el tipo de información situacional presente en cada una de estas situaciones problemáticas:

Ejemplos:

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**INFORMACIÓN SITUACIONAL**
Javier y su padre han ido de rebajas. Han comprado 2 jerséis a 9 euros cada uno, unos pantalones a 24 euros y 2 cazadoras a 53 euros. ¿Cuánto han gastado en total? (Editorial Edebé. Guía didáctica, 5º curso).	ACCIÓN
En un restaurante hacen varios pedidos de alimentos para el menú de una semana. Encargan 1.575,80 € de pescado, 1.085,50 € de carne y 859 € de verduras. ¿Cuánto dinero se han gastado por día? (Editorial Anaya. Guía didáctica, 4º curso).	ACCIÓN+FINALIDAD

A. *Descripción;* ***B****. Intención;* ***C****. Acción;* ***D****. Causa;* ***E.*** *Tiempo;* ***F.*** *Acción + Finalidad;* ***G.*** *Intención + Acción;* ***H.*** *Causa + Acción;* ***I.*** *Acción + Descripción*

TAREA 3 (VERSIÓN 1)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**INFORMACIÓN SITUACIONAL**
1. Un cocinero quiere saber los litros de aceite que tiene almacenados, en diferentes envases, en la despensa de su cocina. Hay 3 botellas de 2 litros, de las que ha encontrado 1 vacía. Además, hay 4 barriles de 5 litros, pero 3 de ellos están vacíos. ¿Cuántos litros de aceite tiene? Utiliza una operación combinada para responder. (Editorial Edebé. Guía didáctica, 5º curso).	
2. Sandra y Jorge han colgado 45 globos para la fiesta de cumpleaños de su hermano pequeño. Si Sandra ha colgado 25 globos, ¿cuántos globos ha colgado Jorge? (Editorial Edelvives. Guía didáctica, 3er curso).	
3. Carlos tenía 84 rosales. Una plaga hizo que cortase 26 y, después, plantó 35. ¿Cuántos rosales tiene ahora? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	
4. Para hacer un cuadro, Andrea compra una lámina que mide 2 decímetros y 5 centímetros de largo y 19 centímetros de ancho. ¿Cuántos centímetros de largo más que de ancho mide? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	
5. Un grupo de amigos ha ido a comer a una pizzería. Han pedido tres octavos de pizza de ahumados, cuatro octavos de pizza de jamón y queso y cinco octavos de pizza de carne. ¿Qué cantidad de pizza han pedido en total? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 5º curso).	

TAREA 3 (VERSIÓN 2)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	**INFORMACIÓN SITUACIONAL**
1. El dentista visitó a los alumnos y alumnas del colegio de Manuel y les enseñó cómo limpiarse los dientes y la lengua con un cepillo de dientes. Después regaló un cepillo a cada escolar. Si llevó una caja con 320 cepillos y otra caja con el doble, ¿cuántos cepillos de dientes llevó el dentista al colegio de Manuel? (Editorial Edelvives, Guía didáctica. Evaluación final, 3er curso)	
2. Jaime y Estefanía quieren completar una colección de cromos de coches. Jaime tiene 45 cromos y Estefanía 32. Si para completar la colección ambos deben reunir un total de 60 cromos, ¿cuántos cromos le faltan a cada uno de ellos para hacerlo? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).	
3. Sofía ha ido al mercadillo de su barrio. Ha comprado 2 kg de manzanas y ha pagado 3,60 euros; 3 kg de peras por 2,80 euros y 1 kg de mangos por 4,25 euros: a) ¿Cuántos kilos de fruta ha comprado? (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso).	
4. Eva y Álex son jardineros. Eva plantó 15 arbolitos y Álex plantó 2 arbolitos más que Eva. ¿Cuántos arbolitos plantó Álex? Calcula y escribe la solución. Alex plantó (…). (Editorial Santillana. Libro del alumno, 2º curso).	
5. Raúl ha hecho una lista con sus amigos para ver cuántos nombres de huesos se saben. Entre todos han escrito 16 nombres. ¿Cuántos les faltan por aprender? (Dato: nuestro cuerpo está compuesto de 206 huesos). (Editorial S.M. Libro del alumno, 2º curso).	

TAREA 3 (VERSIÓN 3)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	INFORMACIÓN SITUACIONAL
1. Antonio y Alejandra van con sus tres hijos de excursión al zoo. Si la entrada de un adulto al zoo cuesta 19 euros y las infantiles 15 euros ¿tendrán suficiente dinero con un billete de 100 euros? ¿Cuánto les faltará o sobrará? (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación final, 3er curso).	
2. Ángel y Óscar se juntaron en el parque para jugar a las canicas. Ángel tiene 10 canicas verdes, 2 azules y 5 blancas, Óscar tiene el doble de canicas que Ángel. ¿Cuántas canicas tiene Óscar? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 4º curso).	
3. Alberto y Luis son pastores. El rebaño de Alberto tiene 218 ovejas y el de Luis, 175. ¿Cuántas ovejas tienen aproximadamente en total? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	
4. Isabel quiere comprar una bicicleta y unos patines. Tiene 200 euros. ¿Cuánto dinero le falta? (Imagen: patines = 59 euros; bicicleta = 165 euros). (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	
5. Aitor colecciona cromos de la liga de baloncesto. La colección consta de 155 cromos y ya tiene 97. ¿Cuántos cromos le faltan para completar su colección? (Editorial S.M. Libro del alumno, 3er curso).	

TAREA 3 (VERSIÓN 4)

ENUNCIADO DEL PROBLEMA	INFORMACIÓN SITUACIONAL
1. Santi, Luna y Eva están ahorrando dinero para irse juntos de vacaciones; Santi puede ahorrar 125,50 euros semanales, Luna 145,75 euros por semana y Eva 15,25 euros diarios. Si para las vacaciones faltan 43 semanas y se propusieron ahorrar 5 000 euros cada uno, ¿podrán los tres cumplir con su objetivo? ¿Con cuánto dinero llegarán a las vacaciones? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso).	
2. El padre de Eva abrió un bar y sus amigos fueron a conocerlo. María pidió 1 refresco y 2 sándwiches, lo que le costó 10 €; Ariel fue con su hermano y pidieron 2 refrescos y 4 sándwiches, y pagaron 20 €; Alejandra fue con tres amigas, pidieron 4 refrescos y 8 sándwiches y pagaron 40 €. Joaquín fue con toda su familia, que son ocho, y pidieron cada uno el mismo menú que María. ¿Cuántos refrescos y cuantos sándwiches traerá el camarero? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 5º curso).	
3. Fernando y su padre salen en bicicleta por los caminos que rodean su ciudad. En los 135 días que ha ido en bicicleta durante este año, Fernando ha recorrido 4.450 kilómetros. Los sábados, Fernando va y vuelve al pueblo que está a 10 kilómetros de distancia. Si cada día recorre la misma distancia, ¿cuántos kilómetros hace cada día? (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación final, 5º curso).	
4. Para cubrir el suelo de una habitación, Gerardo compra 5 cajas con 80 baldosas cada una, y otra caja con 35 baldosas. ¿Cuántas baldosas compra en total? (Editorial Santillana. Libro del alumno, 3er curso).	
5. Cristina y Gustavo se han levantado temprano y han ido al huerto a ayudar a su abuelo. Han recogido tomates, calabacines, cebollas, pimientos y unas riquísimas fresas. El abuelo ha recogido dos calabacines, uno de 750 gramos y otro de 625 gramos. ¿Cuánto pesan los dos calabacines juntos? (Editorial Anaya. Libro del alumno, 3er curso).	

ANEXO IV

Procedimiento de fiabilidad interjueces diseño de las tareas (tarea 4)

¿QUÉ TAREAS TE PEDIMOS COMO EXPERTO/A?

TAREA 4.

Clasificar 10 tareas matemáticas extraídas de libros de texto y guías didácticas de diferentes editoriales. Esta clasificación debe hacerse en función de los 5 bloques de contenido al que pertenezca cada tarea.

BLOQUES DE CONTENIDOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS.

B.1. Procesos, métodos y actitudes matemáticas.
Este bloque recoge todos aquellos procesos que deben ponerse en marcha para resolver de forma efectiva una situación problemática: (1) Extracción de los datos; (2) Razonamiento; (3) Estrategias de resolución; (4) Aplicación de operaciones; (5) Expresión del resultado; (6) Comprobación del resultado; (7) Invención. Véase Anexo I.
Ejemplo1:
Carla ha comprado 11 chicles de menta, 13 chicles de fresa y 9 chicles de melón. <u>Estima cuántos chicles ha comprado Carla en total</u>. Calcula cuántos chicles ha comprado Carla en total y <u>comprueba el resultado</u> de tu estimación. ¿Cuándo crees que puede servirte de ayuda estimar el resultado de una operación? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial 3er curso).
Paso 3 (estimar resultado); Paso 4 (calcular resultado); Paso 6 (comprobar resultado)

Ejemplo 2:
Resuelve este problema y <u>explica los pasos que has seguido para hacerlo.</u> El dentista visitó a los alumnos y alumnas del colegio de Manuel y les enseñó cómo limpiarse los dientes y la lengua con un cepillo de dientes. Después regaló un cepillo a cada escolar. Si llevó una caja con 320 cepillos y otra caja con el doble, ¿cuántos cepillos de dientes llevó el dentista al colegio de Manuel? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 3er curso).
Todos los pasos.

B.2. Números
Este bloque tiene como objeto el desarrollo del sentido numérico, entendido como la capacidad para: descomponer números, utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones, realizar cálculos, etc. Ejemplos:

Descompón los siguientes números (6.789 y 2.374) fijándote en el ejemplo:
1.984 = 1.000 + 900 + 80 + 4 = 1UM + 9C + 8D + 4U (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación inicial 4º curso).

Expresa de dos formas distintas esta suma cambiando el orden de los números y calcula el resultado:
234 + 123 + 89 = ¿Qué propiedad has utilizado? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 3er curso).

B.3. Medida.
En este bloque se pretende fundamentalmente el conocimiento de las diferentes magnitudes y su utilización: medidas de longitud, capacidad, peso, tiempo y moneda. Ejemplos:

Completa con la unidad adecuada:
He desayunado un cuarto de….de leche; mi lazo mide 50…..de largo; la clase de educación física dura 45…..; he pedido al charcutero 3 cuartos de…..de jamón de york; he comprado una goma de borrar por 75…..de euro.(Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final 2º curso).

¿Cuántos gramos son? 3 kg y medio; 1/4 de 100 dag; 60 dg 400 cg. (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación final 4º curso).

B.4.Geometría.
Los contenidos de este bloque hacen referencia a las formas y estructuras geométricas: su reconocimiento, sus características y sus magnitudes; las relaciones que se establecen entre ellas y su construcción. Ejemplos:

Escribe cuántos lados, vértices y ángulos tiene cada polígono y dibuja un ejemplo: hexágono, cuadrilátero, pentágono. (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final 3er curso).

Dibuja la bisectriz del ángulo $\hat{a}$ utilizando la regla y el compás. Explica qué es la bisectriz de un ángulo. (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación final 5º curso).

B.5.Estadística y probabilidad.
En este bloque se abordan aquellos contenidos que permitirán a los alumnos/as el tratamiento de la información: obtener información, ordenarla y utilizarla a fin de realizar cálculos estadísticos y elaborar con ellos tablas y gráficos que permitan emitir juicios. Asimismo, se pretende que los alumnos/as observen y constaten situaciones seguras, posibles, imposibles, o más o menos posibles.
Ejemplos:

Las notas de un examen de Matemáticas de 15 alumnos de una clase son las siguientes (…)
Elabora una tabla de frecuencias absolutas, luego calcula la moda y la media aritmética. Explica el significado de la moda y la media aritmética. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 5º curso).

Laura va a tirar un dado. Completa las oraciones con las palabras: *seguro, posible* e *imposible* según corresponda. • Es __ que salga un 6. • Es __ que salga un 7. • Es __ que salga un número del 1 al 6.
• Es __ que no salga un número del 1 al 6. • Es __ que salga un 4. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial 5º curso).

TENIENDO EN CUENTA ESTA INFORMACIÓN, TE PEDIMOS QUE COMPLETES LA TABLA SIGUIENTE TABLA:

Coloca una cruz en la casilla del bloque de contenidos al que pertenezca cada una de estas tareas.

Ejemplos:

ENUNCIADO	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5
Escribe dos objetos que haya en tu casa o en el colegio que tengan forma de cubo y otros dos en forma de esfera. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 1er curso).				X	
El equipo de baloncesto de Manuel ha hecho 37 canastas y el de Pablo ha conseguido 43 canastas. ¿Cuántas canastas ha conseguido más el equipo de Pablo que el de Manuel? Lee atentamente el enunciado, identifica la pregunta y calcula la solución" (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso).	X Paso 1 Paso 4				

TAREA 4 (VERSIÓN 1)

ENUNCIADO	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5
1. Expresa las siguientes estaturas en las unidades que se indican. 1 m 65 cm = (…) cm; 1 m 32 cm = (…) mm; 1 m 10 cm = (…) cm; 1 m 7 cm = (…) mm. (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).					
2. Clasifica los números en los múltiplos correspondientes (2, 3 y 5) y subraya los números primos: 7 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 18 – 20 – 21 – 24 – 25. (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación inicial, 6º curso).					
3. Calcula el área y el perímetro de estos polígonos regulares. (Se dan las medidas de un pentágono de 10 cm. de lado y 8 cm. de potema; igualmente, las de un triángulo de base 5 cm. y altura 4 cm) (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 6º curso).					
4. Marca la solución que más se aproxime al resultado y compruébala. Manuel tiene en su jardín 43 rosales y su vecina tiene 15. ¿Cuántos rosales tienen entre los dos? Tienen menos de 5 decenas de rosales; Tienen casi 6 decenas de rosales; Tienen más de 6 decenas de rosales. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso).					
5. Reparte en partes iguales 15 canicas en tres cajas. (Editorial Santillana. Guía didáctica Evaluación inicial, 3er curso).					
6. El siguiente polígono de frecuencias muestra la cantidad de llamadas que realizó y que recibió Rosario durante una semana de trabajo. Vuelca los datos del gráfico en una tabla de frecuencias y elabora un gráfico de barras dobles. Luego responde las preguntas: ¿Qué cantidad de llamadas recibió Rosario durante la semana? ¿Cuántas realizó? ¿Qué día de la semana recibió más llamadas? ¿Cuántas? ¿Qué día de la semana realizó menos llamadas? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 6º curso).					
7. Indica en cada caso qué unidad utilizarías para medir: a) El peso de tres folios; b) La altura de un escalón; c) La capacidad de una bañera; d) El tiempo que dura un partido de fútbol). (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación final, 3er curso).					
8. Escribe con V si es verdadero o F si es falso. Es posible sacar una margarita de un ramo de rosas (…). Es imposible sacar una rosa de un ramo de margaritas (…). Es seguro sacar una rosa de un ramo de rosas (…). Es posible sacar una rosa de un ramo de margaritas (…). (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 1er curso)					
9. Dibuja un triángulo isósceles obtusángulo y un triángulo escaleno rectángulo. (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 5º curso)					
10. Resuelve el problema. A la consulta de un pediatra han ido 47 niños. Si solo han pasado 35, ¿cuántos niños quedan por pasar? Explica con tus palabras los pasos que has seguido para resolver el problema anterior. Después, escribe esos pasos. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso).					

TAREA 4 (VERSIÓN 2)

ENUNCIADO	**B.1**	**B.2**	**B.3**	**B.4**	**B.5**
1 Ricardo ha sacado varias cartas al azar y quiere sumar los números impares. ¿Cuánto suman los números impares de las cartas que ha sacado? Expresa oralmente qué pasos tienes que seguir para resolver el problema. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 2º curso).					
2. En el programa de actividades hay una prueba combinada, para hacer por equipos, que consiste en correr 3km 2dam, trasvasar de un bidón a otro 2dal 4l 6 dl y recoger de un cerezo 7hg 8dg de cerezas. ¿Cuántos metros tiene el recorrido? ¿Cuántos litros tendrán que trasvasar? ¿Y cuántos kilos de cerezas recogerán? (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación inicial, 6º curso).					
3. Escribe cómo se leen estas cantidades: a) 406.199. b) 1/3 c) 0,025. (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación inicial, 5º curso).					
4. Rodea las líneas curvas abiertas. (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicia, 1er curso)					
5. Resuelve el siguiente problema y explica cómo lo has hecho. Sandra y Jorge han colgado 45 globos para la fiesta de cumpleaños de su hermano pequeño. Si Sandra ha colgado 25 globos, ¿cuántos globos ha colgado Jorge? (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3º curso).					
6. Indica si estas frases son verdaderas o falsas: a) al lanzar un dado es posible que salga un 8; b) al lanzar una moneda es seguro que saldrá cara. (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3er curso).					
7. Dibuja un reloj analógico y otro digital con cada hora indicada: a) seis y veinte de la tarde; b) once menos cuarto de la mañana. (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicial, 4º curso).					
8. De una piñata cogieron un total de 18 caramelos: 6 de naranja, 3 de fresa, 5 de limón y 4 de menta. Coloréalos según el sabor y completa el gráfico. (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso)					
9. Completa: a) Los prismas y las pirámides son poliedros porque tienen todas sus caras (…); b) Solo hay (…) poliedros regulares, que son (…) (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final, 6º curso).					
10. Escribe y calcula. Una suma de dos números de 3 cifras que al estimarla nos dé 900.Una resta de dos números de 4 cifras que al estimarla nos dé 4000. (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final, tercer curso).					

B.1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; B.2. Números; B.3. Medida; B.4. Geometría; B.5. Estadística y probabilidad.

TAREA 4 (VERSIÓN 3)

ENUNCIADO	B.1	B.2	B.3	B.4	B.5
1. Señala los números que son primos: 7, 18, 13, 40, 27, 29, 5. (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación final, 5º curso).					
2. De los siguientes ángulos, indica los que son: a. Ángulos complementarios: b. Ángulos adyacentes. (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación final, 5º curso).					
3. Completa las equivalencias. 1 litro = (…) cuartos de litro. 8 litros = (…) medios litros. 3 litros y medio = (…) medios litros. (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso).					
4. Dibuja: línea recta, línea curva abierta, línea poligonal cerrada, línea curva cerrada. (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso)					
5. En el colegio se ha celebrado una jornada deportiva. Los alumnos fueron divididos en equipos, cada uno de ellos de un color. Al finalizar la jornada, los resultados de las pruebas fueron los siguientes: El equipo rojo ganó 6 pruebas, el verde 9, el azul 4, el amarillo 5, el naranja 4 y el blanco 2. • Elabora una tabla de frecuencias absolutas y calcula la moda, la media aritmética, la mediana y el rango. • Explica qué significa cada uno de estos datos. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final, 6º curso).					
6. A la consulta de un pediatra han ido 47 niños. Si solo han pasado 35, ¿cuántos niños quedan por pasar? Explica con tus palabras los pasos que has seguido para resolver el problema anterior. Después, escribe esos pasos. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 2º curso).					
7. Ana ha ido a la pastelería a recoger un postre que ha encargado su madre. Ha madrugado tanto que no sabe si la pastelería está abierta. Dibuja las manecillas en el reloj: 9:30 h. (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación final, 1er curso).					
8. En una caja hay 10 bolas rojas y 2 azules y sacamos una bola sin mirar. Contesta. ¿Qué es más probable sacar una bola roja o una bola azul?; ¿podemos saber el color que tendrá la bola antes de sacarla?; ¿por qué? (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 4º curso).					
9. Jaime y Estefanía quieren completar una colección de cromos de coches. Jaime tiene 45 cromos y Estefanía 32. Si para completar la colección ambos deben reunir un total de 60 cromos, ¿cuántos cromos le faltan a cada uno de ellos para hacerlo? • Explica con tus palabras cómo has resuelto el problema. • ¿Crees que lo has resuelto correctamente? ¿Por qué? • Comprueba el resultado. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación inicial, 3º curso).					
10. Escribe en forma de fracción y de decimal. Luego, ordena de mayor a menor: 5 milésimas; 46 décimas, 35 centésimas. (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final, 4º curso).					

B.1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; B.2. Números; B.3. Medida; B.4. Geometría; B.5. Estadística y probabilidad.

TAREA 4 (VERSIÓN 4)

ENUNCIADO	**B.1**	**B.2**	**B.3**	**B.4**	**B.5**
1. Identifica cada poliedro regular. Indica cuántas caras tiene: tetraedro, dodecaedro, icosaedro. (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final 6º curso).					
2. Dibuja un gráfico circular donde se represente la siguiente información: 1/4 de los niños tienen el pelo rubio; 1/4 de los niños tienen el pelo negro; 1/4 de los niños tiene el pelo castaño. (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial 6º curso).					
3. Indica cuáles de las siguientes cantidades equivalen a 2h 6 min: a) 136 minutos; b) 7.560 segundos; c) 120 minutos 360 segundos; d) 126 minutos. (Editorial S.M. Guía didáctica. Evaluación final 5º curso).					
4. Ordena de mayor a menor estos números: 845, 789, 854, 879, 800. (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación inicial 4º curso).					
5. Subraya la pregunta del siguiente problema y resuélvelo después. Marcos está haciendo una colección que tiene 25 cromos. Si tiene 12 cromos. ¿Cuántos cromos le faltan para completar la colección? Le faltan…cromos. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 1er curso).					
6. Escribe en forma de potencia: 7 x 7 x 7 x 7 x 7 = (Editorial Vicens Vives. Guía didáctica. Evaluación inicial 5º curso).					
7. En el equipo de voleibol hay 5 niñas morenas, 3 niñas rubias y 1 pelirroja. ¿Cuántas niñas hay en el equipo de voleibol? Haz un dibujo, ordena los pasos que has de seguir para resolver el problema y resuélvelo. Luego explica oralmente cómo lo has hecho. (Editorial Edelvives. Guía didáctica. Evaluación final 1er curso).					
8. Lee y completa. Ayer fue lunes, mañana será (…). Hoy es sábado, pasado mañana será (…). Entre marzo y mayo está el mes de (…). El mes anterior al mes de febrero es (…). (Editorial Anaya. Guía didáctica. Evaluación final 1er curso).					
9. Tiras dos monedas al aire. Escribe posible, imposible o seguro: a) salen dos caras; b) salen tres cruces; c) no sale ninguna cara; d) solo salen caras y cruces. ¿Hay algún suceso más probable que los otros? ¿Cuál? (Editorial Edebé. Guía didáctica. Evaluación inicial 4º curso).					
10. Clasifica cada figura según su descripción. Polígono de ocho lados, cuadrilátero sin lados paralelos, triángulo con dos lados iguales y dos ángulos agudos, cuadrilátero con cuatro lados iguales y dos ángulos obtusos, cuadrilátero con dos lados paralelos. (Editorial Santillana. Guía didáctica. Evaluación final 5º curso).					

B.1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; B.2. Números; B.3. Medida; B.4. Geometría; B.5. Estadística y probabilidad

ANEXO V

Estándares de aprendizaje evaluables de los cinco bloques de contenido

(Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria)

BLOQUE 1. PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS.

1.1. Comunica verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas o en contextos de la realidad.
2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
2.2. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.
2.3. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, busca otras formas de resolución, etc.
2.4. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia.
2.5. Identifica e interpreta datos y mensajes de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana (facturas, folletos publicitarios, rebajas…).
3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales.
3.2. Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen.
4.1. Profundiza en problemas una vez resueltos, analizando la coherencia de la solución y buscando otras formas de resolverlos.
4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc.
5.1. Elabora informes sobre el proceso de investigación realizado, exponiendo las fases del mismo, valorando los resultados y las conclusiones obtenidas.
6.1. Practica el método científico, siendo ordenado, organizado y sistemático.
6.2. Planifica el proceso de trabajo con preguntas adecuadas: ¿qué quiero averiguar?, ¿qué tengo?, ¿qué busco?, ¿cómo lo puedo hacer?, ¿no me he equivocado al hacerlo?, ¿la solución es adecuada?
7.1. Realiza estimaciones sobre los resultados esperados y contrasta su validez, valorando los pros y los contras de su uso.
8.1. Elabora conjeturas y busca argumentos que las validen o las refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales.
9.1. Desarrolla y muestra actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
9.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

9.3. Distingue entre problemas y ejercicios y aplica las estrategias adecuadas para cada caso.
9.4. Se inicia en el planteamiento de preguntas y en la búsqueda de respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
9.5. Desarrolla y aplica estrategias de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos) para crear e investigar conjeturas y construir y defender argumentos.
10.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
10.2. Reflexiona sobre los problemas resueltos, y los procesos desarrollados, valorando las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares, etc.
10.3. Utiliza herramientas tecnológicas para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas, conjeturas y construir y defender argumentos.
11.1. Se inicia en la reflexión sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares, etc.
12.1. Se inicia en la utilización de herramientas tecnológicas para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas.
12.2. Se inicia en la utilización de la calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas
13.1. Realiza un proyecto, elabora y presenta un informe creando documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido), buscando, analizando y seleccionando la información relevante, utilizando la herramienta tecnológica adecuada y compartiéndolo con sus compañeros.

BLOQUE 2. NÚMEROS

1.1. Identifica los números romanos aplicando el conocimiento a la comprensión de dataciones.
1.2. Lee, escribe y ordena en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.
2.1. Utiliza los números ordinales en contextos reales.
2.2. Interpreta en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.
2.3. Descompone, compone y redondea números naturales y decimales, interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.
2.4. Ordena números enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.
2.5. Utiliza los números negativos en contextos reales.
3.1. Reduce dos o más fracciones a común denominador y calcula fracciones equivalentes.
3.2. Redondea números decimales a la décima, centésima o milésima más cercana.

3.3. Ordena fracciones aplicando la relación entre fracción y número decimal.
4.1. Conoce y aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 10.
5.1. Opera con los números conociendo la jerarquía de las operaciones.
5.2. Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas.
5.3. Estima y comprueba resultados mediante diferentes estrategias.
6.1. Realiza operaciones con números naturales: suma, resta, multiplicación y división.
6.2. Identifica y usa los términos propios de la multiplicación y de la división.
6.3. Resuelve problemas utilizando la multiplicación para realizar recuentos, en disposiciones rectangulares en los que interviene la ley del producto.
6.4. Calcula cuadrados, cubos y potencias de base 10.
6.5. Aplica las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas.
6.6. Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número.
6.7. Realiza operaciones con números decimales.
6.8. Aplica la jerarquía de las operaciones y los usos del paréntesis.
6.9. Calcula porcentajes de una cantidad.
7.1. Utiliza los porcentajes para expresar partes.
7.2. Establece la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.
7.3. Calcula aumentos y disminuciones porcentuales.
7.4. Usa la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas de la vida diaria.
7.5. Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
8.1. Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones cotidianas.
8.2. Descompone de forma aditiva y de forma aditivo-multiplicativa, números menores que un millón, atendiendo al valor posicional de sus cifras.
8.3. Construye series numéricas, ascendentes y descendentes, de cadencias 2, 10, 100 a partir de cualquier número y de cadencias 5, 25 y 50 a partir de múltiplos de 5, 25 y 50.
8.4. Descompone números naturales atendiendo al valor posicional de sus cifras.
8.5. Construye y memoriza las tablas de multiplicar, utilizándolas para realizar cálculo mental.
8.6. Identifica múltiplos y divisores, utilizando las tablas de multiplicar.
8.7. Calcula los primeros múltiplos de un número dado.
8.8. Calcula todos los divisores de cualquier número menor que 100.
8.9. Calcula el m.c.m. y el m.c.d.
8.10. Descompone números decimales atendiendo al valor posicional de sus cifras.

8.11. Calcula tantos por ciento en situaciones reales.
8.12. Elabora y usa estrategias de cálculo mental.
8.13. Estima y redondea el resultado de un cálculo valorando la respuesta.
8.14. Usa la calculadora aplicando las reglas de su funcionamiento, para investigar y resolver problemas.
9.1. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.
9.2. Reflexiona sobre el proceso aplicado a la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo.

BLOQUE 3. MEDIDA

1.1. Identifica las unidades del Sistema Métrico Decimal. Longitud, capacidad, masa, superficie y volumen.
2.1. Estima longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos; eligiendo la unidad y los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida, explicando de forma oral el proceso seguido y la estrategia utilizada.
2.2. Mide con instrumentos, utilizando estrategias y unidades convencionales y no convencionales, eligiendo la unidad más adecuada para la expresión de una medida.
3.1. Suma y resta medidas de longitud, capacidad, masa, superficie y volumen en forma simple dando el resultado en la unidad determinada de antemano.
3.2. Expresa en forma simple la medición de longitud, capacidad o masa dada en forma compleja y viceversa.
3.3. Compara y ordena de medidas de una misma magnitud.
3.4. Compara superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición.
4.1. Conoce y utiliza las equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen.
4.2. Explica de forma oral y por escrito los procesos seguidos y las estrategias utilizadas en todos los procedimientos realizados.
4.3. Resuelve problemas utilizando las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas, explicando oralmente y por escrito, el proceso seguido.
5.1. Conoce y utiliza las unidades de medida del tiempo y sus relaciones. Segundo, minuto, hora, día, semana y año.
5.2 Realiza equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos.
5.3. Lee en relojes analógicos y digitales.
5.4. Resuelve problemas de la vida diaria utilizando las medidas temporales y sus relaciones.
6.1. Identifica el ángulo como medida de un giro o abertura.

6.2. Mide ángulos usando instrumentos convencionales.
6.3. Resuelve problemas realizando cálculos con medidas angulares.
7.1. Conoce la función, el valor y las equivalencias entre las diferentes monedas y billetes del sistema monetario de la Unión Europea utilizándolas tanto para resolver problemas en situaciones reales como figuradas.
7.2. Calcula múltiplos y submúltiplos del euro.
8.1. Resuelve problemas de medida, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.
8.2. Reflexiona sobre el proceso seguido en la resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, buscando otras formas de resolverlo.

BLOQUE 4. GEOMETRÍA

1.1. Identifica y representa posiciones relativas de rectas y circunferencias.
1.2. Identifica y representa ángulos en diferentes posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice…
1.3. Describe posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros…
1.4. Realiza escalas y gráficas sencillas, para hacer representaciones elementales en el espacio.
1.5. Identifica en situaciones muy sencillas la simetría de tipo axial y especular.
1.6. Traza una figura plana simétrica de otra respecto de un eje.
1.7. Realiza ampliaciones y reducciones.
2.1. Clasifica triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos, identificando las relaciones entre sus lados y entre ángulos.
2.2. Utiliza instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas para la construcción y exploración de formas geométricas.
3.1. Calcula el área y el perímetro de: rectángulo, cuadrado, triangulo.
3.2. Aplica los conceptos de perímetro y superficie de figuras para la realización de cálculos sobre planos y espacios reales y para interpretar situaciones de la vida diaria.
4.1. Clasifica cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados.
4.2. Identifica y diferencia los elementos básicos de circunferencia y circulo: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular.
4.3. Calcula, perímetro y área de la circunferencia y el círculo.
4.4. Utiliza la composición y descomposición para formar figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras.
5.1. Identifica y nombra polígonos atendiendo al número de lados.
5.2. Reconoce e identifica, poliedros, prismas, pirámides y sus elementos básicos: vértices, caras y aristas.
5.3. Reconoce e identifica cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera y sus elementos básicos.

6.1. Comprende y describe situaciones de la vida cotidiana, e interpreta y elabora representaciones espaciales (planos, croquis de itinerarios, maquetas…), utilizando las nociones geométricas básicas (situación, movimiento, paralelismo, perpendicularidad, escala, simetría, perímetro, superficie).
6.2. Interpreta y describe situaciones, mensajes y hechos de la vida diaria utilizando el vocabulario geométrico adecuado: indica una dirección, explica un recorrido, se orienta en el espacio.
7.1. Resuelve problemas geométricos que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.
7.2. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

BLOQUE 5. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

1.1. Identifica datos cualitativos y cuantitativos en situaciones familiares.
2.1. Recoge y clasifica datos cualitativos y cuantitativos, de situaciones de su entorno, utilizándolos para construir tablas de frecuencias absolutas y relativas.
2.2. Aplica de forma intuitiva a situaciones familiares, las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.
2.3. Realiza e interpreta gráficos muy sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales, con datos obtenidos de situaciones muy cercanas.
3.1. Realiza análisis crítico argumentado sobre las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.
4.1. Identifica situaciones de carácter aleatorio.
4.2. Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería…).
5.1. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.
5.2. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

ANEXO VI

Adaptación de las dimensiones cognitivas propuestas en las pruebas internacionales (TIMSS DE LA IEA, 2015, 2018)

CONOCIMIENTO

Recordar definiciones, vocabulario, propiedades de los números, unidades de medida, propiedades geométricas y notación (p. ej., a × b = ab, a + a + a = 3a).

Reconocer números, expresiones, cantidades, formas y entidades que son matemáticamente equivalentes (p. ej., fracciones equivalentes conocidas, decimales y porcentajes; figuras geométricas simples orientadas de modo diferente).

Clasificar/Ordenar números, expresiones, cantidades y formas según sus atributos comunes.

Calcular. Llevar a cabo procedimientos algorítmicos para +, –, ×, ÷, o una combinación de estas operaciones con números naturales, fracciones, decimales y enteros. Llevar a cabo procedimientos algebraicos de rutina.

Recuperar información de gráficos, tablas, textos y otras fuentes.

Medir. Usar instrumentos de medición; elegir unidades apropiadas de medida.

Ejemplo ítem liberado pruebas TIMSS. Dominio cognitivo: conocimiento.

Jaime se ha gastado 3/10 de su dinero en un bolígrafo y 5/10 en un libro. ¿Qué fracción de su dinero se ha gastado?

APLICACIÓN

Determinar operaciones, estrategias y herramientas eficientes/apropiadas para resolver problemas para los cuales existen métodos de solución usados habitualmente.

Representar/Modelar datos en tablas o gráficos; crear ecuaciones, desigualdades, figuras geométricas, o diagramas que hagan de modelo de situaciones problemáticas; y generar representaciones equivalentes para una entidad o relación matemática dada.

Implementar. Aplicar estrategias y operaciones para resolver problemas que implican conceptos y procedimientos matemáticos conocidos.

Ejemplo ítem liberado pruebas TIMSS. Dominio cognitivo: aplicación.

Alberto quería averiguar cuánto pesaba su gato. Primero se pesó él, y vio que la báscula marcaba 57 kg. Luego se subió a la báscula con el gato en brazos, y vio que marcaba 62 kg ¿Cuánto pesaba el gato en kilogramos?

RAZONAMIENTO

Analizar. Determinar, describir o utilizar las relaciones entre los números, expresiones, cantidades y formas.

Integrar/sintetizar. Vincular los diferentes elementos de los conocimientos, representaciones relacionadas y los procedimientos para resolver los problemas.

Evaluar las estrategias y soluciones alternativas de resolución de problemas.

Extraer conclusiones. Hacer inferencias válidas basándose en la información y las pruebas.

Generalizar. Hacer declaraciones que representen las relaciones en términos más generales y más ampliamente aplicables.

Justificar. Proporcionar argumentos matemáticos para apoyar una estrategia o solución.

Ejemplo ítem liberado pruebas TIMMS. Dominio cognitivo: razonamiento.

Un hombre llevó a sus 3 hijos a una feria. Las entradas para los adultos costaban el doble que las de niños. El padre pagó un total de 50 zeds por las cuatro entradas. ¿Cuántos zeds costó cada entrada de los niños? <u>Demuestra cómo lo has averiguado.</u>

ANEXO VII

Revisión de materiales del mercado editorial

Cuadernos que organizan los problemas en función de la operación:

Carvajal, A. (2010). *Resolución de problemas y cálculo mental.* Madrid: S.M.
Número de cuadernos: 6. Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 1 al 6: 1. Sumas sin llevadas. Restas sin llevadas. Números de una cifra; 2. Sumas sin llevadas, Restas sin llevadas. Números de dos cifras; 3. Sumas con llevadas. Restas sin llevadas. Números de dos cifras; 4 y 5. Sumas con llevadas. Restas con llevadas. Números de tres cifras; 6. Sumas y restas con llevadas.

Coullaut, B., Díez, L., y García, M. (2012). *Cuadernos. Problemas*. Madrid: Santillana.
Número de cuadernos: 14. Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 4 al 7: 4. Sumas de dos y tres sumandos y restas sin llevar con números hasta el 39; 5. Sumas llevando de dos y tres sumandos hasta el 99. Restas sin llevar con números hasta el 99; 6. Restas llevando con números hasta el 299; 7. Sumas y restas llevando con números hasta el 299.

Editorial Rubio (Valencia). (No se especifica ni la autoría, ni la fecha de edición).
Número de cuadernos 13. Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 7 al 9: 7. Sumar y restar sin llevar; 8. Sumar llevando y restar sin llevar; 9. Sumar y restar llevando.

Equipo Dylar. (2011). *Cuadernos de matemáticas. Colección Resolución de Problemas*. Burriana: Dylar Ediciones.
Número de cuadernos 12 (del 17 al 28). Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 17 al 19: 17. Sumas y restas sin llevadas; 18. Sumas sin llevadas y restas sin llevadas; 19. Sumas y restas con llevadas.

Escobar, D. (2015). *Problemas.* Madrid: Anaya.
Número de cuadernos: 20. Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 1 al 6: 1. Sumar sin llevar con números menores que cien; 2. Sumar llevando con números menores que 100; 3. Restar sin llevar con números menores que 100; 4. Sumar llevando y restar sin llevar; 5. Restar llevando; 6. Sumar y restar llevando.

Jardón, M. C., Jardón, M. J. y León, L. (2005). *Cuaderno de problemas.* Zaragoza: Edelvives.
Número de cuadernos: 12. Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 1 al 3: 1. Suma y restas sin llevadas; 2. Sumas con llevadas y restas sin llevada; 3. Sumas y restas con llevadas.

Martín, R.M. (2014). *Castillo.* Huesca: Edarca.
Número de cuadernos 11. Cuadernos con problemas de estructura aditiva del 12 al 14: 12. Sumar y restar, sin llevar; 13. Sumar, llevando y restar, sin llevar; 14. Sumar y restar, llevando.

Olaya, P. (2002). *Problemat.* Valencia: Promolibro.
Colección compuesta por seis cuadernos correspondientes a los niveles de la Educación Primaria (de 1º a 6º curso). No se especifica el tipo de organización y progresión empleada para la presentación de los problemas, aunque en la introducción se afirma que “es un material muy adecuado para rentabilizar al máximo los conocimientos de cálculo que posee el alumno” (p.3). De esta afirmación se concluye que la organización de los problemas está en función de las operaciones que los resuelven y no de su estructura semántica.

Sousa, I., Reclusa, F., y Nagore, A. (2012). *Cuaderno de Matemáticas. Problemas.* Madrid: Bruño.
Número de cuadernos: 8. Cuadernos con problemas de estructura aditiva: 13 y 15: 13. Problemas de sumar y restar. Iniciación; 15. Combinados de sumar y restar con números naturales.

Carazo, N. (2013). ***Solución de problemas. Método DECA*****. Madrid: Santillana.**
El método DECA (Destrezas y Capacidades) es un material complementario al libro de texto de matemáticas, editado por la editorial Santillana con la entrada en vigor en la LOMCE (2013). Se compone de cinco volúmenes (de 2º a 6º), excluyendo del programa el primer nivel de Educación Primaria.

El programa se organiza en torno a un modelo de resolución con tres fases:

1º. Lee y comprende. Actividades para trabajar con las distintas partes del enunciado de un problema: actividades para trabajar la comprensión de la situación que se plantea; actividades para trabajar con la pregunta del problema; actividades para aprender a identificar, extraer y organizar la información (datos).

2º. Piensa y decide. Actividades en las que se reflexiona sobre los elementos necesarios para la resolución de un problema y sus relaciones: actividades para trabajar con datos; para trabajar el planteamiento; para trabajar la resolución; para trabajar la relación entre los datos, la pregunta y el resultado.

3º. Resuelve. Resolución completa de problemas aplicando las estrategias estudiadas: problemas para resolver de una o varias operaciones; invención y resolución de problemas (a partir de los datos, de la pregunta, de la solución).
En general, el programa cumple las mismas características que el libro de texto de la editorial Santillana:

- Una variedad muy limitada de tipo de problemas.
- Una mayor frecuencia de los problemas consistentes frente a los inconsistentes.
- Una escasa variedad de tareas de resolución de problemas desafiantes (inventar parcialmente y localizar datos de más o datos de menos, etc.) construidos sobre la base de estructuras semánticas consistentes (fáciles de resolver).

Jarque, J. (2015). ***Resolución de problemas matemáticos. Colección Aprender y Pensar*****. Madrid: Editorial Grupo Gesfomedia.**
Los problemas de esta colección aparecen secuenciados en función de la operación que los resuelve: "resolver problemas de sumar" (cuaderno nº1, p.21) o "resolver problemas de restar" (cuaderno nº 2, p.21). Además, antes de la presentación de los problemas, el autor introduce una serie de explicaciones que inducen a los alumnos a utilizar estrategias erróneas de resolución: "estrategia de traducción directa o literal", "calcula primero y piensa después" (Stigler et al., 1995, p.15), "método de la palabra clave" o "agarrarse a los números" (Littefield y Riesser, 1993, p.152)." Por ejemplo: "¡Fíjate bien! En esta lección vas a aprender a resolver algunos problemas de restar. Son problemas en los que a una cantidad le quitamos una parte, porque se rompe, se va, la damos, se gasta…" (Cuaderno núm. 1.p.21).

En toda la colección, de 1º a 4º de Educación Primaria, aparece una selección muy limitada de problemas. En concreto, de los veinte tipos de problemas de estructura aditiva, tan solo se presentan problemas de combinación 1; cambio 1 y 2; y, comparación 3 y 4, todos ellos consistentes. En el cuaderno nº 3, se introducen los problemas compuestos, sólo problemas de categoría A; y, en el cuaderno nº 4, aparece una única categoría de problemas inconsistentes: combinación 2.
No obstante, la colección incluye una serie de tareas interesantes para trabajar los problemas de forma no rutinaria: inventar preguntas a partir del enunciado o inventar enunciados a partir de las preguntas y soluciones; localizar los datos de más en el problema; buscar varias soluciones al problema, etc.

Cantero, A., Casal, D., e Hidalgo, A. (2010). ***No hay problema. Resolución de problemas aritméticos clasificados por su estructura semántica.*** **Madrid: EOS.**
Se trata de un programa compuesto por seis volúmenes que se corresponden con los seis cursos de Educación Primaria. Los cinco primeros están destinados a la resolución de problemas de estructura aditiva, de acuerdo con la clasificación propuesta por Heller y Greeno, (1978): combinación (dos tipos), cambio y comparación (seis tipos respectivamente); y por Carpenter y Moser, (1983): igualación (seis tipos).

El sexto y último se dedica exclusivamente a la resolución de problemas de estructura multiplicativa (multiplicación y división). No obstante, desde el segundo volumen se va introduciendo progresivamente éste último tipo de problemas, atendiendo a su nivel de dificultad. La organización es la siguiente:

Volumen 1: problemas de cambio 2 y combinación 1.
Volumen 2: problemas de cambio 3 y 4, combinación 2 y comparación 2.
Volumen 3: problemas de cambio 5 y 6, comparación 3, 4 y 1, igualación 2-1.
Volumen 4: problemas de comparación 5 y 6, igualación 5 y 6.
Volumen 5: problemas de igualación 3 y 4.
Volumen 6: problemas de estructura multiplicativa.

Este programa es la concreción práctica del estudio realizado por el Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica de Ponferrada (2002)
http://www.centros6.pntic.mec.es/equipo.general.ponferrada/
De acuerdo con los autores, “el objetivo de la enseñanza de las matemáticas debe ser el desarrollo de la capacidad del niño para resolver problemas aritméticos” (p.5). Reconocen que la complejidad de esta tarea no viene sólo determinada, como se supone con frecuencia, por el número de operaciones necesarias para resolverlos, sino también, y principalmente, por la estructura semántica que presentan. De ahí que, ya desde el primer momento (título de la colección), se haga explícita esta idea: “Resolución de problemas aritméticos clasificados por su estructura semántica.”
Por otra parte, basan el aprendizaje en el principio de actividad, distinguiendo al mismo tiempo los conceptos de “ejercicio” y “problema”: “la mejor manera de desarrollar la habilidad para resolver problemas, es practicándola, pero conviene que se haga abordando la mayor variedad posible de ellos, a fin de que no se conviertan en meros ejercicios.” (p.8). Otro pilar básico de este programa es el principio de individualización: “se pretende ofrecer un amplio abanico de problemas de complejidad diversa, pero siempre acorde con las posibilidades del alumno atendiendo tanto al estadio evolutivo como al proceso de aprendizaje individual de cada alumno.” (p.8).
Por último, se propone un modelo de resolución dividido en cuatro pasos:
1º. Lectura del problema.
2º. Re-enunciación oral y/o escrita del problema en términos de lo que sé y lo que no sé (datos).
3º. Representación gráfica/simbólica del enunciado (esquema) o realización previa del problema de manera vivencial y/o manipulativa.
4º. Comprobación de la solución, a fin de inducir al alumno a razonarla, analizando la coherencia/incoherencia de la misma en base a los datos conocidos.

Galve, J.L., Mozas, L., y Trallero, M. (2010). ***Pues… ¡claro!*** **Madrid: CEPE.**
Este programa se compone de ocho volúmenes distribuidos de la siguiente forma:
Volumen 1. Introducción de nociones matemáticas básicas: conservación, clasificación, correspondencia, seriación, numeración (introducción a la noción de número), introducción a las operaciones básicas (sumar y restar).

Volúmenes 2 al 5. De igual modo que en el programa anterior, los problemas están organizados atendiendo a la clasificación propuesta por Heller y Greeno, (1978); Carpenter y Moser, (1983).). Así, el programa queda secuenciado tal como sigue:

Volumen 2: combinación (1), cambio 1, 2 y 6), y comparación (2).
Volumen 3: cambio (3 y 4) y comparación (1).
Volumen 4: combinación (2), cambio (5), y comparación (3, 4, 5 y 6).
Volumen 5: igualación (1, 2, 3, 4, 5 y 6).
Volumen 6. Introducción de problemas de estructura multiplicativa (problemas de razón).
Volúmenes 7 y 8. Profundización en las estrategias desarrolladas en los volúmenes anteriores; resolución de problemas compuestos; y problemas con unidades del sistema métrico, unidades de tiempo y monetarias.

Según los autores, este material pretende ser el complemento a cualquier proceso de aprendizaje del área curricular de matemáticas, adecuadamente secuenciado y con una introducción progresiva de las estrategias de resolución:
1º. Lectura del enunciado e identificación de datos.
2º. Representación gráfica de los datos (esquema).
3º. Aplicación de la operación que resuelve el problema.
4º. Comprobación del resultado.
5º. Escritura de la respuesta a la pregunta del problema.

Luceño, J.L. (2013). ***Aprendo a resolver problemas*****. Málaga: Aljibe.**
Este programa, compuesto por seis volúmenes, es una contextualización basada en el trabajo realizado por Echenique (2006), y publicado por el Departamento de Educación del Gobierno de Navarra.Echenique, I. (2006). *Matemáticas. Resolución de problemas*. Gobierno de Navarra. Departamento de Educación.
Dos son las ideas principales en que se sustenta el programa: la resolución de problemas es lo que da realmente sentido a los contenidos matemáticos; y, abordar la enseñanza de la resolución de problemas es un proceso lento y continuo que debe iniciarse desde los primeros años.Por otro parte, se presenta como un método de resolución de problemas estructurado en cuatro fases:
1º. Comprendo el problema.
2º. Relaciono los datos. Esquematizo la situación.
3º. Opero y escribo la solución.
4º. Compruebo el resultado.
Aunque no aparece de forma explícita la tipología de problemas propuestos en cada volumen, el autor atiende a los veinte tipos de problemas de estructura aditiva. De hecho, en las bases teóricas del programa se propone una clasificación de los problemas aritméticos de estructura aditiva en función de su estructura semántica (Echenique, 2006). Igualmente, en otra obra del propio autor, también se atiende a la estructura semántica para la clasificación de estos problemas (Luceño, 1999). Luceño, J.L. (1999*). La resolución de problemas aritméticos en el aula.* Málaga: Aljibe.

Algunos aspectos a destacar son los siguientes: se incluyen problemas desafiantes con datos de más y datos de menos, o tareas en las que el alumno debe inventar problemas; se distingue entre problema y ejercicio; los problemas son presentados en contextos situacionales distintos a las situaciones estándar, de manera que se tiene en cuenta la influencia de las variables textuales introducidas en el texto problema para la mejora del proceso de comprensión.

OTRAS PROPUESTAS POR ANALIZAR
-EntusiasMAT (Editorial Teckman)

-Método ABN. Martínez Montero, J. y Sánchez Cortés, C. (2013*). Resolución de problemas y método ABN.* Madrid: Wolters Kluwer.

-Programa PEIM. Bermejo, V. (2012). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Madrid: CCS