UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Profesor/a de Educación Secundaria

Creatividad en alumnos de talento matemático

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:
Óscar Roldán Blay

Tutorizada por:
Dr. Irene Ferrando Palomares
Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Valencia, 2 de septiembre de 2019

Ficha técnica (todos los campos son obligatorios excepto el resumen en inglés):

Máster: Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València

Especialidad: Matemáticas

Autor: Apellidos: Roldán Blay
Nombre: Óscar

Título de la memoria: Creatividad en alumnos de talento matemático

Tutor: Apellidos: Ferrando Palomares
Nombre: Irene
Departamento: Didáctica de las Matemáticas

Fecha de defensa:

Calificación (numérica y Matr. de Honor si procede):

Palabras clave: Talento matemático, Flexibilidad, Creatividad, Tareas de resolución múltiple.

Keywords: Mathematical giftedness, Flexibility, Creativity, Multiple-Solution Tasks.

Códigos Unesco: 5803.02 (Formación de profesores), 12 (Matemáticas) y 1299 (Didáctica de las Matemáticas)

Resumen: En el presente trabajo hacemos un estudio exploratorio en el que pretendemos medir la creatividad en relación con el talento matemático, basándonos en los trabajos de Roza Leikin (con su permiso). Seleccionamos dos muestras de alumnos, una formada por estudiantes de entre 15 y 17 años participantes en el programa ESTALMAT (dirigido a estudiantes con talento matemático), y la otra formada por alumnos del máster, con una sólida formación matemática. A cada participante, le pasamos un test con 4 problemas de matemáticas que son tareas de resolución múltiple, y les pedimos que den tantas soluciones como puedan de cada uno en un cierto límite de tiempo. Después, analizamos los resultados, tanto individualmente como comparativamente en grupo. Dadas las condiciones del experimento y el tamaño reducido de la muestra, los resultados son meramente orientativos.

Abstract: In this project, we will perform an exploratory study in which we try to measure creativity regarding mathematical giftedness, basing it on the works of Roza Leikin (with her permission). We selected two samples of students, one formed by students between 15 and 17 years old participating in the ESTALMAT program (aimed at students with mathematical giftedness), and the other formed by students of the master's degree, with a solid mathematical background. We gave each student a test with 4 mathematics problems, which are multiple-solution tasks, and we asked them to give as many solutions as they could to each of them with a certain time limit. After that, we analyzed the results, both individually and in groups. Given the conditions of the experiment and the small size of the samples, the results obtained in this study are merely indicative.

Índice

1 – Introducción

La profesora Roza Leikin (Universidad de Haifa, Israel), experta en sobredotación y excelencia académica, es un referente mundial en la investigación sobre creatividad y talento matemático, y tiene varias publicaciones en ese campo. En (Leikin 2011) y (Leikin 2013) propone las llamadas Multiple-Solution Tasks (MST) -tareas matemáticas para las que hay múltiples formas distintas de resolverlas- como una herramienta muy útil en sus estudios, pues por una parte, sirven para entrenar a alumnos y profesores, y por otra, permiten medir la creatividad de un alumno al enfrentarse a problemas matemáticos. Esta herramienta se fundamenta en la idea de que la creatividad tiene tanto un componente de originalidad como un componente de flexibilidad (es decir, ser capaces de usar múltiples estrategias para abordar los problemas matemáticos). Más adelante, en el apartado dedicado al marco teórico, se explicarán estos conceptos con más detalle.

Leikin (2013) hace un estudio que relaciona la creatividad con el talento matemático en alumnos de instituto usando Multiple-Solution Tasks. Escoge una muestra de 38 alumnos superdotados con talento matemático, otra de alumnos otra de 38 alumnos superdotados sin talento matemático, otra de 51 alumnos no superdotados con talento matemático, y otra de 57 alumnos no superdotados y sin talento matemático. A cada alumno le propone resolver una MST (un sistema de ecuaciones muy concreto) y, mediante un modelo de puntuación que explicaremos más adelante, evalúa la creatividad de cada alumno y de cada grupo de alumnos, concluyendo que el grupo de alumnos superdotados con talento matemático era, con diferencia, el que más creatividad presentaba.

Inspirados en las ideas de ese artículo y con permiso de Roza Leikin, en este Trabajo de Fin de Máster hemos hecho un estudio a pequeña escala con características y objetivos similares. El objetivo principal de este Trabajo Final de Máster es analizar la relación que existe entre el talento matemático y aspectos como la creatividad y la flexibilidad a la hora de resolver problemas de matemáticas. Para ello hemos seleccionado dos grupos de alumnos, unos con talento matemático del curso de veteranos del proyecto ESTALMAT de la Comunitat Valenciana, y los otros con formación matemática sólida de entre el alumnado del máster de profesorado de matemáticas, y les hemos pedido que resuelvan 4 problemas de matemáticas de tantas formas como fueran capaces. Después hemos recogido todas las resoluciones y las hemos estudiado.

El trabajo se va a estructurar de la siguiente manera. En primer lugar, se detallarán los trabajos que han ayudado a fundamentar y desarrollar este estudio y que constituyen su marco teórico. A continuación, en la sección de metodología, se describirá el proceso de elección de las tareas y de los participantes, además, se explicará cómo se ha llevado a cabo la experiencia y, finalmente, se mostrarán los criterios en que se ha basado el análisis de las producciones de los participantes. En la sección de resultados se describirán de forma objetiva los resultados del análisis. Por último, en la sección de conclusiones, se discutirán los resultados obtenidos y la experiencia en general, se mostrarán las limitaciones del presente estudio y las posibles líneas de trabajo futuro.

2 – Marco teórico

Últimamente, y cada vez más, se está estudiando la problemática de los alumnos superdotados y de altas capacidades matemáticas. En la LOMCE, en el artículo 57, se incluye a los alumnos de altas capacidades intelectuales dentro del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo, y en el artículo 58 se indica que hay que identificar y valorar cuanto antes cualquier caso de alumno de altas capacidades y adoptar el plan de actuación pertinente en cada caso para que los alumnos alcancen su máximo desarrollo personal.

El problema con los alumnos de altas capacidades es que muchas veces no se les identifica, o se les identifica pero no se les proporciona una formación adaptada a su propio nivel. Como indican Jaime y Gutiérrez (2014), a menudo el problema surge porque a los profesores no se les ha formado para atender al alumnado con altas capacidades, y no disponen de materiales específicos con los que atender las necesidades de dichos alumnos, lo cual hace que alumnos capaces de hacer grandes aportaciones científicas y con ganas de aprender cosas que no saben, se vean continuamente frustrados a causa de un currículo oficial en el que se considera al alumnado como un grupo homogéneo.

Es conveniente remarcar que no significa lo mismo alumno superdotado y alumno de altas capacidades matemáticas. Un alumno superdotado destaca en la mayoría o totalidad de ramas, mientras que un alumno con altas capacidades matemáticas presenta un talento excepcional en matemáticas, pero no tiene por qué destacar en el resto de ramas. Jaime y Gutiérrez (2014) exponen una extensa lista de características que suelen presentar los alumnos de altas capacidades matemáticas, entre las que podemos destacar las siguientes: formular preguntas más allá de la tarea, flexibilidad, originalidad, reconocimiento de patrones y relaciones, estrategias eficientes, simplificación de procesos, rapidez para aprender y resolver problemas, generalización y transferencia. En particular, destaca su rapidez y su originalidad a la hora de resolver problemas.

Polya (1945) hizo un estudio sobre la resolución de problemas donde planteó una serie de heurísticos para resolver problemas entre los que podemos destacar la generalización de resultados. Shapiro (1965) apunta que en alumnos con altas capacidades, el desarrollo de las generalizaciones se da a edades tempranas y Daydov (1990) añade que la generalización es inseparable de las operaciones con lo abstracto. Por su parte, Krutetskii (1976) hizo un estudio analizando la habilidad de generalizar en estudiantes tanto “normales” como talentosos. Este estudio resultó clave para caracterizar tres tipos de razonamiento matemático en los alumnos cuyas características resumimos a continuación basándonos en la descripción de Callejo (1994):

- El tipo analítico, caracterizado por un predominio de la componente lógico-verbal y una componente visual-pictórica débil. Este tipo de alumnos suele intentar enfrentarse a problemas de forma analítica incluso si el contexto sugiere plantearlos geométricamente.
- El tipo geométrico, caracterizado por una componente visual-pictórica más desarrollada que la lógico-verbal. Este tipo de alumnos suele interpretar todo visualmente e intenta trabajar más sobre imágenes que sobre fórmulas y texto.
- El tipo armónico, capaz de usar tanto esquemas visuales como fórmulas abstractas y pasar de un modelo a otro. Generalmente, a los alumnos de altas capacidades matemáticas se les asocia este tipo de razonamiento.

En las últimas décadas se han hecho más estudios con el fin de verificar y analizar la relación que existe entre el talento matemático y ciertas características como son la habilidad de resolver problemas. Sriraman (2003) hizo un estudio que verifica que hay una relación entre el talento matemático, la habilidad en la resolución de problemas, y la habilidad para generalizar. Mann (2006) afirma que muchas veces se clasifica a los alumnos por altas capacidades basándose en su expediente cuando en realidad un buen expediente no siempre implica que el alumno tenga altas capacidades, y nombra la creatividad como un componente esencial en las matemáticas.

Una vez establecidas las características de los alumnos de talento, conviene preguntarse qué acciones se pueden tomar para tratar adecuadamente a los alumnos con altas capacidades matemáticas. Jaime y Gutiérrez (2014) escriben una lista bastante completa de posibles acciones a tomar distinguiendo entre aquellas que pueden desarrollarse en el ámbito escolar y aquellas que no:

- Formas de apoyo escolar: aceleración (adelantar de curso en una o varias materias), agrupamiento (juntar a alumnos con niveles parecidos), enriquecimiento curricular (dar formación matemática complementaria al currículo, rica y variada) y profundización (darles actividades complementarias integradas en los temas del curso).
- Formas de apoyo extraescolar: talleres matemáticos, concursos y olimpiadas matemáticas, juegos, asociaciones como ESTALMAT (Estímulo del Talento Matemático) y AVAST (Asociación Valenciana de Ayuda al Superdotado y el Talentoso), campamentos de matemáticas y páginas web (como Nrich o Brilliant).

El proyecto ESTALMAT nació en Madrid en 1998, gracias a un profesor de matemáticas llamado Miguel de Guzmán, apoyado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, como medio para detectar y estimular el talento precoz en matemáticas; véase De Guzmán (s. f.). Se trata de un proyecto que, anualmente, selecciona a cientos de estudiantes españoles de unos 12 años en base a cómo de creativos son resolviendo problemas, y se les entrena extraescolarmente en matemáticas no curriculares para potenciar su talento lo máximo posible. En la Comunitat Valenciana, el proyecto se estableció en 2007 gracias a Rafael Crespo, antiguo decano de la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València, y su éxito es indiscutible: cada año se apuntan más participantes; se ha creado la Asociación de Familiares y Amigos de ESTALMAT (ASFAMES) que colabora con el proyecto en su objetivo; y además, anualmente, los ganadores de las olimpiadas matemáticas de ESO y Bachillerato son casi siempre alumnos de ESTALMAT en su mayoría. ESTALMAT en general fomenta el aprendizaje matemático basado en la resolución de problemas. Miralles (2008) explica cómo fue el inicio de ESTALMAT en la Comunitat Valenciana, describe el proceso de selección y el diseño del programa en su primera edición, que fue durante el curso 2007-2008.

La profesora Doctora Roza Leikin, directora del Departamento de Didáctica de las Matemáticas en la Facultad de Educación de la Universidad de Haifa (Israel), y directora del centro interdisciplinario RANGE (Centro para la Investigación y Avance en Superdotación y Excelencia) es un referente mundial en Educación Matemática en la investigación sobre creatividad y talento matemático (Costa, 2018). Su producción científica en Educación Matemática es muy prolífica, con más de cien artículos y decenas de capítulos de libros y otros en las últimas décadas. Una buena parte de su bibliografía está, en efecto, dirigida a estudios sobre el talento matemático y cómo tratarlo, o a cómo entrenarse como profesor. Leikin y otros (2006) publicaron un estudio sobre la recepción y efecto que tenía entre el alumnado una experiencia basada en la promoción de las búsqueda de diferentes soluciones para una misma tarea matemáticas (es decir, si en lugar de hacer múltiples tareas sobre un mismo tema hacían una misma tarea de distintas formas). Los resultados de este estudio muestran que, en contra de las expectativas de muchos profesores, la recepción y el efecto de esta experiencia fueron positivos.

Como afirman Leikin y Lev (2007), es comúnmente aceptado que relacionar ideas matemáticas y entender cómo se puede abordar problemas de diferentes formas es un elemento esencial en el desarrollo del razonamiento matemático. Como indica Leikin en ese artículo, Polya (1945) incide en que resolver problemas de múltiples formas caracteriza al matemático con experiencia, porque requiere mucho conocimiento matemático, y Krutetskii (1976) afirma que los problemas con múltiples resoluciones permiten estudiar la flexibilidad del pensamiento matemático individual, al permitir investigar los cambios que se hacen de una operación mental a otra.

¿Qué entendemos por tareas de resolución múltiple? Leikin (2011) resume la idea de la siguiente forma. Una MST es una tarea en el que al alumno se le pide explícitamente resolver un problema de matemáticas de diferentes formas. Dos soluciones se consideran diferentes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

a) Se basan en representaciones diferentes de algunos conceptos matemáticos involucrados en la tarea.
b) Se basan en propiedades (definiciones o teoremas) diferentes de objetos matemáticos de un mismo campo en particular.
c) Se basan en propiedades diferentes de un objeto matemático en campos distintos.

En este estudio, Leikin pone como ejemplo a esta definición tres problemas de matemáticas y un listado de posibles soluciones a cada uno. Los enunciamos a continuación en castellano:

> Problema 1: Probar que en cualquier triángulo rectángulo, la mediana que une el vértice del ángulo recto con el punto medio de la hipotenusa, mide igual que media hipotenusa.
>
> Problema 2: Si a y b son dos números que suman 1, ¿Qué relación hay entre $a^2 + b$ y $a + b^2$?
>
> Problema 3: De todos los rectángulos con un mismo perímetro, ¿cuál es el que tiene la diagonal más pequeña?

En cuanto a las soluciones que propone, tenemos:

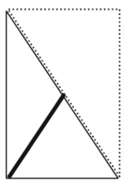
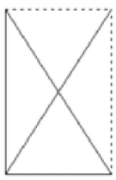
<table>
<tr><td colspan="7">Problema 1</td></tr>
<tr><td>Sol 1</td><td>Sol 2</td><td>Sol 3-5</td><td>Sol 6</td><td>Sol 7</td><td>Sol 8</td><td>Sol 9-12</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Duplicar triángulo por hipotenusa</td><td rowspan="3">Duplicar mediana</td><td rowspan="3">Construir altura, mediana o línea media en triángulo pequeño</td><td rowspan="3">Circunscribir triángulo</td><td rowspan="3">Duplicar triángulo por cateto</td><td rowspan="3">Construir un pequeño triángulo isósceles</td><td>Teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>Semejanza</td></tr>
<tr><td>Geometría analítica</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Vectores</td></tr>
</table>

Tabla 1: Soluciones propuestas al problema 1 por Leikin (2011), imágenes del artículo original.

Las soluciones 1-8 se basan en distintas construcciones auxiliares. Este problema se propone como ejemplo en el que hay soluciones que se basan en propiedades (definiciones o teoremas) diferentes de objetos matemáticos de un mismo campo en particular.

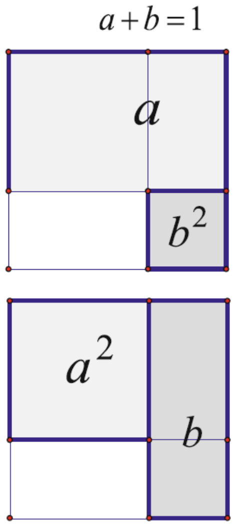
Problema 2			
Sol 1	Sol 2	Sol 3	Sol 4
Manipulación algebraica	Dar valores a la expresión cuadrática en 3 puntos	Usar identidades notables	Un diagrama
Por ejemplo, hacer $a = 1 - b$ y sustituirlo en la expresión original para llegar a la igualdad.	Por ejemplo, usar $a = 1, b = 0$ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ $a = \frac{1}{5}, b = \frac{4}{5}$ en la expresión cuadrática obtenida al restar esos números para concluir que todos los coeficientes valen cero.	Usar que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ para llegar a la igualdad.	

Tabla 2: Soluciones propuestas al problema 2 por Leikin (2011), imagen del artículo original.

Este problema se propone como ejemplo en el que hay soluciones que se basan en representaciones diferentes de algunos conceptos matemáticos involucrados en la tarea.

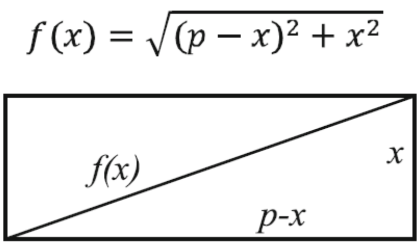
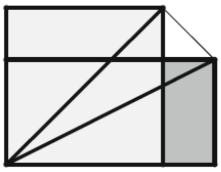
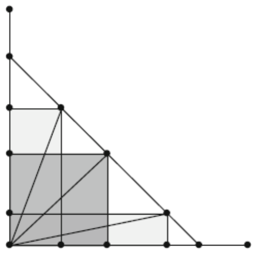
Problema 3			
Sol 1	Sol 2	Sol 3	Sol 4
Cálculo: función derivada	Álgebra: función cuadrática bajo la raíz	Consideraciones de simetría: comparar con la diagonal del cuadrado	Geometría analítica: el lugar geométrico de los vértices es $y = p - x$, la diagonal más corta es la altura del triángulo
			

Tabla 3: Soluciones propuestas al problema 3 por Leikin (2011), imágenes del artículo original.

Este problema se propone como ejemplo en el que hay soluciones que se basan en propiedades diferentes de un objeto matemático en campos distintos.

En el trabajo de Leikin (2011) se propone el uso de las las MST como forma para entrenar a profesores, pero también se han propuesto para otras cosas, como son evaluar la creatividad de estudiantes (Leikin y Lev 2007, Leikin 2013) y evaluar el pensamiento matemático en geometría (Leikin 2009). Para analizar las soluciones a MST, es necesario contar con un conjunto detallado de las soluciones posibles a dicho problema. Esto es lo que Leikin y Lev (2007) llaman espacios de soluciones de MST (*Solution Spaces* en el original). En ese artículo, hacen toda una categorización de espacios de soluciones:

- Los espacios individuales de soluciones pueden ser de dos tipos: los personales, que los individuos pueden dar en el momento, sin ayuda de otros; y los potenciales, que incluyen soluciones obtenidas con ayuda de otros.
- Los espacios colectivos de soluciones caracterizan soluciones hechas por un grupo de individuos.
- Los espacios expertos de soluciones (que incluyen tanto los espacios de soluciones convencionales recomendadas en el currículo, como los espacios de solución no convencionales, no introducidas en el currículo en general). Incluyen tanto los espacios de soluciones individuales como los colectivos.

Para poder analizar la calidad de una solución, es necesario poder incluirla dentro de estos espacios expertos de soluciones. En el artículo proponen una forma de evaluar la creatividad de los estudiantes a través de las MST, mediante estos espacios expertos de soluciones. Para ello, son fundamentales los siguientes 4 conceptos, claramente explicados por Leikin (2013):

- Fluidez (en inglés, *fluency*): se refiere a la continuidad de ideas, flujo de asociaciones y uso de conocimiento básico y universal.
- Flexibilidad (en inglés, *flexibility*): está asociado con los cambios de ideas, afrontar problemas de múltiples formas y obtener múltiples soluciones.
- Originalidad (en inglés, *originality*): caracterizado por una forma única de pensar y productos de actividad mental o artística únicos. Es el principal componente de la creatividad.
- Elaboración (en inglés, *elaboration*): la capacidad de describir, iluminar y generalizar ideas.

Por último, se considera que en la creatividad influye tanto ser flexible como ser original. En el artículo original de Leikin y Lev (2007), proponen una forma de asignar puntos de flexibilidad y originalidad según una escala 2-4-6 de puntos en cada solución (siendo 2 poco y 6 mucho). Esa escala es suficiente para sacar conclusiones de un estudio, pero más tarde se dieron cuenta de que usando esa escala, de un resultado final no eran capaces de deducir los resultados individuales (por ejemplo, 12 puntos de originalidad en 3 soluciones podrían ser tanto $2+4+6$ como $4+4+4$, y son dos situaciones distintas entre sí). Es por ello que Leikin (2013) describe una nueva forma de puntuar, usando una escala $0{,}1$-1-10 (una originalidad de $23{,}5$ puntos en 10 soluciones sólo pueden ser obtenidas con dos soluciones con 10 puntos, tres con 1 y cinco con $0{,}1$). Además, en este artículo definen el valor de creatividad de una solución como su flexibilidad multiplicada por su originalidad, puesto que ambos factores influyen en la creatividad. En el artículo sugiere el siguiente ejemplo (más adelante en el trabajo se explicará más en detalle cómo funciona el sistema de puntuaciones propuestos):

> Problema: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones de tantas formas distintas como puedas:
>
> $$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$$
>
> Espacio de soluciones:
>
> 1. Soluciones algebraicas.
>   a. Sustitución.
>   b. Igualación.
>   c. Reducción.
> 2. Graficar.
> 3. Usar matrices.
> 4. Usar consideraciones de simetría.

En este caso, poca originalidad sería la solución 1, normal sería la 2, y mucha serían la 3 y la 4. Y en cuanto a la flexibilidad, dos soluciones de campos distintos es ser muy flexible (la 2 y la 3, por ejemplo), dos del mismo campo es normal (sustitución e igualación), y dos casi idénticas es ser poco flexible (igualación con x e igualación con y).

Tanto en el artículo original de Leikin y Lev (2007) como en el nuevo artículo de Leikin (2013), se hicieron experimentos en los que se escogía una muestra de alumnos superdotados, una muestra de alumnos talentosos en matemáticas y una muestra de alumnos regulares, y se le dieron a cada uno una serie de tareas para que las resuelvan de tantas formas como sean capaces, y luego proceden a hacer un subsiguiente estudio de la fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad de estos alumnos, concluyendo en ambos casos que los alumnos superdotados con talento matemático solían destacar en creatividad bastante por encima del resto de alumnos.

3 – Metodología

3.1 – Elección de la tarea

El objetivo principal del trabajo es analizar la relación que existe entre el talento matemático y aspectos como la creatividad y la flexibilidad a la hora de resolver problemas de matemáticas. Basándonos en el trabajo de Leikin (2013), y contando con su permiso para hacerlo, hemos diseñado una experiencia a pequeña escala con el fin de estudiar los aspectos mencionados.

La experiencia consistía en proponerles 4 problemas de matemáticas para que los resolvieran de tantas formas distintas como fueran capaces contando con un tiempo limitado en un total de 2 horas (se decidió limitarlo a 2 horas, esta decisión se comentará más adelante). Para la elección de los problemas, hemos aprovechado enunciados para los que ya sabíamos de partida que había una gran variedad de formas de resolverlos. Cuando Roza Leikin habla de las *MST* en (Leikin, 2011), para explicar el significado exacto que ella le da a este tipo de tareas, expone 3 ejemplos y da esquemáticamente toda una lista de posibles caminos para afrontar y resolver cada uno de ellos. Hemos decidido usar esos 3 problemas en nuestra experiencia por ese motivo, porque ya sabíamos de antemano que había varias formas de resolverlos, y además porque se trataba de enunciados que pueden entender los estudiantes de ESO y Bachillerato.

Además de estos 3 problemas, decidimos añadir un problema que propuse anteriormente para una Olimpiada Matemática de la ESO, la Al-Khwatizmi de la SEMCV, porque también se adaptaba a las características que buscábamos, y además es más complicado que los otros 3 propuestos, lo que da lugar a estudiar otras cosas, como si ante un problema difícil ayuda más el talento matemático o la formación matemática:

> Problema 4: En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 y 12. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita?

Si bien el estudio realizado es pequeño y, por tanto, sus conclusiones son más bien orientativas y sus resultados, exploratorios, su reducido tamaño permite analizar con mucho nivel de detalle una gran cantidad de factores: cuántas soluciones se ofrecen, en qué orden, cuál es la primera de todas que se les ocurrió, o cuáles son los valores de creatividad calculados según la fórmula que propone Leikin (2013). Respecto al número, 4 problemas nos parecieron suficientes para el experimento que hemos realizado, comprendiendo también que todos los participantes lo hacían de forma voluntaria, interrumpiendo sus posibles quehaceres para dedicarnos una parte de su tiempo.

Más adelante en el trabajo, describiremos posibles resoluciones de estos 4 problemas.

3.2 – Elección de los participantes

Para realizar el experimento se han hecho dos grupos diferenciados de participantes, para poder analizar por separado las distintas características de cada grupo, y poder hacer alguna comparación entre los grupos después. Todos los participantes han decidido acceder de forma voluntaria a hacer la experiencia.

El primer grupo está compuesto por 5 estudiantes actuales del Máster Universitario en Profesor/a de Secundaria (especialidad Matemáticas) de la Universitat de València. Se trata de personas que han finalizado con éxito sus estudios en los Grados de Matemáticas o Física, es decir, se adaptan al perfil de personas que tienen una formación matemática sólida. Sus edades respectivas son 22, 22, 22, 23 y 24 años. Si bien se trata de alumnos con una sólida formación matemática, a ninguno de ellos se les ha dado formación complementaria por altas capacidades ni se les ha formado en resolución de problemas como tal hasta este curso. El criterio para elegirlos ha sido la calificación obtenida en la materia dedicada a resolución de problemas del máster: se ha elegido a aquellos alumnos que han sacado las mejores notas (excluyendo al autor de este trabajo)

El segundo grupo está formado por 6 alumnos que participan en un programa dirigido a estudiantes de altas capacidades matemáticas. En efecto, se trata de alumnos que en su día fueron admitidos en el proyecto ESTALMAT de la Comunitat Valenciana y que, actualmente, forman parte del grupo de veteranos del programa. Se trata de alumnos muy despiertos, que participan de forma activa en todo tipo de olimpiadas matemáticas y competiciones, amén de otras actividades de formación matemática complementaria a la recibida en la educación reglada. Dos de los alumnos, de 15 y 16 años respectivamente, van a 4º de ESO, y los otros 4 son alumnos de 1º de Bachiller, y sus edades respectivas son 16, 16, 16 y 17 años.

Nuestro objetivo es estudiar muchas variables de cada uno de los grupos: ver si hay relación entre los miembros de un mismo grupo, ver si hay diferencias significativas entre miembros de ambos grupos, ver si de primeras intentan resolver los problemas de forma algebraico-analítica o si optan por caminos geométricos, analizar cómo de eficientes y cómo de formales son, y discutir sobre la creatividad de cada alumno y cada grupo de alumnos en términos de Leikin.

3.3 – Experiencia

En este apartado comentaremos cómo se ha llevado a cabo la experiencia. Una vez escogidos los voluntarios, comenzó la fase de planificar la experiencia. La idea inicial era que todos los participantes de cada grupo hicieran la prueba simultáneamente y, por tanto, con las mismas condiciones. Eso habría sido ideal, pero las circunstancias lo complicaron enormemente y hubo que cambiar de estrategia para ajustarnos a las restricciones de los participantes. Así pues, se tuvieron que establecer unas instrucciones claras y todos los participantes se comprometieron a cumplirlas:

- La experiencia se debe realizar en un tiempo total de 2 horas.
- No se puede consultar apuntes, a otras personas, internet, ni otros durante la prueba, ni recibir ningún tipo de pista o ayuda, y tampoco hacer trampas.

Si bien los perfiles de los voluntarios indican que, dado que estaban comprometidos con la tarea y con el presente estudio, seguirían las instrucciones acordadas, una de las limitaciones del presente trabajo es que no hay forma de comprobar que los participantes realmente cumplieran las normas.

La decisión de que el límite de tiempo fuera de 2 horas es algo que hablamos mi tutora y yo. En efecto, desde un punto de vista metodológico, era necesario poner un límite de tiempo fijo para que todos estuvieran en las mismas condiciones, y el tiempo tenía que ser razonable: ni demasiado poco (porque se trataba de que resolvieran los problemas de muchas formas), ni demasiado (porque estar concentrado en una misma tarea mucho tiempo hace que se baje el rendimiento, además de que cada participante tenía su propia carga personal de trabajo). Yo mismo, que en su día fui miembro de ESTALMAT y participé en decenas de olimpiadas y competiciones y sigo siendo aficionado a la resolución de problemas, me puse a prueba, y vi que 2 horas daban para encontrar bastantes soluciones de todos los problemas.

Una vez decidido el límite de tiempo y aceptadas las normas básicas de participación, se les proporcionaron las instrucciones para participar en la experiencia, que a continuación se reproducen tal y como se presentaron a los participantes:

- Resuelve estos 4 problemas por tantos caminos distintos como se te ocurran.
- Tienes un total de 2 horas para hacerlo (30 minutos aprox. por pregunta), no dediques más que eso ni hagas ningún tipo de trampa.
- Al terminar, escanea tus soluciones y envíamelas a oscar.roldan@uv.es (como asunto puedes poner, por ejemplo, “Problemas TFM Óscar”).
- No hace falta ser excesivamente formal. Lo que más me importa es el procedimiento, la creatividad, más que si te has equivocado en alguna operación o algo así.
- Puedes usar calculadora y material de dibujo si quieres.

3.4 – Análisis

Una vez recogidas todas las soluciones, hay que analizarlas. Todo va a ser codificado de una forma cómoda para poder trabajar con todos los datos de una forma más eficiente.

A los alumnos se les asignará la letra A, seguida de una letra (M si es del Máster y E si es de ESTALMAT) y un número del 1 al 11 (AM1, AM2, …), de forma que los primeros 5 se corresponden con los alumnos del máster y los últimos 6 se corresponden con los estudiantes del proyecto ESTALMAT.

A los problemas se les va a asignar la letra P seguida del número del problema, numerados en el mismo orden en el que fueron presentados en el trabajo (P1, P2, P3 y P4).

Vamos a presentar una base de datos de soluciones de los problemas, esto es, un espacio de soluciones, y las vamos a codificar de la siguiente forma: S, seguida del número de problema, y una letra, en orden alfabético, de forma que las soluciones del problema 1, por ejemplo, serán S1a, S1b, S1c, y así sucesivamente, e igual con el resto de problemas. En esta sección vamos a mostrar las ideas principales de dos de las soluciones de cada problema (en el Anexo 1 se pueden consultar el resto de soluciones planteadas), y más adelante, en la sección de resultados veremos cuáles de nuestras soluciones han encontrado los participantes, o si incluso han encontrado alguna que no estaba prevista.

Estudiaremos las aportaciones de cada participante de forma individual, y luego estudiaremos posibles semejanzas y diferencias entre miembros de un mismo grupo o entre miembros de grupos distintos. Estudiaremos los siguientes aspectos:

- Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad en términos de Leikin (2013).
- Primera solución que han dado. Normalmente, cuando tienes que dar soluciones a un problema en un límite de tiempo, la primera solución que se escribe es distintiva. Puede ser que sea la primera que se te ha ocurrido, puede que se te hayan ocurrido varias y pongas la más corta, o la que más seguridad te da. Esto nos puede dar una idea de cómo piensan los participantes y de si están más cómodos razonando analíticamente o geométricamente.

Podemos analizar también otros aspectos de los participantes:

- El grado de formalidad con el que presentan sus soluciones (Alto: dominan las matemáticas formales, definen todo lo que van a usar, asignan nombres a todo lo que necesita tenerlo, escriben los detalles, las referencias al dibujo son claras, argumentan bien sus deducciones; Medio: son menos formales escribiendo, se conforman con el dibujo a la hora de definir cosas, razonan deductivamente, obvian algunos detalles; Bajo: definen las cosas en referencia al dibujo o no las definen, son poco formales escribiendo y razonando, se dejan pasos por hacer).
- Cómo de eficientes son, entendiendo la eficiencia como el uso económico del tiempo y el espacio de trabajo (buscar soluciones cortas, escribir sólo las cosas que sean necesarias, ocupar poco espacio a la hora de expresar sus ideas).

- El estilo de razonamiento de su primera solución, es decir, cómo han abordado de primeras el problema (geométricamente, algebraicamente, analíticamente…).
- El estilo de razonamiento en general en el problema, no refiriéndonos a su primera solución esta vez, sino al global de sus soluciones.

Como comentábamos en el marco teórico, Leikin (2013) propone un refinamiento de su sistema de puntuación que explicaremos a continuación, y que será el que nosotros usaremos en el trabajo:

- Fluidez: simplemente se cuenta la cantidad de resoluciones correctas (entendiendo esto en un sentido amplio de razonamiento encaminado a la solución correcta aunque haya alguna errata o algún error de cálculo).
- Flexibilidad: se suman 10 puntos por cada solución que pertenezca a grupos distintos de soluciones dentro de la base de datos de soluciones (por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones algebraicamente o resolverlo graficando). Se suma 1 punto por cada solución que pertenezca a un grupo de soluciones al que ya pertenecía una de las soluciones dadas (por ejemplo, resolver un sistema por sustitución y resolverlo por reducción, ambos son manipulaciones algebraicas de las ecuaciones). Por último, se suman 0,1 puntos por cada solución que es casi idéntica a otra solución ya dada (por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones por igualación igualando las x, y resolverlo por igualación igualando las y). Una puntuación de 0,1 (potencia negativa de 10), dice Leikin, refleja la falta de razonamiento crítico del estudiante (esencial para la flexibilidad) y la inhabilidad para reconocer que dos soluciones proporcionadas son idénticas). Esta forma de puntuar la flexibilidad nos permite saber, viendo el resultado final, cuántas soluciones de cada tipo se han dado (siempre y cuando no se haya llegado a 10 soluciones de un mismo tipo, claro. Si se llegase a 10 soluciones de un tipo, se puede reformular fácilmente la puntuación a una escala 100-1-0,01): por ejemplo, si un alumno obtiene un valor de 31,2 de flexibilidad, eso nos dice que hay 3 soluciones de grupos distintos, 1 solución de un grupo ya mencionado, y 2 soluciones casi idénticas a soluciones ya dadas.
- Originalidad: de nuevo, se va a usar un sistema decimal bastante similar al de la flexibilidad. Se sumarán 10 puntos por soluciones perspicaces, que se salen por completo de lo convencional (por ejemplo, demostrar que $\sqrt[3]{2}$ es irracional usando que la ecuación $2q^3 = p^3$, reescrita $q^3 + q^3 = p^3$, no puede tener soluciones enteras por el Último Teorema de Fermat). Se sumará 1 punto por soluciones poco convencionales, basadas en modelos o en estrategias aprendidas en otros contextos (por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones graficando). Por último, se sumarán 0,1 puntos por cada solución algorítmica, la que te han enseñado o has aprendido específicamente para

resolver ese tipo de problemas (por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución). El porqué de este tipo de puntuaciones es idéntico al apartado de flexibilidad. Leikin (2013) sugiere que es interesante valorar la originalidad tanto de forma relativa (cuantitativamente, comparando al individuo con el grupo) como de forma absoluta (cualitativamente, estudiando al individuo en sí).

- Creatividad: la creatividad de cada problema se define como el producto de su flexibilidad y su originalidad, y la creatividad total es la suma de los valores de creatividad de cada solución. Esto se basa en que para ser creativo es importante ser flexible y ser original. Un número alto de creatividad dice que hay buena flexibilidad y buena originalidad; un número bajo se dice que hay poca flexibilidad y poca originalidad; y un número intermedio significa que falta algo. Por ejemplo, un valor de creatividad total de 123,45, si no hay demasiadas soluciones, indicaría que hay 1 problema con valores de flexibilidad y originalidad 10 y 10, 2 problemas con valores 10 y 1, 3 problemas compensados, 4 problemas con valores 0,1 y 1, y 5 problemas con valores 0,1 y 0,1.

Veamos un ejemplo para aclararlo mejor. Imaginemos que queremos responder a la siguiente pregunta:

Problema 0: Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Supongamos que obtenemos las siguientes soluciones:

S0a) Usamos la fórmula de las ecuaciones de 2º grado y obtenemos que las soluciones son $x = 3$ y $x = 7$.

S0b) Usamos la Regla de Ruffini. Probamos con los divisores de 21. Nos damos cuenta de que el 3 y el 7 son raíces.

S0c) Por las Fórmulas de Cardano-Vieta, sabemos que la suma de las raíces es 10 y su producto es 21, así que buscamos dos números que sumen 10 que multiplicados den 21, y éstos números son el 3 y el 7.

S0d) Si hacemos la gráfica de la parábola (ya sea dando valores, o con la calculadora o como sea), parece que las raíces sean 3 y 7, y al comprobarlo, se observa que sí verifican la ecuación.

S0e) Completamos cuadrados: $x^2 - 10x + 21 = (x-5)^2 - 4$. Podemos despejar x fácilmente de ahí, y nos da $x = 3$ y $x = 7$ como soluciones.

S0f) Partimos de $x^2 - 10x + 21 = 0$. Hacemos un cambio de variable conveniente para que no haya términos de grado 1: $x = y + 5$. La ecuación que obtenemos es, tras operar,

$y^2 - 4 = 0$, que tiene de soluciones $y = -2$ e $y = 2$. Deshacemos el cambio y obtenemos las dos soluciones buscadas, $x = 3$ y $x = 7$.

S0g) Partimos de $x^2 - 10x + 21 = 0$. Hacemos un cambio de variable conveniente para que no haya términos de grado 0: $x = y + 3$ (también serviría $x = y + 7$). La ecuación que obtenemos es, tras operar, $y^2 - 4y = 0$, que tiene de soluciones $y = 0$ e $y = 4$. Deshacemos el cambio y obtenemos las dos soluciones buscadas, $x = 3$ y $x = 7$.

S0h) El vértice de la parábola está en $x = 5$ (varias formas de averiguarlo: con la fórmula, con la derivada, usando que $f(0) = f(10)$…). Una vez tenemos el vértice, las soluciones de la ecuación deberán ser puntos simétricos con respecto a 5, esto es, $5 + a$ y $5 - a$. Sustituyéndolos en la ecuación obtenemos que $a = \pm 2$, y por tanto las soluciones son $x = 3$ y $x = 7$.

S0i) Averiguamos que el vértice está en el punto $(5, -4)$. Como el coeficiente de x^2 es 1, si trasladamos todo según el vector $\vec{v} = (-5, 4)$, el problema de que la primera parábola valga 0 es equivalente a que la nueva parábola, x^2, valga 4, lo cual ocurre en ± 2, por lo que deshaciendo la traslación, las soluciones son x $= 3$ y $x = 7$.

S0j) Partimos de un número cualquiera y le aplicamos un método iterativo (por ejemplo el de Newton-Raphson, definido por $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 10x_n + 21}{2x_n - 10}$). Eventualmente, las iteraciones se aproximan mucho a 3 o a 7. Una vez tienes una de las soluciones, a, para averiguar la otra puedes usar el método que quieras, por ejemplo dividir el polinomio original entre $(x - a)$ y ver qué da el cociente.

Hemos hecho un muestreo de 10 soluciones distintas que podríamos esperar a la pregunta inicial. Veamos cómo evaluar la creatividad con estas soluciones. Comencemos con la flexibilidad. Podríamos agrupar las soluciones de esta forma:

- Operar con los coeficientes (fórmula, Ruffini, Cardano-Vieta): S0a, S0b, S0c. Obtendríamos 10 puntos por la primera solución, 1 punto por la segunda solución (ya que pertenece al mismo grupo de soluciones), y 1 punto por la tercera solución (dado que pertenece al mismo grupo que las otras soluciones). Eso suma un total de 12 puntos.
- Manipulación algebraica directa (completar cuadrados, cambio de variable): S0e, S0f, S0g (la última podemos considerar que usa ideas muy similares a S0f). Obtendríamos 10 puntos por la primera solución, 1 punto por la segunda solución porque pertenece al mismo grupo de soluciones que la primera, y 0,1 puntos por la tercera solución porque no sólo pertenece al mismo grupo, sino que además se basa en ideas casi idénticas a las usadas en una de las otras soluciones. Eso suma un total de 11,1 puntos.

- Razonamiento geométrico usando la gráfica (gráfica, trasladar la gráfica): S0d, S0i. Obtendríamos 10 puntos por la primera solución, y 1 punto por la segunda, puesto que pertenece al mismo grupo de soluciones. Eso suma un total de 11 puntos.
- Razonamiento por simetría: S0h. Obtendríamos 10 puntos.
- Métodos iterativos: S0j. Obtendríamos 10 puntos.

En total, si encontramos todas esas soluciones, obtenemos 54,1 puntos de flexibilidad con esta clasificación. Veamos ahora cómo evaluar la originalidad. Para ello, es necesario determinar qué soluciones son algorítmicas y convencionales, cuáles son poco convencionales, y cuáles se salen por completo de lo convencional. Vamos a aplicar los mismos criterios para todos para poder compararlos, sean de instituto o de universidad, por lo que vamos a hacer la clasificación poniéndonos en el contexto de alumnos de instituto con altas capacidades matemáticas:

- Soluciones algorítmicas, convencionales: para un alumno con esas características, usar la fórmula, Ruffini o la gráfica es altamente esperable. Cada una sumará 0,1 puntos.
- Soluciones poco convencionales pero sin salirse en exceso de lo esperable: si el alumno ha recibido un mínimo de formación complementaria en resolución de problemas, es esperable que se le ocurra usar Cardano-Vieta y completación de cuadrados. Cada una de éstas sumaría 1 punto.
- Por último, se saldría por completo de lo convencional a nuestro juicio que el alumno hiciera un cambio de variable conveniente, un razonamiento por simetría, que trasladara geométricamente el problema a otro un poco más simple o que hiciera un método iterativo (este último método se escapa bastante de los conocimientos de un alumno de instituto, además de que es un método poco práctico). Cada una de éstas sumaría 10 puntos.

Por tanto, en total tendríamos 43,3 puntos de originalidad. Para calcular la creatividad, nos ayudaremos de la Tabla 4.

El ejemplo anterior pretendía mostrar el proceso a seguir para evaluar la creatividad en términos de Leikin (2013). Se trata de un método sencillo, donde el resultado final nos da a su vez información sobre los resultados particulares. No obstante, una limitación que se le puede ver al método es que, si bien a veces es fácil decidir cómo de original es una solución o a qué grupo de soluciones pertenece, no siempre es una tarea sencilla, hay mucho componente subjetivo, y en este mismo ejemplo he tenido dificultades para valorar la flexibilidad y originalidad de algunas soluciones. Además, unificar los criterios en ambos grupos conlleva el añadido de que ciertas ideas no son igual de originales si estás en el instituto o si estás en la universidad, pero por otra parte, no unificar los criterios hace que no sea coherente comparar los resultados de ambos grupos.

Solución	Idea	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad	Creatividad
S0a	Fórmula	-	10	0,1	1
S0b	Ruffini	-	1	0,1	0,1
S0c	Cardano-Vieta	-	1	1	1
S0d	Gráfica	-	10	0,1	1
S0e	Completar Cuadrados	-	10	1	10
S0f	Cambio variable 1	-	1	10	10
S0g	Cambio variable 2	-	0,1	10	1
S0h	Simetría	-	10	10	100
S0i	Traslación	-	1	10	10
S0j	Iterativo	-	10	10	100
Total	-	10	54,1	43,3	234,1

Tabla 4: Cálculo de creatividad en el problema de ejemplo.

A continuación vamos a ofrecer una base de datos de soluciones de cada uno de los problemas propuestos.

3.4.1 – Problema 1:

Como indicábamos antes, aquí sólo detallaremos 2 soluciones; el resto se pueden consultar en el Anexo 1.

Para empezar, tenemos un problema de geometría:

> Problema 1: Probar que en cualquier triángulo rectángulo, la mediana que une el vértice del ángulo recto con el punto medio de la hipotenusa, mide igual que media hipotenusa.

Para que sea más fácil y visual entender las ideas de las soluciones, vamos a establecer una convención: el vértice del ángulo recto se llamará A, los otros dos, B y C. El punto medio de la hipotenusa $\overline{BC}$ se llamará M. La longitud de un lado del triángulo se llamará con la misma letra que su vértice opuesto, pero en minúscula, y la longitud del segmento que piden, $\overline{AM}$, se llamará x. Véase el siguiente dibujo como referencia:

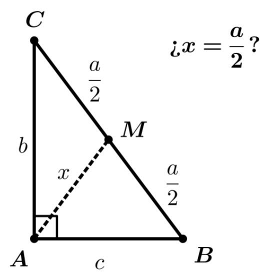


Figura 1: Enunciado del problema 1.

Veamos posibles formas de solucionar el problema:

S1a) Duplicamos la figura por un cateto (por ejemplo el $\overline{AC}$) por simetría. Los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{AM'}$ unen puntos medios de los lados del triángulo CBB', así que son paralelos a sus lados, de donde $AMCM'$ es un paralelogramo así que $\overline{AM}$ mide lo mismo que $\overline{CM'}$, que mide lo mismo que $\overline{CM}$.

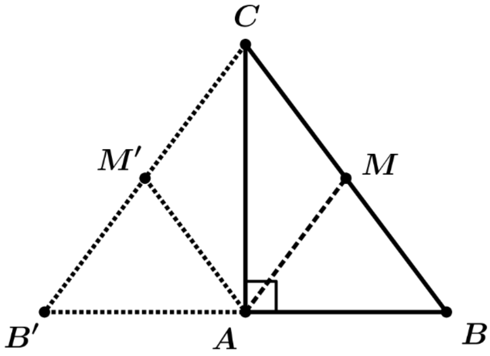


Figura 2: Primera solución al problema 1.

También se podría haber argumentado directamente que $\overline{AM}$ es paralelo a $\overline{CB'}$ y mide la mitad.

S1b) Si duplicamos la figura por la hipotenusa mediante un giro de 180º con respecto a M, obtenemos un rectángulo. Tanto x como $\frac{a}{2}$ se corresponden con media diagonal, por lo que miden lo mismo:

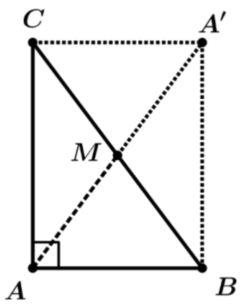


Figura 3: Segunda solución al problema 1.

También podríamos haber duplicado la mediana y haber visto que la figura resultante era un rectángulo, y razonar igual a partir de ahí.

Hemos encontrado un total de 13 soluciones. La siguiente tabla resume esquemáticamente a qué se refiere cada una. A las 13 soluciones propuestas, hay que añadirle las dos soluciones que los participantes han encontrado y no estaban en nuestra lista: aplicar el Teorema de Stewart (S1n) y aplicar arcos capaces (S1ñ) (dichas soluciones se expondrán con algo más de detalle en la sección de Resultados):

S1a	Duplicar por cateto	S1f	Geometría analítica básica	S1k	Mediatriz de cateto
S1b	Duplicar por hipotenusa	S1g	Teorema coseno	S1l	Rayos de luz y espejos
S1c	Circunferencia circunscrita	S1h	Unir puntos medios	S1m	Teorema seno
S1d	Altura sobre cateto	S1i	Construir un isósceles	S1n	Teorema Stewart
S1e	Duplicar 2 veces por catetos	S1j	Geometría analítica: Punto genérico	S1ñ	Arcos capaces

Tabla 5: Esquema de soluciones del problema 1.

Para analizar la flexibilidad de los participantes, es necesario agrupar las soluciones por tipo de solución:

- Construcción auxiliar: S1a, S1b, S1c, S1d, S1e, S1h, S1i, S1k (la solución S1l, técnicamente se basa en la idea de la mediatriz, como la S1k, pero usa un planteamiento completamente distinto, rayos de luz reflejados en espejos en lugar de propiedades geométricas).
- Rayos de luz reflejados en espejos: S1l.
- Teoremas de trigonometría: S1g, S1m.
- Geometría analítica: S1f, S1j.
- Teorema de Stewart: S1n.
- Arcos capaces: S1ñ.

En cuanto a la originalidad, hay que clasificar las soluciones en función de cómo de convencionales son:

- Completamente fuera de lo convencional: S1e, S1i, S1l, S1n (si bien es cierto que el Teorema de Stewart está presente en las preparaciones de olimpiadas matemáticas, sigue siendo un teorema que poca gente llega a conocer, y de los que lo conocen, poca gente lo tiene en mente fuera de ese contexto), S1ñ.
- Poco convencionales: S1g (aunque el Teorema del coseno es una herramienta común, su relación con este problema no es directa, y resolverlo usándolo no es trivial), S1h, S1j (si bien la geometría analítica es hasta cierto punto común, los puntos genéricos para problemas como éste, no lo son), S1m.
- Convencionales, algorítmicas: S1a, S1b, S1c, S1d, S1f, S1k.

Con estas clasificaciones, podremos asignar los valores correspondientes de flexibilidad y originalidad (y por tanto creatividad también) de cada participante.

3.4.2 – Problema 2:

A continuación exploraremos posibles soluciones al segundo problema. Como antes, aquí sólo mostraremos con detalle 2 soluciones. Para ver el resto de soluciones con detalle, consúltese el Anexo 1.

Al contrario que el primer problema, el segundo está planteado de una forma que normalmente incita al álgebra, no a la geometría. No obstante, eso no quita que se pueda razonar geométricamente.

> Problema 2: Si a y b son dos números que suman 1, ¿Qué relación hay entre $a^2 + b$ y $a + b^2$?
>
> S2a) Si sustituimos $a = 1 - b$ y operamos, obtenemos:
>
> $$a^2 + b = (1 - b)^2 + b = 1 - 2b + b^2 + b = (1 - b) + b^2 = a + b^2$$
>
> También podríamos haber sustituido $b = 1 - a$ en esa expresión y acabaríamos llegando también a la igualdad.
>
> S2b) Por áreas se puede ver fácilmente en un diagrama:

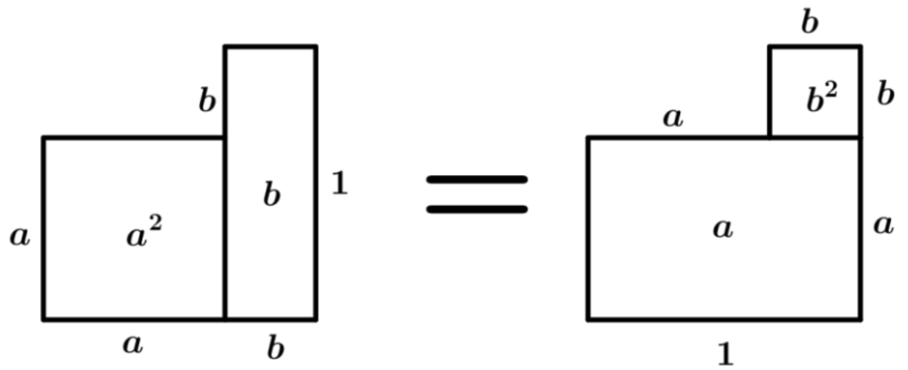


Figura 4: Segunda solución del problema 2.

Hemos encontrado un total de 12 soluciones.

A las 12 soluciones propuestas, hay que añadirle las tres soluciones que los participantes han encontrado y no estaban en nuestra lista: un argumento por reducción al absurdo con operaciones adecuadas (S2m), sumar y restar una cantidad conveniente para operar (S2n) y usar una desigualdad de medias con homogeneización de grados (S2ñ) (dichas soluciones se expondrán con algo más de detalle en la sección de Resultados).

La Tabla 6 resume esquemáticamente a qué se refiere cada una de las 15 soluciones encontradas:

S2a	Sustitución directa	S2f	Ecuación de segundo grado sobre a	S2k	Cociente $=1$ usando sustitución directa
S2b	Diagrama (áreas)	S2g	Coeficientes de expresión cuadrática dando valores	S2l	Sumar y restar $\frac{1}{4}$ para factorizar adecuadamente
S2c	Todo a un lado y factorizar 1 vez	S2h	Todo a un lado, factorizar y sustituir	S2m	Reducción al absurdo
S2d	Todo a un lado y factorizar 2 veces	S2i	Homogeneizar grados	S2n	Sumar y restar b^2 para operar
S2e	Resolver una ecuación	S2j	Cociente $=1$	S2ñ	Desigualdad de medias, homogeneizar grados

Tabla 6: Esquema de soluciones del problema 2.

Para analizar la flexibilidad de los participantes, es necesario agrupar las soluciones por tipo de solución:

- Comparación de áreas en diagrama: S2b.
- Manipulación algebraica simple: S2a, S2c, S2d, S2e (el final de la solución es distinto, pero todo lo demás son operaciones como las de S2c), S2h, S2k.
- Manipulación algebraica que requiere algún truco: S2i, S2j, S2l, S2m (aunque ésta es especial comparada con las otras porque es una prueba por reducción al absurdo en lugar de una prueba directa), S2n.
- Mediante una desigualdad de medias: S2ñ.
- Resolver ecuación usando sólo una de las dos letras como variable: S2f.
- Averiguar coeficientes de expresión cuadrática por medio de asignar valores: S2g.

En cuanto a la originalidad, hay que clasificar las soluciones en función de cómo de convencionales son:

- Completamente fuera de lo convencional: S2g, S2j (no por el hecho de plantearse si el cociente es 1, sino por cómo llega a la conclusión), S2l, S2m (no únicamente por ser reducción al absurdo, sino teniendo en cuenta las operaciones hechas), S2n, S2ñ.
- Poco convencionales: S2b, S2e, S2f, S2h, S2i.
- Convencionales, algorítmicas: S2a, S2c, S2d, S2k.

Con estas clasificaciones, podremos asignar los valores correspondientes de flexibilidad y originalidad (y por tanto creatividad también) de cada participante.

3.4.3 – Problema 3:

Veamos a continuación posibles soluciones al problema 3. Al igual que antes mostraremos sólo los detalles de 2 soluciones, si se quieren consultar el resto, véase el Anexo 1.

Se trata de un problema de optimización basado en conceptos geométricos.

Problema 3: De todos los rectángulos con un mismo perímetro, ¿cuál es el que tiene la diagonal más pequeña?

Vamos a hacer una serie de convenciones para que sea más cómodo describir las soluciones. Llamaremos p al semiperímetro del rectángulo (de donde el perímetro es $P = 2p$). x será la base del rectángulo, y $p - x$ su altura. La diagonal será denotada por d:

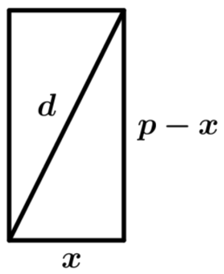


Figura 5: Enunciado del problema 3.

El objetivo es minimizar el valor de d manteniendo constante el de p. Veamos varias formas de hacerlo. Fijémonos en que por Pitágoras, $d = \sqrt{x^2 + (p - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2px + p^2}$:

S3a) Si derivamos eso e igualamos a 0, nos sale como único candidato a extremo $x = \frac{p}{2}$. Por el método que sea (derivando de nuevo, estudiando la función, o por el método que sea), confirmamos que es un mínimo. Por tanto el mínimo se da en el cuadrado.

En lugar de buscar el mínimo de toda esa expresión, habría sido suficiente buscar el mínimo de lo que hay dentro de la raíz, pues ambos estarán en el mismo punto. Buscamos, pues, el mínimo de un polinomio de segundo grado. Hay varias formas de hacerlo, por ejemplo:

S3b) Derivamos el polinomio, igualamos a 0, nos da $x = \frac{p}{2}$, y es fácil ver que es un mínimo.

Hemos encontrado en total 9 soluciones.

A las 9 soluciones propuestas, hay que añadirle las tres soluciones que los participantes han encontrado y no estaban en nuestra lista: una resolución por reducción al absurdo en la que se supone una solución óptima no cuadrada y se encuentra una mejor (S3j), una resolución por la definición matemática de mínimo (S3k), y una resolución en la que se parte de un rectángulo arbitrario y a partir de ahí se construye la solución óptima (S3l) (dichas soluciones se expondrán con algo más de detalle en la sección de Resultados).

La siguiente tabla resume esquemáticamente a qué se refiere cada una de las 12 soluciones encontradas:

S3a	Optimizar derivando	S3e	Desigualdad de medias (aritmético-cuadrática)	S3i	Usando una circunferencia y una elipse adecuadas
S3b	Derivar el polinomio de dentro	S3f	Desigualdad de Cauchy-Schwarz	S3j	Reducción al absurdo
S3c	Calcular el vértice del polinomio de dentro	S3g	Geometría analítica	S3k	Definición matemática de mínimo
S3d	Razonamiento algebraico por simetría	S3h	Comparación de dos lugares geométrico	S3l	Partiendo de una solución arbitraria

Tabla 7: Esquema de soluciones del problema 2.

Para analizar la flexibilidad de los participantes, es necesario agrupar las soluciones por tipo de solución:

- Optimizar la función: S3a.
- Optimizar el polinomio: S3b, S3c.
- Desigualdades algebraicas: S3e, S3f.
- Geometría analítica: S3g.
- Lugares geométricos: S3h.
- Mediante una elipse y una circunferencia: S3i.
- Modificando una supuesta solución y viendo qué pasa: S3d, S3j, S3k, S3l (aunque los argumentos usados los podríamos considerar suficientemente distintos unos de otros).

En cuanto a la originalidad, hay que clasificar las soluciones en función de cómo de convencionales son:

- Completamente fuera de lo convencional: S3d, S3e, S3f, S3h, S3i, S3j, S3k, S3l.
- Poco convencionales: S3c, S3g.
- Convencionales, algorítmicas: S3a, S3b.

Con estas clasificaciones, podremos asignar los valores correspondientes de flexibilidad y originalidad (y por tanto creatividad también) de cada participante.

3.4.4 – Problema 4:

Por último, listaremos soluciones del problema 4. Al igual que en los otros problemas, sólo detallaremos 2 soluciones; el resto se puede consultar en el Anexo 1.

De nuevo, nos encontramos con un problema de geometría, pero resolverlo es más complicado que resolver los otros (si bien es cierto que hay soluciones del problema que son elementales en cuanto al aparato matemático que usan):

> Problema 4: En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 y 12. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita?

Para simplificar un poco las cosas, vamos a establecer unas convenciones. Llamaremos A al vértice correspondiente con el ángulo recto, B al que está a distancia 12 de él, y C al otro. Llamaremos O al incentro del triángulo, y r al radio de la circunferencia inscrita. La circunferencia es tangente a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ en los puntos D, E y F, respectivamente. Por último, recordemos que por Pitágoras, la hipotenusa del triángulo mide 13:

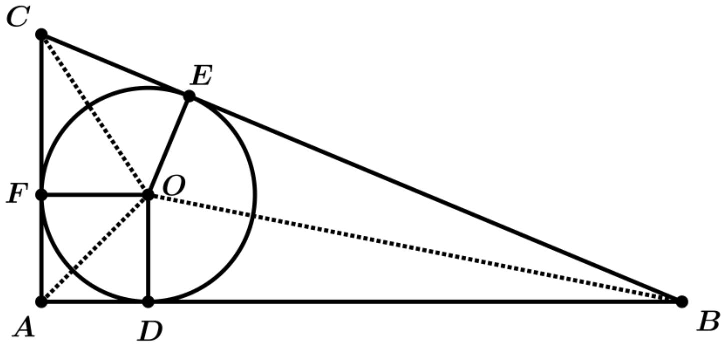


Figura 6: Enunciado del problema 4.

S4a) El área total, que es $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30$, es igual a la suma de las áreas de los triángulos AOB, BOC y COA, todos ellos de altura r, es decir:

$$\frac{5+12+13}{2} \cdot r = 30 \implies r = 2$$

S4b) En triángulos hay una fórmula que relaciona el inradio r, el perímetro P y el área A:

$$\frac{P}{2} \cdot r = A$$

Como el área es 30 y el perímetro es 30, obtenemos $r = 2$. Si bien la fórmula se deduce de aplicar el razonamiento de la solución anterior, hay gente que sólo conoce uno de los dos métodos o que se sabe la fórmula pero no su justificación, por lo que podemos considerarlo una solución diferente

Hemos encontrado un total de 4 soluciones.

A las 4 soluciones propuestas aquí, hay que añadirle las cinco soluciones que los participantes han encontrado y no estaban en esta lista: una por geometría analítica distinta a S4d (S4e), una por comparación de áreas distinta a S4a (S4f), una por trigonometría (S4g), una por propiedades de bisectrices distinta a S4c (S4h), y una por trigonometría y semejanza (S4i) (dichas soluciones se expondrán con algo más de detalle en la sección de Resultados).

La siguiente tabla resume esquemáticamente a qué se refiere cada una de las 9 soluciones encontradas:

S4a	Comparar áreas 1	S4d	Geometría analítica con trigonometría	S4g	Trigonometría
S4b	Fórmula directa	S4e	Geometría analítica por definición de bisectriz	S4h	Propiedades bisectrices 2
S4c	Ecuaciones desde propiedades de bisectrices	S4f	Comparar áreas 2	S4i	Semejanza y trigonometría

Tabla 8: Esquema de soluciones del problema 2.

Para analizar la flexibilidad de los participantes, es necesario agrupar las soluciones por tipo de solución:

- Comparación de áreas: S4a, S4f.
- Fórmula directa: S4b.
- Geometría analítica: S4d, S4e.
- Ecuaciones basadas en propiedades de bisectrices: S4c, S4h.
- Trigonometría: S4g, S4i.

En cuanto a la originalidad, hay que clasificar las soluciones en función de cómo de convencionales son:

- Completamente fuera de lo convencional: S4i.
- Poco convencionales: S4b, S4c, S4e, S4f, S4g, S4h.
- Convencionales, algorítmicas: S4a, S4d.

4 – Resultados

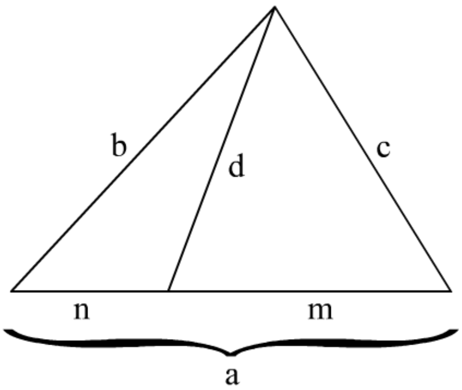
Con ayuda de las codificaciones presentadas en la sección anterior y el Anexo 1, vamos a listar qué soluciones ha ofrecido cada uno de los alumnos (en el caso de que alguna solución no estuviera ya en nuestra lista original, la añadiremos con su código correspondiente). Primero veremos los resultados obtenidos en cada problema, y luego los resultados globales.

4.1 – Problema 1:

- Alumno AM1: Sólo lo ha resuelto usando el teorema del seno (S1m).
- Alumno AM2: Primero lo ha resuelto duplicando la imagen por la hipotenusa (S1b). Luego lo ha resuelto usando geometría analítica básica (S1f).
- Alumno AM3: Primero lo ha resuelto trazando una altura sobre un cateto (S1d). Luego lo ha resuelto mediante el teorema del seno (S1m). Por último, lo ha resuelto usando que M es el circuncentro del triángulo (S1c).
- Alumno AM4: Primero lo ha resuelto duplicando la imagen por la hipotenusa (S1b). Luego lo ha resuelto trazando una altura sobre un cateto (S1d).

- Alumno AM5: Primero lo ha abordado en base a una intuición geométrica errónea (se ha dado cuenta él mismo de que era errónea), y luego lo ha intentado por el teorema del coseno, pero no ha conseguido resolverlo.
- Alumno AE6: Primero lo ha resuelto trazando la mediatriz sobre un cateto (S1k). A continuación, basándose en el mismo dibujo, ha hecho un razonamiento parecido a la solución S1d. Por último, ha aportado una nueva solución que introduciremos a continuación: usando el Teorema de Stewart (S1n).

S1n) El Teorema de Stewart es una herramienta en geometría que nos permite calcular lo que mide una ceviana de un triángulo (esto es, un segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto), si se conocen los lados del triángulo y las longitudes en que se parte el segmento de llegada:



$$d^2a = c^2n + b^2m - nma$$

Figura 7: Teorema de Stewart (imagen extraída de Wikipedia).

Usando este teorema se comprueba fácilmente lo que pide el enunciado del problema.

- Alumno AE7: No lo ha hecho.
- Alumno AE8: Primero lo ha resuelto duplicando la imagen por la hipotenusa (S1b). Luego, usando que M es el circuncentro del triángulo (S1c). A continuación, ha usado geometría analítica básica (S1f). Después lo ha resuelto usando la mediatriz de un cateto (S1k). Por último, lo ha resuelto mediante el Teorema del coseno, aplicado de la 2ª forma descrita antes (S1g).
- Alumno AE9: Primero lo ha resuelto trazando la mediatriz de un cateto (S1k). Luego lo ha resuelto duplicando la imagen por la hipotenusa (S1b).
- Alumno AE10: Primero lo ha resuelto usando que M es el circuncentro del triángulo (S1c). Luego lo ha resuelto por geometría analítica básica (S1f). A continuación, lo ha resuelto usando el Teorema del seno (S1m). Después lo ha resuelto usando el Teorema del coseno, aplicado de la 2ª forma descrita antes (S1g). Por último, ha intentado hacer

un argumento por áreas y trigonometría, pero no ha conseguido acabarlo (él mismo se da cuenta).

- Alumno AE11: Ha hecho una nueva solución que comentaremos a continuación: un razonamiento de ángulos y arcos capaces (S1ñ).

S1ñ) En primer lugar ponemos nombre a todos los ángulos como en la Figura 18. Usando que los ángulos de un triángulo suman 180º, es fácil ver que $\alpha + \theta = \delta$. hacemos la circunferencia circunscrita del triángulo, de centro M y radio $\frac{a}{2}$, vemos que a δ le corresponde el mismo arco que a α, pero M es el centro de la circunferencia y B es un punto de la circunferencia. Por arco capaz, obtenemos $\delta = 2\alpha$, de donde $\theta = \alpha$, y por tanto, AMB es isósceles, como queríamos.

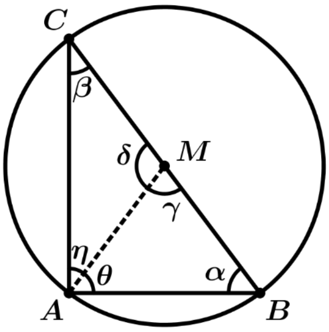


Figura 8: Solución del problema 1 por arcos capaces.

Un dato curioso de esta solución es que usa que M es el circuncentro del triángulo, por lo que $x = \frac{a}{2}$ se podía obtener directamente como en S1c sin pasar por los arcos capaces.

A continuación, resumiremos toda la información en una tabla en la que se indica las soluciones halladas por cada participante y en el orden en que las obtiene):

Alumno	S1															Total
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	
AM1													1			1
AM2		1				2										2
AM3			3	1									2			3
AM4		1		2												2
AM5																0
AE6				2							1			3		3
AE7																0
AE8		1	2			3	5				4					5
AE9		2									1					2
AE10			1			2	4						3			4
AE11															1	1
Total	0	4	3	3	0	3	2	0	0	0	3	0	3	1	1	23

Tabla 9: Soluciones al problema 1 de cada participante y orden en el que se han encontrado.

En promedio, los alumnos del máster han aportado 1,6 soluciones por persona, y los de ESTALMAT 2,5 por persona.

A continuación, se presentan las puntuaciones de flexibilidad, originalidad y creatividad de cada uno de los participantes, usando los criterios descritos en la sección anterior. Para ello, se calculan los valores por solución primero, y después la suma total. En el Anexo 2, se puede encontrar una tabla (Tabla 24) detallada que muestra para cada alumno las soluciones que ha obtenido en orden junto con los valores de flexibilidad, originalidad y creatividad (éste último es el producto de los 2 anteriores) de cada una de ellas, calculados en función de los criterios establecidos. Sumando los valores de cada estudiante, obtenemos los siguientes valores globales:

Alumno	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad	Creatividad
AM1	1	10	1	10
AM2	2	20	0,2	2
AM3	3	21	1,2	11,1
AM4	2	11	0,2	1,1
AM5	0	0	0	0
AE6	3	20,1	10,2	101,01
AE7	0	0	0	0
AE8	5	32	1,4	12,2
AE9	2	11	0,2	1,1
AE10	4	31	2,2	13
AE11	1	10	10	100

Tabla 10: Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad por participante en el problema 1.

También podemos analizar el grado de formalidad de cada estudiante a la hora de escribir, su eficiencia y el estilo de razonamiento, tanto del primer problema como a nivel global. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

Alumno	Formalidad	Eficiencia	Razonamiento inicial	Razonamiento predominante
AM1	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM2	Media	Baja	Geométrico	Algebraico
AM3	Alta	Alta	Geométrico	Geométrico
AM4	Media	Media	Geométrico	Geométrico
AM5	Alta	Baja	Geométrico	Equilibrado
AE6	Baja	Alta	Geométrico	Geométrico
AE7				
AE8	Media	Alta	Geométrico	Equilibrado
AE9	Baja	Alta	Geométrico	Geométrico
AE10	Alta	Alta	Geométrico	Algebraico
AE11	Media	Baja	Geométrico	Geométrico

Tabla 11: Formalidad, eficiencia y estilo de razonamiento de cada participante en el problema 1.

4.2 – Problema 2:

A continuación, haremos un estudio similar referente al segundo problema. Comencemos por ver qué soluciones han ofrecido los participantes.

- Alumno AM1: Primero ha hecho sustitución directa y ha operado (S2a). Luego ha pasado todo a un término y ha sustituido como en S2h. Por último, lo ha resuelto usando áreas en un diagrama (S2b).
- Alumno AM2: Primero ha hecho sustitución directa y ha operado (S2a). Luego ha pasado todo a un término y ha factorizado como en S2c. Por último, ha dado una prueba nueva, distinta a las listadas antes (S2l):

S2m) Lo planteamos por reducción al absurdo. Supongamos que $a \neq b$ y que $a^2 + b \neq b^2 + a$. Entonces $a^2 - a \neq b^2 - b$. Sumamos $1 - a - b$ a cada lado y factorizamos:

$$(a-1)^2 - b \neq (b-1)^2 - a \ \Rightarrow (a-1)^2 - (b-1)^2 \neq b - a$$

$$\Rightarrow \big((a-1) + (b-1)\big)\big((a-1) - (b-1)\big) \neq b - a \ \Rightarrow a + b - 2 \neq -1 \ \Rightarrow a + b \neq 1$$

- Alumno AM3: Primero lo ha resuelto por áreas usando un diagrama (S2b). Después lo ha resuelto por sustitución directa operando (S2a). A continuación, ha vuelto a hacer sustitución directa y operar, sólo que esta vez ha sustituido el término lineal en vez del cuadrático (similar a S2a). Por último, ha pasado todo a un lado y ha factorizado dos veces (S2d).
- Alumno AM4: Primero lo ha resuelto pasando todo a un lado y factorizando (S2c). A continuación, lo ha resuelto homogeneizando todo a grado 2 y operando (S2i). Por último, lo ha resuelto por áreas basándose en un diagrama (S2b).
- Alumno AM5: Primero lo ha resuelto por sustitución directa (S2a), Luego lo ha resuelto pasando todo a un lado, operando y luego sustituyendo (S2h). A continuación, lo ha resuelto pasando todo a un lado y factorizando (S2c). Después lo ha resuelto viendo que el cociente da 1 como en S2j. Por último, lo ha resuelto viendo que el cociente es 1 haciendo una sustitución directa tras plantear el cociente (S2k).
- Alumno AE6: Primero lo ha resuelto pasando todo a un lado y factorizando (S2c). Luego ha partido de $1 = a + b$ y ha multiplicado todo por $(a - b)$, llegando a la igualdad deseada (parecido a S2c).
- Alumno AE7: Lo ha resuelto viendo que el cociente da 1 (S2j).
- Alumno AE8: Primero lo ha resuelto por sustitución directa (S2a). Después lo ha resuelto haciendo unas operaciones similares a las de S2h. A continuación, ha dado una nueva solución por manipulación algebraica (S2n):

S2n) Partimos de $a^2 + b$. Sumamos y restamos b^2. Factorizamos, usamos que $a + b = 1$, y operamos:

$$a^2 + b = a^2 + b + b^2 - b^2 = (a - b)(a + b) + b^2 + b = a - b + b^2 + b = a + b^2$$

Obtenemos lo que queríamos.

Después, ha pasado todo a un lado y ha factorizado (S2c). Por último, ha homogeneizado todo a grado 2 y ha operado (S2i).

- Alumno AE9: Ha sustituido unos pocos valores y ha dicho "es mucha coincidencia" que la resta siempre dé 0. Después ha hecho un razonamiento fallido sobre la última cifra del resultado. No ha conseguido resolver el problema.
- Alumno AE10: Primero ha hecho sustitución directa (S2a). Después, lo ha resuelto pasando todo a un lado y sustituyendo (S2h). A continuación, lo ha resuelto por áreas mediante un diagrama (S2b). Por último, ha aportado una nueva solución que no estaba en la lista (S2ñ):

S2ñ) La desigualdad de medias aritmético-cuadrática nos dice que $\frac{A+B}{2} \leq \sqrt{\frac{A^2+B^2}{2}}$, y la igualdad se da si, y sólo si, $A = B$. Haciendo $A = a^2 + b$ y $B = b^2 + a$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{a^2 + b + a + b^2}{2} \leq \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b + b^2 + a^2 + 2ab^2 + b^4}{2}}$$

Ahora homogeneizamos grados (es decir, aprovechando que $a + b = 1$, mutliplicamos por $(a + b)$ cada sumando tantas veces como sea necesario para que todos los sumandos de la izquierda sean de grado 2 y todos los sumandos de dentro de la raíz sean de grado 4):

$$\frac{a^2 + b^2 + (a + b)(a + b)}{2} \leq \sqrt{\frac{a^4 + (a + b)(2a^2b + 2b^2a) + (a + b)^2(a^2 + b^2) + b^4}{2}}$$

Y ahora operamos:

$$a^2 + b^2 + ab \leq \sqrt{a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4} = a^2 + b^2 + ab$$

Como todo lo que se han hecho son equivalencias y la igualdad sólo podía darse si $a^2 + b$ era igual a $b^2 + a$, obtenemos la igualdad buscada.

- Alumno AE11: Lo ha resuelto usando sustitución directa (S2a).

A continuación, resumiremos toda la información en una tabla:

Alumno	S2															Total
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	
AM1	1	3						2								3
AM2	1		2										3			3
AM3	2, 3	1		4												4
AM4		3	1						2							3
AM5	1		3					2		4	5					5
AE6			1, 2													2
AE7										1						1
AE8	1		4					2	5					3		5
AE9																0
AE10	1	3						2							4	4
AE11	1															1
Total	8	4	6	1	0	0	0	4	2	2	1	0	1	1	1	31

Tabla 12: Soluciones al problema 2 de cada participante y orden en el que se han encontrado.

En promedio, los alumnos del máster han aportado 3,6 soluciones por persona, y los de ESTALMAT $2{,}1\hat{6}$ por persona.

De los 4 problemas, éste es el único en el que los alumnos de máster han promediado más que los de ESTALMAT en cuanto a cantidad de soluciones por problema.

A continuación, se presentan las puntuaciones de flexibilidad, originalidad y creatividad de cada uno de los participantes, usando los criterios descritos en la sección anterior. Se calculan los valores por solución primero, y después la suma total. En el Anexo 2 se puede encontrar una tabla detallada (Tabla 25) que recoge las soluciones que ha encontrado cada alumno en orden y sus respectivos valores de flexibilidad, originalidad y creatividad. Sumando las puntuaciones de cada estudiante, obtenemos:

Alumno	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad	Creatividad
AM1	3	21	2,1	12
AM2	3	21	10,2	101,1
AM3	4	21,1	10,3	101,11
AM4	3	30	2,1	21
AM5	5	23	11,3	102,2
AE6	2	10,1	0,2	1,01
AE7	1	10	10	100
AE8	5	23	12,2	103,1
AE9	0	0	0	0
AE10	4	31	12,1	112
AE11	1	10	0,1	1

Tabla 13: Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad por participante en el problema 2.

Podemos analizar también otros aspectos de los participantes, como antes, la formalidad, la eficiencia, el tipo de razonamiento usado en el primer problema, y el tipo de razonamiento predominante a lo largo de la prueba. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

Alumno	Formalidad	Eficiencia	Razonamiento inicial	Razonamiento predominante
AM1	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM2	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM3	Alta	Alta	Geométrico	Algebraico
AM4	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM5	Alta	Media	Algebraico	Algebraico
AE6	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AE7	Baja	Baja	Algebraico	Algebraico
AE8	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AE9	Baja	Baja	Algebraico	Algebraico
AE10	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AE11	Media	Alta	Algebraico	Algebraico

Tabla 14: Formalidad, eficiencia y estilo de razonamiento de cada participante en el problema 2.

4.3 – Problema 3:

A continuación, haremos un estudio similar referente al tercer problema. Comencemos por ver qué soluciones han ofrecido los participantes.

- Alumno AM1: Lo ha resuelto optimizando la función con derivadas (S3a).
- Alumno AM2: Lo ha resuelto optimizando la función con derivadas (S3a).
- Alumno AM3: Lo ha resuelto optimizando la función con derivadas (S3a).
- Alumno AM4: Lo ha resuelto optimizando la función con derivadas (S3a). Luego lo ha intentado razonando con trigonometría, pero no le ha salido.
- Alumno AM5: Lo ha resuelto derivando el polinomio de dentro de la raíz en vez de la función entera (S3b). Lo ha intentado razonar por simetría ("la diagonal se va haciendo cada vez más pequeña hasta llegar al cuadrado, y luego se va haciendo cada vez más grande"), pero no lo ha demostrado.
- Alumno AE6: Primero ha optimizado derivando el polinomio de dentro de la raíz (S3b). Luego ha hecho un razonamiento algebraico por simetría (S3d).
- Alumno AE7: Lo ha resuelto optimizando la función con derivadas (S3a).
- Alumno AE8: Primero lo ha resuelto mediante una desigualdad de medias aritmético-cuadrática (S3e). Luego ha proporcionado una solución nueva por reducción al absurdo (S3j):

S3j) Imaginemos que hay una pareja $a > b$ de lados óptima y llamemos $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ a su diagonal. Sea $z < a - b$. Calculemos la diagonal d' para los lados $a - z$, $b + z$ (usamos Pitágoras y operamos convenientemente):

$$(d')^2 = a^2 + b^2 + 2z(b-a) + 2z^2 = d^2 + 2z(-a+b+z) < d^2$$

Hemos encontrado una solución mejor que la que teníamos, luego hemos llegado a contradicción. La solución óptima debe cumplir que $a = b$.

Por último, ha optimizado encontrando el vértice de la parábola (S3c).

- Alumno AM9: Ha hecho una comprobación en un ejemplo, y un intento fallido de justificación de que cuanto más te acercas al cuadrado mejor, pero no ha conseguido resolverlo.
- Alumno AM10: Primero lo ha resuelto mediante una desigualdad de medias aritmético-cuadrática (S3e). A continuación ha hecho un razonamiento por geometría analítica (S3g). Luego ha proporcionado una nueva solución usando análisis matemático que se basa en la misma idea que la solución S3j (S3k):

S3k) Supongamos que x e y son los lados de una solución óptima. Sea $\varepsilon > 0$. Si el par x, y tiene diagonal mínima, entonces:

$$\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + (y-\varepsilon)^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon(x-y) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon > y - x$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y+\varepsilon)^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon(y-x) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon > x - y$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon > |x-y|$. Eso sólo puede ocurrir si $x = y$.

Por último, ha optimizado usando derivadas (S3a).

- Alumno AE11: Ha dado una solución que combina técnicas de derivación con las técnicas de estas dos últimas soluciones presentadas (S3l):

S3l) Fijados a y b positivos que suman el semiperímetro p, los lados de los posibles rectángulos tienen siempre la forma $(a+k)$ y $(b-k)$, y el cuadrado de la diagonal tiene, por tanto, la forma $f(k) = (a+k)^2 + (b-k)^2 = 2k^2 + 2k(a-b) + (a^2+b^2)$. Derivamos eso para saber dónde está el mínimo:

$$f'(k) = 4k + 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{b-a}{2}$$

Además, es un mínimo, porque $f''\left(\frac{b-a}{2}\right) = 4 > 0$. Por tanto, los lados de la solución óptima deben medir $a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ y $b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, es decir, deben ser iguales.

La Tabla 15 resume ordenadamente qué soluciones ha encontrado cada uno de los participantes y en qué orden.

En promedio, los alumnos del máster han aportado 1 solución por persona, y los de ESTALMAT $1,\hat{6}$ por persona.

Alumno	S3												Total
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	
AM1	1												1
AM2	1												1
AM3	1												1
AM4	1												1
AM5		1											1
AE6		1		2									2
AE7	1												1
AE8			3		1					2			3
AE9													0
AE10	4				1		2				3		4
AE11												1	1
Total	6	2	1	1	2	0	1	0	0	1	1	1	16

Tabla 15: Soluciones al problema 3 de cada participante y orden en el que se han encontrado.

A continuación, se presentan las puntuaciones de flexibilidad, originalidad y creatividad de cada uno de los participantes, usando los criterios descritos en la sección anterior.

Al igual que antes, se calculan los valores por solución primero, y después la suma total. En el Anexo 2 se puede encontrar una tabla detallada (Tabla 26) que recoge las soluciones que ha encontrado cada alumno en orden y sus respectivos valores de flexibilidad, originalidad y creatividad por solución, de modo que sumando las puntuaciones en esos aspectos de cada estudiante, obtenemos:

Alumno	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad	Creatividad
AM1	1	10	0,1	1
AM2	1	10	0,1	1
AM3	1	10	0,1	1
AM4	1	10	0,1	1
AM5	1	10	0,1	1
AE6	2	20	10,1	101
AE7	1	10	0,1	1
AE8	3	30	21	210
AE9	0	0	0	0
AE10	4	40	21,1	211
AE11	1	10	10	100

Tabla 16: Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad por participante en el problema 3.

Al igual que antes, procedemos a analizar otros aspectos de los participantes: la formalidad, la eficiencia, el tipo de razonamiento usado en la primera solución, y el tipo de razonamiento predominante a lo largo de la prueba.

Los datos se resumen en la siguiente tabla:

Alumno	Formalidad	Eficiencia	Razonamiento inicial	Razonamiento predominante
AM1	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM2	Alta	Media	Algebraico	Algebraico
AM3	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM4	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM5	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AE6	Media	Alta	Algebraico	Algebraico
AE7	Alta	Baja	Algebraico	Algebraico
AE8	Media	Alta	Algebraico	Algebraico
AE9	Baja	Media	Algebraico	Algebraico
AE10	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AE11	Media	Media	Algebraico	Algebraico

Tabla 17: Formalidad, eficiencia y estilo de razonamiento de cada participante en el problema 3.

4.4 – Problema 4:

- Por último, haremos un análisis similar con el cuarto problema. Comencemos por ver qué soluciones han ofrecido los participantes: Alumno AM1: No ha conseguido resolverlo.
- Alumno AM2: Primero lo ha dibujado y ha dicho que, midiendo, la solución es 2. Después lo ha resuelto usando un razonamiento de geometría analítica pero de una forma distinta a nuestra solución S4d, por lo que lo consideraremos una nueva solución, S4e (la diferencia está en cómo ha calculado las ecuaciones de las bisectrices: en lugar de usar trigonometría y ángulos, ha usado la definición matemática de la bisectriz como “el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de 2 rectas de ese plano”, de modo que no ha necesitado usar trigonometría).
- Alumno AM3: Primero lo ha resuelto utilizando una estrategia de comparación de áreas, bastante ingeniosa y diferente a la que se usa en nuestra solución S4a, por lo que la consideraremos una nueva solución, S4f:

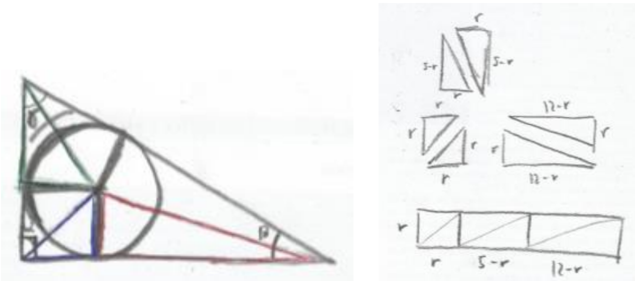


Figura 9: Extractos de la solución de AM3 al problema 4 comparando áreas.

Después lo ha resuelto por geometría analítica (S4d).

- Alumno AM4: Lo ha intentado plantear razonando a partir de una descomposición por áreas un tanto peculiar, pero finalmente, no llega a hallar la solución:

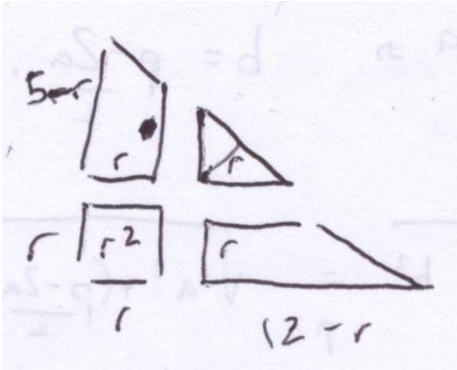


Figura 10: Extracto del intento fallido de solución de AM4 al problema 4.

- Alumno AM5: Lo ha resuelto por geometría analítica (S4d).
- Alumno AE6: Primero lo ha resuelto usando una fórmula que relaciona el inradio, el área y el semiperímetro de un triángulo (S4b). Luego ha proporcionado una nueva demostración por trigonometría (S4g):

S4g) Primero, notemos que $OD = AD = r$ y $DB = 12 - r$. Ahora, llamamos $\alpha = \angle CBA = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$. Por último, nos fijamos en el triángulo DBO:

$$\frac{r}{12 - r} = \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

De ahí podemos despejar r fácilmente y ver que vale 2.

- Alumno AE7: Lo ha resuelto por geometría analítica (S4d).
- Alumno AE8: Primero lo ha resuelto comparando áreas (S4a). Luego lo ha resuelto por geometría analítica (S4d). Por último, ha planteado un sistema de 3 ecuaciones lineales usando propiedades de las bisectrices (S4c) y, aunque lo ha resuelto por tanteo, lo ha resuelto.
- Alumno AE9: Lo ha resuelto comparando áreas (S4a).
- Alumno AE10: Primero lo ha resuelto mediante la fórmula que relaciona el inradio, el área y el semiperímetro de un triángulo (S4b). Y luego ha proporcionado una nueva solución parecida a la S3c planteando una ecuación distinta (S4h):

S4h) Primero deducimos que, con los datos de la imagen, $x = \overline{AD} = \overline{AF}$, $y = \overline{BD} = \overline{BE}$, y $z = \overline{CF} = \overline{CE}$.

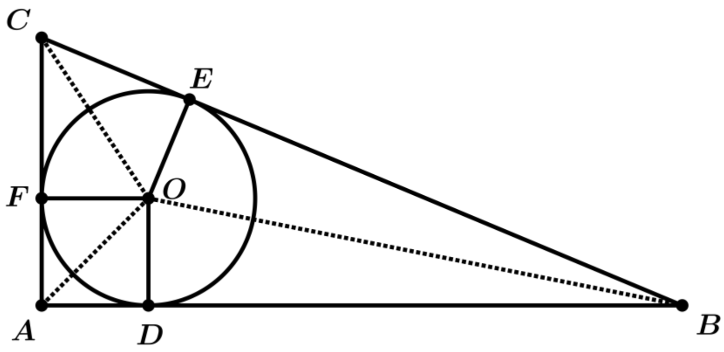


Figura 11: Enunciado problema 4

Ahora, $x = \frac{x+y+x+z-y-z}{2} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}}{2} = \frac{5+12-13}{2} = 2$.

- Alumno AE11: Primero, ha proporcionado una solución basada en argumentos trigonométricos (S4g). A continuación, lo ha resuelto de una forma parecida a ésta usando semejanza (S4i):

S4i) Con los mismos datos que antes, si prolongamos la bisectriz BO hasta que corte a $\overline{AC}$ en un punto P y llamamos y a lo que mide $\overline{AP}$, obtenemos:

$$y = 12 \cdot \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}{2}\right) = \frac{12}{5}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{r}{12-r}$$

Y de ahí se puede despejar fácilmente r y ver que vale 2.

Por último, ha dicho que se podía resolver usando una propiedad que había encontrado, pero la propiedad no es cierta, y a través de ésta tampoco se obtendría el resultado correcto (la propiedad en cuestión es, usando la nomenclatura del enunciado, que si $\overline{AC}$ es primo, entonces se verifica que $\overline{AF} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, y que $\overline{CF} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$).

La Tabla 18 resume qué soluciones ha encontrado cada uno de los participantes y en qué orden las han encontrado.

En promedio, los alumnos del máster han aportado 0.8 soluciones por persona, y los de ESTALMAT 1,8$\hat{3}$ por persona.

Este es el único problema de los 4 en el que el valor promedio de fluidez de uno de los dos grupos (en este caso, ESTALMAT) ha sido más que el doble del valor del otro grupo (en este caso, el máster).

Alumno	S4									Total
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	
AM1										0
AM2					1					1
AM3				2		1				2
AM4										0
AM5				1						1
AE6		1					2			2
AE7				1						1
AE8	1		3	2						3
AE9	1									1
AE10		1						2		2
AE11							1		2	2
Total	2	2	1	4	1	1	2	1	1	15

Tabla 18: Soluciones al problema 4 de cada participante y orden en el que se han encontrado.

Este problema ha sido para el que se han obtenido menos soluciones correctas en total, y también ha sido el único en el que uno de los dos grupos (en este caso el del máster) ha promediado menos de 1 solución por persona.

A continuación, se presentan las puntuaciones de flexibilidad, originalidad y creatividad de cada uno de los participantes, usando los criterios descritos en la sección anterior.

Como en los casos anteriores, se calculan los valores por solución primero, y después la suma total. En el Anexo 2 se puede encontrar una tabla detallada (Tabla 27) que recoge las soluciones que ha encontrado cada alumno en orden y sus respectivos valores de flexibilidad, originalidad y creatividad de cada solución, de modo que sumando las puntuaciones totales de cada estudiante, obtenemos:

Alumno	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad	Creatividad
AM1	0	0	0	0
AM2	1	10	1	10
AM3	2	20	1,1	11
AM4	0	0	0	0
AM5	1	10	0,1	1
AE6	2	20	2	20
AE7	1	10	0,1	1
AE8	3	30	1,2	12
AE9	1	10	0,1	1
AE10	2	20	2	20
AE11	2	11	11	20

Tabla 19: Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad totales por alumno en el problema 4.

Como antes, también se ha analizado la formalidad, la eficiencia, el tipo de razonamiento usado en la primera solución, y el tipo de razonamiento predominante a lo largo de toda la prueba por parte de cada participante. Los datos se resumen en la siguiente tabla.

Alumno	Formalidad	Eficiencia	Razonamiento inicial	Razonamiento predominante
AM1				
AM2	Alta	Media	Algebraico	Algebraico
AM3	Alta	Alta	Geométrico	Equilibrado
AM4	Media	Media	Geométrico	Geométrico
AM5	Alta	Media	Algebraico	Algebraico
AE6	Media	Alta	Algebraico	Algebraico
AE7	Media	Media	Algebraico	Algebraico
AE8	Media	Alta	Geométrico	Geométrico
AE9	Media	Baja	Geométrico	Geométrico
AE10	Alta	Alta	Algebraico	Geométrico
AE11	Alta	Media	Geométrico	Geométrico

Tabla 20: Formalidad, eficiencia y estilo de razonamiento de cada participante en el problema 4.

4.5 – Resultados globales:

Por último, concluiremos la sección analizando los datos de la prueba entera como un global en vez de los ejercicios por separado. Comenzaremos con los valores de creatividad:

Alumno	Fluidez	Flexibilidad	Originalidad	Creatividad	Posición	Media de creatividad
AM1	5	41	3,2	23	10º	77,722
AM2	7	61	11,5	114,1	6º	
AM3	10	72,1	12,7	124,21	5º	
AM4	6	51	2,4	23,1	9º	
AM5	7	43	11,5	104,2	7º	
AE6	9	70,2	21,6	214,02	4º	205,4
AE7	3	30	10,2	102	8º	
AE8	16	115	35,8	337,3	2º	
AE9	3	21	0,3	2,1	11º	
AE10	14	122	37,4	356	1º	
AE11	5	41	31,1	221	3º	
Total	85	667,3	177,7	1621,03		

Tabla 21: Fluidez, flexibilidad, originalidad y creatividad por participante en toda la prueba.

Curiosamente, los estudiantes que ocupan la posición 1ª y 11ª son precisamente los dos alumnos de 4º de la ESO.

También se puede hablar de resultados globales en los aspectos cualitativos, no sólo en los cuantitativos. Para ello basta con asignar valores numéricos a los posibles resultados (por ejemplo, Alta=3, Media=2, Baja=1), hacer el promedio, y ver a qué número se parece más. Así pues, la siguiente tabla resume la formalidad, eficiencia, razonamiento inicial y razonamiento predominante de cada participante a lo largo de la prueba:

Alumno	Formalidad	Eficiencia	Razonamiento inicial	Razonamiento predominante
AM1	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AM2	Alta	Media	Algebraico	Algebraico
AM3	Alta	Alta	Geométrico	Equilibrado
AM4	Alta	Alta	Equilibrado	Equilibrado
AM5	Alta	Media	Algebraico	Algebraico
AE6	Media	Alta	Algebraico	Algebraico
AE7	Media	Baja	Algebraico	Algebraico
AE8	Media	Alta	Equilibrado	Equilibrado
AE9	Baja	Media	Equilibrado	Equilibrado
AE10	Alta	Alta	Algebraico	Algebraico
AE11	Media	Media	Equilibrado	Equilibrado

Tabla 22: Grados de formalidad, eficiencia y estilo de razonamiento a lo largo de toda la prueba.

5 – Discusión de los resultados y conclusiones

Este estudio exploratorio pone de manifiesto, pese al reducido número de estudiantes involucrados, una serie de cosas que ya se recogen en los estudios desarrollados por investigadores del área. Para empezar, refleja que tener una formación sólida en matemáticas no implica ser experto en resolución de problemas. Por ejemplo, hemos visto varios casos en los que alguno de los alumnos de máster, todos con buena formación matemática, no ha conseguido dar una resolución correcta de alguno de los problemas.

Los alumnos del máster por lo general buscaban soluciones más algebraicas o analíticas. Si bien también han ofrecido alguna que otra solución más visual-geométrica, tienen bastante interiorizados aspectos de las matemáticas como la trigonometría, las derivadas y la geometría analítica, son herramientas que usan casi sin pensarlo. Es probable que el motivo, o parte, sea que los estudios universitarios de matemáticas se centren precisamente en aspectos muy teóricos, dejando de lado áreas de las matemáticas tales como la geometría euclídea.

Los alumnos de ESTALMAT encuestados, o al menos la mayoría de ellos, también conocen ramas más teóricas de las matemáticas como el álgebra y el análisis, pero en sus soluciones se aprecia que esas herramientas para ellos son como un último recurso por lo general. Así como los alumnos del máster han dado soluciones más puramente matemáticas, de definir lo que tengo y operar con ello, en ESTALMAT, y sobre todo en los alumnos que participan activamente en las olimpiadas matemáticas, han intentado encontrar soluciones más visuales, que requieren menos aparato matemático, además de que han proporcionado con frecuencia soluciones poco comunes, usando trucos que han ido aprendiendo en su formación extracurricular (Teorema de Stewart, razonar por arcos capaces, desigualdades de medias, razonamientos por simetría o fórmulas que relacionan ciertos elementos de un triángulo, son algunos ejemplos).

Una de las diferencias que encontramos en las soluciones de unos alumnos y de otros es el nivel de formalidad a la hora de escribir. Este estudio refleja una realidad hasta cierto punto esperable: los alumnos del máster son más formales a la hora de escribir que los del instituto por lo general. Definen las cosas con notación matemática, sus expresiones matemáticas tienen una buena estructura lógica y nombran las propiedades que usan. En el caso de ESTALMAT, incluso tratándose de alumnos con talento matemático, la forma de escribir por lo general era mucho menos elaborada y organizada, usan las cosas sin definirlas, usan el dibujo como parte del razonamiento. Por ejemplo, incluso si el resto de la solución lo escriben más formalmente, de vez en cuando han escrito cosas como:

- "Y como es mucha coincidencia esta igualdad extrapolamos a que ocurre esto siempre" (AE9, problema 2):

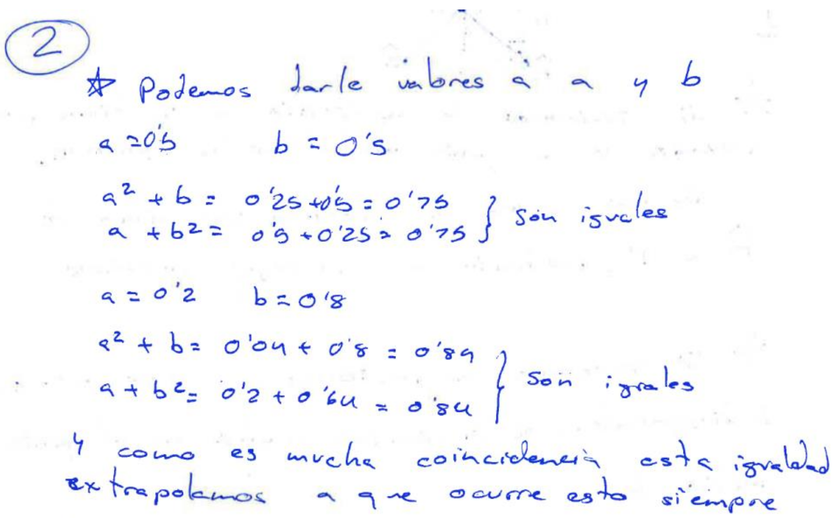


Figura 12: Extracto de un intento de solución de AE9 al problema 2.

- "Obsérvese que lo de abajo a la izquierda del dibujo tiene que ser un cuadrado" (AE8, problema 4):

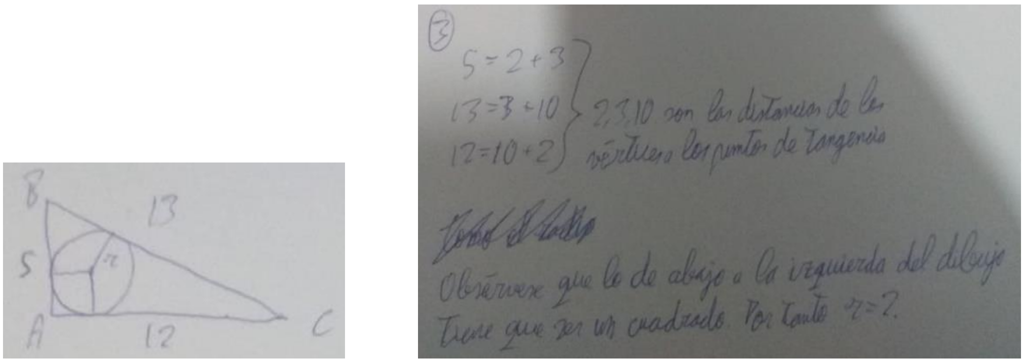


Figura 13: Extractos de una solución de AE8 al problema 4.

- “Haciendo esto descubrí una propiedad asombrosa” (AE11, problema 4):

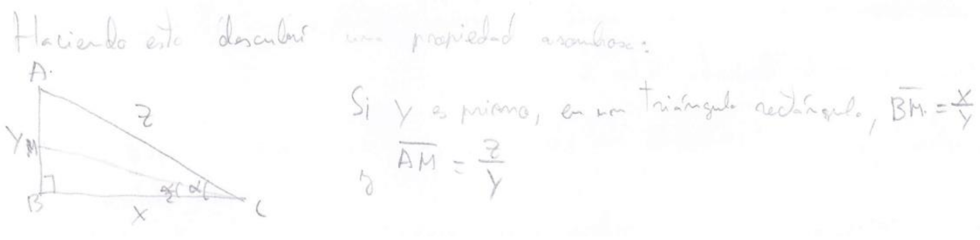


Figura 14: Extracto de un intento de solución de AE11 al problema 4.

- “Con ayuda del dibujo, vemos que […]” (AE6, problema 1):

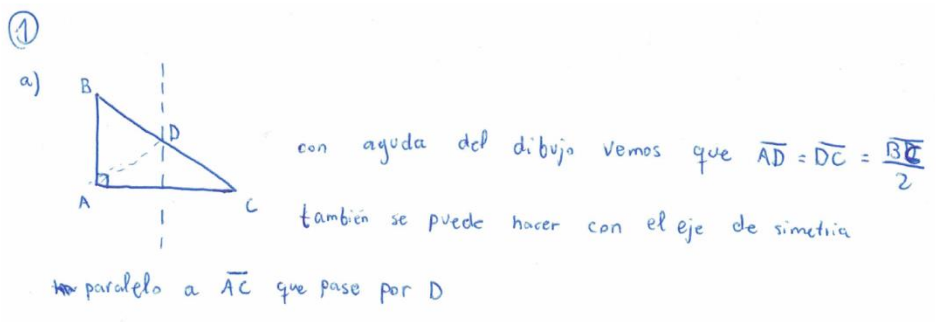


Figura 15: Extracto de una solución de AE6 al problema 1.

De todas formas, también es cierto que, aunque escriban menos formal que los graduados en matemáticas o en física que han participado en el estudio, la escritura matemática de estos alumnos en particular es mucho más formal y correcta que la que suele mostrar un alumno a esas edades (mi experiencia como corrector de olimpiadas matemáticas dirigidas a alumnos de estas edades me permite afirmar con rotundidad que estos alumnos sobresalen muy por encima en su manera de escribir y expresar sus ideas). La clasificación de formalidad en alta, media y baja ofrecida en el trabajo se ha hecho usando los mismos criterios en ambos grupos para poder compararlos, partiendo de un punto de vista algo estricto: cómo de formal escribían comparado con el nivel de formalidad esperado en las matemáticas universitarias.

Otro de los aspectos estudiados ha sido la eficiencia. La hipótesis de partida era que los alumnos identificados como de talento matemático serían bastante más eficientes que los del máster en sus resoluciones (entendiendo eficiencia como no escribir cosas innecesarias, buscar soluciones cortas, y ocupar poco espacio), y aunque sí que ha habido algún alumno que era muy eficiente (AE8, AE10), la diferencia entre grupos ha sido menor de lo esperado (es más, ha habido también alumnos muy eficientes en el máster, como AM1 y AM3, por ejemplo, y en ambos grupos también ha habido gente menos eficiente en ese sentido). Esto puede deberse a una de las limitaciones del trabajo, el tamaño reducido de la muestra.

En cuanto a los estilos de razonamiento propuestos por Krutetskii (1976), con tan pocos problemas y tan pocas soluciones, no hay suficiente información para determinar si los alumnos en cuestión tienen un estilo de razonamiento analítico, geométrico o armónico. Es cierto que muchas veces los alumnos del máster daban en primer lugar soluciones algebraicas cuando los de ESTALMAT de hecho se las dejaban para el final, pero eso puede ser debido a los problemas elegidos en concreto.

Finalmente, se tratará el objetivo central del estudio: la relación entre la creatividad y el talento matemático. Estructuraremos la respuesta analizando los 4 aspectos fundamentales por separado.

En primer lugar, la fluidez: ¿cuántas soluciones ha aportado cada uno? Entre los 5 alumnos del máster han proporcionado un total de 35 soluciones a la encuesta, lo que da una media de 7 soluciones por persona, o 1,75 soluciones por persona en cada problema. En cuanto a los 6 alumnos de ESTALMAT encuestados, han aportado 50 soluciones, lo que da una media de 8,33 soluciones por persona, o 2,08 soluciones por persona en cada problema. En ese sentido, los alumnos del programa de estimulación del talento matemático han proporcionado más soluciones a los problemas, sin embargo, si nos fijamos, los 3 peores resultados de fluidez han sido aportados por alumnos de ESTALMAT (AE7, AE9 y AE11). El promedio en este grupo ha subido mucho gracias a los alumnos AE8 y AE10, que han aportado considerablemente más soluciones que cualquier otro participante. El grupo del máster, sin embargo, ha sido bastante más uniforme.

Naturalmente, la fluidez no lo es todo. Una cosa es dar muchas soluciones, y otra es dar muchas soluciones significativamente distintas entre sí. Es por ello que es importante medir de alguna manera la flexibilidad. En este aspecto, los alumnos del máster han sumado un total de 268,1 puntos, lo que da una media de 53, 62 puntos por persona en la escala de Leikin, o 13,41 puntos por problema por persona. En cuanto a los alumnos con talento matemático, en total han obtenido 399,2 puntos de flexibilidad, lo que da una media de 16.63 puntos por problema por persona. No obstante, así como en los alumnos del máster hay bastante uniformidad, no es así en los alumnos de talento, estamos comparando a alguien con 21 puntos con alguien que tiene 122 puntos. Como ocurría con la fluidez, en ESTALMAT están los tres alumnos que han obtenido las peores puntuaciones (AE7, AE9 y AE11), y los dos alumnos que han obtenido las más altas, y con mucha diferencia con respecto al tercero (AE8 y AE10). Pensemos que una puntuación de 120 puntos en la prueba supone, aproximadamente, dar 3 soluciones notablemente distintas por problema, número que dista mucho de la media calculada antes.

Visto quién ha dado más soluciones, cabe preguntarse quién ha proporcionado las soluciones más originales. Para ello, usamos la escala de Leikin de originalidad, y obtenemos los siguientes resultados. En el máster, las puntuaciones de originalidad suman 41,3 puntos, lo que da una media de 8,26 puntos por persona, y 2,07 puntos por persona en cada problema. Eso refleja un nivel no muy alto de originalidad. Podríamos pensar que igual hay casos extremos, pero en realidad, de nuevo, notamos bastante uniformidad en los resultados. En cuanto a los alumnos de altas capacidades, han obtenido un total de 136,4 puntos, lo que da una media de 22,73 por persona, es decir, 5,68 puntos por persona por cada problema (casi el triple que en el otro grupo, y eso teniendo en cuenta que vuelve a ser un grupo poco uniforme). Aquí es donde se empieza a apreciar más realmente la diferencia entre el talento matemático y la formación matemática. Las 4 puntuaciones más altas de originalidad, y con diferencia, han sido de alumnos de ESTALMAT (de hecho, 3 de ellos han pasado de 30 puntos, casi cuadruplicando la puntuación media de los alumnos del máster). Hay que tener en cuenta que se trata de un estudio pequeño, y por tanto los resultados son sólo orientativos, pero en este trabajo en particular, se aprecia que los alumnos de instituto con talento matemático son más versados en la resolución de problemas, tanto en cantidad de soluciones, como en originalidad de las mismas.

Por último, en relación con lo que comentaba al final del párrafo anterior, vamos a estudiar lo que ha ocurrido con la creatividad en la escala de Leikin, pues es el dato que más interesa en este trabajo. En el máster, han obtenido un total de 388, 61 puntos de creatividad, lo que supone una media de 77,72 puntos por persona, y 15,54 puntos por persona en cada problema. Además, notamos cierta regularidad dentro de la irregularidad: 2 alumnos con poco más de 23 puntos, y tres alumnos con poco más de 100. En cuanto a los alumnos de altas capacidades, han recibido un total de 1232,42 puntos, lo que supone una media de 205,4 por persona, y 51,35 por persona en cada problema (más del triple que en el otro grupo). Sin embargo, de nuevo, notamos una gran irregularidad en este grupo: tenemos por una parte al alumno con menor puntuación de los 11, con sólo 2,1 puntos, y tenemos al alumno con mayor puntuación, con 356 puntos, y vemos grandes saltos entre las puntuaciones. Se aprecia que las 4 puntuaciones más altas, y con bastante diferencia, las han obtenido alumnos de ESTALMAT, y de ellos, hay dos alumnos que han destacado de forma generalizada en todos los problemas: el AE8 y el AE10. En concreto, el alumno AE10 ha destacado más que nadie, habiendo quedado 1º en 3 de los problemas y 3º en otro. Ha obtenido mayor nivel de creatividad que el alumno AE8 entregando menos soluciones, lo que indica un mayor nivel de originalidad. Un dato curioso es que tanto la puntuación más alta como la más baja las han obtenido los dos alumnos de 4º de la ESO, uno, el AE9, con talento, pero con un nivel de formación estándar, y el otro, el AE10, con un talento excepcional y una formación curricular y extracurricular bastante completa. Esto da pie a una reflexión: el talento matemático no lo es todo en matemáticas, es necesario complementarlo con una buena formación, porque no es cierto que por tener talento el alumno vaya a aprenderlo todo solo.

Una cosa que se aprecia en el trabajo es que el grupo del máster ha sido bastante uniforme en todos los aspectos evaluados, mientras que en el grupo de ESTALMAT ha habido en general situaciones muy dispersas, puntuaciones muy altas junto a puntuaciones muy bajas. Esto podría deberse a que la formación matemática es estándar para todos, mientras que el talento es algo innato, distinto en cada individuo, aunque también podría ser un dato casual, puesto que el estudio es pequeño.

La realización de este estudio ha presentado una serie de limitaciones, aspectos que se podrían cambiar para mejorar el trabajo. Para empezar, han sido muy pocos participantes; lo ideal hubiera sido tener muchos más, pero las circunstancias lo han dificultado bastante (aunque por otra parte, el hecho de que fueran pocos ha dado lugar a estudiar más cosas que con mucha gente al detalle y analizar las particularidades). Otra gran limitación ha sido que por las circunstancias ha sido imposible quedar en persona con los participantes para hacer la prueba, de modo que hay que confiar en que todos han respetado las normas, pero no hay forma de comprobarlo a ciencia cierta.

En lo que respecta a líneas de trabajos futuros, contemplamos varias posibilidades para mejorar y extender este estudio. Para empezar, visto que con muestras pequeñas el estudio ha dado resultados coherentes, parece razonable plantearse hacer un estudio similar con muestras más grandes de participantes, e incluso añadiendo muestras de participantes de otros ámbitos, no sólo de ESTALMAT y del máster de secundaria. En ese estudio, tendríamos que solventar las limitaciones que ha tenido el presente trabajo: habría que hacer la prueba presencial, asegurándonos de que se respete el límite de tiempo. Para hacer más estudios de este tipo es conveniente, en primer lugar, contar con una buena base de datos de problemas que usar y de los que ya hemos estudiado y clasificado bien sus respectivos espacios de soluciones, y además, hay que decidir de antemano si los datos se van a analizar basándonos en los esquemas de Leikin como en este trabajo, o si se va a usar un nuevo sistema. El sistema de Leikin es un buen método para analizar la creatividad de estudiantes con talento matemático, y de la forma que está planteado, como comentábamos en el marco teórico, permite obtener resultados particulares a partir del resultado general; sin embargo, hay una serie de consideraciones a tener en cuenta:

- En primer lugar, tanto la clasificación de soluciones por tipo para analizar la flexibilidad como la clasificación de soluciones por grado de convencionalidad para analizar la originalidad, tienen fuertes componentes subjetivos. Eso conlleva un problema: es posible que si una persona hace una clasificación, y otra persona hace una clasificación distinta, el valor de creatividad de uno de los estudiantes varíe e incluso cambie de orden de magnitud entre una y la otra. Es conveniente contar con problemas donde estas clasificaciones se puedan hacer con cierta objetividad, y eso es muy difícil, si no imposible, primero porque no hay forma de asegurarse de que se hayan encontrado todas las soluciones a un problema (por ejemplo, en el Problema 2 de ese trabajo, era difícil esperarse que alguien iba a resolverlo usando una desigualdad de medias con homogeneizaciones de grados), y para seguir, porque incluso si se han encontrado todas las soluciones, toda clasificación que se haga se basará en unos criterios elegidos por alguien, y por tanto siempre habrá cierto grado de subjetividad.

- El método de Leikin tiene una limitación que se podría solventar si se diera el caso. El cambio de la escala original 2-4-6 a la escala 0,1-1-10 se hizo con el objetivo de poder recuperar los resultados particulares a partir del resultado final. Sin embargo, eso sólo se cumple si la cantidad de resoluciones ofrecidas a un problema es inferior a 10. Si se diera el caso de que alguien ofreciera más soluciones para un problema, sería conveniente hacer una nueva escala 0,01-1-100 para poder seguir recuperando los resultados individuales a partir de los finales.
- Por último, esta forma de evaluar la creatividad conlleva un problema: puede ocurrir que dos personas den exactamente las mismas soluciones a un problema pero que por darlas en orden distinto, la creatividad de uno y el otro pueda llegar a ser de órdenes de magnitud distintos, como muestra el siguiente ejemplo:

Imaginemos que para un cierto problema tenemos las siguientes soluciones:

<table>
<tr><th>Grupo de soluciones (para la flexibilidad)</th><th>Puntos de originalidad</th></tr>
<tr><td>S1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S2
S3</td><td>10</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>S4</td><td>10</td></tr>
</table>

Tabla 23: Esquema de soluciones, ejemplo de limitación del método.

Si un estudiante, A, diera las soluciones S1, S2 y S3 en ese orden, y otro estudiante, B, diera las soluciones S1, S3 y S2 en ese orden, el primero obtendría en total $10 \cdot 1 + 10 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 111$ puntos de creatividad, mientras que el segundo, habiendo dado las mismas soluciones, obtendría en total únicamente $10 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 1 \cdot 10 = 30$ puntos de creatividad.

Salvo que esto esté hecho aposta para premiar de alguna forma el orden en el que se obtienen las respuestas, cabe plantearse alguna forma de solucionarlo. Una posibilidad sería: siempre que se dé el caso de que varias de las soluciones de alguien pertenezcan al mismo grupo de soluciones, se calculan todas las puntuaciones que puede obtener variando el orden de las soluciones y se le asigna un valor concreto (el mínimo, la media, el máximo…). Otra posibilidad es hacer que la clasificación por flexibilidad dependa de la clasificación por originalidad en lugar de ser independientes, de forma que cada solución con 10 puntos de originalidad esté sola en una categoría en lugar de en el mismo grupo que otras soluciones.

6 – Bibliografía

Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* España: Narcea.

Costa J. (2018). Entrevista a la profesora Dra. Roza Leikin. Disponible en <http://asfames.com/entrevista-la-profesora-dra-roza-leikin/>.

Davydov, V. V. (1990). *Type of generalization in instruction: Soviet studies in mathematics education.* Reston, VA, E.E.U.U.: National Council of Teachers of Mathematics.

De Guzmán, M. (s.f.) El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Disponible en <http://elclubdelamatematica.blogspot.com. es/2010/06/talento-matematico.html>.

Jaime, A., Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: Universidad de Valencia.

Krutetskii, V. A. (Ed.) (1976). *The psychology of mathematical abilixties in school children.* Chicago, IL, E.E.U.U.: University of Chicago Press.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., y Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students'attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics, 28*(1), 1-22.

Leikin, R. (2011). Multiple-solution tasks: from a teacher education course to teacher practice. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43*(6-7), 993-1006.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling, 55*(4), 385-400.

Leikin, R. y Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 161-168). Seúl, Koera: PME.

Levav-Waynberg, A., y Leikin, R. (2009). Multiple solutions to a problem: A tool for assessment of mathematical thinking in geometry. En Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne S. y Arzarello, F. (Eds.). *Proceedings of the Sixth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME-6* (vol. 6, pp. 776-785). Lyon, Francia: ERME.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Miralles, A. (2008). La Experiencia ESTALMAT en la Comunidad Valenciana. *Modelling in Science Education and Learning, 1*(5), 39-44.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.*. Princeton, NJ, E.E.U.U.: Princeton University Press.

Shapiro, S. I. (1965). A study of pupil's individual characteristics in processing mathematical information. *Voprosy Psikhologii*, 2.

Srimanan, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of Four Gifted Students. *Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151-165.

Anexo 1: Soluciones restantes de cada problema

Problema 1:

Recordamos el enunciado del problema:

> Problema 1: Probar que en cualquier triángulo rectángulo, la mediana que une el vértice del ángulo recto con el punto medio de la hipotenusa, mide igual que media hipotenusa.

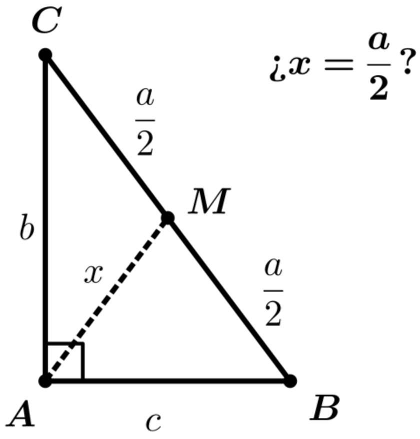


Figura 15: Enunciado del problema 1.

A continuación se listarán las soluciones desde S1c hasta S1m:

> S1c) El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el circuncentro del triángulo, por lo que $x = \frac{a}{2} = R$:

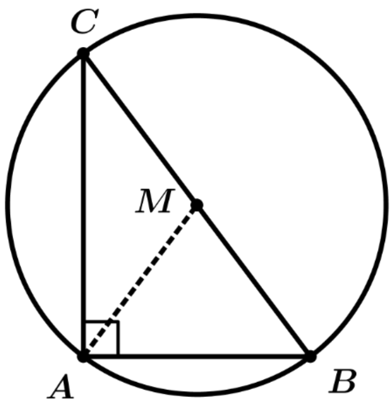


Figura 16: Tercera solución al problema 1.

> S1d) Trazamos sobre el cateto $\overline{AB}$ (por ejemplo) la altura desde M en el triángulo ABM, y llamamos D al punto de corte. Como M es el punto medio de la hipotenusa y D es su proyección ortogonal sobre el cateto, D debe ser el punto medio del cateto. Ahora usamos eso para ver que el triángulo ABM es isósceles, por el método que sea (Tales, semejanza

entre ADM y DBM por tener los catetos iguales, usar que el único triángulo donde la altura coincide con la mediatriz es el isósceles, Pitágoras, u otros métodos):

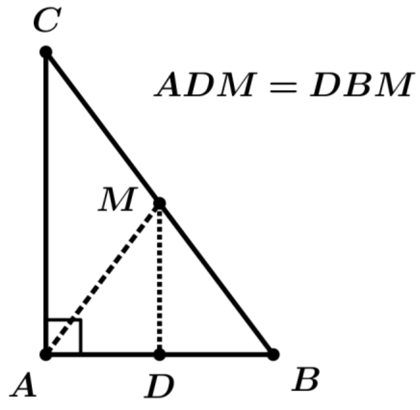


Figura 17: Cuarta solución al problema 1.

S1e) Si duplicamos la figura por el cateto $\overline{AC}$ simétricamente como en S1a, y duplicamos de nuevo la figura resultante por la base $\overline{BB'}$ por simetría, los 4 triángulos forman un rombo (forman un cuadrilátero, y los lados miden lo mismo todos). Como M es el punto medio de $\overline{BC}$ y M''' es el punto medio de $\overline{B'C'}$, obtenemos que $MCB'M'''$ es un paralelogramo, así que $\overline{MM'''}$, que mide $2x$, mide lo mismo que $\overline{CB'}$, es decir, lo mismo que la hipotenusa:

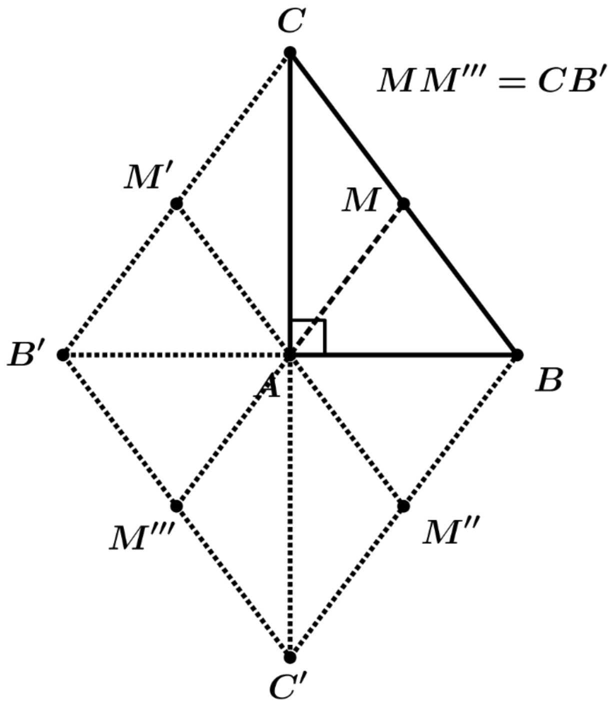


Figura 18: Quinta solución al problema 1.

S1f) Con geometría analítica: colocamos el triángulo sobre unos ejes de coordenadas, de forma que si las coordenadas de los vértices son $A = (0,0)$, $B = (c, 0)$ y $C = (0, b)$, obtenemos que $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$, y ahora basta con ver que la distancia de A a M es igual a la distancia de M a B, ya sea haciéndolo como distancia entre 2 puntos o haciéndolo como módulo del vector que une cada par de puntos:

$$d(M, B) = \sqrt{\left(c - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = d(A, M)$$

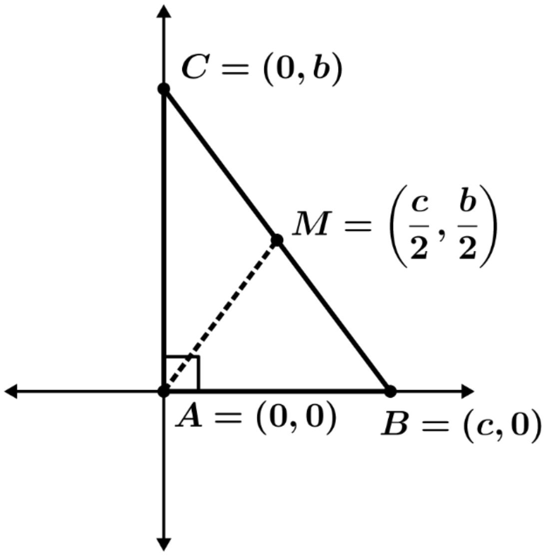


Figura 19: Sexta solución al problema 1.

S1g) Aplicando el teorema del coseno. Llamamos $\alpha = \angle ABC$, y aplicamos el teorema del coseno al triángulo ABC y al triángulo ABM y despejamos $\cos(\alpha)$ en ambas:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{-2ca} = \frac{b^2 - c^2 - c^2 - b^2}{-2ca} = \frac{c}{a}$$

$$x^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{2ca}{2}\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{x^2 - c^2 - \frac{a^2}{4}}{-ca}$$

Igualamos las expresiones y operamos:

$$\frac{x^2 - c^2 - \frac{a^2}{4}}{-ca} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2 - c^2 - \frac{a^2}{4} = -c^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{a}{2}$$

Como una longitud no puede ser negativa, eso prueba lo que se nos pedía.

Hay otras opciones para el teorema del coseno. Por ejemplo, si $\alpha = \angle AMB$, usando que $\cos(180º - \alpha) = -\cos(\alpha)$, aplicamos el teorema del coseno a los triángulos AMB y ACM, obteniendo:

$$c^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2x\frac{a}{2}\cos(\alpha)$$

$$b^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2x\frac{a}{2}\cos(\alpha)$$

Si sumamos esas expresiones obtenemos lo que queríamos:

$$c^2 + b^2 = a^2 = 2x^2 + \frac{a^2}{2} \Longrightarrow x = \frac{a}{2}$$

S1h) Llamemos D al punto medio de $\overline{AB}$ y E al punto medio de $\overline{AC}$. Como los 4 triángulos que se obtienen uniendo M, E y D son semejantes al original y congruentes entre sí, obtenemos que $ADME$ es un rectángulo, y sus diagonales, $\overline{AM}$ y $\overline{DE}$ deben medir lo mismo, pero como esta última debe medir lo mismo que $\overline{MB}$ por semejanza, obtenemos lo que queríamos:

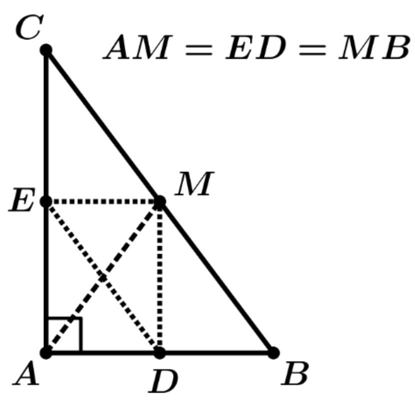


Figura 20: Octava solución al problema 1.

S1i) Partiendo del triángulo ABC original, trazamos desde A un segmento hasta un punto P de $\overline{BC}$ de forma que los dos triángulos que obtenemos sean isósceles (eso lo vamos a poder hacer porque los ángulos no rectos del triángulo son por fuerza complementarios). Entonces tenemos:

$$\begin{matrix} d(B,P) = d(P,A) \\ d(P,A) = d(P,C) \end{matrix} \Rightarrow d(P,B) = d(P,C) \Rightarrow P = M$$

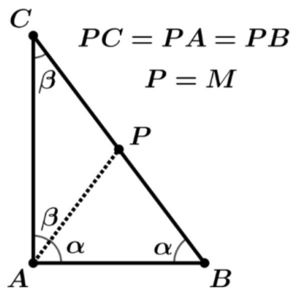


Figura 21: Novena solución al problema 1.

S1j) Por geometría analítica más elaborada. Ponemos el triángulo sobre ejes coordenados igual que antes. Averiguamos la ecuación de la recta BC, $f(x) = b - \frac{b}{c}x$. Escogemos un punto genérico $P_x = \big(x, f(x)\big)$ de esa recta. Averiguamos la distancia de ese punto genérico al punto A y al punto B (como A es el origen, la distancia a ese punto es simplemente la raíz de la suma de los cuadrados de las componentes): $d(A, P_x) = \sqrt{x^2 + \left(b - \frac{b}{c}x\right)^2}$, $d(P_x, B) = \sqrt{(c - x)^2 + \left(-b + \frac{b}{c}x\right)^2}$. Resolvemos la ecuación que nos da $d(A, P_x) = d(P_x, B)$ (es relativamente sencillo ver que x debe valer $\frac{c}{2}$, por lo que el punto que hace que esas distancias sean iguales es M, lo cual demuestra lo que nos pedían).

S1k) Usando simetría. Si D es el punto medio de $\overline{AB}$, la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es la recta DM. Por tanto, A es el simétrico de B con respecto a la recta DM, por lo que si cogemos un punto cualquiera de esa recta, M por ejemplo, la distancia de ese punto a A y a B debe ser la misma.

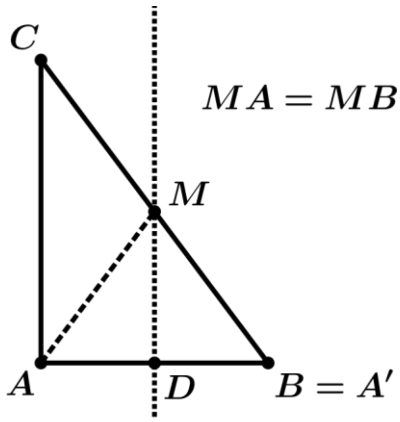


Figura 22: Décima solución al problema 1.

S1l) Otra forma de plantearlo una vez construida la mediatriz era asumir que la recta MD es un espejo y desde el punto C se traza un rayo de luz hasta el simétrico de A, que es B, de forma que cuando el rayo toca el punto M se refleja y va hacia A, por lo que $\overline{MA}$ debe medir lo mismo que $\overline{MB}$ (uno no es más que la imagen simétrica del otro).

S1m) Al igual que podíamos aplicar el teorema del coseno, también se puede aplicar el teorema del seno. Si se lo aplicamos al triángulo AMB y al triángulo ACM, usando que $\sin(90º - x) = \cos(x)$, obtenemos fácilmente dos relaciones entre $\frac{a}{2}$ y x:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin(\angle MAB)} = \frac{x}{\sin(\angle ABM)}, \qquad \frac{\frac{a}{2}}{\cos(\angle MAB)} = \frac{x}{\cos(\angle ABM)}$$

Si despejamos $\frac{a}{2}$ e igualamos expresiones obtenemos que:

$$x\frac{\sin(\angle MAB)}{\sin(\angle ABM)} = x\frac{\cos(\angle MAB)}{\cos(\angle ABM)}$$

Si pasamos todo a la izquierda y operamos, obtenemos:

$$x\frac{\sin(\angle MAB - \angle ABM)}{\sin(\angle ABM)\cdot\cos(\angle ABM)} = 0$$

Eso implica que el numerador es 0, y como los dos ángulos usados son agudos, eso significa que son necesariamente el mismo ángulo, de donde $x = \frac{a}{2}$.

Problema 2:

Recordamos el enunciado del problema:

Problema 2: Si a y b son dos números que suman 1, ¿Qué relación hay entre $a^2 + b$ y $a + b^2$?

A continuación se listarán las soluciones desde S2c hasta S2l:

S2c) Partimos de $a^2 + b \overset{?}{\cong} b^2 + a$. Pasamos los cuadrados a un lado y los términos lineales al otro, y obtenemos $(a-b)(a+b) \overset{?}{\cong} (a-b)$. Una vez aquí tenemos varias opciones. Por ejemplo, podemos sustituir el $(a+b)$ por un 1 y obtenemos la igualdad.

S2d) Otra opción referente a la solución anterior sería pasar todo al lado izquierdo y factorizar, y obtenemos $(a-b)(a+b-1) \overset{?}{\cong} 0$. Como el segundo factor es 0, obtenemos la igualdad.

S2e) En la solución S2c, también podríamos haber planteado la ecuación: $D \cdot S = D$ se cumple si, y sólo si, se da cualquiera de estos casos: $D = 0$, $S = 1$. Por tanto, si $a + b = 1$, obtenemos la igualdad.

S2f) Partimos de $a^2 + b \overset{?}{\cong} b^2 + a$. Pasamos todo al lado izquierdo y nos lo planteamos como una ecuación donde a es la incógnita: $a^2 - a + b(1-b) = 0$ y resolvemos por el método que sea (fórmula de 2º grado, Ruffini, Cardano-Vieta, Completación de cuadrados…), obteniendo como soluciones $a = b$ y $a = 1 - b$. Como $1 - b$ es solución, si $a = 1 - b$, obtenemos la igualdad, que era lo que queríamos.

S2g) Consideramos la expresión $a^2 + b - a - b^2 = a^2 - a + b(1-b)$. Como b depende linealmente de a, se trata de una expresión de grado a lo sumo 2 en a. Si damos 3 pares de valores ($a = 1$, $b = 0$; $a = 0{,}5$, $b = 0{,}5$; $a = 0{,}3$, $b = 0{,}7$), obtenemos 0 en todos ellos. La única forma de que un polinomio de grado 2 o menos alcance el 0 en más de 2 puntos es que sea la función idénticamente nula.

S2h) Pasamos todo a la izquierda, factorizamos, y usamos que $a + b = 1$:

$$a^2 + b - a - b^2 = a(a - 1) + b(1 - b) = a(-b) + ba = 0$$

S2i) Usando que $a + b = 1$, en cada término, vamos a multiplicar el sumando lineal por $(a + b)$ para homogeneizar los grados:

$$a^2 + b(a + b) = a^2 + ab + b^2$$

$$b^2 + a(a + b) = a^2 + ab + b^2$$

Obtenemos el mismo resultado, así que los originales deben ser iguales.

S2j) Para ver que dos cosas son iguales, aparte de ver que la resta vale 0, podemos ver que el cociente vale 1. Veámoslo:

$$\frac{a^2 + b}{b^2 + a} \overset{?}{=} 1$$

Dividimos numerador y denominador por ab:

$$\frac{a^2 + b}{b^2 + a} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{a + b}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{a + b}{b}} = \frac{\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b}} = 1$$

S2k) Hay otras formas de ver que el cociente da 1, haciendo, por ejemplo, sustitución directa tras plantearlo:

$$\frac{a^2 + b}{b^2 + a} = \frac{a^2 + (1 - a)}{(1 - a)^2 - a} = \frac{a^2 - a + 1}{a^2 - a + 1} = 1$$

S2l) Pasamos todo a la izquierda, sumamos y restamos $\frac{1}{4}$ y factorizamos:

$$a^2 + b - a - b^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(b - \frac{1}{2}\right)^2$$

A partir de ahí hay varios caminos posibles a tomar: ver que si $a = 1 - b$, entonces son simétricos con respecto a $\frac{1}{2}$ y por lo tanto la expresión es 0; factorizar la diferencia de cuadrados y obtener $(a - b)(a + b - 1)$, que claramente es 0 si $a + b = 1$.

Problema 3:

Recordamos el enunciado del problema:

Problema 3: De todos los rectángulos con un mismo perímetro, ¿cuál es el que tiene la diagonal más pequeña?

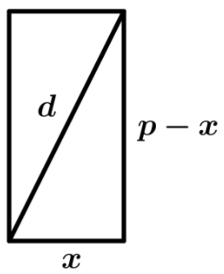


Figura 23: Enunciado del problema 3.

El objetivo es minimizar el valor de d manteniendo constante el de p. Veamos varias formas de hacerlo. Fijémonos en que por Pitágoras, $d = \sqrt{x^2 + (p-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2px + p^2}$:

A continuación se listarán las soluciones desde S3c hasta S3i:

S3c) Buscamos el vértice de la parábola usando la fórmula: $x = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

S3d) También podemos razonar por simetría: x y $p - x$ son simétricos con respecto a $\frac{p}{2}$, por lo que los podemos reescribir como $\left(\frac{p}{2} - a\right)$ y $\left(\frac{p}{2} + a\right)$. Haciendo eso, la función a minimizar ahora es $\left(\frac{p}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{p}{2} + a\right)^2 = \frac{p^2}{4} - ap + a^2 + \frac{p^2}{4} + ap + a^2$, que podemos reescribir como $\frac{p^2}{2} + 2a^2$, lo cual claramente alcanza su mínimo si $a = 0$.

S3e) Podemos usar una desigualdad de medias (la aritmético-geométrica y la aritmético-cuadrática parecen las más prácticas para este problema. Usaremos esta última, que recordemos que dice que $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$):

$$\sqrt{(p-x)^2 + x^2} \geq \frac{\sqrt{2} \cdot \left((p-x) + x\right)}{2} = \frac{p}{\sqrt{2}},$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $x = p - x = \frac{p}{2}$.

S3f) Otra desigualdad que podemos usar es la de Cauchy-Schwarz, aplicada a los vectores $(p - x, x)$ y $(1, 1)$ (recordemos que la mencionada desigualdad dice que $|u \cdot v|^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2$):

$$p^2 \leq 2((p-x)^2 + x^2),$$

y la igualdad se alcanza si, y sólo si, los dos vectores son proporcionales, esto es, si $\frac{p-x}{x} = 1$, que sólo se da si $x = p - x = \frac{p}{2}$.

S3g) Si consideramos el rectángulo apoyado sobre unos ejes de coordenadas de forma que el vértice inferior izquierdo sea el centro de coordenadas y dos de sus lados estén sobre los ejes, podemos resolver el problema usando geometría analítica: el vértice opuesto al que colocamos en el origen sólo puede estar en la recta $y = p - x$. La diagonal más corta es precisamente la que es perpendicular a esa recta (la altura del triángulo), que es la que se corresponde con la recta $y = x$, y por tanto con el cuadrado:

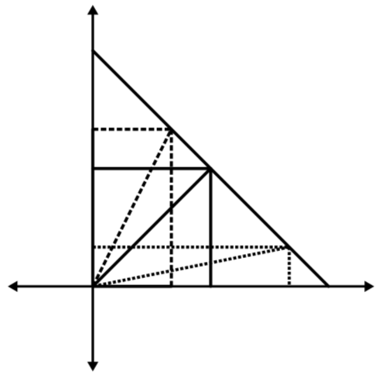


Figura 24: Séptima solución del problema 3.

S3h) Razonando sobre el mismo esquema que en la solución anterior, los vértices para que el perímetro sea constante, definen una recta, y los vértices para que la diagonal mida como en el cuadrado, son un arco de círculo, y como la recta es tangente a ese arco, cualquier vértice de esa recta que no sea el punto de tangencia tendrá por fuerza una diagonal más grande que la del cuadrado:

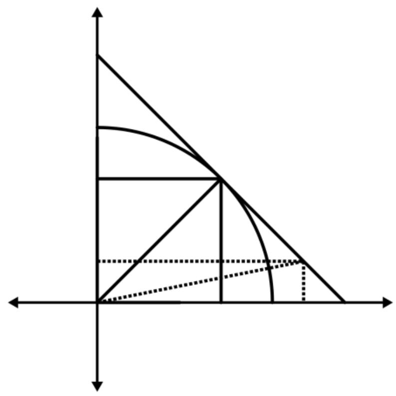


Figura 25: Octava solución del problema 3.

Una variación de este razonamiento es razonar por simetría, comparando un rectángulo con el cuadrado y dándose cuenta de que la diagonal del rectángulo es una hipotenusa de un triángulo que tiene como cateto la diagonal del cuadrado. Hay más formas de razonar a partir de un dibujo como ése (trigonometría, por ejemplo), pero se llega a la misma conclusión.

S3i) Vamos a partir del cuadrado, y vamos a ver que cualquier otro rectángulo con el mismo perímetro tiene una diagonal más grande necesariamente, y lo vamos a hacer geométricamente de la siguiente forma: partimos de dos puntos a distancia d. Construimos una circunferencia que tenga el segmento como diámetro. Como la elipse es el lugar geométrico de los puntos de forma que la suma de distancias a 2 fijos es constante, vamos ahora a construir una elipse que tenga por focos los dos puntos iniciales de forma que la suma de distancias de sus puntos a los focos sea p. Esa elipse tiene que ser necesariamente tangente a la circunferencia en los puntos situados en la mediatriz del segmento original. Escogemos ahora cualquier punto de la elipse que no sea uno de los dos puntos de tangencia mencionados, y lo unimos a los focos. Como el punto es exterior a la circunferencia, el ángulo que se forma es agudo. Si con dos segmentos de esas mismas longitudes quisiéramos hacer un ángulo recto, el lado d tendría que crecer necesariamente. Esto prueba lo que queríamos.

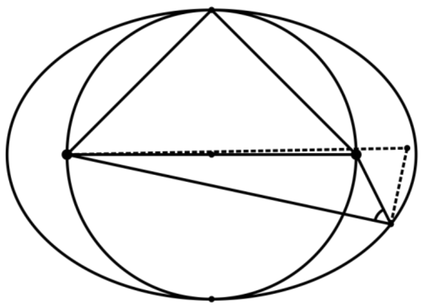


Figura 26: Novena solución del problema 3.

A partir de esa figura se podrían haber utilizado otros razonamientos, como las homotecias, pero se llegaría a la misma conclusión.

Problema 4:

Recordamos el enunciado del problema:

Problema 4: En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 y 12. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita?

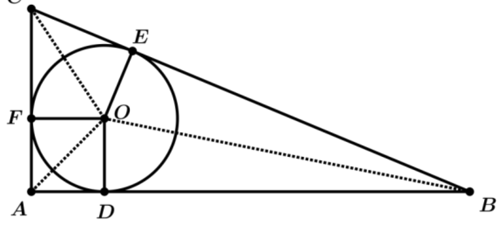


Figura 27: Enunciado del problema 4.

A continuación se listarán las soluciones S4c y S4d:

S4c) Por las propiedades de las bisectrices, sabemos que $d(C,F) = d(C,E) = x$, $d(A,F) = d(A,D) = y = r$, $d(B,E) = d(B,D) = z$. Eso nos da la posibilidad de encontrar r mediante un sistema de 3 ecuaciones, un sistema de 2 ecuaciones o una ecuación:

$$\begin{cases} x + z = 13 \\ x + y = 5 \\ y + z = 12 \end{cases} \Rightarrow y = r = 2$$

$$\begin{cases} z + r = 12 \\ z + (5 - r) = 13 \end{cases} \Rightarrow r = 2$$

$$(5 - r) + (12 - r) = 13 \Rightarrow r = 2$$

S4d) Podemos usar geometría analítica. Colocamos el triángulo de forma que $B = (0,0)$, $A = (12,0)$ y $C = (12,5)$. Calculemos dos de las bisectrices. La bisectriz del ángulo de A es claramente $y = 12 - x$. En cuanto a la del ángulo de B, la recta BC es la recta $y = \frac{5}{12}x$, que forma un ángulo de $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ con la horizontal. Buscamos una recta que forme justo la mitad de ese ángulo con la horizontal: $y = \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}{2}\right)x$. Ahora resolvemos la ecuación:

$$\tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}{2}\right)x = 12 - x \Rightarrow x = \frac{12}{1 + \tan\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)}{2}\right)} = 10 \Rightarrow y = r = 2$$

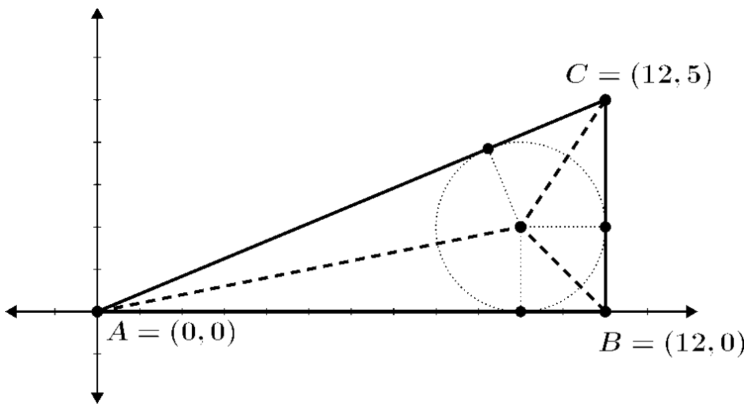


Figura 28: Resolución del problema 4 por geometría analítica.

Anexo 2: Cálculo de la creatividad de cada estudiante por problema

Problema 1:

La siguiente tabla muestra qué soluciones ha obtenido cada alumno en el problema 1 y en qué orden, y para una calcula sus valores de flexibilidad, originalidad y creatividad:

Alumno	S1	F	O	C	S1	F	O	C	S1	F	O	C	S1	F	O	C	S1	F	O	C
AM1	m	10	1	10																
AM2	b	10	0,1	1	f	10	0,1	1												
AM3	d	10	0,1	1	m	10	1	10	c	1	0,1	0,1								
AM4	b	10	0,1	1	d	1	0,1	0,1												
AM5																				
AE6	k	10	0,1	1	d	0,1	0,1	0,01	n	10	10	100								
AE7																				
AE8	b	10	0,1	1	c	1	0,1	0,1	f	10	0,1	1	k	1	0,1	0,1	g	10	1	10
AE9	k	10	0,1	1	b	1	0,1	0,1												
AE10	c	10	0,1	1	f	10	0,1	1	m	10	1	10	g	1	1	1				
AE11	ñ	10	10	100																

Tabla 24: Flexibilidad, originalidad y creatividad por solución y participante en el problema 1.

Problema 2:

La siguiente tabla muestra qué soluciones ha obtenido cada alumno en el problema 2 y en qué orden, y para una calcula sus valores de flexibilidad, originalidad y creatividad:

Alumno	S2	F	O	C	S2	F	O	C	S2	F	O	C	S2	F	O	C	S2	F	O	C
AM1	a	10	0,1	1	h	1	1	1	b	10	1	10								
AM2	a	10	0,1	1	c	1	0,1	0,1	m	10	10	100								
AM3	b	10	10	100	a	10	0,1	1	a	0,1	0,1	0,01	d	1	0,1	0,1				
AM4	c	10	0,1	1	i	10	1	10	b	10	1	10								
AM5	a	10	0,1	1	h	1	1	1	c	1	0,1	0,1	j	10	10	100	k	1	0,1	0,1
AE6	c	10	0,1	1	c	0,1	0,1	0,01												
AE7	j	10	10	100																
AE8	a	10	0,1	1	h	1	1	1	n	10	10	100	c	1	0,1	0,1	i	1	1	1
AE9																				
AE10	a	10	0,1	1	h	1	1	1	b	10	1	10	ñ	10	10	100				
AE11	a	10	0,1	1																

Tabla 25: Flexibilidad, originalidad y creatividad por solución y participante en el problema 2.

Problema 3:

La siguiente tabla muestra qué soluciones ha obtenido cada alumno en el problema 3 y en qué orden, y para una calcula sus valores de flexibilidad, originalidad y creatividad:

Alumno	S3	F	O	C	S3	F	O	C	S3	F	O	C	S3	F	O	C
AM1	a	10	0,1	1												
AM2	a	10	0,1	1												
AM3	a	10	0,1	1												
AM4	a	10	0,1	1												
AM5	b	10	0,1	1												
AE6	b	10	0,1	1	d	10	10	100								
AE7	a	10	0,1	1												
AE8	e	10	10	100	j	10	10	100	c	10	1	10				
AE9																
AE10	e	10	10	100	g	10	1	10	k	10	10	100	a	10	0,1	1
AE11	l	10	10	100												

Tabla 26: Flexibilidad, originalidad y creatividad por solución y participante en el problema 3.

Problema 4:

La siguiente tabla muestra qué soluciones ha obtenido cada alumno en el problema 4 y en qué orden, y para una calcula sus valores de flexibilidad, originalidad y creatividad:

Alumno	Sol	F	O	C	Sol	F	O	C	Sol	F	O	C
AM1												
AM2	S4e	10	1	10								
AM3	S4f	10	1	10	S4d	10	0,1	1				
AM4												
AM5	S4d	10	0,1	1								
AE6	S4b	10	1	10	S4g	10	1	10				
AE7	S4d	10	0,1	1								
AE8	S4a	10	0,1	1	S4d	10	0,1	1	S4c	10	1	10
AE9	S4a	10	0,1	1								
AE10	S4b	10	1	10	S4h	10	1	10				
AE11	S4g	10	1	10	S4i	1	10	10				

Tabla 27: Flexibilidad, originalidad y creatividad por solución y participante en el problema 4.