

# Inmersiones de superficies en $\mathbb{R}^{n+2}$



Raúl César Volpe Bello

Director: **Juan Monterde García-Pozuelo**

Universitat de València  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Departamento de Matemáticas

Este trabajo es para la obtención del título de  
*doctorado en matemáticas*

Octubre 2019

*En memoria de mi madre*

# Agradecimientos

Agradezco a mi director por su paciencia y dirección. También quiero dar las gracias a Pierre Bayard y a Federico Sánchez-Bringas por el afecto recibido durante las estancias en su universidad. Gracias a los compañeros de doctorado por la ayuda para resolver los trámites. Además, agradezco a los demás profesores del área de geometría por resolverme dudas y darme la oportunidad de formar parte de un proyecto.

Gracias en especial a mi familia por su apoyo incondicional durante este tiempo.

# Resumen

El objetivo principal de esta tesis es caracterizar, a través de relaciones entre sus invariantes, propiedades geométricas de **superficies inmersas** en  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Los invariantes de una superficie serán conceptos que sólo dependen del punto sobre la superficie. De manera que si consideramos una condición geométrica que sólo dependa del punto sobre la superficie, deberá haber una condición en términos de sus invariantes.

En el estudio clásico de superficies en el espacio euclídeo de tres dimensiones, se definían los invariantes escalares de la **curvatura de Gauss** y la **curvatura media**. Se obtenía que ambos invariantes determinaban el invariante geométrico de las curvaturas principales, esto es, el intervalo de variación de la curvatura de los campos tangentes unitarios sobre la superficie. Nos proponemos seguir el mismo esquema realizado por otros autores para el caso general de una superficie.

El punto de partida de esta línea de investigación se puede poner en el artículo de J. A. Little, [20]. En dicho trabajo, se definen por primera vez invariantes escalares para superficies inmersas en el espacio euclídeo de cuatro dimensiones. El papel de los invariantes escalares propuestos en este artículo es resumir toda la información de la geometría de una superficie.

El invariante geométrico principal de una superficie es la **elipse de curvatura**. Este concepto sólo depende del punto sobre la superficie, esto es, permanece invariante bajo movimientos rígidos o reparametrizaciones. La elipse de curvatura es el concepto análogo al de las curvaturas principales y surge otra vez al considerar las curvaturas de la superficie en la de dirección de un campos tangente unitario. En la situación general, tenemos  $n$  direcciones normales linealmente independientes y por lo tanto  $n$  componentes que estudiar. El aumento de la complejidad de la situación nos lleva a necesitar un número mayor de invariantes escalares. Con el objetivo de reducir la información, veremos qué magnitudes escalares, necesarias y suficientes para determinar la elipse de curvatura, han sido propuestos por otros autores. A

su vez, tendremos que buscar cómo describir las magnitudes. Esto será a partir de las formas fundamentales.

Las formas fundamentales contienen toda la información necesaria sobre la geometría de la superficie y de su elipse de curvatura. Como en el caso de superficies en el espacio euclídeo de tres dimensiones, tenemos dos formas fundamentales. La primera forma fundamental es la restricción del producto escalar ambiente al plano tangente. De esta forma, la primera forma fundamental contiene la información de la métrica del plano tangente. La segunda forma fundamental asigna, a cada par de vectores tangentes, la proyección de la variación con respecto a una dirección de un campo tangente que tenga la otra dirección en el punto. Así, la segunda forma fundamental contiene la información de la variación de los planos tangentes.

La elipse de curvatura coincide con la imagen de la segunda forma fundamental sobre el círculo de vectores tangentes unitarios. Además, se puede ver que si se determina esta imagen, se determina la acción de la segunda forma fundamental sobre cualquier par de vectores tangentes al ser una aplicación lineal. Para describir las magnitudes que definen la elipse de curvatura se utilizarán los coeficientes de las formas fundamentales.

Cuando trabajamos con una superficie en el espacio euclídeo de cuatro dimensiones, Little describe las generalizaciones de la curvatura de Gauss y la curvatura media, además de dos nuevos invariantes: la **curvatura normal** y la **resultante**. Estos cuatro invariantes resultan ser suficientes para describir la elipse de curvatura en este caso, ver [20]. Esta lista de invariantes puede ser generalizada para superficies en  $\mathbb{R}^{n+2}$  pero no resulta ser una lista completa que determine la elipse de curvatura.

Para determinar la elipse de curvatura en el caso de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$ , utilizaremos el trabajo desarrollado por A. Montesinos, [24]. En este artículo se desarrolla una teoría general de invariantes, aplicada sobre superficies inmersas. Sorprendentemente, sólo necesitaremos un nuevo invariante escalar para tener una lista de funciones escalares que determinen la elipse de curvatura. Esto se debe a que la complejidad de la elipse de curvatura no aumenta ya que puede expresarse siempre a partir de tres vectores normales.

Para demostrar que una lista de invariantes es suficiente para determinar la elipse de curvatura, necesitamos saber qué condiciones consiguen determinar una elipse, teniendo en cuenta rotaciones o simetrías. Esto es equivalente a no tener en cuenta la elección de la base ortonormal para el espacio normal. Estas posibilidades constituyen una clase de equivalencia y veremos que se necesitan tres parámetros para determinar una clase. Consideraremos el

---

**vector centro** (el vector definido entre el origen y el centro de la elipse), la **forma de la elipse** y la **posición relativa de los semi-ejes** con respecto al vector centro. Veremos que con estos tres datos, tendremos definida una clase de equivalencia que corresponderá a la elipse de curvatura de una superficie inmersa.

Unos valores escalares que definen los parámetros escogidos de la elipse de curvatura serán la **longitud de su vector centro** (el vector definido entre el origen y el centro de la cónica), la **longitud de sus semi-ejes** y los **ángulos** entre los semi-ejes y su centro. Estos ángulos son los que determinan la posición relativa entre el centro y los semi-ejes. Para hallar fórmulas en términos de los coeficientes de las formas fundamentales, se describen los vectores que determinan la elipse de curvatura a partir de una referencia local. Se toma el caso de una parametrización isoterma y luego se proponen las expresiones generales que coincidan para este caso. Al ser magnitudes invariantes, tendremos las fórmulas generales en términos de los coeficientes de las formas fundamentales. Este trabajo fue realizado por Little en el caso de  $n = 2$ .

Esta lista de invariantes escalares definen la elipse de curvatura y están relacionados con las dos listas de invariantes escalares que hemos comentado. La lista de invariantes generalizados para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+2}$ , a partir del trabajo de Little, es suficiente cuando  $n = 2$ . Sin embargo, en el caso general determina todo menos la posición relativa de los semi-ejes. En cambio, la segunda lista de invariantes, aquella definida en el trabajo de Montesinos, siempre determinará las condiciones geométricas necesarias para describir la elipse de curvatura.

Mientras los invariantes de Little se definen a partir de 2-formas y otras construcciones algebraicas, los invariantes de Montesinos se definen a partir de medidas escalares de la elipse de curvatura. De esta forma, los invariantes de Little tienen una expresión conocida en términos de los coeficientes de las formas fundamentales asociados y los invariantes de Montesinos son directamente invariantes respecto la elección de la referencia local.

El primer objetivo de este trabajo será encontrar la relación, necesaria, entre ambos conjuntos de invariantes. De esta manera, tendremos la ventaja de usar la lista que se adapta mejor al problema en cuestión. Dependiendo de la propiedad geométrica que estudiemos, optaremos por un conjunto u otro. Por ejemplo, para estudiar la condición ya caracterizada de semiumbilicidad, esto es, el colapso de la elipse en un segmento, usamos los invariantes de Little. Por contra, si trabajamos en un espacio de dimensión mayor a cuatro, optaremos por los invariantes de Montesinos.

Bajo la perspectiva de trabajar con los invariantes escalares, se ha conseguido desarrollar distintos resultados que relacionan algunas de las diferentes propiedades geométricas con condiciones analíticas para los invariantes. Estas serán condiciones de dependencia funcional entre los invariantes. Es similar a la caracterización de curvas espaciales contenidas en una esfera o la caracterización de hélices generalizadas. Se han estudiado, entre otros, por Romero-Fuster, Sanchez-Bringas, Soares Ruas y colaboradores (ver por ejemplo [31], [25] y [26]), conceptos como la umbilicidad, la existencia de líneas asintóticas ortogonales, el contacto entre superficies, las singularidades, etc.

De manera paralela, desarrollamos la teoría de los invariantes para superficies inmersas en espacios de Lorentz. En este marco de trabajo, se tienen dos tipos de superficies espaciales y temporales. En las espaciales, el plano tangente mantiene una norma euclídea y el espacio normal adquiere una norma lorentziana. De esta manera, es la segunda forma fundamental la que tiene nuevas características. En las superficies temporales, el plano tangente adquiere el nuevo tipo de norma y el espacio normal mantiene una norma euclídea. Los trabajos [14] o [30] son ejemplos de cómo se trabaja con invariantes de superficies temporales. Entre todas las posibilidades hemos decidido centrarnos en las superficies espaciales inmersas en espacios de Lorentz de dimensión cuatro. Dejamos así los demás casos para estudios futuros.

De la misma manera que en el caso euclídeo, la manera de trabajar será a partir de la elipse de curvatura. Al ser la métrica del plano normal lorentziana, la clase de equivalencia en este caso será bajo rotaciones lorentzianas. Aunque tengamos esta diferencia visual, la forma de determinar la clase de equivalencia será la misma: consideraremos el vector centro (el vector definido entre el origen y el centro de la elipse), la longitud de cada semi-eje y la posición relativa de los semi-ejes con respecto al vector centro. Sabiendo que los invariantes de Little determinaban estos invariantes geométricos, cuando el espacio normal tiene dimensión dos, generalizaremos su lista de invariantes. Esto se había llevado a cabo en trabajos anteriores, ver [6].

Aportamos en esta tesis un nuevo planteamiento que diferencia nuestro trabajo de los anteriores. En este marco, podemos ver en los trabajos [15], [6], [9], [27] y [32], cómo se suele utilizar una base de vectores de tipo luz para el plano normal. Esto había llevado a expresiones para los invariantes muy diferentes de las análogas del caso euclídeo. Proponemos en esta tesis el uso de una base espacial/temporal para el plano normal. Es cierto que este planteamiento tiene sus desventajas ya que tenemos que estable-

cer un orden a la base normal para mantener el tipo de cada vector. Sin embargo, conseguiremos la ventaja de utilizar expresiones familiares para los invariantes escalares. Aunque no sea una aportación significativa para la teoría, sí que aporta facilidad para utilizar argumentaciones análogas al caso euclídeo para el nuevo marco de trabajo.

Veremos que, gracias a esta ventaja, vamos a poder encontrar un resultado análogo de los hallados en el caso euclídeo, que introduciremos más adelante. Además, dejaremos abiertas las posibilidades de buscar otros resultados análogos como por ejemplo, resultados de compatibilidad (condiciones de Mainardi-Codazzi), umbilicidad, existencia de líneas asintóticas, etc.

Una vez que definimos los invariantes con los que trabajamos, estudiaremos principalmente dos propiedades geométricas para superficies inmersas:

1. **Superficies esféricas:** cuando la imagen de la inmersión está contenida en una esfera.
2. **Superficies helicoidales:** cuando los ángulos entre los planos tangentes y un plano fijo sean constantes.

Estas propiedades tienen su interpretación dependiendo si trabajamos con superficies inmersas en el espacio euclídeo o en el espacio lorentziano.

Si la imagen de la inmersión está contenida en una esfera del espacio ambiente, en general será una superficie esférica. En el caso lorentziano se podrá diferenciar si la esfera es en realidad un hiperboloide temporal, un hiperboloide espacial o un cono de luz. En ambos casos partiremos de la misma condición: la diferencia entre un punto fijo y la inmersión tiene norma constante.

Si consideramos las superficies que tengan ángulos constantes entre sus planos tangentes y un plano fijo, lo llamaremos una superficie helicoidal. En el caso euclídeo, los ángulos que trabajaremos serán los ángulos de Jordan, definidos, en general, entre dos subespacios vectoriales. En el caso del espacio ambiente de cuatro dimensiones, serán dos ángulos asociados a cada par de planos. En cambio, en el caso lorentziano, tendremos un ángulo complejo. La parte real e imaginaria de este valor se pueden interpretar como las rotaciones necesarias, una euclídea y otra lorentziana, para llevar un plano al otro plano.

En menor medida, ofrecemos caracterizaciones alternativas a conceptos conocidos como la umbilicidad o demostraciones nuevas para condiciones conocidas como la superconformidad. Todo resultado que se demuestre será



necesario en las pruebas posteriores de caracterización de las propiedades geométricas comentadas.

En nuestros nuevos resultados buscamos emular, de alguna forma, las caracterizaciones clásicas para curvas en el espacio euclídeo. Como por ejemplo, caracterizar una curva dentro de una esfera mediante una condición sobre sus invariantes curvatura y torsión, o establecer el llamado teorema de Lancret, que caracteriza las hélices generalizadas. Una vez que fijamos una propiedad geométrica, estudiaremos qué condiciones necesarias se cumplen para los invariantes escalares. Algunas serán ya conocidas, pero encontraremos nuevas relaciones entre los invariantes que nos ayuden a proporcionar resultados de condiciones suficientes no descritos previamente.

De esta forma, el primer artículo que comentamos será una caracterización de superficies esféricas en espacios de cuatro dimensiones. Formalmente, decimos que una superficie es esférica cuando la imagen de la inmersión está contenida en una esfera del espacio euclídeo de dimensión cuatro. Para este tipo de inmersiones se había encontrado con anterioridad la condición necesaria de semiumbilicidad. Esta condición se refiere a que la elipse de curvatura colapsa en un segmento y se caracteriza mediante los invariantes escalares con la condición de nulidad de la curvatura normal. Se conocía, además, que existen inmersiones semiumbílicas que no eran esféricas, con diferentes ejemplos. Mostramos que, de hecho, se tiene una segunda condición necesaria, una condición que incluye los demás invariantes. Esta condición recuerda a la caracterización de curvas espaciales sobre esferas en el espacio euclídeo de dimensión tres.

Tras encontrar esta segunda condición necesaria analítica sobre los invariantes de superficies esféricas, empezamos a ver si en realidad tenemos condiciones suficientes. El objetivo será asegurar la esfericidad de una inmersión a partir de ambas condiciones sobre los invariantes escalares. Lo que encontramos es que, bajo dos supuestos añadidos que eliminan casos patológicos, las condiciones sí son suficientes para determinar si la superficie es esférica o no. En la demostración se busca determinar la elipse de curvatura mediante los coeficientes de las formas fundamentales, y para ello, se utilizan las diferentes condiciones analíticas. Los últimos coeficientes estarán determinados mientras se cumplan las dos condiciones adicionales.

Las condiciones añadidas son para la curvatura de Gauss y la resultante. Estas condiciones asumen que no se tomen ciertos valores constantes que dependen del radio. Posteriormente, realizaremos un estudio de estas condiciones y si bajo los valores constantes se puede asegurar que la inmersión es esférica o no. En esta discusión, veremos construcciones de ejemplos

de superficies esféricas y no esféricas con determinados valores constantes en los invariantes. Estos valores serán aquellos que habíamos descartado en nuestras condiciones adicionales.

También describimos las condiciones necesarias para superficies esféricas inmersas en espacios de dimensión superior. Las condiciones halladas son una versión generalizada que incluyen los casos de dimensión menor, pero otra vez veremos que no bastan para un resultado de condiciones suficientes. Por eso, estudiaremos a través de ejemplos cómo funciona la condición necesaria y por qué no es suficiente.

Este problema lo llevaremos a superficies esféricas en espacios de Lorentz. Primero, tendremos que recordar la métrica en este espacio y ver las posibilidades de los radios de las esferas. En este caso, tendremos diferentes tipos de hiperplanos o conos donde está contenida la imagen de una superficie dada. Gracias al planteamiento desarrollado para el estudio de las segundas formas fundamentales en este caso, tenemos la posibilidad de emular los argumentos utilizados en el caso previo.

Habrán más diferencias cuando consideremos una esfera de radio cero, pero nuestra base de vectores espacial/temporal permitirá un argumento similar. Esta ventaja es la que ya habíamos adelantado al comentar el planteamiento diferente a la hora de estudiar el plano normal. Este resultado es nuestro ejemplo básico de cómo podemos obtener resultados análogos con argumentos similares al caso euclídeo. Además, veremos las ecuaciones de compatibilidad asociadas a superficies en el espacio de Lorentz de dimensión cuatro. No llegamos a demostrar que estas ecuaciones son suficientes para determinar una inmersión desde sus coeficientes, dado que es un resultado que no usaremos, pero lo dejamos planteado para su estudio en el futuro.

La siguiente condición geométrica que se estudia en esta tesis es cuando los planos tangentes de una superficie inmersa tienen ángulos de Jordan constantes respecto a un plano fijo. Recordemos que en el caso concreto del espacio euclídeo de cuatro dimensiones tenemos dos ángulos de Jordan entre cada plano tangente y un plano fijo. Relacionamos cada plano tangente y el plano fijo con sus bivectores asociados. Dentro del álgebra exterior de bivectores, se puede representar cada plano mediante un bivector unitario y descomponible. Los ángulos que se pueden definir para dos bivectores serán puestos en relación con los ángulos de Jordan entre los planos.

Nuestro objetivo inicial era desarrollar ejemplos explícitos de estas superficies. Para este tipo de superficies se conocía la existencia, pero ningún ejemplo explícito para un par cualquiera de ángulos dados. El trabajo más completo de este tema es el realizado por P. Bayard, A. J. Di Scala, O. O.

Castro y G. Ruiz-Hernández, [3]. En este trabajo se constituye un resultado de existencia mediante la reducción del problema a un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales donde las incógnitas son dos funciones que determinan la inmersión. En este caso se considera que la inmersión sea de tipo gráfica. La complejidad de este sistema no permite encontrar una solución directa.

El sistema de ecuaciones diferenciales surge al fijar los ángulos de Jordan constantes para los planos tangentes de una inmersión. Equivalentemente, se fija que unas coordenadas de los bivectores asociados sean constantes. Una vez que podamos relacionar la condición de ángulos de Jordan constantes sobre los bivectores, se describe el bivector a través de una referencia local y se busca qué condiciones analíticas se están imponiendo sobre los coeficientes de las formas fundamentales.

De esta forma, la diferencia principal con el trabajo anterior es que no sólo buscamos la existencia de estas superficies, sino que además buscamos cómo determinarlas. En vez de trabajar con una inmersión de tipo gráfica, trabajaremos con una inmersión general, descrita por una referencia local. Hallaremos cuál sistema de ecuaciones diferenciales tienen que cumplir los coeficientes de las formas fundamentales. Así, pasamos a tener que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden que será más sencillo. Parte de la complejidad se lleva al problema añadido de encontrar una referencia local compatible con el planteamiento. Este sistema matricial de ecuaciones de primer orden también resulta tener un método conocido de resolución.

De forma usual, el problema de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden será equivalente a resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden. Esta ecuación de segundo orden será de tipo hiperbólica, con solución conocida bajo ciertas condiciones admisibles. Hemos comentado que para la ecuación que encontramos existe una resolución conocida, pero lo que es más, esta ecuación es del tipo llamado **ecuación de Klein-Gordon**. En la versión que tenemos, se utiliza el método de resolución de ecuaciones diferenciales hiperbólicas de Riemann y podremos generar todas las soluciones posibles. Por lo tanto, podemos generar cualquier superficie inmersa con ángulos de Jordan constantes.

Nuestro resultado general de caracterización de superficies inmersas con ángulos de Jordan constantes se basa en las soluciones de esta ecuación diferencial hiperbólica. Los coeficientes de una inmersión con ángulos de Jordan constantes deberán cumplir la ecuación hiperbólica. Recíprocamente, unas

soluciones que cumplan la ecuación hiperbólica podrán ser los coeficientes de la primera forma fundamental de una inmersión con ángulos de Jordan constantes. La demostración será la conclusión del estudio de los coeficientes cuando se tiene esta condición junto con la resolución obtenida mediante el método de Riemann.

El resultado teórico aporta la existencia de estas superficies, algo que ya era conocido, pero los pasos necesarios para aplicar el teorema nos llevan a una inmersión explícita para cada par de ángulos. De esta forma, podemos empezar a estudiar qué condiciones analíticas cumplen los invariantes.

Una vez que tenemos una representación de todas las superficies con ángulos de Jordan constantes, mediante soluciones de una ecuación diferencial, miraremos un tipo sencillo de soluciones. Estas soluciones serán de variables separadas. Este supuesto nos llevará a la solución directa de la ecuación diferencial con constantes de integración. Estas constantes determinan los ángulos de Jordan que tendrá la superficie. Además, bajo esta condición, la ratio entre dos invariantes, el cuadrado de la curvatura media y la resultante, resultará una constante que depende de los ángulos. De esta forma, encontramos una subfamilia de superficies con ángulos de Jordan constantes que tiene la condición analítica de una ratio constante entre invariantes. Esta condición, que recuerda al teorema de Lancret, será suficiente para caracterizar estas superficies dentro de esta familia.

Esta subfamilia no sólo aporta una variedad amplia de ejemplos explícitos para cualquier par de ángulos de Jordan, sino que además tiene la propiedad geométrica de estar compuesta por espirales logarítmicas. Veremos estas propiedades a través de una inmersión explícita representativa de cada superficie.

Al igual que para las superficies esféricas, llevamos el problema de las superficies con ángulos de Jordan constantes al ambiente lorentziano. En este caso, lo que se define es un ángulo complejo en el cual su parte real e imaginaria tienen relación con las rotaciones necesarias para llevar un plano al otro plano. Para estudiar esta condición, nos apoyaremos en el trabajo realizado por P. Bayard, [2], en donde se describe la aplicación de Gauss asociada a una superficie espacial mediante cuaterniones.

Al igual que en el caso euclídeo, buscamos interpretar el ángulo complejo mediante los bivectores asociados a cada plano tangente. La idea básica será relacionar primero los vectores con los cuaterniones para después interpretar el producto exterior como producto de cuaterniones. Haremos uso del álgebra de Clifford para interpretar esta operación. El siguiente paso será relacionar un cuaternión a cada posible bivector. Esta identificación nos

permite escribir la aplicación de Gauss como un cuaternión que depende de la variable complexificada de la superficie. En el trabajo original de P. Bayard se llega a una representación de la superficie a partir de un cuaternión, que se relaciona con la aplicación de Gauss, dada una métrica para el plano tangente.

Con esta representación, la imposición de la condición de ángulo complejo constante resultará natural. Veremos que será equivalente a que cierta componente del cuaternión variable que asociamos a la aplicación de Gauss sea constante. De esta manera, tenemos directamente un teorema de representación para estas superficies, donde la condición de ángulo complejo constante volverá a traducirse en un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden, análogo al caso euclídeo.

De la misma manera, resolveremos el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden mediante una equivalencia con una ecuación de segundo orden hiperbólica y el método de Riemann. Escribiremos un resultado que caracteriza cada superficie con ángulo complejo constante mediante una solución a la ecuación diferencial.

También desarrollaremos lo necesario para convertir las soluciones en inmersiones explícitas con una base del plano tangente y del plano normal adaptada a la teoría. Mostraremos los cálculos más importantes entre los cuaterniones que definen la base de cada plano.

Una vez que tenemos una representación de todas las superficies con ángulo complejo constante mediante soluciones de una ecuación diferencial, miraremos otra vez las soluciones en variables separadas. En esta ocasión, las superficies asociadas a estas soluciones tendrán la condición geométrica añadida de pertenecer a una esfera lorentziana. Buscaremos una forma de obtener una inmersión representativa de cada superficie en esta subfamilia utilizando la base del plano tangente y normal. La variedad de casos que tenemos serán: si la inmersión está contenida en un hiperboloide espacial, un hiperboloide temporal o un cono de luz. Esto se traducirá en un espectro amplio de ejemplos para las inmersiones. Del mismo modo que en el caso euclídeo, tendremos unas condiciones iniciales que determinarán el ángulo complejo constante.

Para resumir, hemos trabajado para llevar el estudio de los invariantes al estudio de la caracterización de propiedades geométricas. Se consiguen unos fundamentos, gracias en gran parte al trabajo anterior de otros autores, que permiten describir los invariantes en términos de los coeficientes y así traducir propiedades sobre los invariantes a propiedades sobre los coeficientes de las formas fundamentales.

Las condiciones geométricas nos han llevado a condiciones analíticas sobre los coeficientes. En algunas ocasiones son condiciones que implican varios invariantes y en otras ocasiones son condiciones diferenciales sobre los coeficientes de la primera forma fundamental. Estas condiciones generan directamente un resultado de existencia, pero han sido estudiadas, mediante ejemplos, para buscar propiedades suficientes sobre los invariantes. De esta forma, hemos caracterizado familias de superficies y aportado una inmersión representativa para cada posibilidad.

En conclusión, nuestro trabajo ha cumplido parte de nuestros objetivos iniciales. Las aportaciones de diferentes autores, junto con las nuestras, consiguen caracterizar propiedades geométricas. Además, tenemos las posibilidades de continuar el trabajo mediante la búsqueda de resultados análogos para superficies inmersas en espacios euclídeos o espacios lorentzianos de dimensión mayor a cuatro. En el caso lorentziano, tenemos, además, la posibilidad de estudiar las superficies temporales. El objetivo futuro más ambicioso será estudiar los conceptos físicos definidos para superficies en espacios euclídeos o lorentzianos. Al depender sólo del punto de la superficie debe haber una traducción a condiciones sobre los invariantes y se puede caracterizar de la misma forma que hemos realizado con los casos estudiados.



# Índice general

<b>1</b>	<b>Invariantes locales para inmersiones de superficies en <math>\mathbb{R}^{n+2}</math></b>	<b>1</b>
1.1	Invariantes generalizados de Little para superficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+2}$ . . . . .	2
1.2	Lista de fórmulas para los invariantes de Little . . . . .	13
1.3	La familia de invariantes de Montesinos para superficies en $\mathbb{R}^{n+2}$ . . . . .	16
1.4	Las relaciones entre los conjuntos de invariantes . . . . .	19
1.5	Particularidades del caso $n = 2$ . . . . .	30
1.6	Inmersiones superconformes . . . . .	33
1.7	Base adaptada a una superficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+2}$ , con $n > 2$ .	34
1.8	Superficies inmersas umbilicales en $\mathbb{R}^4$ . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Caracterización de superficies esféricas inmersas en <math>\mathbb{R}^{n+2}</math></b>	<b>41</b>
2.1	Inmersiones esféricas en $\mathbb{R}^4$ . . . . .	42
2.2	Inmersiones esféricas en $\mathbb{R}^{n+2}$ , con $n > 2$ . . . . .	53
2.3	Resumen de resultados . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Caracterización de superficies de ángulos constantes en <math>\mathbb{R}^4</math></b>	<b>57</b>
3.1	Ángulos de Jordan y superficies helicoidales . . . . .	59
3.2	Inmersiones con curvatura de Gauss y curvatura normal nulas	62
3.3	Inmersiones con ángulos de Jordan constantes . . . . .	64
3.4	Caracterización de la subfamilia con ratio $ H ^4/\Delta$ constante	72
3.5	Expresiones para las superficies inmersas con ratio $ H ^4/\Delta$ constante . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Invariantes locales para inmersiones de tipo espacial en <math>\mathbb{R}^{1,3}</math></b>	<b>81</b>
4.1	Conceptos básicos de $\mathbb{R}^{1,3}$ . . . . .	82
4.2	Invariantes escalares locales para superficies inmersas en $\mathbb{R}^{1,3}$	84
4.3	Lista de fórmulas para los invariantes locales . . . . .	92



4.3.1	Fórmulas para los invariantes en términos de los coeficientes de las formas fundamentales . . . . .	94
4.3.2	Inmersiones semiumbólicas en $\mathbb{R}^{1,3}$ . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Caracterización de superficies esféricas inmersas en <math>\mathbb{R}^{1,3}</math></b>	<b>97</b>
5.1	Condiciones necesarias . . . . .	99
5.2	Ecuaciones de compatibilidad . . . . .	100
5.3	Condiciones suficientes . . . . .	103
5.4	Ejemplos de superficies esféricas en $\mathbb{R}^{1,3}$ . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Caracterización de superficies de ángulos constantes en <math>\mathbb{R}^{1,3}</math></b>	<b>113</b>
6.1	La aplicación de Clifford sobre vectores . . . . .	114
6.2	Identificación ente bivectores y cuaterniones mediante la aplicación de Clifford . . . . .	115
6.3	Plano tangente de $\mathcal{Q}$ . . . . .	118
6.4	Definición de ángulo complejo entre bivectores . . . . .	119
6.5	La aplicación de Gauss de una superficie espacial inmersa . . . . .	122
6.6	Teoremas de representación . . . . .	126
6.6.1	Teorema de representación en términos de la métrica . . . . .	129
6.6.2	Aplicación del Teorema de representación . . . . .	133
6.6.3	Expresiones explícitas de la referencia compatible . . . . .	137
6.6.4	Invariantes locales para las superficies de ángulo complejo constante . . . . .	138
6.7	Caracterización de subfamilias de ángulo complejo constante . . . . .	140
6.8	Ejemplos . . . . .	148

# Capítulo 1

## Invariantes locales para inmersiones de superficies en $\mathbb{R}^{n+2}$

Nuestro trabajo comienza con los resultados del artículo de Little, [20], en el que los invariantes locales de una inmersión en  $\mathbb{R}^4$  se consideran emulando las ideas del estudio clásico de superficies en  $\mathbb{R}^3$ . En la teoría de geometría diferencial clásica, la curvatura de Gauss y la curvatura media son los dos invariantes definidos a través de la aplicación de Gauss y de su diferencial, la aplicación de Weingarten. Para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^4$ , además de los invariantes análogos a la curvatura de Gauss y a la curvatura media, aparecen dos nuevos: la curvatura normal y una función,  $\Delta$ , obtenida como la resultante de dos polinomios que se definen con los coeficientes de las formas fundamentales. Estos cuatro invariantes son usualmente conocidos como los invariantes escalares de Little (ver [20]).

Los invariantes escalares locales de Little y sus consecuencias en términos de caracterizaciones geométricas han sido estudiados, entre otros, por Romero-Fuster, Sanchez-Bringas, Soares Ruas y colaboradores (ver por ejemplo [31], [25] y [26]). Algunas de las cuestiones que se tratan en esos trabajos son: umbilicidad, existencia de líneas asintóticas ortogonales, contacto entre superficies, singularidades, etc.

Recientemente, en el artículo de Montesinos, [24], se propone una manera de encontrar invariantes de superficies inmersas en el espacio euclídeo,  $\mathbb{R}^{n+2}$ ,

de cualquier dimensión mayor o igual a 4. Se desarrolla una teoría general de invariantes sobre las segundas formas fundamentales, pero sin recurrir a una base particular del espacio normal. Aplicando este método, el autor determina una familia de cinco invariantes independientes en el caso general, que se reducen a cuatro en el caso de  $n = 2$ , esto es  $\mathbb{R}^4$ , aunque no son exactamente los mismos que los definidos por Little.

La estructura de este capítulo es:

- Definimos los invariantes locales de Little en su generalización para superficies inmersas en el espacio euclídeo de cualquier dimensión mayor o igual a cuatro.
- Recordamos las fórmulas de los invariantes de Little en términos de los coeficientes de las formas fundamentales en la base asociada a la inmersión.
- Definimos los invariantes locales de Montesinos.
- Comparamos ambos conjuntos de invariantes encontrando las relaciones entre los miembros de cada conjunto.
- Destacamos distintos resultados que simplificarán futuros estudios.

## 1.1 Invariantes generalizados de Little para superficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+2}$

A lo largo de este trabajo vamos a suponer que tenemos una superficie,  $M$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Utilizaremos las definiciones de: aplicación diferenciable, atlas, variedad diferenciable, inmersión, diferencial, espacio tangente, isometría y reparametrización que se pueden encontrar en [11].

Como nuestro trabajo será a nivel local, consideraremos que la variedad,  $M$ , está cubierta mediante una carta  $\mathbf{u}(U) = M$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Para simplificar, identificaremos la superficie con su inmersión, esto es,  $M \equiv \mathbf{x}(U)$ . Los puntos en  $U$  serán representados por sus coordenadas  $(u, v)$ , de forma que para un punto  $(u_p, v_p) \in U$  tenemos un punto en la imagen de la inmersión  $\mathbf{x}(u_p, v_p) = p$ . De forma usual, denotamos al espacio tangente de  $M$  en  $p$  por  $T_pM$ , y por  $N_pM$  el complemento ortogonal de  $T_pM$  en  $\mathbb{R}^{n+2}$ . De esta

forma,  $T_qM$  será el espacio lineal generado por  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , por lo tanto, de dimensión 2 y  $N_qM$  será de dimensión  $n$ .

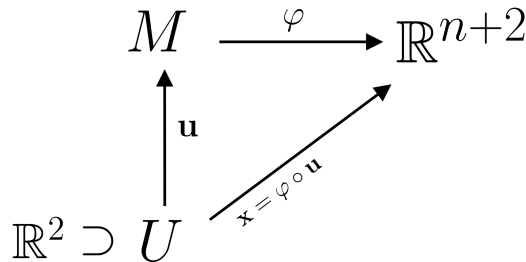


Figura 1.1: Esquema de parametrización local de una superficie,  $M$ , inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$  mediante  $\varphi$  y parametrizada por  $\mathbf{u}$ .

## Curvatura de Gauss y curvatura normal para superficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+2}$

Vamos a ir definiendo los invariantes de Little generalizados para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+2}$  uno a uno. Además, los pondremos en relación con los invariantes geométricos que nos ayudarán a definir un nuevo invariante en el caso general.

Partiendo de un punto  $p \in M$  y denotando  $m = n + 2$ , consideramos una base local  $\{e_1(p), \dots, e_m(p)\}$ , respetando la orientación canónica de  $\mathbb{R}^m$ , y adaptada a la inmersión. Esto es,  $\{e_1(p), e_2(p)\}$  es base ortonormal de  $T_pM$  y  $\{e_3(p), \dots, e_m(p)\}$  es base ortonormal de  $N_pM$ . Podemos extender, al menos a un subconjunto abierto  $p \in V \subset U$ , estos vectores a campos vectoriales,  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , de forma que  $\{e_1, e_2\}$  sea referencia ortonormal del fibrado tangente,  $TM$ , y  $\{e_3, \dots, e_m\}$  sea referencia ortonormal del fibrado normal,  $NM$ . Teniendo en cuenta otra vez que nuestro trabajo es local, consideraremos  $V = U$ . Estos campos vectoriales unitarios y ortonormales los llamaremos nuestra **referencia local**.

**Definición 1.1.1.** Dada una parametrización local de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$ ,  $\mathbf{x}$ , denotaremos por  $\{\omega_1, \omega_2\}$  a las 1-formas definidas en  $U$  mediante

$$\begin{cases} \omega_i(\partial_u) & := \langle \mathbf{x}_u, e_i \rangle, \\ \omega_i(\partial_v) & := \langle \mathbf{x}_v, e_i \rangle, \end{cases} \quad \text{para cada } i = 1, 2.$$

*Nota 1.* Como  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  forman una base del plano tangente en  $M$  se tiene que

$$\begin{vmatrix} \omega_1(\partial_u) & \omega_1(\partial_v) \\ \omega_2(\partial_u) & \omega_2(\partial_v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_u, e_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_v, e_1 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, e_2 \rangle & \langle \mathbf{x}_v, e_2 \rangle \end{vmatrix} \neq 0,$$

y por lo tanto,  $\{\omega_1, \omega_2\}$  son base de las 1-formas definidas en  $U$ .

**Definición 1.1.2.** La segunda forma fundamental de  $M$  será la aplicación bilineal y simétrica dada por

$$\mathbf{II}: TM \times TM \rightarrow NM$$

$$(V, W) \mapsto \mathbf{II}(V, W) = \left( \nabla_V \tilde{W} \right)^\perp,$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $\mathbb{R}^{n+2}$ ,  $\perp$  es la proyección sobre el espacio normal y  $\tilde{W}$  es la escritura de  $W$  en la base local.

*Nota 2.* Comprobemos que esta aplicación es realmente bilineal y simétrica. Como la conexión de Levi-Civita es lineal en el primer argumento, basta comprobar que es simétrica. Es bien conocido que esta conexión lineal cumple

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W].$$

Al ser el corchete de Lie una aplicación cerrada sobre campos vectoriales tangentes, se tiene que

$$\mathbf{II}(V, W) - \mathbf{II}(W, V) = (\nabla_V W)^\perp - (\nabla_W V)^\perp = ([V, W])^\perp = 0,$$

e implica que la segunda forma fundamental es simétrica.

**Definición 1.1.3.** Dada un parametrización local de una superficie inmersa,  $\mathbf{x}$ , definimos las 1-formas de conexión definidas en  $U$  mediante

$$\begin{cases} \omega_{ij}(\partial_u) & := \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} e_i, e_j \rangle, \\ \omega_{ij}(\partial_v) & := \langle \nabla_{\mathbf{x}_v} e_i, e_j \rangle, \end{cases} \quad \text{para cada par } i, j = 1, \dots, m.$$

Consideramos ahora dos campos vectoriales tangentes sobre  $M$ ,  $V$  y  $W$ , y denotamos **la inversa de la diferencial** de  $\mathbf{x}$  por  $(d\mathbf{x})^{-1} = d\mathbf{x}^{-1}$ , de forma que

$$d\mathbf{x}^{-1}(V) = \bar{V} \quad \text{y} \quad d\mathbf{x}^{-1}(W) = \bar{W},$$

donde  $d\mathbf{x}^{-1} : TM \rightarrow TU$  cumple que

$$d\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}_u) = \partial_u \quad \text{y} \quad d\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}_v) = \partial_v.$$

Podemos descomponer la segunda forma fundamental mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(V, W) = & (\omega_1(\bar{W})\omega_{13}(\bar{V}) + \omega_2(\bar{W})\omega_{23}(\bar{V}))e_3 \\ & + \cdots + \\ & + (\omega_1(\bar{W})\omega_{1m}(\bar{V}) + \omega_2(\bar{W})\omega_{2m}(\bar{V}))e_m. \end{aligned}$$

**Definición 1.1.4.** Las funciones  $a_i, b_i, c_i$  que cumplen

$$\omega_{1i} = a_i\omega_1 + b_i\omega_2, \quad \omega_{2i} = b_i\omega_1 + c_i\omega_2, \quad i = 3, \dots, m,$$

se llaman coeficientes de la segunda forma fundamental asociados a la referencia  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ .

*Nota 3.* En la definición estamos asumiendo que coinciden dos coeficientes, veamos que es cierto. Se tiene que

$$b_i = \omega_{1i}(d\mathbf{x}^{-1}(e_2)) = \langle \nabla_{e_2} e_1, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_1} e_2, e_i \rangle = \omega_{2i}(d\mathbf{x}^{-1}(e_1)) = b_i,$$

donde estamos usando que  $(\nabla_{e_1} e_2)^\perp = (\nabla_{e_2} e_1)^\perp$  y que si  $i = 3, \dots, m$ , entonces  $e_i \in NM$ .

Como hemos comentado previamente, los invariantes vendrán definidos a través de las 1-formas de conexión que dependen de la referencia local escogida. Sin embargo, veremos que en realidad dependen de la superficie, al comprobar que no varían si se calculan partiendo de una referencia local distinta para una misma superficie. Para ello, utilizaremos formas cuadráticas auxiliares, aunque usaremos las definiciones clásicas de las curvaturas.

**Definición 1.1.5.** Con la notación anterior, la **curvatura de Gauss** se define como la función escalar,  $K$ , tal que

$$d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2.$$

La **curvatura normal** se define como la función escalar,  $k_N$ , tal que

$$\sum_{2 < i < j \leq m} d\omega_{ij} = -k_N \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Para comprobar que son invariantes, vamos primero a calcular sus expresiones en los coeficientes, y después veremos su equivalencia con las trazas de ciertas formas cuadráticas.

Utilizando la definición de derivada exterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
 d\omega_{ij}(\partial_u, \partial_v) &= \partial_u\omega_{ij}(\partial_v) - \partial_v\omega_{ij}(\partial_u) - \omega_{ij}([\partial_u, \partial_v]) \\
 &= \partial_u\langle \nabla_{\mathbf{x}_v} e_i, e_j \rangle - \partial_v\langle \nabla_{\mathbf{x}_u} e_i, e_j \rangle \\
 &= \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} \nabla_{\mathbf{x}_v} e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{x}_v} e_i, \nabla_{\mathbf{x}_u} e_j \rangle \\
 &\quad - \langle \nabla_{\mathbf{x}_v} \nabla_{\mathbf{x}_u} e_i, e_j \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} e_i, \nabla_{\mathbf{x}_v} e_j \rangle \\
 &= \langle \nabla_{\mathbf{x}_v} e_i, \nabla_{\mathbf{x}_u} e_j \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} e_i, \nabla_{\mathbf{x}_v} e_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Si escribimos

$$\begin{cases}
 \nabla_{\mathbf{x}_u} e_l = \sum_{k=1}^m \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} e_l, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^m \omega_{lk}(\partial_u) e_k, \\
 \nabla_{\mathbf{x}_v} e_l = \sum_{k=1}^m \langle \nabla_{\mathbf{x}_v} e_l, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^m \omega_{lk}(\partial_v) e_k,
 \end{cases}$$

con  $l = 1, \dots, m$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 d\omega_{ij}(\partial_u, \partial_v) &= \sum_{k=1}^m \omega_{ik}(\partial_v)\omega_{jk}(\partial_u) - \omega_{ik}(\partial_u)\omega_{jk}(\partial_v) \\
 &= \sum_{k=1}^m -\omega_{ik}(\partial_v)\omega_{kj}(\partial_u) + \omega_{ik}(\partial_u)\omega_{kj}(\partial_v) \\
 &= \sum_{k=1}^m (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj})(\partial_u, \partial_v).
 \end{aligned}$$

Con lo que

$$d\omega_{ij}(\partial_u, \partial_v) = \sum_{k=1}^m (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj})(\partial_u, \partial_v). \quad (1.1)$$

Si aplicamos esta igualdad para encontrar las expresiones de los invariantes

propuestos, nos quedará

$$\begin{aligned}
 d\omega_{12} &= \sum_{k=1}^m \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} \\
 &= \sum_{k=3}^m -(a_i\omega_1 + b_i\omega_2) \wedge (b_i\omega_1 + c_i\omega_2) \\
 &= - \sum_{k=3}^m (a_i c_i - b_i^2) \omega_1 \wedge \omega_2.
 \end{aligned}$$

De forma usual, se denota  $K_i = (a_i c_i - b_i^2)$  con lo que la curvatura de Gauss se escribe

$$K = \sum_{k=3}^m K_i.$$

Análogamente para la curvatura normal, se tendrá que

$$\begin{aligned}
 \sum_{2 < i < j \leq m} d\omega_{ij} &= \sum_{2 < i < j \leq m} \left( \sum_{k=1}^m \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \right) \\
 &= \sum_{2 < i < j \leq m} \left( \sum_{k=1}^2 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \right) \\
 &= \sum_{2 < i < j \leq m} (\omega_{i1} \wedge \omega_{1j} + \omega_{i2} \wedge \omega_{2j}) \\
 &= - \sum_{2 < i < j \leq m} (\omega_{1i} \wedge \omega_{1j} + \omega_{2i} \wedge \omega_{2j}) \\
 &= - \sum_{2 < i < j \leq m} ((a_i\omega_1 + b_i\omega_2) \wedge (a_j\omega_1 + b_j\omega_2) \\
 &\quad + (b_i\omega_1 + c_i\omega_2) \wedge (b_j\omega_1 + c_j\omega_2)) \\
 &= - \sum_{2 < i < j \leq m} (a_i b_j - b_i a_j + b_i c_j - c_i b_j) \omega_1 \wedge \omega_2.
 \end{aligned}$$

De forma usual, se escribe la curvatura normal como

$$k_N = \sum_{2 < i < j \leq m} (a_i - c_i) b_j - (a_j - c_j) b_i.$$

En principio la definición de las curvaturas parece depender de la referencia local escogida. En realidad estas expresiones sólo dependen del punto



de la superficie inmersa. Se ha demostrado este resultado en la literatura comparando las expresiones para dos referencias distintas, como se realiza en [17], o comparando las medidas escalares de la **elipse de curvatura**, como realiza Little de forma original. El invariante geométrico de la segunda forma fundamental será la elipse de curvatura que estudiaremos a partir de la siguiente sección.

Dado que la segunda lista de invariantes dependerá directamente de la elipse de curvatura, la manera más natural de ver que las curvaturas son invariante a través de la relación entre las listas. En cambio, los siguientes invariantes de la lista de Little están definidos de forma que se puede concluir fácilmente que no dependen de la referencia local.

## Estudio de la elipse de curvatura para superficies inmersas en $\mathbb{R}^{n+2}$

Si continuamos estudiando los invariantes de Little para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^{n+2}$ , tenemos que ver el invariante geométrico clásico de las superficies inmersas: la **elipse de curvatura**.

Al ser la segunda forma fundamental una aplicación lineal, queda determinada por la elipse de curvatura. De esta forma, los invariantes que definimos tienen siempre una relación con cantidades asociadas a la elipse. Por ejemplo, veremos que la curvatura de Gauss y la curvatura normal, que ya hemos definido, son equivalentes a determinar los semi-ejes de la elipse de curvatura.

Los invariantes que nos quedan por definir tienen una relación más directa con la elipse de curvatura. Aún así, remarcamos que cualquier invariante escalar que se defina tiene que poder relacionarse con un valor escalar dependiente de la elipse y de la primera forma fundamental.

**Definición 1.1.6.** Para cada punto  $p \in M$ , definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \eta_p : S^1(p) &\rightarrow N_p M \\ v &\rightarrow \eta_p(v) = (\gamma''(0))^\perp, \end{aligned}$$

donde  $S^1(p) \subset T_p M$  denota a la circunferencia unitaria en el plano tangente en  $p \in M$ ,  $\gamma : I \rightarrow M$  es una curva parametrizada por la longitud de arco de forma que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$  y  $\perp$  es la proyección ortogonal sobre el plano normal.

Comprobemos que esta definición no depende de la elección de  $\gamma$ . Sea  $N \in NM$ , se tiene que

$$\langle \nabla_{\gamma'(0)} \gamma'(s), N(p) \rangle|_{s=0} = -\langle \gamma'(0), \nabla_{\gamma'(0)} N|_p \rangle = -\langle v, \nabla_v N|_p \rangle.$$

Por ello, si  $V \in TM$  tal que  $V(p) = v$ , entonces

$$\eta_p(v) = \mathbf{II}(V, V)|_p,$$

por lo tanto,  $\eta_p$  no depende de la curva. Además, definimos  $\eta : S^1 \subset TM \rightarrow NM$  mediante

$$\eta(V) = (\nabla_V V)^\perp = \mathbf{II}(V, V).$$

Si  $t(\phi) = \cos \frac{\phi}{2} e_1 + \sin \frac{\phi}{2} e_2$  es un vector tangente unitario cualquiera con  $\phi \in \mathbb{R}$ , se tiene que la imagen de  $S^1$  por  $\eta_p$  es una elipse:

$$\begin{aligned} \eta(t(\phi)) &= (\nabla_{t(\phi)} t(\phi))^\perp \\ &= \sum_{i=3}^m (a_i \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2b_i \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + c_i \sin^2 \frac{\phi}{2}) e_i \\ &= \sum_{i=3}^m \left( \frac{a_i}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{a_i}{2} (1 - \sin^2 \frac{\phi}{2}) \right. \\ &\quad \left. + b_i \sin \phi + \frac{c_i}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{c_i}{2} (1 - \cos^2 \frac{\phi}{2}) \right) e_i \\ &= \sum_{i=3}^m \left( \frac{a_i + c_i}{2} + \frac{a_i - c_i}{2} \cos \phi + b_i \sin \phi \right) e_i \\ &= \left( \sum_{i=3}^m \frac{a_i + c_i}{2} e_i \right) + \left( \sum_{i=3}^m \frac{a_i - c_i}{2} e_i \right) \cos \phi + \left( \sum_{i=3}^m b_i e_i \right) \sin \phi \\ &= H + B \cos \phi + C \sin \phi, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde

$$H = \sum_{i=3}^m \frac{a_i + c_i}{2} e_i, \quad B = \sum_{i=3}^m \frac{a_i - c_i}{2} e_i \quad y \quad C = \sum_{i=3}^m b_i e_i.$$

Vemos que la imagen de  $S^1$  por  $\eta_p$  es en realidad una **elipse** de centro  $H$  y definida por los vectores  $B$  y  $C$ . Estos vectores no son necesariamente sus semi-ejes ni tienen que compartir el mismo plano que  $H$ , ver figura 1.2.

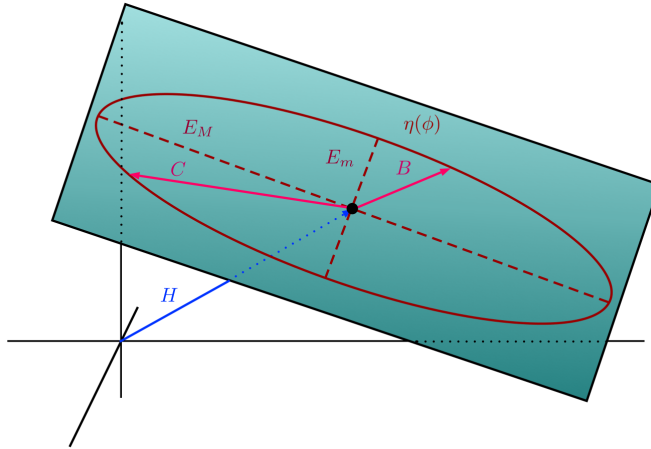


Figura 1.2: Posición general de la elipse en el espacio generado por  $\{H, B, C\}$ .

Dada cualquier elipse, sus invariantes geométricos escalares, salvo cambios en la elección de la base ortonormal, son la **longitud de su vector centro** (el vector definido entre el origen y el centro), la **longitud de sus semi-ejes** y la **posición relativa de los semi-ejes** con respecto a su centro. Junto con los invariantes escalares ya conocidos, la curvatura de Gauss y la curvatura normal, se buscan funciones escalares que determinen estos invariantes geométricos.

*Nota 4.* Veremos, en la sección 1.5, que la lista de invariantes de Little consigue determinar dichos invariantes geométricos en el caso  $n = 2$ , pero que es insuficiente para el caso general. Por ahora, nos centramos en ver cómo se definen los invariantes de Little generalizados restantes.

**Definición 1.1.7.** Llamaremos **vector de curvatura media** al vector definido por el centro de la elipse y llamaremos **curvatura media** a su norma al cuadrado. Denotaremos por  $H$  al vector de curvatura media y por  $|H|^2$  a la curvatura media.

*Nota 5.* Dado que la curvatura media está directamente definida a partir de un invariante geométrico de la elipse de curvatura, la distancia del origen de la elipse al origen de coordenadas, no depende de la referencia local escogida.

Para determinar la posición relativa entre los semi-ejes y el centro, definiremos la función  $\Delta$  que es el último de los invariantes clásicos. Veremos,

en la sección 1.5, cómo este invariante completa la determinación de la elipse en caso  $n = 2$ .

Definiremos este invariante directamente desde las formas cuadráticas auxiliares

$$Q_{ij} = \langle \nabla_{X^\cdot}, e_i \rangle \wedge \langle \nabla_{X^\cdot}, e_j \rangle : TM \times TM \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

donde  $2 < i < j \leq m$ ,  $X$  es un vector tangente y  $\mathcal{C}^\infty(M)$  es el conjunto de funciones  $\mathcal{C}^\infty$  definidas en  $M$ . Cada 2-forma  $Q_{ij}$  se descompone en términos de  $\omega_1 \wedge \omega_2$  de forma que tenemos

$$Q_{ij}(Y, Z) = S_{ij}(X)(\omega_1 \wedge \omega_2)(Y, Z).$$

Para encontrar las expresiones para estas funciones, escribimos  $X = \omega_1(X)e_1 + \omega_2(X)e_2$  de forma que

$$\langle \nabla_{X^\cdot}, e_i \rangle = \omega_1(X)\omega_{1i} + \omega_2(X)\omega_{2i},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, e_i \rangle \wedge \langle \nabla_X Z, e_j \rangle &= (\omega_1(X)\omega_{1i}(Y) + \omega_2(X)\omega_{2i}(Y)) \\ &\quad (\omega_1(X)\omega_{1j}(Z) + \omega_2(X)\omega_{2j}(Z)) \\ &= ((a_i b_j - b_i a_j)(\omega_1(X))^2 \\ &\quad + (a_i c_j - c_i a_j)\omega_1(X)\omega_2(X) \\ &\quad + (b_i c_j - c_i b_j)(\omega_2(X))^2)(\omega_1 \wedge \omega_2)(Y, Z). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} S_{ij}(X) &= (a_i b_j - b_i a_j)(\omega_1(X))^2 + (a_i c_j - c_i a_j)\omega_1(X)\omega_2(X) \\ &\quad + (b_i c_j - c_i b_j)(\omega_2(X))^2. \end{aligned}$$

Recordemos que para una forma cuadrática con  $p = 2$ , es decir, si

$$S(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

se define su determinante como

$$\det S = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}.$$

**Definición 1.1.8.** Dada la notación anterior, se define la **resultante**, denotada por  $\Delta$ , como

$$\Delta = \sum_{2 < i < j \leq m} \det S_{ij} = \sum_{2 < i < j \leq m} \begin{vmatrix} a_i b_j - b_i a_j & \frac{a_i c_j - c_i a_j}{2} \\ \frac{a_i c_j - c_i a_j}{2} & b_i c_j - c_i b_j \end{vmatrix}.$$

*Nota 6.* Dada su definición como el determinante de una forma cuadrática, tenemos que es invariante al igual que lo era la curvatura media.

**Proposición 1.1.9.** La *resultante* se puede escribir como

$$\Delta = \sum_{2 < i < j \leq m} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} a_i & 2b_i & c_i & 0 \\ a_j & 2b_j & c_j & 0 \\ 0 & a_i & 2b_i & c_i \\ 0 & a_j & 2b_j & c_j \end{vmatrix}.$$

La demostración de esta igualdad y el nombre de *resultante* tienen su origen en la teoría de discriminantes y resultantes de polinomios. Se puede ver un análisis profundo de este tema en [16], concretamente en el capítulo 12 donde se estudian polinomios homogéneos en varias variables y la *resultante* entre ellos. Si utilizamos la fórmula de Sylvester, entonces la *resultante* de los polinomios  $a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2$  y  $a_j x^2 + 2b_j xy + c_j y^2$  coincide con la expresión del determinante

$$\begin{vmatrix} a_i & 2b_i & c_i & 0 \\ a_j & 2b_j & c_j & 0 \\ 0 & a_i & 2b_i & c_i \\ 0 & a_j & 2b_j & c_j \end{vmatrix}.$$

De esta forma, conseguimos ambas expresiones en la definición de  $\Delta$ . En el mismo capítulo se menciona que cuando  $\Delta = 0$  los polinomios tienen una raíz común. En nuestro caso significa que el origen de coordenadas pertenece a la elipse.

Todas las expresiones vistas coinciden con las definiciones de Little, ver [20], en el caso  $n = 2$ . Como habíamos comentado, Little interpreta la relación entre los invariantes escalares y los invariantes geométricos de la imagen de la elipse de curvatura. Veremos en la sección 1.5 un estudio de cómo este invariante influye en la posición del centro de la elipse incluyendo parte de los resultados de Little, pero utilizando los primeros resultados de nuestro trabajo.

## 1.2 Fórmulas para los invariantes en términos de los coeficientes de las formas fundamentales en la base asociada a la inmersión

En la sección anterior, hemos introducido expresiones para los invariantes generalizados de Little en términos de una referencia local ortonormal. Lo que buscamos en esta sección es calcular nuevas expresiones en términos de una inmersión particular dada, pero utilizando como base del plano tangente las derivadas parciales de la inmersión.

### Los coeficientes de la primera forma fundamental

Recordemos que trabajamos con una superficie inmersa mediante  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ , con sus derivadas parciales  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  que son una base del espacio tangente. **Los coeficientes de la primera forma fundamental** son las funciones definidas por

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \quad \text{y} \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Todas las fórmulas para los invariantes que veremos tienen una escritura más sencilla bajo una condición sobre los coeficientes.

**Definición 1.2.1.** *Una inmersión es llamada **isoterma** si  $E = G$  y  $F = 0$ .*

Esta condición no es restrictiva, al menos a nivel local, gracias al siguiente resultado.

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  una inmersión. Para cada punto  $p \in U$ , existe un subconjunto abierto  $V \subset U$  y un cambio de variable  $\varphi : V \rightarrow U$  tal que  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \varphi$  es isoterma.*

Utilizaremos este resultado cada vez que requiramos una **reparametrización isoterma**. Para este resultado clásico podemos ver una demostración en [7, página 15] o en [29, página 31].

## Las segundas formas fundamentales

Denotamos por  $\{N_1, \dots, N_n\}$  una base ortonormal del espacio normal. Antes teníamos la segunda forma fundamental,  $\mathbf{II}$ , en la definición 1.1.2, ahora vamos a definir las proyecciones de la segunda forma fundamental con respecto a la base del espacio normal. Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , **la segunda forma fundamental asociada** al  $i$ -ésimo vector de la base normal es la aplicación  $\eta_i : TM \times TM \rightarrow C^\infty(M)$ , dada por

$$\eta_i(X, Y) = \langle \nabla_X Y, N_i \rangle,$$

donde  $X$  e  $Y$  son vectores tangentes. Además, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , **los coeficientes de la segunda forma fundamental asociada** a la parametrización y al  $i$ -ésimo vector de la base normal son

$$\begin{aligned} \eta_i(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) &= \langle \mathbf{x}_{uu}, N_i \rangle = e_i, \\ \eta_i(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) &= \langle \mathbf{x}_{uv}, N_i \rangle = f_i, \\ \eta_i(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) &= \langle \mathbf{x}_{vv}, N_i \rangle = g_i. \end{aligned}$$

Denotemos por  $A$  la matriz  $n \times 3$  de todos los coeficientes asociados a cada vector de la base del normal, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & f_n & g_n \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental, junto con la matriz  $A$ , serán suficientes para escribir fórmulas para los invariantes. Para facilitar la notación, vamos a introducir las siguientes notaciones.

- Dados  $i < j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , denotamos por  $M_{ij}$  la matriz  $3 \times 3$  dada por

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} E & F & G \\ e_i & f_i & g_i \\ e_j & f_j & g_j \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

- Sea  $S_3(n)$  la familia de subconjuntos ordenados de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de tres elementos. Para cada trío  $\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)$ , ( $i_1 < i_2 < i_3$ ) denotamos

por  $A_{i_1 i_2 i_3}$  la submatriz de  $A$  dada por las filas  $i_1, i_2, i_3$ , es decir,

$$A_{i_1 i_2 i_3} = \begin{pmatrix} e_{i_1} & f_{i_1} & g_{i_1} \\ e_{i_2} & f_{i_2} & g_{i_2} \\ e_{i_3} & f_{i_3} & g_{i_3} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

## Lista de fórmulas para los invariantes locales de Little

Vamos a escribir las fórmulas para los invariantes locales de Little en su versión general para superficies inmersas.

**Proposición 1.2.3.** 1. *La norma al cuadrado del vector curvatura media:*

$$|H|^2 = \sum_{i=1}^n H_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \frac{Eg_i - 2Ff_i + Ge_i}{EG - F^2} \right)^2.$$

2. *La curvatura de Gauss:*

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{e_i g_i - f_i^2}{EG - F^2}.$$

3. *El cuadrado de la curvatura normal:*

$$k_N^2 = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_{ij}|^2}{(EG - F^2)^3}.$$

*Esta expresión permite ver la curvatura normal como la norma al cuadrado del vector cuyas coordenadas, en la base canónica, son los determinantes de todas las matrices  $M_{ij}$ , con un factor de  $\frac{1}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}$ .*

4. *La resultante:*

$$\Delta = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij},$$

donde  $\Delta_{ij}$  es la resultante de los polinomios  $P_l(x, y) = e_l x^2 + 2f_l xy + g_l y^2$  para los casos  $l = i$  y  $l = j$ , es decir

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} e_i & 2f_i & g_i & 0 \\ e_j & 2f_j & g_j & 0 \\ 0 & e_i & 2f_i & g_i \\ 0 & e_j & 2f_j & g_j \end{vmatrix}.$$



### 1.3 La familia de invariantes de Montesinos para superficies en $\mathbb{R}^{n+2}$

Desde otro punto de vista, el trabajo de Montesinos, ver [24], aplica la teoría general de invariantes para obtener los que aparecen en este ámbito. De esta forma, para inmersiones de superficies, se llega a determinar los invariantes geométricos de la elipse de curvatura a partir de **cinco** invariantes escalares. Además, se encuentran expresiones en términos de los vectores que definen la elipse  $H, B$  y  $C$ .

Para empezar, definimos los siguientes vectores normales auxiliares

$$\begin{aligned} b_1 &:= \mathbf{II}(e_1, e_1), \\ b_2 &:= \mathbf{II}(e_2, e_2), \\ b_3 &:= \mathbf{II}(e_1, e_2) = \mathbf{II}(e_2, e_1), \end{aligned}$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  son una referencia ortonormal del fibrado tangente y  $\mathbf{II}$  es la segunda forma fundamental.

Nótese que, en general,  $b_1, b_2$  y  $b_3$  no forman una base ortonormal del espacio normal, ni siquiera generan todo el espacio normal, pero vamos a ver que sí definen el subespacio que contiene el plano de la elipse. Utilizando el mismo tipo de manipulaciones que usábamos en las secciones anteriores, pero con la nueva notación, tenemos que la elipse de curvatura será

$$\begin{aligned} \eta(\phi) &= \mathbf{II}(t(\phi), t(\phi)) \\ &= \mathbf{II}\left(\cos \frac{\phi}{2} e_1 + \sin \frac{\phi}{2} e_2, \cos \frac{\phi}{2} e_1 + \sin \frac{\phi}{2} e_2\right) \\ &= \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{II}(e_1, e_1) + \sin^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{II}(e_2, e_2) + \sin \phi \mathbf{II}(e_1, e_2) \\ &= \cos^2 \frac{\phi}{2} b_1 + \sin^2 \frac{\phi}{2} b_2 + \sin \phi b_3, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde hemos usado la bilinealidad de la segunda forma fundamental. Para esta notación, obtenemos otra vez tres vectores que definen la elipse de curvatura

$$\begin{aligned} \eta(\phi) &= \cos^2 \frac{\phi}{2} b_1 + \sin^2 \frac{\phi}{2} b_2 + \sin \phi b_3 \\ &= (1 + \cos \phi) \frac{b_1}{2} + (1 - \cos \phi) \frac{b_2}{2} + \sin \phi b_3 \\ &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2) + \frac{\cos \phi}{2}(b_1 - b_2) + \sin \phi b_3 \\ &= H + \cos \phi B + \sin \phi C. \end{aligned}$$

Remarcamos que esta expresión toma la misma forma que la Ec. (1.2), pero los vectores  $H$ ,  $B$  y  $C$  están en función de los  $b_i$ . De esta manera, cualquier valor escalar descrito por  $H$ ,  $B$  y  $C$ , que sea independiente de cambios del ángulo  $\phi$ , serán invariantes escalares.

Ya habíamos comentado que las curvaturas definidas por Little se pueden poner en relación con medidas de la elipse de curvatura. La diferencia con la lista de invariantes de Montesinos será que ahora están directamente definidos utilizando los productos escalares

$$\begin{aligned} hh &= \langle H, H \rangle, & bb &= \langle B, B \rangle, & cc &= \langle C, C \rangle, \\ hb &= \langle H, B \rangle, & hc &= \langle H, C \rangle, & bc &= \langle B, C \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Aunque los vectores  $B$  y  $C$ , que definen la elipse de curvatura, no son en general sus semi-ejes, sí que los determinan. Definiremos un conjunto de invariantes escalares a partir de  $\{H, B, C\}$  a la vez que veremos cómo determinan la elipse.

Un ejemplo sencillo de cómo podemos trabajar con  $B$  y  $C$  es el cálculo de las longitudes de los semi-ejes. Los semi-ejes de la elipse de curvatura están dados por aquellos valores de  $\phi$  donde  $\langle \eta(\phi) - H, \eta'(\phi) \rangle = 0$ ,  $\eta(\phi)$  definida en la Ec. (1.5). Esto es, aquellos valores de  $\phi$  que cumplen

$$\langle \cos \phi B + \sin \phi C, -\sin \phi B + \cos \phi C \rangle = 0,$$

o equivalentemente

$$bc \cos 2\phi + \frac{cc - bb}{2} \sin 2\phi = 0.$$

Las soluciones son

$$\cos 2\phi = \pm \frac{bb - cc}{\sqrt{(bb - cc)^2 + 4bc^2}}, \quad \sin 2\phi = \pm \frac{2bc}{\sqrt{(bb - cc)^2 + 4bc^2}},$$

donde debemos tomar simultáneamente signo positivo o negativo. La longitud para cualquier radio de la elipse es

$$\begin{aligned} \langle \eta(\phi) - H, \eta(\phi) - H \rangle &= \langle \cos \phi B + \sin \phi C, \cos \phi B + \sin \phi C \rangle \\ &= \cos^2 \phi bb + \sin^2 \phi cc + 2bc \sin \phi \cos \phi \\ &= \cos^2 \phi \left( \frac{bb}{2} + \frac{bb}{2} + \frac{cc}{2} - \frac{cc}{2} \right) \\ &\quad + \sin^2 \phi \left( \frac{cc}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{bb}{2} - \frac{bb}{2} \right) + 2bc \sin \phi \cos \phi \\ &= \frac{bb + cc}{2} + \frac{bb - cc}{2} \cos 2\phi + bc \sin 2\phi. \end{aligned}$$

El cálculo directo nos lleva a que las longitudes de los semi-ejes son

$$\begin{aligned} |E_M| &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( bb + cc + \sqrt{(bb - cc)^2 + 4bc^2} \right)}, \\ |E_m| &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( bb + cc - \sqrt{(bb - cc)^2 + 4bc^2} \right)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Con estas igualdades, se demuestra directamente que

$$|E_M|^2 + |E_m|^2 = bb + cc,$$

y

$$|E_M|^2 |E_m|^2 = \frac{(bb + cc)^2 - ((bb - cc)^2 + 4bc^2)}{4} = bb \, cc - bc^2.$$

Concluimos que  $bb+cc$  y  $bb \, cc - bc^2$  son invariantes que determinan la longitud de los semi-ejes. Equivalentemente, determinan la forma de la elipse.

Para determinar la posición de la elipse respecto al centro tenemos que estudiar los invariantes, respecto cambios de base, de la matriz

$$V_M = \begin{pmatrix} hh & hb & hc \\ hb & bb & bc \\ hc & bc & cc \end{pmatrix}.$$

Sus invariantes serán sus trazas de orden 1 (la traza usual), orden 2 (la suma de los determinantes de los menores principales de orden 2) y orden 3 (su determinante), es decir

$$\text{tr}(V_M) = hh + bb + cc,$$

que podemos separar en las funciones escalares  $hh$  y en  $bb + cc$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr}_2(V_M) &= hh \, bb - hb^2 + bb \, cc - bc^2 + cc \, hh - hc^2 \\ &= |H \times B|^2 + |B \times C|^2 + |H \times C|^2, \end{aligned}$$

que a su vez podemos separar en  $|H \times B|^2 + |H \times C|^2$  y en  $|B \times C|^2$ , y finalmente

$$\text{tr}_3(V_M) = \det(V_M).$$

Este determinante se puede entender como el volumen del paralelepípedo generado por  $H$ ,  $B$  y  $C$ .

Sin repetir valores, **tenemos cinco invariantes** que determinan la elipse de curvatura.

**Definición 1.3.1.** (Ver [24], página 138, segundo párrafo) El conjunto de invariantes escalares que definen la elipse de curvatura es:

1.  $I_1 = hh$ , la norma al cuadrado del vector curvatura media,  $H$ ,
2.  $I_2 = bb + cc$ , la suma de las longitudes al cuadrado de los semi-ejes,
3.  $I_3 = bb\ cc - bc^2$ , el producto de las longitudes al cuadrado de los semi-ejes,
4.  $I_4 = hb^2 + hc^2$ , equivalente a  $|H|^2(|B|^2 + |C|^2) - (|H \times B|^2 + |H \times C|^2)$ ,
5.  $I_5 = \det(V_M)$ , donde  $V_M$  es la matriz

$$V_M = \begin{pmatrix} hh & hb & hc \\ hb & bb & bc \\ hc & bc & cc \end{pmatrix},$$

equivalente al volumen del paralelepípedo generado por  $H$ ,  $B$  y  $C$ .

Veremos la relación completa entre estos invariantes y los de Little generalizados, aunque ya podemos ver que, por ejemplo,  $|H|^2 = I_1$ .

Nótese que si estamos en el caso  $n = 2$ , entonces  $I_5 = 0$ , por lo que en las relaciones entre los conjuntos de invariantes sólo estarán implicados los cuatro primeros. Más adelante se verá qué condiciones implican que  $I_5$  sea nulo.

## 1.4 Las relaciones entre los conjuntos de invariantes

A partir de esta sección comienza el trabajo original desarrollado para la tesis.

Comenzamos con la determinación de la relación entre ambos conjuntos de invariantes: los de Little y los de Montesinos.

**Proposición 1.4.1.** La relación entre ambas listas de invariantes viene dada por las siguientes igualdades

1.  $|H|^2 = I_1$ ,
2.  $K = I_1 - I_2$ ,
3.  $k_N^2 = 4I_3$ ,
4.  $\Delta = I_3 + I_4 - I_1I_2$ .

Además, las relaciones recíprocas son

1.  $I_1 = |H|^2$ ,
2.  $I_2 = |H|^2 - K$ ,
3.  $I_3 = \frac{k_N^2}{4}$ ,
4.  $I_4 = \Delta - \frac{k_N^2}{4} + |H|^2(|H|^2 - K)$ .

Cabe destacar que las relaciones  $|H|^2 = I_1$ ,  $K = I_1 - I_2$  y  $k_N^2 = 4I_3$  ya están presentes en el artículo de Little (en el caso  $n = 2$ ). Asimismo, la cuarta relación puede ser parcialmente deducida de los resultados de Little (sólo en el caso  $\Delta > 0$ ).

Además, al demostrar este resultado en el caso general, tenemos la relación entre los invariantes de Little y la elipse de curvatura. De esta forma, tenemos una nueva demostración del carácter invariante de las curvaturas de Gauss y la curvatura normal.

**Demostración:** La demostración se realizará empezando por buscar las expresiones de los términos que definen los invariantes  $I_i$  de Montesinos. Realizaremos una simplificación de las expresiones asumiendo que la inmersión es isoterma ( $E = G$  y  $F = 0$ ) y así compararlas con las expresiones de Little en este caso.

Mediante el método de Gram–Schmidt aplicado a la base del plano tangente,  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ , obtenemos los vectores

$$\begin{cases} T_1 &= \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \\ T_2 &= \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{E}}. \end{cases}$$

De esta forma, calculamos los coeficientes para esta base de la segunda forma fundamental,  $\mathbf{II}$ , y tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \mathbf{II}(t_1, t_1) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n e_i N_i, \\ b_2 = \mathbf{II}(t_2, t_2) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n g_i N_i, \\ b_3 = \mathbf{II}(t_1, t_2) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n f_i N_i. \end{array} \right.$$

Veamos las componentes de los vectores  $H, B$  y  $C$ ,

$$\begin{aligned} H &= \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n (e_i + g_i) N_i, \\ B &= \frac{b_1 - b_2}{2} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n (e_i - g_i) N_i, \\ C &= b_3 = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n f_i N_i. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora calculamos los productos escalares que describen los invariantes  $I_i$  definidos en las Ecs. (1.6),

$$\left\{ \begin{array}{l} hh = \frac{1}{4E^2} \sum_{i=1}^n (e_i + g_i)^2, \\ bb = \frac{1}{4E^2} \sum_{i=1}^n (e_i - g_i)^2, \\ cc = \frac{1}{E^2} \sum_{i=1}^n f_i^2, \\ hb = \frac{1}{4E^2} \sum_{i=1}^n (e_i^2 - g_i^2), \\ hc = \frac{-1}{2E^2} \sum_{i=1}^n (e_i + g_i) f_i, \\ bc = \frac{-1}{2E^2} \sum_{i=1}^n (e_i - g_i) f_i. \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Con estas expresiones vamos a comprobar las igualdades del enunciado:

1. Se cumple directamente por las definiciones de ambos invariantes,  $|H|^2 = hh = I_1$ .
2. Para comprobar la segunda ecuación, vamos a desarrollar  $I_2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= bb + cc = \frac{1}{4E^2} \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i)^2 + 4f_i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4E^2} \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i)^2 - 4g_i e_i + 4f_i^2 \right) \\
 &= \left( \frac{1}{4E^2} \sum_{i=1}^n (e_i + g_i)^2 \right) - \frac{1}{E^2} \sum_{i=1}^n (g_i e_i - f_i^2) \\
 &= I_1 - K.
 \end{aligned}$$

3. Vamos a desarrollar  $I_3$  y así encontrar la fórmula de Little para la curvatura normal. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 I_3 &= bb cc - bc^2 \\
 &= \frac{1}{4E^4} \left( \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i)^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n f_j^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i) f_i \right) \left( \sum_{j=1}^n (e_j - g_j) f_j \right) \right) \\
 &= \frac{1}{4E^4} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_i - g_i)^2 f_j^2 + (e_j - g_j)^2 f_i^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2(e_i - g_i) f_i (e_j - g_j) f_j \right).
 \end{aligned}$$

Verifiquemos que cada término del sumatorio es igual a  $|M_{ij}|^2$ . Tenemos que

$$\begin{aligned}
 |M_{ij}|^2 &= E^2 (f_i g_j - f_j g_i + e_i f_j - e_j f_i)^2 \\
 &= E^2 ((g_j - e_j) f_i - (g_i - e_i) f_j)^2 \\
 &= E^2 ((g_j - e_j)^2 f_i^2 - 2(g_j - e_j) f_i (g_i - e_i) f_j + (g_i - e_i)^2 f_j^2).
 \end{aligned}$$

Juntando ambas expresiones,

$$\begin{aligned}
 I_3 &= bb\ cc - bc^2 \\
 &= \frac{1}{4E^4} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|M_{ij}|^2}{E^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4E^6} \left( \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_{ij}|^2 \right) = \frac{1}{4} k_N^2.
 \end{aligned}$$

4. Para comprobar la cuarta expresión del enunciado, calculamos  $I_3 + I_4 - I_1 I_2$  por partes. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 I_1 I_2 &= hh(bb + cc) \\
 &= \frac{1}{16E^4} \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i)^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n (e_j - g_j)^2 + 4 \sum_{j=1}^n f_j^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4E^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{4} \left( (e_i + g_i)^2 (e_j - g_j)^2 + (e_j + g_j)^2 (e_i - g_i)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 4(e_i + g_i)^2 f_j^2 + 4(e_j + g_j)^2 f_i^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4E^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4} (e_i^2 - g_i^2)^2 + (e_i + g_i)^2 f_i^2 \right),
 \end{aligned}$$

y tenemos

$$\begin{aligned}
 I_4 &= hb^2 + hc^2 \\
 &= \frac{1}{4E^2} \left( \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (e_i^2 - g_i^2) \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (e_j^2 - g_j^2) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i) f_i \right) \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i) f_i \right) \right) \\
 &= \frac{1}{4E^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{1}{2} (e_i^2 - g_i^2) (e_j^2 - g_j^2) + 2(e_i + g_i) f_i (e_j + g_j) f_j \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4E^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4} (e_i^2 - g_i^2)^2 + (e_i + g_i)^2 f_i^2 \right),
 \end{aligned}$$



por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I_4 + I_3 - I_1 I_2 &= \frac{1}{4E^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{1}{2}(e_i^2 - g_i^2)(e_j^2 - g_j^2) \right. \\
&\quad + 2(e_i + g_i)(e_j + g_j)f_i f_j \\
&\quad + (e_j - g_j)^2 f_i^2 - 2(e_j - g_j)f_i(e_i - g_i)f_j \\
&\quad + (e_i - g_i)^2 f_j^2 - \left(\frac{1}{4}(e_i + g_i)^2(e_j - g_j)^2 \right. \\
&\quad + \frac{1}{4}(e_j + g_j)^2(e_i - g_i)^2 + (e_i + g_i)^2 f_j^2 \\
&\quad \left. \left. + (e_j + g_j)^2 f_i^2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{4E^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( 4e_j f_i f_j g_i - 4e_i f_j^2 g_i - e_j^2 g_i^2 - 4e_j f_i^2 g_j \right. \\
&\quad \left. + 4e_i f_i f_j g_j + 2e_i e_j g_i g_j - e_i^2 g_j^2 \right) \\
&= \frac{1}{4E^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}.
\end{aligned}$$

□

El quinto invariante, dado que es nulo si  $n = 2$ , no tiene análogo como generalización de un invariante de Little. Ofrecemos una fórmula, Teorema 1.4.2, en términos de los coeficientes de las formas fundamentales para facilitar su cálculo en futuras ocasiones. Además, esta demostración sigue las ideas básicas de las pruebas de las fórmulas para los invariantes de Little comparando distintas referencias, como se puede ver en [17].

**Teorema 1.4.2.** *El invariante  $I_5$  se puede escribir mediante los coeficientes de las formas fundamentales de la siguiente forma:*

$$I_5 = \frac{1}{4(EG - F^2)^3} \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)} |A_{i_1 i_2 i_3}|^2. \quad (1.10)$$

*Esto es, salvo un factor de  $\frac{1}{4(EG - F^2)^3}$ ,  $I_5$  es la norma al cuadrado del vector cuyas componentes son los determinantes de todas las submatrices  $3 \times 3$  de  $A$ . Por lo tanto,  $I_5 = 0$  si y sólo si el rango de  $A$  es menor que 3.*

**Demostración:** Esta demostración se realizará en dos pasos:

1. Demostraremos que la expresión de la derecha en la Ec. (1.10) es realmente invariante respecto a cambios de parámetros.
2. Demostraremos que la expresión coincide con la definición de  $I_5$  al desarrollarse en el caso de una parametrización isoterma.

Empecemos viendo que la expresión es invariante bajo una reparametrización genérica. Si  $\mathbf{x}$  es la superficie inmersa, sea  $h = (h_1, h_2)$  un cambio de parámetros de forma que tenemos

$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) := \mathbf{x}(h_1(u, v), h_2(u, v)).$$

Usaremos la notación usual para denotar los coeficientes de  $\mathbf{x}$  y usaremos  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{e}_i, \bar{f}_i, \bar{g}_i$  para denotar los coeficientes de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Los cálculos directos muestran que los coeficientes de la primera forma fundamental de  $\bar{\mathbf{x}}$  se escriben en términos de los coeficientes de  $\mathbf{x}$  de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{2u} \\ h_{1v} & h_{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{1v} \\ h_{2u} & h_{2v} \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 &= (h_{1u}h_{2v} - h_{1v}h_{2u})^2(EG - F^2) \\ &= (\text{Jac}(h))^2(EG - F^2). \end{aligned}$$

Análogamente, los coeficientes de la segunda forma fundamental se relacionan de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_i & \bar{f}_i \\ \bar{f}_i & \bar{g}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{2u} \\ h_{1v} & h_{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i & f_i \\ f_i & g_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{1v} \\ h_{2u} & h_{2v} \end{pmatrix},$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Además, la matriz  $\bar{A}$  asociada a  $\bar{\mathbf{x}}$  se relaciona con la matriz asociada a  $\mathbf{x}$  de la siguiente manera

$$\bar{A} = A \cdot R^T,$$

donde

$$R := \begin{pmatrix} h_{1u}^2 & 2h_{1u}h_{2u} & h_{2u}^2 \\ h_{1u}h_{1v} & (h_{1v}h_{2u} + h_{1u}h_{2v}) & h_{2u}h_{2v} \\ h_{1v}^2 & 2h_{1v}h_{2v} & h_{2v}^2 \end{pmatrix}.$$

El cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} |R| &= h_{1u}^3 h_{2v}^3 - 3h_{1u}^2 h_{1v} h_{2u} h_{2v}^2 + 3h_{1u} h_{1v}^2 h_{2u}^2 h_{2v} - h_{1v}^3 h_{2u}^3 \\ &= (h_{1u} h_{2v} - h_{1v} h_{2u})^3 \\ &= (\text{Jac}(h))^3, \end{aligned}$$

y con ello se tiene que

$$\frac{|R|^2}{(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^3} = \frac{1}{(EG - F^2)^3}.$$

De esta forma, tenemos que la expresión de la derecha en la Ec. (1.10) asociada a la inmersión  $\bar{\mathbf{x}}$  será

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)} |\bar{A}_{i_1 i_2 i_3}|^2}{4(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^3} &= \frac{1}{4(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^3} \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)} |A_{i_1 i_2 i_3} \cdot R^T|^2 \\ &= \frac{|R|^2}{4(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)^3} \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)} |\bar{A}_{i_1 i_2 i_3}|^2 \\ &= \frac{1}{4(EG - F^2)^3} \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)} |A_{i_1 i_2 i_3}|^2. \end{aligned}$$

Concluimos que la expresión es invariante bajo cambio de parámetros.

Para el segundo paso, supongamos que trabajamos con una inmersión isoterma. La relación a comprobar será

$$I_5 = \frac{1}{4E^6} \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in S_3(n)} |A_{i_1 i_2 i_3}|^2.$$

Recordemos la definición de  $I_5$ . Teníamos

$$I_5 = \det(V_M) = -cc \, hb^2 + 2bc \, hb \, hc - bb \, hc^2 - hh \, bc^2 + bb \, cc \, hh.$$

Aplicando las expresiones de los productos escalares en términos de los coeficientes, las Ecs. (1.9), tenemos

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{-1}{16E^6} \left( \sum_{i=1}^n (e_i^2 - g_i^2) \right)^2 \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right) \\
&+ \frac{1}{8E^6} \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i) f_i \right) \left( \sum_{i=1}^n (e_i^2 - g_i^2) \right) \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i) f_i \right) \\
&- \frac{1}{16E^6} \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i)^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i) f_i \right)^2 \\
&- \frac{1}{16E^6} \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i)^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i) f_i \right)^2 \\
&+ \frac{1}{16E^6} \left( \sum_{i=1}^n (e_i - g_i)^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n (e_i + g_i)^2 \right) \\
&= \frac{1}{16E^6} \sum_{i,j,k=1}^n \left( -f_i^2 (e_j^2 - g_j^2) (e_k^2 - g_k^2) \right. \\
&\quad \left. + 2(e_i - g_i) f_i (e_j^2 - g_j^2) (e_k + g_k) f_k \right. \\
&\quad \left. - (e_i + g_i) f_i (e_j - g_j)^2 (e_k + g_k) f_k \right. \\
&\quad \left. - (e_i - g_i) f_i (e_j + g_j)^2 (e_k - g_k) f_k \right. \\
&\quad \left. + f_i^2 (e_j - g_j)^2 (e_k + g_k)^2 \right) \\
&= \frac{1}{16E^6} \sum_{i,j,k=1}^n \left( -f_i^2 (e_j - g_j) (e_j + g_j) (e_k - g_k) (e_k + g_k) \right. \\
&\quad \left. + 2(e_i - g_i) f_i (e_j - g_j) (e_j + g_j) (e_k + g_k) f_k \right. \\
&\quad \left. - (e_i + g_i) f_i (e_j - g_j) (e_j + g_j) (e_k + g_k) f_k \right. \\
&\quad \left. - (e_i - g_i) f_i (e_j + g_j)^2 (e_k - g_k) f_k \right. \\
&\quad \left. + f_i^2 (e_j - g_j)^2 (e_k + g_k)^2 \right).
\end{aligned}$$

Con un cálculo directo del determinante al cuadrado de la matriz

$$\begin{pmatrix} e_i - g_i & f_i & e_i + g_i \\ e_j - g_j & f_j & e_j + g_j \\ e_k - g_k & f_k & e_k + g_k \end{pmatrix},$$

vemos que coincide con los términos del sumatorio. Se aprecia además, que es igual al determinante de  $2|A_{ijk}|$ . Por lo tanto,

$$I_5 = \frac{1}{16E^6} \sum_{i,j,k=1}^n (2|A_{ijk}|)^2 = \frac{1}{4E^6} \sum_{i,j,k=1}^n |A_{ijk}|^2.$$

□

Este último invariante,  $I_5$ , nos ayuda a discernir si la superficie está **propriadamente inmersa** en un  $\mathbb{R}^{n+2}$  con  $n > 2$ . Nótese que  $I_5 = 0$  no implica que pueda estar inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$  con  $n < 3$  (de hecho veremos un contraejemplo), pero sí podemos decir que si  $I_5 \neq 0$  entonces **no puede** estar inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$  con  $n \leq 2$ .

Para una comprobación más directa de la nulidad de este invariante tenemos este resultado.

**Lema 1.4.3.**  $I_5 = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}$  y  $\mathbf{x}_{vv}$  son linealmente dependientes.

**Demostración:** Supongamos que  $I_5 = 0$ , entonces el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & f_n & g_n \end{pmatrix}$$

tiene que ser a lo sumo 2. Por lo tanto, como mucho, dos filas de  $A$  son linealmente independientes. Reordenando la base normal si fuese necesario, podemos asumir que son, a lo sumo, las dos primeras filas. Como las demás filas serán combinación lineal de las primeras, se tiene para cada  $i = 3, \dots, n$  que

$$(e_i, f_i, g_i) = \lambda_i(e_1, f_1, g_1) + \mu_i(e_2, f_2, g_2).$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}_{uu}, N_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{x}_{uu}, N_1 \rangle + \mu_i \langle \mathbf{x}_{uu}, N_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, N_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{x}_{uv}, N_1 \rangle + \mu_i \langle \mathbf{x}_{uv}, N_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, N_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{x}_{vv}, N_1 \rangle + \mu_i \langle \mathbf{x}_{vv}, N_2 \rangle. \end{cases}$$

Reescrito de forma más compacta

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}_{uu}, N_i - \lambda_i N_1 - \mu_i N_2 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, N_i - \lambda_i N_1 - \mu_i N_2 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, N_i - \lambda_i N_1 - \mu_i N_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

La familia de vectores  $\{N_i - \lambda_i N_1 - \mu_i N_2\}_{i=3}^n$  es linealmente independiente, por lo tanto, genera un subespacio  $(n-2)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Entonces, su complemento ortogonal es 4-dimensional. Si la familia de los cinco vectores  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  pertenece al complemento ortogonal, entonces deben ser linealmente dependientes.

Recíprocamente, supongamos que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  son linealmente dependientes. Como  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  son linealmente independientes ( $\mathbf{x}$  es una inmersión), podemos suponer que uno de los otros tres vectores,  $\{\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$ , es combinación lineal de los demás. Realizando un cambio de parámetros si es necesario, podemos asumir que  $\mathbf{x}_{vv}$  es combinación lineal de los otros 4 vectores, lo que implica que

$$\mathbf{x}_{vv} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v + c\mathbf{x}_{uu} + d\mathbf{x}_{uv},$$

para ciertas funciones  $a, b, c$  y  $d$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$ , tenemos que

$$g_i = c e_i + d f_i.$$

Esto implica que las columnas de  $A$  son linealmente dependientes, por lo tanto, su rango es a lo sumo 2.

□

Como habíamos mencionado, si una superficie está inmersa en  $\mathbb{R}^4$  entonces  $I_5 = 0$ . Veamos con un ejemplo que el recíproco no es cierto.

**Ejemplo 1.4.4.** Un contraejemplo a la afirmación:

Si  $I_5 = 0$  entonces la superficie pertenece a un subespacio 4-dimensional afín  $\mathbb{R}^4$ .

Consideremos la superficie inmersa en  $\mathbb{R}^5$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}, u^3 + v^3 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Como  $\mathbf{x}_{uv} = 0$  se tiene que  $\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}) = 0$ , por lo tanto,  $I_5 = 0$ . Sin embargo, la imagen de  $\mathbf{x}$  no puede estar inmersa en un subespacio 4-dimensional afín dado que  $\mathbf{x}(0, 0)$  es el origen y el determinante de la matriz de los siguientes vectores

$$\det(\mathbf{x}(1, 0), \mathbf{x}(2, 0), \mathbf{x}(0, 1), \mathbf{x}(0, 2), \mathbf{x}(0, 3)) = -6 \neq 0.$$

Al ser distinto de cero significa que la matriz es de rango completo y tenemos una familia de 5 vectores linealmente independientes.

Nótese que el 2-jet de esta inmersión sí pertenece a un subespacio 4-dimensional afín  $\mathbb{R}^4$ .

## 1.5 Particularidades del caso $n = 2$

Como hemos ido comentando, Little introduce en [20] varias ideas que relacionan los invariantes escalares con los invariantes geométricos de la elipse. Veamos primero qué resultados se mencionan y veremos posteriormente cómo se pueden demostrar.

**Proposición 1.5.1.** *Dada la notación anterior, si  $E_M$  y  $E_m$  son los semi-ejes de la elipse, se tiene que*

1.  $|k_N| = 2|E_M| |E_m|$ .
2.  $|H|^2 - K = |E_M|^2 + |E_m|^2$ .
3. *Si  $\Delta = 0$  el origen pertenece a la elipse, si  $\Delta > 0$  el origen está en el interior de la elipse y  $\Delta < 0$  el origen está fuera de la elipse.*

Las dos primeras afirmaciones están completamente demostradas por Little, en el caso  $n = 2$ , y coinciden con las relaciones (2) y (3) de la Prop. 1.4.1. Para la tercera afirmación sólo se discuten los casos  $\Delta = 0$  y  $\Delta < 0$ , intuyendo la situación en el caso  $\Delta > 0$ , pero sin llegar a confirmar si este invariante está realmente determinando la posición del centro en relación con la elipse.

Para resolver este vacío, utilizaremos directamente la relación (4) de la Prop. 1.4.1. Si utilizamos además la definición de los invariantes  $I_i$ , se tiene

que

$$\begin{aligned}
 \Delta &= I_3 + I_4 - I_1 I_2 \\
 &= |B \times C|^2 + |H|^2(|B|^2 + |C|^2) \\
 &\quad - (|H \times B|^2 + |H \times C|^2) - |H|^2(|B|^2 + |C|^2) \\
 &= |B \times C|^2 - (|H \times B|^2 + |H \times C|^2).
 \end{aligned}$$

De esta forma, vemos que  $\Delta$  es la diferencia entre el área del paralelogramo generado por  $B$  y  $C$  y la suma de las áreas de los paralelogramos generados por  $H$  y  $B$  o  $C$ . Como la posición del origen respecto a la elipse es un invariante geométrico, podemos suponer que la inmersión cumple que  $B = E_m$  y  $C = E_M$ . Bajo esta suposición, tenemos que

$$\Delta = |E_M|^2 |E_m|^2 - (|H \times E_m|^2 + |H \times E_M|^2). \quad (1.11)$$

Para entender el significado de esta diferencia primero debemos ver el siguiente resultado general para elipses.

**Proposición 1.5.2.** *Dada un punto del plano  $\mathbf{x} = (x, y)$  y una elipse centrada en el origen con semi-ejes  $E_m$  y  $E_M$ , se tiene que*

1. Si  $|E_M|^2 |E_m|^2 > |\mathbf{x} \times E_m|^2 + |\mathbf{x} \times E_M|^2$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en el interior de la elipse.
2. Si  $|E_M|^2 |E_m|^2 = |\mathbf{x} \times E_m|^2 + |\mathbf{x} \times E_M|^2$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en la elipse.
3. Si  $|E_M|^2 |E_m|^2 < |\mathbf{x} \times E_m|^2 + |\mathbf{x} \times E_M|^2$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en el exterior de la elipse.

**Demostración:** Asumimos, sin pérdida de generalidad, que  $E_m = (a, 0)$  y  $E_M = (0, b)$ . La ecuación de la elipse será entonces

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (1.12)$$

y tenemos las siguientes condiciones:

1. Si  $1 > \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en el interior de la elipse.
2. Si  $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en la elipse.



3. Si  $1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en el exterior de la elipse.

Por otro lado, la Ec. (1.12) es equivalente a

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2,$$

con lo que tenemos

1. Si  $a^2b^2 > b^2x^2 + a^2y^2$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en el interior de la elipse.
2. Si  $a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en la elipse.
3. Si  $a^2b^2 < b^2x^2 + a^2y^2$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en el exterior de la elipse.

Sabemos que  $a^2b^2 = |E_M|^2|E_m|^2$  y se tiene que

$$|\mathbf{x} \times E_m|^2 = (|a||y|)^2 = a^2y^2 \quad \text{y} \quad |\mathbf{x} \times E_M|^2 = (|b||x|)^2 = b^2x^2.$$

De esta forma, se concluyen las condiciones del enunciado.

□

En nuestra situación general, tenemos una elipse de centro  $H$  y estamos determinando la posición del origen de coordenadas. Esto es equivalente a considerar la elipse centrada en el origen de coordenadas y determinar la posición del vector  $H$ . Por ejemplo, si  $\Delta > 0$ , se tiene que

$$0 < |E_M|^2|E_m|^2 - (|H \times E_m|^2 + |H \times E_M|^2),$$

equivalentemente

$$|E_M|^2|E_m|^2 > (|H \times E_m|^2 + |H \times E_M|^2),$$

lo que significa que  $H$  estaría en el interior de la elipse desplazada, por lo tanto, el origen de coordenadas está en el interior de la elipse de centro  $H$ .

Análogamente, se argumentaría para los demás casos y podemos ver una representación gráfica en la figura 1.3.

Desde la Ec. (1.11), podemos concluir además

$$|E_M|^2(|E_m|^2 - |H|^2) \leq \Delta \leq |E_m|^2(|E_M|^2 - |H|^2).$$

Además, en el caso de una elipse degenerada se tiene que  $|E_m|^2 = 0$  y directamente que  $\Delta \leq 0$ .

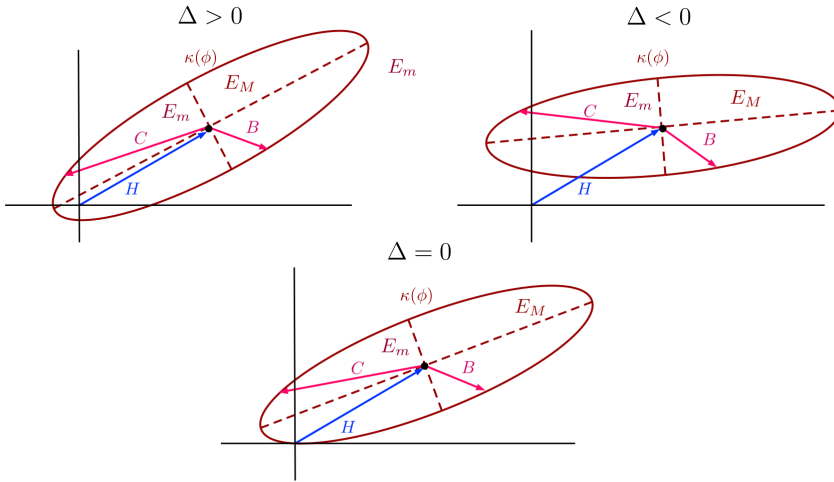


Figura 1.3: Configuraciones según el signo de  $\Delta$ .

## 1.6 Inmersiones superconformes

Veamos cómo los invariantes  $I_i$  ayudan a entender un resultado clásico de las inmersiones superconformes. Estas inmersiones se definen como aquellas cuya elipse de curvatura es, en todo punto, una circunferencia, esto es, que la longitud de los semi-ejes de la elipse de curvatura sea la misma, ver [10].

Si recordamos la expresión de las longitudes de los semi-ejes, en términos de los productos escalares de  $H$ ,  $B$  y  $C$ , la Ec. (1.7), se tiene que

$$|E_M| = \frac{\sqrt{I_2 + \sqrt{I_2^2 - 4I_3}}}{\sqrt{2}}, \quad |E_m| = \frac{\sqrt{I_2 - \sqrt{I_2^2 - 4I_3}}}{\sqrt{2}}. \quad (1.13)$$

Sabiendo que ambas expresiones son valores reales no negativos, tenemos directamente la siguiente condición

$$0 \leq I_2^2 - 4I_3.$$

Escrita mediante los invariantes de Little con las ecuaciones de la Prop. 1.4.1, se obtiene  $k_N^2 \leq (|H|^2 - K)^2$ . Tomando raíces cuadradas (ambos elementos son no negativos) se tiene que

$$k_N \leq |H|^2 - K, \quad (1.14)$$

que es conocida como la desigualdad de Chen–Willmore, ver [8].

Mediante este argumento, se ve claramente que la igualdad en las longitudes de los semi-ejes es equivalente a una igualdad entre  $k_N$  y  $|H|^2 - K$ . Esta equivalencia había sido probada en [10] con distinto argumento. Recogemos este resultado en la siguiente proposición.

**Proposición 1.6.1.** *Una inmersión es superconforme si y sólo si  $I_3 = \frac{I_2^2}{4}$ . Equivalentemente, si y sólo si  $|k_N| = |H|^2 - K$ .*

**Demostración:** La expresión de la longitud de los semi-ejes, Ecs. (1.13), muestra que la elipse es una circunferencia si sólo si  $I_2^2 - 4I_3 = 0$ . Usando las equivalencias entre los invariantes de la Prop. 1.4.1, esta igualdad es equivalente a  $|k_N| = |H|^2 - K$ .

□

## 1.7 Base adaptada a una superficie inmersa en $\mathbb{R}^{n+2}$ , con $n > 2$

Hemos visto en la demostración del Lema 1.4.3 que, si se eligen correctamente, sólo tres segundas formas fundamentales asociadas son no nulas. Esto se debe a que la elipse de curvatura está en el subespacio generado por  $\{\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$ . El subespacio de  $\mathbb{R}^{n+2}$  generado por  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$ , al que denotamos por  $T^2M$ , siempre es en cada punto, a lo sumo, un espacio vectorial de dimensión 5. La definición de  $T_p^2M$  es el subespacio que aproxima la superficie hasta un segundo orden, al igual que para  $T_pM$  es aquel plano que aproxima la superficie en  $p \in M \equiv \mathbf{x}(U)$ .

En general, siempre podemos descomponer el espacio ambiente  $\mathbb{R}^{n+2}$  mediante

$$\mathbb{R}^{n+2} = T^2M \oplus (T^2M)^\perp.$$

*Nota 7.* Nótese que si  $n = 3$ , esto es, en el caso  $\mathbb{R}^5$ , y si  $I_5 \neq 0$ , entonces  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  son linealmente independientes, esto es,  $\mathbb{R}^5 = T^2M$ .

**Definición 1.7.1.** *Dada una base ortonormal  $\{t_1, t_2, N_1, \dots, N_n\}$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , diremos que está **adaptada** hasta orden 2 a una inmersión,  $\mathbf{x}$ , si  $\{t_1, t_2\}$  es base ortonormal de  $TM$  y  $\{t_1, t_2, N_1, N_2, N_3\}$  es base ortonormal de  $T^2M$ .*

Aunque el resultado que vamos a mostrar a continuación es la implicación trivial de trabajar con una base adaptada, queremos remarcarlo para dejar ver cuál era nuestra motivación práctica detrás de este concepto.

**Proposición 1.7.2.** *Sea  $\{t_1, t_2, N_1, \dots, N_n\}$  una base adaptada hasta orden 2 a  $\mathbf{x}$ , entonces los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas a los vectores normales con  $i > 3$  cumplen*

$$e_i = f_i = g_i = 0.$$

Nuestra elección usual para las bases del plano tangente y normal va a ser una base adaptada. Podemos ver, en la siguiente nota, la forma práctica de conseguir una elección de vectores cumpliendo esta propiedad.

*Nota 8.* Supongamos que tenemos una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{n+2}$  con  $I_5 \neq 0$ . Si aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a la familia de vectores de derivadas parciales  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  podemos obtener una familia ortonormal  $\{T_1, T_2, N_1, N_2, N_3\}$  donde los dos primeros son base del plano tangente. Si la completamos con  $\{N_4, \dots, N_n\}$  para obtener una base ortonormal del espacio ambiente  $\mathbb{R}^{n+2}$ , observamos que son nulos los coeficientes  $e_i, f_i$  y  $g_i$  correspondientes a  $4 \leq i \leq n$ . Esto nos daría una matriz de coeficientes asociados

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \\ e_3 & f_3 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, las expresiones para los invariantes  $I_3$  e  $I_5$  quedan reducidas a

$$I_3 = \frac{|M_{12}|^2 + |M_{13}|^2 + |M_{23}|^2}{4(EG - F^2)^3} \quad \text{y} \quad I_5 = \frac{|A_{123}|^2}{4(EG - F^2)^3}.$$

## 1.8 Superficies inmersas umbilicales en $\mathbb{R}^4$

En el estudio de superficies en  $\mathbb{R}^3$ , se definían los puntos umbílicos cuando las curvaturas principales coincidían. Para superficies en  $\mathbb{R}^4$ , dado que la segunda forma fundamental es más compleja, tenemos distintos tipos de

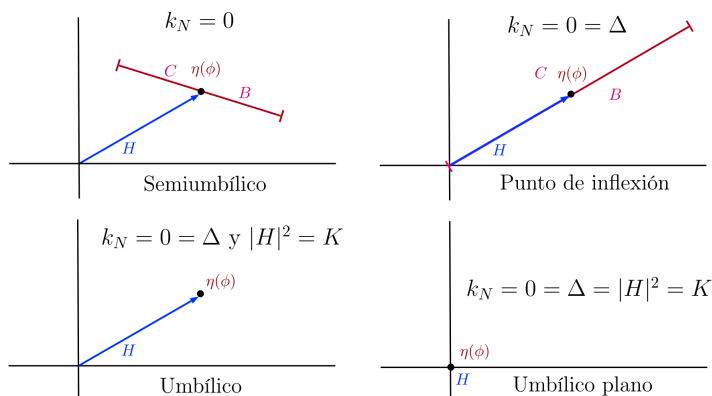


Figura 1.4: Casos para la elipse de curvatura.

umbilicidad cuando se generaliza este concepto. Un buen estudio, de donde se pueden extraer estas definiciones, es el trabajo [26] realizado por S. M. Moraes y M. C. Romero-Fuster.

**Definición 1.8.1.** *Un punto de una inmersión  $\mathbf{x}$  se dice que es:*

- **Semiumbólico**, si la elipse de curvatura degenera a un segmento.
- **Punto de inflexión**, si la elipse de curvatura degenera a un segmento radial.
- **Umbílico**, si la elipse de curvatura degenera a un punto.
- **Umbílico plano**, si la elipse de curvatura degenera al origen de coordenadas.

*Si todos los puntos de un abierto cumplen una de las condiciones, se dirá que la inmersión cumple esa condición en el abierto.*

Utilizando los invariantes  $I_i$  podemos caracterizar el tipo de un punto. Sabemos que  $I_3$  es el producto de las longitudes de los semi-ejes, por lo tanto, la elipse degenera en un segmento o un punto si y sólo si  $I_3 = 0$ . Además  $I_2$  es la suma de las longitudes, por lo tanto, la elipse degenera en un punto si y sólo si  $I_2 = 0$ . Para el caso de segmento radial utilizamos los invariantes de Little. En particular, sabemos que la elipse se apoya en el

origen de coordenadas si  $\Delta = 0$ . Podemos ver una representación de cada situación en la figura 1.4.

En resumen, se tienen las siguientes caracterizaciones de estos tipos de puntos mediante los invariantes:

$$\begin{aligned} \text{semiumbílico} &\Leftrightarrow I_3 = 0, \quad \Leftrightarrow k_N = 0. \\ \text{punto de inflexión} &\Leftrightarrow I_3 = 0, \quad I_4 = I_1 I_2, \quad \Leftrightarrow k_N = 0 = \Delta. \\ \text{umbílico} &\Leftrightarrow I_2 = 0, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = 0, \\ &\Leftrightarrow |H|^2 = K, \quad k_N = 0, \quad \Delta = 0. \\ \text{umbílico plano} &\Leftrightarrow I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 0 \Leftrightarrow |H|^2 = K = k_N = \Delta = 0. \end{aligned}$$

Una situación de interés para nuestro trabajo será  $K = k_N = 0$  que en términos de invariantes de Montesinos es  $I_1 = I_2$  y  $I_3 = 0$ .

**Proposición 1.8.2.** *Dado un punto semiumbílico donde  $E$  es el único semi-eje no nulo, entonces la elipse de curvatura cumple  $I_1 = I_2$  (equivalente a  $K = 0$ ) si y sólo si  $H + E$  es ortogonal a  $H - E$ .*

**Demostración:** Utilizando las definiciones de los invariantes de Montesinos asumiendo que  $B = 0$  y  $C = E$ , se tiene que

$$0 = I_1 - I_2 = |H|^2 - |E|^2,$$

por lo tanto  $|H|^2 = |E|^2$ . De esta forma,

$$\langle H + E, H - E \rangle = |H|^2 - |E|^2 = 0.$$

□

A medida que se van anulando los invariantes, se disminuyen las posibilidades para la inmersión. Vamos a ver en qué influye si la resultante es nula.

**Proposición 1.8.3.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$  una inmersión isoterma semiumbólica en  $U$ . Si la familia  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}\}$  es linealmente independiente, entonces  $\Delta \neq 0$ .*

**Demostración:** Si suponemos que los vectores  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}\}$  son linealmente independientes, entonces existe un único vector,  $N_1$ , solución para el sistema

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}_u, N_1 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, N_1 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}, N_1 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uu}, N_1 \rangle = -E. \end{cases} \quad (1.15)$$

Por lo tanto, tenemos que  $e_1 = g_1 = -E$ . Completando la base del espacio normal, se tiene que

$$k_N^2 = \frac{\begin{vmatrix} E & 0 & E \\ -E & f_1 & -E \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{vmatrix}^2}{4E^4} = \frac{(e_2 - g_2)^2 f_1^2}{4E^2}.$$

Como estamos suponiendo que la inmersión es semiumbólica, es decir,  $k_N = 0$ , se tiene que  $e_2 = g_2$  o  $f_1 = 0$ .

Si fuese  $e_2 = g_2$ , entonces  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  sería ortogonal a la vez a  $N_1$  y a  $N_2$ , por lo tanto sería un vector tangente en contradicción con la hipótesis.

Si  $f_1 = 0$ , calculamos la expresión de  $\Delta$  y se tiene

$$\Delta = -\frac{4f_2^2 + (e_2 - g_2)^2}{4E^2},$$

que es no nula ya que  $e_2 \neq g_2$ .

□

El resultado equivalente a esta proposición es que si  $\Delta = 0$  entonces  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}\}$  son linealmente dependientes. Es esta versión la que usaremos para estudiar cuándo una inmersión no está propiamente inmersa en  $\mathbb{R}^4$ . Este hecho no está explícitamente escrito en [20] pero se deduce de la demostración del teorema 1.3 en la página 271.

**Proposición 1.8.4.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$  una inmersión umbilica en  $U$  ( $|H|^2 = K$  y  $k_N = 0 = \Delta$ ), entonces existe una inmersión de  $\mathbf{x}(U)$  en  $\mathbb{R}^3$ .*

*Nota 9.* Mediante esta proposición, si tenemos una inmersión umbilica podemos considerar que realmente estamos con una inmersión clásica en el espacio euclídeo que cumple  $|H|^2 = K$ .

**Demostración:** Utilizando la proposición anterior, tenemos que la hipótesis implica que  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}\}$  son linealmente dependientes. Definimos  $N_2$  como el vector unitario ortogonal a  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}\}$ . Este vector es normal a la superficie y los coeficientes de su segunda forma asociada son  $e_2 = g_2 = 0$ .

Si completamos la base normal y calculamos  $k_N$ ,  $\Delta$  y  $|H|^2 - K$ , tenemos que

$$k_N = \frac{(e_1 - g_1)^2 f_2^2}{4E^4}, \quad \Delta = -\frac{e_1 g_1 f_2^2}{E^4}, \quad |H|^2 - K = \frac{(e_1 - g_1)^2}{4E^2} + \frac{f_1^2 + f_2^2}{E^2}.$$

Para que todos sean nulos a la vez, debe cumplirse que  $f_1 = f_2 = 0$  y  $e_1 = g_1$  pudiendo ser éstos nulos o no.

Para concluir el argumento recurriremos a la prueba del Teorema 1.3 en [20, pág. 271]. Si las segundas formas fundamentales son nulas, entonces la inmersión es un plano, y, si los únicos coeficientes no nulos sólo son  $e_1 = g_1$  entonces existe una inmersión de  $\mathbf{x}(U)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

□





# Capítulo 2

## Caracterización de superficies esféricas inmersas en $\mathbb{R}^{n+2}$

A lo largo de este capítulo, vamos a estudiar las condiciones necesarias sobre los invariantes locales de una inmersión para que la imagen de ésta pueda estar contenida en una esfera del espacio ambiente. Este tipo de inmersiones las llamaremos *esféricas*, aunque también se han llamado *hiperesféricas* en la literatura, por ejemplo en [21].

***Definición 2.0.1.** Diremos que una superficie inmersa es **esférica** si existe una esfera en el espacio ambiente de radio  $R$  y centro  $p$  tal que contiene a su imagen. A su vez, diremos que la inmersión es esféricas de radio  $R$  y centro  $p$ .*

Como se verá, hemos encontrado condiciones suficientes y necesarias para el caso  $\mathbb{R}^4$  y las condiciones necesarias para el caso general. La estructura de este capítulo es:

- Exponemos las condiciones necesarias de una superficie esférica en  $\mathbb{R}^4$ .
- Estudiamos, si añadiendo condiciones, tenemos suficientes para asegurar que una superficie es esférica en  $\mathbb{R}^4$ .
- Deducimos las condiciones necesarias de una superficie esférica en  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

## 2.1 Inmersiones esféricas en $\mathbb{R}^4$

Las inmersiones esféricas ya habían sido estudiadas y se conocía que la curvatura normal de este tipo de inmersión es nula, ver por ejemplo [31]. Dado que no era una propiedad que caracterizaba las superficies esféricas, se definió aquellas superficies con curvatura normal nula como *semiumblicas*, ver sección 1.8, que sí caracterizaban el hecho de que la elipse de curvatura degeneraba en un segmento. Si queremos caracterizar las inmersiones esféricas, necesitamos otra condición entre los invariantes de la inmersión.

### Condiciones necesarias en $\mathbb{R}^4$

**Proposición 2.1.1.** *Dada una inmersión,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ , esférica de radio  $R$  entonces*

$$k_N \equiv 0 \quad y \quad R^2 \Delta + |H|^2 \equiv K. \quad (2.1)$$

**Demostración:** Para la primera condición hay diversas demostraciones en la literatura. De todas formas, para completar este trabajo vamos a añadir una demostración con las mismas ideas que usaremos para obtener la segunda condición.

Podemos considerar que el centro de la esfera es el origen de coordenadas. Como es de radio  $R$ , tenemos que  $|\mathbf{x}|^2 = R^2$ . Al derivar se tiene que  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x} \rangle = 0$ . Por ello, podemos tomar un primer vector normal como  $N_1 = \frac{\mathbf{x}}{R}$  para la base del fibrado normal. Sea entonces  $N_2$  un vector normal que completa la base ortonormal del fibrado normal. Con esta base, se tiene que

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -E, \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = -F, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = -G. \end{cases} \quad (2.2)$$

De esta forma,  $e_1 = \frac{-E}{R}$ ,  $f_1 = \frac{-F}{R}$  y  $g_1 = \frac{-G}{R}$ . Con esta información, se tiene que  $|M_{12}| = 0$ , y por lo tanto  $k_N \equiv 0$ .

Supongamos ahora que además, la inmersión es isoterma, utilizando si es necesario, la reparametrización que existe gracias al Teorema 1.2.2. De esta forma, las expresiones en la Prop. 1.2.3 de la curvatura media, la curvatura

de Gauss y de la resultante son en este caso

$$\begin{aligned}
 |H|^2 &= \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{Eg_2 - 2Ff_2 + Ge_2}{EG - F^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{e_2 + g_2}{E} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{R^2} + \frac{e_2^2 + g_2^2 + 2e_2g_2}{4E^2}, \\
 K &= \frac{1}{R^2} + \frac{e_2g_2 - f_2^2}{E^2}, \\
 R^2\Delta &= \frac{E^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{vmatrix}}{4E^4} = \frac{2e_2g_2 - e_2^2 - g_2^2 - 4f_2^2}{4E^2}.
 \end{aligned}$$

Vemos claramente que  $R^2\Delta + |H|^2 \equiv K$ .

□

*Nota 10.* Si suponemos que  $\Delta = 0$  entonces  $|H|^2 = K$ , que junto con  $k_N = 0$  es el caso degenerado donde la elipse de curvatura colapsa en un punto, condición llamada *inmersión umbílica* en la sección 1.8. Veremos más adelante que esta condición implica que puede estar inmersa en  $\mathbb{R}^3$ .

En el siguiente ejemplo veremos que las Ecs. (2.1) son independientes mediante una inmersión que sólo cumple  $k_N = 0$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Consideremos la inmersión  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) = & \frac{1}{5(1 + u^2 + v^2)} \\ & (4\sqrt{2}u(u^6 - 9u^4(1 + v^2) - 5u^2(3 + 6v^2 + v^4) \\ & \quad + 5(9 + 9v^2 + 3v^4 + v^6)), \\ & -4\sqrt{2}v(5(9 + 9u^2 + 3u^4 + u^6) - 5(3 + 6u^2 + u^4)v^2 \\ & \quad - 9(1 + u^2)v^4 + v^6), \\ & 10\sqrt{2}(-13 - 2u^6 + 5v^2 + 6u^4v^2 - 2v^6 + u^2(5 + 6v^2(6 + v^2))), \\ & 60\sqrt{2}(u - v)(u + v)(3 + u^2 + v^2)). \end{aligned}$$

Podemos ver esta inmersión en el ejemplo 8.1 de [21], en donde se consigue establecer ciertas condiciones a los invariantes gracias a una representación de tipo Weierstrass. En este caso, se ha impuesto la condición  $k_N = 0$ .

Como la primera coordenada es una función no acotada, no puede ser una inmersión esférica. Si calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental, tenemos que

$$E = \frac{32m^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} = G, \quad F = 0,$$

donde  $m = 9 + u^6 + 9v^2 + 3v^4 + v^6 + 3u^4(1 + v^2) + 3u^2(3 + 6v^2 + v^4)$ .

Por lo tanto, tenemos una inmersión isoterma no esférica. Además sus invariantes, distintos de la curvatura normal, son

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \frac{1}{8m^2}, \quad \Delta = -\frac{81(1 + u^2 + v^2)^4}{64m^6}, \\ K &= \frac{1}{4m^4} (4u^{12} + 81v^2 + u^{10}(33 + 6v^2) + 3u^8(42 + 3v^2 - 4v^4) \\ & \quad + u^6(234 + 72v^2 - 138v^4 - 28v^6) + \\ & \quad 6u^4(1 + v^2)(36 - 9v^2 - 21v^4 - 2v^6) \\ & \quad + v^4(216 + 234v^2 + 126v^4 + 33v^6 + 4v^8) \\ & \quad + 3u^2(27 + 54v^2 + 54v^4 + 24v^6 + 3v^8 + 2v^{10})). \end{aligned}$$

Con estas expresiones podemos comprobar que  $\frac{K - |H|^2}{\Delta}$  no es constante.

## Condiciones suficientes en $\mathbb{R}^4$

En este apartado vamos a demostrar que uniendo las condiciones necesarias, Ecs. (2.1), junto con otras dos condiciones más, se tienen condiciones suficientes. La idea principal de nuestra demostración es mostrar que existe un vector normal unitario, que denotaremos por  $N_1$ , paralelo a la inmersión  $\mathbf{x}$ , que reescalaremos y trasladaremos para que coincida con la inmersión.

Recurriremos a las siguientes igualdades para una inmersión isoterma  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_u}{2} = \frac{E_u}{2} = \frac{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_u}{2} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= \frac{\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_v}{2} = \frac{E_v}{2} = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_v}{2} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{E_u}{2}, \\ \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = -\frac{E_v}{2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $U$  un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^2$ , y sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$  una inmersión semiumbílica con  $\Delta(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . Supongamos que existe un número real positivo,  $R$ , tal que  $K(u, v) \neq \frac{1}{R^2}$  para todo  $(u, v) \in U$  y tal que*

$$R^2 \Delta + |H|^2 \equiv K. \tag{2.4}$$

*Entonces, la inmersión  $\mathbf{x}$  es esférica.*

**Demostración:** Recordemos que, gracias al Teorema 1.2.2, podemos considerar que  $\mathbf{x}$  es isoterma.

Comprobemos que podemos suponer que el vector  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  o el vector  $\mathbf{x}_{uv}$  tiene componente normal no nula. Si no fuese así, los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas a cualquier base del fibrado normal serían  $e_i = g_i$  y  $f_i = 0$ . Esto implica directamente que

$$\Delta = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} e_1 & 0 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & e_1 \\ 0 & e_2 & 0 & e_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en contradicción con nuestra hipótesis.

Veamos que además, podemos suponer que es el vector  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  el que tiene componente normal no nula. De no ser así, sería el vector  $\mathbf{x}_{uv}$  el que tiene que tener componente normal no nula. Pero ahora, podríamos tomar la reparametrización

$$\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x} \left( \frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2} \right),$$

que sigue siendo isoterma y verifica  $\mathbf{y}_{uu} - \mathbf{y}_{vv} = \mathbf{x}_{uv}$ . Con esto concluimos que podemos suponer que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  tiene componente normal no nula.

Ahora bien, podemos definir  $N_1$  como uno de los vectores normales, unitarios y ortogonales a  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$ , lo que implica que sus coeficientes asociados cumplen  $e_1 = g_1$ . Además, cualquier vector  $N_2$  que tomemos para completar una base ortonormal, tiene que cumplir que  $e_2 \neq g_2$ , dado que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  tiene componente normal no nula. Con estas condiciones calculamos la curvatura normal y se tiene que

$$k_N = \frac{(e_2 - g_2)^2 f_1^2}{4E^2}.$$

Como por hipótesis se cumple  $k_N = 0$  y tenemos  $e_2 \neq g_2$ , entonces necesariamente  $f_1 = 0$ .

Ahora, si calculamos la resultante

$$\Delta = -g_1^2 \frac{(e_2 - g_2)^2 + 4f_2^2}{4E^4},$$

al ser no nula, tenemos que  $g_1 \neq 0$  y recordemos que  $e_1 = g_1$ .

Definamos el vector normal no necesariamente unitario,  $\hat{N}_1$ , mediante

$$\hat{N}_1 = -\frac{E}{e_1} N_1.$$

Se verifica

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N}_1 \rangle = -E \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_1 \rangle = 0.$$

Esto es equivalente a

$$e_1 = g_1 = \frac{-E}{|\hat{N}_1|} \quad \text{y} \quad f_1 = 0.$$

Si utilizamos esta información para calcular el resto de invariantes, se tiene que

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{|\hat{N}_1|^2} + \frac{(e_2 + g_2)^2}{4E^2}, \\ K &= \frac{1}{|\hat{N}_1|^2} + \frac{e_2g_2 - f_2^2}{E^2}, \\ \Delta &= -\frac{(e_2 - g_2)^2 + 4f_2^2}{4E^2|\hat{N}_1|^2}. \end{aligned}$$

Estas expresiones llevan directamente a

$$|\hat{N}_1|^2\Delta + |H|^2 \equiv K.$$

Si comparamos con la Ec. (2.4), al ser  $\Delta(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ , se puede concluir que

$$|\hat{N}_1| \equiv \frac{K - |H|^2}{\Delta} \equiv R.$$

Además, la curvatura de Gauss se reduce a

$$K = \frac{1}{R^2} + \frac{e_2g_2 - f_2^2}{E^2}, \quad (2.5)$$

que al ser  $K(u, v) \neq \frac{1}{R^2}$  para todo  $(u, v) \in U$ , tenemos la información adicional de  $e_2g_2 \neq f_2^2$ .

Nuestro objetivo será mostrar que un movimiento rígido de  $\mathbb{R}^4$ , en realidad una traslación, lleva  $\hat{N}_1$  a  $\mathbf{x}$ , es decir que se tiene

$$\hat{N}_{1u} = \mathbf{x}_u \quad \text{y} \quad \hat{N}_{1v} = \mathbf{x}_v. \quad (2.6)$$

Si calculamos las componentes tangenciales y en  $N_1$  de cada vector, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{1u} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N}_1 \rangle = E, & \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{1v} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_1 \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{1u} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_1 \rangle = 0, & \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{1v} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N}_1 \rangle = E, \\ \langle \hat{N}_1, \hat{N}_{1u} \rangle &= 0, & \langle \hat{N}_1, \hat{N}_{1v} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $\hat{N}_1$  es un vector normal con norma constante. De esta forma, el vector diferencia,  $\hat{N}_{1u} - \mathbf{x}_u$ , tiene las siguientes componentes



nulas:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{1u} - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{1u} \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{1u} - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{1u} \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \\ \langle \hat{N}_1, \hat{N}_{1u} - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \hat{N}_1, \hat{N}_{1u} \rangle - \langle \hat{N}_1, \mathbf{x}_u \rangle = 0.\end{aligned}$$

Análogamente para el vector diferencia,  $\hat{N}_{1v} - \mathbf{x}_v$ , se realiza el mismo argumento.

Para concluir lo que queremos, las Ecs. (2.6), necesitamos comprobar que las últimas componentes de los vectores diferencia son también nulas, o equivalentemente  $\langle N_2, \hat{N}_{1u} \rangle = 0 = \langle N_2, \mathbf{x}_u \rangle$  y  $\langle N_2, \hat{N}_{1v} \rangle = 0 = \langle N_2, \mathbf{x}_v \rangle$ . Partiendo de la ortogonalidad de  $\hat{N}_1$  y  $N_2$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle &= -\langle \hat{N}_{1u}, N_2 \rangle, \\ \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle &= -\langle \hat{N}_{1v}, N_2 \rangle.\end{aligned}$$

Por lo que basta demostrar que  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle = 0 = \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle$ .

Si consideramos  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \hat{N}_1/|\hat{N}_1| = -N_1, N_2\}$  como base ortogonal de  $\mathbb{R}^4$ , dado que  $e_1 = g_1 = \frac{-E}{|\hat{N}_1|}$  y  $f_1 = 0$ , conseguimos las siguientes expresiones para las derivadas de  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_v - E\frac{\hat{N}_1}{|\hat{N}_1|^2} + e_2N_2, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{E_u}{2E}\mathbf{x}_v + f_2N_2, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \frac{-E_u}{2E}\mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E}\mathbf{x}_v - E\frac{\hat{N}_1}{|\hat{N}_1|^2} + g_2N_2,\end{aligned}$$

donde se han utilizado las Ecs. (2.3).

De la igualdad de los productos escalares

$$\langle (\mathbf{x}_{vv})_u, \hat{N}_1 \rangle = \langle (\mathbf{x}_{uv})_v, \hat{N}_1 \rangle,$$

obtenemos la siguiente ecuación de compatibilidad en términos de  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle$  y  $\langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle$ :

$$\frac{E_u}{2} + g_2\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle - E_u = \frac{-E_u}{2} + f_2\langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle,$$

o equivalentemente,

$$g_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle - f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0.$$

De forma análoga, desde

$$\langle (\mathbf{x}_{uu})_v, \hat{N}_1 \rangle = \langle (\mathbf{x}_{uv})_u, \hat{N}_1 \rangle$$

llegamos a la siguiente ecuación de compatibilidad:

$$\frac{E_v}{2} + e_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle - E_v = \frac{-E_v}{2} + f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle,$$

o equivalentemente,

$$-f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle + e_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0.$$

Ambas ecuaciones podemos escribirlas como un sistema lineal homogéneo con  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle$  y  $\langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle$  como incógnitas

$$\begin{cases} g_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle - f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0, \\ -f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle + e_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0, \end{cases}$$

cuyo determinante es  $e_2 g_2 - f_2^2$ . Recordamos que la condición de  $K(u, v) \neq \frac{1}{R^2}$  junto con la Ec. (2.5) nos llevaba a que  $e_2 g_2 - f_2^2 \neq 0$ . Por ello concluimos que la única solución a este sistema lineal homogéneo es la trivial, es decir,  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle = 0$  y  $\langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0$ .

Hemos comprobado que son nulas las componentes tangenciales y normales de los vectores diferencia  $\hat{N}_{1u} - \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{1v} - \mathbf{x}_v$ , por lo tanto  $\hat{N}_{1u} = \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{1v} = \mathbf{x}_v$ . Como  $U$  es conexo, se tiene que  $\mathbf{x} = \hat{N}_1 + \mathbf{d}$  donde  $\mathbf{d}$  es un vector constante, o equivalentemente, la imagen de  $\mathbf{x}$  está incluida en la esfera de centro  $\mathbf{d}$  y radio  $R$ .

□

El enunciado de la Prop. 2.1.3 no es el recíproco completo de la Prop. 2.1.1. Hemos añadido las hipótesis de  $\Delta(u, v) \neq 0$  y  $K(u, v) \neq \frac{1}{R^2}$  que se consideran en diferentes pasos de la demostración. Para completar nuestro trabajo, vamos a estudiar qué pasa en los casos donde no se cumplen las hipótesis adicionales.

### Inmersiones esféricas con $\Delta \equiv 0$ .

Para estudiar esta condición haremos uso de nuestros resultados para inmersiones umbílicas en  $\mathbb{R}^4$  que introdujimos en la sección 1.8.

**Corolario 2.1.4.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$  una inmersión esférica, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $\Delta \equiv 0$ .
2. La inmersión es umbílica.
3. Existe una inmersión de  $\mathbf{x}(U)$  en una esfera de  $\mathbb{R}^3$ .

**Demostración:** Por los argumentos de la sección 1.8, se tiene que ser umbílica es equivalente a las condiciones  $k_N = 0$ ,  $\Delta \equiv 0$  y  $|H|^2 \equiv K$ .

Si suponemos  $\Delta \equiv 0$ , utilizando las condiciones necesarias de esfericidad de la Prop. 2.1.1 que eran  $k_N \equiv 0$  y  $R^2\Delta + |H|^2 \equiv K$ , se tiene para este caso que  $|H|^2 \equiv K$ . Se concluye que 1 implica 2.

Si suponemos que es umbílica, tenemos directamente que  $\Delta \equiv 0$ , esto es, que 2 implica 1. Además, usando la Prop. 1.8.4 tenemos que existe una inmersión de  $\mathbf{x}(U)$  en  $\mathbb{R}^3$ , esto es, que 2 implica 3.

Para la última implicación, si tenemos que es posible que esté inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , entonces está contenida en un espacio de dimensión 3 de  $\mathbb{R}^4$ . De esta forma, podemos elegir la base del fibrado normal de manera que  $N_2$  sea ortogonal al espacio donde está la inmersión, esto es,  $e_2 = f_2 = g_2 = 0$ , implicando directamente que  $\Delta \equiv 0$ .

□

Hemos visto que la condición de esfericidad para inmersiones con  $\Delta \equiv 0$  es equivalente a considerar superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ . Además, esta condición general en  $\mathbb{R}^3$  pasa a ser la caracterización clásica de esfericidad, es decir, una inmersión es esférica de radio  $R$  si y sólo si  $|H|^2 \equiv K \equiv \frac{1}{R^2}$ .

### Inmersiones esféricas con $K \equiv \frac{1}{R^2}$ en $\mathbb{R}^4$ .

En el caso  $\Delta \equiv 0$ , podemos asumir que nuestra inmersión tiene su imagen en  $\mathbb{R}^3$ , en cuyo caso la condición necesaria se reduce a  $|H|^2 \equiv K \equiv \frac{1}{R^2}$ . Sin

embargo, veremos que la condición  $K \equiv \frac{1}{R^2}$  no sólo se cumple si  $\Delta \equiv 0$ .

**Ejemplo 2.1.5.** Consideremos la siguiente inmersión esférica de radio 1,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ , con  $U = \mathbb{R} \times ] - \pi/4, \pi/4[$  y definida por

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(u, \cos(v), \sin(v) \cos(v), \sin^2(v)).$$

El cálculo directo de sus invariantes muestra que son

$$|H|^2 = 1 + \frac{(1+u^2) \cos^2(v) (5 - \cos(2v))^2}{2(3 - \cos(2v))^3}, \quad K = 1,$$

$$\Delta = -\frac{(1+u^2) \cos^2(v) (5 - \cos(2v))^2}{2(3 - \cos(2v))^3}, \quad k_N = 0,$$

por lo que tenemos

$$\Delta + |H|^2 = K.$$

Además del ejemplo anterior, hemos conseguido construir un ejemplo de una inmersión no esférica que verifica que existe una constante positiva,  $R$ , tal que  $R^2 \Delta + |H|^2 \equiv K \equiv \frac{1}{R^2}$  y  $\Delta(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . Este nuevo ejemplo está basado en el método conocido para la construcción de superficies de revolución en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura de Gauss constante.

**Ejemplo 2.1.6.** Sea la inmersión  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ , con  $U = ]0, u_0[ \times \mathbb{R}$ , dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u), x_2(u), \cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v)),$$

donde

$$x_1(u) = \int_0^u \frac{e^{-t/2}}{\cos(t)} dt, \quad x_2(u) = \int_0^u \frac{\sqrt{\cos^4(t) - e^{-t}}}{\cos(t)} dt,$$

y el valor  $u_0$  es la primera raíz positiva de  $\cos^4(t) = e^{-t}$ . Aproximadamente se tiene  $u_0 \sim 0.48$ .

Es una inmersión regular ya que el determinante de sus coeficientes de la primera forma fundamental es

$$EG - F^2 = \cos^2(u) > 0,$$

dado que trabajamos en  $U = ]0, u_0[ \times \mathbb{R}$ . Además, el cálculo directo de los invariantes locales muestra que

$$|H|^2 = 1 - \frac{(\cos(u) - 4 \sin(u))^2}{2(8 - e^u(3 + 4 \cos(2u) + \cos(4u)))},$$

$$K = 1, \quad k_N = 0, \quad \Delta = 1 - |H|^2.$$

Para comprobar que es una superficie no esférica, vamos a trabajar por reducción al absurdo. Si fuese esférica debería existir un punto en el espacio  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$  tal que  $|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2$  es constante. Calculamos directamente la derivada parcial de esta expresión con respecto a  $v$  y tenemos

$$0 = (|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2)_v = 2 \cos(u)(d_4 \cos(v) - d_3 \sin(v)).$$

Dado que  $\cos(u)$  no se anula en  $U$  y que las funciones trigonométricas  $\cos(v)$  y  $\sin(v)$  son linealmente independientes, se debería cumplir que  $d_3$  y  $d_4$  sean nulos. Si calculamos la otra derivada parcial, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2)_u \\ &= 2((x_1(u) - d_1)x'_1(u) + (x_2(u) - d_2)x'_2(u) - \cos(u) \sin(u)) \\ &= 2(x_1(u)x'_1(u) + x_2(u)x'_2(u) - \cos(u) \sin(u) - d_1x'_1(u) - d_2x'_2(u)). \end{aligned}$$

Para ver que  $\{x_1(u)x'_1(u) + x_2(u)x'_2(u) - \cos(u) \sin(u), x'_1(u), x'_2(u)\}$  no son funciones linealmente dependientes en todo punto, calculamos el Wronskiano que denotamos por  $W(u)$ . Podemos comprobar que no se anula en algún punto de  $]0, u_0[$ , por ejemplo, en  $u = 0.1$  se tiene que aproximadamente  $W(0.1) \approx 0.11 > 0$ . De esta forma, sabemos que estas funciones son linealmente independientes al menos en un subconjunto abierto de  $U$ .

Así, concluimos que no pueden existir constantes  $d_1$  y  $d_2$  que verifiquen

$$(|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2)_u = 0$$

en el subconjunto abierto dado de  $U$ . Lo que implica que  $\mathbf{x}$  no puede ser esférica al menos en ese subconjunto abierto.

Con ambos ejemplos pertenecientes a este subcaso, vemos que las condiciones necesarias no son suficientes para caracterizar las inmersiones esféricas. Es decir, que existen inmersiones que cumplen simultáneamente las condiciones  $k_N \equiv 0$ ,  $R^2 \Delta + |H|^2 \equiv K \equiv \frac{1}{R^2}$  y  $\Delta(u, v) \neq 0$  que son esféricas y otras que no son esféricas.

## 2.2 Inmersiones esféricas en $\mathbb{R}^{n+2}$ , con $n > 2$

En el caso general encontramos una condición necesaria, que por sí sola no permite encontrar un resultado recíproco. Veamos cómo es esta condición en el caso general.

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ , con  $n > 2$ , una inmersión esférica y supongamos que  $I_5(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ , entonces*

$$\frac{k_N^2}{4} = I_5 |p(\mathbf{x})|^2, \quad (2.7)$$

donde  $p(\mathbf{x})$  es la proyección de  $\mathbf{x}$  en  $T^2M$ .

*Nota 11.* Recordemos, sección 1.7, que  $T^2M$  es el espacio generado por  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  y como máximo es de dimensión 5.

**Demostración:** Para la demostración, supondremos que tenemos una inmersión  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  incluida en una esfera centrada en el origen. Si es necesario, se realizaría una traslación.

Por un lado, como  $I_5 \neq 0$ , tenemos por el Lema 1.4.3 que  $T^2M$  tiene dimensión 5 y que los vectores  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  son linealmente independientes. Por otro lado, como  $\mathbf{x}$  es esférica, tenemos que  $|\mathbf{x}|^2 = R^2$  y, por lo tanto,

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x} \rangle = 0 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x} \rangle. \quad (2.8)$$

Tomando las derivadas parciales en Ec. (2.8), se tiene que

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x} \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -E.$$

Análogamente,  $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x} \rangle = -F$  y  $\langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x} \rangle = -G$ .

Como  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$  es base de  $T^2M$ , podemos determinar un vector no necesariamente unitario,  $N \in T^2M$ , que cumpla las siguientes cinco condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{x}_u, N \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, N \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, p(\mathbf{x}) \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_{uv}, p(\mathbf{x}) \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, N \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, p(\mathbf{x}) \rangle. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Observamos que  $N$  cumple las mismas condiciones que  $p(\mathbf{x})$ , lo que implica que ambos vectores coinciden.

Ahora elegimos una base,  $\{t_1, t_2, N_1, N_2, N_3\}$ , adaptada a la inmersión donde  $N_1 = N/|N|$ . Esta base tiene por coeficientes

$$e_1|N| = -E, \quad f_1|N| = -F \quad \text{y} \quad g_1|N| = -G.$$

Los invariantes locales de Montesinos, Ecs. (1.10), serán

$$I_3 = \frac{|M_{12}|^2 + |M_{13}|^2 + |M_{23}|^2}{4(EG - F^2)^3}, \quad I_5 = \frac{|A_{123}|^2}{4(EG - F^2)^3}. \quad (2.10)$$

Utilizando las expresiones que tenemos para los coeficientes, se verifica que

$$A_{123} = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \\ e_3 & f_3 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/|N| & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{23}.$$

Por lo tanto

$$|A_{123}| = -|M_{23}|/|N| \quad \text{y} \quad |M_{12}| = 0 = |M_{13}|.$$

Utilizando esta información junto con las Ecs. (2.10), se tiene que

$$k_N^2 = 4I_3 = \frac{|M_{12}|^2 + |M_{13}|^2 + |M_{23}|^2}{(EG - F^2)^3} = \frac{|A_{123}|^2|N|^2}{(EG - F^2)^3} = 4I_5|N|^2.$$

□

Nótese que para el caso  $n = 3$ , la imagen de  $\mathbf{x}$  está en una esfera  $S^4(R) \subset \mathbb{R}^5$ . Recordando la nota 7 (en la sección 1.7), tenemos que la dimensión de  $T^2M$  es al menos 5, es decir,  $T^2M = \mathbb{R}^5$  y por lo tanto  $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ . De esta forma, la expresión Ec. (2.7) queda simplemente como

$$\frac{k_N^2}{4} = I_5 R^2,$$

donde  $R$  es el radio de la esfera.

En los casos  $n > 3$ , aunque  $|\mathbf{x}|$  sea constante,  $|p(\mathbf{x})|$  no tiene que serlo necesariamente. Veamos un ejemplo sencillo.

**Ejemplo 2.2.2.** Consideramos una inmersión esférica de radio 4,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^6$ , definida por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), \cos(v), \sin(v), \sqrt{u+v}, \sqrt{2-u-v}),$$

donde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u+v \text{ y } 0 < 2-u-v\}$ . El cálculo directo nos da

$$\frac{I_3}{I_5} = \frac{k_N^2}{4I_5} = \frac{4(3+u^2+2u(-1+v)-2v+v^2)}{5+3u^2+6u(-1+v)-6v+3v^2} = |p(\mathbf{x})|^2.$$

Resumimos esta posibilidad en el siguiente corolario.

**Corolario 2.2.3.** Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^5$ , una inmersión esférica y supongamos que  $I_5(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ , entonces  $\frac{k_N^2}{I_5}$  es constante.

## 2.3 Resumen de resultados

Para resumir los resultados en esta sección, tenemos la siguiente tabla de condiciones necesarias:

Condiciones necesarias	
Esfericidad en $\mathbb{R}^4$ (Prop. 2.1.1)	$\Rightarrow k_N \equiv 0 \quad \text{y} \quad R^2\Delta +  H ^2 \equiv K.$
Esfericidad en $\mathbb{R}^5$ (Cor. 2.2.3)	$\Rightarrow \frac{k_N^2}{I_5}$ es constante.
Esfericidad en $\mathbb{R}^{n+2}$ , $n > 3$ (Prop. 2.2.1)	$\Rightarrow \frac{k_N^2}{4} = I_5 p(x) ^2.$

Añadimos, además, la siguiente tabla de los posibles subcasos en  $\mathbb{R}^4$ :



Posibles condiciones	$\Delta \equiv 0$	$\Delta(u, v)$ nunca se anula
$K \equiv \frac{1}{R^2}$	Condiciones suficientes, además puede ser inmersa en $\mathbb{R}^3$ (Cor. 2.1.4)	Existen ejemplos esféricos y no esféricos (Ejs. 2.1.5 y 2.1.6)
$K(u, v) \neq \frac{1}{R^2}$ para todo $(u, v) \in U$	No es esférica (Aplicando Prop. 2.1.1)	Condiciones suficientes (Prop. 2.1.3)

## Capítulo 3

# Superficies inmersas en $\mathbb{R}^4$ cuyos planos tangentes definen ángulos constantes con un plano fijo

El objetivo del capítulo anterior era caracterizar las superficies esféricas, de las que se conocían bastantes ejemplos. En contraste, un objetivo de este capítulo será hallar ejemplos generales para las superficies de **ángulos de Jordan constantes** o **helicoidales**. Dichas superficies se entienden como la generalización de las hélices generalizadas clásicas en  $\mathbb{R}^3$ , aquellas curvas cuyo vector tangente forma siempre el mismo ángulo con una dirección fijada. Recordemos que estas curvas están caracterizadas mediante el llamado teorema de Lancret.

**Teorema** (Teorema de Lancret). *Una curva en  $\mathbb{R}^3$  no plana es una hélice si y sólo si el cociente entre su torsión y su curvatura es constante.*

Para llevar la noción de hélice generalizada a superficies, hay que tener en cuenta que en lugar de una recta tangente tenemos un plano tangente. De esta forma, se utilizan los ángulos de Jordan definidos en general entre subespacios vectoriales de cualquier dimensión. Para subespacios de dimensión 2 en  $\mathbb{R}^4$ , estamos hablando de dos ángulos de Jordan, los que se forman entre los planos tangentes y un plano fijado.

Estas superficies se habían estudiado en [3], donde se demuestra la existencia de una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$  para cualquier par de ángulos de

Jordan dados. La demostración dada en [3] se basa en buscar qué condiciones tiene que cumplir una inmersión del tipo gráfica, es decir,

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v), g(u, v)),$$

para tener ángulos constantes con respecto un plano fijo. Esto se traduce en condiciones sobre  $f$  y  $g$  en forma de ecuaciones en derivadas parciales. Aplicando teoremas de existencia de soluciones para esas ecuaciones, se concluye que deben existir tales funciones y por ello existe tal inmersión. Esta demostración no permite construir ejemplos explícitos, ya que la solución explícita de las ecuaciones en derivadas parciales que aparecen difícilmente es posible. Sólo se conocen ejemplos en los casos donde uno o ambos ángulos son nulos o  $\frac{\pi}{2}$ .

El objetivo de este capítulo es encontrar ejemplos explícitos de superficies con ángulos  $0 < \phi_1 < \phi_2 < \frac{\pi}{2}$ , además de conseguir una caracterización de las superficies con ángulos de Jordan constantes en términos de los invariantes locales. A su vez, vamos a estudiar cómo se comportan los invariantes para esta familia, y si es posible, demostrar un resultado similar al de Lancret: una caracterización de una familia de superficies de ángulos constantes en términos de los invariantes locales.

La estructura de este capítulo es:

- Vemos cómo se definen los ángulos de Jordan entre dos planos y su interpretación en términos de los bivectores asociados a los planos.
- Estudiamos la familia de superficies con  $K = 0 = k_N$  que incluye a la familia de ángulos constantes.
- Añadimos la condición de ángulos constantes a la familia anterior para encontrar un resultado general que describa cada inmersión con ángulos constantes.
- Imponemos una condición adicional en términos de los invariantes que nos lleva a una descripción total y explícita de una subfamilia de superficies inmersas con ángulos constantes arbitrarios.

## 3.1 Ángulos de Jordan y superficies helicoidales

Como ya hemos comentado, los ángulos de Jordan están definidos entre subespacios vectoriales de dimensiones arbitrarias. Vamos a utilizar la definición dada en [28] adaptada a nuestro caso de subespacios de dimensión 2. Se denotará por  $\text{Gr}_{2,2}$  a la Grassmaniana de todos los subespacios vectoriales de dimensión 2 en  $\mathbb{R}^4$ .

**Definición 3.1.1.** *Dados dos planos,  $P, R \in \text{Gr}_{2,2}$ , con dos bases ortonormales  $\{p_1, p_2\} \subset P$  y  $\{r_1, r_2\} \subset R$ , consideramos la matriz*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \langle p_1, r_1 \rangle & \langle p_1, r_2 \rangle \\ \langle p_2, r_1 \rangle & \langle p_2, r_2 \rangle \end{pmatrix},$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^4$ . Denotamos por  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  los valores singulares de la matriz  $\Lambda$ , esto es, los autovalores de la matriz  $\sqrt{\Lambda^T \Lambda}$ . Los **ángulos principales** o **ángulos de Jordan** entre  $P$  y  $R$  serán aquellos valores  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$  tal que  $\cos(\phi_i) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ .

*Nota 12.* La definición no depende de la elección de la base.

Con esta definición podemos presentar formalmente nuestro objeto de estudio para este capítulo, ver [3, Def. 2.6].

**Definición 3.1.2.** *Sea  $\Sigma$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$  y sea  $\Pi \subset \mathbb{R}^4$  un subespacio vectorial de dimensión 2. Diremos que  $\Sigma$  es una **superficie helicoidal** o que tiene **ángulos principales constantes** o **ángulos de Jordan constantes** con respecto a  $\Pi$ , si los ángulos principales entre el plano tangente  $\mathbf{T}_p \Sigma$  y  $\Pi$  no dependen de la elección del punto  $p \in \Sigma$ .*

### Ángulos de Jordan mediante bivectores

Como vamos a trabajar con el espacio de planos de  $\mathbb{R}^4$ , surge, de forma natural, la idea de utilizar la asociación entre planos y bivectores. Los bivectores son una parte de los elementos del álgebra exterior definida sobre los tensores, denotada por  $\Lambda \mathbb{R}^4$ . Este espacio vectorial es el cociente del anillo de los tensores,  $(T(\mathbb{R}^4), +, \otimes)$ , bajo el ideal  $I$  formado por los elementos  $x \otimes x$ ,

es decir, el ideal formado por los elementos que se pueden expresar como el producto tensorial de un vector por sí mismo.

Si tomamos, por ejemplo, la base canónica del espacio,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ , entonces una base de los tensores covariantes serán los elementos duales  $\{(\vec{e}_1)^*, (\vec{e}_2)^*, (\vec{e}_3)^*, (\vec{e}_4)^*\}$ . Utilizamos esta notación para distinguirlos de los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas.

El espacio de bivectores, denotado por  $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ , es el subespacio vectorial de  $\Lambda\mathbb{R}^4$  formado por los  $(2,0)$ -tensores antisimétricos. Cualquier elemento de este subespacio puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de una base. Si tomamos  $\{\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j\}$ , con  $1 \leq i < j \leq 4$ , como la base de  $\Lambda\mathbb{R}^4$ , entonces un elemento,  $\eta$ , se puede escribir como

$$\eta = \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i < j}}^4 \eta((\vec{e}_i)^*, (\vec{e}_j)^*) \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j,$$

ya que

$$\begin{aligned} (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j)((\vec{e}_k)^*, (\vec{e}_l)^*) &= \vec{e}_i((\vec{e}_k)^*) \vec{e}_j((\vec{e}_l)^*) - \vec{e}_i((\vec{e}_l)^*) \vec{e}_j((\vec{e}_k)^*) \\ &= (\vec{e}_k)^*(\vec{e}_i)(\vec{e}_l)^*(\vec{e}_j) - (\vec{e}_l)^*(\vec{e}_i)(\vec{e}_k)^*(\vec{e}_j) \\ &= \delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{li} \delta_{kj}. \end{aligned}$$

Además, dado que  $\Lambda^2\mathbb{R}^4$  es un espacio vectorial, podemos definir el producto escalar entre dos bivectores. Si tenemos dos bivectores,  $\eta$  y  $\nu$ , dados por

$$\eta = \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i < j}}^4 a_{ij} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \quad \text{y} \quad \nu = \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i < j}}^4 b_{ij} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j,$$

entonces

$$\langle \eta, \nu \rangle = \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i < j}}^4 a_{ij} b_{ij}.$$

Si ahora consideramos un 2-plano,  $\Pi$ , podemos asociarlo con el conjunto de bivectores,  $\{v_\alpha \wedge w_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , tal que el par  $\{v_\alpha, w_\alpha\}$  es una base de  $\Pi$ . De

forma usual, tomaremos como representante del conjunto un bivector,  $v_0 \wedge w_0$ , tal que  $\{v_0, w_0\}$  es base ortonormal de  $\Pi$ .

Denotaremos el siguiente subconjunto de bivectores unitarios

$$Q = \{\eta \in \Lambda^2 \mathbb{R}^4 : \langle \eta, \eta \rangle = 1, \eta \wedge \eta = 0\}.$$

La segunda condición,  $\eta \wedge \eta = 0$ , es también llamada **descomponibilidad** e implica que el bivector se puede escribir como el producto exterior de dos vectores.

**Lema 3.1.3.** *Sea  $\eta$  un bivector tal que  $\langle \eta, \eta \rangle = 1, \eta \wedge \eta = 0$ , entonces existen dos vectores  $\eta_1$  y  $\eta_2$  de forma que  $\eta_1 \wedge \eta_2 = \eta$ .*

Con la métrica heredada de los bivectores, vamos a definir ángulos entre los elementos de  $Q$  para luego ver su relación con los ángulos de Jordan.

**Definición 3.1.4.** *Sean dos bivectores unitarios y descomponibles,  $p_1 \wedge p_2, r_1 \wedge r_2 \in Q$ , definimos el **ángulo entre los bivectores** como el valor  $\theta \in [0, \pi/2]$  tal que*

$$\cos(\theta) = |\langle p_1 \wedge p_2, r_1 \wedge r_2 \rangle|.$$

*Análogamente, se define el **ángulo ortogonal entre los bivectores** como el valor  $\theta^\perp \in [0, \pi/2]$  tal que*

$$\cos(\theta^\perp) = |\langle p_1 \wedge p_2, r_3 \wedge r_4 \rangle|,$$

*donde  $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$ .*

Trabajar con estos ángulos es equivalente a trabajar con los ángulos de Jordan, como vemos en el siguiente resultado.

**Lema 3.1.5** (Ver [18, Teorema 5]). *Sean  $\theta$  y  $\theta^\perp$  los ángulos entre los bivectores asociados a dos planos  $P$  y  $R$ . Sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  los ángulos de Jordan entre los mismos planos. Los pares de ángulos están relacionados mediante las expresiones*

$$\cos(\theta) = \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \quad y \quad \cos(\theta^\perp) = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2).$$

De esta forma, buscar el conjunto de planos con un mismo par de ángulos de Jordan con respecto a un plano fijado será equivalente a buscar el conjunto de bivectores con un mismo par de ángulos con respecto un bivector fijado, ya que ambos pares de ángulos están relacionados por el Lema 3.1.5.

## 3.2 Inmersiones con curvatura de Gauss y curvatura normal nulas

Antes de estudiar las superficies helicoidales, es útil estudiar una familia más general: las inmersiones con las condiciones usualmente conocidas como métrica plana y fibrado normal plano. Esto no es más que aquellas inmersiones que cumplen  $K = 0 = k_N$ . Está demostrado en [13] que las superficies helicoidales cumplen estas dos condiciones. Trabajar primero en la familia más general, nos permitirá utilizar resultados que incluyen las superficies inmersas en  $\mathbb{R}^4$  cuyos planos tangentes definen ángulos constantes con un plano fijo.

Vamos a empezar con el hecho conocido, ver por ejemplo [33], de que existe un campo vectorial unitario normal a la superficie, que además es paralelo en el fibrado normal, es decir, que los campos resultantes al derivar respecto a los parámetros de la superficie son tangentes. Los campos que cumplen esta condición son usualmente llamados **secciones especiales**. Si se utilizan secciones especiales, se dan ciertas relaciones entre los coeficientes de las formas fundamentales.

**Proposición 3.2.1.** *Dada una inmersión,  $\mathbf{x}$ , que cumple  $K = 0 = k_N$ , entonces existe una base del fibrado normal  $\{N, \hat{N}\}$  tal que los coeficientes de las segundas formas fundamentales verifican*

$$\begin{cases} f_1 &= \cos(\omega)e_1 + \sin(\omega)e_2, \\ f_2 &= \sin(\omega)e_1 - \cos(\omega)e_2, \\ g_1 &= e_1, \\ g_2 &= e_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

para una función diferenciable  $\omega$ . Además, se tiene que

$$E = e_1^2 + e_2^2 = G \quad y \quad F = (e_1^2 - e_2^2) \cos(\omega) + 2e_1e_2 \sin(\omega). \quad (3.2)$$

*Nota 13.* Todas estas relaciones entre coeficientes están demostradas, con diferente notación, en [13].

**Demostración:** Supongamos que  $N$  es una sección especial de una inmersión con  $K = 0 = k_N$ . Tenemos una base del fibrado normal  $\{N, \hat{N}\}$ ,

donde  $\hat{N}$  es un complemento ortonormal de  $N$  en el fibrado normal. Se demuestra en [13, pág. 12] que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \langle N_u, N_u \rangle &= 1 = \langle N_v, N_v \rangle, & \langle N_u, N_v \rangle &= \cos(\omega), \\ \langle N_u, \hat{N}_u \rangle &= 0 = \langle N_v, \hat{N}_v \rangle, & \langle N_u, \hat{N}_v \rangle &= \sin(\omega) = \langle N_v, \hat{N}_u \rangle, \\ \langle \hat{N}_u, \hat{N}_u \rangle &= 1 = \langle \hat{N}_v, \hat{N}_v \rangle, & \langle \hat{N}_u, \hat{N}_v \rangle &= -\cos(\omega), \end{aligned} \quad (3.3)$$

para una función diferenciable con continuidad  $\omega$  tal que  $\omega_{uv} = 0$ .

Partiendo de este resultado, supongamos que tenemos una inmersión,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ , con ángulos principales constantes respecto a un plano fijado y por lo tanto  $K = 0 = k_N$ . Sean  $N$  y  $\hat{N}$  dos secciones especiales que forman una base ortonormal del fibrado normal y que cumplen las Ecs. (3.3). Estas ecuaciones implican que tanto  $\{N_u, \hat{N}_u\}$  como  $\{N_v, \hat{N}_v\}$  son bases ortonormales del plano tangente, relacionadas por

$$\begin{pmatrix} N_v \\ \hat{N}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ \sin(\omega) & -\cos(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_u \\ \hat{N}_u \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Nótese que esta matriz es idempotente, o lo que es lo mismo, es su propia inversa.

Para escribir las derivadas utilizando estas bases, tenemos, por ejemplo, que

$$\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle = (\langle \mathbf{x}_u, N \rangle)_u - \langle \mathbf{x}_{uu}, N_u \rangle = 0 - e_1 = -e_1.$$

Si realizamos los cálculos análogos para el resto de los productos escalares, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_u \\ \hat{N}_u \end{pmatrix},$$

y para la otra base, se tiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_v \\ \hat{N}_v \end{pmatrix}.$$

Esto implica que

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_u \\ \hat{N}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_v \\ \hat{N}_v \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$



De esta forma, obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ \sin(\omega) & -\cos(\omega) \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente, multiplicando por la matriz en la Ec. (3.4), se consigue

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ \sin(\omega) & -\cos(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix},$$

con lo que tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1 &= \cos(\omega)e_1 + \sin(\omega)e_2, \\ f_2 &= \sin(\omega)e_1 - \cos(\omega)e_2, \\ g_1 &= \cos(\omega)f_1 + \sin(\omega)f_2 = e_1, \\ g_2 &= \sin(\omega)f_1 - \cos(\omega)f_2 = e_2, \end{cases}$$

que implican las igualdades en Ecs. (3.1). Concluimos que sólo dos de los seis coeficientes  $e_i, f_i, g_i$ ,  $i = 1, 2$ , son independientes. Elegimos que lo sean  $e_1$  y  $e_2$ . Además, gracias a las Ecs. (3.5), podemos expresar los coeficientes de la primera forma fundamental en términos de  $e_1$  y  $e_2$  de la siguiente forma

$$\begin{cases} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = e_1^2 + e_2^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = e_1 f_1 + e_2 f_2 = (e_1^2 - e_2^2) \cos(\omega) + 2e_1 e_2 \sin(\omega), \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = g_1^2 + g_2^2 = e_1^2 + e_2^2 = E. \end{cases}$$

que implica las igualdades en Ecs. (3.2)

□

### 3.3 Inmersiones con ángulos de Jordan constantes

En esta sección vamos a utilizar los resultados de la sección anterior para encontrar parametrizaciones explícitas con ángulos de Jordan constantes arbitrarios. La idea principal será interpretar esta condición como ecuaciones en derivadas parciales en los coeficientes de las formas fundamentales

que hemos tomado como independientes. Para ello necesitaremos cambiar el planteamiento de la sección anterior. En vez de utilizar  $\{N_u, \hat{N}_u, N, \hat{N}\}$  como base del espacio, utilizaremos la base  $\{\frac{\mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u|}, \frac{\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_v|}, N, \hat{N}\}$ . Resumimos en la siguiente proposición las propiedades que conseguiremos con este cambio.

**Proposición 3.3.1.** *Dada  $\Sigma$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$  con  $K = 0 = k_N$ , entonces, existe una parametrización,  $\mathbf{x}$ , junto a una base del fibrado normal,  $\{N_1, N_2\}$ , tal que los coeficientes de las formas fundamentales verifican*

$$e_1 = 2\sqrt{E}, \quad F = 0, \quad g_2 = 2\sqrt{G},$$

$$e_2 = f_1 = 0 = f_2 = g_1, \quad \langle N_{1u}, N_2 \rangle = -\frac{g_{2u}}{e_1}, \quad \langle N_{1v}, N_2 \rangle = \frac{e_{1v}}{g_2}.$$

**Demostración:** Denotemos por  $\tilde{\mathbf{x}}$  la inmersión que cumple las condiciones de la sección anterior junto con las secciones especiales asociadas denotadas por  $\{N, \hat{N}\}$ . Ahora consideramos la siguiente reparametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \tilde{\mathbf{x}}(u + v, u - v).$$

Empecemos a comprobar que ésta es la parametrización que necesitamos. Vamos a calcular los coeficientes de sus formas fundamentales, para ello tenemos que sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} + \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}, \\ \mathbf{x}_v &= \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} - \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}, \end{aligned}$$

por lo tanto, los coeficientes de su primera forma fundamental son

$$\begin{cases} E &= \tilde{E} + 2\tilde{F} + \tilde{G} = 2(\tilde{E} + \tilde{F}) = 4(\cos(t)\tilde{e}_1 + \sin(t)\tilde{e}_2)^2, \\ F &= \tilde{E} - \tilde{G} = 0, \\ G &= \tilde{E} - 2\tilde{F} + \tilde{G} = 2(\tilde{E} - \tilde{F}) = 4(-\sin(t)\tilde{e}_1 + \cos(t)\tilde{e}_2)^2, \end{cases} \quad (3.6)$$

con  $t = \frac{\omega}{2}$  y donde se han usado las Ecs. (3.2).

Para calcular los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas, vamos a elegir,  $N_1$  y  $N_2$ , vectores distintos de  $N$  y  $\hat{N}$ , definidos por

$$\begin{aligned} N_1 &= \cos(t)N + \sin(t)\hat{N}, \\ N_2 &= -\sin(t)N + \cos(t)\hat{N}. \end{aligned}$$

Será esta combinación de reparametrización y vectores normales lo que nos va a dar las relaciones que buscamos. Por ejemplo, el cálculo de  $e_1$  es

$$\begin{aligned}
e_1 &= \langle \mathbf{x}_{uu}, N_1 \rangle = \langle \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}\tilde{u}} + 2\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}\tilde{v}} + \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}\tilde{v}}, \cos(t)N + \sin(t)\hat{N} \rangle \\
&= \cos(t)(\tilde{e}_1 + 2\tilde{f}_1 + \tilde{g}_1) + \sin(t)(\tilde{e}_2 + 2\tilde{f}_2 + \tilde{g}_2) \\
&= 2 \left( \cos(t)(\tilde{e}_1 + \tilde{f}_1) + \sin(t)(\tilde{e}_2 + \tilde{f}_2) \right) \\
&= 2(\cos(t)(\tilde{e}_1 + \cos(\omega)\tilde{e}_1 + \sin(\omega)\tilde{e}_2) \\
&\quad + \sin(t)(\tilde{e}_2 + \sin(\omega)\tilde{e}_1 - \cos(\omega)\tilde{e}_2)) \\
&= 2((\cos(t) + \cos(t)\cos(\omega) + \sin(t)\sin(\omega))\tilde{e}_1 \\
&\quad + (\sin(t) + \cos(t)\sin(\omega) - \sin(t)\cos(\omega))\tilde{e}_2) \\
&= 2((\cos(t) + \cos(\omega - t))\tilde{e}_1 + (\sin(t) + \sin(\omega - t))\tilde{e}_2) \\
&= 4(\cos(t)\tilde{e}_1 + \sin(t)\tilde{e}_2) \\
&= 2\sqrt{E},
\end{aligned}$$

donde se han usado las Ecs. (3.1). Análogamente se obtiene  $f_1 = g_1 = e_2 = f_2 = 0$  y  $g_2 = 2\sqrt{G}$ .

Nótese que, aunque estamos llegando a las propiedades que nos harán falta, sí perdemos una propiedad con estos cambios. Con esta base del fibrado normal,  $\{N_1, N_2\}$ , no estamos trabajando con secciones especiales. Para comprobarlo, podemos ver que

$$\begin{aligned}
(N_1)_u &= \frac{\omega_u}{2} \left( -\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)N + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N} \right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)N_u + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N}_u \\
&= \frac{\omega_u}{2}N_2 + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)N_u + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N}_u, \\
(N_1)_v &= \frac{\omega_v}{2} \left( -\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)N + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N} \right) + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)N_v + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N}_v \\
&= \frac{\omega_v}{2}N_2 + \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)N_v + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N}_v.
\end{aligned}$$

Se concluye que

$$\langle N_{1u}, N_2 \rangle = \omega_u/2, \quad \langle N_{1v}, N_2 \rangle = \omega_v/2.$$

Así vemos que las derivadas de cada  $N_i$ ,  $i = 1, 2$ , tienen componente normal no nula y por lo tanto no son secciones especiales. Concluimos, utilizando

las Ecs. (3.6) y las expresiones de  $e_1$  y  $g_2$ , que nuestra lista de coeficientes cumple

$$E = \frac{e_1^2}{4}, \quad F = 0, \quad G = \frac{g_2^2}{4},$$

$$e_2 = f_1 = 0 = f_2 = g_1, \quad \langle N_{1u}, N_2 \rangle = \omega_u/2, \quad \langle N_{1v}, N_2 \rangle = \omega_v/2.$$

Además, las expresiones de los invariantes son

$$|H|^2 = \frac{\text{Tr}(g)}{|g|^2} \quad \text{y} \quad \Delta = -\frac{4}{|g|^2}, \quad (3.7)$$

donde  $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  y  $|g|^2 = \det(g)$ .

Si comparamos los resultados obtenidos hasta el momento con nuestro enunciado, nos queda relacionar las derivadas parciales de  $\omega$  con  $e_1$  y  $g_2$ . Para encontrar la relación entre las derivadas de  $\omega$  con  $e_1$  y  $g_2$ , buscaremos las ecuaciones de compatibilidad del fibrado ortonormal  $\{t_1, t_2, N_1, N_2\}$  donde

$$t_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} = \frac{2}{e_1} \mathbf{x}_u \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} = \frac{2}{g_2} \mathbf{x}_v.$$

Miraremos que las coordenadas de las derivadas mixtas de orden 2 de cada elemento coincidan usando los dos posibles ordenes de derivación.

Para ello, primero vemos las expresiones de las primeras derivadas de cada vector en términos de la base. Por ejemplo, para calcular las componentes de  $t_{1u}$ , como  $t_1$  es unitario, tenemos que  $\langle t_{1u}, t_1 \rangle = 0$ . Para la segunda componente usamos que

$$\langle (t_1)_u, t_2 \rangle = \left\langle \left( \frac{2}{e_1} \mathbf{x}_u \right)_u, \frac{2}{g_2} \mathbf{x}_v \right\rangle = 4 \left\langle \frac{\mathbf{x}_{uu}}{e_1} - \frac{e_{1u}}{e_1^2} \mathbf{x}_u, \frac{\mathbf{x}_v}{g_2} \right\rangle.$$

Dado que  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = F = 0$ , se tiene que

$$\langle (t_1)_u, t_2 \rangle = 4 \left\langle \frac{\mathbf{x}_{uu}}{e_1} - \frac{e_{1u}}{e_1^2} \mathbf{x}_u, \frac{\mathbf{x}_v}{g_2} \right\rangle = \frac{4}{e_1 g_2} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle,$$

Además,  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$  implica que  $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle$ . Tenemos también que  $E_v = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_v = 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle$ , por lo tanto  $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v$ . De esta forma, llegamos a

$$\langle (t_1)_u, t_2 \rangle = -\frac{2}{e_1 g_2} E_v = -\frac{2}{e_1 g_2} (e_1^2/4)_v = -\frac{e_{1v}}{g_2}.$$

Para la tercera coordenada, se obtiene que

$$\begin{aligned}\langle (t_1)_u, N_1 \rangle &= 2 \left\langle \frac{\mathbf{x}_{uu}}{e_1} - \frac{e_{1u}}{e_1^2} \mathbf{x}_u, N_1 \right\rangle \\ &= \frac{2}{e_1} \langle \mathbf{x}_{uu}, N_1 \rangle = \frac{2}{e_1} e_1 = 2,\end{aligned}$$

y para la última coordenada, llegamos a

$$\langle (t_1)_u, N_2 \rangle = \frac{2}{e_1} \langle \mathbf{x}_{uu}, N_2 \rangle = \frac{2}{e_1} e_2 = 0.$$

Se calcula análogamente para cada elemento de la base y tenemos las expresiones

$$\begin{pmatrix} t_{1u} \\ t_{2u} \\ N_{1u} \\ N_{2u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e_{1v}}{g_2} & 2 & 0 \\ \frac{e_{1v}}{g_2} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & \frac{\omega_u}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\omega_u}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} t_{1v} \\ t_{2v} \\ N_{1v} \\ N_{2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g_{2u}}{e_1} & 0 & 0 \\ -\frac{g_{2u}}{e_1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_v}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{\omega_v}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}.$$

De forma usual, podemos escribir las condiciones de compatibilidad en forma matricial

$$B_u - A_v = [A, B].$$

El cálculo directo muestra que las únicas entradas no nulas de la matriz diferencia  $B_u - A_v$  están en la posición  $(1, 2)$  y en su simétrica  $(2, 1)$ . Para la otra matriz,  $[A, B]$ , las únicas entradas no nulas están en la antidiagonal. Así, se obtienen las condiciones

$$\begin{pmatrix} g_{2u} \\ e_1 \end{pmatrix}_u + \begin{pmatrix} e_{1v} \\ g_2 \end{pmatrix}_v = 0,$$

para la entrada  $(1, 2)$  de la igualdad, y para la antidiagonal

$$\omega_u = -\frac{2g_{2u}}{e_1}, \omega_v = \frac{2e_{1v}}{g_2}.$$

□

Hasta este punto, sólo hemos escrito las condiciones de la parametrización dada en [13] mediante nuestra notación. Ahora vamos a estudiar la condición de ángulos constantes sabiendo estas relaciones entre los coeficientes de las formas fundamentales.

**Proposición 3.3.2.** *Dada  $\Sigma$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$  con ángulos de Jordan constantes,  $0 < \phi_1 < \phi_2 < \frac{\pi}{2}$ , con respecto a un plano fijo, entonces existe una parametrización,  $\mathbf{x}$ , junto a una base del fibrado normal,  $\{N_1, N_2\}$ , tal que los coeficientes de las formas fundamentales verifican*

$$\begin{aligned} e_1 &= 2\sqrt{E}, & F &= 0, & g_2 &= 2\sqrt{G}, \\ e_2 &= f_1 = 0 = f_2 = g_1, & \langle N_{1u}, N_2 \rangle &= -\frac{g_{2u}}{e_1}, & \langle N_{1v}, N_2 \rangle &= \frac{e_{1v}}{g_2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde los coeficientes  $E$  y  $G$  cumplen el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} (\sqrt{E})_v &= c_1\sqrt{G}, \\ (\sqrt{G})_u &= c_2\sqrt{E}, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{con } c_1 = \frac{2\sin(2\phi_2)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)} \text{ y } c_2 = \frac{2\sin(2\phi_1)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)}.$$

**Demostración:** Sabemos que una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^4$  con ángulos de Jordan constantes con respecto a un plano fijo cumple que  $K = 0 = k_N$ . Sean  $\mathbf{x}$  y  $\{N_1, N_2\}$  la parametrización y la base del fibrado normal dados por la proposición anterior.

Supongamos que el plano fijo, respecto del cual la inmersión tiene ángulos de Jordan constantes, es el plano generado por los dos primeros vectores de la base canónica,  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$ , de  $\mathbb{R}^4$ . De no ser este plano con el que se tienen los ángulos constantes, se realizaría un movimiento rígido a la inmersión.

Del mismo modo que usamos los vectores  $\{t_1, t_2, N_1, N_2\}$  como base de  $\mathbb{R}^4$ , usamos para  $\Lambda^2\mathbb{R}^4$  la base de bivectores

$$\{t_1 \wedge t_2, t_1 \wedge N_1, t_1 \wedge N_2, t_2 \wedge N_1, t_2 \wedge N_2, N_1 \wedge N_2\}.$$

Entonces, el bivector  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$  se puede escribir en esta base como

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = a_1 t_1 \wedge t_2 + a_2 t_1 \wedge N_1 + a_3 t_1 \wedge N_2 + a_4 t_2 \wedge N_1 + a_5 t_2 \wedge N_2 + a_6 N_1 \wedge N_2,$$

donde en principio cada  $a_i$  es una función desconocida. Como los planos tangentes forman ángulos constantes con el plano generado por los vectores  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , el lema 3.1.5 implica que

$$\begin{cases} a_1 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, t_1 \wedge t_2 \rangle = \cos(\phi_1) \cos(\phi_2), \\ a_6 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, N_1 \wedge N_2 \rangle = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2). \end{cases}$$

Ambas funciones son valores constantes dado que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son constantes. Tomando las derivadas en  $a_1 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, t_1 \wedge t_2 \rangle$  y usando las Ecs. (3.8), se tiene que

$$\begin{cases} 0 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, (t_1 \wedge t_2)_u \rangle = -2a_4, \\ 0 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, (t_1 \wedge t_2)_v \rangle = 2a_3. \end{cases}$$

Por lo tanto  $a_3 = 0 = a_4$ . Si tomamos las derivadas en  $a_6 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, N_1 \wedge N_2 \rangle$ , se llegaría al mismo resultado.

Para calcular las últimas coordenadas, sabemos que  $\langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \rangle = 1$  y  $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = 0$ , o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} 1 = \langle \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \rangle = \cos^2(\phi_1) \cos^2(\phi_2) + \sin^2(\phi_1) \sin^2(\phi_2) + a_2^2 + a_5^2, \\ 0 = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) - a_2 a_5. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones cuadráticas tiene por solución

$$a_2 = \pm \sin(\phi_1) \cos(\phi_2), \quad a_5 = \pm \cos(\phi_1) \sin(\phi_2).$$

Así se concluye que cada función  $a_i, i = 1, 2, \dots, 6$ , es en realidad una constante y escribimos

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = & \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) t_1 \wedge t_2 \pm \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) t_1 \wedge N_1 \\ & \pm \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) t_2 \wedge N_2 + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) N_1 \wedge N_2. \end{aligned}$$

Ahora, si calculamos las derivadas de  $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ , utilizando cuando es necesario las Ecs. (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)_u = & \left( \frac{g_{2u} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)}{e_1} - \frac{e_{1v} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)}{g_2} + 2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \right) t_1 \wedge N_2 \\ & + \left( \frac{g_{2u} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)}{e_1} - \frac{e_{1v} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)}{g_2} - 2 \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \right) t_2 \wedge N_1. \end{aligned}$$

La otra derivada,  $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)_v$ , nos da análogamente las mismas dos condiciones

$$\begin{cases} \frac{g_{2u} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)}{e_1} - \frac{e_{1v} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)}{g_2} - 2 \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) = 0, \\ \frac{g_{2u} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)}{e_1} - \frac{e_{1v} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)}{g_2} + 2 \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) = 0, \end{cases}$$

que son equivalentes a

$$\begin{cases} \frac{g_{2u}}{e_1 \tan(\phi_1)} - \frac{e_{1v}}{g_2 \tan(\phi_2)} = 2, \\ \frac{g_{2u} \tan(\phi_1)}{e_1} - \frac{e_{1v} \tan(\phi_2)}{g_2} = -2. \end{cases}$$

Obtenemos así las siguientes ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} e_{1v} = 2 \frac{\tan(\phi_2)(1+\tan^2(\phi_1))}{\tan(\phi_1)(\tan(\phi_2)-\tan(\phi_1))} g_2 = c_1 g_2, \\ g_{2u} = 2 \frac{\tan(\phi_2)(1+\tan(\phi_1)\tan(\phi_2))}{\tan(\phi_2)-\tan(\phi_1)} e_1 = c_2 e_1, \end{cases}$$

donde, después de manipulaciones trigonométricas, las constantes se pueden escribir como

$$c_1 = \frac{2 \sin(2\phi_2)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{2 \sin(2\phi_1)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)}.$$

Estas expresiones demuestran el resultado al ser equivalentes a las Ecs. (3.10) utilizando las Ecs. (3.9).

□

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, las Ecs. (3.10), es equivalente a la siguiente ecuación en derivadas parciales hiperbólica de segundo orden

$$(\sqrt{E})_{uv} = c_1 c_2 \sqrt{E}, \quad (3.11)$$

de donde obtendríamos  $G$  de la ecuación  $(\sqrt{E})_v = c_1 \sqrt{G}$ . Es bien conocido que este tipo de ecuación en derivadas parciales se resuelve utilizando el método de Riemann, ver [19] por ejemplo, cuando se tiene una condición inicial apropiada. En el siguiente teorema vemos cómo cualquier solución de Ec. (3.11) determina una inmersión y recíprocamente, cualquier inmersión determina una solución.



**Teorema 3.3.3.** Sean  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \frac{\pi}{2}$  dos ángulos arbitrarios.

1. Sea  $U$  un abierto en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una solución de la ecuación

$$f_{uv} = 4 \frac{\sin(2\phi_1) \sin(2\phi_2)}{(\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2))^2} f,$$

tal que  $f$  no se anule en  $U$ . Entonces, existe una inmersión  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^4$  con ángulos de Jordan  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respecto a un plano fijo tal que su coeficiente de la primera forma fundamental  $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$  es igual a  $f^2$ .

2. Recíprocamente, si  $\mathbf{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^4$  es una superficie inmersa con ángulos de Jordan  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respecto a un plano fijo, entonces para cada punto  $p \in V$ , existe una reparametrización,  $\mathbf{x}$ , definida en un subconjunto abierto,  $U$ , donde  $p \in U \subset V \subset \mathbb{R}^2$ , tal que los coeficientes de la primera forma fundamental  $E$  y  $G$  satisfacen las Ecs. (3.10).

### 3.4 Caracterización de la subfamilia de inmersiones con ángulos de Jordan constantes y con ratio $\frac{|H|^4}{\Delta}$ constante

De todas las superficies inmersas con ángulos de Jordan constantes, centramos nuestro interés en mostrar una caracterización de una familia con una condición geométrica específica. La familia de coeficientes asociados se corresponderá con los que cumplen la condición analítica  $\sqrt{E} = \lambda\sqrt{G}$ . Si estudiamos esta condición con el sistema general, las Ecs. (3.10), obtenemos un sistema más sencillo dado por

$$\begin{cases} (\sqrt{E})_v = c_1 \lambda \sqrt{E}, \\ \lambda (\sqrt{E})_u = c_2 \sqrt{E}, \end{cases} \quad (3.12)$$

cuyas soluciones son directamente  $\sqrt{E} = \rho e^{c_1 \lambda v + \frac{c_2}{\lambda} u}$  donde  $\rho$  es la constante de integración.

El cálculo directo, usando las Ecs. (3.7), muestra que estas soluciones implican que la curvatura media y la resultante se escriben como

$$|H|^2 = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2 e^{c_1 \lambda v + \frac{c_2}{\lambda} u}} \quad \text{y} \quad \Delta = -\frac{4}{\lambda^2 e^{2(c_1 \lambda v + \frac{c_2}{\lambda} u)}}. \quad (3.13)$$

De esta forma, tenemos el siguiente cociente

$$\frac{|H|^4}{\Delta} = - \left( \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} \right)^2.$$

Encontramos que se cumple de forma necesaria que el cociente  $\frac{|H|^4}{\Delta}$  es constante. Veamos en el siguiente resultado que esta condición geométrica sobre la superficie inmersa es equivalente a la condición analítica sobre los coeficientes.

**Proposición 3.4.1.** *Dada una superficie inmersa con ángulos de Jordan constantes  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respecto a un plano fijo, y con cociente  $\frac{|H|^4}{\Delta}$  constante, entonces existe una parametrización,  $\mathbf{x}$ , tal que*

$$|\mathbf{x}_u| = \sqrt{E} = \rho e^{c_1 \lambda v + \frac{c_2}{\lambda} u},$$

donde

$$c_1 = \frac{2 \sin(2\phi_2)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)} \quad y \quad c_2 = \frac{2 \sin(2\phi_1)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)},$$

y  $\rho$  es un factor de escala.

*Nota 14.* La aparición de una constante sin determinar como un factor de escala es natural dado que, si una inmersión tiene ángulos constantes con respecto a un plano, entonces cualquier homotecia tiene los mismos ángulos con el mismo plano. De la misma forma, el cociente  $\frac{|H|^4}{\Delta}$  no se ve afectado por este tipo de transformaciones.

**Demostración:** Primero, sea  $\mathbf{x}$  una parametrización cumpliendo las propiedades de la Prop. 3.3.1 de la superficie inmersa dada. La expresión de la ratio de los invariantes no nulos, usando las Ecs. (3.7), es

$$-\frac{|H|^4}{\Delta} = \frac{(E + G)^2}{4EG} = \frac{1}{2} + \frac{E}{4G} + \frac{G}{4E}.$$

Por lo tanto,  $\frac{|H|^4}{\Delta}$  es constante si y sólo si  $\frac{E}{G} + \frac{G}{E}$  es constante. Equivalentemente, si y sólo si  $\frac{E}{G}$  es constante. Podemos asumir que  $\sqrt{E} = \lambda\sqrt{G}$ . Por la Prop. 3.3.2,  $E$  y  $G$  tienen que verificar las Ecs. (3.10). Llegamos al sistema de ecuaciones (3.12), cuya solución es  $\sqrt{E} = \rho e^{c_1 \lambda v + \frac{c_2}{\lambda} u}$ , con  $\rho$  un valor real.

Además, dado que hemos visto en las Ecs. (3.13) que las expresiones de los invariantes son independientes de  $\rho$ , se concluye que se trata de un factor de escala. No influye en la geometría de la inmersión. Sólo influye en la distancia relativa al origen.

□

### 3.5 Expresiones explícitas para las superficies inmersas con ratio $\frac{|H|^4}{\Delta}$ constante

Nuestro interés en la familia que hemos caracterizado en la sección anterior se basa en dos hechos:

- La condición geométrica que determina la familia,  $\frac{|H|^4}{\Delta}$  constante, nos recuerda a la condición sobre las hélices generalizadas caracterizadas por el teorema de Lancret.
- Al reducir el conjunto de soluciones nos encontramos con la posibilidad de dar una inmersión para cada elemento de la subfamilia.

En esta sección vamos a ver la descripción explícita que tenemos para esta familia. En concreto, daremos una inmersión para cada elemento de la familia de superficies de ángulos de Jordan constantes respecto a un plano fijo y ratio constante  $\frac{|H|^4}{\Delta} = -1$ . Aunque todo este desarrollo se puede realizar para una ratio arbitraria, para evitar notaciones demasiado confusas vamos a considerar que  $\lambda = 1$ , esto es, que la ratio  $\frac{|H|^4}{\Delta} = -1$ .

Dada una solución explícita para las Ecs. (3.10), la inmersión surgirá utilizando que  $t_1 = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$  y  $t_2 = \frac{x_v}{\sqrt{G}}$ . Calcularemos la parametrización como la solución del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u &= \sqrt{E} t_1, \\ \mathbf{x}_v &= \sqrt{G} t_2. \end{cases}$$

Para utilizar esta idea, necesitamos una expresión explícita de una base  $\{t_1, t_2, N_1, N_2\}$  que cumpla las condiciones de las Ecs. (3.8). Utilizando la Prop 3.3.2, se tiene que  $\frac{e_{1v}}{g_2} = c_1 = \frac{\omega_v}{2}$  y  $-\frac{g_{2u}}{e_1} = c_2 = \frac{\omega_u}{2}$ , dejando las matrices en las Ecs. (3.8) de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & 2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & -2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Con estas matrices tenemos que encontrar la expresión explícita de una base.

**Lema 3.5.1.** *Sea la matriz escrita por bloques*

$$M_0 = \begin{pmatrix} \text{diag}(\cos(\phi_1), -\cos(\phi_2))M_S & \text{antidiag}(\sin(\phi_1), \sin(\phi_2))M_C \\ \text{antidiag}(\sin(\phi_2), \sin(\phi_1))M_S & \text{diag}(\cos(\phi_2), -\cos(\phi_1))M_C \end{pmatrix},$$

donde

$$\text{diag}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \text{antidiag}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_S = \frac{\begin{pmatrix} \sin(\phi_1) & \sin(\phi_2) \\ -\sin(\phi_2) & \sin(\phi_1) \end{pmatrix}}{\sqrt{\sin(\phi_1)^2 + \sin(\phi_2)^2}} \quad y \quad M_C = \frac{\begin{pmatrix} \cos(\phi_1) & \cos(\phi_2) \\ -\cos(\phi_2) & \cos(\phi_1) \end{pmatrix}}{\sqrt{\cos(\phi_1)^2 + \cos(\phi_2)^2}}.$$

Una base,  $\{t_1, t_2, N_1, N_2\}$ , que cumple las condiciones de las Ecs. (3.8), en el caso de las matrices de las Ecs. (3.14), con condición inicial  $M_0$  es

$$\begin{pmatrix} t_1(u, v) \\ t_2(u, v) \\ N_1(u, v) \\ N_2(u, v) \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} \alpha(\theta_+) \\ \alpha'(\theta_+) \\ \beta(\theta_-) \\ \beta'(\theta_-) \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha(s) = (\cos(s), \sin(s), 0, 0)$ ,  $\beta(s) = (0, 0, \cos(s), \sin(s))$  y

$$\theta_{\pm}(u, v) = \frac{u + v}{\sin(\phi_2 + \phi_1)} \pm \frac{u - v}{\sin(\phi_2 - \phi_1)}.$$

*Nota 15.* Lo más complicado de este enunciado es como se escribe  $M_0$ , la condición inicial. Esto se debe a que hemos buscado simplificar al máximo la parte variable de las expresiones de la base, dejando así una escritura compleja en la parte constante.

**Demostración:** Se puede comprobar de forma directa que estos vectores verifican las Ecs. (3.8). Por ejemplo, comprobemos que  $\langle t_{1u}, t_2 \rangle = -c_1$ . Si  $M_0^i$  denota la  $i$ -ésima fila de  $M_0$ , se tiene que

$$t_1(u, v) = M_0^1 \begin{pmatrix} \alpha(\theta_+) \\ \alpha'(\theta_+) \\ \beta(\theta_-) \\ \beta'(\theta_-) \end{pmatrix}, \quad y \quad t_2(u, v) = M_0^2 \begin{pmatrix} \alpha(\theta_+) \\ \alpha'(\theta_+) \\ \beta(\theta_-) \\ \beta'(\theta_-) \end{pmatrix}.$$

De esta forma se obtiene que

$$t_{1u} = M_0^1 \begin{pmatrix} \alpha'(\theta_+) \partial_u(\theta_+) \\ -\alpha(\theta_+) \partial_u(\theta_+) \\ \beta'(\theta_-) \partial_u(\theta_-) \\ -\beta(\theta_-) \partial_u(\theta_-) \end{pmatrix} = M_0^1 \begin{pmatrix} D_u^+ & [0] \\ [0] & D_u^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\theta_+) \\ \alpha'(\theta_+) \\ \beta(\theta_-) \\ \beta'(\theta_-) \end{pmatrix},$$

donde  $D_u^\pm = \text{antidiag}(\partial_u(\theta_\pm), -\partial_u(\theta_\pm))$ . Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle t_{1u}, t_2 \rangle &= M_0^1 \begin{pmatrix} D_u^+ & [0] \\ [0] & D_u^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\theta_+) \\ \alpha'(\theta_+) \\ \beta(\theta_-) \\ \beta'(\theta_-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\theta_+) \\ \alpha'(\theta_+) \\ \beta(\theta_-) \\ \beta'(\theta_-) \end{pmatrix}^t (M_0^2)^t \\
&= M_0^1 \begin{pmatrix} D_u^+ & [0] \\ [0] & D_u^- \end{pmatrix} (M_0^2)^t \\
&= -\frac{\cos(\phi_1) \sin^2(\phi_1) \cos(\phi_2) \partial_u(\theta_+)}{\sin^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_2)} \\
&\quad -\frac{\cos(\phi_1) \sin^2(\phi_2) \cos(\phi_2) \partial_u(\theta_+)}{\sin^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_2)} \\
&\quad +\frac{\cos^2(\phi_1) \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \partial_u(\theta_-)}{\cos^2(\phi_1) + \cos^2(\phi_2)} \\
&\quad +\frac{\cos^2(\phi_2) \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \partial_u(\theta_-)}{\cos^2(\phi_1) + \cos^2(\phi_2)} \\
&= -\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \partial_u(\theta_+) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \partial_u(\theta_+) \\
&= -\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \left( \frac{1}{\sin(\phi_2 + \phi_1)} + \frac{1}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \right) \\
&\quad + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \left( \frac{1}{\sin(\phi_2 + \phi_1)} - \frac{1}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \right).
\end{aligned}$$

Después de las manipulaciones trigonométricas adecuadas, se consigue que

$$\langle t_{1u}, t_2 \rangle = -\frac{2 \sin(\phi_2)}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)} = -c_1.$$

De la misma forma, se comprueba para cada elemento de las Ecs. (3.8).

Nos falta comprobar la condición inicial. Se tiene que  $\theta_+(0, 0) = 0$  y  $\theta_-(0, 0) = 0$ , con lo que directamente se llega a

$$\begin{pmatrix} t_1(0, 0) \\ t_2(0, 0) \\ N_1(0, 0) \\ N_2(0, 0) \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \alpha'(0) \\ \beta(0) \\ \beta'(0) \end{pmatrix} = M_0 I = M_0,$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

□

Con este resultado y el Teorema 3.3.3, podemos dar una parametrización para cada superficie inmersa de esta subfamilia de superficies con ángulos de Jordan constantes.

**Proposición 3.5.2.** *Dada una superficie inmersa con ángulos de Jordan constantes, iguales a  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , y con ratio constante  $\frac{|H|^4}{\Delta} = -1$ , entonces se puede reparametrizar de forma local mediante*

$$\mathbf{x}(u, v) = \rho e^{Au+Bv} \left( a \left( \cos \left( \frac{u}{a} \right), \sin \left( \frac{u}{a} \right), 0, 0 \right) + b \left( 0, 0, \cos \left( \frac{v}{b} \right), \sin \left( \frac{v}{b} \right) \right) \right), \quad (3.15)$$

de forma que  $\mathbf{x}(0, 0) = \rho(a, 0, b, 0)$  y donde las constantes son

$$A = \sqrt{\cos^2(\phi_1) + \cos^2(\phi_2)} \sin(\phi_1) \sin(\phi_2), \quad a = \frac{2\sqrt{\cos^2(\phi_1) + \cos^2(\phi_2)}}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)},$$

$$B = \sqrt{\sin^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_2)} \cos(\phi_1) \cos(\phi_2), \quad b = \frac{2\sqrt{\sin^2(\phi_1) + \sin^2(\phi_2)}}{\cos(2\phi_1) - \cos(2\phi_2)},$$

y  $\rho$  es un factor de escala libre.

**Demostración:** Como siempre, vamos a buscar que la inmersión tenga ángulos de Jordan constantes con respecto al plano generado por los dos primeros vectores canónicos de  $\mathbb{R}^4$ . Asumimos además, que esta parametrización, denotada por  $\mathbf{x}$ , cumple las propiedades de la Prop. 3.3.2. Lo que es más, gracias a la Prop. 3.4.1, podemos asumir que

$$|\mathbf{x}_u|^2 = \sqrt{E} = e^{c_1 v + c_2 u} = \sqrt{G}.$$

De esta forma, la parametrización  $\mathbf{x}$  es la solución de

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u &= \rho e^{c_1 v + c_2 u} t_1, \\ \mathbf{x}_v &= \rho e^{c_1 v + c_2 u} t_2, \\ \mathbf{x}(0, 0) &= x_0, \end{cases}$$

para alguna condición inicial  $x_0$ . Elijamos la condición inicial

$$x_0 = \rho(a, 0, b, 0).$$

La resolución usual de este sistema nos da

$$\mathbf{x}(u, v) = \rho e^{c_1 v + c_2 u} (a\alpha(\theta_+) + b\beta(\theta_-)).$$

Ahora, sea  $\theta^{-1}$  la función vectorial dada por

$$\theta^{-1}(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) & \cos(\phi_2) \sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_2) \sin(\phi_1) & \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Esta función está construida para verificar que se tiene  $\theta_+(\theta^{-1}(u, v)) = u$  y  $\theta_-(\theta^{-1}(u, v)) = v$ . Si consideramos la reparametrización dada por la función anterior, es decir,  $\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}(\theta^{-1}(u, v))$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(u, v) &= \rho e^{c_1 \frac{u \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) + v \cos(\phi_2) \sin(\phi_1)}{2} + c_2 \frac{u \cos(\phi_2) \sin(\phi_1) + v \cos(\phi_1) \sin(\phi_2)}{2}} \\ &\quad (a\alpha(u) + b\beta(v)) \\ &= \rho e^{Aa u + Bb v} (a\alpha(u) + b\beta(v)). \end{aligned}$$

Para acabar, consideramos la reparametrización dada por  $\mathbf{F}(u, v) = \mathbf{y}\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$ . De esta forma, tenemos que

$$\mathbf{F}(u, v) = \rho e^{Au + Bv} \left( a\alpha\left(\frac{u}{a}\right) + b\beta\left(\frac{v}{b}\right) \right),$$

que coincide con la expresión en la Ec. (3.15).

□

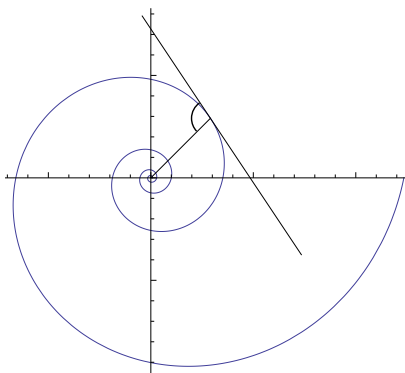


Figura 3.1: Condición geométrica de las espirales logarítmicas: el ángulo entre el vector posición de la curva y la recta tangente es constante.

*Nota 16.* Denotemos por  $\pi^{(1,2)}$  a la proyección en  $\mathbb{R}^4$  sobre las dos primeras coordenadas y  $\pi^{(3,4)}$  a la proyección sobre las dos últimas coordenadas.

Si consideramos las curvas  $\gamma_t(u) = \pi^{(1,2)}(\mathbf{x}(u, t))$  y  $\delta_s(v) = \pi^{(3,4)}(\mathbf{x}(s, v))$ , tenemos

$$\gamma_t(u) = K(B, t)e^{Au} \left( a \cos \left( \frac{u}{a} \right), a \sin \left( \frac{u}{a} \right) \right),$$

$$\delta_s(v) = K(A, s)e^{Bv} \left( b \cos \left( \frac{v}{b} \right), b \sin \left( \frac{v}{b} \right) \right),$$

donde  $K(x, y) = \rho e^{xy}$ . Estas curvas son **espirales logarítmicas** que cumplen la condición geométrica de que forman un mismo ángulo con cualquier recta radial. Vemos una representación de esta condición en la figura 3.1.

Además, mientras que las componentes de las curvas coordenadas  $\mathbf{x}(u, t)$  y  $\mathbf{x}(s, v)$  son espirales logarítmicas (en las respectivas componentes estudiadas), las otras componentes son simplemente un múltiplo constante de la parte exponencial  $e^{Au}$ .





# Capítulo 4

## Invariantes locales para inmersiones de tipo espacial en $\mathbb{R}^{1,3}$

Como hemos mencionado en el resumen, en esta tesis hemos buscado utilizar nuestros métodos e ideas en dos marcos diferentes: espacio ambiente euclídeo y espacio ambiente lorentziano. En los primeros tres capítulos hemos trabajado con espacios euclídeos y, a partir de este capítulo, entramos a trabajar con superficies inmersas en el espacio 4-dimensional de Lorentz.

Todo este bloque (capítulos 4, 5 y 6) lo hemos estructurado para que sea paralelo al bloque anterior.

Para el primer capítulo de este bloque, la estructura es:

- Repasamos la métrica lorentziana y el tipo de los vectores.
- Estudiamos los invariantes de Little en este contexto.
- Conseguimos las fórmulas generales para los invariantes en términos de los coeficientes asociados a la inmersión.

Además, queremos añadir que éste no es el primer estudio completo de los invariantes locales en este contexto. En [15] se puede encontrar una extensión de las definiciones de puntos umbilicales para superficies espaciales en  $\mathbb{R}^{1,3}$  y en [6] se puede encontrar un estudio de la completitud algebraica de los cuatro invariantes utilizados hasta el momento.

En los artículos mencionados, se ha usado siempre una base de vectores normales de tipo luz. A parte de los trabajos citados previamente, podríamos añadir las referencias [9], [27] o [32]. Este enfoque parece el más apropiado para mantener una base normal sin necesidad de preocuparse del signo de la norma de los vectores normales.

Sin embargo, lo que aportaremos en este apartado es un nuevo enfoque para la base normal. Gracias al enfoque distinto que veremos en este capítulo, conseguiremos encontrar resultados análogos a anteriores capítulos de esta tesis. Las expresiones que encontraremos, aunque deberemos determinar un orden para la base de vectores normales y tenerlo presente, serán lo suficientemente similares para que los argumentos sean familiares a los desarrollados en los anteriores capítulos.

## 4.1 Conceptos básicos de $\mathbb{R}^{1,3}$

Empecemos con la definición de la métrica lorentziana que usaremos en este trabajo.

**Definición 4.1.1.** *Se define el espacio de Lorentz,  $\mathbb{R}^{1,3}$ , como el espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$  junto con la métrica*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

donde  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  e  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ . De esta forma, el cuadrado de la norma de un vector será

$$|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Veamos el resto de las propiedades de esta métrica.

**Proposición 4.1.2.** *Las propiedades de esta métrica son:*

- *Simetría;  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1,3}$ .*
- *$\mathbb{R}$ -linealidad;  $\langle a\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{1,3}$  y  $a \in \mathbb{R}$ .*
- *No degenerada; si  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1,3}$ , entonces  $\mathbf{x} = 0$ .*

Recordemos que cada una de las posibilidades para el signo de la norma cuadrada de un vector se corresponde con el llamado tipo del vector.

**Definición 4.1.3.** *Se define el tipo de un vector de la siguiente forma:*

- Si  $|\mathbf{x}|^2 > 0$ ,  $\mathbf{x}$  es de **tipo espacial**.
- Si  $|\mathbf{x}|^2 < 0$ ,  $\mathbf{x}$  es de **tipo temporal**.
- Si  $|\mathbf{x}|^2 = 0$ ,  $\mathbf{x}$  es de **tipo luz o nulo**.

*Diremos que un subespacio vectorial es de tipo espacial si el tipo de todos los vectores distintos al origen del subespacio es espacial, mientras que un subespacio vectorial es de tipo temporal si contiene al menos un vector temporal.*

Obsérvese que existen vectores no nulos para los cuales se tiene que  $|\mathbf{x}|^2 < 0$  o que  $|\mathbf{x}|^2 = 0$ . Además, los vectores **unitarios** serán aquellos tal que  $|\mathbf{x}|^2 = \pm 1$ .

*Nota 17.* Aunque es posible denotar la norma de los vectores como valores en  $\mathbb{R}$  para vectores espaciales y en  $i\mathbb{R}$  para vectores temporales, en este trabajo vamos a considerar siempre la norma al cuadrado.

Dado que el plano tangente y el plano normal de una superficie en un punto son planos complementarios, es útil conocer los siguientes resultados.

**Proposición 4.1.4.** *En el espacio  $\mathbb{R}^{1,3}$ , si dos planos son complementarios, entonces uno de ellos es de tipo espacial y el otro es de tipo temporal.*

**Proposición 4.1.5.** *Dado un plano temporal en  $\mathbb{R}^{1,3}$ , cualquier base ortonormal de vectores (en particular vectores unitarios) se compone de un vector espacial y otro temporal.*

La clasificación usual de superficies inmersas en  $\mathbb{R}^{1,3}$  considera cuando el tipo del plano tangente es el mismo independientemente del punto de la superficie. En este trabajo, nos centramos en las superficies inmersas espaciales, es decir, aquellas cuyo plano tangente es siempre de tipo espacial y, por lo tanto, el plano normal es de tipo temporal. Para este caso, tendremos que estudiar nuevas posibilidades para los vectores normales, de forma que tendremos que hacer un nuevo estudio de la segunda forma fundamental.

Si fuésemos a trabajar con superficies temporales, el tipo del plano tangente sería siempre temporal independientemente del punto de la superficie. En este marco el trabajo se focalizaría en estudiar cómo se comporta la primera forma fundamental. En cambio, en este trabajo vamos a focalizarnos en la segunda forma fundamental. Ejemplos de trabajos para estas superficies podrían ser [14] o [30],

**Definición 4.1.6.** *Sea  $M$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{1,3}$ , diremos que es una **superficie inmersa espacial** si el tipo del plano tangente es espacial independientemente del punto de la superficie. O equivalentemente, si la métrica,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , del espacio ambiente induce una métrica euclídea en cada plano tangente.*

De forma general, podemos considerar que tenemos en cada punto  $p \in M$  la escisión del espacio

$$\mathbb{R}^{1,3} = N_pM \oplus T_pM,$$

donde el tipo de los planos son temporal y espacial, respectivamente.

## 4.2 Invariantes escalares locales para superficies inmersas en $\mathbb{R}^{1,3}$

Partiendo de un punto  $p \in M$ , consideramos una base local de  $\mathbb{R}^{1,3}$ ,  $\{e_0(p), e_1(p), e_2(p), e_3(p)\}$ , que respeta la orientación de  $\mathbb{R}^{1,3}$  y está adaptada a la inmersión. Dado el tipo de los planos tangente y normal, se adapta la referencia de manera que  $\{e_0(p), e_1(p)\}$  es base ortonormal de  $N_pM$ , con  $|e_0(p)|^2 < 0$  y  $\{e_2(p), e_3(p)\}$  es base ortonormal de  $T_pM$ . Podemos extender, al menos a un subconjunto abierto  $V \subset U$ , estos vectores a campos vectoriales,  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , de forma que  $\{e_0, e_1\}$  es base ortonormal de  $NM$  y  $\{e_2, e_3\}$  es base ortonormal de  $TM$ . Teniendo en cuenta otra vez que nuestro trabajo es local, consideraremos  $V = U$ . Al igual que en el caso euclídeo llamaremos a la familia de estos campos vectoriales unitarios y ortonormales como **referencia local**.

**Definición 4.2.1.** *Denotaremos por  $\{\omega_2, \omega_3\}$  a las 1-formas definidas en  $U$  mediante*

$$\begin{cases} \omega_i(\partial_u) & := \langle \mathbf{x}_u, e_i \rangle, \\ \omega_i(\partial_v) & := \langle \mathbf{x}_v, e_i \rangle, \end{cases} \quad \text{para cada } i = 2, 3.$$

Como  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  forman una base del plano tangente en  $M$ , se tiene que

$$\begin{vmatrix} \omega_2(\partial_u) & \omega_2(\partial_v) \\ \omega_3(\partial_u) & \omega_3(\partial_v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_u, e_2 \rangle & \langle \mathbf{x}_v, e_2 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, e_3 \rangle & \langle \mathbf{x}_v, e_3 \rangle \end{vmatrix} \neq 0,$$

y por lo tanto,  $\{\omega_2, \omega_3\}$  son base de las 1-formas definidas en  $U$ .

Se define la segunda forma fundamental de manera análoga al caso euclídeo.

**Definición 4.2.2.** *La segunda forma fundamental de  $M$  será la aplicación bilineal y simétrica dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{II} : TM \times TM &\rightarrow NM \\ (V, W) &\mapsto \mathbf{II}(V, W) = (\nabla_V W)^\perp, \end{aligned}$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $\mathbb{R}^{1,3}$  y  $\perp$  es la proyección sobre el espacio normal.

Recordemos que cada campo tangente  $V \in TM$  podemos descomponerlo como  $V = v_2 \mathbf{x}_u + v_3 \mathbf{x}_v$  o como  $V = \omega_2(d\mathbf{x}^{-1}(V))e_2 + \omega_3(d\mathbf{x}^{-1}(V))e_3$ , donde

$$d\mathbf{x}^{-1} : TM \rightarrow TU,$$

de forma que

$$d\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}_u) = \partial_u \quad \text{y} \quad d\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}_v) = \partial_v.$$

Esta descomposición nos lleva a definir las siguientes 1-formas.

**Definición 4.2.3.** *Definimos las 1-formas de conexión definidas en  $U$  mediante*

$$\begin{cases} \omega_{ij}(\partial_u) & := \langle \nabla_{\mathbf{x}_u} e_i, e_j \rangle, \\ \omega_{ij}(\partial_v) & := \langle \nabla_{\mathbf{x}_v} e_i, e_j \rangle, \end{cases} \quad \text{para cada par } i, j = 0, \dots, 3.$$

A partir de estas definiciones, vemos que tenemos las siguientes propiedades:

$$\omega_{ii} = 0 \quad \text{para cada } i = 0, \dots, 3,$$

y

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad \text{para cada par } i, j = 0, \dots, 3.$$

Además, si  $d\mathbf{x}^{-1}(V) = \bar{V}$  y  $d\mathbf{x}^{-1}(W) = \bar{W}$ , podemos escribir la segunda forma fundamental como

$$\begin{aligned} \text{II}(V, W) &= \langle \nabla_V W, e_0 \rangle e_0 + \langle \nabla_V W, e_1 \rangle e_1 \\ &= (\omega_2(\bar{W})\langle \nabla_V e_2, e_0 \rangle + \omega_3(\bar{W})\langle \nabla_V e_3, e_0 \rangle)e_0 \\ &\quad + (\omega_2(\bar{W})\langle \nabla_V e_2, e_1 \rangle + \omega_3(\bar{W})\langle \nabla_V e_3, e_1 \rangle)e_1 \\ &= (\omega_2(\bar{W})\omega_{20}(\bar{V}) + \omega_3(\bar{W})\omega_{30}(\bar{V}))e_0 \\ &\quad + (\omega_2(\bar{W})\omega_{21}(\bar{V}) + \omega_3(\bar{W})\omega_{31}(\bar{V}))e_1. \end{aligned}$$

Observamos que sólo aparecen cuatro 1-formas de conexión para escribir la segunda forma fundamental. Éstas, a su vez, pueden ser escritas mediante la base de 1-formas  $\{\omega_2, \omega_3\}$ . Las funciones asociadas a esta descomposición serán los coeficientes que usaremos para escribir las fórmulas de los invariantes de Little.

**Definición 4.2.4.** *Las funciones  $a, b, c, e, f, g$  que cumplen*

$$\begin{aligned} \omega_{20} &= a\omega_2 + b\omega_3, & \omega_{21} &= e\omega_2 + f\omega_3, \\ \omega_{30} &= b\omega_2 + c\omega_3, & \omega_{31} &= f\omega_2 + g\omega_3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

se llaman *coeficientes de la segunda forma fundamental asociada a la referencia*  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ .

*Nota 18.* En la definición, estamos asumiendo que se repiten coeficientes para diferentes 1-formas de conexión. Veamos que es cierto. Se tiene que

$$b = \omega_{20}(d\mathbf{x}^{-1}(e_3)) = \langle \nabla_{e_3} e_2, e_0 \rangle = \langle \nabla_{e_2} e_3, e_0 \rangle = \omega_{03}(d\mathbf{x}^{-1}(e_2)) = b,$$

donde estamos usando que  $(\nabla_{e_3} e_2)^\perp = (\nabla_{e_2} e_3)^\perp$ . Análogamente se argumenta para  $f$ .

## La curvatura de Gauss y la curvatura normal

Veamos las definiciones de las curvaturas en este contexto.

**Definición 4.2.5.** *Con la notación anterior, la **curvatura de Gauss** se define como la función escalar,  $K$ , tal que*

$$d\omega_{23} = -K \omega_2 \wedge \omega_3.$$

La **curvatura normal** se define como la función escalar,  $k_N$ , tal que

$$d\omega_{01} = -k_N \omega_2 \wedge \omega_3.$$

Vamos a encontrar las expresiones de  $K$  y  $k_N$  en términos de los coeficientes de la segunda forma fundamental. Aunque los cálculos son análogos al caso euclídeo, veremos dónde interviene el carácter temporal del vector  $e_0$ .

*Nota 19.* Nótese que para la base  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ , un vector  $x$  se puede escribir como

$$x = -\langle x, e_0 \rangle e_0 + \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_3 \rangle e_3.$$

Utilizando la definición de derivada exterior, se tiene que

$$\begin{aligned} d\omega_{ij}(\partial_u, \partial_v) &= \partial_u \omega_{ij}(\partial_v) - \partial_v \omega_{ij}(\partial_u) - \omega_{ij}([\partial_u, \partial_v]) \\ &= \partial_u \langle \nabla_{\partial_v} e_i, e_j \rangle - \partial_v \langle \nabla_{\partial_u} e_i, e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_u} \nabla_{\partial_v} e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_{\partial_v} e_i, \nabla_{\partial_u} e_j \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{\partial_v} \nabla_{\partial_u} e_i, e_j \rangle - \langle \nabla_{\partial_u} e_i, \nabla_{\partial_v} e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_v} e_i, \nabla_{\partial_u} e_j \rangle - \langle \nabla_{\partial_u} e_i, \nabla_{\partial_v} e_j \rangle. \end{aligned}$$

Si escribimos

$$\nabla_{\partial_u} e_l = -\langle \nabla_{\partial_u} e_l, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=1}^3 \langle \nabla_{\partial_u} e_l, e_k \rangle e_k = -\omega_{l0}(\partial_u) e_0 + \sum_{k=1}^3 \omega_{lk}(\partial_u) e_k$$

y

$$\nabla_{\partial_v} e_l = -\langle \nabla_{\partial_v} e_l, e_0 \rangle e_0 + \sum_{k=1}^3 \langle \nabla_{\partial_v} e_l, e_k \rangle e_k = -\omega_{l0}(\partial_v) e_0 + \sum_{k=1}^3 \omega_{lk}(\partial_v) e_k,$$

con  $l = 2, 3$ , tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega_{ij}(\partial_u, \partial_v) &= -\omega_{i0}(\partial_v) \omega_{j0}(\partial_u) + \omega_{i0}(\partial_u) \omega_{j0}(\partial_v) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \omega_{ik}(\partial_v) \omega_{jk}(\partial_u) - \omega_{ik}(\partial_u) \omega_{jk}(\partial_v) \\ &= -\omega_{i0}(\partial_v) \omega_{j0}(\partial_u) + \omega_{i0}(\partial_u) \omega_{j0}(\partial_v) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 -\omega_{ik}(\partial_v) \omega_{kj}(\partial_u) + \omega_{ik}(\partial_u) \omega_{kj}(\partial_v) \\ &= -(\omega_{i0} \wedge \omega_{j0})(\partial_u, \partial_v) + \sum_{k=1}^3 (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj})(\partial_u, \partial_v). \end{aligned}$$



Con lo que

$$d\omega_{ij} = -\omega_{i0} \wedge \omega_{0j} + \sum_{k=1}^3 \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Si aplicamos esta igualdad para encontrar las expresiones de los invariantes propuestos, nos quedaría

$$\begin{aligned} d\omega_{23} &= -\omega_{20} \wedge \omega_{03} + \sum_{k=1}^3 \omega_{2k} \wedge \omega_{k3} \\ &= -\omega_{20} \wedge \omega_{03} + \omega_{21} \wedge \omega_{13} \\ &= (a\omega_2 + b\omega_3) \wedge (b\omega_2 + c\omega_3) - (e\omega_2 + f\omega_3) \wedge (f\omega_2 + g\omega_3) \\ &= -(- (ac - b^2) + (eg - f^2)) \omega_2 \wedge \omega_3. \end{aligned}$$

Se calcula análogamente para  $d\omega_{01}$  y se obtiene

$$K = -(ac - b^2) + (eg - f^2) \quad \text{y} \quad k_N^2 = ((a - c)f - (e - g)b)^2.$$

Al igual que en el caso euclídeo, la demostración de que estas funciones son invariantes lo realizaremos encontrando unas relaciones con magnitudes escalares de la elipse de curvatura. En concreto, esto será la Prop. 4.2.7

## La curvatura media

De forma totalmente análoga al capítulo 1, se escribe la elipse de curvatura como

$$\eta(V) = \mathbf{II}(V, V). \tag{4.2}$$

Tomando la parametrización de todos los vectores unitarios en el plano tangente,  $t(\phi) = \cos \frac{\phi}{2} e_2 + \sin \frac{\phi}{2} e_3$ , se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
 \eta(\phi) &= (\nabla_{t(\phi)} t(\phi))^\perp \\
 &= (a \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2b \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + c \sin^2 \frac{\phi}{2}) e_0 \\
 &\quad + (e \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2f \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} + g \sin^2 \frac{\phi}{2}) e_1 \\
 &= \left( \frac{a}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{a}{2} (1 - \sin^2 \frac{\phi}{2}) + b \sin \phi + \frac{c}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{c}{2} (1 - \cos^2 \frac{\phi}{2}) \right) e_0 \\
 &\quad + \left( \frac{e}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{e}{2} (1 - \sin^2 \frac{\phi}{2}) + f \sin \phi + \frac{g}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{g}{2} (1 - \cos^2 \frac{\phi}{2}) \right) e_1 \\
 &= \left( \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \cos \phi + b \sin \phi \right) e_0 + \left( \frac{e+g}{2} + \frac{e-g}{2} \cos \phi + f \sin \phi \right) e_1 \\
 &= \left( \frac{a+c}{2} e_0 + \frac{e+g}{2} e_1 \right) + \left( \frac{a-c}{2} e_0 + \frac{e-g}{2} e_1 \right) \cos \phi + (b e_0 + f e_1) \sin \phi \\
 &= H + B \cos \phi + C \sin \phi.
 \end{aligned}$$

Las expresiones de  $H$ ,  $B$  y  $C$  serán

$$H = \frac{a+c}{2} e_0 + \frac{e+g}{2} e_1, \quad B = \frac{a-c}{2} e_0 + \frac{e-g}{2} e_1 \quad \text{y} \quad C = b e_0 + f e_1. \quad (4.3)$$

El vector  $H$  es el **vector curvatura media** y su norma será la curvatura media.

**Definición 4.2.6.** *La curvatura media es la norma del vector curvatura media, esto es*

$$|H|^2 = \frac{-(a+c)^2 + (e+g)^2}{4}.$$

*Nota 20.* Al ser una definición directamente de una magnitud escalar de la elipse de curvatura, es un invariante bajo cambios en la referencia local.

*Nota 21.* Aunque los conceptos son análogos al caso euclídeo, recordemos que el tipo de rotaciones que estamos considerando, aquellas que dejan invariantes las distancias, son rotaciones lorentzianas. En la figura 4.1 vemos cómo va cambiando la posición de los puntos, pero la norma del vector  $H$  es siempre la misma.

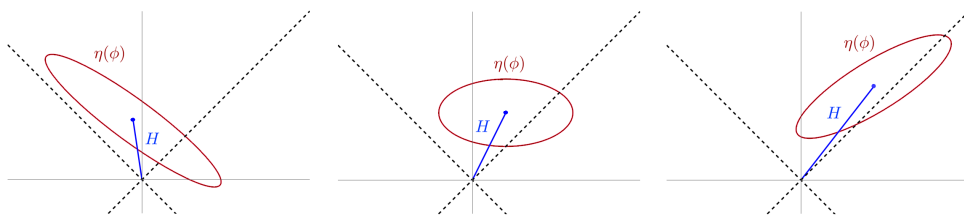


Figura 4.1: Rotaciones lorentzianas sobre una elipse euclídea.

## La relación entre las curvaturas y la elipse de curvatura

Veamos como podemos expresar la curvatura de Gauss y la curvatura normal a partir de  $H$ ,  $B$  y  $C$ , similar a la Prop. 1.4.1.

**Proposición 4.2.7.** *Dados los vectores  $\{H, B, C\}$  definidos en las Ecs. (4.3) se tiene que*

$$K = |H|^2 - (|B|^2 + |C|^2) \quad y \quad -\frac{k_N^2}{4} = |B|^2|C|^2 - \langle B, C \rangle^2. \quad (4.4)$$

Además, si  $K \neq |H|^2$ , la elipse de curvatura degenera en un segmento si y sólo si  $k_N = 0$ .

*Nota 22.* Las expresiones que estamos relacionando son invariantes escalares de la elipse de curvatura. El primero es la diferencia entre la norma del vector centro y la suma de las normas de los semi-ejes, mientras que el segundo es un múltiplo del área hiperbólica entre los semi-ejes de la elipse.

**Demostración:** Utilizando la Ec. (4.3), calculamos todas las expresiones que se encuentran en las igualdades a demostrar. Se tiene

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \frac{-(a+c)^2 + (e+g)^2}{4}, \\ |B|^2 &= \frac{-(a-c)^2 + (e-g)^2}{4}, \\ |C|^2 &= -b^2 + f^2, \\ \langle B, C \rangle &= -\left(\frac{a-c}{2}\right)b + \left(\frac{e-g}{2}\right)f. \end{aligned}$$

Por un lado, llegamos a

$$\begin{aligned}
 |H|^2 - (|B|^2 + |C|^2) &= \frac{-(a+c)^2 + (e+g)^2}{4} \\
 &\quad - \left( \frac{-(a-c)^2 + (e-g)^2}{4} - b^2 + f^2 \right) \\
 &= -ac + eg + b^2 - f^2 \\
 &= -(ac - b^2) + (eg - f^2) \\
 &= K.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}
 |B|^2|C|^2 - \langle B, C \rangle^2 &= \left( \frac{-(a-c)^2 + (e-g)^2}{4} \right) (-b^2 + f^2) \\
 &\quad - \left( -\frac{a-c}{2}b + \frac{e-g}{2}f \right)^2 \\
 &= \frac{(a-c)^2b^2 - (e-g)^2b^2 - (a-c)^2f^2 + (e-g)^2f^2}{4} \\
 &\quad - \frac{(a-c)^2b^2 + (e-g)^2f^2}{4} + \frac{(a-c)(e-g)bf}{2} \\
 &= \frac{-(e-g)^2b^2 - (a-c)^2f^2 + 2(a-c)(e-g)bf}{4} \\
 &= -\frac{((a-c)f - (e-g)b)^2}{4} \\
 &= -\frac{k_N^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, si  $K \neq |H|^2$  al menos  $B$  o  $C$  es no nulo o de tipo luz. Si  $k_N = 0$  entonces  $|B|^2|C|^2 = \langle B, C \rangle^2$  y esto implica que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $B = \lambda C$  con  $B \neq 0$  o  $C = \lambda B$  con  $C \neq 0$ , equivalentemente, la elipse de curvatura degenera a un segmento.

□

Gracias a este resultado, tenemos que las curvaturas son invariantes respecto cambios en la referencia local, ya que son en realidad medidas escalares

invariantes de la elipse. De la misma forma, sabemos que un punto es semiumbílico, la elipse colapsa a un segmento, si tenemos que  $K \neq |H|^2$  y  $k_N = K = 0$ . Esta caracterización será utilizada en la Prop. 4.3.4.

## La resultante

El último invariante, la resultante, se define mediante el determinante de la forma cuadrática  $S$  asociada a  $Q$ , definida por

$$Q = \langle \nabla_{X^\cdot}, e_0 \rangle \wedge \langle \nabla_{X^\cdot}, e_1 \rangle : TM \times TM \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M).$$

**Definición 4.2.8.** Dada la notación anterior, se define la **resultante**, denotada por  $\Delta$ , como

$$\Delta = \det S = - \begin{vmatrix} af - be & \frac{ag - ce}{2} \\ \frac{ag - ce}{2} & bg - cf \end{vmatrix}.$$

*Nota 23.* Dada su definición como el determinante de una forma cuadrática, tenemos que es invariante bajo cambios en la referencia local.

**Proposición 4.2.9.** La resultante es equivalente a

$$\Delta = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ e & 2f & g & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ 0 & e & 2f & g \end{vmatrix}.$$

**Demostración:** En esta ocasión, podemos hallar la igualdad mediante el cálculo directo de ambos determinantes.

□

## 4.3 Lista de fórmulas para los invariantes locales

Dado que estamos introduciendo un nuevo planteamiento para los vectores normales, vamos a considerar un paso previo. Partiremos de las definiciones de los invariantes, pero se asumirá que tenemos una parametrización isoterma. Más adelante veremos la lista de fórmulas generales.

*Nota 24.* Recordemos que en el caso euclídeo tenemos el Teorema 1.2.2 que nos permite asumir que trabajamos con una parametrización isoterma. Si miramos las demostraciones clásicas en [7, página 15] o en [29, página 31], podemos observar que la única métrica que se utiliza es la del plano tangente. Una de las ventajas de trabajar con superficies espaciales es la posibilidad de aplicar la misma demostración para este resultado y así trabajar con una parametrización isoterma.

## Fórmulas para los invariantes en términos de los coeficientes de las formas fundamentales en el caso de una parametrización isoterma

Supongamos que  $\mathbf{x}$  es una parametrización isoterma. Consideramos la referencia local dada por

$$\left\{ N_2, N_1, \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{E}} \right\},$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son dos campos normales con  $|N_2|^2 = -1$ . Si, por ejemplo, utilizamos esta referencia local, el primer coeficiente asociado es

$$a = \left\langle \nabla_{\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}} \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, N_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{E}} \left\langle \frac{\nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, N_2 \right\rangle = \frac{e_2}{E}.$$

Análogamente se obtienen los demás y se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.1.** *Bajo la hipótesis de inmersión isoterma, los coeficientes asociados a la referencia  $\{N_2, N_1, \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{E}}\}$  se escriben como*

$$\begin{aligned} a &= \frac{e_2}{E}, & b &= \frac{f_2}{E}, & c &= \frac{g_2}{E}, \\ e &= \frac{e_1}{E}, & f &= \frac{f_1}{E}, & g &= \frac{g_1}{E}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si utilizamos estas expresiones con las fórmulas obtenidas previamente, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.2.** *Bajo la hipótesis de inmersión isoterma, con la referencia local  $\{N_2, N_1, \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{E}}\}$ , las fórmulas de los invariantes son*

$$|H|^2 = \frac{(e_1 + g_1)^2 - (e_2 + g_2)^2}{4}, \quad \Delta = \frac{-1}{4E^4} \begin{vmatrix} e_1 & 2f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{vmatrix},$$

$$K = \frac{e_1g_1 - f_1^2 - (e_2g_2 - f_2^2)}{E^2} \quad y \quad k_N^2 = \frac{\begin{vmatrix} E & 0 & E \\ e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{vmatrix}^2}{E^6}.$$

Con este paso previo, llegaremos a las fórmulas generales en el siguiente apartado.

### 4.3.1 Fórmulas para los invariantes en términos de los coeficientes de las formas fundamentales

Una vez que tenemos las fórmulas para los invariantes en el caso isoterma, veamos las fórmulas en el caso general.

**Proposición 4.3.3.** *Las expresiones de los invariantes locales en términos de los coeficientes de las formas fundamentales son*

$$|H|^2 = \frac{(e_1G - 2f_1F + g_1E)^2 - (e_2G - 2f_2F + g_2E)^2}{4(EG - F^2)},$$

$$K = \frac{e_1g_1 - f_1^2 - (e_2g_2 - f_2^2)}{EG - F^2},$$

$$k_N^2 = \frac{\begin{vmatrix} E & F & G \\ e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{vmatrix}^2}{(EG - F^2)^3} \quad y \quad \Delta = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & 2f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{vmatrix}}{4(EG - F^2)^2}, \tag{4.6}$$

donde estamos suponiendo que  $N_1$  es de tipo espacial y  $N_2$  es de tipo temporal (es decir  $|N_1|^2 = 1 = -|N_2|^2$ ).

*Nota 25.* Un detalle importante en estas fórmulas es el tipo que suponemos para los vectores  $N_1$  y  $N_2$ . Recordemos que los giros lorentzianos no cambian el tipo de un vector, de forma que podemos dotar de un orden a la base ortonormal del plano normal según el tipo de cada vector.

Desde otra perspectiva, se podría considerar una base de vectores de tipo luz, como se puede encontrar en [5]. Las fórmulas para los invariantes, concretamente [5, Lema 2.5], no necesitan un orden en los vectores de la base, basta que sean dos vectores normales nulos independientes. Sin embargo, las expresiones no son reconocibles a sus análogas en el caso euclídeo. Por ejemplo, la curvatura media pasa de ser una suma de coordenadas a un producto de coordenadas.

**Demostración:** Supongamos que tenemos las expresiones en las Ecs. (4.6) para una parametrización  $\mathbf{x}$ .

Si consideramos una reparametrización dada por un cambio de variable genérico,  $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = \mathbf{x}(h_1(u, v), h_2(u, v))$ , obtenemos la siguiente relación entre los coeficientes de las parametrizaciones

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{2u} \\ h_{1v} & h_{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{1v} \\ h_{2u} & h_{2v} \end{pmatrix}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 &= (h_{1u}h_{2v} - h_{1v}h_{2u})^2(EG - F^2) \\ &= (\text{Jac}(h))^2(EG - F^2). \end{aligned}$$

Obtenemos, además, las relaciones análogas para los coeficientes de las segundas formas fundamentales:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_i & \bar{f}_i \\ \bar{f}_i & \bar{g}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{2u} \\ h_{1v} & h_{2v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i & f_i \\ f_i & g_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1u} & h_{1v} \\ h_{2u} & h_{2v} \end{pmatrix},$$

con  $i \in \{1, 2\}$ . El cálculo directo muestra que, si utilizamos las relaciones entre los coeficientes, las expresiones en las Ecs. (4.6) para la parametrización  $\bar{\mathbf{x}}$  coinciden con las expresiones para  $\mathbf{x}$ .

Si consideramos una rotación lorentziana de la base normal, esto es

$$\hat{N}_1 = \cosh(\theta)N_1 + \sinh(\theta)N_2 \quad \text{y} \quad \hat{N}_2 = \sinh(\theta)N_1 + \cosh(\theta)N_2,$$



se obtiene que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{e}_1 = \cosh(\theta)e_1 + \sinh(\theta)e_2, & \hat{e}_2 = \sinh(\theta)e_1 + \cosh(\theta)e_2, \\ \hat{f}_1 = \cosh(\theta)f_1 + \sinh(\theta)f_2, & \hat{f}_2 = \sinh(\theta)f_1 + \cosh(\theta)f_2, \\ \hat{g}_1 = \cosh(\theta)g_1 + \sinh(\theta)g_2, & \hat{g}_2 = \sinh(\theta)g_1 + \cosh(\theta)g_2. \end{array} \right.$$

El cálculo directo muestra que, si utilizamos las relaciones entre los coeficientes, las expresiones en las Ecs. (4.6) para la base rotada coinciden con las expresiones para la otra base.

Con ambas transformaciones estudiadas, concluimos que son expresiones invariantes. Además, se puede comprobar de forma directa que estas expresiones coinciden con las vistas en el caso de una parametrización isoterma en la Prop. 4.3.2.

□

### 4.3.2 Inmersiones semiumblicas en $\mathbb{R}^{1,3}$

Para acabar este capítulo, veremos que se sigue cumpliendo la Prop. 1.8.2 en el contexto lorentziano. Se definen de forma análoga los conceptos de umbilicidad y semiumbilicidad. El siguiente resultado se utilizará más adelante en el capítulo 6.

**Proposición 4.3.4.** *Dado un punto semiumbólico con  $K \neq |H|^2$  donde  $E$  es el único semi-eje no nulo, entonces la inmersión cumple  $K = 0$  si y sólo si  $H + E$  es ortogonal a  $H - E$ .*

**Demostración:** Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $B = 0$  y  $C = E$ . Se tiene que

$$\langle H + E, H - E \rangle = |H|^2 - |E|^2 = K = 0,$$

donde hemos usado las Ecs. (4.4).

□

# Capítulo 5

## Caracterización de superficies esféricas inmersas en $\mathbb{R}^{1,3}$

Al igual que en el caso euclídeo, la condición de superficie esférica en espacios de Lorentz es conocida pero no se ha estudiado mediante los invariantes. Sí que se ha trabajado con hipersuperficies con frontera esférica, ver [1], pero no se ha publicado un trabajo que conozcamos en detalle sobre superficies esféricas.

Supongamos que queremos rellenar este vacío con los resultados análogos al capítulo 2, una opción sería mediante la extensión usual de los invariantes de Little en este contexto. En ese caso, tendríamos que usar una base de vectores normales de tipo luz o nulos. En comparación con nuestro argumento en el caso euclídeo, no podríamos tomar la propia inmersión como un vector normal de la referencia local. La búsqueda de condiciones necesarias para los invariantes será un nuevo argumento que se aleja del objetivo de obtener un resultado análogo.

Por otro lado, tenemos la opción de utilizar el trabajo del capítulo 4. De esta forma, la base normal admite vectores no nulos si mantenemos el orden establecido entre el vector espacial y el temporal. Además, las expresiones similares de los invariantes al caso euclídeo permiten argumentaciones paralelas. Siempre debemos mantener el orden de los vectores normales, pero de esta forma se podrían llevar resultados conocidos de superficies euclídeas a superficies lorentzianas.

Aplicaremos la teoría del capítulo 4 en nuestro trabajo original de carac-

terización de superficies esféricas, pero de la misma manera se pueden encontrar resultados análogos a los ya conocidos sobre umbilicidad, existencia de líneas asintóticas ortogonales, contacto entre superficies, singularidades, etc.

Mostraremos que con este planteamiento, los argumentos tienen que enfocarse en el orden de la base normal, pero pueden ser bastante similares.

Al igual que en el capítulo anterior, tenemos una organización paralela al capítulo 2. Recordemos la definición de superficies esféricas del capítulo 2.

**Definición** (Definición 2.0.1). *Diremos que una superficie inmersa es **esférica** si existe una esfera en el espacio ambiente de radio  $R$  y centro  $p$  tal que contiene a la imagen de la inmersión. A su vez, diremos que la inmersión es de radio  $R$  y centro  $p$ .*

Vemos que lo único que necesitamos adaptar es en realidad la definición de esfera del espacio ambiente. En este caso, recordando la definición 4.1.1 de la métrica, tendremos tres tipos de esferas: de radio positivo, de radio negativo y de radio nulo. Las llamaremos **hiperboloides espaciales**, **hiperboloides temporales** y **conos de luz**.

$$\begin{aligned} H(p, R) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3} : |\mathbf{x} - p|^2 = R \} \\ &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{1,3} : \\ &\quad -(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 + (x_4 - p_4)^2 = R \}. \end{aligned}$$

Si  $R > 0$  será un hiperboloide espacial (de una hoja), si  $R < 0$  será un hiperboloide temporal (de doble hoja) y si  $R = 0$  será un cono de luz.

Dado que las esferas del espacio ambiente son hiperboloides o conos, las llamaremos superficies esféricas o hiperbólicas o conos según el caso.

La estructura de este capítulo es:

- Demostramos las condiciones necesarias que cumplen los invariantes.
- Demostramos que ciertas condiciones sobre los invariantes son suficientes para determinar que la imagen de una inmersión está en una esfera del espacio ambiente.

## 5.1 Condiciones necesarias

Veamos que las condiciones necesarias se escriben de la misma manera que en el caso euclídeo.

**Proposición 5.1.1.** *Sea  $\mathbf{x}$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{1,3}$  esférica de radio  $R$ , entonces*

$$k_N = 0 \quad y \quad R\Delta + K = |H|^2.$$

*Nota 26.* Las condiciones se parecen a las del caso euclídeo, pero en el caso lorentziano,  $R$ , puede ser positivo, negativo o nulo.

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el centro es el origen de coordenadas. Como  $|\mathbf{x}|^2$  es constante, se tiene que

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x} \rangle = 0 = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x} \rangle.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{x}$  es un vector normal, que puede ser de tipo espacial, temporal o de luz, dependiendo del signo de  $|\mathbf{x}|^2$ .

Supongamos que  $\mathbf{x}$  es de tipo espacial, es decir,  $R = r^2 = |\mathbf{x}|^2 > 0$  con  $r \in \mathbb{R}^+$ . Podemos elegir nuestro vector normal espacial unitario dado por  $N_1 = \frac{\mathbf{x}}{r}$ . Completamos la base ortonormal del plano normal con un vector temporal unitario,  $N_2$ . Los coeficientes de la segunda forma fundamental, relativos a  $N_1$ , cumplen que

$$e_1 = \langle \mathbf{x}_{uu}, N_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \frac{\mathbf{x}}{r} \rangle = \frac{-\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle}{r} = -\frac{E}{r},$$

análogamente se obtiene  $f_1 = -\frac{F}{r}$  y  $g_1 = -\frac{G}{r}$ . El cálculo directo de los invariantes, utilizando estas expresiones, nos lleva a

$$k_N = 0 \quad y \quad R\Delta + |H|^2 = K,$$

que son las condiciones del enunciado.

Supongamos que  $\mathbf{x}$  es de tipo temporal, es decir  $R = -r^2 = |\mathbf{x}|^2 < 0$  con  $r \in \mathbb{R}^+$ . Podemos elegir nuestro vector normal temporal unitario dado por  $N_2 = \frac{\mathbf{x}}{r}$ . Completamos la base ortonormal del plano normal con un vector espacial unitario  $N_1$ . Los coeficientes de la segunda forma fundamental, relativos a  $N_2$ , cumplen que

$$e_2 = \langle \mathbf{x}_{uu}, N_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_{uu}, \frac{\mathbf{x}}{r} \rangle = -\frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle}{r} = -\frac{E}{r},$$

análogamente se obtiene  $f_2 = -\frac{F}{r}$  y  $g_2 = -\frac{G}{r}$ . El cálculo directo de los invariantes, utilizando estas expresiones, nos lleva a

$$k_N = 0 \quad \text{y} \quad R\Delta + |H|^2 = K,$$

llegando a las condiciones del enunciado.

Supongamos que  $\mathbf{x}$  es de tipo luz, es decir  $|\mathbf{x}|^2 = 0$ . Para una base ortonormal del plano normal,  $\{N_1, N_2\}$ , podemos escribir

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, N_1 \rangle N_1 - \langle \mathbf{x}, N_2 \rangle N_2.$$

Como  $|\mathbf{x}|^2 = 0$ , se tiene que

$$0 = \langle \mathbf{x}, N_1 \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, N_2 \rangle^2,$$

por lo tanto,  $\langle \mathbf{x}, N_1 \rangle = \lambda = \epsilon \langle \mathbf{x}, N_2 \rangle$  donde  $\epsilon = \pm 1$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De esta forma, se llega a

$$\mathbf{x} = \lambda(N_1 + \epsilon N_2).$$

Esta relación entre los vectores nos lleva a la siguiente relación entre los coeficientes

$$\lambda(e_1 + \epsilon e_2) = \langle \mathbf{x}_{uu}, \lambda(N_1 + \epsilon N_2) \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x} \rangle = -\lambda \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -\lambda E.$$

Análogamente se tendría  $f_1 + \epsilon f_2 = -F$  y  $g_1 + \epsilon g_2 = -G$ . El cálculo directo de los invariantes, utilizando las relaciones halladas entre los coeficientes, nos lleva a

$$k_N = 0 \quad \text{y} \quad K = |H|^2,$$

que son las condiciones generales en el caso  $R = 0$ .

□

## 5.2 Ecuaciones de compatibilidad

En esta sección, desarrollamos una serie de ecuaciones con el único propósito de usarlas en la demostración de las condiciones necesarias. Buscamos unas **ecuaciones de compatibilidad**, análogas al caso euclídeo, para los coeficientes en el caso lorentziano.

**Proposición 5.2.1.** *Dada una superficie inmersa mediante una parametrización isoterma,  $\mathbf{x}$ , entonces, para cualquier base ortonormal del plano normal,  $\{N_1, N_2\}$ , donde  $|N_1|^2 = 1 = -|N_2|^2$  se cumplen las siguientes condiciones*

$$-\frac{E_v(e_1 + g_1)}{2E} + e_{1v} - f_{1u} = f_2 \langle N_{1u}, N_2 \rangle - e_2 \langle N_{1v}, N_2 \rangle, \quad (5.1)$$

$$-\frac{E_v(e_2 + g_2)}{2E} + e_{2v} - f_{2u} = f_1 \langle N_{1u}, N_2 \rangle - e_1 \langle N_{1v}, N_2 \rangle, \quad (5.2)$$

$$-\frac{E_u(e_1 + g_1)}{2E} - f_{1v} + g_{1u} = f_2 \langle N_{1v}, N_2 \rangle - g_2 \langle N_{1u}, N_2 \rangle, \quad (5.3)$$

$$-\frac{E_u(e_2 + g_2)}{2E} - f_{2v} + g_{2u} = f_1 \langle N_{1v}, N_2 \rangle - g_1 \langle N_{1u}, N_2 \rangle. \quad (5.4)$$

Además, se cumplen las siguientes fórmulas alternativas para la curvatura de Gauss y la curvatura normal

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{E_u^2 + E_v^2}{E} - (E_{uu} + E_{vv}) \right) \quad y \quad k_N^2 = \frac{\langle N_{1u}, N_2 \rangle_v - \langle N_{1v}, N_2 \rangle_u}{E}.$$

**Demostración:** Partimos de nuestra parametrización isoterma  $\mathbf{x}$ . Consideramos la base ortogonal (no unitaria)  $\left\{ \frac{\mathbf{x}_u}{E}, \frac{\mathbf{x}_v}{E}, N_1, N_2 \right\}$  con  $|N_1|^2 = 1 = -|N_2|^2$ . Si escribimos las segundas derivadas de la inmersión y las derivadas de los vectores tangentes de la base en términos de la propia base, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_v + e_1 N_1 - e_2 N_2, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_v + f_1 N_1 - f_2 N_2, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \frac{-E_u}{2E} \mathbf{x}_u + \frac{E_v}{2E} \mathbf{x}_v + g_1 N_1 - g_2 N_2, \\ N_{1u} &= \frac{-e_1}{E} \mathbf{x}_u - \frac{f_1}{E} \mathbf{x}_v - \langle N_{1u}, N_2 \rangle N_2, \\ N_{1v} &= \frac{-f_1}{E} \mathbf{x}_u - \frac{g_1}{E} \mathbf{x}_v - \langle N_{1v}, N_2 \rangle N_2, \\ N_{2u} &= \frac{-e_2}{E} \mathbf{x}_u - \frac{f_2}{E} \mathbf{x}_v - \langle N_{1u}, N_2 \rangle N_1, \\ N_{2v} &= \frac{-f_2}{E} \mathbf{x}_u - \frac{g_2}{E} \mathbf{x}_v - \langle N_{1v}, N_2 \rangle N_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Hemos llamado a las ecuaciones del enunciado ecuaciones de compatibilidad porque las obtenemos al comparar las derivadas mixtas de los vectores anteriores. Por ejemplo, deben coincidir las componentes de  $(\mathbf{x}_{uu})_v$  con las componentes de  $(\mathbf{x}_{uv})_u$  cuando se calculan desde las expresiones anteriores. Equivalentemente, la diferencia debe ser nula. Estudiando la componente proporcional en  $\frac{\mathbf{x}_v}{E}$  de la diferencia, se llega a que

$$0 = \langle (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u, \frac{\mathbf{x}_v}{E} \rangle = \frac{E_u^2 + E_v^2 - E(E_{uu} + E_{vv})}{2E^2} - EK,$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss y se ha utilizado la expresión en el caso isoterma de la Prop. 4.3.2. De esta componente, obtenemos una fórmula alternativa para la curvatura de Gauss:

$$K = \frac{E_u^2 + E_v^2 - E(E_{uu} + E_{vv})}{2E} = \frac{1}{2} \left( \frac{E_u^2 + E_v^2}{E} - (E_{uu} + E_{vv}) \right).$$

Aplicando el mismo razonamiento a cada componente de todas las diferencias, y eliminando duplicidades, obtenemos de forma directa las demás relaciones del enunciado

$$\begin{aligned} k_N^2 &= \frac{\langle N_{1u}, N_2 \rangle_v - \langle N_{1v}, N_2 \rangle_u}{E}, \\ -\frac{E_v(e_1+g_1)}{2E} + e_{1v} - f_{1u} &= f_2 \langle N_{1u}, N_2 \rangle - e_2 \langle N_{1v}, N_2 \rangle, \\ -\frac{E_v(e_2+g_2)}{2E} + e_{2v} - f_{2u} &= f_1 \langle N_{1u}, N_2 \rangle - e_1 \langle N_{1v}, N_2 \rangle, \\ -\frac{E_u(e_1+g_1)}{2E} - f_{1v} + g_{1u} &= f_2 \langle N_{1v}, N_2 \rangle - g_2 \langle N_{1u}, N_2 \rangle, \\ -\frac{E_u(e_2+g_2)}{2E} - f_{2v} + g_{2u} &= f_1 \langle N_{1v}, N_2 \rangle - g_1 \langle N_{1u}, N_2 \rangle. \end{aligned}$$

□

Estas ecuaciones son otro ejemplo de un resultado bien conocido en el caso euclídeo que el trabajo del capítulo 4 consigue traducir a un formato análogo. Estas ecuaciones son las equivalentes a las **ecuaciones de Mainardi–Codazzi** del estudio clásico de superficies en  $\mathbb{R}^3$ . De la misma forma, estas condiciones determinan las condiciones necesarias y suficientes para que unos coeficientes dados sean compatibles con una inmersión. Dado que no utilizaremos el resultado de existencia de inmersión a partir de los coeficientes, no tenemos la necesidad de incluirlo en este trabajo, pero podría ser otro ejemplo de las ventajas que introduce el capítulo 4.

## 5.3 Condiciones suficientes

Veamos que las condiciones suficientes, que hemos encontrado, son las esperadas y que además podemos usar una argumentación análoga que resultará familiar.

**Proposición 5.3.1.** *Sea  $U$  un subconjunto abierto conexo de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  una inmersión semiumbílica con  $\Delta(u, v) \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . Supongamos que existe un número real,  $R$ , tal que se cumple*

$$R\Delta + |H|^2 = K, \quad (5.6)$$

donde se tiene  $R \neq 0$  y  $K(u, v) \neq \frac{1}{R}$  o se tiene  $R = 0$  y  $K(u, v) \neq 1$ , para todo  $(u, v) \in U$ . Entonces, la imagen de la inmersión  $\mathbf{x}$  está en un hiperboloide espacial si  $R > 0$ , está en un hiperboloide temporal si  $R < 0$  o está en un cono de luz si  $R = 0$ .

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad, podemos considerar que la inmersión  $\mathbf{x}$  es isoterma, ver nota 24 en la sección 4.3.

Como tenemos que  $\Delta \neq 0$ , los vectores  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  y  $\mathbf{x}_{uv}$  no pueden ser vectores tangentes al mismo tiempo. Si lo fueran, entonces se tendría  $e_i = g_i$  y  $f_i = 0$  para ambos  $i = 1, 2$  lo implica que  $\Delta = 0$ .

Comprobemos que podemos considerar que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  es el que tiene componente normal no nula. En el caso contrario, Cuando componente normal no nula sería  $\mathbf{x}_{uv}$ , podemos tomar la siguiente reparametrización  $\mathbf{y}(u, v) = \mathbf{x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2}\right)$  que sigue siendo isoterma y verifica que  $\mathbf{y}_{uu} - \mathbf{y}_{vv} = \mathbf{x}_{uv}$ , es decir,  $y_{uu} - y_{vv}$  tendría componente normal no nula.

A diferencia del caso euclídeo, tenemos distintas posibilidades de tipo para el vector  $(\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv})^\perp$ , que podrá ser temporal, espacial o de luz. Dado que definiremos una base del plano normal a partir del vector  $(\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv})^\perp$ , necesitamos separar cada caso. Si es temporal existe un vector normal espacial ortogonal, si es espacial existe un vector normal temporal ortogonal y si es de tipo luz veremos que es proporcional a la suma de los elementos de una base normal.



### Caso $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$ es de tipo temporal o espacial

Si asumimos que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  es temporal (resp. espacial) entonces existe un vector normal ortogonal, unitario y de tipo espacial,  $N_1$  (resp.  $N_2$ ), que tomaremos como el vector espacial de la base normal. Esto implica que  $e_1 = g_1$  (resp.  $e_2 = g_2$ ). Dado que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  tiene componente normal, completando la base normal con  $N_2$  (resp.  $N_1$ ), se debe tener que  $e_2 \neq g_2$  (resp.  $e_1 \neq g_1$ ). De esta manera, la fórmula de la curvatura normal se queda reducida a

$$k_N^2 = \frac{(e_2 - g_2)^2 f_1^2}{4E^2},$$

respectivamente en el caso espacial tendremos

$$k_N^2 = \frac{(e_1 - g_1)^2 f_2^2}{4E^2}.$$

Dado que suponemos que  $k_N^2 = 0$  y tenemos que  $e_2 \neq g_2$  (resp.  $e_1 \neq g_1$ ), entonces  $f_1 = 0$  (resp.  $f_2 = 0$ ). Con esto, la resultante nos da

$$\Delta = g_1^2 \frac{(e_2 - g_2)^2 + 4f_2^2}{4E^4},$$

respectivamente en el caso espacial tendremos

$$\Delta = g_2^2 \frac{(e_1 - g_1)^2 + 4f_1^2}{4E^4}.$$

Al no anularse implica que  $e_1 = g_1 \neq 0$  (resp.  $e_2 = g_2 \neq 0$ ). Definamos el vector normal,  $\hat{N}_1$  (resp.  $\hat{N}_2$ ), que será nuestro candidato a vector esférico paralelo a la inmersión, mediante

$$\hat{N}_1 = -\frac{E}{e_1} N_1,$$

respectivamente en el caso espacial tendremos

$$\hat{N}_2 = -\frac{E}{e_2} N_2.$$

Se verifica que

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N}_1 \rangle = -E, \quad \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_1 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N}_1 \rangle = -E,$$

respectivamente en el caso espacial tendremos

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N}_2 \rangle = -E, \quad \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_2 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N}_2 \rangle = -E.$$

Esto es equivalente a  $e_1 = g_1 = \frac{-E}{|\hat{N}_1|}$  y  $f_1 = 0$  (resp.  $e_2 = g_2 = \frac{-E}{|\hat{N}_2|}$  y  $f_2 = 0$ ).  
Veamos cómo quedan los invariantes no nulos

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \frac{1}{|\hat{N}_1|^2} - \frac{(e_2 + g_2)^2}{4E^2}, & K &= \frac{1}{|\hat{N}_1|^2} - \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E^2} \\ \text{y} \quad \Delta &= \frac{(e_2 - g_2)^2 + 4f_2^2}{4E^2 |\hat{N}_1|^2}, \end{aligned}$$

respectivamente en el caso espacial tendremos

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \frac{(e_1 + g_1)^2}{4E^2} - \frac{1}{|\hat{N}_2|^2}, & K &= \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E^2} - \frac{1}{|\hat{N}_2|^2} \\ \text{y} \quad \Delta &= \frac{(e_1 - g_1)^2 + 4f_1^2}{4E^2 |\hat{N}_2|^2}. \end{aligned}$$

El cálculo directo muestra  $|\hat{N}_1|^2 \Delta + |H|^2 \equiv K$  (resp.  $|\hat{N}_2|^2 \Delta + |H|^2 \equiv K$ ). Si comparamos con nuestra hipótesis la Ec. (5.6), teniendo en cuenta que  $\Delta(u, v) \neq 0$ , se obtiene que  $|\hat{N}_1|^2 \equiv R$  (resp.  $|\hat{N}_2|^2 \equiv R$ ). De esta manera, la curvatura de Gauss se reduce a

$$K = \frac{1}{R} - \frac{e_2 g_2 - f_2^2}{E^2}, \quad (5.7)$$

respectivamente en el caso espacial tendremos

$$K = \frac{e_1 g_1 - f_1^2}{E^2} - \frac{1}{R}. \quad (5.8)$$

Nuestro objetivo es demostrar que se tiene que

$$\hat{N}_{1u} = \mathbf{x}_u \quad \text{y} \quad \hat{N}_{1v} = \mathbf{x}_v, \quad (5.9)$$

respectivamente en el caso espacial queremos demostrar

$$\hat{N}_{2u} = \mathbf{x}_u \quad \text{y} \quad \hat{N}_{2v} = \mathbf{x}_v. \quad (5.10)$$

Para ello, utilizaremos la base ortogonal del espacio  $\{N_2, \hat{N}_1, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  (respectivamente  $\{\hat{N}_2, N_1, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ ). La elección del vector  $\hat{N}_1$  nos proporciona directamente que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{ku} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N}_k \rangle = E, & \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{kv} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_k \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{ku} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N}_k \rangle = 0, & \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{kv} \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N}_k \rangle = E, \\ \langle \hat{N}_k, \hat{N}_{ku} \rangle &= 0, & \langle \hat{N}_k, \hat{N}_{kv} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

donde  $k = 1$  (resp.  $k = 2$ ). Para las últimas igualdades hemos usado que  $|\hat{N}_1|$  (resp.  $|\hat{N}_2|$ ) es constante. Las componentes del vector diferencia,  $\hat{N}_{ku} - \mathbf{x}_u$ , en los primeros elementos de la base son

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{ku} - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_{ku} \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{ku} - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_{ku} \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \\ \langle \hat{N}_k, \hat{N}_{ku} - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \hat{N}_k, \hat{N}_{ku} \rangle - \langle \hat{N}_k, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde  $k = 1$  (resp.  $k = 2$ ). De forma análoga se tendría para  $\hat{N}_{kv} - \mathbf{x}_v$ .

Para llegar a las Ecs. (5.9), nos falta demostrar que también se anula en la última coordenada. Esto es, demostrar que  $\langle N_2, \hat{N}_{1u} \rangle = 0 = \langle N_2, \mathbf{x}_u \rangle$  y  $\langle N_2, \hat{N}_{1v} \rangle = 0 = \langle N_2, \mathbf{x}_v \rangle$ . Dado que  $\hat{N}_1$  y  $N_2$  son ortogonales, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle &= -\langle \hat{N}_{1u}, N_2 \rangle, \\ \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle &= -\langle \hat{N}_{1v}, N_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle = 0 = \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle$ .

Respectivamente en el caso espacial, queremos demostrar que se tiene  $\langle N_1, \hat{N}_{2u} \rangle = 0 = \langle N_1, \mathbf{x}_u \rangle$  y  $\langle N_1, \hat{N}_{2v} \rangle = 0 = \langle N_1, \mathbf{x}_v \rangle$ . Dado que  $N_1$  y  $\hat{N}_2$  son ortogonales, se tiene

$$\begin{aligned} \langle N_{1u}, \hat{N}_2 \rangle &= -\langle N_1, \hat{N}_{2u} \rangle, \\ \langle N_{1v}, \hat{N}_2 \rangle &= -\langle N_1, \hat{N}_{2v} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que  $\langle N_{1u}, \hat{N}_2 \rangle = 0 = \langle N_{1v}, \hat{N}_2 \rangle$ .

Gracias a la Prop. 5.2.1, con los coeficientes  $e_1 = g_1 = \frac{-E}{R}$  y  $f_1 = 0$  (resp.  $e_2 = g_2 = \frac{-E}{R}$  y  $f_2 = 0$ ), la Ec. (5.1) y la Ec. (5.3) se escriben como

$$\begin{cases} g_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle - f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0, \\ -f_2 \langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle + e_2 \langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0, \end{cases}$$

respectivamente en el caso espacial

$$\begin{cases} g_1 \langle N_1, \hat{N}_{2u} \rangle - f_1 \langle N_1, \hat{N}_{2v} \rangle = 0, \\ -f_1 \langle N_1, \hat{N}_{2u} \rangle + e_1 \langle N_1, \hat{N}_{2v} \rangle = 0. \end{cases}$$

Tenemos un sistema linear homogéneo en las incógnitas  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle$  y  $\langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle$ , con determinante  $e_2 g_2 - f_2^2$ . Sabiendo que  $K(u, v) \neq \frac{1}{R}$ , la Ec. (5.7) implica entonces que  $e_2 g_2 - f_2^2 \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . Concluimos que la única solución del sistema es la trivial  $\langle \hat{N}_1, N_{2u} \rangle = 0$  y  $\langle \hat{N}_1, N_{2v} \rangle = 0$ . Con ello, se obtiene que  $\hat{N}_{1u} - \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{1v} - \mathbf{x}_v$  tienen todas sus componentes nulas. Así, llegamos a las Ecs. (5.9).

Respectivamente en el caso espacial, tenemos un sistema linear homogéneo en las incógnitas  $\langle N_1, \hat{N}_{2u} \rangle$  y  $\langle N_1, \hat{N}_{2v} \rangle$  con determinante  $e_1 g_1 - f_1^2$ . Sabiendo que  $K(u, v) \neq \frac{-1}{R}$ , la Ec. (5.8) implica entonces que  $e_1 g_1 - f_1^2 \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . Concluimos que la única solución del sistema es la trivial  $\langle N_{1u}, \hat{N}_2 \rangle = 0$  y  $\langle N_{1v}, \hat{N}_2 \rangle = 0$ . Con ello, se obtiene que  $\hat{N}_{2u} - \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{2v} - \mathbf{x}_v$  tienen todas sus componentes nulas. Así, llegamos a las Ecs. (5.10).

Con esto acabamos este caso dado que si  $\hat{N}_{1u} = \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{1v} = \mathbf{x}_v$  (resp.  $\hat{N}_{2u} = \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{2v} = \mathbf{x}_v$ ), al ser  $U$  conexo, se tiene que  $\mathbf{x} = \hat{N}_1 + \mathbf{d}$  (resp.  $\mathbf{x} = \hat{N}_2 + \mathbf{d}$ ), donde  $\mathbf{d}$  es un vector constante. Así, la imagen de la inmersión está contenida en un hiperboloide temporal (resp. espacial) de centro  $\mathbf{d}$  y radio  $R$ .

### Caso $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$ es de tipo luz

Si asumimos que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  es de tipo luz, entonces para cualquier base ortonormal del plano normal  $\{N_1, N_2\}$  verificando  $|N_1|^2 = 1 = -|N_2|^2$ , se tendrá que  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  es proporcional a  $N_1 + N_2$  o a  $N_1 - N_2$ . Esto se debe a que sólo existen dos direcciones independientes de tipo luz.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es proporcional a  $N_1 + N_2$ . De esta manera, se tiene que

$$0 = \langle \mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}, N_1 + N_2 \rangle = (e_1 + e_2) - (g_1 + g_2),$$

concluyendo que  $e_1 + e_2 = g_1 + g_2$ . Con esta condición, el cálculo directo de la curvatura normal nos muestra que

$$k_N^2 = \frac{(e_2 - g_2)^2 (f_1 + f_2)^2}{4E^2}.$$

Dado que suponemos que  $k_N^2 = 0$  y tenemos que  $e_2 \neq g_2$ , al ser  $\mathbf{x}_{uu} - \mathbf{x}_{vv}$  de tipo luz, entonces  $f_1 + f_2 = 0$ . Esta otra condición junto con la anterior nos lleva a que la resultante es

$$\Delta = \frac{(g_1 + g_2)^2((e_2 - g_2)^2 + 4f_2^2)}{4E^4},$$

que al no anularse implica que  $e_1 + e_2 = g_1 + g_2 \neq 0$ . Definamos el vector normal,  $\hat{N}$ , que será nuestro candidato a vector esférico equivalente a la inmersión, mediante

$$\hat{N} = -E \frac{N_1 + N_2}{e_1 + e_2}.$$

Se verifica que

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N} \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N} \rangle = -E \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N} \rangle = 0$$

equivalente a

$$e_1 + e_2 = -E = g_1 + g_2 \quad \text{y} \quad f_1 + f_2 = 0.$$

Veamos cómo quedan los otros invariantes

$$|H|^2 = 1 + \frac{e_2 + g_2}{E} \quad \text{y} \quad K = 1 + \frac{e_2 + g_2}{E}. \quad (5.11)$$

El cálculo directo muestra que  $|H|^2 \equiv K$ . Nuestro objetivo es demostrar que se tiene que

$$\hat{N}_u = \mathbf{x}_u \quad \text{y} \quad \hat{N}_v = \mathbf{x}_v. \quad (5.12)$$

Para ello, utilizaremos la base ortogonal del espacio  $\{N_2, N_1, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . La elección del vector  $\hat{N}$  nos proporciona directamente que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_u \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{N} \rangle = E, & \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_v \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_u \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{N} \rangle = 0, & \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_v \rangle &= -\langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{N} \rangle = E. \end{aligned}$$

Las componentes del vector diferencia  $\hat{N}_u - \mathbf{x}_u$ , en los elementos tangentes de la base, son

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_u - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_u, \hat{N}_u \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_u - \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{x}_v, \hat{N}_u \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, se tendría para  $\hat{N}_v - \mathbf{x}_v$ .

Para llegar a las Ecs. (5.12), nos falta demostrar que también se anula en las coordenadas normales. Esto es equivalente a demostrar que

$$\langle N_1, \hat{N}_u \rangle = 0 = \langle N_2, \hat{N}_u \rangle \quad \text{y} \quad \langle N_1, \hat{N}_v \rangle = 0 = \langle N_2, \hat{N}_v \rangle.$$

Dado que  $\hat{N} = N_1 + N_2$ , se tiene

$$\begin{aligned} \langle N_1, \hat{N}_u \rangle &= \langle N_1, N_{2u} \rangle, & \langle N_2, \hat{N}_u \rangle &= \langle N_2, N_{1u} \rangle, \\ \langle N_1, \hat{N}_v \rangle &= \langle N_1, N_{2v} \rangle, & \langle N_2, \hat{N}_v \rangle &= \langle N_2, N_{1v} \rangle. \end{aligned}$$

Gracias a la Prop. 5.2.1, con los coeficientes  $e_1 + e_2 = -E = g_1 + g_2$  y  $f_1 + f_2 = 0$ , la Ec. (5.1) y la Ec. (5.3) se escriben como

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{e_2 + g_2}{2E} & -f_2 & e_2 \\ 0 & \frac{e_2 + g_2}{2E} & -f_2 & e_2 + E \\ \frac{e_2 + g_2}{2E} & 0 & g_2 & -f_2 \\ \frac{e_2 + g_2}{2E} & 0 & g_2 + E & -f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \\ \langle N_{1u}, N_2 \rangle \\ \langle N_{1v}, N_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{2v} - f_{2u} \\ e_{2v} - f_{2u} \\ g_{2u} - f_{2v} \\ g_{2u} - f_{2v} \end{pmatrix}.$$

Tenemos un sistema linear homogéneo en las incógnitas  $\langle N_{1u}, N_2 \rangle$  y  $\langle N_{1v}, N_2 \rangle$  con determinante  $\frac{-1}{4}(e_2 + g_2)^2$ . Sabiendo que  $K(u, v) \neq 1$ , la Ec. (5.11) implica entonces que  $e_2 + g_2 \neq 0$  para todo  $(u, v) \in U$ . Concluimos que la única solución del sistema viene dada por

$$\langle N_{1u}, N_2 \rangle = 0, \quad \langle N_{1v}, N_2 \rangle = 0, \quad E_u = \frac{2E(g_{2u} - f_{2v})}{e_2 + g_2} \quad \text{y} \quad E_v = \frac{2E(e_{2v} - f_{2u})}{e_2 + g_2}.$$

Con ello tenemos las Ecs. (5.12) al tener que  $\hat{N}_u - \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_v - \mathbf{x}_v$  tienen todas sus componentes nulas.

Con esto acabamos este caso dado que si  $\hat{N}_{1u} = \mathbf{x}_u$  y  $\hat{N}_{1v} = \mathbf{x}_v$ , al ser  $U$  conexo, se tiene que  $\mathbf{x} = \hat{N} + \mathbf{d}$ , donde  $\mathbf{d}$  es un vector constante. Así, la imagen de la inmersión está contenida en una hoja de luz desplazada por  $\mathbf{d}$  (esfera de radio 0 y centro  $\mathbf{d}$ ).

□

## 5.4 Ejemplos de superficies esféricas en $\mathbb{R}^{1,3}$

Dado que este tipo concreto de superficies no han sido caracterizadas, no se encuentran ejemplos de parametrizaciones esféricas inmersas en  $\mathbb{R}^{1,3}$  en la

literatura. Aunque son sencillos, hemos añadido en este trabajo un ejemplo para cada tipo posible del vector. Como antes, utilizaremos la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,3}$  donde la primera coordenada es la temporal.

**Ejemplo 5.4.1.** Consideremos la inmersión  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times (-\pi/4, \pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sinh(u) \sin(v), \cosh(u) \sin(v), \sin(u) \cos(v), \cos(u) \cos(v)).$$

Se tiene que  $|\mathbf{x}|^2 = 1$ , por lo que la imagen de la inmersión está en un hiperboloide **espacial**. Los coeficientes de la primera forma fundamental asociados a esta parametrización son

$$E = \cos(2v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Consideramos la base normal dada por

$$N_1 = \mathbf{x},$$

$$N_2 = (\cosh(u) \cos(v), \sinh(u) \cos(v),$$

$$\cos(u) \sin(v), -\sin(u) \sin(v)) \frac{1}{\sqrt{\cos(2v)}}.$$

Los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas son

$$e_1 = -E, \quad f_1 = -F, \quad g_1 = -G, \quad e_2 = 0, \quad f_2 = \frac{-1}{\sqrt{\cos(v)}}, \quad g_2 = 0.$$

Por lo tanto, usando las fórmulas de las Ecs. (4.6), los invariantes son

$$|H|^2 = 1, \quad k_N = 0, \quad K = 1 + \frac{1}{\cos^2(2v)}, \quad \Delta = \frac{1}{\cos^2(2v)}.$$

Se puede comprobar la condición necesaria

$$k_N = 0 \quad \text{y} \quad (1)\Delta + |H|^2 = K.$$

**Ejemplo 5.4.2.** Consideremos la inmersión  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh(u), \sinh(u), \sin(v), \cos(v)).$$

Se tiene que  $|\mathbf{x}|^2 = 0$ , por lo que la imagen de la inmersión está en un **cono de luz**. Los coeficientes de la primera forma fundamental asociados a esta parametrización son

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Consideramos la base normal dada por

$$N_1 = (\cosh(u) \sinh(v), \sinh(u), \cosh(u) \sin(v), \cosh(u) \cos(v)),$$

$$N_2 = (\cosh(u), \cosh(u) \sinh(u), \sinh(u) \sin(v), \sinh(u) \cos(v)).$$

Los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas son

$$e_1 = -\sinh(u), \quad f_1 = 0, \quad g_1 = -\cosh(u),$$

$$e_2 = -\cosh(u), \quad f_2 = 0, \quad g_2 = -\sinh(u).$$

Por lo tanto, usando las fórmulas de las Ecs. (4.6), los invariantes son

$$|H|^2 = 0, \quad k_N = 0, \quad K = 0, \quad \Delta = \frac{1}{4}.$$

Se puede comprobar la condición necesaria

$$k_N = 0 \quad \text{y} \quad (0)\Delta + |H|^2 = K.$$

**Ejemplo 5.4.3.** Consideremos la inmersión  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \times (-\pi/4, \pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cosh(u) \cosh(v), \sinh(u) \cosh(v), \sin(u) \sinh(v), \cos(u) \sinh(v)).$$

Se tiene que  $|\mathbf{x}'|^2 = -1$ , por lo que la imagen de la inmersión está en un hiperboloide **temporal**. Los coeficientes de la primera forma fundamental asociados a esta parametrización son

$$E = \cosh(2v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Consideramos la base normal dada por

$$N_1 = (\sinh(u) \sinh(v), \cosh(u) \sinh(v),$$

$$-\cos(u) \cosh(v), \sin(u) \cosh(v)) \frac{1}{\sqrt{\cosh(2v)}},$$

$$N_2 = \mathbf{x}.$$

Los coeficientes de las segundas formas fundamentales asociadas son

$$e_1 = 0, \quad f_1 = \frac{-1}{\sqrt{\cos(v)}}, \quad g_1 = 0, \quad e_2 = -E, \quad f_2 = -F, \quad g_2 = -G.$$

Por lo tanto, usando las fórmulas de las Ecs. (4.6), los invariantes son

$$|H|^2 = -1, \quad k_N = 0, \quad K = -1 - \frac{1}{\cosh(2v)}, \quad \Delta = \frac{1}{\cos^2(2v)}.$$

Se puede comprobar la condición necesaria

$$k_N = 0 \quad \text{y} \quad (-1)\Delta + |H|^2 = K.$$





# Capítulo 6

## Caracterización de superficies de ángulos constantes en $\mathbb{R}^{1,3}$

Aunque el estudio de las superficies esféricas en el espacio de Lorentz 4-dimensional es realmente paralelo a nuestro estudio en el caso euclídeo, no ocurre lo mismo con las superficies de ángulos constantes. En el caso euclídeo podíamos apoyarnos en [13], donde se realizaba un estudio de una familia de superficies más grande. En este caso, nos apoyaremos en el estudio más general sobre superficies espaciales en  $\mathbb{R}^{1,3}$  realizado por Pierre Bayard en [2]. En este trabajo, utilizando la estructura de cuaterniones, se demuestra un teorema de representación en el estilo de la representación de Weierstrass de una superficie inmersa mediante su aplicación de Gauss y unas *componentes compatibles* del vector curvatura media. Veremos que se traducirá en que las funciones componentes cumplan ciertas condiciones de compatibilidad.

A lo largo de este capítulo, definiremos lo necesario para entender el resultado de representación, estudiaremos cómo influye la condición de ángulos constantes en la aplicación de Gauss y llegaremos a reducir el problema de las componentes compatibles a una ecuación diferencial hiperbólica de segundo orden.

La estructura de este capítulo es:

- Definimos la aplicación de Clifford entre cuaterniones, vectores y su extensión a bivectores.
- Consideramos la condición de ángulos constantes sobre la aplicación

de Gauss de la superficie inmersa.

- Enunciamos el teorema de representación y su reescritura a un problema de derivadas parciales.
- Estudiamos los invariantes locales.
- Caracterizamos distintas subfamilias incluyendo ejemplos.

## 6.1 La aplicación de Clifford sobre vectores

Vamos a ver la descripción de la aplicación de Clifford sobre  $\mathbb{R}^{1,3}$  usando los cuaterniones complejos. Véanse las referencias [2] y [12] para hallar más detalles. Sea  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  el espacio de cuaterniones complejos definidos por

$$\mathbb{H}^{\mathbb{C}} := \{q_0 1 + q_1 I + q_2 J + q_3 K, \quad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{C}\},$$

donde  $I, J, K$  cumplen que

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K.$$

Del mismo modo, definimos  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}(2)$  como el conjunto de matrices  $2 \times 2$  con entradas en  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ . El álgebra de Clifford viene dada por los elementos de la forma

$$Cl(1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \widehat{b} & \widehat{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \right\},$$

donde si  $\xi = q_0 1 + q_1 I + q_2 J + q_3 K$  es un elemento de  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ , entonces

$$\widehat{\xi} := \overline{q_0} 1 + \overline{q_1} I + \overline{q_2} J + \overline{q_3} K.$$

Esta álgebra, con el producto usual de matrices, se descompone en dos subconjuntos

$$Cl_0(1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \widehat{a} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \right\} \simeq \mathbb{H}^{\mathbb{C}},$$

llamado el conjunto de elementos pares, y

$$Cl_1(1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ \widehat{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \right\} \simeq \mathbb{H}^{\mathbb{C}},$$

llamado el conjunto de elementos impares.

**Definición 6.1.1.** *Definimos la aplicación de Clifford entre los vectores de  $\mathbb{R}^{1,3}$  y el subconjunto de los elementos impares del álgebra de Clifford,  $Cl_1(1,3)$ , mediante*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{1,3} &\rightarrow Cl_1(1,3) \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}x_0\mathbf{1} + x_1I + x_2J + x_3K \\ -\mathbf{i}x_0\mathbf{1} + x_1I + x_2J + x_3K & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Además, mediante esta aplicación identificamos  $\mathbb{R}^{1,3}$  con el subconjunto de  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  donde la primera coordenada es imaginaria pura y las demás son reales.

Con esta aplicación podremos interpretar el producto exterior como producto de matrices, de forma que el producto exterior de dos vectores, elementos impares, nos dará un elemento par. El problema surgirá cuando las coordenadas del cuaternión asociado sean complejas. Por ello, tenemos que dar una interpretación a las posibles coordenadas complejas que tendrán los bivectores. Esto es, si  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ , entonces

$$\begin{aligned} \bar{x} \wedge \bar{y} &\mapsto (\mathbf{i}x_0\mathbf{1} + x_1I + x_2J + x_3K) \cdot (-\mathbf{i}x_0\mathbf{1} + x_1I + x_2J + x_3K) \\ &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)\mathbf{1} \\ &\quad + (x_2y_3 - x_3y_2 + \mathbf{i}(x_0y_1 - x_1y_0))I \\ &\quad + (x_3y_1 - x_1y_3 + \mathbf{i}(x_0y_2 - x_2y_0))J \\ &\quad + (x_1y_2 - x_2y_1 + \mathbf{i}(x_0y_3 - x_3y_0))K. \end{aligned}$$

Veremos en la siguiente sección cómo relacionamos este elemento resultante con el bivector  $\bar{x} \wedge \bar{y}$ .

## 6.2 Una estructura compleja para los bivectores y su identificación con los productos de vectores mediante la aplicación de Clifford

Trabajamos con los bivectores utilizando la misma notación para el conjunto de bivectores unitarios y descomponibles

$$\mathcal{Q} = \{\eta \in \Lambda^2\mathbb{R}^{1,3} : \langle \eta, \eta \rangle = 1, \eta \wedge \eta = 0\}.$$

Para encontrar una identificación entre los productos obtenidos mediante la aplicación de Clifford y los bivectores necesitamos dos pasos: definir

una unidad compleja sobre los bivectores, obteniendo un espacio vectorial de dimensión 3, y considerar el subespacio vectorial de dimensión 3 de cuaterniones imaginarios, esto es, sólo con componentes no nulas en  $I, J$  o  $K$ .

La unidad imaginaria en las componentes la interpretaremos mediante el operador de Hodge.

**Definición 6.2.1.** *Definimos el operador de Hodge sobre los bivectores,*

$$* : \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3},$$

mediante

$$\langle *\eta, \eta' \rangle = \eta \wedge \eta', \quad (6.2)$$

para todo  $\eta, \eta' \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3}$ .

Si  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^{1,3}$ , el cálculo del operador de Hodge sobre la base de bivectores es

$$\begin{aligned} \langle *(e_1 \wedge e_2), e_0 \wedge e_3 \rangle &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_3 = 1 = \langle e_3 \wedge e_0, e_0 \wedge e_3 \rangle, \\ \langle *(e_2 \wedge e_3), e_0 \wedge e_1 \rangle &= e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_1 = 1 = \langle e_1 \wedge e_0, e_0 \wedge e_1 \rangle, \\ \langle *(e_3 \wedge e_1), e_0 \wedge e_2 \rangle &= e_3 \wedge e_1 \wedge e_0 \wedge e_2 = 1 = \langle e_2 \wedge e_0, e_0 \wedge e_2 \rangle, \\ \langle *(e_0 \wedge e_1), e_2 \wedge e_3 \rangle &= e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = 1 = \langle e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 \rangle, \\ \langle *(e_0 \wedge e_2), e_1 \wedge e_3 \rangle &= e_0 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 = -1 = \langle e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_3 \rangle, \\ \langle *(e_0 \wedge e_3), e_1 \wedge e_2 \rangle &= e_0 \wedge e_3 \wedge e_1 \wedge e_2 = 1 = \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2 \rangle, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} *(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \wedge e_0, & *(e_2 \wedge e_3) &= e_1 \wedge e_0, & *(e_3 \wedge e_1) &= e_2 \wedge e_0, \\ *(e_0 \wedge e_1) &= e_2 \wedge e_3, & *(e_0 \wedge e_2) &= e_3 \wedge e_1 & \text{y} & *(e_0 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

Se puede ver que  $*^2 = -id_{\Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3}}$ . Esto nos lleva a denotar por  $\mathbf{i} := *$  la unidad compleja que damos al espacio de los bivectores.

Con esta unidad compleja, podemos elegir como base compleja de  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3}$  los elementos

$$E_1 = e_2 \wedge e_3, \quad E_2 = e_3 \wedge e_1, \quad E_3 = e_1 \wedge e_2.$$

Así, conseguimos escribir todo bivector como una combinación lineal de  $\{E_1, E_2, E_3\}$  con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . Una métrica asociada a esta estructura

vendría dada por la siguiente operación,  $H : \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3} \times \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$H(\eta, \eta') = \langle \eta, \eta' \rangle - \mathbf{i} \eta \wedge \eta'. \quad (6.3)$$

Se puede comprobar que  $H(E_i, E_j) = \delta_{ij}$  para cada  $i, j = 1, 2, 3$ . Además, para cada  $\eta \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3}$  se tiene

$$\eta = \sum_{j=1}^3 H(\eta, E_j) E_j.$$

Como  $H(\eta, \eta) = 1$  si y sólo si  $\langle \eta, \eta' \rangle = 1$  y  $\eta \wedge \eta' = 0$ , la circunferencia unitaria para la métrica  $H$  resulta coincidir con  $\mathcal{Q}$ , es decir

$$\mathcal{Q} = \{\eta \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3} : H(\eta, \eta) = 1\}.$$

Por otra parte, mediante la aplicación de Clifford podemos transformar el producto exterior entre dos vectores a un producto entre sus matrices de elementos impares asociadas. Tenemos que

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \cdot 1 \\ -i \cdot 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el producto matricial, tenemos la representación de bivectores como los elementos pares usando la base

$$E_1 = e_2 \wedge e_3 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JK & 0 \\ 0 & JK \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \simeq I,$$

$$E_2 = e_3 \wedge e_1 = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \simeq J,$$

$$E_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \simeq K.$$

De esta manera, a cada bivector le podemos hacer corresponder un elemento en  $Cl_0(1, 3)$ , es decir, la aplicación de Clifford llevará a los bivectores de  $\mathbb{R}^{1,3}$  al subconjunto de los elementos pares. A cada bivector en  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3}$  de la forma

$$x_0 e_0 \wedge e_1 + x_1 e_0 \wedge e_2 + x_2 e_0 \wedge e_3 + x_3 e_1 \wedge e_2 + x_4 e_1 \wedge e_3 + x_5 e_2 \wedge e_3,$$

le asociamos el elemento en  $Cl_0(1, 3)$

$$\left( \begin{array}{cc} (x_3 - \mathbf{i}x_0)I - (x_4 + \mathbf{i}x_2)J + (x_4 - \mathbf{i}x_3)K & 0 \\ 0 & (x_3 + \mathbf{i}x_0)I - (x_4 - \mathbf{i}x_2)J + (x_4 + \mathbf{i}x_3)K \end{array} \right).$$

Gracias a esta aplicación y la identificación entre  $Cl_0(1, 3)$  y  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ , asociamos a cada bivector un elemento de los cuaterniones imaginarios

$$\Lambda^2\mathbb{R}^{1,3} = \{Z_1I + Z_2J + Z_3K \in \mathbb{H}^{\mathbb{C}} : (Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{C}^3\} = \mathfrak{Im} \mathbb{H}^{\mathbb{C}},$$

que es el subespacio generado sólo por  $I$ ,  $J$  y  $K$ . Esto implica que podemos identificar  $\mathcal{Q}$  con

$$\{Z_1I + Z_2J + Z_3K : Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 1\}.$$

Tenemos una fibración de

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3 := \{Z_01 + Z_1I + Z_2J + Z_3K : Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 1\},$$

mediante la proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3 &\rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^2 \\ q &\mapsto q^{-1}Iq. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Si consideramos los elementos de  $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$  con la forma  $\cos A 1 + \sin A I$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \pi((\cos A 1 + \sin A I)q) &= q^{-1}(\cos A 1 + \sin A I)^{-1}I(\cos A 1 + \sin A I)q \\ &= q^{-1}(\cos A 1 - \sin A I)I(\cos A 1 + \sin A I)q \\ &= q^{-1}(\cos A I + \sin A 1)(\cos A 1 + \sin A I)q \\ &= q^{-1}Iq = \pi(q) \end{aligned}$$

Dado que la multiplicación de elementos de  $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^1$  por la izquierda sobre un elemento de  $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$  no varía la imagen del elemento por la proyección, su fibra principal será

$$\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^1 = \{\cos A 1 + \sin A I, A \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3,$$

actuando por multiplicación a la izquierda en  $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$ . De esta forma, una curva compleja  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$  se llamará **horizontal** si  $g'g^{-1}$  pertenece a  $\mathbb{C}J \oplus \mathbb{C}K$ .

## 6.3 Plano tangente de $\mathcal{Q}$

En esta sección vamos a ver cómo podemos caracterizar los elementos del plano tangente de  $\mathcal{Q}$  mediante  $H$ .

**Proposición 6.3.1.** *Sea  $p \in \mathcal{Q}$ , entonces el plano tangente en  $p$  será*

$$T_p \mathcal{Q} = \{\xi \in \mathcal{I}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}} : H(p, \xi) = 0\},$$

donde estamos usando la identificación entre  $\Lambda^2 \mathbb{R}^{1,3}$  y  $\mathcal{I}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ .

**Demostración:** Sea  $\gamma(t)$  una curva en  $\mathcal{Q}$  de forma que  $\gamma(0) = p$ . De esta forma, se tiene  $\gamma'(0) = \xi \in T_p \mathcal{Q}$ . Al ser una curva de puntos en  $\mathcal{Q}$ , se tiene que

$$H(\gamma(t), \gamma(t)) = 1.$$

Esto es una función escalar en el parámetro  $t$  y podemos calcular su derivada. Llegamos a que se debe cumplir

$$H(\gamma(t), \gamma'(t)) = 0.$$

Esto debe ser cierto para  $t = 0$  y se tiene

$$H(p, \xi) = 0.$$

Dado que hemos partido de una curva que pase por  $p$  arbitraria, esta condición se cumple para cualquier vector tangente en  $p$ .

□

Esta caracterización será utilizada en las demostraciones futuras.

## 6.4 Definición de ángulo complejo entre bivectores

**Definición 6.4.1.** *Sean  $p, q \in \mathcal{Q}$  dos planos espaciales orientados de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . El ángulo complejo entre  $p$  y  $q$  es el número complejo  $\psi \in \mathbb{C}$  tal que*

$$H(p, q) = \cos \psi,$$

donde  $H$  estaba definida en (6.3). El ángulo es único salvo el signo y la adición de  $2\pi\mathbb{Z}$  dado que  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es sobreyectiva y  $\cos \psi = \cos \psi'$  si y sólo si  $\psi = \pm\psi' + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



Ya podemos dar la definición de superficie con ángulo complejo constante en este contexto.

**Definición 6.4.2.** Sea  $\Sigma$  una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^{1,3}$  y sea  $\Pi \subset \mathbb{R}^4$  un subespacio lineal de dimensión 2. Diremos que  $\Sigma$  tiene **ángulo complejo constante** con respecto a  $\Pi$ , si el ángulo complejo entre los bivectores asociados a  $\Pi$  y a los espacios tangentes  $\mathbf{T}_p\Sigma$  no depende de la elección del punto  $p \in \Sigma$ .

Aunque estudiaremos todas las posibilidades, el caso más interesante será cuando  $\psi$  tenga parte real e imaginaria no nula. Por ahora, separamos el caso en el que  $\psi = 0$ .

**Proposición 6.4.3.** Sean  $p, q \in \mathcal{Q}$  dos planos espaciales orientados de  $\mathbb{R}^{1,3}$  y sea  $\psi \in \mathbb{C}$  el ángulo complejo entre  $p$  y  $q$ . Tenemos las siguientes afirmaciones:

1. Si  $\psi \neq 0 \pmod{\pi}$ , entonces existe  $V \in T_p\mathcal{Q}$  tal que  $H(V, V) = 1$  y

$$q = \cos \psi \, p + \sin \psi \, V. \quad (6.5)$$

2. Si  $\psi = 0 \pmod{\pi}$ , entonces existe  $\xi \in T_p\mathcal{Q}$  tal que  $H(\xi, \xi) = 0$  y

$$q = \pm p + \xi, \quad (6.6)$$

donde el signo es positivo si  $\psi = 0 \pmod{2\pi}$  y negativo si  $\psi = \pi \pmod{2\pi}$ .

**Demostración:** Tenemos que  $H(p, q) = \cos \psi$  y, como  $p \in \mathcal{Q}$ ,  $H(p, p) = 1$ . El bivector  $\xi := q - \cos \psi \, p$  cumple que

$$H(p, \xi) = H(p, q) - \cos \psi \, H(p, p) = 0,$$

es decir, que  $\xi$  pertenece a

$$T_p\mathcal{Q} = \{\xi \in \mathcal{Im} \, \mathbb{H}^{\mathbb{C}} : H(p, \xi) = 0\}.$$

Tenemos dos posibilidades:

**Caso 1:**  $H(\xi, \xi) \neq 0$ , que es equivalente a

$$H(q, q) + \cos^2 \psi \, H(p, p) - 2 \cos \psi \, H(p, q) \neq 0,$$

que implica que  $\cos^2 \psi \neq 1$  dado que  $H(p, p) = H(q, q) = 1$  y  $H(p, q) = \cos \psi$ , por lo tanto, se tiene  $\psi \neq 0 \ [\pi]$ .

Sea  $\gamma \in \mathbb{C}$  cumpliendo que  $\gamma^2 = H(\xi, \xi)$ , entonces como  $\gamma \neq 0$  podemos definir el bivector  $V = \xi/\gamma$  que cumple

$$H(V, V) = 1 \quad \text{y} \quad q = \cos \psi \, p + \gamma \, V.$$

Como teníamos que  $H(p, p) = H(q, q) = 1$  y  $H(p, V) = 0$ , se deduce que  $1 = \cos^2 \psi + \gamma^2$ , es decir,  $\gamma = \pm \sin \psi$ . Cambiando  $V$  por  $-V$  si fuese necesario, podemos suponer que  $\gamma = \sin \psi$  y se cumple la Ec. (6.5).

**Caso 2:**  $H(\xi, \xi) = 0$ , que es equivalente a  $\psi = 0 \ [\pi]$ . Por lo tanto,  $\xi = q - \epsilon p$  con  $\epsilon = 1$  si  $\psi = 0 \ [2\pi]$  y  $\epsilon = -1$  si  $\psi = \pi \ [2\pi]$ , que implica la Ec. (6.6).

□

*Nota 27.* Veamos ahora qué implica el caso  $\psi = 0 \ [\pi]$ . Si  $p = p_1 \wedge p_2$  y  $\xi = t_1 \wedge t_2 \in T_p \mathcal{Q}$  con  $H(\xi, \xi) = 0$ , entonces, por un lado

$$0 = H(\xi, \xi) = \langle t_1 \wedge t_2, t_1 \wedge t_2 \rangle - \mathbf{i} \, t_1 \wedge t_2 \wedge t_1 \wedge t_2 = 0 \Rightarrow \langle t_1 \wedge t_2, t_1 \wedge t_2 \rangle = 0,$$

por lo tanto, algún  $t_i$  es de tipo luz. Supongamos que es  $t_2 = L$ . Por otro lado, por ser tangente ( $\xi \in T_p \mathcal{Q} \Leftrightarrow H(\xi, p) = 0$ ), se tiene que

$$\langle t_1 \wedge L, p_1 \wedge p_2 \rangle - \mathbf{i} \, t_1 \wedge L \wedge p_1 \wedge p_2 = 0 \Leftrightarrow \langle t_1 \wedge L, p_1 \wedge p_2 \rangle = 0 = t_1 \wedge L \wedge p_1 \wedge p_2,$$

por lo que  $L$  debe ser normal a  $p_1$  y  $p_2$ , a la vez que  $t_1$  es combinación de  $p_1$  y  $p_2$ . Esto es,  $p$  y  $q$  pertenecen a un mismo hiperplano de  $\mathbb{R}^{1,3}$  generado por  $p_1, p_2$  y  $L$ .

Concluimos que si  $p$  es constante, entonces  $q$ , el posible plano tangente de una superficie inmersa con ángulo complejo constante, sólo puede variar entre las dos posibilidades dadas por los vectores de luz independientes. Esto es, una superficie degenerada a un plano constante.

Por todo lo anterior, de forma general vamos a suponer que  $\psi \neq 0 \ [\pi]$ .

## Interpretación del ángulo complejo en términos de dos ángulos reales

Veamos una interpretación geométrica a través de una descomposición del ángulo complejo en valores reales. Sean otra vez  $p, q \in \mathcal{Q}$  con un ángulo

complejo  $\psi \neq 0$   $[\pi]$ . Si usamos la Prop. 6.4.3, entonces existe  $V \in T_p\mathcal{Q}$  tal que  $H(V, V) = 1$  y

$$q = \cos \psi p + \sin \psi V.$$

Si tenemos en cuenta la Ec. (6.3), entonces las condiciones  $V \in T_p\mathcal{Q}$  y  $H(V, V) = 1$  implican que  $V$  es de la forma  $u \wedge v$  para dos vectores espaciales  $u$  y  $v$  pertenecientes a  $p$  y a  $p^\perp$ , esto es,  $p = u \wedge u^\perp$  y  $p^\perp = v \wedge v^\perp$  (donde  $u^\perp$  y  $v^\perp$  son respectivamente espacial y temporal). Si escribimos  $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2$  y usamos las fórmulas

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos \psi_1 \cosh \psi_2 - \mathbf{i} \sin \psi_1 \sinh \psi_2, \\ \sin \psi &= \sin \psi_1 \cosh \psi_2 + \mathbf{i} \cos \psi_1 \sinh \psi_2, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} q &= \cos \psi u \wedge u^\perp + \sin \psi u \wedge v \\ &= (\cosh \psi_2 u + \sinh \psi_2 v^\perp) \wedge (\cos \psi_1 u^\perp - \sin \psi_1 v). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Esto implica que el plano  $q$  está generado por los vectores ortogonales unitarios  $\cos \psi_1 u^\perp - \sin \psi_1 v$  y  $\cosh \psi_2 u + \sinh \psi_2 v^\perp$ . Estos vectores están determinados por una rotación euclídea de ángulo  $\psi_1$  en el plano espacial generado por  $u^\perp$  y  $v$ , y por una rotación lorentziana de ángulo  $\psi_2$  en el plano temporal generado por  $u$  y  $v^\perp$ .

*Nota 28.* El caso donde el ángulo  $\psi \neq 0$   $[\pi]$  entre los planos  $p$  y  $q$  es un número real (esto es  $\psi_2 = 0$ ) es equivalente a que exista un hiperplano espacial conteniendo ambos  $p$  y  $q$ . Si usamos la Ec. (6.7), este hiperplano es  $p \oplus \mathbb{R}v$ . En el caso de que  $\psi$  es un número imaginario puro (esto es  $\psi_1 = 0$ ), entonces es equivalente a que exista hiperplano temporal conteniendo ambos  $p$  y  $q$  (este hiperplano es  $p \oplus \mathbb{R}v^\perp$ ). Esto limitará las posibilidades para una superficie con ángulo real o imaginario puro, como veremos más tarde al clasificar las superficies de estos subcasos.

## 6.5 La aplicación de Gauss de una superficie espacial inmersa

Consideremos una superficie inmersa,  $M$ , en  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Recordemos que la aplicación de Gauss,  $G$ , relaciona cada punto de la superficie con el plano tangente

en ese punto. Podemos identificar la aplicación de Gauss de  $M$  con la aplicación

$$G : M \rightarrow \mathcal{Q} \subseteq \mathfrak{S}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$$

$$x \mapsto G(x) = u_1 \wedge u_2,$$

donde  $\{u_1, u_2\}$  es una base ortonormal de  $T_x M$  orientada positivamente.

Definimos el **producto vectorial** de dos vectores cuaterniónicos  $\xi, \xi' \in \mathfrak{S}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  mediante

$$\xi \times \xi' := \frac{1}{2} (\xi \xi' - \xi' \xi) \in \mathfrak{S}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}}.$$

También definimos el **producto mixto** de tres vectores  $\xi, \xi', \xi'' \in \mathfrak{S}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$  mediante

$$[\xi, \xi', \xi''] := H(\xi \times \xi', \xi'') \in \mathbb{C}.$$

El producto mixto es una **forma de volumen compleja** en  $\mathfrak{S}m \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ , es decir, una aplicación en valores complejos,  $\mathbb{C}$ -linear y antisimétrica con respecto a los tres argumentos. Este producto determina una **forma de área compleja**  $\omega_{\mathcal{Q}}$  en  $\mathcal{Q}$  mediante

$$\omega_{\mathcal{Q}p}(\xi, \xi') := [\xi, \xi', p],$$

para todo  $p \in \mathcal{Q}$  y todo  $\xi, \xi' \in T_p \mathcal{Q}$ . Nótese que  $\omega_{\mathcal{Q}p}(\xi, \xi') = 0$  si y sólo si  $\xi$  y  $\xi'$  son linealmente dependientes sobre  $\mathbb{C}$ .

Aunque ya era conocido que los invariantes de una superficie con ángulo complejo constante cumplen que  $K = k_N = 0$ , vamos a recordar el resultado que se plantea en [2]. De esta forma, veremos la relación entre el pull-back de la aplicación de Gauss y la forma de área  $\omega_{\mathcal{Q}}$ .

**Proposición 6.5.1** (Prop. 6.3, [2]). *Si  $K$  y  $k_N$  denotan la curvatura de Gauss y la curvatura normal de  $M$  respectivamente, se tiene que*

$$G^* \omega_{\mathcal{Q}} = (K + \mathbf{i}k_N) \omega_M, \tag{6.8}$$

donde  $\omega_M$  es la forma de área de  $M$ . En particular,  $K = k_N = 0$  en  $x_0 \in M$  si y sólo si el espacio lineal  $dG_{x_0}(T_{x_0} M)$  está contenido en una línea compleja en  $T_{G(x_0)} \mathcal{Q}$ .

En la demostración de este resultado se utilizan expresiones alternativas de la diferencial de la aplicación de Gauss en términos de operaciones sobre

$\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ . Desde la definición del pull-back, se reescribe en términos de operaciones con los cuaterniones adecuados que se separa en una suma. Utilizando resultados desarrollados en [2], se llega a la expresión final.

En el mismo artículo se utiliza el siguiente argumento aplicando este resultado. El objetivo será asegurarnos que podemos considerar que la parametrización es isoterma. Lo incluimos para mantener la máxima cohesión con el trabajo publicado.

Podemos aplicar este resultado, suponiendo que  $G : M \rightarrow \mathcal{Q}$  es una aplicación regular ( $dG_x$  es inyectiva en todo punto  $x$  de  $M$ ), entonces se tiene que  $G^*\omega_{\mathcal{Q}_x} = \omega_{\mathcal{Q}}(dG_x, dG_x) = 0$ , para cada  $x \in M$ . Esto implica que  $\mathfrak{S}m(dG_x)$  es una línea compleja en  $T_{G(x)}\mathcal{Q}$  y podemos definir

$$\mathcal{J}u := dG_x^{-1}(\mathbf{i} dG_x(u)),$$

para todo  $u \in T_xM$ . Esto es,  $\mathcal{J}$  es una estructura compleja en  $M$  tal que

$$dG_x(\mathcal{J}u) = \mathbf{i} dG_x(u),$$

para todo  $x \in M$  y todo  $u \in T_xM$ .

Veamos que  $M$  no puede ser compacta. Para demostrarlo, supongamos que lo sea. De esta manera, tenemos definida globalmente una aplicación de Gauss  $G = G_1I + G_2J + G_3K$ . Como  $(M, \mathcal{J})$  es una superficie Riemanniana, cada componente  $G_1, G_2$  y  $G_3$  son funciones holomórfas.

Las componentes también están definidas de forma global y, por el teorema de Liouville, al ser un dominio compacto tienen que ser constantes. Esto implica que  $G$  es constante, es decir, que  $M$  es un plano.

Para concluir que podemos considerar una parametrización isoterma, debemos añadir la condición de que  $M$  es simplemente conexa. Dado que nuestro trabajo es local, esta condición no es restrictiva.

De esta manera, la variable complexificada  $z$  de la superficie está en un dominio abierto complejo. Por el Teorema de uniformación de Riemann,  $(M, \mathcal{J})$  es conforme a un conjunto abierto  $\mathbb{C}$  y por lo tanto admite una parametrización conforme a los ejes, es decir, podemos suponer que  $z = x + \mathbf{i}y$ .

Por la Prop. 6.4.3 y la Nota 27, si  $\psi = 0$  [ $\pi$ ] entonces la superficie  $M$ , si es conexa, pertenece a un hiperplano  $p_0 \oplus L$  donde  $L$  es una de las dos

líneas nulas normales a  $p_0$ . Recíprocamente, si una superficie está contenida en  $p_0 \oplus L$  entonces tiene ángulo complejo constante  $\psi = 0$   $[\pi]$ .

En el caso que  $\psi \neq 0$   $[\pi]$ , la imagen de la aplicación de Gauss está contenida en un círculo complejo, en  $\mathcal{Q}$ , de centro  $p_0$  y radio  $\cos \psi$ . Esto implica que  $G$  es de la forma

$$G = \cos \psi p_0 + \sin \psi V, \quad (6.9)$$

donde  $V : M \rightarrow T_{p_0}\mathcal{Q}$  es una función tal que  $H(V, V) = 1$ .

El primer teorema de representación que veremos nos permitirá la determinación de la inmersión a partir de la aplicación de Gauss. Pero antes de ver este resultado, mostramos un ejemplo sencillo de una superficie inmersa con ángulo complejo constante que no había sido descrito anteriormente.

## Primer ejemplo de superficie con ángulo complejo constante

El objetivo de esta sección es introducir un nuevo ejemplo de una inmersión de tipo luz con ángulo complejo constante y arbitrario con respecto a un plano fijo. Tenemos la inmersión  $\mathbf{F}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$  definida por

$$\mathbf{F}(x, y) = e^{ax-by} (\cosh(x), \sinh(x), \cos(y), \sin(y)), \quad (6.10)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Los vectores que forman una base del plano tangente son

$$\mathbf{F}_x = e^{ax-by} (a \cosh(x) + \sinh(x), \cosh(x) + a \sinh(x), a \cos(y), a \sin(y)),$$

$$\mathbf{F}_y = -e^{ax-by} (b \cosh(x), b \sinh(x), b \cos(y) + \sin(y), -\cos(y) + b \sin(y)).$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = e^{2(ax-by)} = G \quad y \quad F = 0.$$

Comprobamos que es espacial ya que  $EG - F^2 > 0$ . El cálculo directo muestra que la aplicación de Gauss es

$$\begin{aligned} G(z) &:= \frac{\mathbf{F}_x \wedge \mathbf{F}_y}{|\mathbf{F}_x \wedge \mathbf{F}_y|} \\ &= (a + \mathbf{i}b)E_1 - (\cosh z + (a + \mathbf{i}b) \sinh z)E_2 \\ &\quad + \mathbf{i}((a + \mathbf{i}b) \cosh z + \sinh z)E_3. \end{aligned}$$

Veamos ahora que el ángulo complejo,  $\psi$ , entre los planos tangentes y el plano asociado a  $E_1$  es constante. En efecto, se tiene que

$$\cos \psi := H(G(z), E_1) = a + \mathbf{i}b.$$

Nótese que  $|\mathbf{F}|^2 = 0$ , es decir, que la imagen de la inmersión pertenece al cono de luz que pasa por el origen.

Consideramos vectores normales

$$\begin{aligned} N_1 &= (0, a, b \cosh(x) \sin(y) - \cos(y)(a \sinh(x) + \cosh(x)), \\ &\quad - \sin(y)(a \sinh(x) + b \cosh(x) \operatorname{ctg}(y) + \cosh(x))), \\ N_2 &= (2 \cosh(x) ((1 + a^2 + b^2) \cosh(x) + 2a \sinh(x)), \\ &\quad (1 + a^2 + b^2) \sinh(2x) + 2a \cosh(2x), \\ &\quad 2 (\cosh(x) ((a^2 + b^2) \cos(y) + b \sin(y)) + a \sinh(x) \cos(y)), \\ &\quad 2 \sin(y) (\cosh(x) (a^2 + b^2 - b \operatorname{ctg}(y)) + a \sinh(x))). \end{aligned}$$

El cálculo de la expresión para el vector curvatura media  $H$ , definida en Ec. (4.3), nos da:

$$H = e^{ax-by} ((a^2 + b^2 + 1) \cosh(x) + 2a \sinh(x)) \frac{N_1 + N_2}{2}.$$

Vemos que es de tipo luz al ser  $|H|^2 = 0$ .

## 6.6 Teoremas de representación

A partir de ahora, vamos a suponer que la aplicación de Gauss, cuya imagen está contenida en una circunferencia como en la Ec. (6.9), está parametrizada por

$$G(z) = \cos \psi I + \sin \psi J \left\{ \cos \left( \frac{2z}{\sin \psi} \right) + \sin \left( \frac{2z}{\sin \psi} \right) I \right\}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6.11)$$

Esto es que suponemos que forma el ángulo constante  $\psi$  con el plano asociado a  $I$ . Esta condición no es restrictiva dado que podemos considerar un movimiento rígido para la superficie inmersa. Vemos que esta parametrización cumple que

$$H(G'(z), G'(z)) = 4 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C},$$

donde  $G'(z)$  indica la derivada de la aplicación de Gauss bajo el parámetro  $z$ . Dado que  $G(z) \in S_{\mathbb{C}}^3$ , utilizaremos la fibración de  $S_{\mathbb{C}}^3 \rightarrow S_{\mathbb{C}}^2$  que introdujimos en la Ec. (6.4) y su distribución horizontal.

*Nota 29.* Se puede observar que también estamos añadiendo la hipótesis de que la aplicación de Gauss sea regular. Parte de nuestros resultados se podrían aplicar en casos con singularidades, pero siguiendo el espíritu local de este trabajo, consideramos que no hay singularidades en el abierto donde se define la inmersión.

**Lema 6.6.1.** *La función  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$  definida por*

$$g(z) = -\cos \frac{\psi}{2} \sin \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) 1 + \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) I \quad (6.12)$$

$$+ \sin \frac{\psi}{2} \cos \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) J - \sin \frac{\psi}{2} \sin \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) K,$$

es un levantamiento horizontal de la función  $G$  de la Ec. (6.11). Se tiene que  $H(g', g') = 1$  y

$$g'g^{-1} = \cos \beta J + \sin \beta K, \quad (6.13)$$

donde

$$\beta = -2z \operatorname{ctg} \psi. \quad (6.14)$$

Además, cualquier levantamiento horizontal de  $G$  es necesariamente de la forma  $g_a := ag$  para una constante  $a = \cos(A)1 + \sin(A)I$ ,  $A \in \mathbb{C}$ , y se tiene que

$$g'_a g_a^{-1} = \cos \beta_a J + \sin \beta_a K,$$

donde  $\beta_a = \beta + 2A$ .

**Demostración:** Comprobemos todas las afirmaciones del lema. Se tiene que

$$g'(z) = -\sin \frac{\psi}{2} \cos \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) 1 - \sin \frac{\psi}{2} \sin \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) I$$

$$- \cos \frac{\psi}{2} \sin \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) J - \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) K.$$

Si calculamos  $H(g'(z), g'(z))$ , se tiene que

$$H(g'(z), g'(z)) = \left( \sin \frac{\psi}{2} \cos \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) \right)^2 + \left( \sin \frac{\psi}{2} \sin \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) \right)^2$$

$$+ \left( \cos \frac{\psi}{2} \sin \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) \right)^2 + \left( \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) \right)^2$$

$$= \sin^2 \frac{\psi}{2} + \cos^2 \frac{\psi}{2} = 1.$$



Para la siguiente afirmación, primero vemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}(z) = \bar{g}(z) = & -\cos \frac{\psi}{2} \sin \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) 1 - \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) I \\ & - \sin \frac{\psi}{2} \cos \left( z \cot \frac{\psi}{2} \right) J + \sin \frac{\psi}{2} \sin \left( z \cot \frac{\psi}{2} \right) K. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} g'(z)g^{-1}(z) = & \left( -\sin \frac{\psi}{2} \cos \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) 1 - \sin \frac{\psi}{2} \sin \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) I \right. \\ & \left. - \cos \frac{\psi}{2} \sin \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) J - \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( z \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2} \right) K \right) \\ & \left( \cos \frac{\psi}{2} \sin \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) 1 - \cos \frac{\psi}{2} \cos \left( z \tan \frac{\psi}{2} \right) I \right. \\ & \left. - \sin \frac{\psi}{2} \cos \left( z \cot \frac{\psi}{2} \right) J + \sin \frac{\psi}{2} \sin \left( z \cot \frac{\psi}{2} \right) K \right) \\ = & \cos \beta J + \sin \beta K, \end{aligned}$$

donde  $\beta = -2z \operatorname{ctg} \psi$ . Contamos, en efecto, con un levantamiento horizontal.

La afirmación final viene implicada por la caracterización de la fibra principal que habíamos visto para la proyección definida mediante  $q^{-1}Iq$ .

□

Veamos el primer teorema de representación en términos de las componentes del vector curvatura media y la función  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$ , que es un levantamiento horizontal de  $G$ .

**Teorema 6.6.2** (Corolario 5 en [2]). *Sea  $U \subset \mathbb{C}$  un subconjunto abierto simplemente conexo. Si  $h_0, h_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones reales tal que los campos vectoriales  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(TU)$  definidos por*

$$\begin{aligned} \alpha_1 & := \mathbf{i}h_0 \cos \beta + h_1 \sin \beta, \\ \alpha_2 & := \mathbf{i}h_0 \sin \beta - h_1 \cos \beta, \end{aligned}$$

donde  $\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cumplen las Ecs. (6.13)-(6.14), son linealmente independientes en todo punto de  $U$  y se cumple  $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$  (considerados como campos vectoriales reales), entonces con

$$\xi := g^{-1}(\omega_1 J + \omega_2 K) \widehat{g}, \tag{6.15}$$

donde  $\omega_1, \omega_2 : TU \rightarrow \mathbb{R}$  son las formas duales de  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma(TU)$ , se tiene que

$$\mathbf{F} = \int \xi : U \rightarrow \mathbb{R}^{1,3},$$

define una superficie inmersa espacial con ángulo complejo constante  $\psi$ . Recíprocamente, salvo un movimiento rígido, dada una superficie inmersa espacial con ángulo complejo constante  $\psi$  y aplicación de Gauss regular se debe poder escribir de forma local en esta forma.

En [2], como parte de la demostración, se comprueba que las funciones reales  $h_0$  y  $h_1$  son, de hecho, las componentes del vector curvatura media de la superficie. Además, la base del plano normal es paralela y los campos vectoriales  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  son una base paralela del plano tangente. Incluso se tiene que estas bases están orientadas positivamente.

*Nota 30.* Si consideramos una constante  $a \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$ , sabemos que la función  $g_a = ga : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}}^3$  también cumple la Ec. (6.13), para el mismo  $\beta$  que  $g$ . Si consideramos, además, las mismas componentes  $h_0$  y  $h_1$  al utilizar el Teorema 6.6.2, las formas asociadas a cada levantamiento,  $\xi_g$  y  $\xi_{g_a}$ , están relacionadas mediante  $\xi_{g_a} = a^{-1}\xi_g\widehat{a}$ . Esto implica que las inmersiones asociadas,  $\int \xi_g$  y  $\int \xi_{g_a}$ , son congruentes, es decir, que coinciden salvo un movimiento rígido que depende del valor de  $a$ .

### 6.6.1 Teorema de representación en términos de la métrica

Vamos a reescribir el teorema de representación anterior buscando que dependa directamente de los coeficientes de la métrica. Concretamente, interpretaremos las componentes del vector curvatura media y la condición  $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$  en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

#### Determinación de la métrica

Con la misma notación del Teorema 6.6.2, tenemos los campos  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  en función de  $\beta$ . Si separamos  $\beta = u + \mathbf{i}v$  en parte real e imaginaria, el cálculo directo muestra

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v)) \sin u + \mathbf{i}(h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)) \cos u, \\ \alpha_2 &= -(h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v)) \cos u + \mathbf{i}(h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)) \sin u,\end{aligned}$$

o escritos como campos reales

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v)) \sin u \mathbf{F}_x + (h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)) \cos u \mathbf{F}_y, \\ \alpha_2 &= -(h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v)) \cos u \mathbf{F}_x + (h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)) \sin u \mathbf{F}_y.\end{aligned}$$

Dado que estamos suponiendo que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  forman una base ortonormal del plano tangente, se tiene que

$$\begin{aligned}0 &\neq \begin{vmatrix} \langle \alpha_1, \frac{\mathbf{F}_x}{|\mathbf{F}_x|} \rangle & \langle \alpha_1, \frac{\mathbf{F}_y}{|\mathbf{F}_y|} \rangle \\ \langle \alpha_2, \frac{\mathbf{F}_x}{|\mathbf{F}_x|} \rangle & \langle \alpha_2, \frac{\mathbf{F}_y}{|\mathbf{F}_y|} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v)) \sin u & (h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)) \cos u \\ -(h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v)) \cos u & (h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)) \sin u \end{vmatrix} \\ &= (h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v))(h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v))(\sin^2 u + \cos^2 u) \\ &= (h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v))(h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos definir  $\mu$  y  $\nu$  como

$$\frac{1}{\mu} = h_0 \sinh(v) + h_1 \cosh(v) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\nu} = h_0 \cosh(v) + h_1 \sinh(v). \quad (6.16)$$

De esta forma, podemos escribir

$$\alpha_1 = \frac{\sin(u)}{\mu} \mathbf{F}_x + \frac{\cos(u)}{\nu} \mathbf{F}_y \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{-\cos(u)}{\mu} \mathbf{F}_x + \frac{\sin(u)}{\nu} \mathbf{F}_y. \quad (6.17)$$

Los productos escalares nos darían

$$\begin{aligned}1 = \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle &= \frac{\sin^2(u)E}{\mu^2} + \frac{2 \sin(u) \cos(u)F}{\mu\nu} + \frac{\cos^2(u)G}{\nu^2}, \\ 0 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle &= \sin(u) \cos(u) \left( \frac{G}{\nu^2} - \frac{E}{\mu^2} \right) + \frac{\sin^2(u) - \cos^2(u)}{\mu\nu} F, \\ 1 = \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle &= \frac{\cos^2(u)E}{\mu^2} - \frac{2 \sin(u) \cos(u)F}{\mu\nu} + \frac{\sin^2(u)G}{\nu^2}.\end{aligned}$$

Esto nos da  $F = 0$ ,  $E = \mu^2$  y  $G = \nu^2$ . Vemos que las funciones  $h_1$  y  $h_2$  determinan los coeficientes de la primera forma fundamental  $\mu = \sqrt{E}$  y  $\nu = \sqrt{G}$ .

Recíprocamente, los coeficientes de la métrica determinan las funciones  $h_1$  y  $h_2$ , y equivalentemente, determinan los campos  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ .

El siguiente paso será interpretar la condición de compatibilidad entre los campos tangentes  $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$  en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental.

**Lema 6.6.3.** *La condición  $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$  es equivalente a*

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu} \partial_y \mu = -c_1, \\ \frac{1}{\mu} \partial_x \nu = c_2, \end{cases} \quad (6.18)$$

donde

$$c_1 = -\frac{\sin(2\psi_1)}{\sin^2(\psi_1) + \sinh^2(\psi_2)} \quad y \quad c_2 = -\frac{\sinh(2\psi_2)}{\sin^2(\psi_1) + \sinh^2(\psi_2)}. \quad (6.19)$$

**Demostración:** El cálculo directo, desde la Ec. (6.17), del corchete de Lie entre los vectores nos da

$$[\alpha_1, \alpha_2] = \left( \frac{\partial_y \mu + \nu \partial_x u}{\mu^2 \nu} \right) \mathbf{F}_x + \left( \frac{-\partial_x \nu + \mu \partial_y u}{\mu \nu^2} \right) \mathbf{F}_y.$$

De esta forma, la condición  $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$  es equivalente a

$$\partial_y \mu = -\nu \partial_x u \quad y \quad \partial_x \nu = \mu \partial_y u. \quad (6.20)$$

Por definición, si  $\beta = u + \mathbf{i}v$ , se tiene

$$u = \operatorname{Re}(\beta) = -2\operatorname{Re}(z \operatorname{ctg}(\psi)),$$

y por lo tanto

$$\partial_x u = -2\operatorname{Re}(\operatorname{ctg}(\psi)) \quad y \quad \partial_y u = 2\operatorname{Im}(\operatorname{ctg}(\psi)). \quad (6.21)$$

Si escribimos  $\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2$ , se obtiene directamente  $\partial_x u = c_1$  y  $\partial_y u = c_2$  donde  $c_1$  y  $c_2$  son los definidos en la Ec. (6.19). Con esta definición de los  $c_i$ , las Ecs. (6.20) son equivalentes al sistema de Ecs. (6.18).

□

## Reformulación del teorema de representación

Con las funciones  $\mu$  y  $\nu$ , reformulamos el teorema 6.6.2 de la siguiente forma.

**Teorema 6.6.4.** *Sea  $G : \mathbb{C} \rightarrow S_{\mathbb{C}}^2$  definida en la Ec. (6.11), sea  $g : \mathbb{C} \rightarrow S_{\mathbb{C}}^3$  un levantamiento horizontal de  $G$  y sea  $\beta = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  cumpliendo la Ec. (6.13). Si  $\mu$  y  $\nu$  son soluciones no nulas del sistema de Ecs. (6.18) en un abierto simplemente conexo  $U \subset \mathbb{C}$ , entonces con*

$$\xi := g^{-1}(\omega_1 J + \omega_2 K) \widehat{g}, \quad (6.22)$$

donde

$$\omega_1 = \sin(u)\mu \, dx + \cos(u)\nu \, dy, \quad \omega_2 = -\cos(u)\mu \, dx + \sin(u)\nu \, dy \quad (6.23)$$

se tiene que

$$\mathbf{F} = \int \xi : U \rightarrow \mathbb{R}^{1,3},$$

define una superficie inmersa espacial con ángulo complejo constante  $\psi$ . Recíprocamente, salvo un movimiento rígido, dada una superficie inmersa espacial con ángulo complejo constante  $\psi$  y aplicación de Gauss regular se debe poder escribir de forma local en esta forma.

**Demostración:** Para demostrar esta reformulación del teorema 6.6.2, observamos que los campos duales de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  coinciden con los campos vectoriales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de las Ecs. (6.17). Además, si utilizamos el lema 6.6.3, al ser  $\mu$  y  $\nu$  soluciones de las Ecs. (6.18), se tiene que  $[\alpha_1, \alpha_2] = 0$ . Con esto tenemos una equivalencia con las condiciones del teorema 6.6.2.

□

Con esta reformulación, hemos pasado a trabajar directamente con la raíz cuadrada de los coeficientes de la métrica. Además, tenemos un sistema de ecuaciones en derivadas parciales análogo al caso euclídeo.

## Resolución del sistema (6.18) de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Veamos en esta sección cómo se resuelve este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Asumiremos que  $\psi_1 \neq 0$   $[\pi/2]$  y

$\psi_2 \neq 0[\pi/2]$  de forma que  $c_1$  y  $c_2 \neq 0$ . Recordemos que los casos donde se dan las igualdades, se estudiarán por separado. Para resolver este sistema, encontraremos las soluciones para la ecuación hiperbólica de segundo orden equivalente

$$\partial_{xy}^2 \zeta = -c_1 c_2 \zeta, \quad (6.24)$$

donde  $\zeta$  puede ser  $\mu$  o  $\nu$ , mientras la otra queda determinada usando una de las ecuaciones del sistema.

Esta ecuación es la misma que encontrábamos en el caso euclídeo, en concreto Ec. 3.11. Se puede resolver usando, otra vez, el método de Riemann que nos llevará a poder dar ejemplos que cumplan los resultados teóricos que encontramos, no descritos antes de nuestro trabajo en [4].

### 6.6.2 Aplicación del Teorema de representación

Para aplicar el teorema de representación de forma que no sólo tengamos existencia de superficies con ángulo complejo constante, sino que además podamos estudiar diferentes familias de este tipo de superficies, necesitamos estudiar qué propiedades deben cumplir los vectores tangentes y normales que obtenemos tras usar el teorema. Una vez que obtengamos los primeros resultados, veremos una lista de vectores explícitos que cumplen las condiciones necesarias.

### Construcción de una referencia compatible

Supongamos que tenemos una inmersión,  $\mathbf{F}$ , de la forma dada en el Teorema 6.6.4. Consideremos los vectores tangentes

$$T_1 := \frac{1}{\mu} \partial_x \mathbf{F} = \frac{1}{\mu} \xi(\partial_x) \quad y \quad T_2 := \frac{1}{\nu} \partial_y \mathbf{F} = \frac{1}{\nu} \xi(\partial_y). \quad (6.25)$$

Si utilizamos las expresiones de  $\xi$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  dadas en el Teorema 6.6.4, se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{F} &= \xi(\partial_x) \\ &= g^{-1}(\omega_1(\partial_x)J + \omega_2(\partial_x)K)\widehat{g} \\ &= \mu g^{-1}(\sin u J - \cos u K)\widehat{g}, \end{aligned}$$

y análogamente, se tiene que

$$\partial_y \mathbf{F} = \nu g^{-1}(\cos u J + \sin u K) \widehat{g}.$$

Si consideramos los vectores como elementos de  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{F} \widehat{\partial_y \mathbf{F}} &= (\mu g^{-1}(\sin u J - \cos u K) \widehat{g})(\nu g^{-1}(\cos u J + \sin u K) g) \\ &= \mu \nu g^{-1}((\sin u J - \cos u K) \widehat{g} g^{-1}(\cos u J + \sin u K)) g \\ &= \mu \nu g^{-1}((\sin u J - \cos u K)(\cos u J + \sin u K)) g \\ &= \mu \nu g^{-1} I g \\ &= \mu \nu G, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el lema 6.6.1. De esta manera, se tiene

$$T_1 \cdot T_2 = G.$$

Se concluye que  $\{T_1, T_2\}$  es una base del plano tangente positivamente orientada.

Para elegir una base del plano normal, dado que la elipse colapsa en un segmento, tomaremos los vectores normales que forman los extremos del segmento.

**Proposición 6.6.5.** *Para las superficies con ángulo complejo constante, la elipse de curvatura es un segmento que se puede escribir como  $[\frac{2}{\mu} N_1, \frac{2}{\nu} N_2]$  donde los vectores normales,  $N_1$  y  $N_2$ , son tal que  $|N_1|^2 = -|N_2|^2 = 1$  y  $\langle N_1, N_2 \rangle = 0$ . Lo que es más, se cumple que*

$$\mathbf{II}(T_1, T_1) = \frac{2}{\mu} N_1, \quad \mathbf{II}(T_2, T_2) = \frac{2}{\nu} N_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{II}(T_1, T_2) = 0. \quad (6.26)$$

*El vector  $N_2$  está dirigido hacia el futuro (tiene la misma orientación que el vector canónico temporal) y  $\{N_2, N_1\}$  es una base del plano normal positivamente orientada.*

**Demostración:** Si utilizamos la Prop. 6.5.1 y la Prop. 4.3.4, sabemos que  $K = k_N = 0$  y esto es equivalente a que la superficie es semiumbólica. Por lo tanto, la elipse de curvatura degenera a un segmento. Además, si

denotamos el segmento como  $[\alpha, \beta] \subset N_{x_0}M$ , dado que  $K = 0$ , se tiene  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ .

Veamos primero que  $\mathbf{II}(T_1, T_2) = 0$ . Si calculamos la diferencial de la aplicación de Gauss  $G = T_1 \wedge T_2$ , se tiene que

$$dG(w) = \mathbf{II}(T_1, w) \wedge T_2 + T_1 \wedge \mathbf{II}(T_2, w). \quad (6.27)$$

A la vez, llegamos a que

$$dG(w) = G' \cdot w = 2J \left\{ -\sin \left( \frac{2z}{\sin \psi} \right) + \cos \left( \frac{2z}{\sin \psi} \right) I \right\} w. \quad (6.28)$$

Si elegimos  $w = T_1 \simeq \frac{1}{\mu} \in \mathbb{C}$ , se tiene que  $H(dG(T_1), dG(T_1)) = \frac{4}{\mu^2}$ , lo que implica

$$\langle dG(T_1), dG(T_1) \rangle = \frac{4}{\mu^2} \quad \text{y} \quad dG(T_1) \wedge dG(T_1) = 0. \quad (6.29)$$

Si tomamos  $w = T_1$  en la Ec. (6.27), aplicando las Ecs. (6.29), llegamos a

$$\mathbf{II}(T_1, T_1) \wedge \mathbf{II}(T_1, T_2) = 0. \quad (6.30)$$

Vemos que esto implica que  $\mathbf{II}(T_1, T_2) = 0$ . De no ser así, recordemos que la elipse, definida en el capítulo 4 en la Ec. (4.2), es de la forma

$$\eta(\phi) = \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{II}(T_1, T_1) + \sin^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{II}(T_2, T_2) + \sin \phi \mathbf{II}(T_1, T_2),$$

esto es, que el vector  $\mathbf{II}(T_1, T_1) = \eta(0)$  pertenece a la elipse de curvatura mientras que el vector  $\mathbf{II}(T_1, T_2) = \eta'(0)$  es tangente a la elipse. Al ser la elipse de curvatura el segmento  $[\alpha, \beta]$ , podemos escribir

$$\mathbf{II}(T_1, T_1) = \alpha + \lambda(\beta - \alpha) \quad \text{y} \quad \mathbf{II}(T_1, T_2) = \lambda'(\beta - \alpha),$$

donde  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ . Se tiene que la Ec. (6.30) implica que  $\lambda' \alpha \wedge \beta = 0$ . Si fuese  $\lambda' \neq 0$ , se tendría  $\alpha \wedge \beta = 0$  y dado que  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ , entonces  $\alpha$  y  $\beta$  serían vectores nulos colineales. La norma de

$$dG(T_1) = \alpha \wedge T_2 + T_1 \wedge \lambda'(\beta - \alpha)$$

sería cero, en contradicción con la Ec. (6.29). Se concluye que  $\lambda' = 0$ , esto es  $\mathbf{II}(T_1, T_2) = 0$ .



Dado que  $\mathbf{II}(T_1, T_2) = 0$ , se tiene que  $\mathbf{II}(T_1, T_1)$  y  $\mathbf{II}(T_2, T_2)$  son los puntos extremales del segmento, es decir, podemos escribir

$$\alpha = \mathbf{II}(T_1, T_1) \quad \text{y} \quad \beta = \mathbf{II}(T_2, T_2).$$

Deducimos de la Ec. (6.27) que  $dG(T_1) = \alpha \wedge T_2$  y de la Ec. (6.29) que  $|\alpha|^2 = \frac{4}{\mu^2}$ . Por lo tanto, existe un vector espacial unitario  $N_1$  tal que  $\alpha = \frac{2}{\mu}N_1$ . De forma análoga, deducimos de la Ec. (6.27) y de la Ec. (6.28), tomando  $w = T_2 \simeq \frac{i}{\nu} \in \mathbb{C}$ , que

$$dG(T_2) = T_1 \wedge \beta = \frac{\mathbf{i}}{\nu}G',$$

lo que implica  $|\beta|^2 = -\frac{4}{\nu^2}$ . Por lo tanto, existe un vector temporal unitario  $N_2$  tal que  $\beta = \frac{2}{\nu}N_2$ .

Veamos que  $\{N_2, N_1\}$  es una base del plano normal positivamente orientada y que  $N_2$  está dirigido hacia el futuro. Por las Ecs. (6.26), (6.27) y (6.28), tomando  $w = T_1 \simeq \frac{1}{\mu}$  y  $w := T_2 \simeq \frac{i}{\nu}$ , se obtiene

$$2N_1 \cdot T_2 = G' \quad \text{y} \quad 2T_1 \cdot N_2 = iG'.$$

Ahora bien, se tiene que

$$G' = 2J \left( -\sin \left( \frac{2z}{\sin \psi} \right) + \cos \left( \frac{2z}{\sin \psi} \right) I \right)$$

con lo que  $(G')^2 = -4$  (como elemento de  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ ). Esto implica que

$$N_2 \cdot N_1 \cdot T_1 \cdot T_2 = \mathbf{i},$$

que coincide con la forma canónica de volumen  $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  de  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Concluimos que la base  $\{N_2, N_1, T_1, T_2\}$  está positivamente orientada en  $\mathbb{R}^{1,3}$ , lo que implica que  $\{N_2, N_1\}$  está positivamente orientada en  $NM$ .

Para acabar, falta comprobar que el vector  $N_2$  está dirigido hacia el futuro. Se tiene que el vector curvatura media, dado en la Ec. (6.16), es de la forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\mathbf{II}(T_1, T_1) + \mathbf{II}(T_2, T_2)) \\ &= \frac{1}{\mu}N_1 + \frac{1}{\nu}N_2 \\ &= (h_0 \sinh v + h_1 \cosh v)N_1 + (h_0 \cosh v + h_1 \sinh v)N_2 \\ &= h_0(\sinh v N_1 + \cosh v N_2) + h_1(\cosh v N_1 + h_1 \sinh v N_2). \end{aligned}$$

Como conocemos que sus coordenadas,  $h_0$  y  $h_1$ , son por hipótesis las coordenadas en una base normal con orientación positiva y dirigida al futuro, el vector  $\sinh v N_1 + \cosh v N_2$  está dirigido hacia el futuro, por lo tanto,  $N_2$  está dirigido hacia el futuro.

□

### 6.6.3 Expresiones explícitas de la referencia compatible

Aunque es un cálculo directo, las expresiones llegan a ser bastante inconvenientes para desarrollar en un texto. Para centrarnos en los resultados importantes, vamos a mostrar las expresiones finales que encontramos junto con las ideas básicas que se obtienen en los cálculos.

Los vectores tangentes se obtienen con el cálculo directo de las Ecs. (6.25) y se llega a

$$\begin{aligned} T_1 &= ( - \sinh (\psi_2) \cosh (\varphi_2), - \sinh (\psi_2) \sinh (\varphi_2), \\ &\quad \cosh (\psi_2) \sin (\varphi_1), \cosh (\psi_2) \cos (\varphi_1) ), \\ T_2 &= ( \sin (\psi_1) \sinh (\varphi_2), \sin (\psi_1) \cosh (\varphi_2), \\ &\quad - \cos (\psi_1) \cos (\varphi_1), \cos (\psi_1) \sin (\varphi_1) ), \end{aligned}$$

donde

$$\psi = \psi_1 + \mathbf{i}\psi_2 \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{2z}{\sin \psi} = \varphi_1 + \mathbf{i}\varphi_2.$$

Nótese que  $\psi$  es constante pero  $\varphi$  no lo es.

Si recordamos las definiciones de  $c_1$  y  $c_2$ , en la Ec. (6.19), tenemos las relaciones

$$\nabla T_1 = (c_1 dx + c_2 dy) T_2 \quad \text{y} \quad \nabla T_2 = -(c_1 dx + c_2 dy) T_1. \quad (6.31)$$

Junto con las propiedades que cumple la base normal, determinadas en la Prop. 6.6.5, se tiene que

$$dT_1 = (c_1 T_2 + 2N_1) dx + c_2 T_2 dy \quad \text{y} \quad dT_2 = -c_1 T_1 dx + (-c_2 T_1 + 2N_2) dy. \quad (6.32)$$

De esta forma, determinamos las expresiones de los vectores normales mediante

$$N_1 = \frac{(T_1)_x - c_1 T_2}{2} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{(T_2)_y + c_2 T_1}{2},$$

y se llega a

$$\begin{aligned} N_1 &= (\cos(\psi_1) \sinh(\varphi_2), \cos(\psi_1) \cosh(\varphi_2), \sin(\psi_1) \cos(\varphi_1), \\ &\quad - \sin(\psi_1) \sin(\varphi_1)), \\ N_2 &= (\cosh(\psi_2) \cosh(\varphi_2), \cosh(\psi_2) \sinh(\varphi_2), -\sinh(\psi_2) \sin(\varphi_1), \\ &\quad - \sinh(\psi_2) \cos(\varphi_1)). \end{aligned}$$

Análogamente, encontramos las siguientes relaciones

$$dN_1 = (-2T_1 + c_2N_2)dx - c_1N_2dy, \quad dN_2 = c_2N_1dx + (2T_2 - c_1N_1)dy, \quad (6.33)$$

y por lo tanto

$$\nabla^\perp N_1 = (c_2dx - c_1dy)N_2, \quad \nabla^\perp N_2 = (c_2dx - c_1dy)N_1. \quad (6.34)$$

Nótese que estas expresiones para la referencia,  $\{N_2, N_1, T_1, T_2\}$ , sólo dependen de la constante  $\psi$  y de las variables  $x$  e  $y$ . Según el Teorema 6.6.4, dado los coeficientes de la métrica apropiados, que resuelven el sistema de Ecs. (6.18), se determinará la inmersión mediante

$$\mathbf{F} = \int \mu T_1 dx + \nu T_2 dy. \quad (6.35)$$

Dado que  $T_1$  y  $T_2$  tienen ángulo complejo constante  $e_2 \wedge e_3$ , sabemos que  $\mathbf{F}$  tendrá ángulo complejo constante  $\psi$  con respecto al plano  $e_2 \wedge e_3$ .

### 6.6.4 Invariantes locales para las superficies de ángulo complejo constante

Si utilizamos  $\mathbf{F}_x = \mu T_1$  y  $\mathbf{F}_y = \nu T_2$ , junto con las expresiones de la sección anterior, se tiene que

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{xx} = \mu_x T_1 + \mu(T_1)_x = \mu_x T_1 + \mu(c_1 T_2 + 2N_1), \\ \mathbf{F}_{xy} = \mu_y T_1 + \mu(T_1)_y = \mu_y T_1 + \mu c_2 T_2, \\ \mathbf{F}_{yy} = \nu_y T_2 + \nu(T_2)_y = \nu_y T_2 + \nu(-c_2 T_1 + 2N_2). \end{cases}$$

La lista de coeficientes asociados a esta inmersión será

$$\begin{cases} E = \langle \mathbf{F}_x, \mathbf{F}_x \rangle = \mu^2, & F = \langle \mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y \rangle = 0, & G = \langle \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_y \rangle = \nu^2, \\ e_1 = \langle \mathbf{F}_{xx}, N_1 \rangle = 2\mu, & f_1 = \langle \mathbf{F}_{xy}, N_1 \rangle = 0, & g_1 = \langle \mathbf{F}_{yy}, N_1 \rangle = 0, \\ e_2 = \langle \mathbf{F}_{xx}, N_2 \rangle = 0, & f_2 = \langle \mathbf{F}_{xy}, N_2 \rangle = 0, & g_2 = \langle \mathbf{F}_{yy}, N_2 \rangle = 2\nu. \end{cases}$$

De forma directa, si usamos las fórmulas de la sección 4.3.1, se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 6.6.6.** *Los cuatro invariantes escalares locales de  $\mathbf{F}$  son*

$$K = k_N = 0, \quad |H|^2 = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\nu^2} \quad y \quad \Delta = -\frac{4}{\mu^2\nu^2}. \quad (6.36)$$

donde  $\mu^2 = \langle \mathbf{F}_x, \mathbf{F}_x \rangle$  y  $\nu^2 = \langle \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_y \rangle$ .

### Incompletitud de las superficies con ángulo complejo constante no nulo.

**Proposición 6.6.7.** *Una superficie espacial orientada en  $\mathbb{R}^{1,3}$  con aplicación de Gauss regular y ángulo complejo constante  $\psi \neq 0$   $[\pi/2]$ , no puede ser completa.*

**Demostración:** Recordemos que por la Ec. (6.19), la condición  $\psi \neq 0$   $[\pi/2]$  es equivalente a que  $c_1$  o  $c_2$  sean no nulos. Consideremos primero que  $c_1 \neq 0$ , se tiene entonces que

$$\left\langle \frac{1}{\mu} T_1, \partial x \right\rangle = 1 \quad y \quad \left\langle \frac{1}{\mu} T_1, \partial y \right\rangle = 0.$$

Esto implica que el gradiente de la función  $x$  en  $U$  es  $\nabla x = \frac{1}{\mu} T_1$ . Si consideramos la norma de este gradiente

$$f(t) = |\nabla x| = |\mu|^{-1},$$

a lo largo de una curva integral de  $T_2$ . Por la primera ecuación del sistema (6.18), se tiene que

$$(f^2)' = -2\mu^{-3} d\mu(T_2) = 2c_1\mu^{-3} = 2c_1 f^3.$$

Como  $f$  no se anula, la solución para esta ecuación diferencial sería

$$f(t) = \frac{-1}{t+k},$$

donde  $k \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, no puede definirse para todo valor  $t \in \mathbb{R}$ . Tenemos que el flujo de  $T_2$ , un campo unitario, no puede definirse para todo valor  $t \in \mathbb{R}$ , por lo tanto, la superficie no es completa.

Consideramos ahora que  $c_1 = 0$  y  $c_2 \neq 0$ . Tomamos de forma análoga la norma del gradiente en  $y$  dado por

$$g(t) = |\nabla y| = |\nu|^{-1},$$

a lo largo de una curva integral de  $T_1$ . Se tiene que  $(g^2)' = 2c_2g^3$  y se obtiene, de la misma forma, que la superficie no es completa.

□

*Nota 31.* En el caso de  $\psi = 0$   $[\pi/2]$ , las superficies son en realidad del producto de curvas. Se tienen expresiones del tipo  $\gamma_1 \times \gamma_2 \subset \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^2$  ( $\gamma_1$  de tipo espacial) y son superficies espaciales completas, con aplicación de Gauss regular y ángulo complejo constante  $\psi = \pi/2$   $[\pi]$ . De hecho, en la siguiente sección veremos que éstas son todas las superficies espaciales completas con ángulo complejo constante, salvo un movimiento rígido.

## 6.7 Caracterización de subfamilias de ángulo complejo constante

En esta sección vamos a estudiar diferentes subfamilias de superficies inmersas con ángulo complejo constante.

### Caracterización de superficies inmersas con ángulo complejo constante que son producto de curvas planas

Vamos a mostrar que, si una superficie tiene ángulo complejo constante de valor de  $\pi/2$   $[\pi]$ , entonces la superficie es producto de curvas planas.

**Teorema 6.7.1.** *Una superficie inmersa tiene ángulo complejo constante  $\psi = \pi/2$   $[\pi]$  con respecto a un plano espacial  $p_0$  si y sólo si es un producto de curvas,  $\gamma_1 \times \gamma_2$ , cada una de ellas en uno de los planos perpendiculares  $p_0$  y  $p_0^\perp$ .*

**Demostración:** Asumamos que  $p_0 = e_3 \wedge e_4$ , tras un posible movimiento rígido para la inmersión. Como  $\psi = \pi/2$   $[\pi]$ , entonces  $\psi_1 = \pi/2$   $[\pi]$  y  $\psi_2 = 0$ .

Se tiene que  $c_1 = c_2 = 0$  (recordemos sus definiciones en las Ecs. (6.19)) y con la Ec. (6.18) se implica que  $\mu$  sólo depende de  $x$ , y  $\nu$  sólo depende de  $y$ . Con esto, las fórmulas explícitas de  $T_1$  y  $T_2$ , vistas en la sección 6.6.3, se escriben como

$$T_1 = (0, 0, \sin 2x, \cos 2x) \quad \text{y} \quad T_2 = (-\sinh 2y, \cosh 2y, 0, 0).$$

De esta manera, la inmersión es

$$\mathbf{F} = \int \mu(x)T_1(x)dx + \nu(y)T_2(y)dy,$$

es decir,  $\mathbf{F}$  es equivalente al producto cartesiano de las curvas  $\int \mu(x)T_1(x)dx$  y  $\int \nu(y)T_2(y)dy$ , esto son las curvas que definen la superficie.

Recíprocamente, dado un producto de curvas  $\gamma_1 \times \gamma_2$  en  $\mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^2$  donde  $\gamma_1$  es una curva espacial dentro de su plano temporal. Si escribimos  $p_0 = \{\vec{0}\} \times \mathbb{R}^2$ ,  $T_1 = \gamma'_1/|\gamma'_1|$  y  $T_2 = \gamma'_2/|\gamma'_2|$ , el ángulo  $\psi$  entre la superficie  $\gamma_1 \times \gamma_2$  y  $p_0$  viene dado por

$$\cos \psi = H(p_0, T_1 \wedge T_2) = \langle p_0, T_1 \wedge T_2 \rangle + \mathbf{i} p_0 \wedge T_1 \wedge T_2 = 0,$$

lo que implica que  $\psi = \pi/2$  [ $\pi$ ].

□

## Caracterización de superficies inmersas con ángulo complejo constante real o imaginario puro

Para describir estas superficies, necesitamos utilizar el concepto de *tubo holonómico* sobre una curva. Esto es, la superficie generada por el transporte normal paralelo de los puntos de una curva  $c$  sobre una curva  $\gamma$ , donde  $c$  pertenece al plano normal de  $\gamma$ . De forma usual, se denomina a la curva  $c$  como los *puntos iniciales*.

**Teorema 6.7.2.** *Una superficie con ángulo complejo  $\psi = \psi_1 \in \mathbb{R}$  (resp. imaginario puro  $\psi = \mathbf{i}\psi_2 \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ ) con respecto a un plano espacial  $p_0$  es un tubo holonómico sobre una curva  $\gamma \in p_0$ . Además, si  $c \in N_{m_0}\gamma$  es la curva de puntos iniciales, entonces  $c$  es una hélice en el plano  $N_{m_0}\gamma \simeq \mathbb{R}^{1,2}$  con respecto una dirección espacial (resp. temporal).*

**Demostración:** Para el caso  $\psi_2 = 0$ , fijamos un punto  $m_0 = (x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$  y consideramos la curvas  $\gamma(x) := \mathbf{F}(x, y_0)$  y  $c(y) := \mathbf{F}(x_0, y)$ . Asumimos, sin pérdida de generalidad, que  $p_0$  es el plano  $\{0\} \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{1,1} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{1,3}$ . La curva  $\gamma$  es tangente dado que

$$\partial_x \gamma(x) = \partial_x \mathbf{F}(x, y_0) = T_1(x, y_0) = \left( 0, 0, \sin \left( \frac{2x}{\sin \psi_1} \right), \cos \left( \frac{2x}{\sin \psi_1} \right) \right), \quad (6.37)$$

donde estamos usando la expresión explícita de  $T_1$  en el caso  $\psi_2 = 0$ , o equivalentemente que  $c_2 = 0$ . Esto implica que la curva permanece en  $p_0$ . Comprobemos que la curva  $c$  pertenece al plano normal de  $\gamma$  en  $x_0$

$$\begin{aligned} \langle c(y) - \gamma(x_0), \gamma'(x_0) \rangle &= \langle \mathbf{F}(x_0, y) - \mathbf{F}(x_0, y_0), \partial_x \mathbf{F}(x_0, y_0) \rangle \\ &= \left\langle \int_{y_0}^y \partial_y \mathbf{F}(x_0, t) dt, \partial_x \mathbf{F}(x_0, y_0) \right\rangle \\ &= \int_{y_0}^y \mu(x_0, y_0) \nu(x_0, t) \langle T_2(x_0, t), T_1(x_0, y_0) \rangle dt. \end{aligned}$$

Esto es cero dado que  $T_1(x_0, y_0) = T_1(x_0, t)$  es ortogonal a  $T_2(x_0, t)$  (nótese que la Ec. (6.37) implica que  $T_1(x_0, t)$  no depende de  $t$ ).

Para comprobar que la curva  $c$  es una hélice en  $N_{m_0} \gamma$ , consideramos su vector tangente que será

$$\begin{aligned} \partial_y c(y) &= \partial_y \mathbf{F}(x_0, y) \\ &= T_2(x_0, y) \\ &= (\sin \psi_1 \sinh \varphi_2, \sin \psi_1 \cosh \varphi_2, -\cos \psi_1 \cos \varphi_1, \cos \psi_1 \sin \varphi_1), \end{aligned}$$

y si  $\vec{A} = (0, 0, -\cos \varphi_1, \sin \varphi_1)$ , es la dirección fija en  $N_{m_0} \gamma$ , se tiene

$$\langle T_2(x_0, y), \vec{A} \rangle = \cos \psi_1.$$

Por lo que  $c$  es una curva con ángulo constante  $\psi_1$  con respecto a la dirección  $\vec{A}$ . La prueba para  $\psi = i\psi_2 \in i\mathbb{R}$  es análoga.

□

## Caracterización de superficies inmersas con ángulo complejo constante en una hipersefera o en un cono de luz

En esta sección vamos a describir una forma general para la inmersión distinta a la usada anteriormente. En vez de utilizar la base canónica, utilizaremos la base del plano tangente y del normal para describir la propia inmersión.

### Descripción alternativa de la inmersión con ángulo constante complejo

Dado que  $\{T_1, T_2, N_1, N_2\}$  es una base del espacio, podemos escribir la inmersión como

$$\mathbf{F} = f T_1 + \tilde{f} T_2 + g N_1 + \tilde{g} N_2, \quad (6.38)$$

donde  $f, \tilde{f}, g$  y  $\tilde{g}$  son funciones reales en las variables  $x$  y  $y$ . Estas funciones tienen que cumplir ciertas propiedades necesarias.

**Teorema 6.7.3.** *Supongamos que  $\psi_1 \neq 0$   $[\pi/2]$  y  $\psi_2 \neq 0$   $[\pi/2]$  (es decir  $c_1, c_2 \neq 0$ ) y que  $\mu$  y  $\nu$  son soluciones de las Ecs. (6.18), entonces la inmersión se puede escribir como*

$$\mathbf{F} = f T_1 + \frac{\partial_y f}{c_2} T_2 + g N_1 + \frac{\partial_y g}{c_1} N_2, \quad (6.39)$$

donde  $f$  y  $g$  son soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_x f = \mu + \frac{(4 + c_1^2)g - \partial_{yy}^2 g}{2}, & \partial_y f = \frac{c_2(c_1^2 g - \partial_{yy}^2 g)}{2c_1}, \\ \partial_x g = -\frac{c_2}{2}\nu + \frac{(c_2^2 - 4)f + \partial_{yy}^2 f}{2}, & \partial_y g = \frac{c_1}{2}\nu - \frac{c_1(c_2^2 f + \partial_{yy}^2 f)}{2c_2}, \\ \partial_{xy}^2 f = -c_1 c_2 f, & \partial_{xy}^2 g = -c_1 c_2 g. \end{array} \right. \quad (6.40)$$

*Recíprocamente, dadas dos funciones  $f$  y  $g$  que resuelven este sistema de ecuaciones en derivadas parciales para dos funciones  $\mu$  y  $\nu$  que son a su vez soluciones de las Ecs. (6.18), la inmersión  $\mathbf{F}$  dada por la Ec. (6.39) es espacial de ángulo complejo constante.*

La ventaja de esta descripción alternativa es que obtenemos directamente la inmersión,  $\mathbf{F}$ , a partir de las funciones  $\mu$  y  $\nu$  cuando tenemos las soluciones  $f$  y  $g$ . Veamos primero la demostración antes de aplicar este resultado.



**Demostración:** Sea  $\mathbf{F}$  una inmersión con ángulo constante complejo,  $\psi$ , con coeficientes  $E = \mu^2$ ,  $F = 0$  y  $G = \nu^2$ . Definimos la funciones

$$f = \langle \mathbf{F}, T_1 \rangle, \quad \tilde{f} = \langle \mathbf{F}, T_2 \rangle, \quad g = \langle \mathbf{F}, N_1 \rangle \quad \text{y} \quad \tilde{g} = -\langle \mathbf{F}, N_2 \rangle,$$

tal que se cumple la Ec. (6.38). Si recordamos la Ec. (6.26), se tiene que

$$\begin{aligned} df &= \langle d\mathbf{F}, T_1 \rangle + \langle \mathbf{F}, dT_1 \rangle \\ &= \langle \mu T_1 dx + \nu T_2 dy, T_1 \rangle + \langle \mathbf{F}, (c_1 dx + c_2 dy)T_2 + 2N_1 dx \rangle \\ &= (\mu + c_1 \tilde{f} + 2g)dx + c_2 \tilde{f} dy, \end{aligned}$$

y de forma similar, tenemos

$$\begin{aligned} d\tilde{f} &= -c_1 f dx + (\nu - c_2 f - 2\tilde{g})dy, \\ dg &= (-2f - c_2 \tilde{g})dx + c_1 \tilde{g} dy, \\ d\tilde{g} &= -c_2 g dx + (c_1 g - 2\tilde{f})dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que  $\tilde{f} = \frac{\partial_y f}{c_2}$ ,  $\tilde{g} = \frac{\partial_y g}{c_1}$ . Además,  $f$  y  $g$  satisfacen las Ecs. (6.40).

Recíprocamente, si  $f, g$  son soluciones de las Ecs. (6.40), entonces los cálculos directos, usando las Ecs. (6.32) y (6.33), muestran que la función  $\mathbf{F}$  definida por la Ec. (6.39) satisface  $\mathbf{F}_x = \mu T_1$  y  $\mathbf{F}_y = \nu T_2$ . Esto es equivalente a que la aplicación de Gauss de esta inmersión sea  $G = T_1 \wedge T_2$ .

Finalmente, se tiene que  $H(I, G) = \cos \psi$  (que podemos comprobar directamente con las expresiones explícitas  $T_1$  y  $T_2$  en la sección 6.6.3), es decir, que tiene ángulo constante complejo  $\psi$  con respecto al plano  $p_0 = I$  (como elemento de  $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ ).

□

*Nota 32.* El sistema de las Ecs. (6.40) es en realidad equivalente al sistema formado sólo por las cuatro primeras ecuaciones y una de las dos últimas. Se puede comprobar que, por ejemplo, la sexta ecuación se puede deducir de las otras cinco.

### Aplicación para la caracterización de superficies inmersas con ángulo complejo constante con imagen en una esfera de Lorentz

Veamos ahora el resultado que describe la subfamilia de superficies inmersas con ángulo complejo cuya imagen está contenida en una esfera de Lorentz.

**Corolario 6.7.4.** *Si utilizamos la misma notación de esta sección, se tiene:*  
 1. *Una inmersión  $\mathbf{F}$  con ángulo complejo constante pertenece a una esfera del espacio de Lorentz si y sólo si*

$$\mu = r_1 e^{c_1 y - c_2 x} + r_2 e^{-(c_1 y - c_2 x)},$$

y

$$\nu = -r_1 e^{c_1 y - c_2 x} + r_2 e^{-(c_1 y - c_2 x)},$$

para unas constantes reales  $r_1, r_2 \neq 0$ . En este caso, salvo una traslación, se tiene que  $|\mathbf{F}|^2 = r_1 r_2$ .

2. *Una inmersión  $\mathbf{F}$  con ángulo complejo constante pertenece a una esfera de radio cero, un cono de luz, si y sólo si*

$$\mu = r e^{\epsilon(c_1 y - c_2 x)} \quad y \quad \nu = -\epsilon r e^{\epsilon(c_1 y - c_2 x)}, \quad (6.41)$$

para una constante  $r \neq 0$  y  $\epsilon = \pm 1$ .

Además, la inmersión en ambos casos puede escribirse, salvo una traslación, de la forma

$$\mathbf{F} = \frac{-\mu N_1 + \nu N_2}{2},$$

donde  $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^{1,3}$  son los campos descritos de forma explícita en la sección 6.6.2.

**Demostración:** Si utilizamos la descripción alternativa del teorema 6.7.3, podemos escribir la inmersión  $\mathbf{F}$  como

$$\mathbf{F} = f T_1 + \frac{\partial_y f}{c_2} T_2 + g N_1 + \frac{\partial_y g}{c_1} N_2,$$

donde  $f$  y  $g$  son soluciones del sistema de las Ecs. (6.40). Si suponemos que  $\mathbf{F}$  tiene norma constante, entonces  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{F}_x \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{F}_y \rangle = 0$ , o equivalentemente,  $f = 0$ . El sistema se simplifica y se tiene para  $g$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu + \frac{(4 + c_1^2)g - \partial_{yy}^2 g}{2}, \quad 0 = c_1^2 g - \partial_{yy}^2 g, \\ \partial_x g = -\frac{c_2}{2} \nu, \quad \partial_y g = \frac{c_1}{2} \nu, \quad \partial_{xy}^2 g = -c_1 c_2 g. \end{array} \right.$$

Si recordamos las condiciones sobre  $\mu$  y  $\nu$ , esto eran las Ecs. (6.18), entonces la cuarta ecuación es

$$\partial_y g = \frac{c_1}{2} \nu = -\frac{\partial_y \mu}{2},$$

por lo tanto

$$g(x, y) = -\frac{\mu(x, y)}{2} + t(y),$$

para alguna función  $t$ . La última condición se transforma en

$$\partial_{xy}^2 g = -\frac{1}{2} \partial_{xy}^2 \mu = \frac{1}{2} c_1 c_2 \mu - c_1 c_2 t.$$

Si utilizamos otra vez las condiciones sobre  $\mu$  y  $\nu$ , en este caso usando que  $\partial_{xy}^2 \mu = -c_1 c_2 \mu$ , se tiene que  $t(y) = 0$ . Si escribimos  $g = -\frac{\mu}{2}$  y quitamos las duplicidades, el sistema de las Ecs. (6.40) queda reducido en

$$\partial_{yy}^2 \mu = c_1^2 \mu, \quad \partial_x \mu = c_2 \nu, \quad \partial_y \mu = -c_1 \nu, \quad \partial_{xy}^2 \mu = -c_1 c_2 \mu,$$

cuyas soluciones son

$$\mu = r_1 e^{c_1 y - c_2 x} + r_2 e^{-(c_1 y - c_2 x)} \quad \text{y} \quad \nu = -r_1 e^{c_1 y - c_2 x} + r_2 e^{-(c_1 y - c_2 x)},$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son números reales. Con esto obtenemos

$$\mathbf{F} = g N_1 + \frac{\partial_y g}{c_1} N_2 = -\frac{\mu}{2} N_1 - \frac{\partial_y \mu}{2 c_1} N_2 = \frac{-\mu N_1 + \nu N_2}{2},$$

cuya norma es

$$|\mathbf{F}|^2 = \frac{\mu^2 - \nu^2}{4} = r_1 r_2.$$

Para terminar, la imagen de la inmersión pertenecerá a un cono de luz si y sólo si  $r_1$  o  $r_2 = 0$ , lo que incluye ambos casos del enunciado.

□

*Nota 33.* En particular, la segunda parte del corolario muestra que las superficies definidas en la Ec. (6.10), salvo una congruencia y un cambio de escala, son las únicas con ángulo complejo constante cuya imagen está en un cono de luz.

**Corolario 6.7.5.** *Sea  $M$  una superficie espacial con ángulo complejo constante  $\psi \neq 0$   $[\pi/2]$ , entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- a)  $H \in \Gamma(NM)$  es paralelo,  
 b)  $H$  es de tipo luz,  
 c) El parámetro  $z = x + \mathbf{i}y \in U$  es conforme, o equivalentemente,  $\mu = \nu$  en  $U$ .

Además, si se cumple alguna de estas propiedades, entonces la imagen de la superficie inmersa pertenece a un cono de luz, o equivalentemente, salvo una congruencia, tiene la forma de la Ec. (6.10).

**Demostración:** Como  $\beta = u + \mathbf{i}v$  es una función holomorfa y con la Ec. (6.20), se tiene que

$$\partial_y v = \partial_x u = -\frac{1}{\nu} \partial_y \mu.$$

Si recordamos la Ec. (6.16), se deduce que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_y \mu}{\mu^2} &= \partial_y h_0 \sinh v + \partial_y h_1 \cosh v + (h_0 \cosh v + h_1 \sinh v) \partial_y v \\ &= \partial_y h_0 \sinh v + \partial_y h_1 \cosh v - \frac{1}{\nu^2} \partial_y \mu, \end{aligned}$$

esto es,

$$\left( \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\mu^2} \right) \partial_y \mu = \partial_y h_0 \sinh v + \partial_y h_1 \cosh v.$$

Si usamos la expresión de la curvatura media en la Ec. (6.36), se llega a que

$$-|H|^2 \partial_y \mu = \partial_y h_0 \sinh v + \partial_y h_1 \cosh v. \quad (6.42)$$

De forma similar, tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial_x \nu}{\nu^2} &= \partial_x h_0 \sinh v + \partial_x h_1 \cosh v + (h_0 \cosh v + h_1 \sinh v) \partial_x v \\ &= \partial_x h_0 \sinh v + \partial_x h_1 \cosh v - \frac{1}{\mu^2} \partial_x \nu, \end{aligned}$$

y llegamos a que

$$|H|^2 \partial_x \nu = \partial_x h_0 \cosh v + \partial_x h_1 \sinh v. \quad (6.43)$$

Entonces, por las Ecs. (6.20) y (6.21), se tiene que

$$\frac{1}{\nu} \partial_y \mu + \mathbf{i} \frac{1}{\mu} \partial_x \nu = -\partial_x u + \mathbf{i} \partial_y u = 2 \operatorname{ctg} \psi.$$

Si aplicamos las Ecs. (6.42) y (6.43), se llega a

$$2|H|^2 \operatorname{ctg} \psi = -\frac{1}{\nu}(\partial_y h_0 \sinh v + \partial_y h_1 \cosh v) + \mathbf{i} \frac{1}{\mu}(\partial_x h_0 \cosh v + \partial_x h_1 \sinh v).$$

Como  $h_0$  y  $h_1$  son las componentes del vector curvatura media  $H$  en una base paralela del plano normal, esta expresión implica la equivalencia entre (a) y (b). La equivalencia entre (b) y (c) es una consecuencia de las Ecs. (6.36). Si suponemos las ecuaciones (a)-(c), entonces  $\mu = \nu$ . El sistema de las Ecs. (6.18) implica directamente que  $\mu$  y  $\nu$  son de las formas dadas en las Ecs. (6.41). El corolario 6.7.4 completa la última implicación.

□

## 6.8 Ejemplos

Vamos a acabar con ejemplos explícitos dentro y fuera de esferas de Lorentz. Todos estos ejemplos surgen tras aplicar el Teorema 6.7.3 y sus corolario. A partir de una solución  $\mu$  de la Ec. (6.24), encontramos funciones  $f$  y  $g$  que resuelven el sistema de las Ecs. (6.40) para obtener la inmersión  $\mathbf{F}$  dada por la Ec. (6.39). Dado que son cálculos directos, vamos a escribir directamente las expresiones finales.

### Inmersión contenida en esfera de Lorentz, solución $\mu = 2 \sinh(c_1 y - c_2 x)$

Si utilizamos el Cor. 6.7.4, sabemos que si queremos una inmersión en una esfera de Lorentz entonces  $\mu$  es de la forma

$$\mu = r_1 e^{c_1 y - c_2 x} + r_2 e^{-(c_1 y - c_2 x)}.$$

Si tomamos  $r_1 = -r_2 = 1$  tenemos el caso particular  $\mu = 2 \sinh(c_1 y - c_2 x)$  y, si utilizamos otra vez el Cor. 6.7.4, entonces  $\nu = 2 \cosh(c_2 x + c_1 y)$ . Para asegurarnos que la inmersión es regular, tenemos que asumir que  $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$  en donde se cumple que  $c_1 y \neq c_2 x$ , para que  $\mu \neq 0$ . La expresión final de la inmersión quedará

$$\mathbf{F} = -\sinh(c_1 y - c_2 x)N_1 + \cosh(c_1 y - c_2 x)N_2,$$

cuya norma es  $|\mathbf{F}|^2 = -1$ .

## Inmersión no contenida en esfera de Lorentz ni en cono de luz, solución $\mu = \sin(c_1y + c_2x)$

Para esta  $\mu = \sin(c_1y + c_2x)$ , obtenida como solución de la Ec. (6.24), le corresponde  $\nu = -\cos(c_2x + c_1y)$ . Para asegurarnos que la inmersión es regular, tenemos que asumir que definimos la inmersión en un abierto de  $\mathbb{R}^2$  donde  $\sin(c_1y + c_2x) \neq 0$  y  $\cos(c_2x + c_1y) \neq 0$ . Utilizamos el Teorema 6.7.3 y elegimos las funciones auxiliares  $f$  y  $g$

$$f(x, y) = \cos(c_2x + c_1y), \quad g(x, y) = -\sin(c_2x + c_1y),$$

que cumplen las condiciones necesarias. De esta forma, la inmersión final quedará

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \cos(c_2x + c_1y)c_2T_1 - \sin(c_2x + c_1y)c_1T_2 - \\ &\quad - \sin(c_2x + c_1y)N_1 - \cos(c_2x + c_1y)N_2 \\ &= -c_2\nu T_1 - c_1\mu T_2 - \mu N_1 + \nu N_2, \end{aligned}$$

cuya norma es

$$|\mathbf{F}|^2 = (c_1^2 + 1)\nu^2 + (c_2^2 - 1)\mu^2 = (c_1^2 + 1)\cos^2(c_2x + c_1y) + (c_2^2 - 1)\sin^2(c_2x + c_1y).$$

## Ejemplo más complejo, solución $\mu = (c_1y - c_2x)(\sin(c_1y + c_2x) + \cos(c_1y + c_2x))$

A diferencia de los casos anteriores, en este ejemplo vemos una solución suma de funciones trigonométricas

$$\mu = (c_1y - c_2x)(\sin(c_1y + c_2x) + \cos(c_1y + c_2x)).$$

Para esta solución tenemos que

$$\nu = (1 - c_1y + c_2x)\cos(c_1y + c_2x) - (1 + c_1y - c_2x)\sin(c_1y + c_2x).$$

Para asegurarnos que la inmersión es regular, tenemos que asumir que trabajamos en el subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\mu\nu \neq 0$ . Para utilizar el Teorema 6.7.3, podemos elegir las funciones auxiliares  $f$  y  $g$  dadas por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c_2((2 + c_1^2 - c_2^2)(c_1y - c_2x)(\cos(c_1y + c_2x) + \sin(c_1y + c_2x)) \\ &\quad + (c_1^2 + c_2^2)(\cos(c_1y + c_2x) - \sin(c_1y + c_2x))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (2 + c_1^2 - c_2^2)(c_1y - c_2x)(\cos(c_1y + c_2x) - \sin(c_1y + c_2x)) \\ &\quad - (c_1^2 + c_2^2)(\cos(c_1y + c_2x) + \sin(c_1y + c_2x)). \end{aligned}$$

Mediante la Ec. (6.39) tenemos la inmersión final.

# Bibliografía

- [1] L. J. Alías y J. A. Pastor. Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz-Minkowski space. *Journal of Geometry and Physics*, 28(1):85–93, (1998).
- [2] P. Bayard. On the spinorial representation of spacelike surfaces into 4-dimensional Minkowski space. *J. Geom. Phys.*, 74:289–313, (2013).
- [3] P. Bayard, A. J. Di Scala, O. O. Castro, y G. Ruiz-Hernández. Surfaces in  $\mathbb{R}^4$  with constant principal angles with respect to a plane. *Geom. Dedicata*, 162:153–176, (2013).
- [4] P. Bayard, J. Monterde, y R. C. Volpe. Constant angle surfaces in 4-dimensional Minkowski space. *J. Geom. Phys.*, 144:126–146, (2019).
- [5] P. Bayard y F. Sánchez-Bringas. Geometric invariants of surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *Topology Appl.*, 159(2):405–413, (2012).
- [6] P. Bayard y F. Sánchez-Bringas. Geometric invariants and principal configurations on spacelike surfaces immersed in  $\mathbb{R}^{3,1}$ . *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 140(6):1141–1160, (2010).
- [7] L. Bers. *Riemann surfaces*. New York University, Institute of Mathematical Sciences, (1958).
- [8] B. Chen. On an inequality of T. J. Willmore. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26:473–479, (1970).
- [9] D. V. Cuong. The bi-normal fields on spacelike surfaces in  $\mathbb{R}_1^4$ . *Asian-European Journal of Mathematics*, 09(03):52–165, (2016).



- 
- [10] M. Dajczer y R. Tojeiro. All superconformal surfaces in  $\mathbb{R}^4$  in terms of minimal surfaces. *Math. Z.*, 261(4):869–890, (2009).
- [11] M. P. Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhauser, Boston, (1992).
- [12] T. Friedrich. *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, volume 25. Graduate Studies in Mathematics, (2000).
- [13] J. A. Gálvez y P. Mira. Isometric immersions of  $\mathbb{R}^2$  into  $\mathbb{R}^4$  and perturbation of Hopf tori. *Math. Z.*, 266(1):207–227, (2010).
- [14] G. Ganchev y V. Milousheva. Timelike surfaces with zero mean curvature in minkowski 4-space. *Israel Journal of Mathematics*, 196:413–434, (2011).
- [15] G. Ganchev y V. Milousheva. An invariant theory of spacelike surfaces in the four-dimensional minkowski space. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 9(2):267–294, (2012).
- [16] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, y A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser Boston, (2008).
- [17] S. Izumiya, M. C. Romero-Fuster, M. A. Soares, y F. Tari. *Differential geometry from singularity theory viewpoint*. World Scientific, New Jersey, (2016).
- [18] S. Jiang. Angles between Euclidean subspaces. *Geom. Dedicata*, 63(2):113–121, (1996).
- [19] N. S. Koshyakov, M. M. Smirnov, y E. B. Gliner. *Differential equations of mathematical physics*. North-Holland Publishing Company, (1964).
- [20] J. A. Little. On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 83:261–335, (1969).
- [21] J. Monterde. Construction of non-hyperspherical immersions. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 43(2):303–332, (2012).
- [22] J. Monterde y R. C. Volpe. Characterization of spherical immersions of surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 47(12):1037–1049, (2016).

- [23] J. Monterde y R. C. Volpe. Explicit immersions of surfaces in  $\mathbb{R}^4$  with arbitrary constant Jordan angles. *Geometriae Dedicata*, in peer review.
- [24] A. Montesinos-Amilibia. Invariants of the second fundamental form. *Matemàtiques*, 5:119–140, (2010).
- [25] S. M. Moraes y M. C. Romero-Fuster. *Convexity and semiumbilicity for surfaces in  $\mathbb{R}^5$* . Differential geometry, Valencia, (2001).
- [26] S. M. Moraes y M. C. Romero-Fuster. Semiumbilics and 2-regular immersions of surfaces in Euclidean spaces. *Rocky Mountain J. Math.*, 35(4):1327–1345, (2005).
- [27] M. Navarro, O. Palmas, y D. A. Solis. Principal configurations around umbilics of spacelike surfaces in null hypersurfaces of  $\mathbb{R}_1^4$ . *Differential Geometry and its Applications*, 67:10–53, (2019).
- [28] Y. A. Neretin. On Jordan angles and the triangle inequality in Grassmann manifolds. *Geom. Dedicata*, 86(1-3):81–92, (2001).
- [29] R. Osserman. *A survey on minimal surfaces*. Dover Publications, New York, (1986).
- [30] V. H. Patty-Yujra y G. Ruiz-Hernández. Timelike surfaces in minkowski space with a canonical null direction. *Journal of Geometry*, 109:312–348, (2018).
- [31] M. C. Romero-Fuster y F. Sánchez-Bringas. Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in  $\mathbb{R}^4$ . *Differential Geom. Appl.*, 16(3):213–224, (2002).
- [32] J. M. M. Senovilla. Classification of spacelike surfaces in spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 24(11):3091–3124, (2007).
- [33] K. Tenenblat. *Transformation of manifolds and applications to differentials equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, London, (1998).