A. Fabbri i M.A. Lledó

Mecànica II. Esquema del curs

0

Antecedent
La mecànica newtoniana (Galileu i Newton): lleis del moviment formulades en els sistemes inercials.

1

Formulació lagrangiana (Euler, Lagrange, Hamilton i Jacobi): tractarem l'espai de configuració, les coordenades, les velocitats generalitzades i arribarem a les eq. d'Euler-Lagrange, que valen en tots els sistemes de coordenades.

2

Formulació hamiltoniana: emprarem l'espai de fases per a arribar a les eq. de Hamilton; discutirem els parèntesis de Poisson i el *canvi de coord.* (transformacions canòniques) en l'espai de fases.

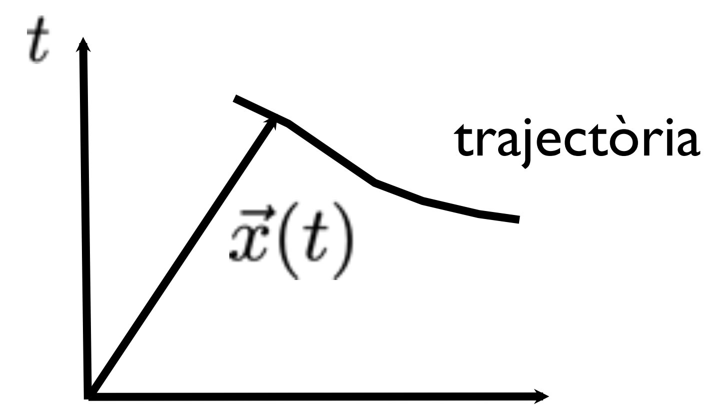
3

Relativitat especial (Einstein): veurem que el principi de relativitat combinat amb la constància de la velocitat de la llum en el buit mescla espai i temps, i en discutirem les conseqüències físiques.

0. Principis fonamentals de la mecànica newtoniana

- Va ser desenvolupada per Galileu i Newton en els segles XVI i XVII.
- Consisteix en tres lleis del moviment (i una per a la gravetat): les partícules són punts i les forces es representen amb vectors, per exemple $\vec{F} = m\vec{a}$.
- No és elegant, enfosqueix característiques de la dinàmica i no és clara la relació amb la mecànica quàntica.
- En aquesta assignatura presentarem un nou formalisme, que és la base de tota la física moderna (electromagnetisme, relativitat general, model estàndard, teoria de cordes...).

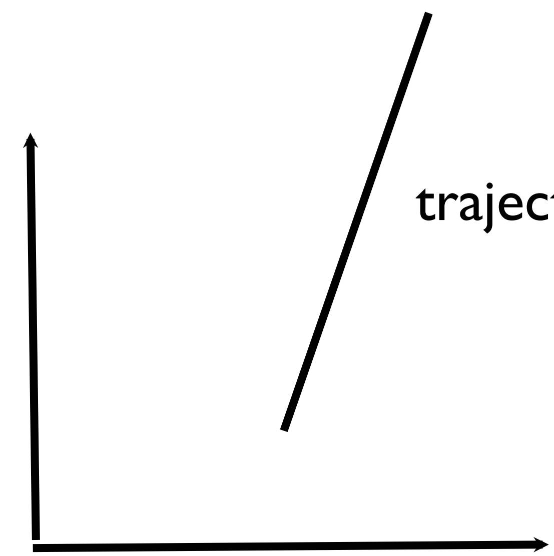
Mecànica d'una partícula puntual de massa *m* (exemple: la Terra respecte al Sol)



- Amb un sistema de coordenades representem el seu vector posició $\vec{x}(t)$
- La seua velocitat és $\vec{u} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$, el moment $\vec{p} = m\vec{u}$ i l'acceleració $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}$.

Nota: representem el vector de posició amb $\vec{x}$, $\vec{r}$, i la velocitat amb $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Les lleis del moviment valen en els sistemes inercials



trajectòria d’una partícula lliure

- Primera llei: quan no hi ha forces externes, les partícules segueixen línies rectes.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

velocitat
constant

Hi ha infinits sistemes inercials

Per a passar d'un sistema inercial *S* a un altre *S*' podem fer aquestes transformacions:

- Rotacions $\vec{r}\,' = O\vec{r}$, on O és una matriu 3×3 i té tres paràmetres independents (rotacions respecte als eixos x, y, z).
- Translacions espacials $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{c}$, tres paràmetres ($c_x, c_y, c_z$).
- *Boosts* o transformació de Galileu: $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{u}\ t$ amb $\vec{u}$ constant (els dos sistemes es mouen amb velocitat constant l'un respecte a l'altre), tres paràmetres.
- Translació temporal $t' = t + c$, un paràmetre.

El conjunt d'aquestes transformacions es denomina grup de Galileu.

Segona llei

- Quan hi ha forces externes $\vec{F} = m\vec{a}$ o, millor, $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{p}}$ (les dues definicions són equivalents quan *m* és constant).
- Introducció del moment angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\eta}$

moment de la força

Són equacions diferencials de segon ordre. Hi ha teoremes generals que ens donen la trajectòria $\vec{r}(t)$ si coneixem la posició i velocitat en l'instant inicial $\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0)$.

Lleis de conservació

- Si $\vec{F} = 0$ de la segona llei resulta que el moment es conserva $\vec{p} = const$
- Si $\vec{\eta} = 0$, per exemple, $\vec{F}$ és paral·lela a $\vec{r}$, el moment angular es conserva $\vec{L} = const.$

definició de força central

Veurem que aquestes lleis de conservació estan relacionades amb les simetries del grup de Galileu.

Energia

- Comencen amb l'energia cinètica $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$.
- La variació temporal entre un punt ($\vec{r}_1(t_1)$) i un altre ($\vec{r}_2(t_2)$) de la trajectòria és

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dT}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

Treball de la força
al llarg de la trajectòria

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}$$

Força conservativa

- Un tipus especial de força $F = F(\vec{r})$ es diu conservativa quan el treball no depèn del camí considerat; només del punt inicial i del final. Exemples: força gravitacional i força electrostàtica.
- En aquest cas, podem escriure $F = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ i $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$
- Resulta que $T(t_2) - T(t_1) = -V(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1)$.

$\Longrightarrow$ L'energia total $E = T + V$ és conservada.

Exemples

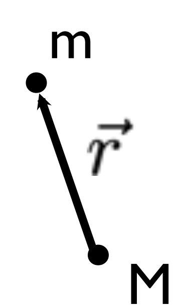
- Oscil·lador harmònic (en una dimensió): $F = -kx,\ V = \dfrac{kx^2}{2}$
  p no es conserva, el moment angular no està definit i $E = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2}$ és conservada.

- Oscil·lador harmònic esmorteït $F = -kx - \gamma\dot{x}$ (terme de fricció)
  F no és conservativa, *E* no és conservada.

- Partícula de massa *m* en un camp gravitacional generat per una massa *M* molt més gran

$$F = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Vector normalitzat a 1



$\vec{p}$ no és conservat, $\vec{F}$ és conservativa i paral·lela a $\vec{r}$: $E = T + V$, $\vec{L}$ es conserven.

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

Sistemes de partícules

- Considerem un conjunt de partícules amb masses m_i i vectors posició $\vec{r}_i$.
- Per a cada partícula $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ i sumant

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} + \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

$$\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0$$

tercera llei: acció i reacció

- Definim la massa total $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ i el centre de masses $\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$
- Resulta que $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}$ (és com si tota la massa estiguera concentrada en el centre de masses).
- El moment total $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ satisfà $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext}$ i es conserva si $\vec{F}^{ext} = 0$
- El moment angular total $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ satisfà $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} + \vec{\eta}^{\ ext}$ i es conserva si $\vec{F}_{ij}$ és paral·lela a $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ i $\vec{\eta}^{\ ext} = 0$.

- L'energia cinètica total és $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$.
- Utilitzant la definició del centre de masses, escrivim $\vec{r}_i = \vec{R} + \tilde{\vec{r}}_i$ i $T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{\vec{R}} + \dot{\tilde{\vec{r}}}_i)^2 = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\tilde{\vec{r}}}_i^2$. energia cinètica interna
- Com en el cas d'una partícula $T(t_2) - T(t_1) = \int d\vec{R}\cdot\vec{F}^{ext} + \sum_{i,j}\int d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_{ij}$
- Quan $\vec{F}^{ext}$ i $\vec{F}_{ij}$ són conservatives $E = T + V$ es conserva.

energia potencial total

Exemple

Atracció gravitacional entre dos cossos amb masses m_1 i m_2 :

- Moment lineal total, moment angular total i $E = T + V$ es conserven

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2 \ , \ V = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

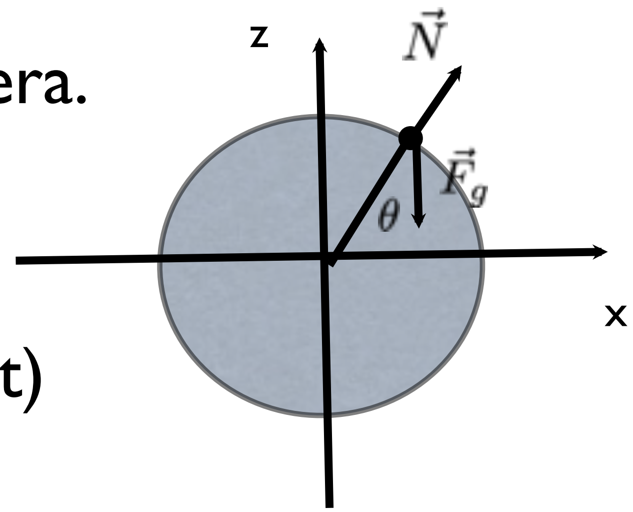
1. Espai de configuració *Q*

- És el conjunt de punts en l’espai físic ($\mathbb{R}^3$) on es troba la partícula. Si no hi la limitacions al moviment (lligams o lligadures), $Q = \mathbb{R}^3$

Exemple: partícula obligada
a moure’s en una superfície
corba: aquesta superfície
és el seu espai de configuració.

Exemple (lligadura holònoma)

- Petita esfera que es mou sense fricció en un cercle (filferro) vertical de radi *r*.
- $\vec{N} = N_x\hat{x} + N_z\hat{z}$ és la força que el filferro excerceix sobre l'esfera.
- $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ és la força de gravetat.
- $\vec{N}$ és perpendicular a la velocitat de l'esfera (no hi ha fregament)
$$\vec{N}\cdot\vec{v} = N_x\dot{x} + N_y\dot{y} = 0$$
- L'esfera està obligada a moure's en el cercle (lligadura).



Equacions del moviment
$$\begin{cases} m\ddot{x} = N_x \\ m\ddot{z} = N_z - mg \\ N_x\dot{x} + N_z\dot{z} = 0 \\ x^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$$

Espai de configuració

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{z}^2)+mgz\right)=0$$

- Resolem la lligadura utilitzant coordenades polars $x=r\cos\theta, z=r\sin\theta$
- La condició de no fregament la podem reescriure així: $m\dot{x}\ddot{x}+m\dot{z}\ddot{z}+mg\dot{z}=0$, i emprant coordenades polars

$$r\dot{\theta}\sin\theta(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta)+r\dot{\theta}\cos\theta(-\dot{\theta}^2\sin\theta+\ddot{\theta}\cos\theta)+g\dot{\theta}\cos\theta=0$$

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{r}\cos\theta$$

Diem que el sistema té un grau de llibertat i que la seua coordenada generalitzada és θ .

El nombre de coordenades generalitzades correspon als graus de llibertat: en aquest cas $Q=S^1$

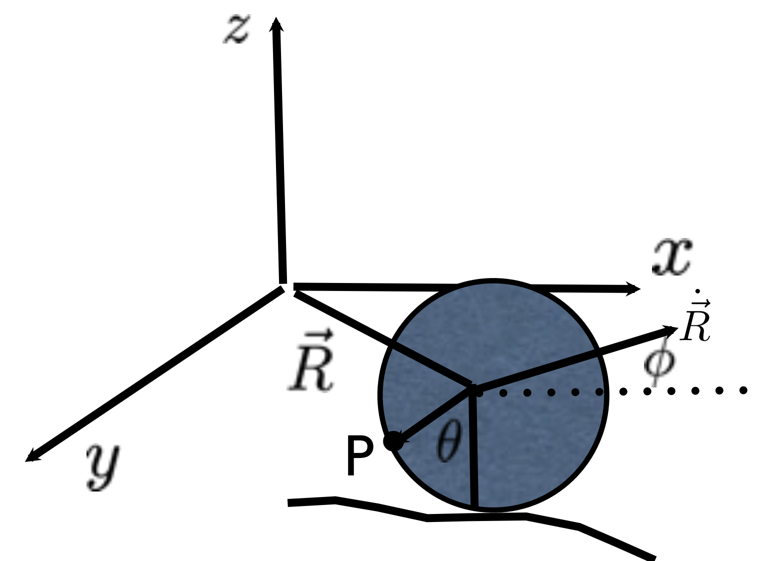
Exemple (sòlid rígid)

- Considerem un sistema de *n* partícules puntuals amb vectors posició $\vec{r}_i$ on les distàncies $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij}$ són constants (lligadures).
- El sistema té 6 graus de llibertat, que són les coordenades de tres punts no col·lineals menys els tres lligams:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = c_{12}, \ |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = c_{13}, \ |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = c_{23}$$

- Fins ara hem considerat lligadures que són relacions del tipus $f^\alpha(\vec{r}_a) = 0, \alpha = 1, .., n; a = 1, \ldots, N$ entre les coordenades generalitzades (es denominen lligadures holònomes).
- Hi ha lligadures més complicades $f^\alpha(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a) = 0$ que depenen també de les velocitats (no holònomes).

Lligadura no holònoma



- Un disc vertical de radi a roda sense lliscar en un pla horitzontal.
- El pla del disc canvia amb el temps però queda sempre vertical.
- $\vec{R} = R_x\hat{x} + R_y\hat{y} + a\hat{z}$ és el vector posició del centre del disc, i escrivim $\vec{r}_P = \vec{R} + \vec{r}\,'$.
- La condició *rodar sense lliscar* $|\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'|_{\theta=0} = 0$ implica que la velocitat del centre del disc és $V = \sqrt{\dot{R}_x^2 + \dot{R}_y^2} = a\dot{\theta}$ i que

$$\begin{cases} \dot{R}_x = a\dot{\theta}\cos\phi \\ \dot{R}_y = a\dot{\theta}\sin\phi \end{cases}$$

Les coord. generalitzades són R_x, R_x, θ, ϕ i la lligadura, que involucra coord. i velocitats, no permet eliminar-ne una en funció de les altres.

Nota

- Hi ha lligadures aparentment no holònomes que però no ho són.
- Considerem un sistema descrit per les coordenades generalitzades $q_1, \ldots, q_n$ i la lligadura $A_i(q,t)\dot{q}_i + B(q,t) = 0$.

  Si existeix una funció $F(q,t)$ tal que $\frac{\partial F(q,t)}{\partial q^i} = A_i, \frac{\partial F}{\partial t} = B,$ aleshores tenim $\frac{dF}{dt} = 0$ i $F(q,t) = const$, que és una lligadura holònoma.

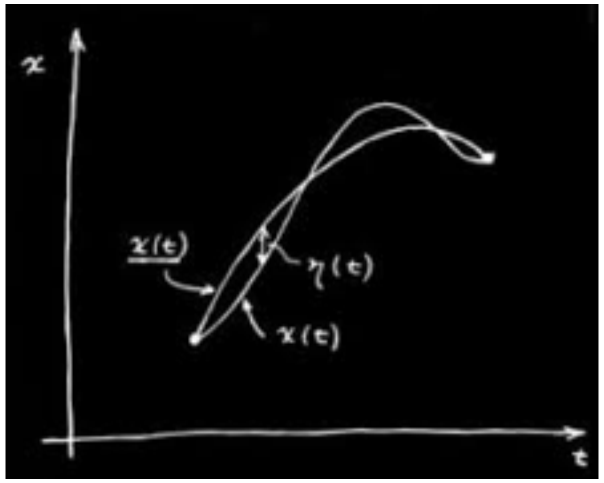
Consideracions generals

- Una lligadura holònoma $f_\alpha(x,t)=0, \alpha=1,..,3N-n$ pot ser resolta en termes de coord. generalitzades $q^i, i=1,..,n$ on $x^A=x^A(q_1,..,q_n)$: es diu que el sistema té n graus de llibertat.
- No hi ha una teoria general per a resoldre una lligadura no holònoma: pot ser una relació del tipus $g(x^A,\dot{x}^A,t)=0$ o també una desigualtat (per exemple $x^2+y^2+z^2\geq R^2$).
- Com que les eq. de Newton són de segon ordre, per a cada coordenada tenim dues condicions inicials (posició i velocitat): una lligadura, holònoma o no, restringeix els seus valors.
- L'espai de les possibles condicions inicials és l'espai de fase *P*, que ens permet definir el nombre de graus de llibertat del sistema.

Formulació lagrangiana

- La formulació lagrangiana de la mecànica es fa usant coordenades generalitzades, completament arbitràries: podem usar les que millor s'adapten a la geometria de l'espai de configuració.
- No cal introduir-hi forces de lligadura.
- És una formulació més geomètrica i econòmica. El tractament de les simetries és més directe.

Tractament heurístic



- Considerem una partícula (p. ex., en un camp gravitatori) que comença el moviment en un punt i l'acaba en un altre.
- Calculem l'energia cinètica que té en cada punt, sostraiem l'energia potencial i integrem en el temps: veurem que per a la trajectòria física, aquesta quantitat és un mínim.
- Per a una partícula lliure $\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2$ és mínim per a una línia recta (per a qualsevol altra trajectòria, sent el valor mitjà de v^2 més gran que el valor mitjà de v al quadrat, $\int dtT$ és més gran).
- En un camp gravitatori, la quantitat $\int_{t_1}^{t_2} dt[\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2 - mgx]$ és més petita per a una trajectòria que passa molt de temps prop del punt més alt, on $T - V$ és mínim (que és el que passa per a la sol. física).

- Tenim un problema matemàtic més difícil i nou: la quantitat (que es denomina acció) $S = \int_{t_1}^{t_2} dt[T(t) - V(t)]$ produeix un nombre per a cada possible trajectòria i hem de calcular la corba que fa S mínima.

- És similar al problema de calcular el mínim d'una funció d'una variable, però matemàticament és diferent. En lloc de la variable, tenim una funció (trajectòria); i en lloc de la funció un funcional (S), buscarem un extrem del funcional (punt on la derivada és zero).

PRINCIPI DE MÍNIMA ACCIÓ DE HAMILTON

- En lloc de càlcul ordinari, parlem de càlcul variacional.

Un poc més formal

- L'espai de configuració *Q* està parametritzat per les coordenades generalitzades $q^1, \ldots, q^n$ on n és el nombre de graus de llibertat.
- Considerem l'espai Γ de totes les possibles trajectòries γ en *Q*, que són corbes parametritzades pel temps t: $\gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t))$
- Un funcional ϕ associa a cada corba γ un nombre real: $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$
- Exemple: el funcional longitud $\phi[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} |d\vec{\gamma}(t)| = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{(\dot{\gamma}^1(t))^2 + .. + (\dot{\gamma}^n(t))^2}$

Un altre pas

- Un funcional és diferenciable si, considerant una petita modificació $h(t)$ a la nostra corba γ : $\phi[\gamma + h] - \phi[\gamma] = F[\gamma, h] + R[\gamma, h]$ on F és una funció lineal en h ($F[\gamma, \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2] = \lambda_1 F[\gamma, h_1] + \lambda_2 F[\gamma.h_2]$) i R és d'ordre h^2 ($|h|, |\frac{dh}{dt}| < \epsilon$ implica que $|R| << \epsilon^2$).
- Diem diu que $F[\gamma, h]$ és el diferencial de ϕ en el *punt* (corba) γ : $F[\gamma, h] = \delta\phi[\gamma, h]$

Continuem

- Considerem la funció $L : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ i γ una corba en $\mathbb{R}^n$.
  Definim el funcional $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\gamma^i(t), \dot{\gamma}^i(t), t).$
- Tenim que $\delta S[\gamma, h] = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} h^i + \frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}^i} \dot{h}^i] dt = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}^i})] \delta h^i + [\frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}^i} h^i]_{t_0}^{t_1}$,
  on hem integrat per parts.
- Direm que la corba γ és un extrem del funcional (diferenciable) S si $\delta S[\gamma, h] = 0$
- A més, a més, considerem corbes amb extrems fixats
  ($\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0), \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$ $\Longrightarrow h(t_0) = h(t_1) = 0$).
- Amb aquesta condició, la corba γ és un extrem de S si

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}^i}) = 0$$

Exemple (funcional longitud)

- Considerem el funcional longitud $\phi[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} dtL = \int_{t_0}^{t_1} dt[(\dot{\gamma}^1(t))^2 + .. + (\dot{\gamma}^n(t))^2]^{1/2}$
- Com que $\frac{\delta L}{\delta \gamma^i} = 0$, en el extrem de ϕ tenim que $p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}^i} = \frac{\dot{\gamma}^1}{[(\dot{\gamma}^1)^2 + .. + (\dot{\gamma}^n)^2]^{1/2}} = const.$
- Si parametritzem la corba amb un altre paràmetre τ, on $t = t(\tau)$, veiem que ϕ pren la mateixa forma que la de dalt amb la substitució $t \to \tau$
- Utilitzem aquesta llibertat (invariància sota reparametrització) per a prendre $\gamma^1 = \tau$, aleshores:

$$p_1 = \frac{1}{[(\gamma'^1)^2 + \ldots + (\gamma'^n)^2]^{1/2}} = const, p_i = \frac{\gamma'^i}{[(\gamma'^1)^2 + \ldots + (\gamma'^n)^2]^{1/2}} = const, i \neq 1, \gamma'^i = \frac{d\gamma^i}{d\tau}$$

La solució ($\gamma'^i = const.$) ens diu que la corba de longitud mínima és una recta.

Lagrangià

- Considerem un sistema de partícules amb coord. cartesianes $(x_a^1, x_a^2, x_a^3), a = 1, .., N.$ Suposem que hi ha lligadures i que el nombre de coordenades independents, o graus de llibertat, és *n*.

- L'espai de configuració està descrit per les coord. generalitzades $q \equiv q^i, i = 1, \ldots, n$ i $x_a^1 = x_a^1(q), x_a^2 = x_a^2(q), x_a^3 = x_a^3(q)$.

- Suposem que les forces que actuen sobre el sistema (amb l'excepció de les de lligadura) deriven d'un potencial $V = V(q, t)$.

- L'energia cinètica del sistema és $T = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \left((\dot{x}_a^1(q, \dot{q}))^2 + (\dot{x}_a^2(q, \dot{q}))^2 + (\dot{x}_a^3(q, \dot{q}))^2\right) = T(q, \dot{q}),$ que podem escriure en termes de coord. i velocitats generalitzades.

- Definim el lagrangià del sistema de la manera següent:

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V$$

Principi de Hamilton i equacions d'Euler-Lagrange

- L'evolució del sistema físic entre els instants de temps t_0 i t_1 és una corba que és un punt estacionari de l'acció funcional $S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)$ amb extrems fixats ($q^i(t_0) = q^i_0, q^i(t_1) = q^i_1$).
- Segons aquest principi, $\delta S = 0$ i la trajectòria física satisfà $\frac{\delta L}{\delta q^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}) = 0$.
- Hi ha una generalització del principi de mínima acció en la mecànica quàntica deguda a Feynman: les partícules segueixen totes les trajectòries possibles amb una probabilitat donada per S .

Equacions d'Euler-Lagrange (E-L)

Comparació amb la formulació newtoniana

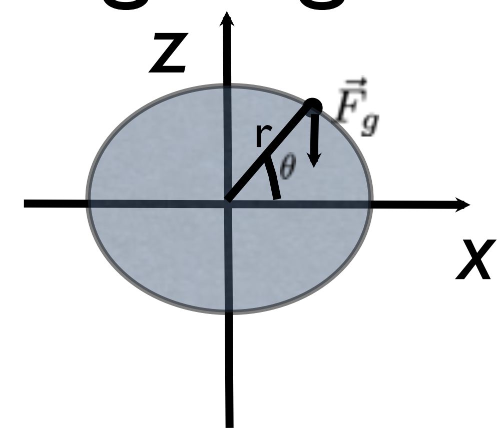
- Sense lligadures, utilitzem coord. cartesianes, $T = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2} \left((\dot{x}_a^1)^2 + (\dot{x}_a^2)^2 + (\dot{x}_a^3)^2 \right)$
- $\frac{\delta L}{\delta x_a^i} = -\frac{\partial V}{\partial x_a^i} = F_a^i$ és la força que actua sobre la partícula a.
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}_a^i}\right) = m_a \ddot{x}_a^i = F_a^i$: les eq. E-L són equivalents a les de Newton.
- En presència de lligadures $f(x^\alpha, t) = 0$, i continuant amb coord. cartesianes, podem emprar una versió del teorema dels multiplicadors de Lagrange i buscar un extrem del funcional

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(L(x, \dot{x}, t) + \lambda^\alpha f_\alpha(x, t) \right) dt$$

Les eq. modificades per les lligadures són $\begin{cases} \delta x_a^i \to m_a \ddot{x}_a^i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_a^i} + \lambda^\alpha \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x_a^i} \\ \delta \lambda^\alpha \to f^\alpha = 0 \end{cases}$

forces de lligadura

Exemple: partícula que es mou en una circumferència des de la perspectiva lagrangiana



- Utilitzem coordenades polars, $x = r\cos\theta, z = r\sin\theta$, on θ és la coordenada generalitzada.
- Escrivim l'energia cinètica $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2$ i l'energia potencial $V = mgz = mgr\sin\theta$
- El lagrangià és $L = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - mgr\sin\theta$ i l'eq. E-L

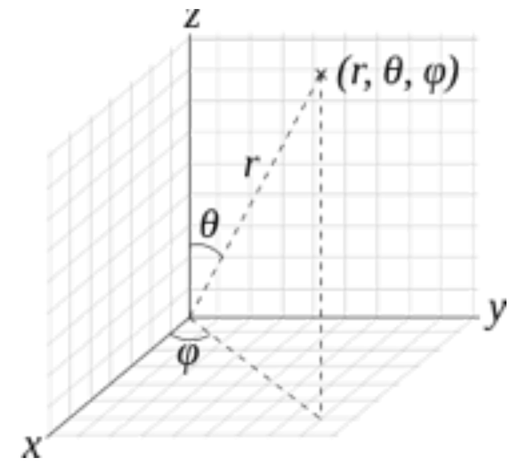
$$\frac{\delta L}{\delta\theta} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}}) = -mgr\cos\theta - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\cos\theta$$

Altres consideracions

- La formulació lagrangiana permet generalitzar a sistemes que no es descriuen amb un potencial del tipus $V = V(q,t)$. Podem considerar un lagrangià de l'estil $L = T - V$ on V depèn de coord. i velocitats generalitzades. Un exemple és una partícula en un camp electromagnètic en què $L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - q\phi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$. $\left.\begin{array}{l}\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{array}\right\}$ ϕ potencial escalar, $\vec{A}$ potencial vectorial
- Si L no depèn d'una coordenada generalitzada, les eq. E-L impliquen que $p_i \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}$ és constant i diem que q^i és una coordenada cíclica.

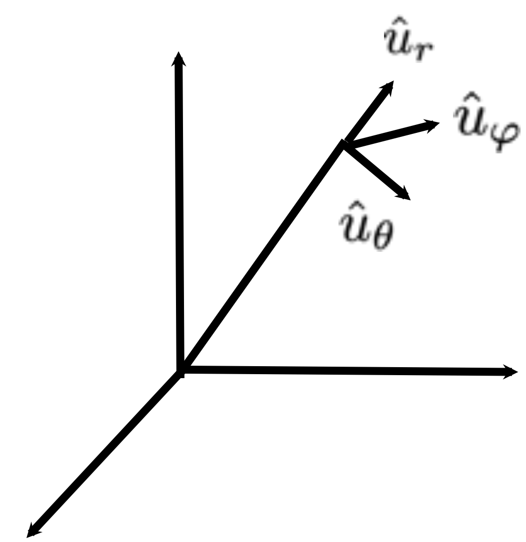
moment conjugat
o generalitzat

Exemple (força central)



- Considerem com a coord. generalitzades les coord. esfèriques $\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$
- Els vectors unitaris (i ortogonals) són ($\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$)

$$\begin{cases} \frac{\vec{r}}{r} = \hat{u}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}, \\ \hat{u}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}, \\ \hat{u}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\hat{x} + \cos\varphi\hat{y} \end{cases}$$



La velocitat és $\dot{\vec{r}} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{u}_\varphi$

i podem escriure el lagrangià ($V = V(r)$)

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

L no depèn de φ, perquè $p_\varphi = \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = constant$

- Les eq. E-L que queden són $\begin{cases} -m\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \dfrac{\partial V}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{p_\varphi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} - \dfrac{d}{dt}(p_\theta) = 0,\ p_\theta = mr^2\dot{\theta} \end{cases}$
- Podem considerar un sistema de referència en què les eq. se simplifiquen. Com que el moment angular es conserva, podem triar l'eix y paral·lel a $\vec{L}$, cosa que implica que el moviment es produeix en el pla (x, z) i que $\varphi = 0$.
- Amb aquesta simplificació, obtenim $p_\varphi = 0$ i $m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \dfrac{\partial V}{\partial r},\ \dot{p}_\theta = \dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$ que podem obtenir del lagrangià $\tilde{L} = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) = L|_{\varphi=0}$
- Ara, θ és una coordenada cíclica i $p_\theta = \dfrac{\delta L}{\delta\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = constant$
- Ens queda una única equació $m\ddot{r} = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r}$ que es pot derivar del lagrangià $\hat{L} = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} - \hat{V}$, on $\hat{V} = V + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2}$ és el potencial efectiu.

En general, es veu també en les *nostres* quantitats conservades que el moment angular $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mr^2\dot{\theta}\hat{u}_\varphi - mr^2\sin\theta\dot{\varphi}\hat{u}_\theta$ es conserva.

Exemple: equacions de les geodèsiques

- Escrivim el lagrangià i les eq. del moviment d'una partícula que es mou en una subvarietat (superfície) de $\mathbb{R}^m$: $x^a = F^a(q^1, \dots, q^n), a = 1, \dots, m$
- Exemples: $x^1 = q^1,\ x^2 = Aq^1 + B$ que és l'eq. d'una recta en el pla real (un grau de llibertat); $x^1 = q^1,\ x^2 = q^2,\ x^3 = Aq^1 + Bq^2$ que és l'eq. d'un pla en $\mathbb{R}^3$ (dos graus de llibertat).
- El lagrangià és $L = \frac{m}{2}\sum_{a=1}^{m}(\dot{x}^a)^2$ on $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^a}{\partial q^i}\dot{q}^i$ i per substitució, $L = \frac{m}{2}\sum_{a=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial x^a}{\partial q^i}\frac{\partial x^a}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j$
- Definim la *mètrica* de la subvarietat $g_{ij}(q) = \sum_{a=1}^{m}\frac{\partial x^a}{\partial q^i}\frac{\partial x^a}{\partial q^j}$, matriu simètrica, i tenim

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

producte intern dels vectors tangents a la subvarietat

Utilitzem la convenció que dos índexs repetits se sumen

- Escrivim les eq. E-L: $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^k} = m\sum_{i=1}^{n} g_{ki}\dot{q}^i = m g_{ki}\dot{q}^i$ i $\frac{\delta L}{\delta q^k} = \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{m}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j$
- Obtenim $\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^j\dot{q}^i + g_{ki}\ddot{q}^i - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$
- Com que $\dot{q}^i\dot{q}^j$ és simètric en el canvi dels dos índexs, podem escriure $\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i})\dot{q}^i\dot{q}^j$
- Multipliquem per la inversa $(g^{-1})^{lk}$ on $(g^{-1})^{lk} g_{ki} = \delta^l_i$
- Per a escriure el resultat final emprem la convenció $\frac{\partial}{\partial q^i} = \partial_i$

$$\ddot{q}^l + \frac{1}{2}(g^{-1})^{lk}\left(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j = 0$$

Equació de la geodèsica

Eq. E-L i canvi de coordenades

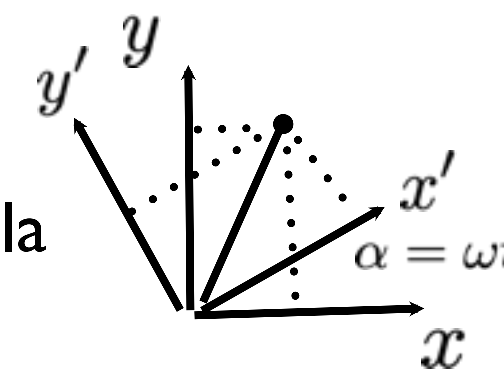
- Les eq. E-L valen en tots els sistemes de coordenades.
- La raó és que les eq. E-L es dedueixen a partir del principi de mínima acció, que es refereix a camins (trajectòries) i no a coordenades.
- Considerem el canvi $q^a = q^a(x_A, t)$, on $\dot{q}_a = \frac{dq_a}{dt} = \frac{\partial q_a}{\partial x^A}\dot{x}^A + \frac{\partial q_a}{\partial t}$ (hem considerat la possibilitat d'una dependència explícita en el temps), i la seua inversa $x^A = x^A(q_a, t)$ amb $\dot{X}^A = \frac{\partial X^A}{\partial q_a}\dot{q}_a + \frac{\partial X^A}{\partial t}$ (que existeix si $det(\frac{\partial x^A}{\partial q_a}) \neq 0$).
- Considerem ara $L(x^A, \dot{x}^A)$ amb $x^A = x^A(q_a, t)$ i escrivim les eq. E-L fent el canvi de coordenades: $\frac{\delta L}{\delta q_a} = \frac{\delta L}{\delta x^A}\frac{\partial x^A}{\partial q_a} + \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^A}(\frac{\partial^2 x^A}{\partial q_a \partial q_b}\dot{q}^b + \frac{\partial^2 x^A}{\partial t \partial q_a})$ i $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_a} = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^A}\frac{\partial x^A}{\partial q_a}$.
- Obtenim $\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_a}) = (\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^A})\frac{\partial x^A}{\partial q_a} + \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^A}\left(\frac{\partial^2 x^A}{\partial q_a \partial q_b}\dot{q}_b + \frac{\partial^2 x^A}{\partial q_a \partial t}\right) = \frac{\delta L}{\delta q_a}$, i per tant

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^A}\right) - \frac{\delta L}{\delta x^A}\right]\frac{\partial x^A}{\partial q_a} = 0$$

Exemple (sistema de coordenades en rotació)

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$

- Considerem una partícula lliure amb lagrangià $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2, \vec{r} = (x, y, z)$.
- Descrivim el seu moviment respecte a un sistema en rotació, per exemple amb velocitat angular $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ respecte a l'eix z.



- El vector posició en el nou sistema $\vec{r}' = (x', y', z')$, on $z = z'$ i, en el pla perpendicular, $x = x' \cos\omega t - y' \sin\omega t, y = y' \cos\omega t + x' \sin\omega t$.
- En termes de les noves coordenades:

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{x}' - \omega y')^2 + (\dot{y}' + \omega x')^2 + z^2] = \frac{m}{2}[\dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,']^2 = \frac{m}{2}[\dot{\vec{r}}\,'^2 + 2\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')]$$

$\vec{\omega} \times \vec{r}\,' = \hat{x}'(-\omega y') + \hat{y}'(\omega x')$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \hat{x}'(-\omega^2 x') + \hat{y}'(\omega^2 y')$$

Escrivim les eq. E-L en components, per exemple:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x'} & = m\omega(\dot{y}' + \omega x') \\ \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}'}) & = m(\ddot{x}' - \omega \dot{y}') \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x}' - 2m\omega\dot{y}' - m\omega^2 x' = 0$$

que correspon al component x de $m[\ddot{\vec{r}}\,' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')] = 0$

- En forma vectorial $\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{r}}\,'} = m\dot{\vec{r}}\,' + m\omega \times \vec{r}\,'$ i utilitzant $\dot{\vec{r}}\,' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = -\vec{r}\,' \cdot (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,')$ i $(\vec{\omega} \times \vec{r}\,') \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{r}\,' \cdot \vec{r}\,') - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,')(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,')$ obtenim

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{r}\,'} = -m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,') + m((\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}\,' - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}\,')\vec{\omega}) = -m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Eq. E-L: $$m[\ddot{\vec{r}}\,' + \underbrace{2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}\,'}_{\text{força de Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}_{\text{força centrífuga}}] = 0$$

Tractament de les simetries

- En general, el lagrangià d'un sistema físic $L(q, \dot{q}, t)$ depèn de totes les coordenades i velocitats generalitzades $q^i,\ \dot{q}^i, i = 1, ..., n$.
- Què passa quan L no depèn d'una (o més) coordenades o velocitats generalitzades?
- Comencem amb el segon cas (L no depèn de totes les $\dot{q}^i$), i amb un exemple.

Exemple: $L(q,\dot{q})$ no depèn de $\dot{q}^1$

- Considerem el component 1 de les equacions E-L $\frac{\delta L}{\delta q^1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta L}{\delta q^1} = 0$
- Aquesta equació concerneix només q i $\dot{q}$; $\ddot{q}$ no hi apareix.
- Diem que la coordenada q^1 no es propaga perquè no hi ha una eq. d'evolució del tipus $\ddot{q}^1 = F^1(q,\dot{q},t)$.
- Aquesta equació és una *lligadura*, també dita *lligam* o *vincle*.

Més en general, podem reescriure les eq. E-L en la forma
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta L(q,\dot q,t)}{\delta \dot q^\alpha}\right) - \dfrac{\delta L}{\delta q^\alpha} = \dfrac{\delta^2 L}{\delta q^\beta \delta \dot q^\alpha}\dot q^\beta + \\ \qquad \dfrac{\delta^2 L}{\delta \dot q^\beta \delta \dot q^\alpha}\ddot q^\beta + \dfrac{\delta^2 L}{\delta t \delta \dot q^\alpha} - \dfrac{\delta L}{\delta q^\alpha} = 0 \end{cases}$$

- El terme que multiplica $\ddot q^\beta$, $h_{\alpha\beta} \equiv \dfrac{\delta^2 L}{\delta \dot q^\beta \dot q^\beta}$, es denomina hessià del lagrangià L
- Si hi ha un vector $v^\beta(q,\dot q)$ tal que $h_{\alpha\beta} v^\beta(q,\dot q) = 0$ diem que v^β és un mode zero.
- Projectant les eq. E-L sobre v^βobtenim $h_{\alpha\beta}v^\beta + \left[\dfrac{\delta^2 L}{\delta q^\beta \delta \dot q^\alpha}\dot q^\beta + \dfrac{\delta^2 L}{\delta t \delta \dot q^\alpha} - \dfrac{\delta L}{\delta q^\alpha}\right] v^\alpha = 0$
- Aquesta eq. és del tipus $\Psi(q,\dot q) = 0$ i correspon a una lligadura.
- Inversament, si $h_{\alpha\beta}$ no té mode zero (i $det\ h_{\alpha\beta} \neq 0$) el lagrangià es denomina no degenerat o regular.

Aplicació al funcional longitud

- En aquest cas $L = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{q}^{i2}}$, el hessià és $h_{ij} = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{q}^i \dot{q}^j} = \frac{\delta}{\delta \dot{q}^i}\left(\frac{\dot{q}^j}{L}\right) = \frac{\delta^{ij}}{L} - \frac{\dot{q}^j \dot{q}^i}{L^3}$
- Projectant sobre el vector $\dot{q}$ obtenim $h_{ij}\dot{q}^j = \frac{\dot{q}^i}{L} - \frac{\dot{q}^j \dot{q}^j \dot{q}^i}{L^3} = 0,$ perquè $\dot{q}^j \dot{q}^j = L^2$.
- La conseqüència és que hi ha una variable espúria i que l'espai de configuració té dimensió $n-1$.
- Sabem de què es tracta: és la invariància sota reparametrització $t = t(\eta)$. Si $\dot{q}^i = \frac{dq^1}{dt} > 0$, podem identificar $q^1 = \eta$ i $L = (1 + \sum_{i=2}^{n} q'^{i2})^{1/2}$ depèn només de les $n-1$ variables $q^i, i = 2, .., n$.

Moment conjugat (o canònic) i moment mecànic

- Ja hem vist que una coordenada cíclica q^k(o siga $\frac{\delta L}{\delta q^k} = 0$) implica l'existència d'una constant del moviment: el moment conjugat $p_k = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^k} = const.$
- Exemple I: per a una partícula en un camp de forces conservatiu $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - V$ el moment conjugat $p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i} = m\dot{x}^i$ coincideix amb el moment mecànic.
- Exemple II: per a una partícula en un camp electromagnètic $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$ el moment conjugat $p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i} = m\dot{x}^i + \frac{q}{c}A^i$ no coincideix amb el moment mecànic.
- Les coordenades cícliques són un exemple de lagrangià amb una simetria $q^i \to q^i + a^i$ (aquesta transformació no canvia el lagrangià) i com a conseqüència tenim una constant del moviment (p_i).

- Una altra constant del moviment apareix si L no depèn explícitament del temps, o siga $L = L(q, \dot{q})$: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ hi ha una simetria $t \to t + const.$

- t no és una coordenada; és un paràmetre (mentre que, com veurem, en relativitat especial t és una coordenada com les x^i i és més oportú emprar un altre temps que es denomina temps propi).

- Podem construir la quantitat $H = p_i \dot{q}^i - L = \dot{q}^i \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} - L(q, \dot{q})$, que es diu hamiltonià, la derivada de la qual és $\frac{dH}{dt} = \ddot{q}^i \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} + \underbrace{\dot{q}^i \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}) - \frac{\delta L}{\delta q^i} \dot{q}^i}_{(\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}) - \frac{\delta L}{\delta q^i})\dot{q}^i = 0} - \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \ddot{q}^i = 0$. Per tant, H és una constant del moviment.

  Eq. E-L

- En general, per a un lagrangià no degenerat, hi ha $2n$ constants del moviment que corresponen a les $2n$ condicions inicials.

- Cada constant del moviment arbitrària ha de ser funció de les condicions inicials.

Teorema de Noether

- Una anàlisi més sistemàtica de la relació entre simetries i constants del moviment es fa emprant el teorema de Noether.

- Recordem el diferencial de l'acció funcional $S = \int_{t_0}^{t_1} dtL \Rightarrow \delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt\delta L,$ on $\delta L = \left(\frac{\delta L}{\delta q^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i})\right)\delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}\delta q^i\right)$ sense la restricció $\delta q^i(t_0) \stackrel{t_0}{=} \delta q^i(t_1) = 0$

- Considerem variacions que no són necessàriament zero en els extrems, en particular, variacions (ϵ paràmetre infinitesimal) del tipus $q^i \to q^i + \delta_\epsilon q^i = q^i + \epsilon f^i(q, \dot{q}, t)$

- Diem que el lagrangià és quasiinvariant respecte a la transformació si la variació és una derivada total d'una funció $\epsilon F(q, \dot{q}, t)$ respecte al temps, o siga $\delta_\epsilon L = \left(\frac{\delta L}{\delta q^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i})\right)\delta_\epsilon q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}\delta_\epsilon q^i\right) = \epsilon\frac{dF(q,\dot{q},t)}{dt}$

- Diem que la transformació és una simetria (infinitesimal) del lagrangià.

- Considerant ara només trajectòries físiques que satisfan les eq. E-L, tenim que $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}f^i - F$ és una constant del moviment.

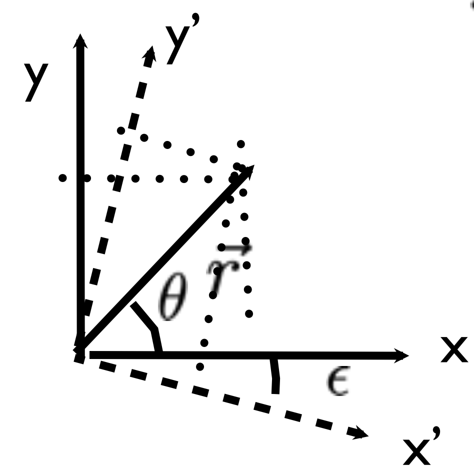
Translacions espacials

- El cas d'una coordenada cíclica q^j correspon al cas en què el lagrangià és invariant sota $q^j \to q^j + \epsilon$
- Utilitzant la notació del teorema de Noether, $\delta_\epsilon q^i = \epsilon \delta^{ij}$ i $F = 0$
- La quantitat conservada és el moment conjugat: $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \delta_\epsilon q^i = p_i \delta^{ij} = p_j$

Translacions temporals

- Per a una translació temporal $t \to t + \epsilon$: $\begin{cases} \delta_\epsilon q^i = q^i(t+\epsilon) - q^i(t) = \dot{q}^i \epsilon + O(\epsilon^2) \\ \delta_\epsilon \dot{q}^i = \dot{q}^i(t+\epsilon) - \dot{q}^i(t) = \ddot{q}^i \epsilon + O(\epsilon^2) \end{cases}$
- Suposem que el lagrangià no depèn explícitament del temps $L = L(q, \dot{q})$
- Això implica que $\delta_\epsilon L = \frac{\delta \delta}{\delta q^i} \dot{q}^i \epsilon + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \ddot{q}^i \epsilon = \epsilon \frac{dL}{dt} \Rightarrow F = L$
- La quantitat conservada és el hamiltonià $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \dot{q}^i - L = H$
- Per a una partícula en un camp de forces conservatiu $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$ resulta que $\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i} \dot{x}^i - L = m \dot{x}^i \dot{x}^i - \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i + V = \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i + V$ és l'energia total del sistema.

Rotacions



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$x' = r\cos(\theta+\epsilon)$$
$$y' = r\sin(\theta+\epsilon)$$

- Considerem primer rotacions respecte a l'eix z, que afecten només les coordenades x, y .
- La relació entre (x, y) i (x', y') és $\begin{cases} x' = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, \\ y' = y\cos\epsilon + x\sin\epsilon \end{cases}$
- Per a $\epsilon \ll 1$, $x' \sim x - y\epsilon, y' \sim y + x\epsilon$, o siga $\delta_\epsilon x = x' - x = -\epsilon y, \delta_\epsilon y = \epsilon x$
- Considerem un potencial invariant sota aquesta transformació $V = V(r, z)$
- La variació del lagrangià $L = T - V$ és $\delta_\epsilon L = m(\dot{x}\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\dot{y}) = 0 \Rightarrow F = 0$
- La quantitat conservada és $\dfrac{1}{\epsilon}\dfrac{\delta L}{\delta\dot{x}^i}\delta_\epsilon x^i = \dfrac{m}{\epsilon}\dot{x}^i\delta_\epsilon x^i = m\left(\dot{x}(-y) + \dot{y}x\right) = L^z$

component z del moment angular

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = m\hat{x}(y\dot{z} - \dot{y}z) - m\hat{y}(x\dot{z} - \dot{x}z) + m\hat{z}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

- Generalitzem al cas de rotacions al voltant dels tres eixos $x, y, z \equiv x^1, x^2, x^3$
- Una rotació infinitesimal respecte a un eix qualsevol $k = 1, 2, 3$ es pot escriure en la forma $\delta_\epsilon^k x^i = -\epsilon \sum_{j=1}^{3} \epsilon^{kij} x^j \equiv -\epsilon \epsilon^{kij} x^j$, en què ϵ^{kij} és un tensor antisimètric en els tres índexs amb $\epsilon^{123} = 1$ (símbol de Levi-Civita). Per a una rotació al voltant de $\vec{a} = a^k \hat{e}_k$: $\delta^{\vec{a}} x^i = a^k \delta_\epsilon^k x^i = -a^k \epsilon \epsilon^{kij} x^j = \epsilon \epsilon^{ikj} a^k x^j = \epsilon (\vec{a} \times \vec{r})^i$
- En el cas $k = 3$ (considerat abans): $\delta_\epsilon^3 x^1 = -\epsilon \epsilon^{312} x^2 = -\epsilon y, \delta_\epsilon^3 x^2 = -\epsilon \epsilon^{321} x^1 = \epsilon x, \delta_\epsilon^3 x^3 = -\epsilon \epsilon^{33j} x^j = 0$
- Considerem un potencial invariant sota les tres rotacions $V = V(r)$
- La variació del lagrangià és $\delta_\epsilon^k L = \delta_\epsilon^k (\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i) = m \dot{x}^i \delta_\epsilon^k \dot{x}^i = m \dot{x}^i (-\epsilon \epsilon^{kij} \dot{x}^j) = 0 \Rightarrow F = 0$
- La quantitat conservada és $\frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i} \delta_\epsilon^k x^i = -m \dot{x}^i \epsilon^{kij} x^j = m \epsilon^{kji} x^j \dot{x}^i = L^k$

Composició de rotacions

- Considerem dues rotacions infinitesimals, l'una amb paràmetre ϵ i l'altra amb paràmetre λ .

- Component les dues rotacions $\delta^l_\lambda(\delta^k_\epsilon x^i) = \delta^l_\lambda(-\epsilon\epsilon^{kij}x^j) = -\epsilon\epsilon^{kij}\delta^l_\lambda x^j = \epsilon\lambda\epsilon^{kij}\epsilon^{ljm}x^m = \epsilon\lambda(x^k\delta^{il} - x^i\delta^{kl})$, on hem fet servir la relació $\epsilon^{kij}\epsilon^{mlj} = \delta^{il}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{kl}$

- Component ara a la inversa $\delta^k_\epsilon(\delta^l_\lambda x^i) = \epsilon\lambda(x^l\delta^{ik} - x^i\delta^{kl})$

- Considerant ara la diferència entre les dues operacions (el *commutador*)

$$[\delta^l_\lambda\delta^k_\epsilon - \delta^k_\epsilon\delta^l_\lambda]x^i = \epsilon\lambda(x^k\delta^{il} - x^l\delta^{ik}) = -\epsilon^{lkm}\underbrace{\delta^m_{\lambda\epsilon}}_{\text{rotació infinitesimal amb paràmetre } \epsilon\lambda}x^i$$

Físicament, si tenim invariància rotacional respecte a dos eixos independents, també en tenim respecte a un tercer eix independent.

- Més en general, considerem dues transformacions $q^{i'}(q) = U_i(q) = q^i + \epsilon X^i(q) + \epsilon^2 S^i(q) + O(\epsilon^3)$ i $q^{i''}(q) = V_i(q) = q^i + \lambda Y^i(q) + \epsilon^2 R^i(q) + O(\epsilon^3)$.

- La composició $q^{i''}(q'(q))$ desenvolupada fins al segon ordre és $q^{i''}(q'(q)) = q^{i'} + \lambda Y^i(q') + \lambda^2 R^i(q') \sim q^i + \epsilon X^i + \lambda Y^i + \epsilon^2 S^i + \lambda\epsilon \frac{\delta Y^i}{\delta q^j} X^j + \lambda^2 R^i$, que no té un únic paràmetre infinitesimal.

- El mateix passa per a $q^{i'}(q''(q)) \sim q^i + \epsilon X^i + \lambda Y^i + \epsilon^2 S^i + \lambda\epsilon \frac{\delta X^i}{\delta q^j} Y^j + \lambda^2 R^i$.

- Però la combinació $q^{i''}(q'(q)) - q^{i'}(q''(q)) \sim \epsilon\lambda \left(\frac{\partial Y^i}{\partial q^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial q^j} Y^j \right)$ sí que és una transformació infinitesimal amb un únic paràmetre $\epsilon\lambda$.

- A partir de les dues transformacions infinitesimals $\delta^1_\epsilon q^i = \epsilon X^i(q), \delta^2_\lambda q^i = \lambda Y^i(q)$ definim l'operació parèntesi de Lie $[\delta^1_\epsilon, \delta^2_\lambda]q^i = \epsilon\lambda(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j}) \equiv \delta^3_{\epsilon\lambda}(q^i)$ que defineix una nova transformació infinitesimal.

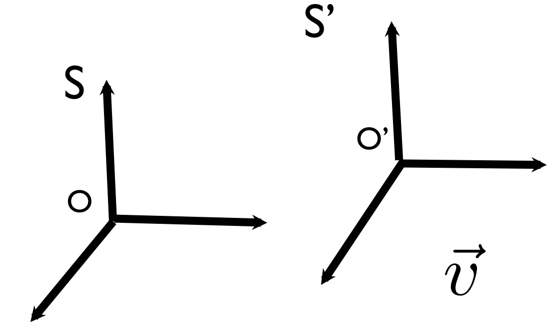
- El parèntesi de Lie és bilineal $[a\delta_1, \delta_2] = a[\delta_1, \delta_2]$, antisimètric $[\delta_1, \delta_2] = -[\delta_2, \delta_1]$ i satisfà la identitat de Jacobi $[[\delta_1, \delta_2], \delta_3] + [[\delta_3, \delta_1], \delta_2] + [[\delta_2, \delta_3], \delta_1] = 0$.

- Qualsevol operació que satisfaça aquestes propietats es denomina àlgebra de Lie.

- Per a cada conjunt (grup) de transformacions de simetria (grup de Lie) hi ha una àlgebra associada que conté molta informació sobre el grup.

- Hem vist l'àlgebra de Lie de les rotacions infinitesimals $[\delta^i_\epsilon, \delta^j_\lambda] = -\epsilon^{ijk}\delta^k_{\epsilon\lambda}$

Transformació de Galileu o *boost*



- A banda de les translacions espacials, temporals i les rotacions, hem vist també els *boosts*, que són transformacions en sistemes que es mouen amb velocitat constant $\vec{v}$: $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}t$ (en el temps $t=0$ O=O’) .

- Considerem una partícula lliure, $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}$, i un *boost* infinitesimal amb $\vec{v} = \epsilon\hat{u}$, $\hat{u}$ vector arbitrari unitari: $\delta_\epsilon\vec{r} = \epsilon t\hat{u}, \delta_\epsilon\dot{\vec{r}} = \epsilon\hat{u}$

- El lagrangià és quasiinvariant: $\delta_\epsilon L = m\dot{\vec{r}}\delta\dot{\vec{r}} = \epsilon\frac{d}{dt}(m\vec{r}\cdot\hat{u}) \Rightarrow F = m\vec{r}\cdot\hat{u}$

- La quantitat conservada és $\frac{1}{\epsilon}\frac{\delta L}{\delta\dot{x}^i} - F = m\dot{x}^i u^i t - m x^i u^i = m u^i(\dot{x}^i t - x^i)$

- Amb $\hat{u}$ arbitrari hi ha tres constants del moviment: $x^i - \dot{x}^i t = x_0^i, i = 1,2,3$

La partícula es mou amb velocitat constant.

Dilatacions

- Considerem transformacions d'escala (dilatacions): del temps $t' = e^{\lambda}t, \lambda > 0,$
  a nivell infinitesimal $\delta_\lambda t = t' - t = \lambda t + O(\lambda^2)$, i de l'espai $\vec{r}\,'(t') = e^{a\lambda}\vec{r}(e^{\lambda}t)$
  a nivell infinitesimal $\delta_\lambda \vec{r} = \vec{r}\,'(t') - \vec{r}(t) = \lambda(a\vec{r} + \dot{\vec{r}}t) + O(\lambda^2)$
  Canvi intrínsec de $\vec{r}$ a causa del canvi en el temps
- Per a una partícula lliure $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 \to \delta_\lambda L = m\dot{\vec{r}}\delta_\lambda\dot{\vec{r}} = \lambda m\dot{\vec{r}}(a\dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}t + \dot{\vec{r}}) = \lambda\frac{d}{dt}(\frac{m\dot{\vec{r}}^2 t}{2}) + \lambda m(a + \frac{1}{2})\dot{\vec{r}}^2$
- Quan $a = -\frac{1}{2}$ L és quasiinvariant amb $F = \frac{m\dot{\vec{r}}^2 t}{2} = L\,t$
- Pel teorema de Noether, la quantitat conservada és

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i}\delta_\lambda x^i - F = m\dot{x}^i(-\frac{x^i}{2} + \dot{x}^i t) - \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i t = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}^2 t - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{r})$$

El vector de Runge-Lenz

- Considerem una partícula sotmesa al potencial gravitacional (o electrostàtic) $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{r}, k > 0$
- L és invariant sota translacions temporals (és a dir $L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \Rightarrow$ l'energia total es conserva) i sota rotacions (el moment angular es conserva).
- Hi ha una altra simetria, pròpia del potencial gravitacional (i no de qualsevol potencial central), que ens dona noves quantitats conservades.
- Podem actuar de dues maneres:

$\vec{F}$ és central $(\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}, F(r) = -\frac{k}{r^2})$, $\vec{L}$ es conserva

- **1.** Considerem $\frac{d}{dt}(\vec{p}\times\vec{L}) = \dot{\vec{p}}\times\vec{L} = m\frac{F(r)}{r}[\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})]$
- En components $\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \epsilon^{ijk}x^j\epsilon^{klm}x^l\dot{x}^m = x^i(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{x}^i(\vec{r}^2)$
- Per tant, $\frac{d}{dt}(\vec{p}\times\vec{L}) = m\frac{F(r)}{r}\left(\vec{r}\,(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}\,r^2\right) = -mF(r)r^2\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}\right) = -mF(r)r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

  $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}^{\,2}) = r\dot{r}$
- En el nostre cas (potencial gravitacional) tenim que $\frac{d}{dt}(\vec{p}\times\vec{L}) = mk\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$
  i per tant, $\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$ es conserva.

Vector de Runge-Lenz

2. Aplicant el teorema de Noether, considerem la transformació següent:

$$\begin{cases} \delta^k_\epsilon x^i = \epsilon\left(x^i \dot{x}^k - 2\dot{x}^i x^k + (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\delta^{ik}\right) \\ \delta^k_\epsilon \dot{x}^i = \epsilon\left(x^i \ddot{x}^k - \dot{x}^i\dot{x}^k - 2\ddot{x}^i x^k + (\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})\delta^{ik} + (\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}})\delta^{ik}\right) \end{cases}$$

L és quasiinvariant:

$$\delta^k_\epsilon L = m\dot{x}^i\delta^k_\epsilon\dot{x}^i - \frac{k}{|\vec{r}|^3}x^i\delta^k_\epsilon x^i = \epsilon m\left((\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r})\ddot{x}^k - 2(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}})x^k + (\vec{r}\cdot\ddot{\vec{r}})\dot{x}^k\right)$$

$$-\frac{k\epsilon}{|\vec{r}|^3}\left((\vec{r}\cdot\vec{r})\dot{x}^k - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})x^k\right) = \epsilon\frac{d}{dt}\left(m((\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{x}^k - (\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})x^k) - \frac{k}{|\vec{r}|}x^k\right) \equiv \epsilon\frac{dF^k}{dt}$$

La quantitat conservada és

$$C^k = \frac{1}{\epsilon}\frac{\delta L}{\delta\dot{x}^i}\delta^k_\epsilon x^i - F^k = m\dot{x}^i\left(x^i\dot{x}^k - 2\dot{x}^i x^k + (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\delta^{ik}\right)$$

$$-m((\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{x}^k - (\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})x^k) + \frac{k}{|\vec{r}|}x^k$$

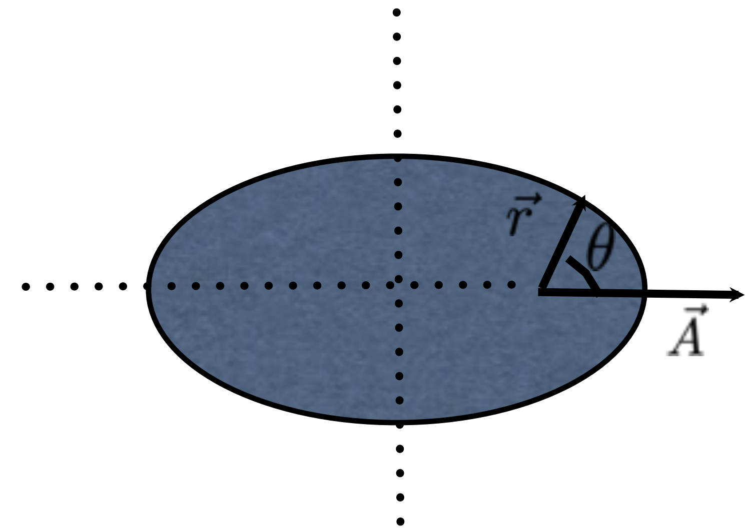
$$= m\left((\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{x}^k - (\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})x^k\right) + \frac{k}{|\vec{r}|}x^k$$

Considerant ara $A^k = (\vec{p}\times\vec{L})^k - \frac{mk}{|\vec{r}|}x^k$ on $(\vec{p}\times\vec{L})^k = m^2\epsilon^{kij}\dot{x}^i\epsilon^{jlm}x^l\dot{x}^m = m^2((\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}})x^k - (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r})\dot{x}^k)$
obtenim $A^k = -mC^k$

- $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - km\frac{\vec{r}}{r}$ és perpendicular a $\vec{L}$ $(\vec{A} \cdot \vec{L} = 0)$.
- Això implica que, donat $\vec{L}$, $\vec{A}$ està situat en el pla perpendicular i, per tant, ens dona dues quantitats conservades independents.
- A més a més, la norma de $\vec{A}$ és $\vec{A} \cdot \vec{A} = m^2\{m^2[(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) + (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})^2(\vec{r} \cdot \vec{r}) - 2(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})] + k^2 + \frac{2km}{|\vec{r}|}((\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 - \vec{r}^2\dot{\vec{r}}^2)\}$
  i com que $\vec{L}^2 = m^2\epsilon^{ijk}x^j\dot{x}^k\epsilon^{ilm}x^l\dot{x}^m = m^2(\vec{r}^2\dot{\vec{r}}^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2)$ podem reescriure

$$\vec{A}^2 = m^2\underbrace{\dot{\vec{r}}^2\vec{L}^2}_{L^2} - \frac{2km}{\underbrace{|\vec{r}|}_{r}}\vec{L}^2 + m^2k^2 = 2mL^2\underbrace{\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{k}{r}\right)}_{\text{energia total } E} + m^2k^2 = 2mEL^2 + m^2k^2$$

Com que $\vec{A}^2$ es pot expressar en termes de E i L, ens queda una única quantitat conservada independent.



- Vegem ara com podem resoldre el problema de Kepler usant el vector de Runge-Lenz.

- Ambdós vectors, $\vec{A}$ i $\vec{r}$ (vector posició del planeta), estan situats en el pla perpendicular a $\vec{L}$. Siga θ l'angle entre ells.

$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - km\frac{\vec{r}}{r}, \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{L}) = \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = L^2$

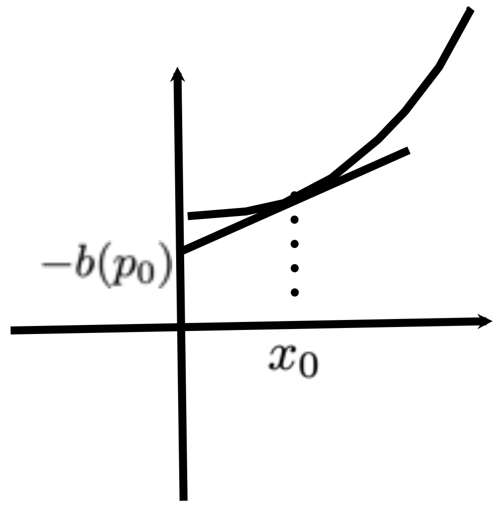
- Tenim $\vec{r} \cdot \vec{A} = rA\cos\theta = L^2 - mkr$, és a dir $\frac{1}{r} = \frac{mk}{L^2}(1 + e\cos\theta)$,on hem definit l'excentricitat $e = \frac{A}{mk}(< 1)$.

- En particular, per a $\theta = 0$ r és mínim (periheli) - $\vec{r}$ i $\vec{A}$ alineats - i $\theta = \pi$ ($\vec{r}$ i $\vec{A}$ antialineats) correspon a l'afeli (r màxim).

2. Formulació hamiltoniana

- Hem vist que en la formulació lagrangiana, un sistema físic està descrit per coordenades q^i i velocitats $\dot{q}^i$ generalitzades.
- La idea de Hamilton és descriure el sistema utilitzant coordenades q^i i els seus moments conjugats $p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}$.
- Per a passar d'un conjunt de variables a l'altre, matemàticament, es fa una operació que es denomina transformada de Legendre.

Exemple



- Siga $f(x)$ una funció amb derivada segona positiva $f''(x) > 0$.
- El pendent $p = f'(x)$ és diferent per a cada punt. Per tant, podem invertir aquesta relació i calcular x com a funció de $p : x = x(p)$.
- De la mateixa manera, podem calcular el valor de f en cada punt on la derivada és p . x i p són variables alternatives.
- La corba tangent en un punt x_0 és $y = p_0 x - b(p_0)$.
  Com que $f(x_0) = p_0 x_0 - b(p_0)$, $b(p_0) = p_0 x_0 - f(x_0)$.
- El mateix podem fer per a cada punt i, així, obtenim el conjunt de totes les rectes tangents $y = px - b(p) \Rightarrow b(p) = px - f(x)$.

Conèixer $b(p)$ o $f(x)$ és equivalent; $b(p)$ és la transformada de Legendre de $f(x)$.

Propietats de la transformada de Legendre

- És involutiva, és a dir aplicant-la dues vegades s'obté la funció original: considerem la transf. de Legendre de $b(p)$: $\tilde{b}(s) = ps - b(p)$, on $s = \dfrac{db}{dp}$; com que $p = \dfrac{df}{dx}$, tenim que $s = \dfrac{d}{dp}(px - f) = x + p\dfrac{dx}{dp} - \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dp} = x$ $\frac{df}{dx} = p$
i, per tant, $\tilde{b}(x) = px - b(p) = f(x)$.

- Els extrems de la funció f es poden calcular també en termes de la variable p i de la transformada de Legendre $b(p)$: siga $p_0 = \dfrac{df}{dx}|_{x_0}$ i escrivim $\dfrac{df}{dx}|_{x_0} = \dfrac{d(px-b)}{dx}|_{x_0} = \dfrac{d(px-b)}{dp}|_{p_0}\dfrac{dp}{dx}|_{x_0}$. Per tant, $\dfrac{df}{dx}|_{x_0} = 0$ és equivalent a $\dfrac{d(px-b)}{dp}|_{p_0} = 0$.

Transformades de Legendre en física

- En general, per a una funció de diverses variables, podem fer una transformada de Legendre en una, en alguna o en totes

entropia

volum

temperatura

pressió

- En termodinàmica, a partir de l'energia interna $U = U(S, V)$
[primer principi $dU = TdS - PdV$] podem definir:
- L'energia lliure de Helmholtz $F(T,V) = U - TS,\ T = \frac{\partial U}{\partial S}|_{V=const.}$ Transformada de Legendre en S
- L'entalpia $H(S,P) = U + PV,\ P = -\frac{\partial U}{\partial V}|_{S=const.}$ Transformada de Legendre en V
- L'energia lliure de Gibbs $G(T,P) = U + PV - TS$. Transformada de Legendre en S, V

Les parelles (S,T) i (P,V) són variables alternatives/conjugades.

Transició al hamiltonià

- El lagrangià d'un sistema físic amb n graus de llibertat depèn de $2n$ variables $q^i, \dot{q}^i, i = 1, .., n$. El temps t és un paràmetre.
- Considerem una transformada de Legendre en les $\dot{q}^i$ i definim les noves variables $p_i \equiv \frac{\delta L(q^i, \dot{q}^i)}{\delta \dot{q}^i}$, que són els moments conjugats.
- Aquest canvi de variable es pot fer sempre si el lagrangià no és singular. *
- La transf. de Legendre en les $\dot{q}^i$: $\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t) = H(q, p, t)$ es denomina hamiltonià.

* També es pot fer amb lagrangians singulars amb un procediment més complicat.

Eq. del moviment en les noves variables

- Calculem $\frac{\partial H}{\partial q^i}$ i $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ a partir de la definició de H i tenint en compte que $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ es calcula invertint $p_i = \frac{\delta L(q, \dot{q}, t)}{\delta \dot{q}^i}$.
- Obtenim $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}(p_j \dot{q}^j - L) = \dot{q}^i + p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i, \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}(p_j \dot{q}^j - L) = p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} \end{cases}$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = p_j$
- Usem ara les eq. E-L $\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}) = \dot{p}_i$ i arribem a $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \end{cases}$ que són les eq. de Hamilton.

- Són un sistema de $2n$ equacions diferencials de primer ordre i són equivalents a les eq. E-L, que són un sistema de n eq. dif. de segon ordre.

- Hem vist que les eq. E-L s'obtenen a partir del principi de Hamilton $\delta S = \delta(\int_{t_0}^{t_1} dt L(q,\dot{q},t)) = 0$
- Per la propietat dels extrems de la transformada de Legendre, podem expressar el principi de Hamilton en termes del hamiltonià

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_0}^{t_1} dt(p_i \dot{q}^i - H(q,p,t)) \right) = 0$$

principi de Hamilton modificat

Principi de Hamilton modificat

- Recordem que, en la seua versió original, estem calculant un diferencial en l'espai de corbes i que les variacions de $\delta q^i, \delta\dot{q}^i$ no són independents, puix que $\delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\delta q^i$.
- Considerant la variació $\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt[\delta p_i \dot{q}^i + p_i \delta\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i]$, integrant per parts ($p_i\delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}(p_i\delta q^i) - \dot{p}_i\delta q^i$) i la usual restricció $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt[\delta p_i \dot{q}^i - \dot{p}_i \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i] + \underbrace{[p_i\delta q^i]_{t_0}^{t_1}}_{=0} :$$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i, \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i$$

- En el principi de Hamilton modificat no necessitem que les variacions δp_i estiguen fixades en els extrems.

- Les eq. de Hamilton són $2n$ eq. dif. de primer ordre i necessitem $2n$ condicions inicials: $q^i(t_0), q^i(t_1), i = 1, ..., n$.

- Podem fixar $p_i(t_0), p_i(t_1)$ només si aquests valors són compatibles amb l'única solució de les eq. de Hamilton amb condicions als extrems $q^i(t_0), q^i(t_1), i = 1, ..., n$

- En la formulació hamiltoniana, coordenades i moments són quantitats del mateix tipus, independents entre si: són *coordenades* en un espai de dimensió $2n$ (l'espai de configuració Q té dimensió n) que es denomina espai de fases P .

- P és l'espai dels punts $(q^i, p_i) \in R^{2n}$ en què el nostre sistema pot estar; es pot definir també com l'espai de les possibles condicions inicials (o l'espai de les trajectòries físiques).

- En termes de P no hi ha diferència entre lligadures holònomes i no holònomes.

- A més a més, estan permesos canvis de coordenades en P que mesclen q i p, cosa que ens permet més llibertat a l'hora de resoldre el sistema.

Exemple: partícula en una força central des de la formulació hamiltoniana

- El lagrangià és $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(r)$
- Els moments conjugats són $p_r = \frac{\delta L}{\delta \dot{r}} = m\dot{r}, p_\theta = \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, p_\varphi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$
- φ és cíclica per a L , $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, i això implica que $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(p_i\dot{q}^i - L) = -\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$
  i, per tant, φ és cíclica també per a H.
  no depenen de φ
- El hamiltonià és $H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r)$
- Les eq. de Hamilton són

$$\left.\begin{aligned}
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right) - \frac{\partial V}{\partial r} \\
\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \\
\dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0
\end{aligned}\right\}$$

- p_φ és una constant del moviment, i ja hem vist que, com que el moviment és en el pla perpendicular a $\vec{L}$ (que es conserva), triant per exemple $\vec{L}$ paral·lel a $\hat{y}$, $\varphi = 0$ idènticament i $p_\varphi = 0$.
- Amb aquesta elecció, les eq. de Hamilton són $\left.\begin{array}{r} \dot{p}_r = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{p}_\theta = 0 \end{array}\right\}$ i es deriven a partir del hamiltonià $\hat{H} = H|_{p_\varphi=0} = \dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$
- Ara, θ és cíclica per a $\hat{H}$ i això implica que $p_\theta = const. = l$ $\leftarrow$ moment angular $(L_y = -x\dot{z} + z\dot{x})$
- Així, tenim una única equació no trivial $\dot{p}_r = \dfrac{l^2}{mr^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r}$, equivalent a la que s'obté en el formalisme lagrangià i que s'obté del hamiltonià.

$$\tilde{H} = \hat{H}|_{p_\theta=l} = \frac{p_r^2}{2m} + V_{eff}(r),\ \underbrace{V_{eff}(r)}_{\text{potencial efectiu}} = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

Hamiltonià per a una partícula en un camp electromagnètic

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{aligned}\right\}$$

- Ja hem vist que el lagrangià s'escriu en termes del potencial escalar ϕ i del vectorial $\vec{A}$: $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}$. El moment conjugat no coincideix amb el moment lineal $\vec{p} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}$.
- Invertint $\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$ obtenim

$$\left.\begin{aligned}H(\vec{r},\vec{p}) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} - L &= \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \\ &- \left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - q\phi + \frac{q}{mc}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{A}\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi\end{aligned}\right]$$

Parèntesi de Poisson

- És una operació que té un paper molt important en la mecànica hamiltoniana i que associa a parelles de funcions f i g en l'espai de fases la quantitat $\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$, que és encara una funció en l'espai de fases.

- Utilitat: per a escriure les eq. de Hamilton, calcular les constants del moviment i definir transf. apropiades en l'espai de fases (transf. canòniques).

- Propietats: bilineal $\{af+bh,g\} = a\{f,g\} + b\{h,g\}$, antisimètric $\{f,g\} = -\{g,f\}$, satisfà la identitat de Jacobi $\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\},\} = 0$ i la regla de Leibniz $\{f\cdot g,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$.

Hem comentat ja que una operació que satisfà les primeres tres propietats defineix una àlgebra de Lie; mentre que quan la quarta també val, parlem d'àlgebra de Poisson.

- Utilitzant-les, podem reescriure les eq. de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \{q^i, H\} = \displaystyle\sum_j \left(\frac{\partial q^i}{\partial q^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\overbrace{\frac{\partial q^i}{\partial p_j}}^{=0} \right) = \delta^{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} = \{p_i, H\} = \displaystyle\sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q^j}}_{=0}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial p_i}{\partial p_j} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q^j}\delta^{ij} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

- Una altra utilitat consisteix en la identificació de les constants del moviment. Per a una funció $f = f(q,p,t)$, podem calcular-ne la derivada respecte al temps $\frac{df}{dt} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$. Usem les eq. de Hamilton i obtenim $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$.

- Per tant, una funció f definida en l'espai de fases (que es denomina també observable clàssic) és una constant del moviment si $\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$.

- Com a aplicació, si el hamiltonià H no depèn explícitament del temps $\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0} + \{H, H\} = 0 \Rightarrow H$ és una constant del moviment.

- Podem demostrar que si f, g són constants del moviment, també $\{f,g\}$ ho és. Per a provar-ho emprem la identitat de Jacobi

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} + \{\{f,g\},H\} = \{\frac{df}{dt},g\} + \{f,\frac{dg}{dt}\} = 0$$

$$= \{\frac{\partial f}{\partial t},g\} + \{f,\frac{\partial g}{\partial t}\}$$

$$-\{\{H,f\},g\} - \{\{g,H\},f\}$$

$$\{\{f,H\},g\} + \{f,\{g,H\}\}$$

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad \frac{dg}{dt} = 0$$

Podem dir que l'espai de les constants del moviment és una subàlgebra de l'àlgebra de Poisson de tots els observables.

Constants del moviment i transformacions de simetria

- Veurem més endavant que una transformació (canònica) infinitesimal en l'espai de fases $\delta_\epsilon q^i = \epsilon f^i(q,p,t), \delta_\epsilon p_i = \epsilon g_i(q,p,t)$ s'escriu a partir d'una (única excepte per una constant) funció generatriu G :$f^i = \frac{\partial G}{\partial p_i}, g_i = -\frac{\partial G}{\partial q^i}$. És a dir, $\delta_\epsilon q^i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} = \epsilon\{q^i, G\}, \delta_\epsilon p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q^i} = \epsilon\{p_i, G\} \Rightarrow \delta_\epsilon h = \epsilon\{h, G\}$

  per a una qualsevol funció $h = h(q,p)$

- A més, si G és una constant del moviment, δ_ϵ és una transformació de simetria, en el sentit que ja sabem: $\delta_\epsilon(p_i \dot{q}^i - H(q,p)) = \epsilon \frac{d\Lambda}{dt}$

  quasi invariància (o invariància si $\Lambda = 0$)

- És una versió del teorema de Noether invers: cada constant del moviment genera una transf. de simetria infinitesimal.

- L'àlgebra de les constants del moviment (amb el parèntesi de Poisson) és igual a l'àlgebra de les simetries infinitesimals (commutador-parèntesi de Lie) que generen.

$\delta^1_\epsilon h = \{h, f_1\}$

$\delta^2_\lambda h = \{h, f_2\}$

- Si f_1 i f_2 són dos generadors de simetries infinitesimals $\delta^1_\epsilon, \delta^2_\lambda$, aleshores $\{f_1, f_2\}$ genera la transformació infinitesimal de simetria $[\delta^1_\epsilon, \delta^2_\lambda]$ (parèntesi de Lie o commutador). És a dir:

$$[\delta^1_\epsilon, \delta^2_\lambda]h = \epsilon\lambda\{\{f_1, f_2\}, h\}$$

Àlgebra de les constants del moviment de la partícula lliure

- El lagrangià és $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$, el moment conjugat $p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i} = m\dot{x}^i$ i el hamiltonià $H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{\vec{p}^{\,2}}{m} - \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$
- Les constants del moviment són (vegeu el teorema de Noether en la formulació lagrangiana) $H,\ \vec{p},\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},\ \vec{K} = \vec{x} - \frac{\vec{p}}{m}t$

translació temporal

translació espacial

rotacions

transf. de Galileu o *boosts*

- Calculem els parèntesis de Poisson

$$\epsilon^{icm}\epsilon^{kac} = -\delta^{ik}\delta^{ma} + \delta^{ia}\delta^{mk}, \epsilon^{cil}\epsilon^{kcb} = -\delta^{ik}\delta^{bl} + \delta^{ib}\delta^{kl}$$

$$\{L^i, L^k\} = \frac{\partial L^i}{\partial x^c}\frac{\partial L^k}{\partial p_c} - \frac{\partial L^i}{\partial p_c}\frac{\partial L^k}{\partial x^c} = \epsilon^{icm}p_m\epsilon^{kac}x^a - \epsilon^{ilc}x^l\epsilon^{kcb}p_b = -\delta^{ik}\vec{p}\cdot\vec{r} + x^i p_k + \delta^{ik}\vec{p}\cdot\vec{r} - p_i x^k$$

$$= \epsilon^{ikj}\epsilon^{jlm}x^l p_m = \epsilon^{ikj}L^j$$

$$L^i = \epsilon^{ilm}x^l p_m, L^k = \epsilon^{kab}x^a p_b$$

té la mateixa forma del parèntesi de Lie (commutador) de dues rotacions infinitesimals

$$= 0$$

$$\{L^i, p_k\} = \frac{\partial L^i}{\partial x^c}\frac{\partial p_k}{\partial p_c} - \frac{\partial L^i}{\partial p_c}\frac{\partial p_k}{\partial x^c} = \epsilon^{icm}p_m\delta^{kc} = \epsilon^{ikm}p_m$$

$$= 0$$

$$\{K^i, p_k\} = \{x^i - \frac{p_i}{m}t, p_k\} = \frac{\partial K^i}{\partial x^c}\frac{\partial p_k}{\partial p_c} - \frac{\partial K^i}{\partial p_c}\frac{\partial p_k}{\partial x^c} = \delta^{ic}\delta^{kc} = \delta^{ik}$$

b i *a* són indexs repetits. Usar l'un o l'altre és equivalent

$$\epsilon^{kab}x^a p_b$$

$$\{K^i, L^k\} = \frac{\partial K^i}{\partial x^c}\frac{\partial L^k}{\partial p_c} - \frac{\partial K^i}{\partial p_c}\frac{\partial L^k}{\partial x^c} = \delta^{ic}\epsilon^{kac}x^a + \delta^{ic}\frac{t}{m}\epsilon^{kcb}p_b = \epsilon^{kai}x^a + \frac{t}{m}\epsilon^{kia}p_a = \epsilon^{kai}(x^a - \frac{t}{m}p^a) = \epsilon^{kai}K^a$$

$$\{K^i, H\} = \frac{\partial K^i}{\partial x^c}\frac{\partial H}{\partial p_c} - \frac{\partial K^i}{\partial p_c}\frac{\partial H}{\partial x^c} = \delta^{ic}\frac{\partial H}{\partial p_c} + \frac{t}{m}\delta^{ic}\frac{\partial H}{\partial x^c} = \frac{p_i}{m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_c} = \frac{p_c}{m}, \frac{\partial H}{\partial x^c} = 0$$

- A més, podem comprovar, utilitzant els parèntesis de Poisson, que $\vec{L}, \vec{p}, \vec{K}$ són constants del moviment

$$\{L^k, H\} = \frac{\partial(\epsilon^{kab}x^a p_b)}{\partial x^c}\frac{\partial H}{\partial p_c} - \frac{\partial(\epsilon^{kab}x^a p_b)}{\partial p_c}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial x^c}}_{=0} = \epsilon^{kcb}p_b\frac{p_c}{m} = 0$$

$$\frac{dL^k}{dt} = \underbrace{\frac{\partial L^k}{\partial t}}_{=0} + \{L^k, H\} = 0,$$

$$\{p_k, H\} = \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial x^c}}_{=0}\frac{\partial H}{\partial p_c} - \frac{\partial p_k}{\partial p_c}\underbrace{\frac{\partial H}{\partial x^c}}_{=0} = 0$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial t}}_{=0} + \{p_k, H\} = 0$$

$$\frac{dK^i}{dt} = \frac{\partial K^i}{\partial t} + \{K^i, H\} = -\frac{p_i}{m} + \frac{p_i}{m} = 0$$

Àlgebra de les constants del moviment per al potencial gravitacional

- Per a una partícula en el potencial central $V = -\frac{k}{r}$, les quantitats conservades són $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{r}, L^k, k = 1, 2, 3, A^k = \epsilon^{klm} p^l L^m - km\frac{x^k}{r}, k = 1, 2, 3$

energia total moment angular vector de Runge-Lenz

Constants del moviment:

$$\frac{dL^k}{dt} = \overbrace{\frac{\partial L^k}{\partial t}}^{=0} + \overbrace{\{L^k, H\}}^{=0} = 0$$

$$\frac{dA^k}{dt} = \underbrace{\frac{\partial A^k}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\{A^k, H\}}_{=0} = 0$$

Parèntesi de Poisson diferent de zero:

$$\{L^k, L^r\} = \epsilon^{krm} L^m, \{L^k, A^r\} = \epsilon^{krm} A^m, \{A^r, A^m\} = -2mH\epsilon^{krm} L^m.$$

Transformacions canòniques

- Hem vist que un avantatge del formalisme lagrangià és que les equacions E-L tenen la mateixa forma quan es fa una transf. general de coordenades en l'espai de configuracions (per senzillesa, sense dependència temporal explícita) $q^i \to Q^i(q)$ i la inversa $Q^i \to q^i(Q)$, amb $\dot{q}^i \to \dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i(q)}{\partial q^j}\dot{q}^j$ i $\dot{Q}^i \to \dot{q}^i = \frac{\partial q^i(Q)}{\partial Q^j}\dot{Q}^j$.
- En les noves coordenades, el lagrangià és $L'(Q,\dot{Q},t) = L(q(Q),\dot{q}(Q,\dot{Q}),t)$ i per les eq. E-L $\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}\right) = \frac{\delta L}{\delta q^i} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L'}{\delta \dot{Q}^i}\right) = \frac{\delta L}{\delta Q^i}$
- Recordem que l'espai de configuració està parametritzat per les coordenades generalitzades, i que el canvi en les velocitats és induït pel de les coordenades.

- L'avantatge de la formulació hamiltoniana respecte a la lagrangiana és que no hi ha diferència conceptual entre coordenades i moments conjugats: tots dos són *coordenades* en l'espai de fases.

- Els p i q que utilitzem no són els més generals possibles; podem fer canvi de *coordenades*: transformacions del tipus $q^i, p_i \rightarrow F^\alpha(q,p), \alpha = 1, ..., 2n$ amb la condició que la matriu del canvi de coordenades $(\frac{\partial F^\alpha}{\partial q^i}, \frac{\partial F^\alpha}{\partial p_i})$ tinga determinant $\neq 0$.

- En general, en les noves coordenades, les eq. del moviment no han de tenir la forma de les eq. de Hamilton.

- Les eq. del moviment són $\frac{dF^\alpha}{dt} = \dot{F}^\alpha = \frac{\partial F}{\partial q^i}\overset{= \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\dot{q}^i} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\overset{= -\frac{\partial H}{\partial q^i}}{\dot{p}_i} = \{F^\alpha, H\}$
però no està garantit que les F^α es puguen dividir en coordenades i moments, ex. $F^i = Q^i, F^{i+n} = P^i, i = 1, .., n$ ni que existisca una funció $K(Q,P,t)$ fent el paper de nou hamiltonià, és a dir, $\dot{F}^\alpha = \{F^\alpha, H\} \Leftrightarrow \dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$.

Les transf. en l'espai de fases amb aquesta propietat
es denominen transformacions canòniques.

Exemple

- Les transf. generals de coordenades en l'espai de configuració $q^i \to Q^i(q), \dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j$ són un cas particular de transformacions canòniques.

- Prenem $L'(Q,\dot{Q},t)$ i considerem una transformació de Legendre en les $\dot{Q}^i$: $K(P,Q,t) = P_i\dot{Q}^i - L'(Q,P,t), \dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial P_i},\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q^i}$

- Comparem amb la transf. de Legendre de les $\dot{q}^i$: $H = p_i\dot{q}^i - L$

- Tenim que $P_i = \frac{\delta L'}{\delta \dot{Q}^i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{Q}^i} = p_j\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} = P_i(q,p)$ i $K = P_i\dot{Q}^i - L' = p_j\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\dot{Q}^i - L' = p_j\dot{q}^j - L = H.$

Conclusió: $K(Q(q),P(p,q),t) = H(q,p,t)$

Transf. canòniques i principi de Hamilton modificat

- Considerem una transf. canònica $(q^i, p_i) \to (Q^i, P_i)$.
  En els dos conjunts de coordenades, el principi de Hamilton modificat és $\delta S = \delta \int dt\left(p_i \dot{q}^i - H(q,p,t)\right) = 0, \delta S' = \delta \int dt \left(P_i \dot{Q}^i - K(P,Q,t)\right) = 0$
- L'equivalència dels dos conjunts de les eq. de Hamilton implica que la diferència $S - S'$ és com a màxim un terme de contorn: $S - S' = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dF}{dt}$,
  i el fet que això valga per a cada instant de temps implica que

$$p_i \dot{q}^i - P_i \dot{Q}^i - H(q,p,t) + K(Q,P,t) = \frac{dF}{dt}$$

F es denomina funció generatriu de la transf. canònica, i la podem veure com una funció d'una parella qualsevol de les coordenades q, p, Q, P.

Casos de particular interès

Perquè el canvi de coordenades siga invertible, la matriu $\begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q^j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$ ha de tenir el determinant diferent de zero.

Considerem casos on només un dels blocs principals és no trivial:

1

- $det\ \dfrac{\partial Q^i}{\partial q^j} \neq 0$: (Q^i, p_i) són bones coordenades en l'espai de fases perquè $\begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \\ 0 & \delta^{ij} \end{pmatrix}$ té determinant $\neq 0$, encara que la transf. no és canònica.
- Prenem $F = F(Q,p)$ i escrivim $\quad p_i\dot{q}^i = \dfrac{d}{dt}(p_i q^i) - \dot{p}_i q^i$

$$\Rightarrow -\dot{p}_i q^i - P_i\dot{Q}^i - H(q,p,t) + K(Q,P,t) = \frac{d}{dt}(F - p_i q^i) = \frac{\partial F}{\partial Q^i}\dot{Q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$F - p_i q^i = F' \equiv F$ redefinició irrellevant

i com que aquesta equació val per a totes les corbes, $(Q^i(t), p_i(t))$, $\dot{Q}^i(t), \dot{p}_i(t)$ són arbitraris i

$$\dot{p}_i\underbrace{(-q^i - \frac{\partial F}{\partial p_i})}_{=0} + \dot{Q}^i\underbrace{(-P_i - \frac{\partial F}{\partial Q^i})}_{=0} \underbrace{- H + K - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0} = 0$$

- Obtenim

$$\begin{cases} q^i &= -\dfrac{\partial F}{\partial p_i}, \\ P_i &= -\dfrac{\partial F}{\partial Q^i}, \\ K &= H + \dfrac{\partial F}{\partial t}. \end{cases}$$

Amb aquesta equació obtenim $Q^i = Q^i(q,p)$

Aquesta equació i la de dalt ens donen $P^i = P^i(q,p)$

Nou hamiltonià

Exemple:

$$F = Q^i p_i \Rightarrow \quad \begin{cases} Q^i &= -q^i \\ P_i &= -p_i \\ K &= H(-Q,-P) \end{cases}$$

2

- $det\frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \neq 0$: (q, Q) són bones coordenades en l'espai de fases perquè $\begin{pmatrix} \delta^{ij} & 0 \\ \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$ té determinant $\neq 0$.
- El procediment és similar al d'abans. Considerem $F = F(q, Q)$ i escrivim $p_i\dot{q}^i - P_i\dot{Q}^i - H + K = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial Q^i}\dot{Q}^i + \frac{\partial F}{\partial t}$. Per a qualsevol $\dot{q}^i, \dot{Q}^i$ això implica que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial q^i} & = p_i \\ \frac{\partial F}{\partial Q^i} & = -P_i \\ K & = H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Amb aquesta equació obtenim $Q = Q(q, p)$

$\longleftarrow$ Aquesta equació i la de dalt ens donen $P = P(q, p)$

$\longleftarrow$ Nou hamiltonià

Exemple:

$$F(q, Q) = q^i Q^i \Rightarrow \begin{cases} Q^i & = p_i, \\ q^i & = -P_i, \\ K & = H(-P, Q). \end{cases}$$

3.

- $det\frac{\partial P_i}{\partial q^j}\neq 0$: (P,p) són bones coordenades en l'espai de fases perquè $\begin{pmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial q^j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \\ 0 & \delta^{ij} \end{pmatrix}$ té determinant $\neq 0$
- Considerem $F=F(P,p)$, $p_i\dot{q}^i=\frac{d}{dt}(p_iq^i)-\dot{p}_iq^i, -P_i\dot{Q}^i=-\frac{d}{dt}(P_iQ^i)+\dot{P}_iQ^i, F\to F+P_iQ^i-p_iq^i=F'\equiv F$
  i escrivim $-\dot{p}_iq^i+\dot{P}_iQ^i-H+K=\frac{\partial F}{\partial P_i}\dot{P}_i+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial F}{\partial t}$
  Per a qualsevol $\dot{p}_i, \dot{P}_i$ això implica que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial p_i} & = -q^i \\ \frac{\partial F}{\partial P_i} & = Q^i \\ K & = H+\frac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Amb aquesta equació obtenim $P=P(q,p)$

$\longleftarrow$ Aquesta equació i la de dalt ens donen $Q=Q(q,p)$

$\longleftarrow$ Nou hamiltonià

Exemple:

$$F(p,P)=p_iP_i \Rightarrow \begin{cases} -q^i & = P_i \\ Q^i & = p_i \\ K & = H(-P,Q) \end{cases}$$

4

- $det\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \neq 0$: (q, P) són bones coordenades en l'espai de fases perquè $\begin{pmatrix} \delta^{ij} & 0 \\ \frac{\partial P_i}{\partial q^j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$ té determinant $\neq 0$.

- Considerem $F = F(q, P)$, $-P_i\dot{Q}^i = -\frac{d}{dt}(P_iQ^i) + \dot{P}_iQ^i, F \to F' = F + P_iQ^i \equiv F$
  i escrivim $p_i\dot{q}^i + \dot{P}_iQ^i - H + K = \frac{\partial F}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$
  Per a qualsevol $\dot{q}^i, \dot{P}_i$ això implica que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial q^i} & = p_i \\ \frac{\partial F}{\partial P_i} & = Q^i \\ K & = H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Amb aquesta equació obtenim $P = P(q, p)$

$\longleftarrow$ Aquesta equació i la de dalt ens donen $Q = Q(q, p)$

$\longleftarrow$ Nou hamiltonià

Exemple:

$$F(q, P) = q^iP_i \Rightarrow \begin{cases} p_i & = P_i \ , \\ Q^i & = q^i \ , \\ K(Q, P) & = H(Q, P) \ . \end{cases}$$

$\longleftarrow$ transformació unitat

Nota: no cal dir que els casos considerats no són els únics. El procediment és el mateix. És a dir, escrivim les eq. de les transformacions en termes d'una funció generatriu, funció de les variables apropiades.

Transformacions canòniques i parèntesi de Poisson

$f = f(q,p), g = g(q,p)$

- Considerem una transformació canònica $(q,p) \to (Q,P)$ i dues funcions f, g en l'espai de fases. Podem escriure f, g en termes de q, p o bé $f'(Q,P) = f(q(Q,P), p(Q,P)), g'(Q,P) = g(q(Q,P), p(Q,P))$ i els parèntesis de Poisson en termes de (q,p) i de (Q,P) .
- Demostrarem que $(\{f,g\}_{q,p})' = \{f', g'\}_{Q,P}$.

- Calculem, fent el canvi de variables,

$$= \frac{\partial g}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial P_c} + \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_c} \qquad\qquad = \frac{\partial g}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^c} + \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q^c}$$

$$\{f', g'\}_{Q,P} = \frac{\partial f'}{\partial Q^c}\frac{\partial g'}{\partial P_c} - \frac{\partial f'}{\partial P_c}\frac{\partial g'}{\partial Q^c} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial Q^c} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q^c} \qquad\qquad = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial P_c} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_c}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial q^j}\underbrace{\left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^c}\frac{\partial q^j}{\partial P_c} - \frac{\partial q^i}{\partial P_c}\frac{\partial q^j}{\partial Q^c}\right)}_{\{q^i, q^j\}_{Q,P}} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\{q^i, p_j\}_{Q,P} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^j}\{p_i, q^j\}_{Q,P} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\{p_i, p_j\}_{Q,P}$$

$\Rightarrow$ Per a provar la nostra identitat, és suficient que:

$$\{q^i, q^j\}_{Q,P} = 0 = \{p_i, p_j\}_{Q,P} \ ,$$
$$\{q^i, p_j\}_{Q,P} = \delta^{ij} = -\{p_i, q^j\}_{Q,P} \ .$$

aquesta propietat val en les coord. q, p
$(\{q^i, q^j\}_{q,p} = \{p_i, p_j\} = 0, \{q^i, p_j\}_{q,p} = \delta^{ij})$

Veurem que això ocorre només si la transf. és canònica

$$S - S' = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dF}{dt}$$

- Considerem una transf. canònica. Escrivim $p_i \dot{q}^i - P_i \dot{Q}^i - H + K = \dfrac{dF}{dt}$ i ho considerem tot com a funció de q, p: $p_j \dot{q}^j - P_i \left(\dfrac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \dfrac{\partial Q^i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) - H + K = \dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial q^j} \dot{q}^j + \dfrac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j$ per $\dot{q}^j, \dot{p}_j$ arbitrari.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & = \frac{\partial F}{\partial q^j} \\ -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} & = \frac{\partial F}{\partial p_j} \\ K & = H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$$

Si coneixem F, aquest és un sistema d'equacions per a Q i P. Però perquè F existisca, Q i P han de satisfer unes relacions d'integrabilitat que es calculen considerant les derivades encreuades corresponents:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^k} & = \frac{\partial^2 F}{\partial q^k \partial q^j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_k} & = \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial p_k} & = \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial q^j} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{\partial P_i}{\partial q^j} \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} + \frac{\partial P_i}{\partial q^k} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & = 0 \, , \\ \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} & = 0 \, , \\ -\frac{\partial P_i}{\partial q^j} \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} + \frac{\partial P_i}{\partial p^k} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & = \delta^{jk} \, . \end{cases}$$

Aquestes eq. no estan encara en la forma que desitgem.

- Considerem la matriu del canvi de coordenades siga J la matriu $2n \times 2n$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$.

A_{ik} $\quad D_{ik}$ $\quad C_{ik}$ $\quad B_{ik}$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} & \frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \\ \frac{\partial P_i}{\partial q^k} & \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \end{pmatrix}$$

- Podem escriure el sistema de les relacions d'integrabilitat de la manera següent:

$$M^T \underbrace{JM} = J.$$

Una matriu d'aquest tipus es denomina matriu simplèctica

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} & \frac{\partial P_i}{\partial q^j} \\ \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} & \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial q^k} & \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \\ -\frac{\partial Q^i}{\partial q^k} & -\frac{\partial Q^i}{\partial p_k} \end{pmatrix}$$

Multiplicant per la dreta amb $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} & \frac{\partial q^i}{\partial P_k} \\ \frac{\partial p_i}{\partial Q^k} & \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$

obtenim

$$M^T J = J M^{-1} \iff \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -C^T = C' & \leftrightarrow -\frac{\partial P_k}{\partial q^i} = \frac{\partial p_i}{\partial Q^k} \\ A^T = D' & \leftrightarrow \frac{\partial Q^k}{\partial q^i} = \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \\ D^T = A' & \leftrightarrow \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} \\ B^T = -B' & \leftrightarrow \frac{\partial Q^k}{\partial p_i} = -\frac{\partial q^i}{\partial P_k} \end{cases}$$

- Substituint l'últim resultat en les nostres condicions d'integrabilitat:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_j}{\partial Q^i}\dfrac{\partial p_k}{\partial P_i} - \dfrac{\partial p_k}{\partial Q^i}\dfrac{\partial p_j}{\partial P_i} & = \{p_j, p_k\}_{Q,P} = 0 \\ -\dfrac{\partial q^k}{\partial Q^i}\dfrac{\partial q_j}{\partial P_i} + \dfrac{\partial q^j}{\partial Q^i}\dfrac{\partial q^k}{\partial P_i} & = \{q_j, q_k\}_{Q,P} = 0 \\ -\dfrac{\partial p_j}{\partial Q^i}\dfrac{\partial q^k}{\partial P_i} + \dfrac{\partial q^k}{\partial Q^i}\dfrac{\partial p_j}{\partial P_i} & = \{q^k, p_j\}_{Q,P} = \delta^{kj} \end{cases}$$

Conclusió: una transformació és canònica
si i només si conserva els parèntesis de Poisson.

Transformacions canòniques infinitesimals

- Ara podem provar la fórmula que hem emprat ja abans. Considerem una transf. infinitesimal $Q^i = q^i + \epsilon f^i(q,p,t), P_i = p_i + \epsilon g_i(q,p,t)$
- Hem vist que perquè una transf. siga canònica, la seua aplicació tangent M (matriu de les derivades del canvi de coord.) és una matriu simplèctica: $M^T J = J M^{-1}$
- Per a una transformació infinitesimal $M = \mathbb{I} + \epsilon S$, on $S = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial q^k} & \frac{\partial f^i}{\partial p_k} \\ \frac{\partial g_i}{\partial q^k} & \frac{\partial g_i}{\partial p_k} \end{pmatrix}$,

$$(\mathbb{I} + \epsilon S^T)J = J(\mathbb{I} + \epsilon S)^{-1} \sim J(\mathbb{I} - \epsilon S) \leftrightarrow S^T J + JS = 0$$

- Obtenim

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^k}{\partial q^i} & \frac{\partial g_k}{\partial q^i} \\ \frac{\partial f^k}{\partial p_i} & \frac{\partial g_k}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial q^k} & \frac{\partial f^i}{\partial p_k} \\ \frac{\partial g_i}{\partial q^k} & \frac{\partial g_i}{\partial p_k} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\partial g_k}{\partial q^i} + \frac{\partial g_i}{\partial q^k} & = 0 \\ \frac{\partial f^k}{\partial q^i} + \frac{\partial g_i}{\partial p_k} & = 0 \\ -\frac{\partial g_k}{\partial p_i} - \frac{\partial f^i}{\partial q^k} & = 0 \\ \frac{\partial f^k}{\partial p_i} - \frac{\partial f^i}{\partial p_k} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_k & = -\frac{\partial G}{\partial q^k} \\ f^k & = \frac{\partial G}{\partial p_k} \end{cases}$$

G és la funció generatriu de la transformació canònica infinitesimal.

Per a una funció qualsevol f en l'espai de fases: $\delta f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i = \{f, G\}$

$= \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}$ $\quad = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q^i}$

Transformacions canòniques infinitesimals i teorema de Noether en la formulació hamiltoniana

- Considerem el principi de Hamilton modificat. Hem vist que una transf. canònica infinitesimal amb paràmetre ϵ és $\delta_\epsilon q^k = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_k}, \delta_\epsilon p_k = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q^k}$.
- Aquesta transformació és una simetria (infinitesimal) del sistema físic si l'acció funcional $S = \int_{t_0}^{t_1} dt(p_i \dot{q}^i - H(q,p))$ és quasiinvariant, és a dir,

$$\delta_\epsilon(p_i \dot{q}^i - H(q,p)) = \epsilon \frac{d\Lambda}{dt}$$

en què Λ és una funció en l'espai de fases i possiblement del temps.

- Calculem $\delta_\epsilon S$ sobre una corba arbitrària (no necessàriament una trajectòria física)

$$\delta_\epsilon(p_i\dot{q}^i - H(q,p,)) = \underset{-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q^i}}{\underset{\uparrow}{\delta_\epsilon p_i}}\dot{q}^i + \underset{\frac{d}{dt}(p_i\underset{\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}}{\underset{\uparrow}{\delta_\epsilon q^i}}) - \dot{p}_i\underset{\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}}{\underset{\uparrow}{\delta_\epsilon q^i}}}{\underset{\uparrow}{p_i\delta_\epsilon\dot{q}^i}} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\overset{\epsilon\frac{\partial G}{\partial p_i}}{\overset{\downarrow}{\delta_\epsilon q^i}} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\overset{-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q^i}}{\overset{\downarrow}{\delta_\epsilon p_i}} =$$

$$= -\epsilon\underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)}_{\frac{dG}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t}} + \epsilon\underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)}_{\{G,H\}} + \epsilon\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) =$$

$$= -\epsilon\left(\frac{dG}{dt} - \frac{\partial G}{\partial t}\right) + \epsilon\{G,H\} + \epsilon\frac{d}{dt}\left(p_i\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)$$

- Per tant, el sistema és quasiinvariant sota la transf. considerada si

$$\epsilon(\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\}) + \epsilon \frac{d}{dt}(-G + p_i \frac{\partial G}{\partial p_i}) = \epsilon \frac{d\Lambda}{dt}$$

Notem que en general $\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\}$ depèn de q, p, t i no de $\dot{q}, \dot{p}$.
Per tant, no pot ser una derivada total respecte al temps.

Per tant G és una transf. de simetria si $\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\} = 0$.

Substituint ara les eq. del moviment $\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\} = \frac{dG}{dt} = 0 \Rightarrow G$ constant del moviment.

Aquest és el teorema de Noether en la formulació hamiltoniana.
D'altra banda, si G és una constant del moviment, la transf. canònica generada per $\delta_\epsilon f = \epsilon\{f, G\}$ és una transformació de simetria.

Teorema de Noether invers

Teorema de Liouville

- Quan considerem un nombre molt gran de partícules, és pràcticament impossible saber les condicions inicials i les trajectòries de cadascuna.

- La mecànica estadística fa prediccions sobre el comportament mitjà de les propietats del sistema (p. e., energia) considerant conjunts de sistemes pròxims que ocupen un cert volum R de l'espai de fases.

- En la pràctica, donada una funció $F(q,p)$ en l'espai de fases, es tracta de calcular integrals del tipus $\int_R dq^1..dq^n dp_1..dp_n F(q,p)$.

- Fem ara una transf. canònica $(q^i, p_i) \to (Q^i, P_i)$. L'element de volum es transforma amb $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$, és a dir $dQ^1...dQ^n dP_1..dP_n = (detM) dq^1..dq^n dp_1..dp_n$.

- Sabem que M satisfà $M^T J M = J$ on $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$. Considerant el determinant i el fet que $detJ = 1$, tenim que $det(M)^2 = 1$.

Considerarem transf. amb $detM = 1$

- Considerem ara el volum d'una regió D_1 en l'espai de fases parametritzat per (q,p) ,$v_1 = \int_{D_1} dq^1..dq^n dp_1..dp_n$, i el volum v_2 de la corresponent regió D_2 en termes de (Q,P) :

$$v_2 = \int_{D_2} dQ^1..dQ^n dP_1..dP_n = \int_{D_1} (detM) dq^1..dq^n dp_1..dp_n = v_1!$$

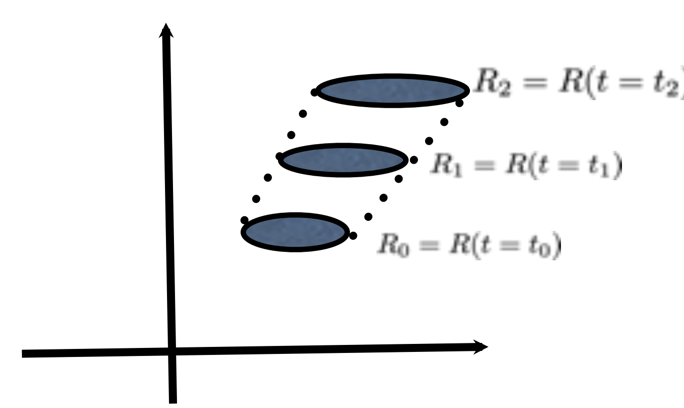
Conclusió: el volum d'una regió en l'espai de fases no canvia sota una transf. canònica (teorema de Liouville).

Aplicació: la transf. que genera l'evolució temporal, la podem veure com una transf. canònica sobre les trajectòries físiques. La transf. actua de la manera següent:

$$(q(t),p(t)) \to (Q(t),P(t)) = (q(t+\epsilon),p(t+\epsilon))$$

$$\sim q(t) + \dot{q}\epsilon \qquad \sim p(t) + \dot{p}\epsilon$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \{q,H\} \qquad -\frac{\partial H}{\partial q} = \{p,H\}$$



Pel teorema de Liouville, el volum d'una regió en l'espai de fases no canvia amb el temps.

Variables acció-angle (exemple)

- Com a exemple de funció generatriu d'una transf. canònica de tipus $2)$, o siga $F = F(q, Q)$, considerem el hamiltonià de l'oscil·lador harmònic $1D$: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Prenem $F = -\frac{m\omega q^2}{2}\tan Q \Rightarrow \begin{cases} p &= \frac{\partial F}{\partial q} = -m\omega q \tan Q \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\cos^2 Q} \end{cases}$ ens dona la relació $Q = Q(p, q)$ ens donen la relació $P = P(p, q)$
- Invertint $\begin{cases} p &= -\sqrt{2Pm\omega}\cos Q \tan Q = -\sqrt{2Pm\omega}\sin Q \\ q &= -\frac{p}{m\omega \tan Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\cos Q \end{cases}$ obtenim:

Q,P

$$\{q, p\}_{Q,P} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} =$$

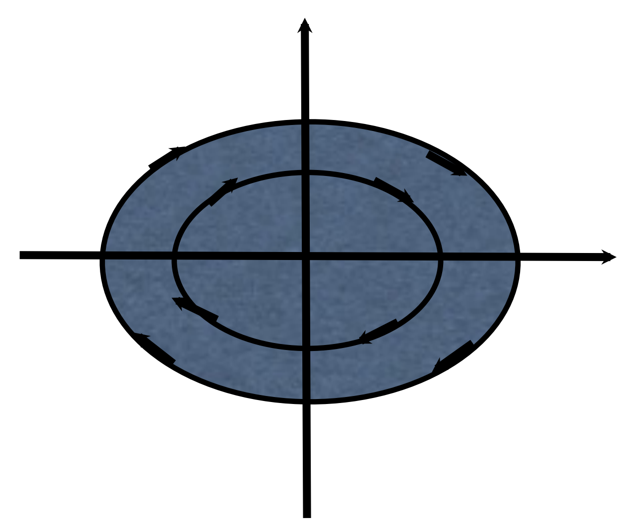
$$(-\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q)(-\frac{\sqrt{2m\omega}}{2\sqrt{P}}\sin Q) - (\sqrt{\frac{2}{m\omega}}\frac{1}{2\sqrt{P}}\cos Q)(-\sqrt{2Pm\omega}\cos Q) = 1$$

(a més de $\{q, q\}_{Q,P} = 0 = \{p, p\}_{Q,P}$)

Conservació dels parèntesis de Poisson

- En les variables originals $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$, les eq. de Hamilton són $\begin{cases} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \end{cases}$, que tenen com a solucions $\begin{cases} q &= A\cos\omega(t-t_0), \\ p &= -m\omega A \sin\omega(t-t_0). \end{cases}$
- Com que l'energia es conserva, les òrbites (trajectòries) en l'espai de fases son el·lipses.

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E = const.(= \frac{m\omega^2 A^2}{2}) \Leftrightarrow$$



- En les noves coordenades, el nou hamiltonià és molt més senzill $K = P\omega\sin^2 Q + P\omega\cos^2 Q = \omega P$, Q és cíclica. Les eq. de Hamilton i les solucions són $\begin{cases} \dot{P} & = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = const., \\ \dot{Q} & = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega(t - t_0). \end{cases}$ $\longleftarrow$ es denomina variable acció (també I) i es pot calcular $P = \frac{1}{2\pi}\oint pdq$

  $\uparrow$ àrea en l'espai de fases d'una òrbita

- Si es compara amb les solucions originals de q, p , $A = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}$.
- Com que el moviment en l'espai de fases és fitat, Q és una variable de tipus angle (es diu també φ). Les variables $(Q, P) \equiv (\varphi, I)$ es denominen variables d'acció angle.
- Per a un sistema amb n graus de llibertat que es pot escriure amb $K = K(I_1, .., I_n)$ diem que és un sistema integrable $(I_i = const., i = 1, .., n; \dot{Q}^i = \frac{\partial K}{\partial I_i} \equiv \omega_i = const. \rightarrow Q_i = \omega_i(t - t_0))$.

Teoria de Hamilton-Jacobi

- Un exemple de funció generatriu del tipus $4)$, és a dir $F = F(q, P, t)$, s'empra en la teoria de Hamilton-Jacobi.
- En aquest cas considerem també una dependència explícita en el temps.
- Les eq. de la transformació per a aquest tipus de F són $\begin{cases} p_i &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \\ Q^i &= \frac{\partial F}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{cases}$
- La idea és arribar a un conjunt de noves coordenades (Q, P) tal que $K = H + \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$ és a dir (que es denomina F, ϕ o S, funció principal de Hamilton).

$$H(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

eq. de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{Q}^i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q^i} = 0 \end{cases} \Rightarrow (Q^i, P_i)$$

són $(2n)$ constants del moviment

Equació de Hamilton-Jacobi dependent del temps, eq. a derivades parcials amb solució

$$S = S(q^1, .., q^n; \alpha_1, .., \alpha_n, t)$$

constants d'integració independents (poden ser els P_i)

- En aquest context, el problema de calcular les solucions de les eq. del moviment originals es traslllada a calcular la funció generatriu S especial.

- Quan l'energia total es conserva, podem separar la dependència en el temps escrivint

$$S = W(q, P) - Et \Rightarrow H(q^i, \frac{\partial W}{\partial q^i}) = E$$

funció característica de Hamilton

eq. de Hamilton - Jacobi
independent del temps

Exemple: per a una partícula lliure en $1D$:

$$H = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial x})^2 = E, \quad W = \sqrt{2mE}x,\ p = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2mE}$$

Últims comentaris

- Calculem la derivada respecte al temps de la funció principal de Hamilton $S = S(q^i, \alpha_i, t)$: $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = p_i\dot{q}^i - H \approx L$, on hem emprat l'eq. del moviment $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

- Per tant, la funció principal de Hamilton és igual a la acció $S = \int_{t_0}^{t} d\eta (p_i\dot{q}^i - H)$ calculada sobre les trajectòries físiques.

- En mecànica quàntica, un sistema físic està descrit per una funció d'ona ψ que satisfà una eq. dif. de segon ordre –dita de Schrödinger– que en el cas en què E es conserva i, per senzillesa, en $1D$ és del tipus $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$

- $\hbar$ (constant de Planck) és un paràmetre molt petit i desenvolupat en l'ordre dominant; la solució és $\psi \sim e^{\frac{i}{\hbar}S}$

funció principal de Hamilton

Per comparació:

velocitat del so: $c_s \sim 3 \times 10^2 m/s$

velocitat d'escapament de la Terra: $v_f \sim 3 \times 10^4 m/s$

3. Relativitat especial

- La mecànica clàssica tal com l'hem estudiada no val en condicions extremes: a gran velocitats (de l'ordre de la velocitat de la llum $v \lesssim c = 3 \times 10^5 km/s$) és modificada per la relativitat especial, i a petites escales és modificada per la mecànica quàntica.

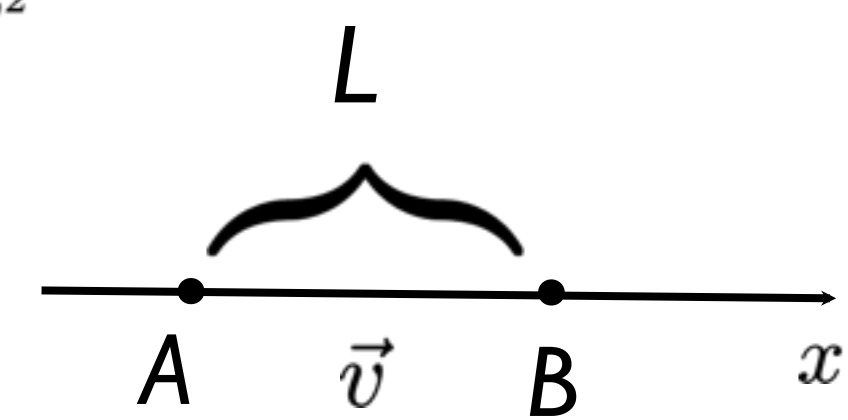
- Per a construir la teoria de la relativitat especial hem de tenir en compte dos fets que, aparentment, estan en contradicció: el principi de la relativitat (les lleis de la física són les mateixes en tots els sistemes de referència inercials) i el fet (experimental) que la velocitat de la llum en el buit és la mateixa en tots els sistemes inercials.

Historia de la velocitat de la llum

- En 1676, l'astrònom Rømer mostrà que la llum no es propaga instantàniament: el període de l'òrbita d'Io (lluna de Júpiter) canvia si la Terra es mou cap a Júpiter o se n'allunya.
- A mitjan 1800, Maxwell va descriure la llum com unes oscil·lacions del camp electromagnètic que es propaguen a través de l'èter (medi natural que semblava natural suposar que existia, així com el so i les onades del mar es propaguen a través de l'aire i de l'aigua).
- Els científics pensaven que la llum no es podia propagar en el buit i que l'èter era la substància que permetia el transport de les ones electromagnètiques. Es creia que les eq. de Maxwell eren vàlides només respecte a l'èter.

- En 1881, Michelson i Morley fan un experiment per a determinar el moviment relatiu de la Terra respecte a l'èter. Si la Terra es mou amb velocitat v al llarg de l'eix x, el temps T_x que necessita la llum per a anar i tornar d'un punt *A* a un punt *B* amb distància *L* és

$$T_x = T_A + T_T = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}$$



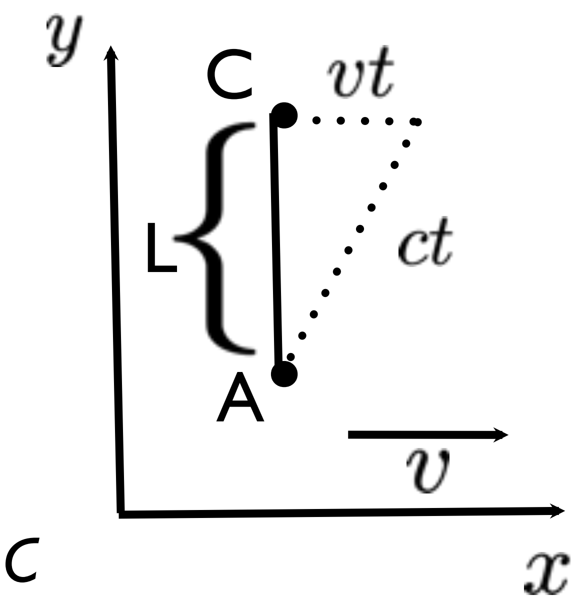
El raig de llum ix de *A* en el temps $t = 0$
i en el temps t_A arriba a *B*, el qual, respecte
a l'èter, ha recorregut una distància vt_A:

$$ct_A = L + vt_A \to t_A = \frac{L}{c-v}$$

La tornada és més ràpida perquè
A es mou cap al raig:

$$ct_T = L - vt_T \to t_T = \frac{L}{c+v}$$

- Considerem ara la propagació en direcció perpendicular: anada i tornada ara són temps iguals $T_y = 2t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

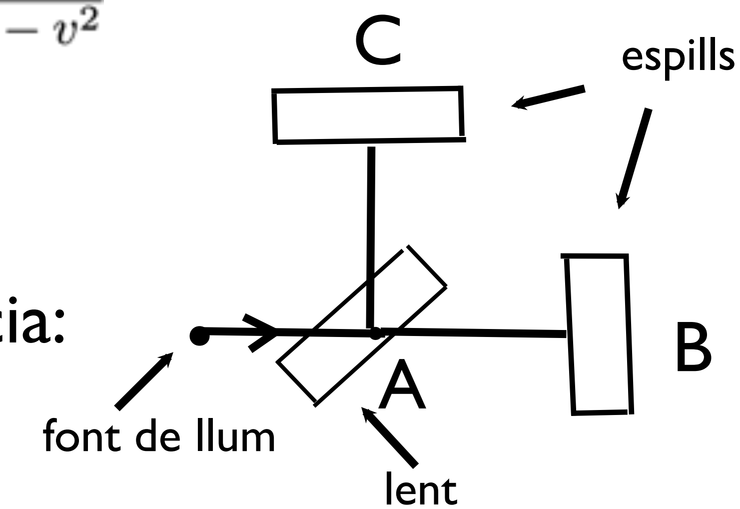


Cal tenir en compte que per al raig
que ix de *A* a $t = 0$, en el temps t el punt *C*
ha recorregut, en direcció x , la distància vt
i, pel teorema de Pitàgores,

$$= \frac{2L}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} \qquad = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \to t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Per tant, $T_x \neq T_y$

L'objectiu de Michelson i Morley era mesurar la diferència $T_x - T_y$ amb un experiment d'interferència:



La llum arriba a una lent A que la divideix en dos feixos perpendiculars, i dos espills (B i C), a una distància *L* de A, que la fan tornar a A: com que $T_x \neq T_y$, hi haurà interferència.

M. i M. no van trobar res!

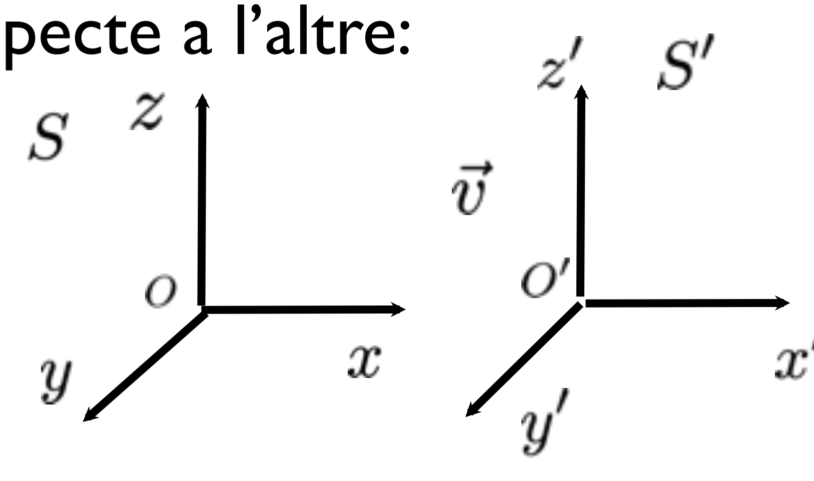
Final de 1800: Lorentz, que va partir de la hipòtesi que l'èter no es mou (sistema de referència absolut), es va acostar a la solució mostrant que les eq. de Maxwell tenen una simetria (que ara en diem transformacions de Lorentz) i que si per alguna raó (per a la la qual va intentar trobar una explicació mecànica) les distàncies en la direcció de la velocitat es contrauen en un factor $\sqrt{1 - \beta^2} \equiv \sqrt{1 - v^2/c^2}$, o siga $L_x = L_y\sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow T_x = T_y$.

Einstein 1905

- L'èter no existeix i les transformacions de Lorentz són una propietat de l'espaitemps ⟵ o siga, produeixen l'efecte de contració de les longituds
- La velocitat de la llum és la mateixa en tots els sistemes de referència inercials.

És fàcil veure que en mecànica clàssica això no pot ser. Considerem dos sistemes S i S' que es mouen amb velocitat v (per senzillesa al llarg de l'eix x) l'un respecte a l'altre:

En S, un raig de llum té trajectòria $c = \frac{x}{t}$.
Si imposem que el mateix val en S', $c = \frac{x'}{t'}$,
i usem les transf. de Galileu (*boosts*)



$$\begin{cases} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{cases} \Rightarrow \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t} = c - v \neq c\,!$$

⟵ temps absolut

Transformacions de Lorentz

- Cal modificar les transf. de Galileu. En general (considerem només les coordenades no trivials x, t) $\begin{cases} x' &= f(x,t) \\ t' &= g(x,t) \end{cases}$
- La primera llei, de la inèrcia, ens diu que, sense forces externes, una partícula es mou en línia recta en els dos sistemes, o siga la transf. ha de ser lineal $\begin{cases} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 t \\ t' &= \alpha_3 x + \alpha_4 t \end{cases}$
- L'origen O' de S' descriu, respecte a S, la línia recta $x = vt \leftrightarrow x' = 0,$ o siga $x' = \gamma(x - vt), \gamma = \gamma(v)$ i, des del punt de vista de S', O descriu $x' = -vt' \leftrightarrow x = 0$
Això implica $x = \gamma(x' + vt')$. Notem que $\gamma(v) = \gamma(-v)$

invariància per rotacions. γ pot dependre només en v^2

- Ara, imposem que valguen $x = ct$ i $x' = ct'$

$$\gamma(x' + vt') = ct \qquad \gamma(x - vt) = ct'$$

$$\Big\downarrow x' = ct' \qquad\qquad \Big\downarrow x = ct$$

$$\gamma(c + v)t' = ct \qquad \gamma(c - v)t = ct' \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sim_{v \ll c} 1 + O(\frac{v^2}{c^2})$$

en aquest règim valen les transf. de Galileu

quan $v > c$,γ és imaginari!

- Ens queda determinar $t' = \alpha_3 x + \alpha_4 t$. Havíem arribat a $x = \gamma(x' + vt')$ i per substitució $x' = \gamma(x - vt) \to x = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') \Leftrightarrow x\underbrace{(1 - \gamma^2)} + \gamma^2 vt = \gamma vt'$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{v^2}{c^2}\gamma^2$$

$$-\frac{v^2}{c^2}\gamma^2 x + \gamma^2 vt = \gamma vt' \Leftrightarrow t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

Hem obtingut les transformacions de Lorentz (o *boosts* de Lorentz):

$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases}$$

En relativitat, el temps és relatiu

Principi de relativitat

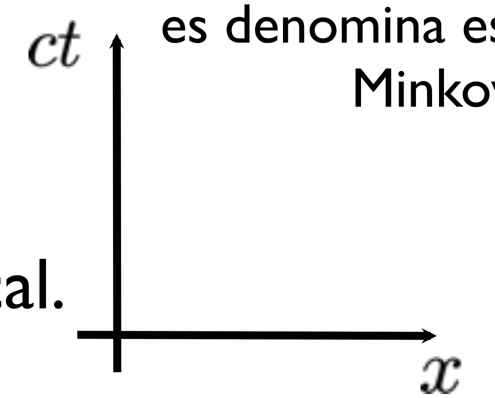
Diagrames espaitemporals

- Els diagrames espaitemporals són molt útils per a il·lustrar la física relativista.
- Notem que les transf. de Lorentz són més simètriques si les escrivim en termes de x i ct :

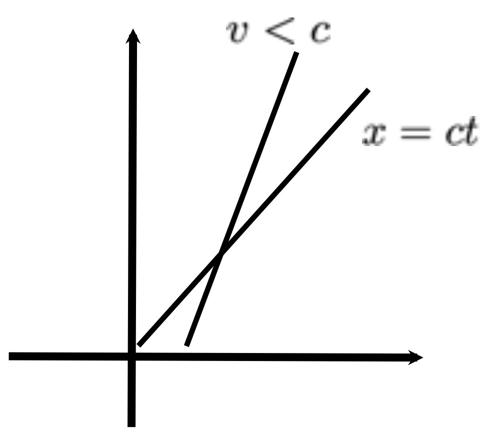
$$\begin{cases} x' &= \gamma(x - \frac{v}{c}(ct)) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \end{cases}$$

En el context relativista, espai i temps, interrelacionats, es denomina espaitemps de Minkowski

Representem x en l'eix horitzontal i ct en el vertical.

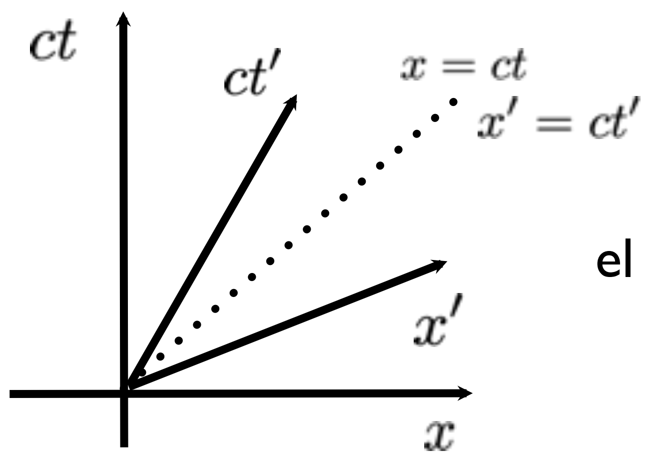


Un raig de llum segueix una recta a 45 graus i la trajectòria d'una partícula *P*, o línia de món (d'univers) és una corba amb pendent $> 45^o$ $(\frac{d(ct)}{dx} = c\frac{dt}{dx} = \frac{c}{v} > 1)$



- En l'espaitemps (ct, x) tracem els eixos corresponents al sistema S' . L' eix ct', és a dir, $x' = 0$, és la línia recta $x = \underbrace{\frac{v}{c}}_{<1}(ct)$ i l'eix x', és a dir, $t' = 0$, és $ct = \underbrace{\frac{v}{c}}_{<1}x$:

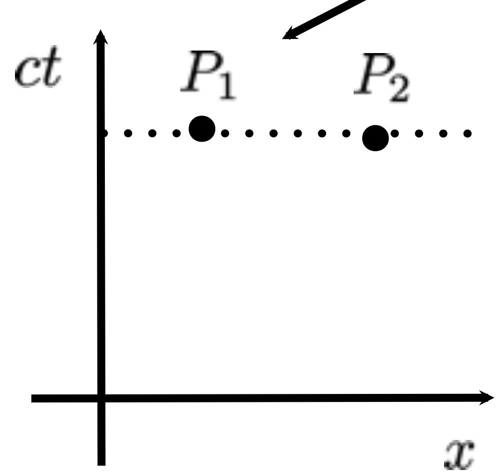
$$ct = \underbrace{\frac{c}{v}}_{>1}x$$

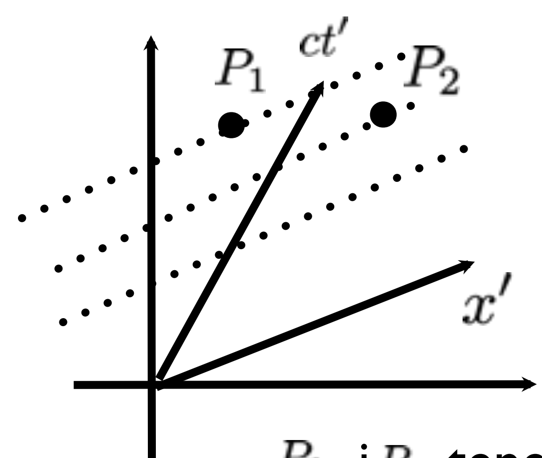


el fet que els dos eixos siguen simètrics respecte a la diagonal reflecteix la propietat que la velocitat de la llum és la mateixa en els dos sistemes.

Aquest diagrama és útil per a discutir el problema de la simultaneïtat:

En *S*, P_1 i P_2 són simultanis, és a dir, la separació entre ells és només espacial, ct és el mateix.





En *S'* les línies de simultaneïtat són

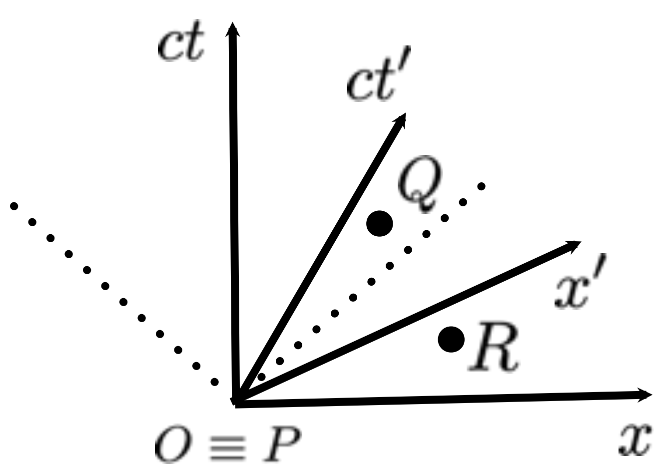
$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) = const. \rightarrow ct = \frac{v}{c}x + const.$$

paral·leles a l'eix x'

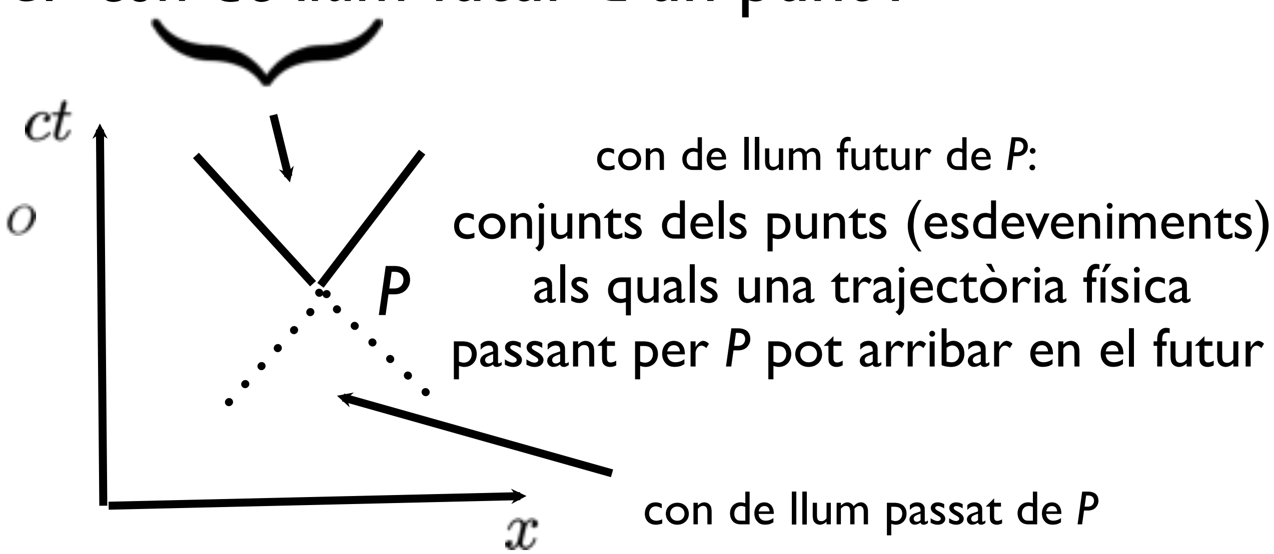
P_1 i P_2 tenen valors diferents de ct' : no són simultanis en *S'* !

Causalitat

- Dos observadors poden estar en desacord sobre l'ordenament temporal de dos esdeveniments fins a un cert punt.
- Els pendents de les línies de simultaneïtat en S' ($ct' = const.$), $\frac{v}{c}$, no poden ser més de 45 graus (és a dir, pendent < 1).
- Això significa que si considerem el *con de llum* futur d'un punt *P*



posem $P = O$ $\Longleftarrow$



per a qualsevol punt *R* fora del con de llum de *P* (i amb $t_R > t_P(=0)$) podem sempre construir un nou sistema (ct', x') tal que $t'_R < t'_P(=0)$, o siga l'ordinament temporal entre *P* i *R* no està fixat; això no és possible amb *Q*, que resta dins del con de llum futur de *P*: en qualsevol sistema (ct', x') $t'_Q > t'_P(=0)$

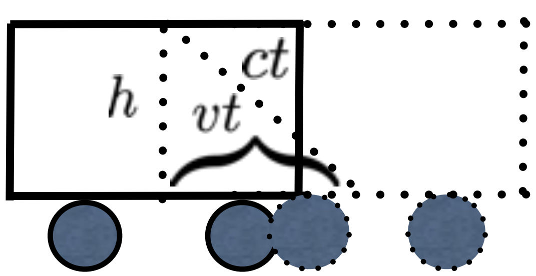
$\Rightarrow \{$ la causalitat és preservada: si un esdeveniment resta dins del con de llum futur d'un altre, el mateix passa en qualsevol altre sistema.

Dilatació temporal

- Considerem un rellotge estacionari en l'origen *O*' de *S*' que fa tic cada interval temporal *T*, és a dir, considerem els dos esdeveniments, en *S*', $(ct' = 0, x' = 0)$ i $(ct' = cT, x' = 0)$.

Transformant el sistema *S*: $\longrightarrow$ $(ct = 0, x = 0)$ $(ct = c\gamma T, x = \gamma v T)$ $\Rightarrow$ l'interval temporal en *S* és $\gamma T > T$: s'ha produït una dilatació temporal (en un sistema en moviment, el temps avança més lentament)

Una manera tradicional de veure l'efecte de dilatació temporal és considerar un tren en moviment amb velocitat v.



Considerem la llum d'una bombeta en el sostre del tren: si *h* és la distància entre el terra del vagó i el sostre, en el sistema en moviment del tren (*S*') la llum arriba al terra en el temps $t' = \frac{h}{c}$, mentre que respecte a l'andana (*S*) el punt d'arribada es desplaça, en el temps *t*, una distància vt i

$$(ct)^2 = h^2 + (vt)^2 \Rightarrow t = \frac{h}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma t'$$

- L’efecte de la dilatació temporal té un paper crucial per a partícules inestables amb un factor γ molt gran: viuen més en el sistema del laboratori (on *v* és gran) respecte al seu sistema *en repòs*.

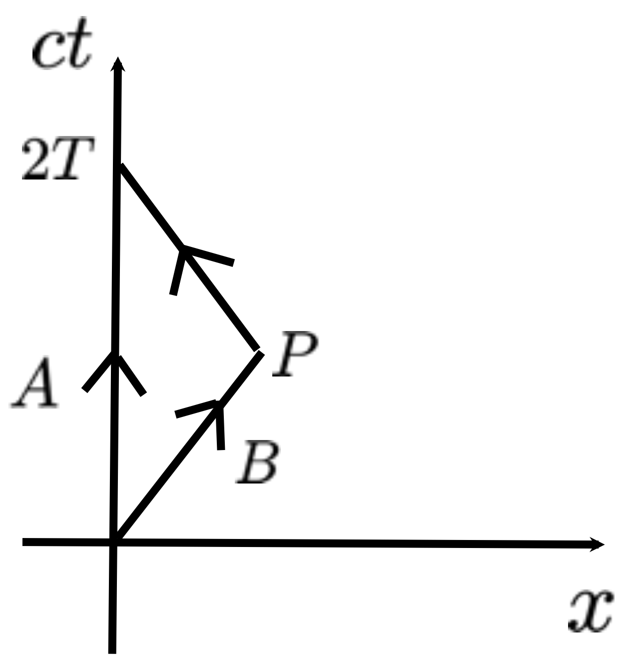
- Els muons (versió inestable dels electrons amb massa més gran) es desintegren en un electró i un parell de neutrins en un temps característic $t_0' = 2 \times 10^{-6}\ s$

- Els muons són creats quan els raigs còsmics arriben a l’atmosfera, i d’allà arriben a la Terra, on són detectats després d’un cert temps $t = 7 \times 10^{-6}\ s > t_0'$. Per què no han desaparegut durant el viatge, ja que $t > t_0'$?

- Això és possible perquè els muons viatgen a $v \sim 0.99c$ amb $\gamma \sim 10$. Per l’efecte de dilatació temporal, en el sistema del laboratori el temps de vida (mitjana) és $t_0 = \gamma t_0' = 2 \times 10^{-5}\ s > t$!

La paradoxa dels bessons

- Considerem dos bessons, *A* i *B*. *B* emprèn un viatge a gran velocitat (o siga, v amb un γ gran) d'anada (fins al punt de màxima distància *P*) i tornada. *S* és el sistema de referència de *A*.



dilatació temporal

temps de *A* — temps de *B*

Al final del viatge $\underbrace{t}_{\text{temps de } A} = 2T \underbrace{\Rightarrow}_{\text{dilatació temporal}} \underbrace{t'}_{\text{temps de } B} = \dfrac{2T}{\gamma} < 2T.$

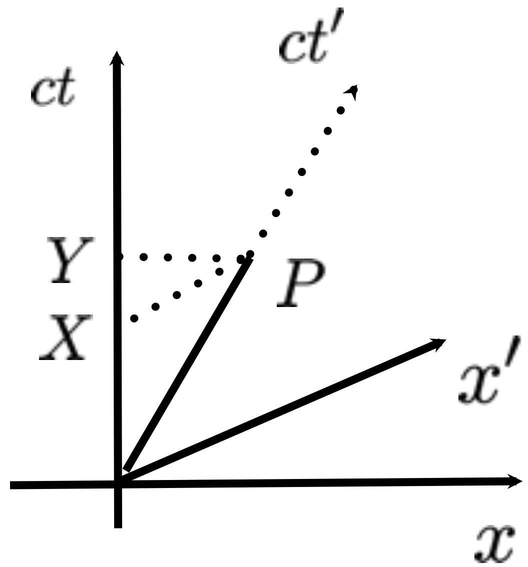
Conclusió: a la tornada, el bessó *B* és més jove que *A*

Però, a causa del principi de la relativitat, les mateixes conclusions haurien de valdre respecte al sistema *S*' de *B* amb conclusió oposada: el més jove hauria de ser *A*... com pot ser?

- En realitat, la situació no és simètrica i el principi de relativitat no s'hi pot aplicar. El sistema de referència de *B* no és inercial, perquè quan arriba a la distància màxima, punt *P*, ha de desaccelerar i accelerar en direcció oposada.

- Podem emprar sistemes (aproximadament) inercials diferents per al viatge d'anada (*S*') i de tornada (*S*''), imaginant que en aquests trams la velocitat és (més o menys) constant.

Viatge d'anada



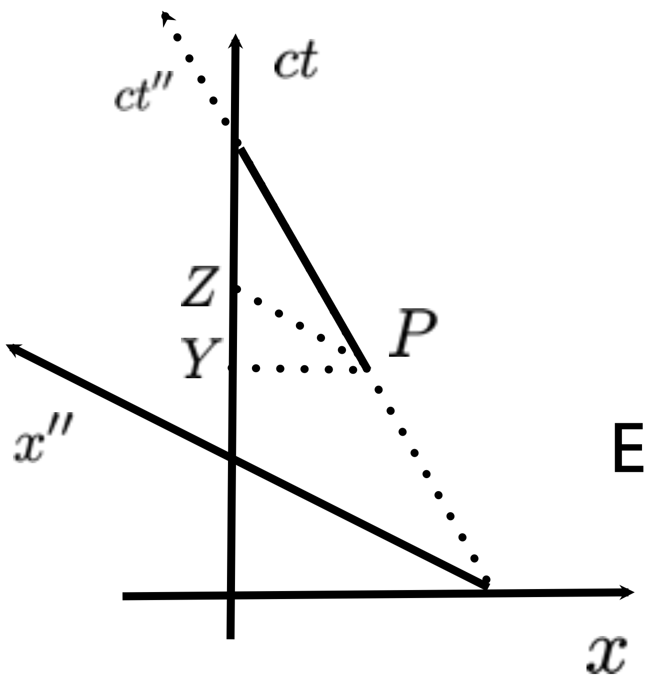
En el sistema *S*, el punt *P* de distància màxima correspon a (cT, vT) i en *S*', utilitzant les transf. de Lorentz, $(c(\gamma - \frac{v^2}{c^2}\gamma)T = c\frac{T}{\gamma} \equiv cT', 0)$

Considerem la línia de simultaneïtat de *A*.
Segons *A*, quan *B* arriba a *P*, *A* és en *Y*.
Considerem ara la línia de simultaneïtat de *B*.
Segons *B*, quan *B* arriba a *P*, *A* és en *X*.

X està caracteritzat per $x = 0$ i $ct' = cT' = c\frac{T}{\gamma} \quad \Rightarrow x' = -vT', ct = \frac{cT'}{\gamma} = \frac{cT}{\gamma^2}$

Fins ara la situació és simètrica:
per a *A*, *B* és més jove $(T_A = T, T_B = \frac{T}{\gamma} = T')$ i, per a *B*, el més jove és *A* $(T_B = T', T_A = \frac{T'}{\gamma} = \frac{T}{\gamma^2})$

Viatge de tornada:



Considerem ara un viatger *C* (sistema *S*'') que sincronitza el seu rellotge amb *B* en *P* ($t'' = T' = T/\gamma$) i que viatja cap a *A* (ara $v \to -v$, la velocitat és oposada respecte al viatge d'anada).

En el sistema *S*, *C* té una trajectòria $(x - vT) + v(t - T) = x + vt - 2vT = 0 \leftrightarrow x'' = 0$

La transformació entre *S* i *S*'' és:

$$\begin{cases} x'' & = \gamma((x - vT) + v(t - T)) \\ c(t'' - T') & = \gamma(c(t - T) + \frac{v}{c}(x - vT)) \end{cases}$$

Considerem la línia de simultaneïtat de *C*.

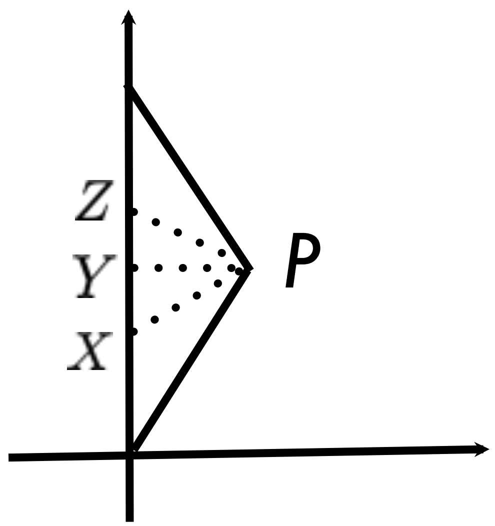
Segons *C*, quan ell és en *P*, *A* és en *Z*, caracteritzat per

$$x = 0, t'' = T' \Rightarrow t = T(1 + \frac{v^2}{c^2}) = 2T - (1 - \frac{v^2}{c^2})T = 2T - \frac{T}{\gamma^2}$$

mentre que a l'arribada: $x = 0, t = 2T \Rightarrow t'' = \underbrace{T'}_{\frac{T}{\gamma}} + \underbrace{\gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})}_{\frac{1}{\gamma}}T = 2\frac{T}{\gamma} = 2T'$

Tampoc ací hi ha problema amb el principi de relativitat: per a *A* el viatge de *C* dura $T' = \frac{T}{\gamma} < T$ (*C* és més jove que *A*), mentre que, segons *C*, el viatge per a *A* ha durat $\frac{T}{\gamma^2} = \frac{T'}{\gamma} < T'$

- Combinem ara les dues anàlisis i considerem el viatge d'anada i tornada de *B*.



Ara tenim els ingredients per a resoldre la paradoxa.

Quan *B* arriba a *P*, *B* pensa que *A* és en *X*, mentre que si decideix tornar, en el temps de la deceleració i acceleració *A* passa de *X* a *Z*,

$t = \frac{T}{\gamma^2}$ $\quad$ $t = 2T - \frac{T}{\gamma^2}$

és a dir, ha passat un temps $\Delta t = \underbrace{2(1 - \frac{1}{\gamma^2})T = 2T\frac{v^2}{c^2}}$

l'envelliment de *A* és real

El sistema de *B* és no inercial i no hi val el principi de relativitat. Això fa que per a *A* haja passat un temps $2T$ i per a *B* un temps $2T' = \frac{2T}{\gamma} < 2T$

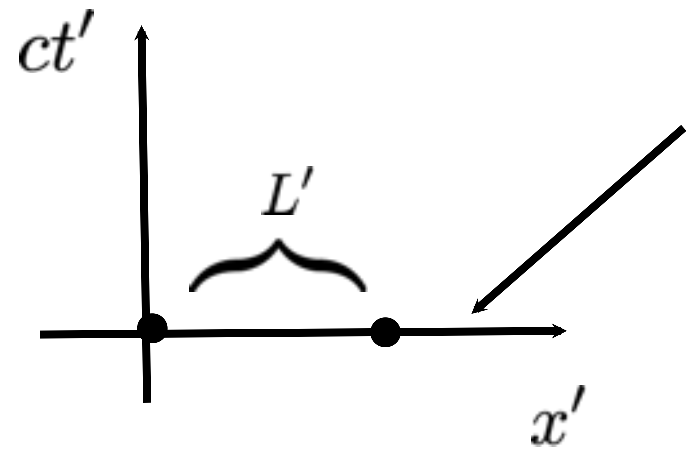
Veurem que aquest mateix resultat es pot obtenir emprant el principi d'equivalència: l'acceleració és equivalent a un camp gravitatori $(\vec{g} = -\vec{a})$ que canvia la marxa dels rellotges de *A* i *B*.

Contracció de les longituds

- Lorentz va afirmar que l'absència de qualsevol efecte d'interferència en l'experiment de Michelson i Morely implica que les longituds en la direcció del moviment *es contrauen*.

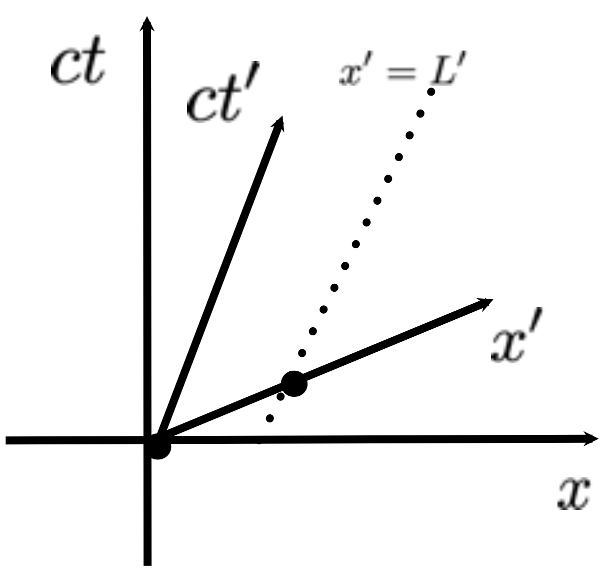
- Ara podem veure aquest efecte usant les transf. de Lorentz.

- Considerem un objecte estacionari en el sistema *S*' de longitud *L*': si posem un extrem de l'objecte en l'origen $O' \equiv (ct' = 0, x' = 0)$, l'altre extrem ha d'estar situat en $(ct' = 0, x' = L')$.



$t' = 0$ és una línia de simultaneïtat en *S*'

- Considerem ara el punt de vista de l'observador en *S*:



$$\begin{cases} x &= \gamma(x' + \frac{v}{c}(ct')) \\ ct &= \gamma(ct' + \frac{v}{c}x') \end{cases}$$

$(ct = 0, x = 0)$ $\left(ct = \dfrac{v}{c}\gamma L', x = \gamma L'\right)$

Els extrems $(ct' = 0, x' = 0)$ i $(ct' = 0, x' = L')$

no són simultanis en *S*.

Per a mesurar la longitud de l'objecte en *S*, necessitem conèixer la posició dels extrems al mateix temps *t*. El primer extrem és en $(x = 0, ct = 0)$, i, per al segon,

$$ct = 0, x' = L' \Rightarrow \begin{cases} ct' &= -\frac{v}{c}L', \\ x &= \gamma(1 - \frac{v^2}{c^2})L' = \frac{L'}{\gamma}. \end{cases}$$

Això implica que l'objecte, vist des de *S*, té una longitud $\dfrac{L'}{\gamma} < L'$

Contracció de les longituds

Addició de les velocitats

- Podem arribar ràpidament a la fórmula relativista de l'addició de les velocitats.
- Considerem una partícula que té, respecte al sistema *S*', velocitat (constant) u'. Com és la seua velocitat u respecte a *S* ?
- En el límit newtonià, segons les transf. de Galileu, $u = u' + v$.
- En *S*', la partícula segueix la trajectòria $x' = u't'$ i, utilitzant la transf. de Lorentz,

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad \rightarrow_{u'v/c^2 \ll 1} u' + v$$

Si la partícula té $u' = c$ (raig de llum)$\Rightarrow u = c$ $\longleftarrow$ principi de constància de la velocitat de la llum

En general, si $|u'| < c, |v| < c \Rightarrow |u| < c$: si una partícula té velocitat $< c$ en un sistema inercial, el mateix ha de valdre en tots els sistemes inercials.

L'interval invariant

- Hem vist que temps, simultaneïtat i longitud són relatius. Malgrat això, hi una quantitat (mesura) en la qual tots els observadors, situats en qualsevol sistema inercial, estan d'acord: és l'interval invariant.
- Considerem per exemple només una coordenada espacial *x*. En el sistema *S*, dos esdeveniments P_1, P_2, amb coordenades $P_1 \equiv (ct_1, x_1), P_2 \equiv (ct_2, x_2)$ estan separats $\Delta t = t_1 - t_2$ en el temps *t* i $\Delta x = x_1 - x_2$ en l'espai *x*.
- Definim l'interval invariant com la mesura següent de la distància entre els dos punts: $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$. En el sistema *S'*

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \gamma^2 (c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x)^2 - \gamma^2 (\Delta x - \frac{v}{c} c\Delta t)^2$$

$$= c^2 \Delta t^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})}_{=1} - \Delta x^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})}_{=1} = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta s^2 \ !$$

Incloent-hi també les altres coordenades espacials $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2$

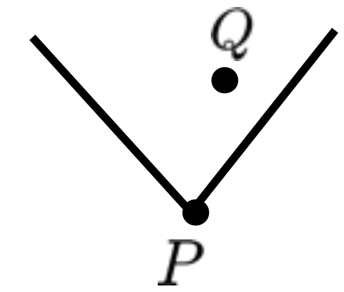
- L'espaitemps de la relativitat és, com a conjunt, $\mathbb{R}^4$. Amb la definició de mesura de distància Δs^2, es denomina espaitemps de Minkowski.

- La definició de Δs^2 permet observar que les distàncies es mesuren de forma diferent respecte a l'espai euclidià (on $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$). Com que en Minkowski Δs^2 conté també el temps, diem que tenim $\underbrace{3}_{\text{dimensions de l'espai}}+\underbrace{1}_{\text{dimensiò temporal}}$ dimensions.

- En relativitat general (teoria relativista de la gravitació) s'usa la versió infinitesimal de l'interval $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$.

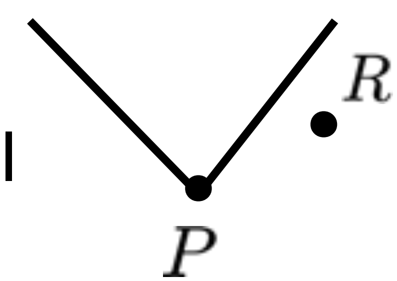
L’interval invariant, que no és definit positiu, permet caracteritzar la distància entres dos punts (esdeveniments) de manera independent de l'observador.

- Dos esdeveniments que satisfan $\Delta s^2 > 0$ són *time-like separated* (separació temporal). $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 > 0$ significa que la separació és més gran en el temps que en l’espai: l’un és dins del con de llum futur de l’altre.



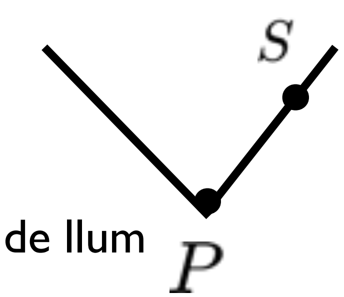
- Dos esdeveniments que satisfan $\Delta s^2 < 0$ es denominen *space-like separated* (separació espacial). Estan més separats en l’espai que en el temps.

És quan els dos observadors poden no estar d’acord sobre l’ordenament temporal entre els dos punts



- Dos esdeveniments en què $\Delta s^2 = 0$ són *light-like separated* (separació lumínica).

En l’espai euclidià $\Delta s^2 = 0$ significa que els dos punts coincideixen; ací no: en Minkowski, dos punts amb $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 = 0$ estan conectats per a un raig de llum



L’interval invariant és la mesura de distàncies invariant sota transf. de Lorentz: la podem també definir com la propietat de l’espaitemps que defineix la transf. de Lorentz.

Espaitemps de Minkowski

- Considerem l'origen de *S* i indiquem les coordenades d'un esdeveniment *P* amb el quadrivector $X^\mu = (ct, x, y, z), \mu = 0, \overbrace{1, 2, 3}^{\text{espai}}$

  temps

- L'interval invariant entre l'origen i el punt *P*, l'escrivim com un producte intern (escalar) $X \cdot X \equiv X^T \eta X = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu$

  notació matricial, s'hi empra sempre la convenció: indexs repetits, indexs sumats

La matriu $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es denomina mètrica de Minkowski.

El producte $X \cdot X = c^2 t^2 - \vec{x}^2$ escalar és la distància entre l'origen i el punt *P*.

Si:

$X \cdot X > 0 \Rightarrow X^\mu$ és un vector temporal (*time-like*) És dins del con de llum de l'origen

$X \cdot X < 0 \Rightarrow X^\mu$ és un vector espacial (*space-like*) És fora del con de llum de l'origen

$X \cdot X = 0 \Rightarrow X^\mu$ és un vector lumínic (*light-like)* És sobre el con de llum de l'origen

- Les transf. de Lorentz es poden pensar com unes matrius 4x4 que transformen les coordenades del sistema *S* en les del sistema *S'*: $X' = \Lambda X \leftrightarrow X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}$.

- Les transf. de Lorentz deixen el producte intern invariant: $\underbrace{X' \cdot X'}_{= X'^T \eta X' = X^T \Lambda^T \eta \Lambda X} = \underbrace{X \cdot X}_{X^T \eta X} \Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$

La matriu 4×4 Λ té 16 components independents. La relació $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, simètrica, ens dona 10 condicions. En total, Λ té 16-10 = 6 components independents: 3 són rotacions i 3 són *boosts*.

Les rotacions són matrius del tipus $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ (matrius 3x3): aquesta transformació modifica només les coordenades espacials. La condició $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow R^T R = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Els *boosts* de Lorentz, per exemple al llarg de l'eix *x*, són $\longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i el mateix podem fer respecte dels eixos *y* i *z*.

Hi ha 3 rotacions independents i 3 *boosts* independents: 3+3= 6. Totes aquestes transf. formen el grup de Lorentz, que es denomina $O(1,3)$. Del determinant de $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Rightarrow (det\Lambda)^2 = 1$. Les transf. amb $det\Lambda = 1$ $(\equiv SO(1,3))$ que preserven la direcció del temps es denominen ortocrones.

- Podem obtenir la llei d'addició de les velocitats en el llenguatge matricial.
- Considerem la part 2x2 del *boost* de Lorentz en l'eix *x*: $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}$
  Component dues *boosts*

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\frac{v_1}{c}\gamma_1 \\ -\frac{v_1}{c}\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\frac{v_2}{c}\gamma_2 \\ -\frac{v_2}{c}\gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2(1+\frac{v_1 v_2}{c^2}) & -(\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c})\gamma_1\gamma_2 \\ -(\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c})\gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_2(1+\frac{v_1 v_2}{c^2}) \end{pmatrix}$$

Per a verificar la llei d'addició de les velocitats, és a dir,

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma(v') & -\frac{v'}{c}\gamma(v') \\ -\frac{v'}{c}\gamma(v') & \gamma(v') \end{pmatrix}, v' = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

hem de verificar que:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}(1+\frac{v_1 v_2}{c^2}) & = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}(\frac{v_1}{c}+\frac{v_2}{c}) & = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\frac{v'}{c} \end{cases}$$

La notació que emprem per als *boosts* és bastant complicada. Vegem-ne una de millor.

Comencem amb les rotacions. La matriu 2x2 que descriu la rotació d'angle θ en un pla és $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ i component dues rotacions

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = R(\theta_1+\theta_2)$$

Aquesta relació mostra per què hem parametritzat les rotacions amb un angle.

Per als *boosts* tenim $\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\right)$, que és més complicada.

En comptes de v, definim la rapidesa φ com a $\gamma = \cosh\varphi \Rightarrow \gamma\frac{v}{c} = \sinh\varphi$

Resulta que $\Lambda(\varphi_1)\Lambda(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi_1 & -\sinh\varphi_1 \\ -\sinh\varphi_1 & \cosh\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\varphi_2 & -\sinh\varphi_2 \\ -\sinh\varphi_2 & \cosh\varphi_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cosh\varphi_1\cosh\varphi_2 + \sinh\varphi_1\sinh\varphi_2 & -\cosh\varphi_1\sinh\varphi_2 - \sinh\varphi_1\cosh\varphi_2 \\ -\cosh\varphi_1\sinh\varphi_2 - \sinh\varphi_1\cosh\varphi_2 & \sinh\varphi_1\sinh\varphi_2 + \cosh\varphi_1\cosh\varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_1+\varphi_2) & -\sinh(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sinh(\varphi_1+\varphi_2) & \cosh(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix} = \Lambda(\varphi_1+\varphi_2)$$

Aquesta relació mostra millor la relació entre rotacions i *boosts*.

Mecànica relativista

- Passem ara a considerar el moviment de les partícules, per a generalitzar les lleis estudiades en la mecànica newtoniana al cas relativista, i que valguen en tots els sistemes inercials.
- Comencem definint els ingredients que necessitem per a definir aquestes lleis: velocitat, moment i acceleració.
- En la teoria de Newton utilitzem, per posició i velocitat, $\vec{x}(t), \vec{u} = \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$. Podem fer el mateix en relativitat, però hi ha una manera millor de parametritzar la posició.

Trajectòria i temps propi

- Recordem que, en la teoria de Newton, el temps és absolut, mentre que en la teoria de la relativitat el temps depèn de l'observador.
- Considerem una partícula en repòs en l'origen del sistema *S'* $(\vec{x}' = 0) \Rightarrow$ En aquest sistema, l'interval invariant entre dos punts en la línia de món de la partícula és $\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2$, és a dir, és proporcional al quadrat de $\Delta t'$. Com que Δs^2 és invariant sota transf. de Lorentz, aquesta igualtat val sempre.
- Definim, per tant, el temps propi η de la partícula com el temps en el sistema en què la partícula està en repòs, de manera que en qualsevol sistema: $\Delta\eta = \frac{\Delta s}{c}$. $= \sqrt{\Delta s^2}$
- El temps propi ens permet parametritzar la trajectòria d'una partícula de manera independent dels observadors.

- Considerem una trajectòria genèrica, no necessàriament en línia recta. Des de *S*, parametritzem la seua línia d'univers (trajectòria) com a $\vec{x}(\eta), t(\eta)$. En el llenguatge dels quadrivectors, escrivim $X^\mu(\eta) = (ct(\eta), \vec{x}(\eta))$
- Per a calcular el temps propi de la partícula al llarg d'una trajectòria genèrica, considerem un segment petit (infinitesimal).

$$d\eta = \sqrt{dt^2 - \frac{d\vec{x}^2}{c^2}}$$
$$= dt\sqrt{1 - (\frac{d\vec{x}}{dt})^2 \frac{1}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \frac{dt}{d\eta} = \gamma(u)$$

i integrem $T = \int d\eta = \int \frac{dt}{\gamma(u(t))}$

Definim ara la quadrivelocitat $U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\eta} = (c\frac{dt}{d\eta}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}) = \gamma(c, \vec{u})$

La comoditat d'aquesta definició és que, com que η és invariant de Lorentz, les quadrivelocitats U^μ, U'^μ en dos sistemes (inercials) qualssevol estan relacionades de la mateixa manera que X^μ, X'^μ, és a dir

$$U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu \leftrightarrow U' = \Lambda U$$

Una definició $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ seria més complicada sota Lorentz, encara que la diferència és *només* un factor γ

- De la mateixa manera que per a X , $U \cdot U$ és invariant: $U \cdot U = U' \cdot U'$.
- Considerem una partícula en repòs en el sistema *S*': $X'^{\mu} = (c\eta, \vec{0})$
  El seu quadrivector velocitat (quadrivelocitat) és $U'^{\mu} = (c, \vec{0}) \Rightarrow U' \cdot U' = c^2$
  Aquest resultat val en qualsevol sistema: $U^{\mu} = \gamma(c, \vec{u}), U \cdot U = \gamma^2(c^2 - u^2) = c^2!$
- En mecànica newtoniana $\vec{u} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ té tres components independents. U^{μ} aparentment en té 4, però l'invariant $U \cdot U = c^2$ redueix també en aquest cas el nombre de components independents a 3.

- Considerem un cas de transf. de Lorentz un poc més complicat, on $\vec{u}, \vec{v}$ no estan ambdues en la mateixa direcció.

- Una partícula es mou en el pla (*x*,*y*) i siga α l'angle entre $\vec{u}$ i l'eix *x*. En el llenguatge tridimensional $\vec{u} = (u\cos\alpha, u\sin\alpha, 0)$ i en el quadridimensional $U^\mu = \gamma_u(c, u\cos\alpha, u\sin\alpha, 0)$.

- Considerem ara una transf. de Lorentz a un sistema *S*' que es mou amb velocitat v en l'eix *x* respecte a *S* i caracteritzat per: $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{v}{c}\gamma_v & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad U'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu U^\nu = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{v}{c}\gamma_v & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma_u \begin{pmatrix} c \\ u\cos\alpha \\ u\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_u \begin{pmatrix} c\gamma_v(1 - \frac{vu\cos\alpha}{c^2}) \\ \gamma_v(u\cos\alpha - v) \\ u\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

- En el nou sistema S', la partícula tindrà velocitat u' diferent de u i angle α' entre $\vec{u}'$ i x' diferent de α. Per tant

dividint la component 1 per la component 0:

$$U'^{\mu} = \gamma_{u'} \begin{pmatrix} c \\ u' \cos\alpha' \\ u' \sin\alpha' \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_u \begin{pmatrix} c\gamma_v(1 - \frac{vu\cos\alpha}{c^2}) \\ \gamma_v(u\cos\alpha - v) \\ u \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u'\cos\alpha' = \dfrac{u\cos\alpha - v}{1 - \frac{vu\cos\alpha}{c^2}} \\ \tan\alpha' = \dfrac{u\sin\alpha}{\gamma_v(u\cos\alpha - v)} \end{cases}$$

llei d'addició de les velocitats en la direcció x

d'ací podem calcular α'

recordem el resultat de la pàgina anterior

dividint el component 2 pel component 1

Aplicació: aberració estel·lar (canvi aparent de la posició de les estreles en el cel a causa del moviment de la Terra al voltant del Sol).

En el sistema *S*, el pla de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol és (x,z) i (x,y) és el de la posició de l'estrella i de la seua llum. Siga v la component de la velocitat de la Terra en *x* (que varia amb el temps) i emprem les fómules de dalt amb $u = u' = c$

$$\begin{cases} c\cos\alpha' &= \frac{c\cos\alpha - v}{(1-\frac{v}{c}\cos\alpha)} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v + c\cos\alpha'}{c + v\cos\alpha'} \\ \tan\alpha' &= \frac{c\sin\alpha}{\gamma_v(c\cos\alpha - v)} \Rightarrow \sin\alpha = (c - v\cos\alpha)\sin\alpha' \frac{\gamma_v}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\tan\frac{\alpha'}{2}\,.$$

α posició de l'estrella si la Terra estiguera en repòs, α' posició aparent que, com v, depèn del temps.

Quadrimoment

massa en repòs de la partícula

- El quadrimoment el definim així: $P^{\mu} = mU^{\mu} = (mc\gamma, m\gamma\vec{u})$: és la quantitat conservada en el context relativista.

- Les seues components espacials generalitzen el trimoment $\vec{p}_{rel} = m\gamma\vec{u} \sim_{\frac{u}{c}\ll 1} m\vec{u}$ i quan $u \to c \Rightarrow |\vec{p}| \to \infty$: la conservació del moment implica que per a una partícula amb massa no podem arribar a $u = c$. La quantitat $m\gamma$ es pot interpretar com una massa relativista: $m\gamma \to_{v\to c} +\infty$. És a dir, res no pot viatjar a una velocitat més gran que la de la llum.

- Considerem la component temporal P^0: $P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \sim_{u\ll c} \frac{1}{c}(\underbrace{mc^2}_{\text{constant}} + \underbrace{\frac{mu^2}{2}}_{\text{energia cinètica no relativista}} + ..)$. Com que aquesta quantitat també es conserva, identifiquem $P^0 = \frac{E}{c} \Rightarrow E = cP^0 = m\gamma c^2 \to_{u\to c} \infty$ (ambdues, massa i energia cinètica, contribueixen a l'energia de la partícula; i quan la partícula està en repòs $E = mc^2$).

moment relativista

- Escrivint $P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ podem reescriure E com a funció de $\vec{p}$ en comptes de $\gamma(u)$.

generalització de $E = mc^2$
incloent-hi l'energia cinètica

- En el sistema en repòs $P'^\mu = (mc, \vec{0}) \Rightarrow P' \cdot P' = P'^2 = m^2c^2$ i com que aquesta quantitat és invariant relativista $P^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2 \Rightarrow E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$

- En mecànica newtoniana usem la conservació de l'energia i suposem, implícitament, que la massa es conserva. Ací la conservació de l'energia conté massa i energia, i res no ens assegura que totes dues es conserven per separat $\Longrightarrow$ la massa pot convertir-se en energia cinètica (i a l'inrevés).

Nota: extensió al cas relativista de l'acció d'una partícula lliure

$$L_{rel} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^i\dot{x}^i}{c^2}}$$

- Si busquem la invariància sota transf. de Lorentz, el candidat natural per a l'acció és l'interval o temps propi $S_{rel} = -mc\int \underbrace{ds}_{\sqrt{ds^2}} = -mc^2\int d\eta = -mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{\dot{x}^i\dot{x}^i}{c^2}}$
- En el límit no relativista $\frac{\dot{x}^i\dot{x}^i}{c^2} \ll 1$, $S_{rel} \sim -mc^2\int dt(1-\frac{\dot{x}^i\dot{x}^i}{2c^2}) = \int dt(-mc^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i)$
- Les eq. E-L esdevenen $\frac{\delta L}{\delta x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}^i}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^i\dot{x}^i}{c^2}}}\right) = 0$

lagrangià no relativista

constant irrellevant

p_i

Pel teorema de Noether:
$$\begin{cases} \vec{p} & \text{és la quantitat conservada per la invariància sota translacions espacials} \\ E = p_i\dot{x}^i - L_{rel} = mc^2\gamma & \text{quantitat conservada per invariància sota translacions temporals} \end{cases}$$

Partícules amb massa nul·la

- Per a partícules amb massa nul·la $P \cdot P = 0 \Rightarrow$ el quadrimoment és nul i té la direcció d'un raig de llum.

- L'existència d'una velocitat límit, $v = c$, està relacionada amb l'existència de partícules de massa nul·la: les partícules de la llum, els fotons, tenen massa nul·la i es propaguen a la velocitat de la llum (com també els gravitons, partícules associades a ones de gravetat). Totes les partícules massives es propaguen a $v < c$.

- $P^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = 0 \leftrightarrow E^2 = \vec{p}^2 c^2$ i podem escriure $P^\mu = \dfrac{E}{c}(1, \hat{p})$

  vector unitari en la direcció del moviment de la partícula

  La mecànica quàntica ens diu que l'energia d'una partícula de massa nul·la és proporcional a la freqüència de l'ona associada $E = \hbar\omega$

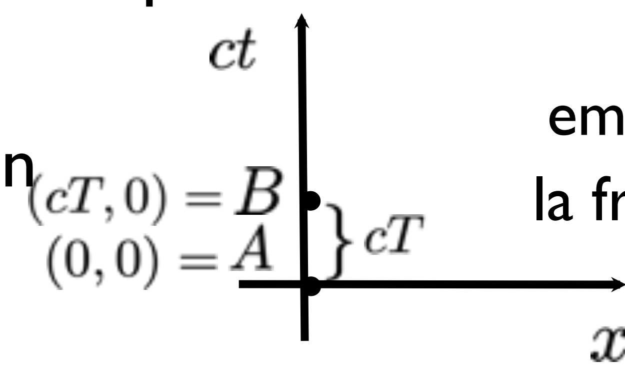
  constant de Planck

Aplicació: efecte Doppler relativista

El podem tractar de dues maneres independents:

1. (més tradicional) Considerem una font de llum situada en l'origen $O\ (\vec{x}=0)$ del sistema *S*.

per senzillesa 1D



Dos fronts consecutius són emesos amb distància temporal *T* $\Rightarrow$ la freqüència de l'ona emesa és $\omega = \frac{1}{T}$

En un sistema en moviment *S*': $\begin{cases} A &= (0,0) \\ B &= (\gamma cT, -v\gamma T) \end{cases}$

recordem que $\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \\ x' &= \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \end{cases}$

i per a un receptor situat en l'origen $x'=0$, el segon front arriba després d'un cert temps

$$\gamma T + \frac{v}{c}\gamma T = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}T \equiv T' \Rightarrow \omega' = \frac{1}{T'} \overset{\beta=\frac{v}{c}}{=} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\omega.$$

si el receptor se n'allunya $\beta>0, \omega'<\omega$ (desplaçament cap al roig) i si s'hi acosta $\beta<0, \omega'>\omega$ (desplaçament cap al blau)

2. Emprant la component 0 de la transf. de Lorentz:

$$P'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \ : \ \frac{E'}{c} = \frac{E}{c}\gamma(1-\frac{v}{c}) = \frac{E}{c}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$ i amb $E=\hbar\omega$ obtenim la mateixa fórmula.

Quadriacceleració

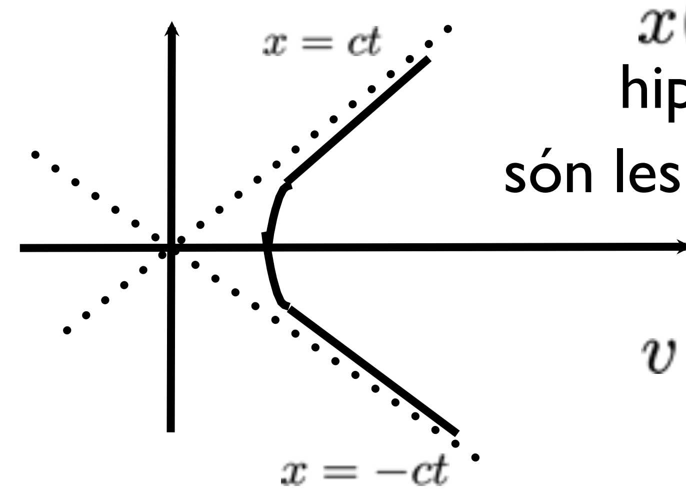
- Definim la quadriacceleració $A^\mu = \frac{dU^\mu}{d\eta}$. Com que $U^2 = c^2$, derivant $\frac{d}{d\eta}(U^2) = 2U \cdot A = 0$. És a dir, U i A són perpendiculars (en el sentit de Minkowski).
- En *S*, siguen $\vec{u}, \vec{a}(= \frac{d\vec{u}}{dt})$ la velocitat i l'acceleració d'una partícula. Cal tenir en compte que $\frac{dt}{d\eta} = \gamma, U^\mu = (c\gamma, \gamma\vec{u}) \Rightarrow A^\mu = \gamma(c\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\vec{u} + \gamma\vec{a}), \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$
- Considerem ara que en *S'*, en el temps t', la partícula està instantàniament en repòs: $\vec{u}'|_{t'} = 0, \gamma|_{t'} = 1, \frac{d\gamma}{dt'}|_{t'} = 0, \vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt'}|_{t'} \Rightarrow A'^\mu = (0, \vec{a}')$.
- Tornant ara al sistema *S* amb una transf. de Lorentz ($1D$) i comparant amb l'expressió de dalt.

$$\gamma \begin{pmatrix} c\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}u + \gamma a \end{pmatrix} = A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{u}{c}\gamma \\ \frac{u}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{u}{c} a' \\ \gamma a' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c\dot{\gamma} & = \frac{u}{c} a' \\ \dot{\gamma}u + \gamma a & = a' \end{cases}$$

Aplicació: trajectòria amb acceleració pròpia constant

- De $c\dot{\gamma} = c\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{u\overset{a}{\dot{u}}}{c}\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} = \frac{u}{c}a'$ obtenim $\frac{a}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} = a'$
- En el cas $a' = const$ la podem integrar: $a't = \int dt\frac{du}{dt}\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}} \underset{\frac{u}{c}=\sin x}{=} c\int\frac{dx}{\cos^2 x} = c\tan x = c\frac{u/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$
- Elevant al quadrat $(\frac{u}{c})^2 = (\frac{a't}{c})^2(1-(\frac{u}{c})^2) \Rightarrow (\frac{u}{c})^2 = \frac{(\frac{a't}{c})^2}{1+(\frac{a't}{c})^2}$, i el factor $\gamma = \sqrt{1+(\frac{a't}{c})^2}$
- Podem integrar també l'equació de la trajectòria

$$x = \int\frac{dx}{dt}dt = c\int dt\frac{\frac{a't}{c}}{\sqrt{1+(\frac{a't}{c})^2}} = \frac{c^2}{a'}\sqrt{1+(\frac{a't}{c})^2} \rightarrow_{t\pm\infty} \pm ct$$



$x(t)$ és una hiperbola i $x = \pm ct$ són les dues asímptotes

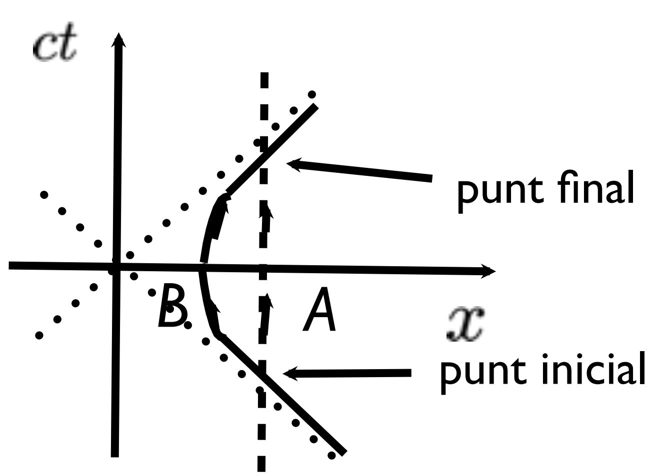
$v = c$

La partícula té sempre $u < c$ i només asimptòticament $u = c$.
A més, l'observador accelerat no pot rebre informació/senyals més enllà de la línia $x = ct$, que es denomina horitzó de Rindler.

- Calculem ara la relació entre el temps *t* i el temps propi de l'observador accelerat

$$\eta = \int \frac{dt}{\gamma} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+(\frac{a't}{c})^2}} \underset{\frac{a't}{c}=\sinh x}{=} \frac{c}{a'}\int dx = \frac{c}{a'}\sinh^{-1}\frac{a't}{c} \Leftrightarrow \frac{a't}{c} = \sinh\frac{a'\eta}{c}$$

i considerem aquesta trajectòria en el context de la paradoxa dels bessons.



B és l'observador accelerat (no inercial), amb temps η, i *A* l'observador inercial ($x = const.$), amb temps *t*.

Per a una variació infinitesimal $\frac{a'dt}{c} = (\overset{>1}{\cosh\frac{a'\eta}{c}})\frac{a'd\eta}{c} \Rightarrow dt > d\eta$,

integrant del punt inicial al punt final

$\frac{a'}{c}(t_{fin} - t_{in}) = \sinh\frac{a'\eta_{fin}}{c} - \sinh\frac{a'\eta_{in}}{c}$. *B* és més jove.

Extensió de la segona llei de Newton

recordem que $P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

- Intentem escriure l'extensió relativista de la segona llei.
  Escrivim $\frac{dP^\mu}{d\eta} = F^\mu \equiv (F^0, \vec{F})$ en què F^μ és la quadriforça.
- Pel que fa a la part espacial, es defineix $\vec{F} = \gamma \vec{f} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{d\eta} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{f} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$
- Considerant la part temporal: $F^0 = \frac{dP^0}{d\eta} = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}$
- Amb aquestes definicions: $F^\mu = (\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}, \gamma \vec{f})$

en el règim no relativista, és la segona llei de Newton.

Podem derivar una relació (familiar) entre el canvi d'energia i el treball fet emprant la constància del quadrat del quadrimoment $P^2 = m^2c^2$:

$$\frac{d}{d\eta}(P \cdot P) = 2P^0 \frac{dP^0}{d\eta} - 2\vec{p}\frac{d\vec{p}}{d\eta} = 2m\gamma^2(\frac{dE}{dt} - \vec{u} \cdot \vec{f}) = 0$$

$(P^0)^2 - \vec{p}^2$

$P^0 = \frac{E}{c} = mc\gamma, \vec{p} = m\vec{u}$

Força de Lorentz

- Les eq. $\frac{dP^\mu}{d\eta} = F^\mu$ s'usen molt poc perquè en el règim relativista les forces conegudes ja no valen, amb l'excepció de la força electromagnètica.

- Considerem la força de Lorentz per a una partícula amb càrrega *q* en un camp electromagnètic $\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}) \equiv \vec{f}$ i intentem escriure-la usant quadrivectors.

- Heu de trobar un F^μ la part espacial del qual és $\vec{F} = \gamma \vec{f}$ i reescrivim la força de Lorentz en la forma $\frac{d\vec{p}}{d\eta} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma q(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B}) = \frac{q}{c}(\overset{\overset{=\gamma c}{\uparrow}}{U^0} \vec{E} + \overset{\overset{\vec{u}_{rel}}{\downarrow}}{\gamma \vec{u}} \times \vec{B})$

- Pel que fa a la part temporal, $F^0 = \frac{dP^0}{d\eta} = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c} \vec{u} \cdot \vec{f} = \frac{\gamma}{c} q \vec{u} \cdot \vec{E}$

Combinant la part espacial i temporal $\Rightarrow \frac{dP^\mu}{d\eta} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu U^\nu, F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dP^0}{d\eta} & = \frac{q}{c} \gamma \vec{u} \cdot \vec{E}, \\ \frac{dp^i}{d\eta} & = \frac{q}{c}(c\gamma E^i + \epsilon^{ijk} \gamma u^j B^k) \end{cases}$

tensor del camp electromagnètic

Processos en física de partícules

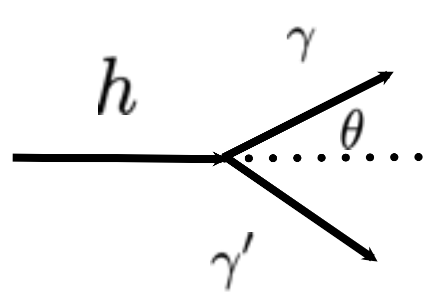
- Quan no actuen forces externes, $\frac{dP^\mu}{d\eta} = 0 \Rightarrow$ energia i moment es conserven.
- En la descripció de la col·lisió (i altres processos) de partícules, en el sistema del centre de masses la part espacial del quadrimoment total s'anul·la, mentre que, normalment, en el sistema del laboratori una de les partícules està en repòs.
- Habitualment desconeixem el moment P^μ de (almenys) una de les partícules. Buscarem una equació del tipus $P^\mu = ...$ i considerarem el seu quadrat $P^2 = m^2c^2 = ...$

Desintegració d'una partícula

- Una partícula en repòs, amb massa en repòs m_1, es desintegra en dues partícules amb masses en repòs m_2, m_3 .
- Per la conservació del quadrimoment total $P_1^\mu = P_2^\mu + P_3^\mu$ i considerant la component 0 en el sistema en repòs de la partícula 1

$$E_1 = m_1 c^2 = E_2 + E_3 = \sqrt{m_2^2 c^4 + \vec{p}_2^{\,2} c^2} + \sqrt{m_3^2 c^4 + \vec{p}_3^{\,2} c^2} \geq m_2 c^2 + m_3 c^2 \Rightarrow$$ la desintegració és possible si $m_1 \geq m_2 + m_3$

Exemple: desintegració del Higgs en dos fotons $h \to 2\gamma$



El Higgs té massa coneguda, i els fotons tenen massa nul·la:

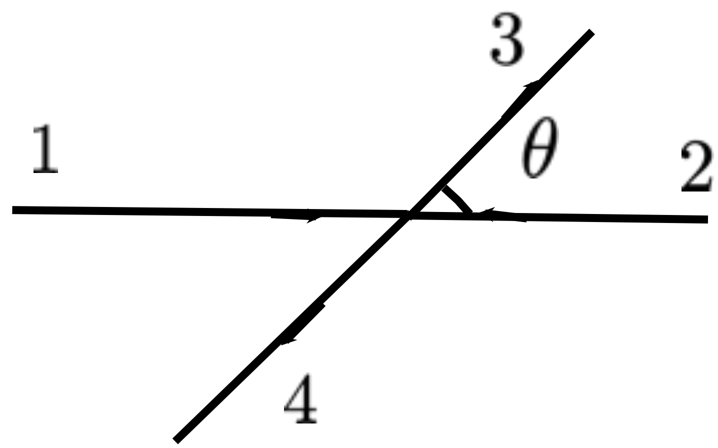
$$P_h^\mu = (\frac{E_h}{c}, \vec{p}_h), P_\gamma^\mu = \frac{E_\gamma}{c}(1, \hat{p}), P_{\gamma'}^\mu = \frac{E_{\gamma'}}{c}(1, \hat{p}')$$

Suposem que coneixem E_h, E_γ . Quant val l'angle de difusió θ ?

Escrivim $P_{\gamma'}^\mu = P_h^\mu - P_\gamma^\mu \underset{\text{quadrat}}{\Rightarrow} 0 = 0 + m_h^2 c^2 - 2 P_h \cdot P_\gamma = m_h^2 c^2 - 2(\frac{E_h E_\gamma}{c^2} - \frac{E_\gamma}{c} \underbrace{|\vec{p}_h|}_{= \sqrt{\frac{E_h^2}{c^2} - m_h^2 c^2}} \cos\theta)$ que dóna θ

Col·lisió de partícules

- Considerem dues partícules (amb la mateixa massa en repòs) que col·lideixen, en el sistema del centre de masses.



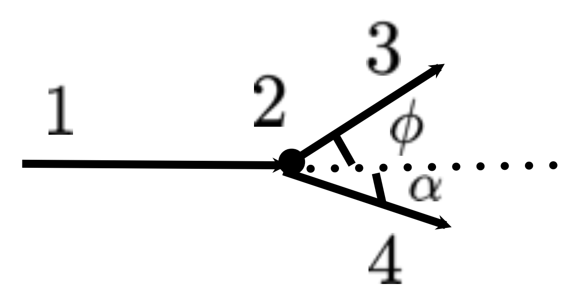
$$\underbrace{P_1^\mu + P_2^\mu}_{\text{abans de la col·lisió}} = \underbrace{P_3^\mu + P_4^\mu}_{\text{després de la col·lisió}}$$

Posem l'eix *x* en la direcció de $\vec{p}_1, \vec{p}_2 = -\vec{p}_1$: $P_1^\mu = (mc\gamma, mv\gamma, 0, 0), P_2^\mu = (mc\gamma, -mv\gamma, 0, 0)$

Després de la col·lisió: $P_3^\mu = (mc\gamma, mv\gamma\cos\theta, mv\gamma\sin\theta, 0), P_4^\mu = (mc\gamma, -mv\gamma\cos\theta, -mv\gamma\sin\theta, 0)$

(*v* es conserva, només canvia de direcció, les energies finals són sempre iguals)

En el sistema del laboratori, on (per exemple) 2 està en repòs:



Per la llei d'addició de les velocitats $v_1' = \dfrac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \equiv v', P_1'^\mu = (mc\gamma', m\gamma' v', 0, 0), P_2'^\mu = (mc, 0, 0, 0)$

Considerem una transf. de Lorentz des del sistema del centre de masses:

P_3^μ

dividint la component *y* per la component *x*

$$P_3'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc\gamma \\ mv\gamma\cos\theta \\ mv\gamma\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\gamma^2 + m\gamma^2\frac{v^2}{c}\cos\theta \\ mv\gamma^2 + mv\gamma^2\cos\theta \\ mv\gamma\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} mc\gamma'' \\ mv''\gamma''\cos\phi \\ mv''\gamma''\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\sin\theta}{\gamma(1+\cos\theta)} = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\gamma}$$

$$P_4'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc\gamma \\ -mv\gamma\cos\theta \\ -mv\gamma\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\gamma^2 - m\gamma^2\frac{v^2}{c}\cos\theta \\ mv\gamma^2 - mv\gamma^2\cos\theta \\ -mv\gamma\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} mc\gamma''' \\ mv'''\gamma'''\cos\alpha \\ mv'''\gamma'''\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\cos\theta)} = \frac{\tan\frac{\theta+\pi}{2}}{\gamma}$$

P_4^μ

Exemple: difusió Compton d'un fotó per un electró (sistema del laboratori)

$$P_1^\mu = \frac{E'}{c}(1,1,0,0),\ P_2^\mu = (mc,0,0,0),\ P_3^\mu = \frac{E''}{c}(1,\cos\phi,\sin\phi,0),\ P_4^\mu = (mc\gamma''', m\gamma'''v'''\cos\alpha, m\gamma'''v'''\sin\alpha, 0)$$

quadrat $\qquad 2(P_1 - P_3)\cdot P_2$

Escrivint $\quad P_4^\mu = (P_1^\mu - P_3^\mu) + P_2^\mu \Rightarrow m^2c^2 = m^2c^2 + 2m(E' - E'') - \frac{2E'E''}{c^2}(1-\cos\phi)$

$-2P_1\cdot P_3$

obtenim $\quad m(E' - E'') = \frac{E'E''}{c^2}(1-\cos\phi) \Rightarrow \Delta\lambda = \lambda'' - \lambda' = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi)$

el canvi d'energia del fotó $E' - E''$ està relacionat amb el canvi de color de la llum

$E = \frac{hc}{\lambda}$, *h* constant de Planck, λ longitud d'ona de la llum

longitud d'ona Compton de l'electró

Creació d'una partícula

- Així com la massa es pot convertir en energia cinètica, l'energia cinètica es pot convertir en massa a través de la creació de noves partícules: és més o menys la manera de descobrir noves partícules en la natura.

Considerem la col·lisió de dues partícules de massa m ; després tenim una nova partícula de massa M :

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu + P_5^\mu, P_i^2 = m^2c^2, i = 1, .., 4; P_5^2 = M^2c^2$$

En el sistema del centre de masses ($\vec{p}_1, \vec{p}_2$ en direcció *x*) $P_1^\mu = (mc\gamma, m\gamma v, 0, 0), P_2^\mu = (mc\gamma, -m\gamma v, 0, 0)$

$$\Rightarrow (P_1 + P_2)^2 = (2mc\gamma)^2 = \underbrace{(P_3 + P_4 + P_5)^2}_{=(\frac{E_3+E_4+E_5}{c},\vec{0})} = \frac{(E_3 + E_4 + E_5)^2}{c^2}$$

Com que $E_{3,4} = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2_{3,4}c^2} \geq mc^2, E_5 = \sqrt{M^2c^4 + \vec{p}^2_5c^2} \geq Mc^2$

$$\Rightarrow 4m^2\gamma^2 \geq (2m + M)^2 \Leftrightarrow \gamma \geq 1 + \frac{M}{2m}$$

Per a crear una partícula cal una energia cinètica mínima per partícula inicial

$$T = \gamma mc^2 - mc^2 = \frac{Mc^2}{2}$$

En el sistema del laboratori

(on per exemple 2 està en repòs) $P_1^\mu = (m\gamma' c, m\gamma' v', 0, 0), P_2^\mu = (mc, 0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (P_1 + P_2)^2 = 2m^2c^2 + 2m^2c^2\gamma' = \underbrace{(P_3 + P_4 + P_5)^2}_{\text{invariant de Lorentz}} \geq c^2(4m^2 + 4mM + M^2)$$

$$\Rightarrow \gamma' \geq 1 + \frac{2M}{m} + \frac{M^2}{2m^2}$$

És més difícil crear una partícula en el sistema del laboratori. L'energia cinètica mínima per partícula inicial és

$$T = \gamma' mc^2 - mc^2 = 2Mc^2 + \frac{M^2c^2}{2m} > \frac{Mc^2}{2}$$

Per a $M \gg m \Rightarrow T \sim \frac{M^2c^2}{m}$ és quadràtic en *M*, mentre que en el sistema del centre de masses és lineal.

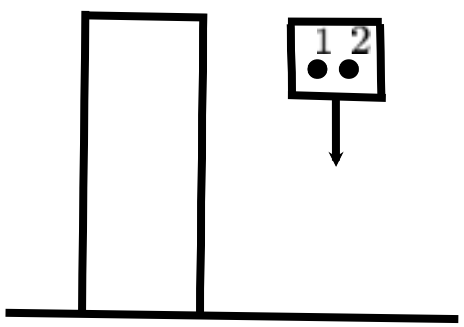
En els acceleradors (com en l'LHC) es consideren dos feixos (per exemple, de protons) que col·lideixen en lloc d'un feix i un blanc en repòs.

Complement: extensió de la teoria de la relativitat a sistemes no inercials

- Hem vist que la relativitat especial val en els sistemes inercials. L'esforç d'Einstein, després de 1905, va ser construir una física realment relativista, és a dir, vàlida en tots els sistemes de referència.
- Podem eliminar un moviment uniforme (v constant) amb una transf. de Lorentz (canvi de sistema inercial), però no ho podem fer amb un moviment accelerat, que queda (fins ara) com a moviment absolut.
- La clau per a eliminar-lo és la gravitació (a través del principi d'equivalència) i, per a descriure la gravitació, necessitem la geometria.

Principi d'equivalència

- Considerem l'exemple d'un ascensor en caiguda lliure des d'un gratacel



Deixem caure dos objectes $1, 2$ en l'ascensor.

Respecte a un observador extern, els dos objectes cauen (quasi) amb la mateixa acceleració perquè

$\phi = -\frac{GM}{r}$

ara $< 10^{-13}$

$$m_i \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m_g \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_g}{m_i}\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{\frac{GM}{r^2}\big|_{r=r_{Terra}} = g} \quad \text{i} \quad \frac{m_g - m_i}{m_g} < 10^{-8}.$$

massa inercial (resistència d'un cos a una força que intenta accelerar-lo)

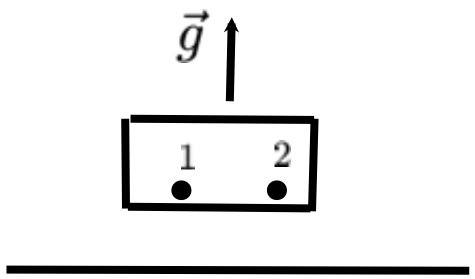
massa gravitacional (pes, relacionat amb la gravetat)

Eövtös (final de 1800)

Einstein assumeix que $m_i = m_g$ i això té com conseqüència que els dos objectes i l'ascensor cauen amb la mateixa acceleració.

$\Rightarrow$ Diem que l'ascensor és un sistema (localment) inercial perquè per a un observador, en aquest sistema hi ha només un moviment rectilini uniforme.

- Alternativament, podem considerar un ascensor que puja cap amunt amb acceleració constant $\vec{g}$ des d'un sistema inercial.



Els dos objectes $1, 2$ a l'interior cauen cap al terra de l'ascensor.

Tenim dues descripcions, ambdues vàlides:

a) Observador extern: la llei d'inèrcia no és vàlida a l'interior perquè l'ascensor té un moviment absolut (accelerat). $1, 2$ estan en repòs respecte a l'observador, és el terra de l'ascensor que es mou cap a $1, 2$.

b) Observador intern: $1, 2$ cauen perquè hi ha un camp gravitatori uniforme.

Per a *b*), en el règim no relativista (petites velocitats), l'eq. del moviment és

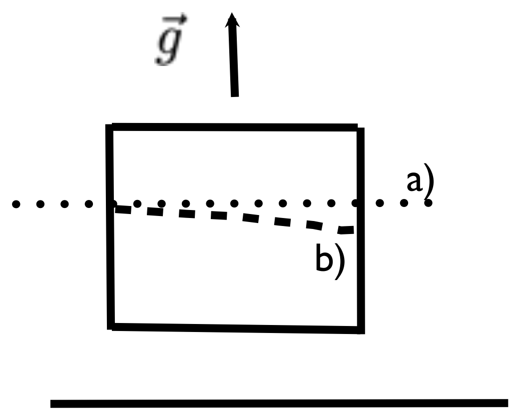
$$m\frac{d^2\vec{x}_b}{dt^2} = -m\vec{g} + \text{altres forces}$$

i, considerant la relació entre les coordenades de *b*) i de *a*),

$$\vec{x}_a = \vec{x}_b + \frac{\vec{g}}{2}t^2 \Rightarrow m\frac{d^2\vec{x}_a}{dt^2} = \quad \text{altres forces}$$

exemple senzill que mostra que la transf. entre un sistema inercial i no inercial és no lineal

- Un possible desafiament al principi d'equivalència es refereix a la propagació de la llum. Per exemple, un raig de llum que travessa horitzontalment el nostre ascensor.

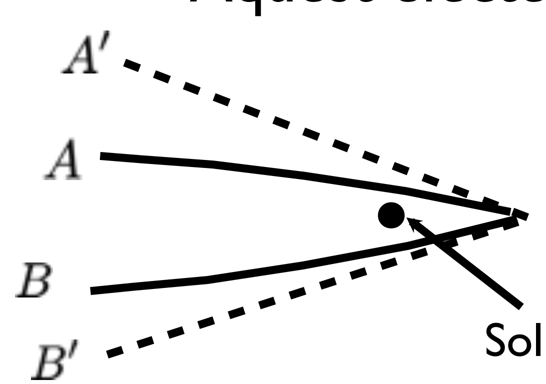


a) Observador extern: el raig de llum segueix una línia recta horitzontal en el seu sistema, però no en l'ascensor.

b) Observador intern: la llum no té pes (règim no relativista), no és afectada pel camp gravitatori i la seua trajectòria és rectilínia ... ??

Però no és així: per la relativitat especial $E = mc^2$ i la trajectòria és corba.

Aquest efecte s'ha comprovat durant els eclipsis solars (Eddington 1919):



Les estrelles A i B semblen més lluny (A', B') del que ho són en realitat.

- Amb el principi d'equivalència cau la il·lusió del moviment absolut, perquè el podem eliminar amb un camp gravitatori $\Longrightarrow$ per a construir una física realment relativista, cal resoldre el problema de la gravitació.

Relativitat especial + gravitació = relativitat general $\neq$ Newton

Mecànica newtoniana per $v \ll c$

gravetat de Newton per camps gravitatoris febles

En l'espaitemps de Minkowski (relativitat especial), les distàncies es mesuren amb el tensor mètric de Minkowski

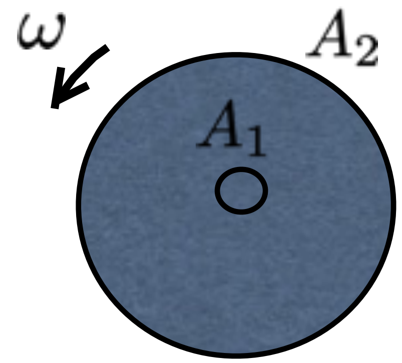
$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que té entrades constants (diem que es tracta d'una geometria pseudoeuclidiana). Això no és veritat per a observadors no inercials.

element de línia $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, x^\mu = (ct, \vec{x})$

molt petit $\quad$ molt gran

- Considerem un disc molt gran en ràpida rotació i dos cercles: A_1, A_2



circumferències dels cercles $\quad$ radis dels cercles

a) Per a un observador inercial extern, $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{R_2}{R_1}$

b) Considerem dos observadors accelerats, l'un en A_1 i l'altre en A_2.
b_1 és quasi inercial, i, per tant, mesura $A_1' \sim A_1, R_1' \sim R_1$.
b_2 té gran velocitat: per la contracció de les longituds $A_2' < A_2$ mentre que $R_2' = R_2$ (mesura en direcció perpendicular al moviment)

$$\Rightarrow \frac{A_2'}{A_1'} \neq \frac{R_2'}{R_1'} \ !$$

b_1, b_2 poden sempre dir que aquests efectes són deguts a un camp gravitatori (principi d'equivalència)

A més a més, el rellotge de b_1 és $\sim$ rellotge inercial, mentre que el de b_2 va més lentament.
$\Longrightarrow$ els dos rellotges no van al mateix ritme.

$\Rightarrow$ La geometria $g_{\mu\nu}$ de l'espaitemps d'un sistema no inercial és no minkowskiana i $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

tensor mètric

Tornem a les geodèsiques

$$\xi = \xi^\alpha(x) \Rightarrow \frac{d^2\xi^\alpha}{d\eta^2} = 0, \alpha = 0,1,2,3$$

- Podem emprar el principi d'equivalència per a escriure l'equació del moviment d'una partícula en un camp gravitatori.
- En cada punt podem escollir un sistema de coordenades (en realitat són infinits, via transf. de Lorentz) localment inercial (el nostre petit ascensor) on val (localment) la relativitat especial.
- Nomenem aquestes coordenades $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x) \Rightarrow \frac{d^2\xi^\alpha}{d\eta^2} = 0, \alpha = 0,1,2,3.$

Per a cada punt *x* hi ha un conjunt diferent de coordenades

Eq. del moviment en un sistema inercial

- La transformació de coordenades al sistema del laboratori (on hi ha un camp gravitatori) és $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$,on $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}(x),\ \alpha, \lambda = 0, 1, 2, 3$

la transformació de coordenades és no lineal

Reescrivim ara $\frac{d^2\xi^\alpha}{d\eta^2} = 0$ en el sistema del laboratori.

La trajectòria de la partícula és $\xi^\alpha(x(\eta)) \Rightarrow \frac{d\xi^\alpha}{d\eta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}(x)\frac{dx^\lambda}{d\eta}$, i

$$\left.\frac{d^2\xi^\alpha}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}(x)\frac{dx^\lambda}{d\eta}\right) = \underbrace{\left(\frac{d}{d\eta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\right)}_{\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\eta}}\frac{dx^\lambda}{d\eta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{d^2x^\lambda}{d\eta^2}\right\} \quad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{d^2x^\lambda}{d\eta^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\eta}\frac{dx^\lambda}{d\eta} = 0$$

Multipliquem ara per la matriu inversa del canvi de coordenades $\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}$:

$$\underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}}_{\delta^\mu_\lambda}\frac{d^2x^\lambda}{d\eta^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\eta}\frac{dx^\beta}{d\eta} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d^2x^\mu}{d\eta^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\frac{dx^\lambda}{d\eta}\frac{dx^\nu}{d\eta} = 0$$

és clar que aquest terme és degut al camp gravitatori;
quan no n'hi ha, el canvi de coordenades és lineal i aquest terme és zero.

- Vegem ara la connexió amb la geometria.

L'interval invariant (element de línia) en el sistema localment inercial és el de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta.$$

Considerem ara el canvi de coordenades al sistema del laboratori directament en l'element de línia

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}(x) dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}(x) dx^\nu$$

i definim el tensor mètric i l'element de línia en el sistema del laboratori

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}(x) \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}(x), \;\; ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

clarament, el tensor mètric és diferent del de Minkowski, i depèn del punt *x*

Es pot demostrar que $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \dfrac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \dfrac{1}{2} (g^{-1})^{\mu\alpha} (\partial_\lambda g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha g_{\lambda\nu}) \equiv \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ connexió de Levi-Civita

$$\Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\eta^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\eta} \frac{dx^\nu}{d\eta} = 0$$

L'equació del moviment per a una partícula en un camp gravitatori = equació de les geodèsiques

Resolem l'equació de les geodèsiques

- Considerem ara el límit no relativista (1) de l'equació de les geodèsiques en l'aproximació de camp gravitatori feble (2).

Recordem l'equació de les geodèsiques i la connexió de Levi-Civita.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\eta^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{d\eta}\frac{dx^\nu}{d\eta} = 0,\ \Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \frac{(g^{-1})^{\mu\alpha}}{2}(\partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\nu})$$

1. En el límit no relativista $d\eta = \frac{dt}{\gamma} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \sim_{v\ll c} dt$

i aleshores $\frac{dx^\mu}{d\eta} = (c\frac{dt}{d\eta}, \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\eta}) \simeq_{v\ll c} (c, \vec{0})$

D'ací $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}\frac{dx^\lambda}{d\eta}\frac{dx^\nu}{d\eta} \simeq \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\eta}\frac{dx^0}{d\eta} \sim c^2\Gamma^\mu_{00}$

regla de la suma per a λ, ν, però només $\lambda = \nu = 0$ donen contribució diferent de zero

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\eta^2} + c^2\Gamma^\mu_{00} \sim 0$$

2. En l'aproximació de camp gravitatori feble, la mètrica (corbada) de l'espaitemps difereix poc de la de Minkowski.

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \ \ |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$\eta_{\mu\nu}$ té entrades constants; les seues derivades són zero. A més a més, considerem un camp gravitatori estacionari ($g_{\mu\nu}$ no depèn del temps)

$$\eta^{-1} = \eta$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\mu}_{00} = \frac{(g^{-1})^{\mu\alpha}}{2}(\partial_0 g_{\alpha 0} + \partial_0 g_{\alpha 0} - \partial_\alpha g_{00}) = -\frac{(g^{-1})^{\mu\alpha}}{2}\partial_\alpha g_{00} \overset{O(h)}{\sim} -\frac{(\eta^{-1})^{\mu\alpha}}{2}\partial_\alpha h_{00}$$

camp gravitatori estacionari $\quad \partial(\eta + h) = \partial h$

Combinant les aproximacions **1** i **2** obtenim

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\eta^2} - \frac{c^2}{2}(\eta^{-1})^{\mu\alpha}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} = 0$$

- En les aproximacions no relativistes i de camp gravitatori estacionari feble hem obtingut

$$\frac{d^2x^\mu}{d\eta^2} - \frac{c^2}{2}(\eta^{-1})^{\mu\alpha}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha} = 0$$

Són 4 equacions:

Part temporal $\mu = 0$ $\Longrightarrow$ $(\eta^{-1})^{0\alpha}$ té entrada $\neq 0$ només per a $\alpha = 0$
però (camp gravitatori estacionari) $\partial_0 h_{00} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^0}{d\eta^2} = 0 \Rightarrow x^0 = c\eta$$

Part espacial $\mu = i, i = 1, 2, 3$ $\Longrightarrow$ $(\eta^{-1})^{i\alpha}$ té entrada $\neq 0$ només per a $\alpha = i$
i $(\eta^{-1})^{ii} \underset{\eta^{-1} = \eta}{=} -1$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^i}{d\eta^2} - \frac{c^2}{2}(\eta^{-1})^{ii}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{x}}{d\eta^2} = -\frac{c^2}{2}\vec{\nabla}h_{00}$$

Comparació amb la gravetat de Newton

$$\left.\begin{array}{l} \text{Comparem ara } (x^0 = ct) \quad \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\dfrac{c^2}{2}\vec{\nabla}h_{00} \\ \text{amb la llei de la gravetat de Newton} \quad \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi \end{array}\right\} \Rightarrow h_{00} \sim \frac{2\phi}{c^2} = -\frac{2GM}{c^2 r}$$

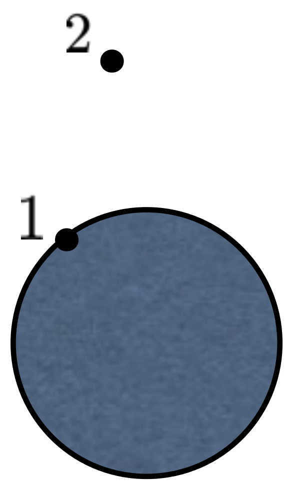
és una quantitat molt petita,
per a la Terra $\sim 10^{-9}$ i per al Sol $\sim 10^{-6}$

Podem resumir el que hem trobat dient que, en el límit de camp gravitatori feble, la geometria (corbada) de l'espaitemps té la forma

$$ds^2 \sim c^2(1 + \underbrace{\frac{2\phi}{c^2}}_{= -\frac{2GM}{c^2 r}})dt^2 + \text{ part espacial}$$

Aplicació: efecte Doppler gravitatori

- Considerem dos observadors, l'un (1) situat en la superfície de la Terra i l'altre (2) en un punt més alt



Tenim que $\underbrace{\phi_1}_{-\frac{GM}{r_1}} < \underbrace{\phi_2}_{-\frac{GM}{r_2}}$

Considerem un fotó emès amb freqüència ω_1 per $\mathbf{1}$ i rebut en $\mathbf{2}$. Quina freqüència ha de tenir el fotó en 2 ?

Emprem el principi d'equivalència, la conservació de l'energia i la mecànica quàntica:

$$c^2\Delta m_1 + \phi_1\Delta m_1 + c^2\Delta m_2 + \phi_2\Delta m_2 = 0$$

$$-\frac{\hbar\omega_1}{c^2} \qquad \frac{\hbar\omega_2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \omega_1(1+\frac{\phi_1}{c^2}) = \omega_2(1+\frac{\phi_2}{c^2})$$

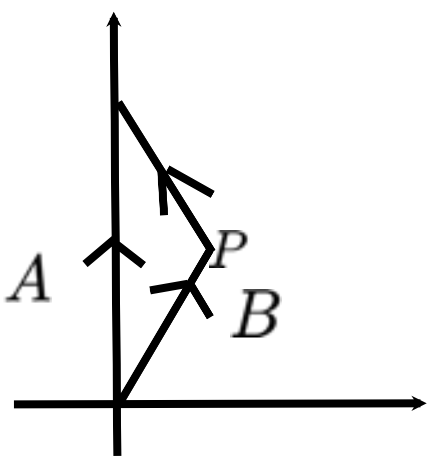
$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1\frac{(1+\frac{\phi_1}{c^2})}{(1+\frac{\phi_2}{c^2})} \sim \omega_1(1+\frac{\Delta\phi}{c^2}) < \omega_1$$

$$= \phi_1 - \phi_2 < 0$$

desplaçament cap al roig

Acabem tornant per última vegada a la paradoxa dels bessons

- L'efecte Doppler gravitatori és degut al fet que els rellotges en dos punts diferents d'un camp gravitatori no van al mateix ritme $\Rightarrow \Delta t_1 \sim (1 + \frac{\Delta\phi}{c^2})\Delta t_2$
  Retornem, així, a la paradoxa dels bessons.



En la fase de desacceleració i acceleració de *B* prop de *P* és com si actuara, per al principi d'equivalència, un camp gravitatori amb acceleració $g = \frac{2v}{\Delta t}$

duració d'aquest procés

Referint-nos a l'exemple de la pàgina precedent, *B* és $\mathbf{1}$ i A és $\mathbf{2}$.

$\Longrightarrow$ el rellotge de *B* es retarda, respecte al de *A*, per un factor $\frac{\Delta\phi}{c^2}$

distància entre *A* i *B* en *P*

Ara, $\frac{\Delta\phi}{c^2} = \frac{g d_{AB}}{c^2} = \frac{2v}{\Delta t}\frac{vT}{c^2}$ i com que aquesta fase dura un temps Δt

$\Longrightarrow$ la diferència entre els dos rellotges és $\frac{2v}{\Delta t}\frac{vT}{c^2}\Delta t = \frac{2v^2}{c^2}T$

que correspon a la quantitat calculada ja (de manera diferent)!