UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Profesor/a de Educación Secundaria

# Análisis de pruebas de selección de estudiantes con talento matemático y caracterización del perfil de los participantes y seleccionados

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentada por:

Rubén Sancho Portolés

Tutorizada por:

Dr. Irene Ferrando Palomares

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Valencia, 25 de junio de 2020

**Ficha técnica** (todos los campos son obligatorios excepto el resumen en inglés):

**Máster**: Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València

**Especialidad**: Matemáticas

**Autor**: Apellidos: Sancho Portolés
Nombre: Rubén

**Título de la memoria**: Análisis de pruebas de selección de estudiantes con talento matemático y caracterización del perfil de los participantes y seleccionados

**Tutor**: Apellidos: Ferrando Palomares
Nombre: Irene
Departamento: Didáctica de las Matemáticas

**Fecha de defensa**:

**Calificación** (numérica y Matr. de Honor si procede):

**Palabras clave**: Talento matemático, Características, Detección, Proyecto Estalmat CV, Diferencias de género.

**Keywords**: Mathematical giftedness, Characteristics, Detection, Estalmat CV Project, Gender differences.

**Códigos Unesco:** 5803.02 (Formación de profesores), 12 (Matemáticas) y 1299 (Didáctica de las Matemáticas)

**Resumen:** El programa Estalmat CV selecciona cada año a 25 estudiantes de la entre 11 y 13 años para participar en un proyecto de estímulo del talento matemático. En este trabajo se analizan las pruebas de selección y los resultados de 2018 y 2019. Los objetivos son, por un lado, analizar las características de los problemas de las pruebas de selección y reflexionar sobre su adecuación para detectar alumnos con altas capacidades y, por otro, analizar los datos de participación y los resultados en busca de regularidades en los perfiles de estudiantes. Entre las variables que se tendrán en cuenta en la caracterización de los perfiles, se presta especial atención al género, que tiene un gran interés en las investigaciones en este campo, pero también la edad, el tipo de centro y la provincia de origen de los participantes y seleccionados. Las conclusiones obtenidas pueden ser útiles para futuras investigaciones y para la elaboración y corrección de pruebas posteriores.

**Abstract**: The Estalmat CV program selects 25 students aged 11-13 each year to participate in a project to stimulate mathematical giftedness. This work analyses the selection tests and the results of 2018 and 2019. The aims are, on the one hand, to analyse the characteristics of the problems of the selection tests and to reflect on their suitability for detecting students with high abilities and, on the other hand, to analyse participation data and results in search of regularities in student profiles. Among the variables taken into account in the characterization of the profiles, special attention is paid to gender, which is of great interest in research in this field, but also age, type of centre and province of origin of the participants and selected. The conclusions obtained can be useful for future research and for the elaboration and correction of subsequent tests.

# ÍNDICE

# 1. INTRODUCCIÓN

El proyecto Estalmat en la Comunidad Valenciana selecciona cada año a 25 estudiantes de entre 11 y 13 años de edad para participar durante dos cursos académicos en sesiones semanales de contenido matemático para potenciar su talento. Los aspirantes se enfrentan a una prueba de selección basada en la resolución de 5 problemas matemáticos.

Existen diversas investigaciones dedicadas a determinar los aspectos que caracterizan a los estudiantes con altas capacidades matemáticas, y en particular a la detección de estos a través de la resolución de problemas. En base a estos estudios, detallados en el marco teórico, uno de los objetivos de este trabajo será analizar las pruebas de selección de Estalmat CV de 2018 y 2019 identificando qué habilidades de este tipo exige cada problema.

Por otra parte, en los últimos años también se han estudiado en profundidad las diferencias de género existentes en la actitud hacia las matemáticas. La menor motivación y confianza por parte de las chicas se traduce en una baja participación y unos resultados peores que los de chicos en este tipo de pruebas, como explicaremos en el marco teórico. Por este motivo, dado que disponemos de los resultados de los estudiantes en las pruebas de selección que analizaremos, otro de nuestros objetivos será detectar si existen o no estas diferencias de género para comprobar y complementar los resultados de las investigaciones.

Finalmente, observando que en los datos de los que disponemos tenemos algo más información sobre los estudiantes que se presentaron a la prueba, hemos pensado que es interesante también incluir en el análisis otras variables de estudio además del género, que son el año de nacimiento, el tipo de centro (público o privado/concertado) y la provincia. Los resultados según estas variables tienen interés por sí mismos, pero además pueden ayudar a establecer relaciones entre variables que contribuyan a obtener conclusiones más precisas.

La estructura que seguimos para organizar el trabajo es la siguiente. Comenzamos estableciendo el marco teórico con los estudios en los que nos basamos para fundamentar y desarrollar el trabajo. En segundo lugar, realizamos un análisis exhaustivo de los problemas de las pruebas de selección para justificar la adecuación de estos y relacionar sus características con los resultados de las secciones siguientes. A continuación, comenzamos con los análisis de los datos de los que disponemos, empezando por el estudio del perfil de los estudiantes que se presentaron a las pruebas. Una vez identificado el perfil de los presentados, estudiamos el de los seleccionados, observando si existen diferencias significativas entre ambos y si la forma de selección interviene en este aspecto. Después de centrarnos en la selección estudiamos las puntuaciones generales de los aspirantes, por variables y por problemas, en busca de discrepancias destacadas. Finalmente, establecemos unas conclusiones generales de todo el estudio, así como las limitaciones de este y posibles líneas de trabajo futuro.

# 2. MARCO TEÓRICO

La identificación y apoyo a los alumnos con altas capacidades matemáticas supone un reto para nuestro sistema educativo. La legislación actual, tanto a nivel estatal como autonómico, contempla a este tipo de alumnado entre los que presentan necesidades educativas especiales. Los decretos que establecen el currículum, el Real Decreto 1105/2014 y el Decreto 87/2015, indican que se debe adoptar medidas de atención a la diversidad adaptadas a las necesidades de cada alumno. En la Orden 20/2019, la más reciente a nivel autonómico sobre atención a la diversidad, se establecen la identificación, valoración y el plan de actuación a seguir con alumnos con necesidades educativas especiales, aunque de forma muy general y con muy pocos detalles por lo que respecta al alumnado con altas capacidades. Las únicas medidas concretas que se detallan son el enriquecimiento curricular y la aceleración que comentamos a continuación.

Existen distintas opciones a la hora de proporcionar un trato adecuado a este tipo de alumnos. Jaime y Gutiérrez (2014) hacen una recopilación de las acciones que se desarrollan actualmente en este sentido, distinguiendo entre formas de apoyo escolar y extraescolar.

Las posibles actuaciones en el ámbito escolar son la aceleración (realización de dos cursos en un año), el agrupamiento (grupo de trabajo con varios alumnos de capacidades similares), el enriquecimiento curricular (estudio de temas extra-curriculares) y la profundización (estudio más completo de temas curriculares). Cada una de estas opciones tiene sus ventajas e inconvenientes, por las dificultades que suponen para alumnos y profesores.

En el ámbito extraescolar Jaime y Gutiérrez (2014) distinguen entre acciones de tipo curricular (talleres organizados por los centros), de resolución de problemas (olimpiadas matemáticas, páginas web como Nrich[1]…), de tipo lúdico (actividades y juegos en contextos informales no específicamente matemáticos) y mixtas (como las organizadas por Estalmat).

El proyecto Estalmat surgió en Madrid en 1998 de la mano de Miguel De Guzmán (De Guzmán, s. f.) para la detección y estímulo del talento precoz en matemáticas en la Comunidad de Madrid. Desde entonces se ha ido extendiendo a otras comunidades, llegando por primera vez a la Comunidad Valenciana en 2007 (Miralles, 2008).

Las pruebas de selección que analizamos en este trabajo se basan en la resolución de problemas. Son varios los estudios que coinciden en que esta es la mejor forma de identificar a los alumnos con altas capacidades matemáticas (Díaz et al, 2008). Esto se debe a que los aspectos que caracterizan a estos estudiantes son fácilmente reconocibles en esta situación, como indica por ejemplo Greenes (1981). Jaime y Gutiérrez (2014) realizan una recopilación de características de este tipo de alumnado a partir de distintos estudios. Destacamos algunas que son más fácilmente reconocibles en la realización de problemas como los de las pruebas de selección de Estalmat que analizaremos en la siguiente sección:

1. Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.
2. Originalidad en las ideas.
3. Identificación de patrones y relaciones.
4. Abreviación de los procesos al resolver problemas similares.
5. Capacidad de generalización y transferencia.
6. Capacidad de abstracción.
7. Capacidad de utilización del pensamiento lógico.

A la hora de resolver problemas los estudiantes también deben poner en juego las estrategias generales más habituales, también llamadas heurísticos (Polya, 1979). Recogemos algunas de las más comunes, en las que nos basaremos para analizar los problemas de las pruebas de selección de Estalmat:

1. Considerar casos sencillos, particularizaciones.
2. Razonar por contradicción.

[1] https://nrich.maths.org/

3. Buscar regularidades.
4. Dibujar un esquema.
5. Dividir el problema en subproblemas.
6. Suponer el problema resuelto y empezar desde el final.
7. Introducir hipótesis auxiliares.
8. Resolver un problema más general y luego particularizar.
9. Hacer conjeturas.

En lo que respecta al género y las matemáticas diversos estudios demuestran que las diferencias intelectuales entre chicas y chicos en este aspecto son prácticamente inexistentes. Sin embargo, en el ámbito escolar estas diferencias son patentes y se agravan con el paso de los años, debido a factores sociales, afectivos y educativos (Farfán y Simón, 2017). De hecho, estas diferencias son aún mayores entre estudiantes con altas capacidades matemáticas, teniendo las chicas un interés y una confianza en sí mismas bastante más bajos que los chicos (Preckel et al, 2008), lo que se traduce en una menor motivación para participar en actividades de estímulo del talento como Estalmat. Por si esto fuera poco, Niederle y Vesterlund (2010) concluyen que en contextos competitivos la respuesta de las chicas es distinta debido a una mayor sensibilidad ante la presión, lo que se traduce en una diferencia aún mayor en los resultados que la obtenida fuera de competición.

En la selección de estudiantes en programas de desarrollo de altas capacidades, Farfán y Simón (2017) indican que, mientras que en edades tempranas las proporciones por género son muy similares, en la adolescencia el porcentaje de varones es mucho mayor, en torno al 73 %. Esto último se explica por la menor motivación de las chicas para participar y las diferencias de género agravadas en las pruebas competitivas de selección que hemos comentado antes, pero sorprende cómo el desarrollo personal de una edad a otra incrementa estas diferencias significativamente.

Liu y Wilson (2009) recogen algunos resultados de investigaciones y los comprueban analizando las pruebas PISA, que indican que las chicas obtienen mejores resultados en problemas más académicos, directamente relacionados con lo aprendido en clase, mientras que en el tipo de pruebas como las que analizamos en este trabajo suelen destacar en mayor medida los chicos. Además, en relación con el contenido matemático, los chicos suelen destacar más en problemas geométricos que requieren visualización espacial

(González-Calero et al, 2018)) y las chicas en problemas más algebraicos resolubles mediante fórmulas o ecuaciones (Gallagher, 1998).

A lo largo del trabajo realizaremos distintos análisis estadísticos de los datos, en busca de evidencias que reafirmen y complementen los resultados de las investigaciones. La mayoría de tipos de análisis que usaremos se realizan comúnmente en estudios de estas características (ver, por ejemplo, Wasserman, 2013). Para ello utilizaremos el programa Microsoft Excel, que permite tratar cómodamente los datos de los que disponemos. En todos los contrastes en los que extraigamos un p-valor usaremos como nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ para concluir que existen evidencias, si no indicamos lo contrario.

# 3. ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS

Las pruebas constan de 5 problemas con varios apartados de dificultad variable. La duración es de 2 horas y media y se divide en dos partes, una de 1 hora y media con los tres primeros problemas y otra de 1 hora con los dos últimos.

Se pide a los alumnos que escriban las ideas que les han llevado a la resolución propuesta, ya que es esto lo que permite identificar las características que hemos destacado en el marco teórico. Se intenta plantear problemas variados y con apartados de dificultad creciente, de modo que los primeros sean resolubles por la mayoría de alumnos y los últimos cuesten más. El objetivo es observar cómo los estudiantes van adaptando los razonamientos de un apartado a otro, ya que muchos de los aspectos que caracterizan a alumnos con altas capacidades matemáticas se detectan en este tipo de procedimientos (identificación de patrones, abreviación de procesos, generalización…). Por ello, los problemas de la prueba no son sencillos, no se pretende que los alumnos los resuelvan todos sino ver hasta dónde son capaces de razonar.

A continuación, analizamos las características generales de los problemas de la prueba de cada año, para poder relacionarlas con los resultados obtenidos por los alumnos que estudiaremos más tarde y para justificar la validez de estos problemas a la hora de identificar a los alumnos con talento. En cada problema indicamos:

- **Conceptos matemáticos involucrados:** No suelen ser muchos y en la mayoría de los casos no es necesario conocerlos en detalle, o si lo es el enunciado proporciona la información imprescindible sobre ellos. La intención es que las pruebas sean autocontenidas, de modo que los conocimientos previos del alumnado no supongan una limitación.

- **Habilidades necesarias:** Estas son las características que hemos planteado en el marco teórico de estudiantes con altas capacidades reconocibles en cada problema, y justifican que los problemas son adecuados en una prueba de este tipo. Algunas de las habilidades pueden ser útiles para todos los problemas, pero indicamos para cada uno las más destacadas.
- **Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema:** También hemos proporcionado en el marco teórico algunas estrategias habituales en la resolución de problemas, y ahora destacamos su utilidad en cada problema de las pruebas.
- **Grado de abstracción:** Esta es una de las características del problema que más dificulta su resolución por parte de los estudiantes, y ayuda a detectar el talento matemático. Por ello, detallamos en cada problema este aspecto.
- **Grado de dificultad y puntuación media obtenida:** Aquí realizamos una valoración de la dificultad general de cada problema teniendo en cuenta el nivel académico esperado en los estudiantes, relacionándola con la puntuación media obtenida en cada uno de ellos. Debemos tener en cuenta que los problemas de la prueba de 2018 están puntuados sobre un máximo de 20 puntos, mientras que los de 2019 están puntuados sobre 10, ya que así se decidió cada año. Para poder comparar ambas pruebas mostramos en esta sección las puntuaciones medias sobre un máximo de 20 puntos en ambas pruebas. Sin embargo, en la sección de análisis de puntuaciones sí que respetaremos los máximos que se establecieron en la corrección, ya el trabajo de análisis de datos se ha realizado con las puntuaciones que se asignaron cada año. En cualquier caso, en esa sección no tendrá demasiada importancia, ya que compararemos los problemas únicamente con los de la misma prueba y no las pruebas entre ellas.
- **Complejidad matemática:** Con esto nos referimos al nivel de los conceptos matemáticos involucrados en el problema dada la edad de los estudiantes, que tendrá impacto en los resultados según el curso académico.

Al final de los análisis detallados de cada problema incluimos una tabla resumen que permite comparar los problemas entre sí. Las resoluciones de los problemas se encuentran en los anexos al final del trabajo.

## 3.1. Prueba 2018

***PROBLEMA 1: ATRAVESANDO EL RÍO***

En una de las orillas de un río hay 3 adultos, 2 niños y una barca de remos muy pequeña. Queremos que todas las personas crucen el rio utilizando la barca. En la barca sólo caben o bien un solo adulto o bien 2 niños. Todos saben remar y está permitido que un niño vaya solo en la barca.

Si entendemos por "viaje" a remar de un lado al otro del río:

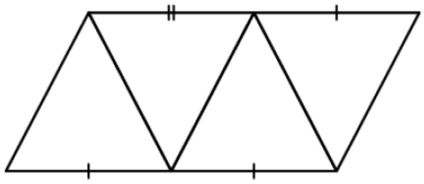
a) ¿Cuál es el mínimo número de viajes que habrá que hacer para que todas las personas crucen el río? Explica cómo has llegado al resultado.
b) ¿Y si hubiera 8 adultos y 2 niños? ¿Y si hubiera 100 adultos y 2 niños? Explica cómo has llegado a tus respuestas.
c) Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y 2 niños.
d) Si ahora, en una de las orillas, hay 4 adultos y 3 niños, ¿cuál es el número mínimo de viajes que habrá que hacer para que todas las personas crucen el río? ¿Cómo los harías?
e) ¿Y si hubiera 8 adultos y 3 niños? ¿Y si hubiera 100 adultos y 3 niños? Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y 3 niños.
f) Explica cómo podemos encontrar el mínimo número de viajes necesarios para cualquier número de adultos y cualquier número de niños.

<table>
<tr><th colspan="2">Análisis problema 1</th></tr>
<tr><th>Conceptos matemáticos involucrados</th><th>Habilidades necesarias</th></tr>
<tr><td>− Sucesión y término general.<br>− Lenguaje algebraico para representar números arbitrarios.</td><td>− Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Abreviación de los procesos al resolver problemas similares.<br>− Capacidad de generalización y transferencia.<br>− Capacidad de abstracción.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</th></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (por ejemplo, empezar con dos niños sin adultos e ir añadiendo adultos uno a uno).<br>− Buscar regularidades (a partir de los casos sencillos ver qué es común a todos ellos).</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| − Dibujar un esquema (para contar los viajes en los primeros casos).<br>− Dividir el problema en subproblemas (esto lo facilita la separación en apartados, para resolver el apartado f resulta muy útil fijar primero el número de niños como en los apartados c y e).<br>− Resolver un problema más general y luego particularizar (esto se puede hacer si se tiene soltura generalizando, pasando por ejemplo del apartado a al c y particularizando para resolver b). | |
| **Grado de abstracción:** Alto | |
| Es un problema bastante abstracto por el hecho de introducirse en el campo del álgebra. El nivel de generalización que requiere es elevado, sobre todo en el último apartado, donde es necesario considerar dos variables. | |
| **Grado de dificultad:** Alto | **Puntuación media obtenida:** 4,47 |
| Se trata de un problema difícil para estudiantes de estas edades que aún no han sido introducidos en el lenguaje algebraico o lo han sido con muy poca profundidad. En cualquier caso, es posible que los alumnos lo resuelvan, aunque no estén habituados a usar el lenguaje algebraico, si son capaces de concebir un número generalizado y operar con él. | |
| **Complejidad matemática:** Media | |
| Desde el punto de vista matemático el problema no es excesivamente complejo si se dominan las sucesiones y su término general, ya que en este caso la generalización es sencilla. El problema es que los alumnos de esta edad seguramente no han trabajado aún con sucesiones. | |

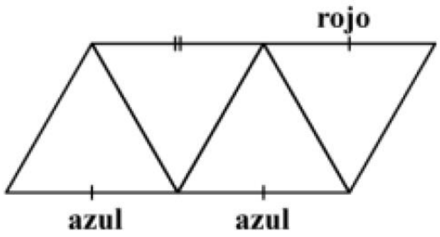
***PROBLEMA 2: COLOREANDO TRIÁNGULOS***

Ana y Carlos juegan a colorear de azul, rojo o verde los lados de los triángulos del siguiente dibujo:



y lo deben hacer de forma que, en cada uno de los cuatro triángulos, los tres lados sean de distinto color. Primero, Ana colorea los tres lados que tienen una marca de un trazo y después. Carlos debe decir de qué color puede ser el lado que tiene una marca con dos trazos, para que se cumpla la condición de antes (los tres lados de cada triángulo deben ser de distinto color).

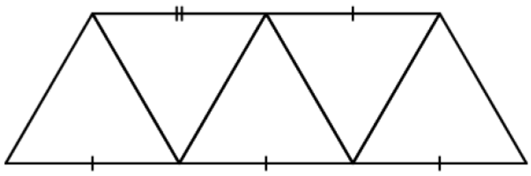
a) Razona qué color puede decir Carlos, si Ana ha usado los colores que se indican en la figura siguiente.




b) ¿Qué color podría decir Carlos si Ana pintara inicialmente esos tres lados del mismo color? Razona tu respuesta.

c) Carlos le dice a Ana: "pongas los colores que pongas yo siempre podré encontrar un color válido para el lado con dos trazos". ¿Es verdad lo que dice Carlos? En algún caso, ¿puede haber más de un color que pueda decir Carlos? Razona tus respuestas.

d) A continuación, Ana le dice a Carlos: "si pongo un triángulo más, entonces yo podré poner colores a cuatro lados de forma que tú no puedas encontrar solución".



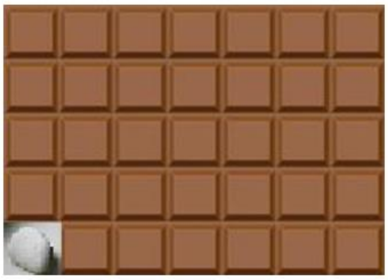
Busca una de estas posibilidades en las que Ana colorea los cuatro lados que tienen un trazo y después Carlos no puede acabar el juego porque no puede encontrar un color para el lado con dos trazos.

<table>
<tr><th colspan="2">Análisis problema 2</th></tr>
<tr><th>Conceptos matemáticos involucrados</th><th>Habilidades necesarias</th></tr>
<tr><td>En este caso no se trabaja con conceptos matemáticos más allá del significado básico de triángulo y lado.</td><td>− Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</th></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (por ejemplo, en el apartado c se pueden hacer más pruebas concretas antes de generalizar, además de observar que los casos particulares de los apartados anteriores pueden dar ideas).<br>− Buscar regularidades (en este caso, por ejemplo, ver que el papel de los colores es el mismo y se pueden intercambiar).<br>− Dibujar un esquema (pintando por pasos los lados que van quedando determinados en cada caso).</td></tr>
</table>

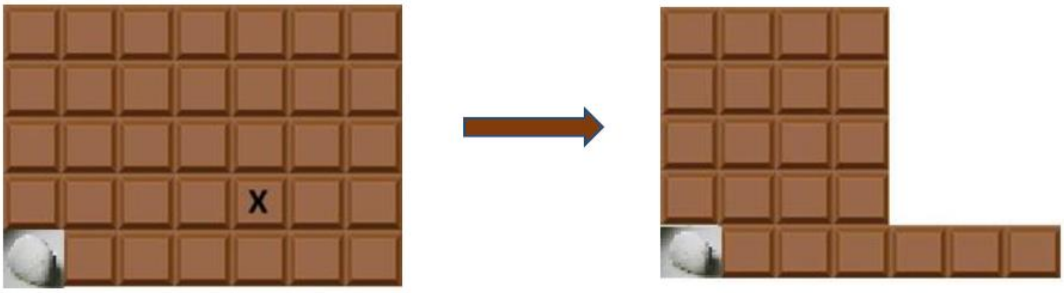
| | |
|---|---|
| − Introducir hipótesis auxiliares (cuando no todo queda determinado es necesario hacer suposiciones y distinguir casos). | |
| **Grado de abstracción:** Bajo | |
| El problema requiere un grado de abstracción bastante bajo, solamente en el apartado c se requiere hacer una generalización más compleja, olvidando los colores concretos para distinguir entre colores iguales y colores distintos. | |
| **Grado de dificultad:** Bajo | **Puntuación media obtenida:** 6,14 |
| Se trata de un problema muy sencillo de entender para cualquier alumno por la ausencia de conceptos matemáticos difíciles, lo que unido al bajo nivel de abstracción hace que sea uno de los problemas más asequibles de la prueba. Aun así, el apartado c puede generar dificultades. | |
| **Complejidad matemática:** Baja | |
| Como ya hemos comentado, el hecho de no involucrar conceptos más avanzados hace que la complejidad matemática del problema sea muy baja. | |

### *PROBLEMA 3: EL JUEGO DEL CHOMP*

El **Chomp** es un juego para dos jugadores en el que los jugadores por turnos comen trozos de una tableta rectangular de chocolate dividida en cuadraditos. El cuadradito de abajo a la izquierda es reemplazado antes de empezar el juego por una piedra, como se puede ver en la figura siguiente:



Cada jugador, en su turno, elige un cuadradito de chocolate que aún no haya sido comido y se lo come junto con todos los cuadraditos que se encuentran a la derecha y arriba del cuadradito elegido. Por ejemplo, si un jugador elige la pastilla señalada con una **X** en la figura de la izquierda, el estado de la tableta al final del turno de este jugador será el que se muestra a la derecha de la flecha:




Gana el jugador que se come el último cuadradito de chocolate y entonces el perdedor se lleva la piedra.

Teniendo en cuenta las reglas de este juego, y que se enfrentan dos jugadores que siempre juegan sus mejores jugadas y nunca cometen errores, contesta las siguientes preguntas:

a) En una tableta 2x2 (2 filas, 2 columnas), ¿qué cuadradito tiene que elegir el primer jugador en su primer turno para ganar el juego haga lo que haga el segundo jugador?
b) Si en una tableta 3x3 el primer jugador en su primer turno elige el cuadradito de abajo a la derecha, ¿qué jugador resultará vencedor suponiendo que ambos jugadores juegan sus mejores jugadas?
c) Imagínate que estás jugando en una tableta 3x3 y que eres el primer jugador. Encuentra una forma de jugar que te haga ganar siempre, haga lo que haga el segundo jugador. ¿Podrías haber empezado por otro cuadradito y seguir asegurando siempre tu victoria?
d) Imagínate una tableta del alto y ancho que quieras. Si eres el primer jugador y es tu primer turno ¿hay algún cuadradito que te haga perder siempre al elegirlo, si el segundo jugador sabe jugar bien?
e) Si sabe jugar bien, ¿crees que puede ganar siempre el primer jugador en cualquier tableta que le den? Si piensas que sí, ¿por qué? Si piensas que no, da un ejemplo de tableta con la que el segundo jugador pueda ganar siempre, haga lo que haga el primer jugador.

| **Análisis problema 3** | |
|---|---|
| **Conceptos matemáticos involucrados** | **Habilidades necesarias** |
| Al igual que en el problema anterior tampoco son necesarios conceptos matemáticos no básicos, aunque puede ser útil buscar simetrías respecto a la diagonal de la tableta que pasa por la piedra para reducir las cuentas. | − Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Abreviación de los procesos al resolver problemas similares. |

<table>
<tr><td></td><td>− Capacidad de generalización y transferencia.<br>− Capacidad de abstracción.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</td></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (en realidad los casos sencillos nos los preguntan directamente en los primeros apartados, y dan ideas para los siguientes).<br>− Razonar por contradicción (en el último apartado).<br>− Buscar regularidades (como simetrías en las tabletas, repeticiones de situaciones de apartados anteriores cuando aumenta el tamaño de la tableta, o intercambio de los papeles de los jugadores cuando pasa el turno de uno a otro).<br>− Dibujar un esquema (con los cuadraditos que quedan después de las elecciones de cada jugador).<br>− Introducir hipótesis auxiliares (suponer que un jugador escoge un cuadradito determinado para distinguir casos).<br>− Resolver un problema más general y luego particularizar (el apartado e es más general y se podría resolver primero para ayudar a los anteriores, aunque parece más lógico que las ideas de los anteriores ayuden a deducir la del apartado e).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grado de abstracción: Medio</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los tres primeros apartados del problema no son demasiado abstractos, ya que se pueden entender fácilmente con dibujos, aunque su resolución pueda resultar complicada. Sin embargo, los últimos apartados requieren un mayor nivel de abstracción al tener que imaginar una tableta de cualquier ancho y alto.</td></tr>
<tr><td>Grado de dificultad: Alto</td><td>Puntuación media obtenida: 5,95</td></tr>
<tr><td colspan="2">El enunciado nos dice que los jugadores siempre juegan sus mejores jugadas, pero averiguar cuáles deben ser estas cuando el tamaño de la tableta aumenta resulta tremendamente complicado, y puede generar mucha confusión en los alumnos. Además, hay que añadir a esto el razonamiento por reducción al absurdo del último apartado, al que seguramente los alumnos de esta edad no se encuentren habituados. El problema se encuentra en tercer lugar por puntuación media obtenida de menor a mayor, pero es el único de la prueba en el que ningún alumno logró obtener la máxima puntuación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Complejidad matemática: Baja</td></tr>
<tr><td colspan="2">La complejidad matemática del problema deriva de intentar simplificar mediante simetrías y recursiones la complejidad computacional que requeriría examinar todas las posibles elecciones de cada jugador para averiguar la jugada óptima. Sin embargo, a nivel conceptual y académico esta complejidad es baja.</td></tr>
</table>

***PROBLEMA 4: LA MÁQUINA DE LOS NÚMEROS***

Tenemos una máquina en la que sólo podemos meter números naturales: el $1$, el $2$, el $3$, etc. Esta máquina primero eleva al cuadrado el número que hemos metido y después, con el resultado obtenido, suma todas las cifras todas las veces que haga falta hasta quedarnos con una sola cifra y nos devuelve esta cifra.

Por ejemplo, si metemos el número $16$, primero eleva al cuadrado, $16^2 = 16 \times 16 = 256$ y luego suma sus cifras, lo que da $2 + 5 + 6 = 13$. Como tiene que quedar una sola cifra, vuelve a sumar las cifras del número $13$ y obtiene $1 + 3 = 4$. Por tanto, si metemos el número $16$, la máquina nos devuelve el número $4$.

a) ¿Qué número nos devolverá si metemos el número $26$?
b) ¿Puedes dar un ejemplo de un número de 2 cifras que puedas meter en la máquina para que el número que nos devuelva sea $7$? ¿Y de $3$ cifras? ¿Y si te pidieran un número con cualquier número de cifras?
c) Metemos un número en la máquina y ésta nos devuelve el número $9$. Si ahora metemos en la máquina el número consecutivo al que habíamos metido, ¿puede la máquina devolvernos también el $9$? Si la respuesta es afirmativa, explica por qué. Si es negativa, explica cuántos números más tenemos que avanzar para que el resultado que devuelve la máquina vuelva a ser $9$.
d) ¿Puedes meter algún número en la máquina para que ésta nos devuelva el número $5$? Explica tu razonamiento.
e) ¿Qué resultado nos devolverá la máquina si metemos el número $201820182018$? Explica tu razonamiento.
f) Si modificamos la máquina y en el primer paso eleva al cubo (el cubo de $25$ es $25 \times 25 \times 25$) el número en vez de elevarlo al cuadrado, ¿sabrías decir qué resultado dará si partimos del número $20182018$? Explica tu respuesta.
g) ¿Serías capaz de construir una máquina suficientemente original a la que al meterle cualquier número natural 1, 2, 3, 4, etc., nos devuelva siempre el número 1 o el 2 o el 3?

| **Análisis problema 4** | |
|---|---|
| **Conceptos matemáticos involucrados** | **Habilidades necesarias** |
| − Divisibilidad y criterios.<br>− Potencias. | − Originalidad en las ideas.<br>− Identificación de patrones y relaciones.<br>− Capacidad de generalización y transferencia. |

<table>
<tr><td></td><td>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</td></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (probar a meter números pequeños en la máquina).<br>− Buscar regularidades (reconocer los patrones).<br>− Dividir el problema en subproblemas (identificar primero el patrón y averiguar después qué número del patrón corresponde al que nos interesa).<br>− Resolver un problema más general y luego particularizar (esto se puede aplicar en el apartado c, donde basta identificar que la máquina devuelve 9 cada 3 consecutivos, pero se puede identificar el patrón general y deducir este caso particular después).<br>− Hacer conjeturas (se debe suponer que los patrones se repiten infinitamente, aunque no se pueda demostrar con al nivel de los estudiantes).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grado de abstracción: Medio</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los aspectos más abstractos del problema son el considerar un número de cualquier número de cifras en apartado b, y el construir una máquina propia en el apartado g donde debemos considerar los resultados que proporcionaría para cualquier número natural. El resto del problema pregunta por resultados para números concretos y por tanto requiere un grado de abstracción bajo.</td></tr>
<tr><td>Grado de dificultad: Alto</td><td>Puntuación media obtenida: 3,49</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se trata de un problema bastante difícil para los alumnos. Aunque el reconocimiento de patrones puede resultar sencillo en algunas situaciones, el que aparece en la mayoría de apartados del problema es muy extenso (contiene 9 números), lo que dificulta bastante que los alumnos lo detecten. Además, esta extensión también complica que los estudiantes asocien los números que meten en la máquina con el resultado que proporciona el patrón. Una última dificultad añadida es que los apartados dan pocas pistas que ayuden a identificar el patrón, en otros problemas de la prueba la resolución es mucho más guiada a través de los apartados. Según la puntuación media obtenida estamos ante el problema más difícil de la prueba.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Complejidad matemática: Alta</td></tr>
<tr><td colspan="2">La complejidad matemática que se esconde detrás de los patrones es muy elevada. Sin embargo, si solamente nos centramos en el reconocimiento del patrón y la asociación de un número de este a cada uno de los que metemos en la máquina esta complejidad se reduce sensiblemente, lo que no significa que el problema no sea difícil como he comentado antes. El último apartado se puede hacer tan complejo como se desee a elección de los alumnos.</td></tr>
</table>

### *PROBLEMA 5: CONTANDO TRIÁNGULOS SEGÚN SUS ÁNGULOS*

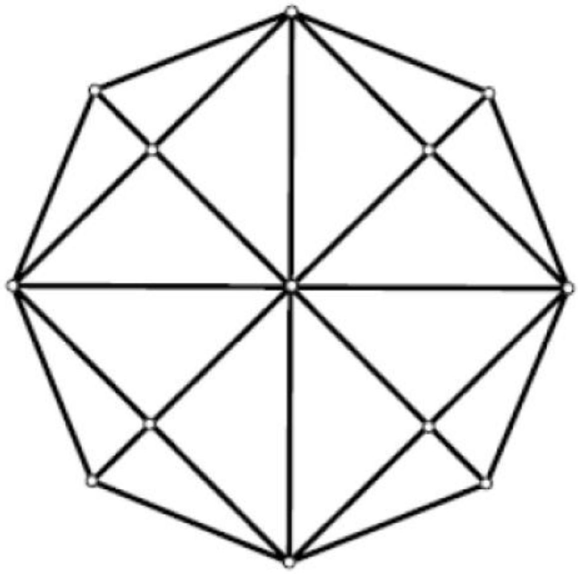
Recuerda que, según sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

- **Acutángulos**, los que tienen sus tres ángulos agudos.

- **Rectángulos**, los que tienen un ángulo recto, esto es de 90º.

- **Obtusángulos**, los que tienen uno de sus ángulos obtuso.

¿Cuántos triángulos de cada clase, con vértices en los puntos, ves en esta figura?



Acutángulos: ☐ Rectángulos: ☐ Obtusángulos: ☐

Explícanos cómo te has organizado para contarlos:

| Análisis problema 5 | |
|---|---|
| **Conceptos matemáticos involucrados** | **Habilidades necesarias** |
| − Propiedades de los ángulos.<br>− Tipos de triángulos según sus ángulos.<br>− Simetrías y propiedades. | − Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Originalidad en las ideas. |
| **Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema** | |
| − Buscar regularidades (simetrías de la figura y vértices que juegan el mismo papel).<br>− Dividir el problema en subproblemas (contar para cada vértice y multiplicar). | |
| **Grado de abstracción:** Bajo | |
| El grado de abstracción del problema es muy bajo, todas las cuentas se hacen sobre la figura y la única abstracción sencilla que se debe hacer para simplificar el recuento es el uso de las simetrías. | |
| **Grado de dificultad:** Bajo | **Puntuación media obtenida:** 8,70 |
| El problema es el más sencillo de la prueba como demuestran los resultados. La dificultad reside en buscar el método más eficiente para hacer las cuentas, pero dado que la figura no es excesivamente compleja no es difícil llegar a la solución, aunque no se establezca un sistema muy sofisticado. En cualquier caso, aun usando una buena | |

| |
|---|
| técnica también es fácil equivocarse en las cuentas dejándose algún triángulo o contándolo dos veces sin querer. |
| **Complejidad matemática:** Baja |
| Aunque intervienen distintos conceptos matemáticos, son bastante básicos. Además, los tipos de triángulos están explicados en el enunciado y las simetrías son fácilmente reconocibles, lo que hace que no sea un problema demasiado complejo. |

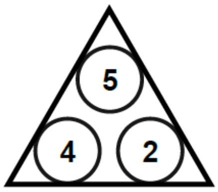
## 3.2. Prueba 2019

### *PROBLEMA 1: TRICÁLCULOS*

En este problema sólo pueden utilizarse números naturales (1, 2, 3, 4, etc.). Sobre un triángulo como el del dibujo situamos tres números en los tres círculos. A continuación, realizamos la siguiente operación a la que llamamos el tricálculo de los tres números:

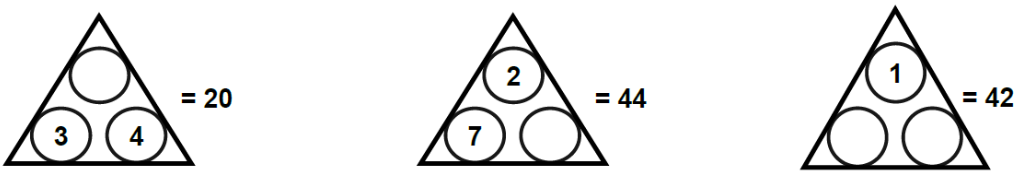
**Nº de Abajo Izquierda x Nº de Abajo Derecha + Nº de Arriba**

Por ejemplo, en el triángulo de la derecha, el tricálculo de los tres números vendrá dado por: **4 x 2 + 5 = 13.**

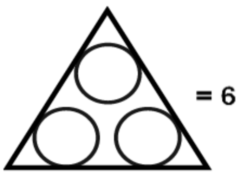



**Responde las siguientes cuestiones:**

a) Completa los siguientes triángulos para que sus tricálculos sean los indicados:




b) ¿Cuántos triángulos existen cuyo tricálculo da como resultado 6? Debes tener en cuenta que los números de los vértices pueden repetirse y que dos triángulos son diferentes si sus números están colocados en diferentes círculos, aunque sean los mismos números.




c) Recuerda que los cuadrados perfectos son los números que puedes expresar como el cuadrado de un número natural, es decir, son: 1, 4, 9, 16, etc. Si en los vértices de abajo ponemos dos números consecutivos (seguidos), ¿cuál es el número más pequeño que podemos poner en el vértice de arriba para conseguir un cuadrado perfecto como resultado del tricálculo? Explica por qué crees que no hay uno más pequeño.

d) Si en los números de abajo ponemos un número y su triple, ¿qué número podemos poner en el vértice de arriba para conseguir un cuadrado perfecto como resultado del tricálculo?

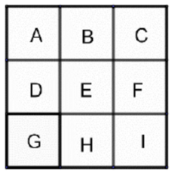
e) ¿Existen tres números **distintos** que al ponerlos en cualquier orden en el triángulo siempre dé como resultado el mismo tricálculo? Razona tu respuesta.

<table>
<tr><th colspan="2">Análisis problema 1</th></tr>
<tr><th>Conceptos matemáticos involucrados</th><th>Habilidades necesarias</th></tr>
<tr><td>− Cuadrados perfectos.<br>− Lenguaje algebraico y operaciones con él.<br>− Desigualdades.<br>− Ecuaciones.<br>− Divisibilidad y números primos.</td><td>− Identificación de patrones y relaciones.<br>− Capacidad de generalización y transferencia.<br>− Capacidad de abstracción.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</th></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (probar con números pequeños en los apartados c y d).<br>− Razonar por contradicción (en el último apartado).<br>− Buscar regularidades (observar que intercambiar los números de la parte inferior del triángulo no afecta al resultado).<br>− Hacer conjeturas (si no se domina el lenguaje algebraico es la única forma de resolver los apartados c y d, aunque no se demuestren)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Grado de abstracción: Medio</th></tr>
<tr><td colspan="2">El problema es bastante abstracto por la introducción del lenguaje algebraico en los apartados c, d y e, con el que es necesario incluso realizar multitud de operaciones. Los apartados a y b son mucho menos abstractos. Aunque en el apartado a podrían usarse ecuaciones no es necesario por la sencillez de las operaciones.</td></tr>
<tr><th>Grado de dificultad: Medio</th><th>Puntuación media obtenida: 5,06</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se trata de un problema bastante complicado, dado que los alumnos de este nivel aún no dominan el lenguaje algebraico, que es difícil de evitar y hacerlo complica más la resolución. El apartado e es prácticamente imposible resolverlo sin recurrir mínimamente al álgebra, y además involucra una demostración por reducción al absurdo que escapa del razonamiento lógico de la mayoría de alumnos de esta edad, aunque entiendo que la prueba no es un examen y está pensada para ver cómo se las ingenian los alumnos ante las dificultades. Aun así, los dos primeros apartados son mucho más fáciles, de forma que todo el mundo puede empezar el problema.</td></tr>
</table>

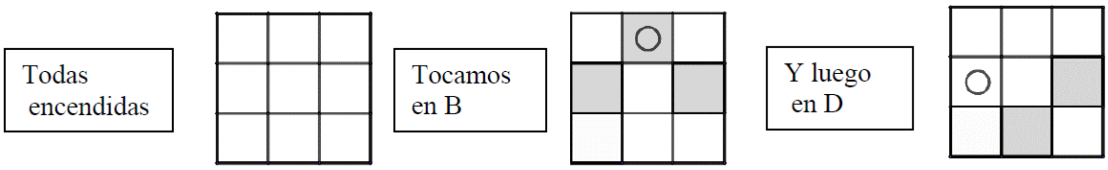
| **Complejidad matemática:** Alta |
|---|
| El nivel algebraico requerido para resolver el problema por completo es propio de los últimos cursos de educación secundaria, y por ello la complejidad matemática teniendo en cuenta la edad de los estudiantes es bastante elevada. |

## *PROBLEMA 2: ILUMINACIÓN EN EL MUSEO CARRÉ*

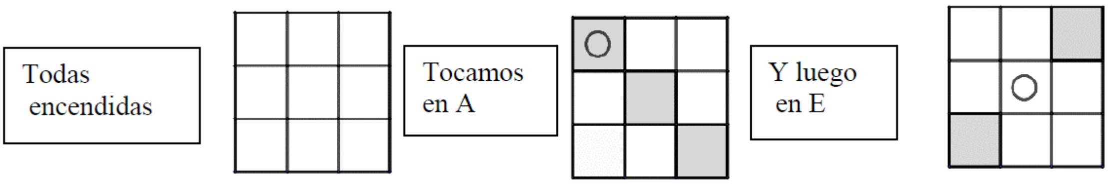
El museo Carré tiene forma de cuadrado y tiene 9 salas cuadradas iguales: A, B, C, D, E, F, G, H, I tal como se ve en el dibujo. En cada una de ellas hay un interruptor de la luz que enciende o apaga la luz de esa sala y de las que están en diagonal con ella.




Por ejemplo, si partimos con todas las salas iluminadas y tocamos el interruptor de B, se apagan las salas B, D y F. Si a continuación apretamos el interruptor de D, se encienden D y B que estaban apagadas y se apaga H que estaba encendida. Una forma de representar lo que ocurre con la secuencia de interruptores **B** → **D** es:




Con todas las salas iluminadas, si tocamos en A se apagan A, E e I. Si a continuación tocamos en E, se encienden A, E e I, y se apagan C y G. Así pues, la secuencia **A** → **E** es:




**En todos los apartados del problema partimos de que todas las salas del museo comienzan estando iluminadas.**

a) ¿Qué ocurre si tocamos el mismo interruptor dos veces seguidas? Razona tu respuesta.
b) Si tocamos dos interruptores distintos, ¿importa el orden en que lo hacemos? Razona tu respuesta.

c) Partiendo de todas las luces encendidas, escribe una secuencia de interruptores ordenada (lo más corta posible) para dejar apagadas todas las salas. (Puedes dejar cuadrados en blanco si no los necesitas, o añadir nuevos si te hacen falta).

□→□→□→□→□→□→□→□→□→□→□→□

d) Partiendo de todas las luces encendidas, escribe una secuencia de interruptores ordenada (lo más corta posible) para dejar encendida solo la sala central E. (Puedes dejar cuadrados en blanco si no los necesitas, o añadir nuevos si te hacen falta).

□→□→□→□→□→□→□→□→□→□→□→□

e) Indica, de manera razonada, las salas que pueden acabar estando ellas solas iluminadas y las otras apagadas.

<table>
<tr><th colspan="2">Análisis problema 2</th></tr>
<tr><th>Conceptos matemáticos involucrados</th><th>Habilidades necesarias</th></tr>
<tr><td>− Simetrías.</td><td>− Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Identificación de patrones y relaciones.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</th></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (probar con secuencias cortas a ver cómo queda la iluminación).<br>− Razonar por contradicción (se puede hacer para justificar en el último apartado que algunas salas no pueden quedar iluminadas solas, aunque no es necesario).<br>− Buscar regularidades (la simetría de la figura hace que el funcionamiento de la iluminación en varias salas también sea simétrico).<br>− Dibujar un esquema (por supuesto ir dibujando los estados de las salas según los interruptores que tocamos puede ayudar).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Grado de abstracción: Bajo</th></tr>
<tr><td colspan="2">Este problema no es demasiado abstracto, porque todas las comprobaciones se pueden dibujar y no es necesario generalizar en exceso. En mi opinión el razonamiento más abstracto consiste en entender que si dados dos interruptores no importa el orden en que los toquemos, entonces en una secuencia de cualquier longitud tampoco importa el orden, aunque no es necesario que los estudiantes razonen de esta forma para responder a las preguntas que se plantean.</td></tr>
<tr><th>Grado de dificultad: Bajo</th><th>Puntuación media obtenida: 6,86</th></tr>
<tr><td colspan="2">El problema no tiene ningún apartado muy complejo para los estudiantes, aunque tampoco tiene apartados tan fáciles como algunos de otros problemas. En cualquier</td></tr>
</table>

| |
|---|
| caso, es un problema sencillo, ya que se puede resolver con un poco de experimentación sin abstraerse demasiado. La puntuación media obtenida es la segunda más alta de la prueba, muy cercana a la primera. |
| **Complejidad matemática:** Baja |
| Dado que el problema no esconde ningún concepto matemático difícil para los alumnos su complejidad en este sentido es muy baja, aunque algunos alumnos puedan necesitar bastantes pruebas antes de llegar a la solución. |

***PROBLEMA 3: BUZONES***

Tenemos 4 buzones, dos rojos y dos negros, que están siempre fijos en la misma posición. Tenemos también dos tarjetas rojas y dos negras y las repartimos de manera que haya una tarjeta en cada buzón. Una forma posible de repartirlas es la siguiente:

| Buzón rojo | Buzón rojo | Buzón negro | Buzón negro |
|---|---|---|---|
| Tarjeta roja | Tarjeta negra | Tarjeta negra | Tarjeta roja |

En el reparto anterior, solo dos buzones contienen una tarjeta de igual color que el buzón.

Pensando en todas las maneras en que se pueden distribuir las tarjetas en los buzones, en total hay tres posibilidades:

1. Todos los buzones contienen una tarjeta de su color.
2. Sólo dos buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
3. Ningún buzón contiene una tarjeta del mismo color que el buzón.

a) ¿Cuál de las tres posibilidades es la que ocurrirá más veces si repartimos las tarjetas al azar? ¿Por qué?
b) Ahora tenemos 6 buzones (3 rojos primero y 3 negros después) y también 3 tarjetas rojas y 3 negras que se reparten al azar en los buzones, una en cada buzón. En el caso anterior teníamos tres posibilidades para distribuir las tarjetas en los buzones teniendo en cuenta si las tarjetas coincidían o no con el color del buzón. ¿Podrías hacer un estudio similar al anterior en este caso, numerando todas las posibilidades que pueden ocurrir? ¿podrías comparar estas posibilidades para decidir cuáles ocurren más veces y cuáles menos?

c) Ahora tenemos 30 buzones (15 rojos primero y 15 negros después) y también 15 tarjetas rojas y 15 negras que se pueden repartir en los buzones, una en cada buzón. Haz un estudio similar al del apartado b). ¿podrías comparar todas las posibilidades para decidir cuáles ocurren más veces y cuáles menos?

d) En general, si tuviéramos un número par cualquiera de buzones, la mitad rojos y la mitad negros, con tantas tarjetas en total como buzones, pero sabiendo que hay más tarjetas rojas que negras, ¿puede ocurrir que el número de buzones con una tarjeta de su color sea un número impar? Justifica tu respuesta.

<table>
<tr><th colspan="2">Análisis problema 3</th></tr>
<tr><th>Conceptos matemáticos involucrados</th><th>Habilidades necesarias</th></tr>
<tr><td>− Combinatoria.<br>− Probabilidad.<br>− Paridad.</td><td>− Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Abreviación de los procesos al resolver problemas similares.<br>− Capacidad de generalización y transferencia.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema</th></tr>
<tr><td colspan="2">− Considerar casos sencillos, particularizaciones (después de los apartados a y b se puede probar con 8 buzones y con 10 antes de pasar al apartado c con 30, y en el apartado d también se puede hacer pruebas).<br>− Buscar regularidades (reconocer la simplificación que supone centrarse solamente en las tarjetas o buzones de un color, ya que el resto viene determinado).<br>− Dibujar un esquema (con los buzones y las tarjetas que van a cada buzón en cada caso).<br>− Hacer conjeturas (dado el nivel de los alumnos, la respuesta al apartado c es muy probable que solamente la puedan conjeturar observando los resultados de apartados anteriores).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Grado de abstracción: Medio</th></tr>
<tr><td colspan="2">El problema no es excesivamente abstracto, aunque las cuentas puedan ser difíciles. El último apartado pretende ser más abstracto por considerar un número par cualquiera de buzones, pero se puede resolver fácilmente probando casos particulares. También es posible que el concepto de azar pueda resultar abstracto para algunos alumnos, y que genere dificultades a la hora de relacionar en el primer apartado el hecho de ocurrir más veces con el número de distribuciones de las tarjetas favorables.</td></tr>
<tr><th>Grado de dificultad: Alto</th><th>Puntuación media obtenida: 3,14</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se trata de un problema bastante difícil para los alumnos, sobre todo si no han trabajado demasiada combinatoria y probabilidad (como suele ser habitual en la enseñanza actual). Incluso teniendo una buena base en estos campos la generalización que se debe hacer en el apartado c tampoco resulta sencilla. Empata prácticamente en puntuación media con el problema más difícil de la prueba según los resultados.</td></tr>
</table>

| **Complejidad matemática:** Alta |
|---|
| La complejidad matemática del problema es muy alta para la edad de los alumnos si se quieren justificar los resultados formalmente, ya que se requiere un nivel de combinatoria bastante elevado. |

### *PROBLEMA 4: REGALO DE CANICAS*

Diego y Marta suelen jugar a las canicas por las tardes. Como son muy amigos, deciden intercambiarlas de una forma especial:

- El primer día, el que tiene más canicas le regala una al otro.
- El segundo día, el que tiene más canicas le regala 2 de sus canicas al otro.
- El tercer día el que tiene más canicas le regala tres al otro, y así sucesivamente.

Continúan así todos los días, de forma que cada día, el que tiene más canicas, le regala canicas al otro, pero siempre se regala una más que el día anterior. Por ejemplo, si Marta tuviera 9 canicas y Diego 12, el primer día Marta se iría a casa con 10 y Diego con 11, el segundo día Marta tendría 12 (dos más) y Diego 9 (dos menos), el tercer día Marta tendría 9 (tres menos) y Diego 12 (tres más), …

a) Si inicialmente Marta tiene 5 canicas y Diego 6, ¿cuántas canicas tendrá cada uno al cabo de tres días? ¿Cuántos días van a pasar hasta que alguno de los dos se quede sin canicas?
b) Si Marta tuviera 50 canicas y Diego 51 canicas, ¿cuántos días pasarían hasta que alguno se quedara sin canicas? Explica tu razonamiento.
c) Da dos ejemplos distintos en los que Marta y Diego se queden con el mismo número de canicas. ¿Puede ocurrir eso justo después del primer día? ¿Y justo después del segundo día?
d) ¿Cuál debe ser la diferencia entre el número de canicas de uno y otra para que después del intercambio del día 20 queden ambos con el mismo número de canicas? Justifica tu respuesta.

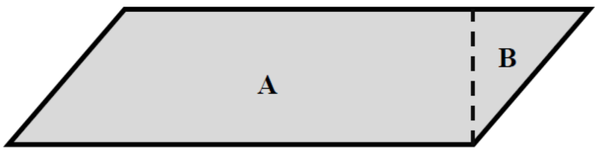
| **Análisis problema 4** | |
|---|---|
| **Conceptos matemáticos involucrados** | **Habilidades necesarias** |
| − Sucesiones.<br>− Sumas de progresiones aritméticas. | − Identificación de patrones y relaciones.<br>− Capacidad de generalización y transferencia.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico. |

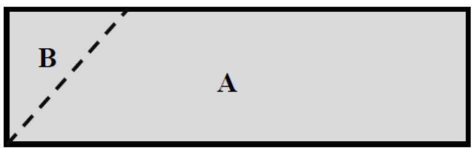
| **Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema** | |
|---|---|
| − Considerar casos sencillos, particularizaciones (ver qué ocurre los primeros días).<br>− Buscar regularidades (por ejemplo, observar que si empiezan con los números de canicas intercambiados el resultado es simétrico).<br>− Suponer el problema resuelto y empezar desde el final (en el último apartado se puede partir de que ya han pasado 20 días y tienen el mismo número de canicas e ir al revés).<br>− Hacer conjeturas (a partir de los casos particulares en el apartado b). | |
| **Grado de abstracción:** Bajo | |
| Este problema no es abstracto, ya que en todos los apartados se trabaja con números relativamente pequeños que permiten comprobar las soluciones con mayor o menor esfuerzo. | |
| **Grado de dificultad:** Bajo | **Puntuación media obtenida:** 7,10 |
| Se trata de un problema bastante sencillo para los alumnos. Aunque en el problema intervengan sucesiones no es necesario haberlas estudiado para resolverlo, y las generalizaciones que se deben detectar probando casos sencillos no son demasiado complejas. La suma de los términos de una progresión aritmética en el último apartado puede resultar desconocida para los alumnos, pero solamente deben sumar 20 términos, por lo que se puede hacer con un poco de esfuerzo. La puntuación media obtenida es la más alta de la prueba. | |
| **Complejidad matemática:** Media | |
| La complejidad matemática, si tenemos en cuenta las sucesiones que intervienen o que algunas justificaciones para ser formales deben hacerse por inducción, es más elevada de lo que parece. Sin embargo, no se pretende que los alumnos sean muy formales en sus resoluciones, de modo que para ellos la complejidad se reduce bastante. | |

### *PROBLEMA 5: PARTIENDO POLÍGONOS*

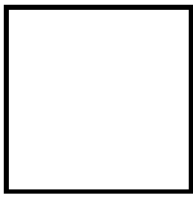
En el siguiente problema vamos a trabajar con polígonos. Podrás trocearlos (sólo en sentido figurado, ya que no está permitido el uso de tijeras en la prueba) en varias piezas para después poder recomponerlas todas y formar otros polígonos.

Por ejemplo, un paralelogramo podemos cortarlo en dos piezas y recomponer con ellas un rectángulo:

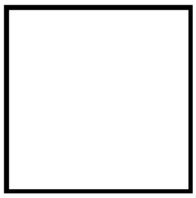


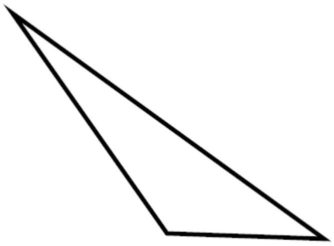

a) ¿Cuál es el menor número de trozos en que puedes cortar un cuadrado para recomponerlo después en un triángulo? Justifica la respuesta.



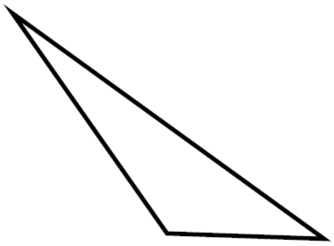
b) ¿Podrías partir un cuadrado en dos piezas para recomponerlas en un triángulo que no tenga ningún ángulo de 45 grados? Justifica la respuesta.



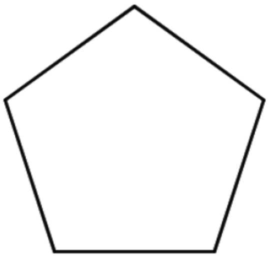
c) Recuerda que un triángulo escaleno es aquel que tiene tres lados de longitud distinta. ¿Podrías cortar un triángulo escaleno en el número de trozos que necesites para después recomponerlo en un cuadrilátero cualquiera (un polígono de cuatro lados)?



¿Y puedes conseguir que ese cuadrilátero sea un rectángulo?



d) ¿Cómo partirías un pentágono regular en trozos para recomponerlo después en un cuadrilátero (un polígono de cuatro lados)?



e) ¿Crees que podrías trocear un triángulo y recomponerlo en un polígono de 18 lados?

| **Análisis problema 5** | |
|---|---|
| **Conceptos matemáticos involucrados** | **Habilidades necesarias** |
| − Polígonos y propiedades.<br>− Ángulos.<br>− Isometrías en el plano. | − Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.<br>− Originalidad en las ideas.<br>− Capacidad de generalización y transferencia.<br>− Capacidad de abstracción.<br>− Capacidad de utilización del pensamiento lógico. |
| **Posibles técnicas heurísticas para abordar el problema** | |
| − Considerar casos sencillos, particularizaciones (en el último apartado se puede pensar en polígonos de menos lados antes de pasar a 18).<br>− Razonar por contradicción (se puede hacer en el apartado b).<br>− Buscar regularidades (por ejemplo, las simetrías de los polígonos regulares).<br>− Dibujar un esquema (ir dibujando los cortes y las colocaciones de las piezas en cada caso). | |
| **Grado de abstracción:** Alto | |
| El problema exige realizar una gran abstracción al no poder usar tijeras y tener que imaginarse los polígonos obtenidos al recolocar las piezas. Otros aspectos abstractos del problema pueden ser la justificación del apartado b, el trabajo con el triángulo escaleno del apartado c y la generalización del apartado e, por lo que nos encontramos ante un problema fuertemente abstracto, incluso para estudiantes de mayor edad. | |
| **Grado de dificultad:** Alto | **Puntuación media obtenida:** 3,10 |
| Se trata de un problema de elevada dificultad, y no únicamente considerando el conocimiento de los estudiantes. Desde luego es necesario tener un buen dominio de las propiedades de los polígonos y los ángulos para poder resolverlo, pero también exige una intuición y una habilidad para realizar isometrías mentalmente que están al alcance de pocos. La puntuación media obtenida es la más baja de la prueba. | |
| **Complejidad matemática:** Media | |
| La complejidad matemática del problema tampoco es muy elevada, aunque el problema sea difícil, ya que los conceptos involucrados se supone que deben ser conocidos en el nivel de los alumnos. | |

## 3.3. Resumen

La tabla siguiente engloba todos los análisis realizados para poder observarlos y compararlos con mayor facilidad. Las habilidades y heurísticos aparecen numerados de la misma forma que en el marco teórico, recordamos a continuación esta numeración. Las habilidades son:

1. Flexibilidad para encontrar la estrategia más eficiente.
2. Originalidad en las ideas.
3. Identificación de patrones y relaciones.
4. Abreviación de los procesos al resolver problemas similares.
5. Capacidad de generalización y transferencia.
6. Capacidad de abstracción.
7. Capacidad de utilización del pensamiento lógico.

Los heurísticos son:

1. Considerar casos sencillos, particularizaciones.
2. Razonar por contradicción.
3. Buscar regularidades.
4. Dibujar un esquema.
5. Dividir el problema en subproblemas.
6. Suponer el problema resuelto y empezar desde el final.
7. Introducir hipótesis auxiliares.
8. Resolver un problema más general y luego particularizar.
9. Hacer conjeturas.

En los grados de abstracción y dificultad, así como en la complejidad denotamos por B, M y A un grado bajo, medio y alto respectivamente.

| **RESUMEN DEL ANÁLISIS** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Año** | | **2018** | | | | | **2019** | | | | |
| **Problema** | | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** | **P1** | **P2** | **P3** | **P4** | **P5** |
| **Habilidades** | 1 | X | X | X | | X | | X | X | | X |
| | 2 | | | | X | X | | | | | X |
| | 3 | | | | X | | X | X | | X | |
| | 4 | X | | X | | | | | X | | |
| | 5 | X | | X | X | | X | | X | X | X |
| | 6 | X | | X | | | X | | | | X |
| | 7 | | X | X | X | | X | X | X | X | X |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Heurísticos** | 1 | X | X | X | X | | X | X | X | X | X |
| | 2 | | | X | | | X | X | | | X |
| | 3 | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | 4 | X | X | X | | | | X | X | | X |
| | 5 | X | | | X | X | | | | | |
| | 6 | | | | | | | | | X | |
| | 7 | | X | X | | | | | | | |
| | 8 | X | | X | X | | | | | | |
| | 9 | | | | X | | X | | X | X | |
| **Grado abstracción** | | A | B | M | M | B | M | B | M | B | A |
| **Grado dificultad** | | A | B | A | A | B | M | B | A | B | A |
| **Puntuación media** | | 4,47 | 6,14 | 5,95 | 3,49 | 8,70 | 5,06 | 6,86 | 3,14 | 7,10 | 3,10 |
| **Complejidad** | | M | B | B | A | B | A | B | A | M | M |

Podemos observar que, por lo general, las dos pruebas son bastante similares. En ambas hay algún ejercicio que permite evaluar cada una de las habilidades características de alumnos con altas capacidades que hemos mencionado. En el uso de heurísticos existen algunas diferencias, ya que algunos solamente aparecen en una de las pruebas, siendo la de 2018 más completa en este sentido. En cualquier caso, estas diferencias no son demasiado relevantes a la hora de identificar alumnado con talento matemático.

Los grados de dificultad y abstracción se encuentran muy relacionados, y se distribuyen de manera uniforme en ambas pruebas. Hay dos problemas más sencillos que el resto en cada prueba, uno situado en la primera parte (tres primeros problemas) y otro en la segunda (dos últimos problemas). Esto contribuye a conseguir una actitud positiva en los estudiantes de menor nivel, reduciendo la frustración por no saber qué hacer en cada parte de las pruebas.

En las puntuaciones medias observamos que la prueba de 2019 fue un poco más difícil para los alumnos, aunque es complicado determinarlo con seguridad porque los estudiantes presentados son distintos. No obstante, sí es cierto que la complejidad matemática general de la prueba es más alta, lo que significa que los conceptos matemáticos involucrados en los problemas son de mayor nivel, pudiendo influir en la dificultad que supone la prueba para el alumnado.

# 4. PERFIL DE LOS ESTUDIANTES PRESENTADOS

Antes de analizar los resultados de la prueba nos centraremos en los alumnos que se han presentado a ella. La identificación del perfil de estos alumnos nos permitirá establecer conclusiones más certeras en los apartados siguientes.

## 4.1. Proporción de estudiantes presentados por variables de estudio

Nos interesa en primer lugar saber si los porcentajes de alumnos de cada género, edad, tipo de centro y provincia que se presentan a la prueba se corresponden con los existentes en la población total de estudiantes de estas edades. Para ello realizaremos un contraste de hipótesis chi cuadrado de comparación de proporciones.

Tenemos un pequeño problema en esta parte, y es que no conocemos los datos poblacionales exactos de estudiantes de esa edad en función de las variables de estudio. Por ello, vamos a realizar algunas suposiciones que intentaremos que sean lo más realistas posible. En cuanto al género y la edad parece lógico suponer que los porcentajes de chicos y chicas, y los de estudiantes nacidos en cada uno de los dos años para los que se permite presentarse a la prueba, serán cercanos al 50 %. Para obtener los porcentajes de alumnos de esta edad matriculados en cada provincia y en centros públicos o privados/concertados nos hemos basado en las estadísticas del Informe sobre la situación del Sistema Educativo en la Comunitat Valenciana en el Curso 2016/17. Aquí podemos encontrar los porcentajes globales en primaria y secundaria de alumnos matriculados en cada provincia y en centros públicos, privados y concertados (estos últimos para toda la comunidad y también para cada provincia). Los porcentajes de centros privados y concertados los hemos sumado, ya que a estos alumnos los consideramos en un mismo grupo. Los alumnos que se presentan a la prueba están cursando 6º de primaria o 1º de ESO (sin contar casos especiales) y no disponemos exactamente de los datos de esos cursos, pero haciendo algunas suposiciones consideramos que lo más razonable es aproximar los porcentajes correspondientes a estos dos cursos haciendo la media de los de primaria y secundaria. Los porcentajes del informe y las aproximaciones se recogen en las siguientes tablas:

| PORCENTAJE ALUMNOS POR PROVINCIA | Primaria | Secundaria | Aproximación 6º primaria y 1º ESO |
|---|---|---|---|
| **Alicante** | 36,06 % | 36,72 % | 36,39 % |
| **Castellón** | 11,89 % | 11,82 % | 11,855 % |
| **Valencia** | 52,05 % | 51,48 % | 51,765 % |

| PORCENTAJE ALUMNOS CENTROS PÚBLICOS EN CADA PROVINCIA | Primaria | Secundaria | Aproximación 6º primaria y 1º ESO |
|---|---|---|---|
| **Alicante** | 76,50 % | 75,14 % | 75,82 % |
| **Castellón** | 79,89 % | 75,29 % | 77,59 % |
| **Valencia** | 61,12 % | 56,73 % | 58,925 % |
| **Total** | 68,93 % | 65,70 % | 67,315 % |

Recogemos a continuación los datos de presentados observados (los que realmente se presentaron a la prueba), esperados (los que deberían haberse presentado respetando los porcentajes poblacionales), la diferencia entre ambos y el p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ una vez realizado el contraste. Ya que disponemos de los porcentajes poblacionales de la combinación de provincias y tipo de centro realizamos también el contraste entre públicos y privados/concertados por provincias. Cada año hay 5 alumnos presentados a la prueba de los que solamente conocemos la puntuación sin datos adicionales, por lo que no podemos incluirlos en estas tablas.

| PRESENTADOS 2018 | Observados | Esperados | Diferencia | p-valor |
|---|---|---|---|---|
| **Chicas** | 81 | 110 | $-29$ | $9{,}22 \cdot 10^{-5}$ |
| **Chicos** | 139 | 110 | $+29$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Nacimiento en 2005** | **116** | **110** | **+6** | **0,42** |
| **Nacimiento en 2006** | 104 | 110 | −6 | |
| **Centro Público** | 102 | 148,09 | −46,09 | $3{,}47 \cdot 10^{-11}$ |
| **Centro Privado** | 118 | 71,91 | +46,09 | |
| **Alicante** | 77 | 80,06 | −3,06 | 0,55 |
| **Castellón** | 34 | 26,08 | +7,92 | |
| **Valencia** | 109 | 113,88 | −4,88 | |
| **Público Alicante** | 34 | 58,38 | −24,38 | $8{,}63 \cdot 10^{-11}$ |
| **Privado Alicante** | 43 | 18,62 | +24,38 | |
| **Público Castellón** | 15 | 26,38 | −11,38 | $2{,}86 \cdot 10^{-6}$ |
| **Privado Castellón** | 19 | 7,62 | +11,38 | |
| **Público Valencia** | 53 | 64,23 | −11,23 | 0,03 |
| **Privado Valencia** | 56 | 44,77 | +11,23 | |

| PRESENTADOS 2019 | Observados | Esperados | Diferencia | p-valor |
|---|---|---|---|---|
| **Chicas** | 70 | 95,5 | −25,5 | $2{,}24 \cdot 10^{-4}$ |
| **Chicos** | 121 | 95,5 | +25,5 | |
| **Nacimiento en 2006** | 113 | 95,5 | +17,5 | 0,01 |
| **Nacimiento en 2007** | 78 | 95,5 | −17,5 | |
| **Centro Público** | 115 | 128,57 | −13,57 | 0,04 |
| **Centro Privado** | 76 | 62,43 | +13,57 | |
| **Alicante** | 49 | 69,50 | −21,55 | 0,009 |
| **Castellón** | 26 | 22,64 | +3,76 | |
| **Valencia** | 116 | 98,87 | +17,8 | |
| **Público Alicante** | 31 | 37,15 | −6,15 | 0,04 |
| **Privado Alicante** | 18 | 11,85 | +6,15 | |
| **Público Castellón** | 25 | 20,17 | +4,83 | 0,02 |
| **Privado Castellón** | 1 | 5,83 | −4,83 | |
| **Público Valencia** | 59 | 68,35 | −9,35 | 0,08 |
| **Privado Valencia** | 57 | 47,65 | +9,35 | |

Observamos que, en consonancia con lo que afirman las investigaciones, la participación de las chicas es muy inferior a la de los chicos. El p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ del contraste es mucho menor a 0,05 en ambas pruebas, lo que confirma que esta diferencia no es casual.

Por edad la participación es similar en 2018, pero en 2019 se presentan bastantes más alumnos mayores, por lo que el test indica que hay diferencias significativas.

Por tipo de centro los privados y concertados presentan a más alumnos de los esperados según su porcentaje de matriculados. Las evidencias de este dato son significativas en ambas pruebas, pero en 2018 esta diferencia es abismal, con 46 presentados más de este tipo de centros de los 72 que se esperaría.

Por provincias la distribución coincide bastante con los porcentajes de matriculados en 2018 pero en 2019 hay un déficit importante de estudiantes alicantinos. Esto puede indicarnos la conveniencia de promocionar el programa Estalmat en dicha provincia. También es posible que se deba a una cuestión de complicaciones de desplazamiento para participar en las sesiones, que se desarrollan generalmente en Valencia.

Finalmente, los presentados de cada tipo de centro por provincias nos indican que en la provincia de Valencia es donde los presentados de centros públicos se aproximan más al porcentaje de matriculados, aunque aún quedan lejos. En la provincia de Alicante es donde existen mayores diferencias entre presentados por tipo de centro, lo que confirma el interés de promocionar el programa entre los centros públicos alicantinos. El único caso en el que se invierte la tendencia de mayor número de presentados de centros privados/concertados es en Castellón en 2019, donde curiosamente solo se presenta un alumno de este tipo de centros.

En este primer análisis detectamos muchas diferencias entre los presentados en 2018 y 2019, cosa que resultará ser una limitación importante para extraer conclusiones de los datos, ya que si entre dos años consecutivos existen tantas diferencias es difícil decidir hasta qué punto las conclusiones del estudio serán generalizables.

## 4.2. Independencia entre las variables de estudio

Nuestro objetivo es averiguar si entre los presentados de cada una de las variables de estudio se encuentran distribuidos uniformemente los del resto de variables. Para ello, realizaremos un test de independencia chi cuadrado para cada pareja de variables. Los resultados permitirán obtener mejores conclusiones en el resto del trabajo, ya que conviene conocer si alguna de las variables puede estar influyendo en otras, pero también tienen interés por sí solos como veremos a continuación.

Las siguientes tablas muestran los datos con los estudiantes que se han presentado pertenecientes a cada una de las parejas de variables de estudio:

| OBSERVADOS 2018 | Nacidos 2005 | Nacidos 2006 | Púb. | Priv. | Alic. | Cast. | Val. | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Chicas** | 42 | 39 | 40 | 41 | 26 | 7 | 48 | 81 |
| **Chicos** | 74 | 65 | 62 | 77 | 51 | 27 | 61 | 139 |
| **Nacidos 2005** | | | 69 | 47 | 40 | 13 | 63 | 116 |
| **Nacidos 2006** | | | 33 | 71 | 37 | 21 | 46 | 104 |
| **Público** | | | | | 34 | 15 | 53 | 102 |
| **Privado** | | | | | 43 | 19 | 56 | 118 |
| **Total** | 116 | 104 | 102 | 118 | 77 | 34 | 109 | 220 |

| OBSERVADOS 2019 | Nacidos 2006 | Nacidos 2007 | Púb. | Priv. | Alic. | Cast. | Val. | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Chicas** | 45 | 25 | 44 | 26 | 14 | 13 | 43 | 70 |
| **Chicos** | 68 | 53 | 71 | 50 | 35 | 13 | 73 | 121 |
| **Nacidos 2006** | | | 83 | 30 | 25 | 23 | 65 | 113 |
| **Nacidos 2007** | | | 32 | 46 | 24 | 3 | 51 | 78 |
| **Público** | | | | | 31 | 25 | 59 | 115 |
| **Privado** | | | | | 18 | 1 | 57 | 76 |
| **Total** | 113 | 78 | 115 | 76 | 49 | 26 | 116 | 191 |

Incluimos a continuación dos tablas más con el incremento de presentados observados de cada pareja de grupos respecto a los que se esperaría según el total de los grupos, que nos servirán para ver en qué sentido se detectan dependencias significativas:

| INCREMENTO 2018 | Nac. 2005 | Nac. 2006 | Púb. | Priv. | Alic. | Cast. | Val. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Chicas** | $-0{,}71$ | $+0{,}71$ | $+2{,}45$ | $-2{,}45$ | $-2{,}35$ | $-5{,}52$ | $+7{,}87$ |
| **Chicos** | $+0{,}71$ | $-0{,}71$ | $-2{,}45$ | $+2{,}45$ | $+2{,}35$ | $+5{,}52$ | $-7{,}87$ |
| **Nacidos 2005** | | | $+15{,}22$ | $-15{,}22$ | $-0{,}60$ | $-4{,}93$ | $+5{,}53$ |
| **Nacidos 2006** | | | $-15{,}22$ | $+15{,}22$ | $+0{,}60$ | $+4{,}93$ | $-5{,}53$ |
| **Público** | | | | | $-1{,}70$ | $-0{,}76$ | $+2{,}46$ |
| **Privado** | | | | | $+1{,}70$ | $+0{,}76$ | $-2{,}46$ |

| INCREMENTO 2019 | Nac. 2006 | Nac. 2007 | Púb. | Priv. | Alic. | Cast. | Val. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Chicas** | $+3{,}59$ | $-3{,}59$ | $+1{,}85$ | $-1{,}85$ | $-3{,}96$ | $+3{,}47$ | $+0{,}49$ |
| **Chicos** | $-3{,}59$ | $+3{,}59$ | $-1{,}85$ | $+1{,}85$ | $+3{,}96$ | $-3{,}47$ | $-0{,}49$ |
| **Nacidos 2006** | | | $+14{,}96$ | $-14{,}96$ | $-3{,}99$ | $7{,}62$ | $-3{,}63$ |
| **Nacidos 2007** | | | $-14{,}96$ | $+14{,}96$ | $+3{,}99$ | $-7{,}62$ | $+3{,}63$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Público** | | | | | $+1{,}50$ | $+9{,}35$ | $-10{,}84$ |
| **Privado** | | | | | $-1{,}50$ | $-9{,}35$ | $+10{,}84$ |

Finalmente, las siguientes tablas muestran el p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ del test de independencia, que nos indica entre qué parejas de variables hay evidencias de dependencia:

| **p-valor 2018** | **Nacimiento** | **Centro** | **Provincia** |
|---|---|---|---|
| **Género** | 0,84 | 0,49 | 0,04 |
| **Nacimiento** | | $3{,}77 \cdot 10^{-5}$ | 0,13 |
| **Centro** | | | 0,80 |

| **p-valor 2019** | **Nacimiento** | **Centro** | **Provincia** |
|---|---|---|---|
| **Género** | 0,27 | 0,57 | 0,18 |
| **Nacimiento** | | $6{,}79 \cdot 10^{-6}$ | 0,004 |
| **Centro** | | | $9{,}89 \cdot 10^{-5}$ |

La relación más destacada que proporciona este estudio es la que existe entre el año de nacimiento y el tipo de centro. En los centros públicos se presentan más alumnos mayores, mientras que en los privados ocurre lo contrario y son los pequeños los que más se presentan. Además, las diferencias son muy significativas tanto en 2018 como en 2019, y ambos años se repite la misma tendencia. Esto podría ser explicado por una mayor preparación por parte de centros privados y concertados, que proporciona más confianza a los jóvenes para enfrentarse a la prueba.

El resto de relaciones significativas que se observan se dan entre género y provincia en 2018, con más chicas presentadas en Valencia, entre año de nacimiento y provincia en 2019, con más alumnos mayores de Castellón, y entre centro y provincia en 2019, con más alumnos de centros públicos en Castellón y de privados/concertados en Valencia. Estas tendencias solamente se dan uno de los años y, por tanto, no las vamos a generalizar, aunque pueden ayudar a explicar alguno de los resultados de las secciones siguientes.

# 5. ANÁLISIS DE LA SELECCIÓN

La forma de seleccionar a los estudiantes a partir de las puntuaciones obtenidas es un poco distinta cada año, y por ello la detallamos a continuación.

En 2018 se empieza ordenando a los estudiantes por suma de puntuaciones obtenidas en los problemas. A continuación, se calcula la media aritmética de las puntaciones obtenidas en cada uno de los problemas por los 50 primeros alumnos. Finalmente, se calcula la suma ponderada de las notas de los cinco problemas con pesos inversamente proporcionales a las medias calculadas, y se vuelve a ordenar a los alumnos ahora usando las sumas ponderadas. Los 25 primeros estudiantes resultantes de esta ordenación son los seleccionados y los 7 siguientes quedan como reservas.

En 2019, la diferencia consiste en usar como ponderación la media aritmética global de cada problema, es decir, la media de las puntuaciones de todos los estudiantes y no solamente de los 50 primeros.

## 5.1. Cambios en la forma de seleccionar

Hemos visto que los criterios de selección han sido distintos en 2018 y 2019, y en años anteriores ni siquiera se ha usado ponderación y se ha seleccionado directamente ordenando por suma de las puntuaciones. Nos interesa ahora realizar un estudio de los distintos criterios para ver si existen diferencias significativas entre ellos y establecer, si es posible, cuál de todos puede resultar más ventajoso.

Antes de analizar los efectos de los distintos criterios en los estudiantes seleccionados cada año describimos resumidamente las consecuencias objetivas de cada uno:

- La selección usando únicamente la suma de las puntuaciones permite a los alumnos conocer de antemano que todos los problemas van a ser puntuados por igual, y pueden distribuirse el tiempo del examen en base a esta circunstancia.
- La selección usando la ponderación inversamente proporcional a la media aritmética global de cada problema permite premiar a los alumnos que han realizado correctamente los problemas más difíciles. Además, estas ponderaciones hacen que aparezcan más cifras decimales en las sumas finales y reducen los posibles empates.
- La selección usando la ponderación inversamente proporcional a la media aritmética de los 50 primeros estudiantes ordenados por suma reduce el efecto de

las colas de alumnos con resultados peores, aunque es interesante comprobar si este efecto es realmente significativo.

Para analizar los efectos de modificaciones en la forma de selección observaremos, además de los cambios globales en los seleccionados, el incremento o disminución de seleccionados por género, edad, tipo de centro y provincia.

Comenzamos analizando el efecto de las colas en la ponderación en 2018, donde se decidió usar para ponderar las medias de los 50 mejores resultados por suma. En la siguiente tabla vemos qué cambios se habrían producido en los seleccionados si se hubiese ponderado usando las medias globales:

| DE PONDERAR 50 PRIMEROS A GLOBAL | De Seleccionados a No Seleccionados | De No Seleccionados a Seleccionados | Incremento en Seleccionados |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | 1 | 0 | - 1 |
| **Chicos** | 1 | 2 | + 1 |
| **Nacimiento en 2005** | 0 | 2 | + 2 |
| **Nacimiento en 2006** | 2 | 0 | - 2 |
| **Centro Público** | 0 | 2 | + 2 |
| **Centro Privado** | 2 | 0 | - 2 |
| **Alicante** | 1 | 1 | 0 |
| **Castellón** | 0 | 0 | 0 |
| **Valencia** | 1 | 1 | 0 |
| **Sin información** | 0 | 0 | 0 |
| **TOTAL** | 2 | 2 | 0 |

Observamos que los cambios son mínimos, solamente hay 2 cambios en estudiantes seleccionados y curiosamente se incrementan en 2 los seleccionados más mayores y los de centros públicos, aunque esto puede ser casual.

También es de destacar en este caso que si observamos las medias que se han obtenido globalmente en cada problema y las que han obtenido los 50 primeros y las ordenamos de mayor a menor (lo que se traduce en una ordenación de menor a mayor dificultad de los problemas) hay cambios. Usando las medias globales los problemas quedan ordenados de menor a mayor dificultad como 5-2-3-1-4, mientras que considerando las medias de los 50 primeros el orden es 5-1-2-3-4, es decir, el problema 1 resulta más difícil que el 2 y el 3 globalmente pero más fácil para los 50 mejores estudiantes. Aun así, las medias de estos tres problemas son bastante similares en ambos casos, lo que justifica que no haya diferencias significativas al usar una u otra forma.

Una vez visto que las colas no tienen demasiado efecto sobre la ponderación, nos planteamos ahora si el hecho de ponderar los resultados afecta significativamente a los seleccionados. El efecto de las colas solamente lo hemos analizado en 2018 porque es el año donde se decidió ponderar usando las medias de los 50 primeros, pero el análisis de los efectos de la ponderación lo haremos los dos años. Para poder comparar los resultados nos centramos en el cambio en los estudiantes seleccionados que supone pasar de ponderar usando medias globales a no ponderar. Recogemos estas variaciones en las tablas siguientes:

| DE PONDERAR A NO PONDERAR EN 2018 | De Seleccionados a No Seleccionados | De No Seleccionados a Seleccionados | Incremento en Seleccionados |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | 0 | 1 | + 1 |
| **Chicos** | 3 | 3 | 0 |
| **Nacimiento en 2005** | 3 | 1 | - 2 |
| **Nacimiento en 2006** | 0 | 3 | + 3 |
| **Centro Público** | 1 | 1 | 0 |
| **Centro Privado** | 2 | 3 | + 1 |
| **Alicante** | 1 | 2 | + 1 |
| **Castellón** | 1 | 0 | - 1 |
| **Valencia** | 1 | 2 | + 1 |
| **Sin información** | 1 | 0 | - 1 |
| **TOTAL** | 4 | 4 | 0 |

| DE PONDERAR A NO PONDERAR EN 2019 | De Seleccionados a No Seleccionados | De No Seleccionados a Seleccionados | Incremento en Seleccionados |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | 0 | 0 | 0 |
| **Chicos** | 2 | 2 | 0 |
| **Nacimiento en 2006** | 1 | 1 | 0 |
| **Nacimiento en 2007** | 1 | 1 | 0 |
| **Centro Público** | 1 | 0 | - 1 |
| **Centro Privado** | 1 | 2 | + 1 |
| **Alicante** | 1 | 0 | - 1 |
| **Castellón** | 0 | 0 | 0 |
| **Valencia** | 1 | 2 | + 1 |
| **Sin información** | 0 | 0 | 0 |
| **TOTAL** | 2 | 2 | 0 |

Como era de esperar aquí el cambio es un poco mayor, sobre todo en 2018 cuando hay 4 estudiantes distintos entre cada selección, aunque en 2019 solamente hay 2 seleccionados que cambian.

En cuanto a las diferencias por género, año de nacimiento, tipo de centro y provincia hay poco que se pueda concluir. Es curioso el incremento de 3 alumnos más jóvenes en 2018, que se puede justificar porque las ponderaciones premian los problemas más difíciles que suelen hacer mejor los de mayor edad. En cualquier caso, no creo que la diferencia por edad sea relevante, ya que en 2019 no hay cambios en este sentido. Algo que ocurre ambos años que podemos destacar es el incremento de un estudiante de centros privados o concertados si no se ponderan los resultados, pero también puede ser casual. También dificulta un poco el análisis de los datos de 2018 el hecho de que haya un estudiante del que no tenemos información que está seleccionado usando las ponderaciones, pero no seleccionado sin ponderar.

## 5.2. Independencia entre selección y variables de estudio

Una vez concluida la poca relevancia de los cambios en la forma de selección nos disponemos a estudiar si existe algún tipo de dependencia entre el hecho se ser o no seleccionado y las variables género, año de nacimiento, tipo de centro y provincia. Para esto realizaremos un test de independencia chi cuadrado sobre los datos de estudiantes seleccionados en 2018 y 2019 (aunque el método de selección fuera ligeramente distinto hemos visto que esto no tiene efectos significativos). Estos datos se recogen en las tablas siguientes:

| OBSERVADOS 2018 | Seleccionados | No Seleccionados | Total |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | 9 | 72 | 81 |
| **Chicos** | 15 | 124 | 139 |
| **Nacimiento en 2005** | 15 | 101 | 119 |
| **Nacimiento en 2006** | 9 | 95 | 104 |
| **Centro Público** | 8 | 94 | 102 |
| **Centro Privado** | 16 | 102 | 118 |
| **Alicante** | 4 | 73 | 77 |
| **Castellón** | 3 | 31 | 34 |
| **Valencia** | 17 | 92 | 109 |
| **Sin información** | 1 | 4 | 5 |
| **TOTAL** | 25 | 200 | 225 |

| OBSERVADOS 2019 | Seleccionados | No Seleccionados | Total |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | 7 | 63 | 70 |
| **Chicos** | 18 | 103 | 121 |
| **Nacimiento en 2005** | 22 | 91 | 113 |
| **Nacimiento en 2006** | 3 | 75 | 78 |
| **Centro Público** | 12 | 103 | 115 |
| **Centro Privado** | 13 | 63 | 76 |
| **Alicante** | 6 | 43 | 49 |
| **Castellón** | 4 | 22 | 26 |
| **Valencia** | 15 | 101 | 116 |
| **Sin información** | 0 | 5 | 5 |
| **TOTAL** | 25 | 171 | 196 |

Los estudiantes de los que no se dispone de información se han omitido del total de seleccionados y no seleccionados en la realización del test. Incluimos a continuación dos tablas más con el incremento de seleccionados observados de cada grupo respecto a los que se esperaría según los presentados (añadiendo una aproximación sin decimales para hacerlos realistas) y con el p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ del test de independencia.

| INCREMENTO SELECCIONADOS 2018 | Teórico | Aproximado | p-valor |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | + 0,16 | 0 | 0,94 |
| **Chicos** | - 0,16 | 0 | |
| **Nacimiento en 2005** | + 2,35 | + 2 | 0,31 |
| **Nacimiento en 2006** | - 2,35 | - 2 | |
| **Centro Público** | - 3,13 | - 3 | 0,18 |
| **Centro Privado** | + 3,13 | + 3 | |
| **Alicante** | - 4,40 | - 4 | 0,07 |
| **Castellón** | - 0,71 | - 1 | |
| **Valencia** | + 5,11 | + 5 | |

| INCREMENTO SELECCIONADOS 2019 | Teórico | Aproximado | p-valor |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | - 2,16 | - 2 | 0,34 |
| **Chicos** | + 2,16 | + 2 | |
| **Nacimiento en 2006** | + 7,21 | + 7 | 0,002 |
| **Nacimiento en 2007** | - 7,21 | - 7 | |
| **Centro Público** | - 3,05 | - 3 | 0,18 |
| **Centro Privado** | + 3,05 | + 3 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Alicante** | - 0,41 | 0 | 0,93 |
| **Castellón** | + 0,60 | + 1 | |
| **Valencia** | - 0,18 | 0 | |

**Seleccionados por género**

Podemos ver que en 2018 los seleccionados por género son exactamente los esperados, por lo que no cabe plantearse una dependencia entre las variables. En 2019 hay 2 chicos más seleccionados de los que se esperaría, pero el test da lugar a un p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ de 0,34, muy superior al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, por lo que no podemos concluir con estos datos que exista una dependencia entre el género y el hecho de ser o no seleccionado.

Ahora bien, los valores esperados se calculan a partir del total de chicas y chicos que se han presentado a la prueba, pero ya hemos visto antes que los dos años el número de chicas aspirantes es bastante inferior al de chicos. Es decir, no hay diferencias significativas en la selección, pero sí en la voluntad de unas y otros para participar en el proyecto.

Recordamos además que Farfán y Simón (2017) indicaban que el porcentaje de seleccionados varones para este tipo de proyectos destinados a estudiantes adolescentes era aproximadamente un 73 %. En nuestro caso es del 62,5 % en 2018 y 72 % en 2019.

**Seleccionados por edad**

Por lo que respecta a la edad, parece lógico que los alumnos más mayores obtengan mejores resultados en la prueba por tener un mayor nivel de conocimientos, y por ello sean seleccionados en mayor medida que los jóvenes. Efectivamente, los datos que tenemos corroboran esta hipótesis, y mientras que en 2018 el test arroja un p-valor de 0,31 que no permite asumir una dependencia, en 2019 el p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ es de 0,002, lo que permite concluir que existe una clara dependencia entre la edad y la selección de los alumnos con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$. Este último año hay 7 seleccionados mayores más de los que se esperaría.

**Seleccionados por tipo de centro**

Tanto en 2018 como en 2019 hay más alumnos de centros privados y concertados seleccionados de los que se esperaría, en concreto 3 más cada año. Sin embargo, los resultados de los test ofrecen un p-valor de 0,18 ambos años, lo que no permite afirmar que haya evidencias significativas que muestren una dependencia entre tipo de centro y selección.

**Seleccionados por provincia**

En principio en los resultados por provincia no debería haber diferencias significativas, pero es curioso como en 2018 hay 5 seleccionados más de Valencia de los esperados y 4 menos de Alicante. Los resultados del test ofrecen en 2018 un p-valor asociado al estadístico $\chi^2$ de 0,07, por lo que con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ no podemos concluir que haya evidencias de dependencia. Sin embargo, en este caso el p-valor es muy cercano al nivel de significación, de forma que si elevásemos este nivel hasta el también habitual $0{,}10$ sí podríamos concluir que hay evidencias significativas de dependencia.

Los datos de 2019 son mucho más favorables a la independencia entre selección y provincias al coincidir prácticamente los seleccionados observados y esperados, y conducen a la idea de que los resultados de 2018 suponen una anomalía. No obstante, como hemos visto antes, en 2019 hay una proporción bastante menor de alumnos presentados a la prueba de la provincia de Alicante que en 2018. Esto también explica una mejora en los resultados por el hecho de que los alumnos que tienen más interés se suelen presentar siempre, por lo que si se reduce el número de presentados suele ser a costa de los que obtienen peores resultados.

Otro aspecto que puede contribuir a las diferencias en 2018 es un mayor número de alumnos mayores presentados en la provincia de Valencia, como hemos estudiado antes. En cualquier caso, esto puede indicar también que Alicante está perdiendo la oportunidad de estimular a alumnos con altas capacidades matemáticas porque no conocen el proyecto o no están dispuestos a desplazarse tan lejos.

# 6. ANÁLISIS DE LAS PUNTUACIONES

En esta sección nos disponemos a estudiar las puntuaciones obtenidas por los estudiantes globalmente y por problemas, en busca de regularidades destacadas.

Lo que haremos es comprobar si las diferencias entre los resultados globales y de cada problema por género, edad, tipo de centro y provincia son significativas. Para ello realizaremos un contraste de hipótesis para la diferencia de medias de los resultados a través de la distribución t de Student. Este contraste será unidireccional, es decir, que el p-valor obtenido sea menor que el nivel de significación fijado ($\alpha = 0{,}05$) nos indicará que hay evidencias a favor de que una de las medias poblacionales es mayor que la otra (decidiremos cuál debe ser mayor en función de las medias muestrales).

En cada caso incluiremos una tabla para cada año con las puntuaciones medias por problemas y globales y los p-valores resultantes de los test.

## 6.1. Diferencias por género

Las tablas con los resultados por género cada año son las siguientes:

| GÉNERO 2018 | Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 | Problema 4 | Problema 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Media chicas** | 4,49 | 6,45 | 5,18 | 3,44 | 8,36 | 27,92 |
| **Media chicos** | 4,44 | 6,01 | 6,38 | 3,55 | 8,99 | 29,37 |
| **p-valor** | 0,48 | 0,27 | 0,01 | 0,41 | 0,20 | 0,26 |

| GÉNERO 2019 | Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 | Problema 4 | Problema 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Media chicas** | 2,46 | 3,23 | 1,64 | 3,54 | 1,74 | 12,61 |
| **Media chicos** | 2,59 | 3,63 | 1,56 | 3,55 | 1,45 | 12,77 |
| **p-valor** | 0,26 | 0,16 | 0,33 | 0,46 | 0,11 | 0,46 |

Si nos fijamos en los resultados globales podemos ver que en 2019 la media de chicos y chicas es prácticamente la misma, y en 2018 la de los chicos es un poco superior pero no lo suficiente para concluir que los chicos obtienen por lo general mejores puntuaciones según el p-valor obtenido en el test.

Observamos que en algunos problemas obtienen mejores resultados las chicas y en otros los chicos, pero solamente hay evidencias significativas de diferencias en el problema 3 de la prueba de 2018, donde la media de los chicos es bastante más elevada. Desde luego se trata de un problema nada académico, y este es un aspecto que perjudica a las chicas según las investigaciones.

En la prueba de 2019, aunque no haya diferencias significativas en ningún problema, la mayor diferencia se observa en el problema 5 a favor de las chicas. Es curioso, dado que se trata de un problema donde interviene en gran medida la visualización, aunque no espacial, que es en la que los estudios asocian mejores resultados a los chicos. Sin embargo, este problema sí es bastante académico, ya que exige dominar las propiedades de los polígonos, y posiblemente sea esto lo que favorezca a las chicas.

## 6.2. Diferencias por edad

Las tablas con los resultados por edad cada año son las siguientes:

| EDAD 2018 | Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 | Problema 4 | Problema 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Media nacidos 2005** | 5 | 6,20 | 6 | 4,12 | 9,25 | 30,57 |
| **Media nacidos 2006** | 3,86 | 6,13 | 5,87 | 2,82 | 8,21 | 26,89 |
| **p-valor** | 0,09 | 0,46 | 0,41 | 0,001 | 0,08 | 0,04 |

| EDAD 2019 | Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 | Problema 4 | Problema 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Media nacidos 2006** | 2,76 | 3,93 | 1,72 | 3,83 | 1,73 | 13,97 |
| **Media nacidos 2007** | 2,24 | 2,85 | 1,39 | 3,15 | 1,31 | 10,93 |
| **p-valor** | 0,0009 | 0,001 | 0,03 | 0,004 | 0,02 | 0,0001 |

En las puntuaciones totales se observan diferencias significativas por edad en ambas pruebas, siendo mucho mayor la de 2019, como ya se intuía por el resultado de la selección.

Por problemas hay evidencias significativas de diferencias en toda la prueba de 2019 y en el problema 4 de 2018. Los problemas en los que menos diferencias se observan son el 2 y el 3 de 2018. Esto está muy relacionado con la complejidad matemática de los problemas que hemos descrito en la sección 3, que decidíamos en función de los conceptos matemáticos involucrados. Los problemas 2 y 3 de 2018 no requieren el uso de ningún concepto que no sea muy básico, y por ello son los problemas en los que menos diferencias se observan. Por el contrario, el problema 4 es el que requiere una mayor base matemática sobre divisibilidad, que es uno de los contenidos más estudiados durante los cursos a los que se permite presentarse a la prueba.

## 6.3. Diferencias por tipo de centro

Las tablas con los resultados por tipo de centro cada año son las siguientes:

| CENTRO 2018 | Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 | Problema 4 | Problema 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Media público** | 4,75 | 5,91 | 6,02 | 3,06 | 9,01 | 28,76 |
| **Media privado** | 4,20 | 6,40 | 5,86 | 3,89 | 8,54 | 28,90 |
| **p-valor** | 0,26 | 0,24 | 0,38 | 0,03 | 0,27 | 0,47 |

| CENTRO 2019 | Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 | Problema 4 | Problema 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Media público** | 2,42 | 3,37 | 1,53 | 3,53 | 1,48 | 12,32 |
| **Media privado** | 2,73 | 3,66 | 1,68 | 3,57 | 1,67 | 13,31 |
| **p-valor** | 0,04 | 0,22 | 0,21 | 0,43 | 0,21 | 0,14 |

Observamos que no hay diferencias significativas en las puntuaciones totales, pero sí en dos problemas, el problema 4 de 2018 y el problema 1 de 2019. Estos dos problemas son muy similares, en ambos se trabaja bastante con las propiedades de los números naturales (operaciones, divisibilidad, potencias…).

Es curioso que estos dos problemas sean en los que mayores diferencias se observan por edad y por tipo de centro, y sin embargo hayamos visto que se presentan a la prueba más alumnos pequeños (que obtienen peores resultados en ellos) de centros privados y concertados (que obtienen mejores resultados). Esto parece indicar que las diferencias en estos problemas por edad y tipo de centro son aún mayores que las observadas.

## 6.4. Diferencias por provincia

Para analizar las diferencias por provincia no tiene demasiado sentido estudiar los resultados de cada problema por separado. Por, tanto aquí incluimos únicamente tablas con las medias globales por provincia y el resultado del test de comparación de medias para cada par de provincias.

| PROVINCIAS 2018 | Total | p-valor Alicante Castellón | p-valor Alicante Valencia | p-valor Castellón Valencia |
|---|---|---|---|---|
| Media Alicante | 22,89 | 0,04 | $5{,}69 \cdot 10^{-6}$ | 0,03 |
| Media Castellón | 27,91 | | | |
| Media Valencia | 33,32 | | | |

| PROVINCIAS 2019 | Total | p-valor Alicante Castellón | p-valor Alicante Valencia | p-valor Castellón Valencia |
|---|---|---|---|---|
| Media Alicante | 12,28 | 0,08 | 0,40 | 0,08 |
| Media Castellón | 14,25 | | | |
| Media Valencia | 12,55 | | | |

Las diferencias en las puntuaciones totales por provincia continúan reflejando lo que ya se observaba en la selección, que en 2018 los alicantinos obtienen resultados mucho peores que los valencianos, mientras que en 2019 no se observan diferencias significativas. Esto significa que esta tendencia no se observa solamente entre los alumnos con mejores resultados (los seleccionados), sino que es general. Las explicaciones en este caso pueden ser las mismas que dábamos para la selección.

# 7. CONCLUSIONES GENERALES

Resumimos aquí las conclusiones más destacadas que hemos ido observando a lo largo del trabajo, relacionándolas con los resultados de las investigaciones expuestas en el marco teórico.

Hemos visto que los problemas de las pruebas son adecuados para identificar las características propias de alumnos de altas capacidades, detallando en cada problema cuáles de estas son observables. El hecho de incorporar apartados similares de dificultad creciente facilita la detección de estas características, que en muchos casos intervienen en la realización de tareas relacionadas. Algunas de estas son la identificación de patrones y relaciones, la abreviación de los procesos al resolver problemas similares y la capacidad de generalización y transferencia, que recopilan Jaime y Gutiérrez (2014).

El análisis del perfil de estudiantes que se han presentado a las pruebas nos ha sido muy útil tanto para establecer conclusiones propias como para analizar los resultados de las secciones siguientes. Entre las conclusiones de este análisis destacamos:

- Por lo general las proporciones de estudiantes presentados de cada uno de los perfiles distan mucho de los porcentajes poblacionales, y este hecho condiciona los resultados que se analizan en el resto de secciones. Este hecho es una de las limitaciones principales del trabajo, cuyas conclusiones no representan a la población general de alumnos de esta edad, sino únicamente a un subgrupo con interés por las matemáticas y con un perfil bastante distinto al de un estudiante cualquiera.
- No solamente hay diferencias importantes respecto a los porcentajes poblacionales, sino también entre las proporciones de 2018 y 2019. Esta es otra limitación importante que dificulta la comparación entre pruebas y también la extrapolación de las conclusiones a otros años, dada la gran variabilidad entre dos pruebas consecutivas.
- Las diferencias entre los chicos y chicas que se presentan cada año sí son similares y confirman los resultados de las investigaciones. El porcentaje de chicas es mucho menor, y es que los estudios indicaban que interés de las alumnas por las matemáticas es más baja, sobre todo entre las que presentan altas capacidades, traduciéndose esto en una menor participación en este tipo de pruebas.
- Por tipo de centro también existen muchas diferencias, presentándose muchos más alumnos de centros privados y concertados de los esperados según su porcentaje de matriculación. Es de esperar que haya diferencias tristemente ocasionadas por el nivel sociocultural de las familias, pero el hecho de que sean tan significativas podría indicar que el proyecto necesita de una mayor promoción en centros públicos, donde tal vez muchos profesores no lo conozcan.
- Es destacable también la asociación detectada entre la edad de los estudiantes presentados y el tipo de centro, observándose un porcentaje mucho mayor de alumnos de menor edad de centros privados y concertados que de públicos. Esto

podría deberse a una mayor preparación de los alumnos en estos centros, que les da más confianza para presentarse a la prueba.

- Por provincias Alicante muestra la menor participación, sobre todo entre los centros públicos. Parece claro que es en Alicante donde urge más reforzar la promoción del proyecto en los centros. También es cierto que, si la mayoría de sesiones se realizan en Valencia, los alicantinos pueden ser más reticentes a la hora de participar por la distancia a la que se encuentran.

Nos centramos ahora en las principales conclusiones extraídas de la selección realizada en las pruebas:

- La forma de puntuar para seleccionar a los alumnos no es demasiado relevante, ya que no se producen cambios significativos usando una u otra forma. Por ello, si se considera más justo el uso de las ponderaciones para premiar a los alumnos que han resuelto problemas más difíciles se puede hacer sin preocuparse demasiado por perjudicar a otros alumnos. Además, visto el poco efecto que tienen las colas en las ponderaciones, sería suficiente con usar las medias globales, que facilitan el tratamiento de los datos.
- En cuanto al género no se aprecia en la selección una diferencia significativa. Los estudios afirmaban que las chicas, además de tener una menor motivación por participar, suelen obtener peores resultados que los chicos, pero esta tendencia no se observa en los datos de los que disponemos.
- Los alumnos de centros privados y concertados son seleccionados en mayor medida que los de centros públicos, basándonos en los porcentajes de participación, aunque las diferencias no son significativas. Sin embargo, teniendo en cuenta que los alumnos mayores obtienen mejores resultados y estos se presentan principalmente de centros públicos, las diferencias podrían ser mayores de lo observado. Aunque la justificación de estas diferencias es delicada y no podemos evidenciarla con datos objetivos, podemos intentar conjeturar las razones por las que se producen. Una de ellas puede ser una mayor preparación ofrecida por este tipo de centros de cara a la prueba. Otra razón puede ser una selección previa más estricta por parte de estos centros de cara a elegir los estudiantes que presentan a la prueba, con el posible objetivo de no “manchar” su reputación con malos resultados de estudiantes que se presentan.
- Por provincias la selección continúa perjudicando a Alicante, al menos en la prueba de 2018. Las puntuaciones generales en esta provincia también son más

bajas en esa prueba. Es difícil determinar qué factores pueden estar influyendo en estos resultados, pero es posible que se deban a la baja participación que ya hemos comentado.

Las diferencias que reflejan las puntuaciones globales van en el mismo sentido que en la selección, no se observan otros aspectos destacados. Esto significa que las tendencias observadas entre los alumnos con mayores puntuaciones continúan respetándose en general, al menos en lo que respecta a las variables que hemos estudiado. Las conclusiones más interesantes del análisis de las puntuaciones se obtienen en las diferencias por problemas, y las indicamos a continuación:

- Por género no existen prácticamente diferencias significativas, solamente en el problema 3 de la prueba de 2018 a favor de los chicos. Es difícil explicar las diferencias en este problema, aunque podemos ver que no interviene en él ningún concepto de los que los alumnos estudian en clase, que es lo que suele hacer destacar a las chicas según las investigaciones. La verdad es que los problemas de la prueba están bastante bien diseñados para no favorecer a ningún género, ya que no interviene la visualización espacial y se suele huir de los contenidos curriculares, que son los aspectos en los que los estudios muestran diferencias a favor de chicos y chicas respectivamente.
- Por edad observamos grandes diferencias en todos los problemas, pero más aún en los que intervienen contenidos curriculares, aunque se intenten evitar en estas pruebas.
- Por tipo de centro hemos detectado que solamente se observan diferencias significativas en los problemas basados en propiedades de los números naturales. Esto puede indicar que estos contenidos se trabajan más en centros privados y concertados, ya que se trata de contenidos muy académicos. Otra posibilidad es que en este tipo de centros se ayude más a los alumnos a preparar estas pruebas, como hemos comentado anteriormente, ya que este tipo de problemas son muy típicos y se pueden trabajar fácilmente por requerir un menor grado de intuición. Hemos visto también que en estos mismos problemas son en los que se obtienen mayores diferencias por edad, por lo que se trata de los más polarizados en este sentido.

Como hemos ido especificando el estudio tiene algunas limitaciones que hacen que las conclusiones no se puedan generalizar para la población total de estudiantes. Además, aunque los resultados pueden ser útiles para el diseño y la corrección de pruebas de próximos años, la participación es muy irregular y esto puede obligar a matizar alguna conclusión.

Por lo que respecta a las líneas de trabajo futuro que permitan mejorar las conclusiones de este trabajo, sería interesante estudiar las irregularidades en la participación que hemos comentado analizando pruebas de otros años. Esto podría servir para ver si las diferencias entre 2018 y 2019 suponen un hecho puntual, y si es el caso averiguar cuál de las dos pruebas refleja más fielmente la tendencia de participación general. Los análisis de los resultados de otras pruebas también podrían ayudar a corroborar o desmentir los aspectos observados en estas.

También sería posible realizar análisis más exhaustivos de estas pruebas en busca de diferencias de género que indicaban las investigaciones y no hemos encontrado. Recordamos, por ejemplo, que Niederle y Vesterlund (2010) detectaban que en contextos competitivos la respuesta de las chicas era distinta, cosa que no hemos observado en los resultados. Para ver esto convendría analizar las propias resoluciones de los alumnos, y no únicamente los resultados, aunque esta es una tarea mucho más extensa y debería ir encaminada a identificar algún aspecto más concreto que se haya observado en estudios previos, lo que llevaría también a tener que realizar también un análisis más detallado de la bibliografía disponible.

# 8. BIBLIOGRAFÍA

Consell Escolar de la Comunitat Valenciana. (s.f.). *Informe sobre la situación del Sistema Educativo en la Comunitat Valenciana. Curso 2016/17*. Obtenido de http://www.ceice.gva.es/es/web/consell-escolar-cv/informes

Conselleria d’Educació, C. i E. (2015). *Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunitat Valenciana* (Vol. 7544). *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*. Art. 26.

De Guzmán, M. (s.f.). El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Obtenido de http://elclubdelamatematica.blogspot.com/2010/06/talento-matematico.html

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faisca*, 13(15), 30-39.

Farfán, R. M., y Simón, M. G. (2017). Género y matemáticas: una investigación con niñas y niños con talento. *Acta Scientiae*, 19(3), 427-446.

Gallagher, A. M. (1998). Gender and antecedents of performance in mathematics testing. *Teachers College Record*, 100(2), 297–314.

González-Calero, J. A., Cózar, R., Villena, R., y Merino, J. M. (2018). The development of mental rotation abilities through robotics-based instruction: An experience mediated by gender. *British Journal of Educational Technology*, Early View - online version, 1-16.

Greenes, C. (1981). Identify the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28(6), 14-17.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Liu, O. L., y Wilson, M. (2009). Gender differences and similarities in PISA 2003 mathematics: a comparison between the United States and Hong Kong. *International Journal of Testing,*, 9(1), 20-40.

Ministerio de Educación, C. y D. (2014, Diciembre). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Boletín Oficial del Estado núm. 3, 3 de enero de 2015.

Miralles, A. (2008). La Experiencia ESTALMAT en la Comunidad Valenciana. *Modelling in Science Education and Learning*, 1(5), 39-44.

Niederle, M., y Vesterlud, L. (2010). Explaining the gender gap in math test scores: The role of competition. *Journal of Economic Perspectives*, 24(2), 129-44.

Ordre 20/2019, de 30 d'abril, de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport, per la qual es regula l'organització de la resposta educativa per a la inclusió de l'alumnat. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana.* Art. 16 y Art. 37.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton, NJ, E.E.U.U.: Princeton University Press.

Preckel, F., Goetz, T., Pekrun, R., y Kleine, M. (2008). Gender differences in gifted and average-ability students: comparing girls' and boys' achievement, self-concept, interest, and motivation in mathematics. *Gifted Child Quaterly*, 52(2), 146-159.

*Prueba de selección ESTALMAT CV.* (2018). Obtenido de https://estalmatcv.blogs.uv.es/ultimas-pruebas-de-seleccion/

*Prueba de selección ESTALMAT CV.* (2019). Obtenido de https://estalmatcv.blogs.uv.es/ultimas-pruebas-de-seleccion/

Wasserman, L. (2013). *All of statistics: a concise course in statistical inference.* Springer Science & Business Media.

# ANEXO: SOLUCIONES PRUEBA 2018

**Resolución problema 1:**

a) Observamos que la dificultad está en ver cómo puede pasar un adulto al otro lado del río y que la barca vuelva para que pasen los demás, ya que para los niños es más sencillo por poder ir dos en cada viaje. Podemos observar que la única secuencia que permite esto es la siguiente:

$$3A\ 2N\ B\ |\ \rightarrow\ \ 3A\ |\ B\ 2N \rightarrow\ 3A\ 1N\ B\ |\ 1N \rightarrow 2A\ 1N\ |\ B\ 1A\ 1N \rightarrow 2A\ 2N\ B\ |\ 1A$$

$A$: adultos.

$N$: niños.

$B$: barca.

|: río.

Se puede comprobar rápidamente que cualquier modificación en la secuencia supone un mayor número de viajes, ya que obliga a volver a pasar por situaciones previas.

Esto significa que son necesarios un mínimo de 4 viajes para pasar de la situación inicial a una idéntica con un adulto menos. Para que pasen los tres adultos serán necesarios, por tanto, $4 \cdot 3 = 12$ viajes más 1 viaje extra para que crucen los dos niños. En total habrá que hacer un mínimo de 13 viajes.

b) Por el razonamiento anterior para 8 adultos y 2 niños harían falta $8 \cdot 4 + 1 = 33$ viajes, y para 100 adultos y 2 niños $100 \cdot 4 + 1 = 401$ viajes.

c) Generalizando el razonamiento anterior para $a$ adultos y 2 niños son necesarios como mínimo $4a + 1$ viajes.

d) Que ahora haya 3 niños no modifica la secuencia mínima que hemos establecido antes para que cruce un adulto, ya que solamente pueden ir dos niños en la barca. Por tanto, lo más sencillo es hacer que cruce primero un niño de la forma más rápida con los 2 viajes siguientes:

$$4A\ 3N\ B\ | \rightarrow 4A\ 1N\ |\ B\ 2N \rightarrow 4A\ 2N\ B\ |\ 1N$$

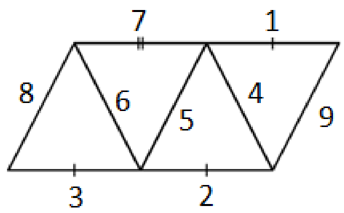
Esto hace que volvamos a la situación de los apartados anteriores donde había 2 niños, y ahora solamente queda hacer que crucen 4 adultos y 2 niños como antes en $4 \cdot 4 + 1 = 17$ viajes. En total se requieren 19 viajes. Observamos que no importa en qué momento cruce el tercer niño mientras haya otro niño con él, ya que solamente tiene una forma de hacerlo y siempre necesita 2 viajes.

e) Generalizando el apartado anterior como hemos hecho en el apartado c se obtiene que para $a$ adultos y 3 niños son necesarios $2 + (4a + 1) = 4a + 3$ viajes. En el caso concreto de 8 adultos hará falta hacer 35 viajes y si son 100 adultos 403 viajes.

f) Como en el apartado d reducimos el problema a la situación en que solamente hay 2 niños de los primeros apartados. Si hay $a$ adultos y $n$ niños hacemos que pasen primero $n - 2$ niños con 2 viajes por niño como ya hemos visto. Esto son $2(n - 2) = 2n - 4$ viajes. A continuación, estamos en la situación del apartado c y por tanto son necesarios $4a + 1$ viajes más. En total hacen falta $(2n - 4) + (4a + 1) = 4a + 2n - 3$ viajes.

**Resolución problema 2:**

Numeramos los lados de los triángulos de la figura inicial de la siguiente forma:




Observamos que el color del lado 8 quedará determinado por los lados 3 y 6 (que no pueden ser del mismo color) y lo mismo ocurrirá para el lado 9 y los lados 1 y 4. Por tanto, no nos preocuparemos por los colores de los lados 8 y 9.

a) La situación que plantea Ana es 1 rojo, 2 azul y 3 azul. Los colores de los lados 1 y 2 obligan a que 4 no pueda ser rojo ni azul, luego 4 debe ser verde. Esto obliga a que 5 sea rojo, y por tanto 6 verde y 7 azul. Carlos solamente puede decir azul.

b) Suponemos que Ana pinta 1, 2 y 3 de azul. En esta situación no podemos determinar directamente el color de ningún lado así que distinguimos dos casos según el color del lado 4 (que puede ser verde o rojo):

- Si pintamos 4 de verde, 5 debe ser rojo, 6 verde y 7 azul.
- Si pintamos 4 de rojo, 5 debe ser verde, 6 rojo y 7 azul.

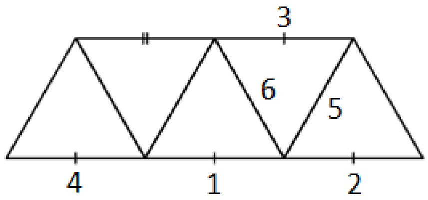
En cualquier caso, Carlos debería decir azul.

Análogamente, si Ana pinta los lados 1, 2 y 3 de rojo, Carlos deberá decir rojo, y si los pinta de verde dirá verde. Carlos debe decir el color que haya elegido Ana para pintar los tres lados.

c) Debemos distinguir ahora varios casos y subcasos:
   - Si 1 y 2 son del mismo color 4 tiene dos posibilidades y 5 queda determinado para cada una de estas.
     - Si 3 y 5 son del mismo color 6 tiene dos posibilidades y 7 queda determinado para cada una de estas.
     - Si 3 y 5 son de distinto color 6 tiene una posibilidad y 7 también.
   - Si 1 y 2 son de distinto color 4 tiene una posibilidad y 5 también.
     - Si 3 y 5 son del mismo color 6 tiene dos posibilidades y 7 queda determinado para cada una de estas.
     - Si 3 y 5 son de distinto color 6 tiene una posibilidad y 7 también.

   Observamos que siempre hay un color válido como dice Carlos, y podemos hacer que haya más de una posibilidad de distintas formas, por ejemplo, la siguiente. Si Ana pinta 1 de rojo, 2 de azul y 3 de rojo entonces 4 debe ser verde, 5 rojo y 6 puede ser azul o verde, por lo que 7 puede ser verde (si 6 se pinta de azul) o azul (si 6 se pinta de verde).

d) Numeramos los lados siguientes:




   Una posibilidad de las que dice Ana es 1 azul, 2 azul, 3 rojo y 4 cualquiera, ya que 2 y 3 obligan a que 5 sea verde, y 1 y 3 obligan a que 6 sea verde, pero 5 y 6 no pueden ser ambos verdes. Esta contradicción hace que la figura no pueda acabar de pintarse de ninguna forma, y por tanto que Carlos no pueda decir ningún color.

**Resolución problema 3:**

a) El primer jugador deberá elegir el siguiente cuadradito:

A continuación, el segundo jugador escogerá cualquiera de los otros dos y el primero podrá coger el último que quede y ganar.

b) Después de la elección del primer jugador queda la siguiente tableta, donde numeramos los cuadraditos:


Si ambos jugadores juegan sus mejores jugadas resultará vencedor el segundo jugador eligiendo el cuadradito 2, ya que de esta forma todos los cuadraditos restantes llevan a perder al primer jugador:

- Si elige 1, estamos en la situación del apartado a empezando el segundo jugador, que por tanto gana.
- Si elige 3, el segundo elige 5 y gana.
- Si elige 4, el segundo elige 1, el primero elige 3 o 5 y el segundo el último que quede.
- Si elige 5 el segundo elige 3 y gana.

c) Consideramos la tableta 3x3 numerada siguiente:


Para ganar debemos elegir el cuadradito 5, ya que entonces cualquier otro cuadradito hace perder al segundo jugador: si coge 4 nosotros cogeríamos 7 y viceversa, y si coge 1 nosotros 8 y viceversa.

Cualquier otro cuadradito nos haría perder si el segundo jugador sabe jugar bien:

- Si elegimos 4 el segundo elige 7 y gana, y viceversa.
- Si elegimos 8 estamos en la situación del apartado b y gana el segundo.
- Si elegimos 1 la situación es simétrica a la del apartado b.

- Si elegimos 2, 3 o 6 el segundo elige 5 y estamos en la misma situación que si hubiésemos elegido 5 nosotros al principio, pero cambiando nuestro papel por el del segundo jugador, que ganaría.

d) Los cuadraditos que tocan la piedra nos hacen perder siempre, ya que una vez elegido uno el segundo jugador puede elegir el otro y ganar (a no ser que la tableta tenga un único cuadradito de ancho o de alto). Además, cualquier cuadradito de la parte inferior o del lateral izquierdo de la tableta también nos hace perder. Esto se debe a que, una vez elegido, la tableta se convierte en una rectangular más pequeña, tocándole al segundo jugador elegir, y como veremos en el próximo apartado, dada una tableta de cualquier dimensión el primer jugador en elegir siempre puede ganar.

e) Supongamos por reducción al absurdo que cualquier elección nos hace perder. En este caso elegimos el cuadradito superior derecho. El segundo jugador elegirá a continuación un cuadradito que le asegure ganar, pero esta elección dejaría la tableta en la misma situación que si lo hubiésemos elegido nosotros al principio, es decir, ese cuadradito nos hubiese permitido ganar, lo que contradice la hipótesis inicial.

**Resolución problema 4:**

a) Como $26^2 = 676$, $6 + 7 + 6 = 19$, $9 + 1 = 10$, y $1 + 0 = 1$, nos devolverá el número 1.

b) De dos cifras podemos meter el $40$, ya que $40^2 = 1600$ y $1 + 6 + 0 + 0 = 7$. Análogamente de tres cifras sirve el $400$, y de $n$ cifras el $4 \cdot 10^{n-1}$.

c) En este apartado y los siguientes entiendo que se pretende que los estudiantes detecten el patrón que se repite al introducir números consecutivos en la máquina, pero no que lo justifiquen, ya que esto es excesivamente complicado para su nivel. Aun así, en este apartado que es el más sencillo de este tipo, después de resolverlo como seguramente lo harían los estudiantes daré una explicación matemática.

Podemos observar probando a meter en la máquina los primeros números naturales que cada 9 números consecutivos se repite el siguiente patrón: $1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, 9$. En concreto, cada 3 números consecutivos la máquina devuelve el número 9 y solamente en estos casos. Es decir, si metiendo un número la máquina devuelve 9, metiendo el consecutivo no será así, tendremos que avanzar 3 números para que lo vuelva a devolver.

La justificación matemática de este hecho es la siguiente. Metiendo $n$ devuelve 9 si, y solo si, sumando las cifras de $n^2$ y las de los resultados de estas sumas llegamos a 9. Por el criterio de divisibilidad del 9 esto significa que devuelve 9 si, y solo si, $n^2$ es múltiplo de 9, y esto ocurre si, y solo si, $n$ es múltiplo de 3. Por tanto si $n$ devuelve 9, $n$ es múltiplo de 3, y entonces $n+1$ no lo es y no puede devolver 9, $n+2$ tampoco, pero $n+3$ sí.

d) La máquina no puede devolver el número 5 porque este no está en el patrón que se repite.

e) Según el patrón todos los múltiplos de 3 devuelven 9. El número $201820182018$ es múltiplo de 3 porque la suma de sus cifras es $(2+1+8)\cdot 3$, por tanto devuelve 9.

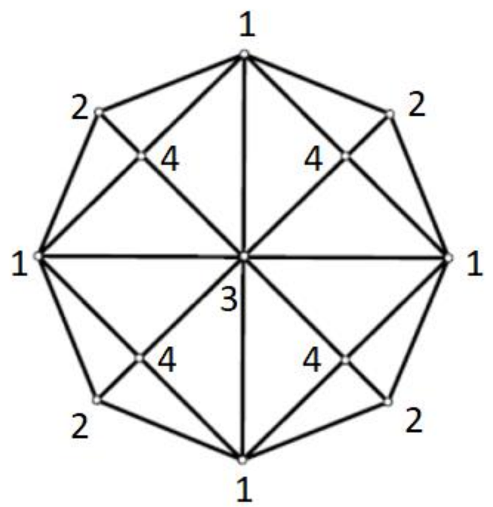
f) Volvemos a probar casos iniciales en la nueva máquina y vemos ahora que cada 3 se repite el patrón: $1, 8, 9$. La cifras de $20182018$ suman $22$, por tanto las de $20182017$ suman $21$ y es múltiplo de 3. Según el patrón al meter en la máquina $20182017$ nos devolverá $9$ y por tanto siguiendo la secuencia $20182018$ devolverá $1$.

g) Una forma de conseguirlo es que la máquina calcule el resto de dividir el número entre el formado por su primera cifra repetida 3 veces y que devuelva el número de cifras del resto de la división.

**Resolución problema 5:**

Dividimos los vértices de la figura en 4 tipos por simetría, de modo que todos los vértices del mismo tipo forman parte del mismo número de triángulos simétricos.

Marcamos los 4 tipos de vértices en la figura:



Para contar los triángulos rectángulos vemos cuántos tienen el ángulo recto en cada uno de los vértices:

| Tipo de vértice | Número de vértices | Triángulos con el ángulo recto en cada vértice | Total |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 4 |
| 2 | 4 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 4 |
| 4 | 4 | 4 | 16 |
| | | | 24 |

Hay, por tanto, 24 triángulos rectángulos.

Para contar los triángulos obtusángulos vemos cuántos tienen el ángulo obtuso en cada uno de los vértices:

| Tipo de vértice | Número de vértices | Triángulos con el ángulo obtuso en cada vértice | Total |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 1 | 4 |
| 3 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 4 | 0 | 0 |
| | | | 4 |

Hay, por tanto, 4 triángulos obtusángulos.

Finalmente, para contar los triángulos acutángulos vemos cuántos contienen a cada uno de los vértices, y al final deberemos dividir el resultado entre 3 porque habremos contado cada triángulo 3 veces (una por cada uno de sus vértices):

| Tipo de vértice | Número de vértices | Triángulos acutángulos que contienen a cada vértice | Total |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 8 |

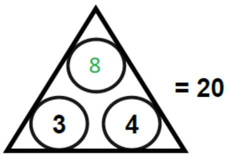
| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 2 | 8 |
| 3 | 1 | 8 | 8 |
| 4 | 4 | 0 | 0 |
| | | | 24 |

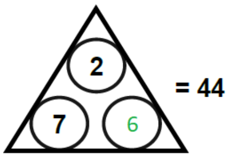
Hay, por tanto, $24:3 = 8$ triángulos acutángulos.

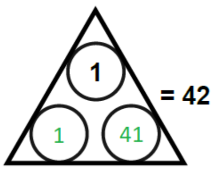
# ANEXO: SOLUCIONES PRUEBA 2019

**Resolución problema 1:**

a) Los triángulos quedarán de la siguiente forma:

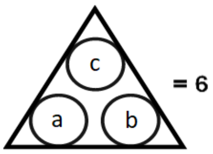







En el último podemos también intercambiar la posición del 1 y el 41.

b) Denotamos los números del triángulo con las letras $a$, $b$ y $c$ de la forma siguiente:




Los posibles valores de a, b y c son:

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 |
| 1 | 2 | 4 |
| 1 | 3 | 3 |
| 1 | 4 | 2 |
| 1 | 5 | 1 |
| 2 | 1 | 4 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 1 | 3 |
| 4 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 1 |

En total hay 10 triángulos posibles.

c) Denotamos por $a$, $b$ y $c$ los elementos del triángulo como en el apartado anterior. Doy aquí la respuesta que entiendo que se pretende que den los alumnos y después la justifico algebraicamente, ya que supongo que pocos estudiantes de esta edad serán capaces de realizar la demostración algebraica.

Si probamos a dar a $a$ y $b$ valores consecutivos pequeños ($b = a + 1$) podemos ver que el valor más pequeño que podemos dar a $c$ para que el resultado sea un cuadrado perfecto es $c = b$, y en este caso el resultado del tricálculo es $b^2$. La justificación que pueden dar los estudiantes a que no haya un valor más pequeño posible para $c$ es que el anterior cuadrado perfecto a $b^2$ es $a^2$, y cuando realizamos el tricálculo $a \cdot b + c$ obtenemos un número mayor que $a^2$ porque $b$ es mayor que $a$, por tanto $a \cdot b > a^2$ y en consecuencia $a \cdot b + c > a^2$. Los estudiantes pueden justificar esto con ejemplos si no están habituados al lenguaje algebraico.

La justificación algebraica más formal que podemos dar de este hecho es que si llamamos $b = a + 1$ entonces

$$a \cdot b + c = a \cdot (a + 1) + c = a^2 + a + c.$$

Observamos que si $c = a + 1$,

$$a^2 + a + c = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2.$$

Y como $a^2 + a + c > a^2$, el menor valor que puede tomar $c$ para que el resultado sea un cuadrado perfecto es $c = a + 1$.

d) Haciendo pruebas para valores pequeños los estudiantes pueden ver que si $b = 3a$ entonces si $c = a^2$ el resultado del tricálculo es un cuadrado perfecto. La justificación algebraica es que

$$a \cdot b + c = a \cdot (3a) + a^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2 = (2a)^2.$$

e) Suponemos por reducción al absurdo que existen 3 números $a$, $b$ y $c$ distintos de forma que al ponerlos en cualquier orden en el triángulo siempre dé como resultado el mismo tricálculo. Entonces

$$ab + c = ac + b \rightarrow a(b - c) - (b - c) = 0 \rightarrow (a - 1)(b - c) = 0 \rightarrow a = 1,$$

donde la última implicación se cumple por ser distintos $b$ y $c$.

Análogamente, cambiando los papeles de $a$ y $b$ en la secuencia de implicaciones anterior se obtiene que $b = 1$, lo que contradice que $a$ y $b$ sean distintos.

Esto prueba que no existen dichos números.

**Resolución problema 2:**

a) Nos quedamos igual que estábamos. La primera vez se apagarán ciertas salas y la segunda se volverán a encender.

b) No importa el orden. Si a una sala no le afecta ningún interruptor quedará encendida, si le afecta uno de los dos se apagará (no nos importa si lo hace antes o después), y si le afectan los dos se apagará y se encenderá.

c) La secuencia más corta posible es:

$$\boxed{B} \rightarrow \boxed{D} \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{E}$$

Por el apartado b cualquier reordenación de las letras de la secuencia también es válida, y por el apartado a no podemos repetir ninguna letra.

d) La secuencia más corta posible es:

$$\boxed{B} \rightarrow \boxed{D} \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \boxed{C}$$

Igual que antes, por el apartado b cualquier reordenación de las letras de la secuencia también es válida, y por el apartado a no podemos repetir ninguna letra. Además, podemos intercambiar A por I y C por G.

e) B, D, F y H pueden acabar iluminadas ellas solas tocando el interruptor de E y de la sala que sea simétrica respecto a E a la que queremos dejar encendida (B y H son simétricas respecto a E, y D y F también). E también puede acabar iluminada sola por el apartado d.

A, C, G e I no pueden quedar iluminadas solas porque los interruptores que afectan a las salas A e I son los mismos, y los que afectan a C y G también, luego las salas de cada una de estas parejas siempre van a estar encendidas o apagadas al mismo tiempo.

**Resolución problema 3:**

a) La posibilidad que ocurrirá más veces es la 2. Para justificarlo nos fijamos en cuántas posiciones posibles tienen las tarjetas rojas que cumplan cada una de las posibilidades (nos fijamos solamente en las rojas porque una vez colocadas estas la posición de las negras queda determinada).

   - La posibilidad 1 solamente puede ocurrir de una forma, colocando las dos tarjetas rojas en los dos buzones rojos.

- La posibilidad 2 ocurre si una de las tarjetas rojas se coloca en un buzón rojo y la otra en uno negro. Hay, por tanto, 2 opciones para la primera tarjeta roja y por cada una de estas 2 para la segunda. En total hay $2 \cdot 2 = 4$ formas de que ocurra.
- La posibilidad 3 solamente puede ocurrir de una forma, colocando las dos tarjetas rojas en los dos buzones negros.

b) Las posibilidades ahora son:

1. Todos los buzones contienen una tarjeta de su color.
2. Cuatro buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
3. Dos buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
4. Ningún buzón contiene una tarjeta del mismo color que el buzón.

Las que más ocurren son la 2 y la 3. Esto es porque, igual que antes, solamente hay una forma de distribuir las tarjetas rojas para que ocurra 1 (todas a los buzones rojos) o 3 (todas a los buzones negros). Pero hay varias formas de que ocurra 2 (dos rojas a los buzones rojos y una a los negros) o 3 (una roja a los buzones rojos y dos a los negros). Además, hay el mismo número de formas de que ocurran 2 y 3 por simetría (pasamos de una posibilidad a otra intercambiando buzones rojos y negros).

En concreto, las formas de que ocurra 2 (y lo mismo para 3) son

$$\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = 3.$$

c) Las posibilidades en este caso son:

1. Todos los buzones contienen una tarjeta de su color.
2. 28 buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
3. 26 buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.

   …

8. 16 buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
9. 14 buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.

   …

14. 4 buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
15. 2 buzones contienen una tarjeta del mismo color que el buzón.
16. Ningún buzón contiene una tarjeta del mismo color que el buzón.

Las que más ocurren en este caso son la 8 y la 9, las centrales. Los estudiantes los pueden justificar por generalización de los casos anteriores, o diciendo que son las posibilidades en las que las tarjetas rojas tienen más opciones de buzones en los que situarse.

Para justificarlo formalmente podemos calcular usando combinatoria las formas de repartir las tarjetas rojas en los buzones que cumplen cada una de las posibilidades. La posibilidad $k$ se da cuando $16-k$ tarjetas rojas van a buzones rojos y $k-1$ van a buzones negros, y las forma de que ocurra esto son

$$\binom{15}{16-k}\cdot\binom{15}{k-1}.$$

Se comprueba fácilmente que este número de formas es el máximo posible cuando $k=8$ o $k=9$.

d) Sí que puede ocurrir si hay más tarjetas rojas que negras. Por ejemplo, si hay 4 buzones (2 rojos y 2 negros), 3 tarjetas rojas y 1 negra, cualquier distribución de las tarjetas en los buzones hace que el número de buzones con una tarjeta de su color sea un número impar.

**Resolución problema 4:**

a) En la siguiente tabla vemos cuántas canicas tendrá cada uno según pasen los días:

| Días que han pasado | Canicas de Marta | Canicas de Diego |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 6 |
| 1 | 6 | 5 |
| 2 | 4 | 7 |
| 3 | 7 | 4 |
| 4 | 3 | 8 |
| 5 | 8 | 3 |
| 6 | 2 | 9 |
| 7 | 9 | 2 |
| 8 | 1 | 10 |
| 9 | 10 | 1 |
| 10 | 0 | 11 |

Al cabo de 3 días Marta tendrá 7 y Diego 4, y pasarán 10 días hasta que uno se quede sin canicas (que será Marta).

b) Si observamos lo que ocurre los primeros días vemos lo siguiente:

| Días que han pasado | Canicas de Marta | Canicas de Diego |
|---|---|---|
| 0 | 50 | 51 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 51 | 50 |
| 2 | 49 | 52 |
| 3 | 52 | 49 |
| 4 | 48 | 53 |
| 5 | 53 | 48 |

Podemos observar que cada 2 días que pasan Marta tiene una canica menos que al principio y si pasa un número par de días tiene más canicas que inicialmente. En el caso de Diego cuando pasa un número par de días tiene más canicas que al principio, y cuando pasa un número impar tiene las canicas que tenía Marta el día anterior. Estas afirmaciones se pueden demostrar por inducción, aunque no se pretende que los alumnos lo hagan en la prueba dado su nivel.

Por tanto, la primera que se quede sin canicas será Marta, y si empieza con 50 y su número de canicas se reduce en 1 cada 2 días tendrán que pasar $50 \cdot 2 = 100$ días.

c) Contestaremos con los ejemplos afirmativamente a las dos preguntas del apartado.

Si Marta empieza con 2 canicas y Diego con 0:

| Días que han pasado | Canicas de Marta | Canicas de Diego |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Después del primer día tendrán el mismo número de canicas.

Si Marta empieza con 6 canicas y Diego con 0:

| Días que han pasado | Canicas de Marta | Canicas de Diego |
|---|---|---|
| 0 | 6 | 0 |
| 1 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 3 |

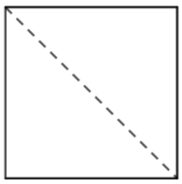
Después del segundo día tendrán el mismo número de canicas.

d) Para que esto ocurra debe ser siempre el mismo quien dé canicas al otro ya que, si algún día en un regalo de canicas las canicas del que recibe superan las del que da, a partir de ese momento la diferencia entre las canicas de ambos se irá incrementando como ocurría en los primeros apartados. Por tanto, después de 20 días quien tenía más canicas habrá dado al otro $1 + 2 + \cdots + 19 + 20$ canicas. Luego la diferencia inicial entre ambos debe ser

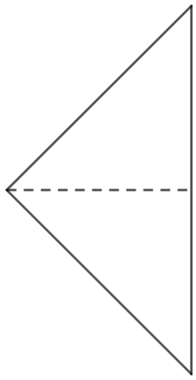
$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 19 + 20) = 2 \cdot \frac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 420.$$

**Resolución problema 5:**

a) Podemos cortarlo en 2 trozos de la forma siguiente:

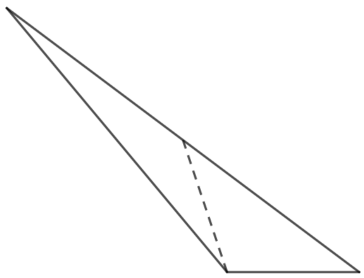


De esta forma podemos conseguir formar el siguiente triángulo uniendo los trozos:

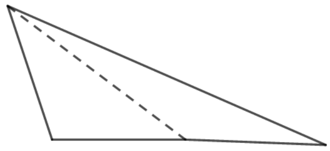


b) No podemos, ya que para formar un triángulo uniendo dos piezas estas deben ser triangulares, y la única forma de cortar un cuadrado en dos piezas triangulares es por la diagonal, de modo que los ángulos de los triángulos que se formen serán de 45 o de 90 grados. Juntando estos ángulos para formar un nuevo triángulo no hay forma de conseguir un ángulo agudo que no sea de 45 grados.

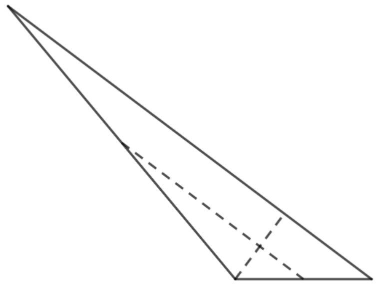
c) Podemos cortarlo uniendo el punto medio del lado mayor con el vértice opuesto:



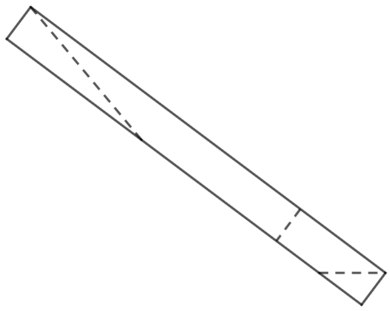
Girando y volteando la pieza de la izquierda se puede colocar formando el siguiente cuadrilátero (aunque parezca un triángulo porque el ángulo inferior central es de poco más de 180 grados):



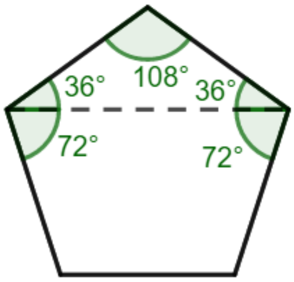
Para formar un rectángulo podemos realizar dos cortes de la forma siguiente:



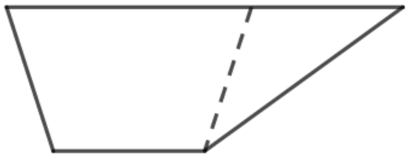
Uno de los cortes está hecho por la altura del triángulo respecto al lado mayor, y el otro por la perpendicular a esta altura en su punto medio. Colocando ahora las piezas obtenemos:



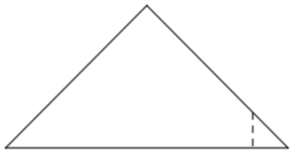
d) Lo cortamos de la forma siguiente y observamos los ángulos que se forman:



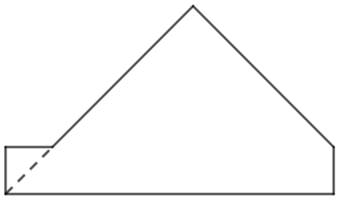

El hecho de que $108° + 72° = 180°$ nos permite colocar los trozos de la forma siguiente para formar un cuadrilátero:



e) Cogemos un triángulo cualquiera y cortamos una punta:



La colocamos sobre uno de los lados pegada a un extremo:



De esta forma el nuevo polígono tiene 3 lados más que el triángulo inicial, uno en el corte y dos donde colocamos la punta cortada.

Es fácil ver que esto ocurrirá de nuevo si cortamos otra punta del polígono obtenido y la colocamos en un extremo de un lado. Si repetimos este proceso 5 veces obtendremos un polígono con $5 \cdot 3 = 15$ lados más que el triángulo inicial, es decir, con 18 lados como queríamos.