Apunts de

CÀLCUL I

Grau en Física

Avelino Vicente
Departament de Física Teòrica

Universitat de València
2020-2021

Índex

Prefaci

Aquests apunts han sigut elaborats per al grup A de l'assignatura Càlcul I del Grau en Física de la Universitat de València. Procedeixen de diverses fonts. A més del material obtingut de la bibliografia de l'assignatura i dels apunts de les classes del professor José María Ibáñez, del Departament d'Astronomia i Astrofísica, ha estat inestimable l'ajuda dels professors Domingo Martínez i Juan Francisco Sánchez, del Departament de Física Aplicada i Electromagnetisme, i Núria Rius, del Departament de Física Teòrica. S'agraeixen també els comentaris de Sergi Nadal, del Departament de Física Teòrica.

1

Funcions, límits i continuïtat

El que sabem és una gota d'aigua, el que ignorem és un oceà.
— Isaac Newton

1.1 Nocions fonamentals

En aquest curs estudiarem càlcul amb variables *reals*. Els **nombres reals** són aquells que podem escriure com a una expansió decimal. Exemples de nombres reals són

$$-2\,,\quad \frac{1}{8}=0.125\,,\quad \frac{9}{7}=1.285714\ldots\,,\quad \pi=3.141592\ldots$$

El conjunt dels nombres reals es denota amb el símbol $\mathbb{R}$, i inclou diversos subconjunts, com ara els nombres naturals ($\mathbb{N}$), els nombres enters ($\mathbb{Z}$) o els nombres racionals ($\mathbb{Q}$). A més, el conjunt dels nombres reals també pot considerar-se subconjunt d'un conjunt més gran, el dels nombres complexos ($\mathbb{C}$). Podem, per tant, establir la següent jerarquia de conjunts:

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

Els nombres reals poden representar-se gràficament com a punts en una recta numèrica anomenada **recta real**:

El conjunt $\mathbb{R}$ té una estructura d'ordre, i això permet fer comparacions entre nombres reals (major que, menor que) o definir conceptes com ara mòdul, distància o interval.

Definició 1.1: Mòdul

El **mòdul** d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ es denota com a $|a|$ i es defineix com a

$$|a| = \begin{cases} a\,, & a \geq 0 \\ -a\,, & a < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Una manera alternativa d'anomenar el mòdul del nombre a és *valor absolut* de a.

Propietats:

(i) $|a| \geq 0$.

(ii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(iii) $|a| = |-a|$.

(iv) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (*Desigualtat triangular*).

(v) $|a \cdot b| = |a||b|$.

Comentari: El mòdul és un exemple de **funció definida a trossos**, una funció amb una definició diferent en diferents subconjunts disjunts del seu domini.

Definició 1.2: Distància

La **distància** entre els nombres $a, b \in \mathbb{R}$ és

$$d(a, b) = |b - a|\,. \tag{1.2}$$

La distància entre a i b es correspon amb la longitud del segment de recta real entre aquests. A partir de la seua definició i de les propietats del mòdul, és fàcil deduir les següents **propietats** de la distància:

(i) $d(a, b) \geq 0$.

(ii) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

(iii) $d(a, b) = d(b, a)$.

(iv) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (*Desigualtat triangular*).

(v) $|a| = d(a, 0)$.

Definició 1.3: Interval

Un subconjunt de la recta real es denomina un **interval** si conté almenys dos nombres i a tots els nombres reals que estan entre qualsevol dos d'aquests elements.

Exemples 1.1: El conjunt de tots els nombres reals x tals que $x > 6$ és un interval, igual que el conjunt de totes les x tals que $-2 \leq x \leq 5$. Per contra, el conjunt dels nombres reals sense el zero no és un interval, ja que podem trobar dos elements entre els quals no es conté un element (per exemple, entre el -1 i l'1 no es conté el 0).

Distingim dos tipus d'intervals: finits i infinits. Els intervals de nombres corresponents a segments de la recta real són **intervals finits** i els intervals corresponents a semirectes i la recta real sencera són **intervals infinits**. També podem parlar d'intervals oberts i tancats. Siguen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a < b$. Es diu que l'interval finit (a, b) és **obert** si no conté els punts extrems a i b

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} . \tag{1.3}$$

L'interval finit $[a, b]$ és **tancat** si conté els dos punts extrems

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} . \tag{1.4}$$

Finalment, els intervals finits $[a, b)$ i $(a, b]$ són **semioberts** si contenen un punt extrem, però no l'altre

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} , \tag{1.5}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\} . \tag{1.6}$$

Els punts extrems també es denominen **punts frontera**. Els punts restants de l'interval són **punts interiors**.

Exemples 1.2:

(i) El conjunt dels nombres reals x tals que $-1 < x < 2$ és l'interval finit obert $(-1, 2)$.

(ii) El conjunt dels nombres reals x tals que $-1 \leq x \leq 2$ és l'interval finit tancat $[-1, 2]$.

(iii) El conjunt dels nombres reals x tals que $-1 < x \leq 2$ és l'interval finit semiobert $(-1, 2]$.

(iv) El conjunt dels nombres reals x tals que $-1 \leq x < 2$ és l'interval finit semiobert $[-1, 2)$.

Notació: una manera alternativa de denotar l'interval obert (a, b) és $]a, b[$. Anàlogament, $[a, b)$ i $(a, b]$ poden denotar-se com a $[a, b[$ i $]a, b]$, respectivament. No obstant això, en aquest curs no farem servir aquesta notació alternativa.

Un *interval infinit* és **tancat** si i només si conté tots els seus punts frontera. Per contra, és **obert** si i només si no conté cap punt frontera.

Exemples 1.3:

(i) El conjunt dels nombres reals x tals que $x > 1$ és l'interval infinit obert $(1, \infty)$.

(ii) El conjunt dels nombres reals x tals que $x < 1$ és l'interval infinit obert $(-\infty, 1)$.

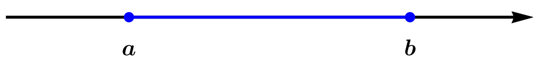
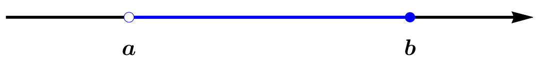
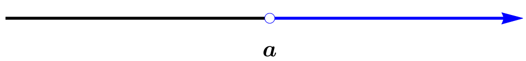
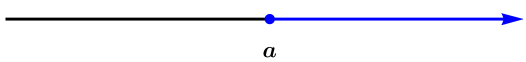
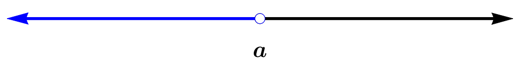
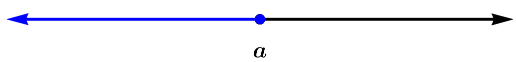
(iii) El conjunt dels nombres reals x tals que $x \geq 1$ és l'interval infinit tancat $[1, \infty)$.

(iv) El conjunt dels nombres reals x tals que $x \leq 1$ és l'interval infinit tancat $(-\infty, 1]$.

Comentari 1: Un interval d'extrems a i b s'anomena **interval propi** si $a < b$. Si $b < a$ l'interval és el conjunt buit. Si $a = b$, es poden donar dos casos. Si l'interval és tancat es dona $[a, a] = \{a\}$ i s'anomena **interval degenerat** o **singletó**. Si l'interval no és tancat llavors és el conjunt buit.

Comentari 2: S'ha de tenir en compte que les definicions d'interval infinit tancat i obert no són negacions l'una de l'altra, com ho exemplifica l'interval infinit $(-\infty, \infty) \equiv \mathbb{R}$. Aquest interval no té punts frontera i, per tant, és obert. Per altra banda, com que no té cap punt frontera, conté tots els nombres reals i, per tant, també és tancat. Ara bé, aquest és un cas molt especial.

La taula següent il·lustra tots els casos d'intervals finits i infinits possibles:

Notació	**Conjunt**	**Tipus**	**Representació**
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Obert	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Tancat	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Semiobert	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Semiobert	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Obert	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	Tancat	
$(-\infty, a)$	$\{x \mid x < a\}$	Obert	
$(-\infty, a]$	$\{x \mid x \leq a\}$	Tancat	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	Obert i tancat	

1.2 Funcions

Definició 1.4: Funció

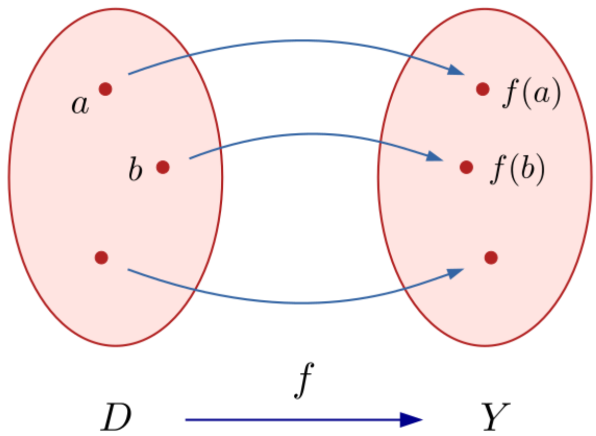
Una **funció** f és una correspondència entre un conjunt D (anomenat **domini**) i un altre conjunt Y (anomenat **codomini**), de manera que a cada element $x \in D$ li correspon un únic element $f(x) \in Y$. Es denota per

$$f : D \longrightarrow Y \tag{1.7}$$

Si $x \in D$, a l'element del codomini assignat per la funció f i denotat per $f(x)$ se l'anomena **valor** o **imatge** de la funció f de x. Normalment s'escriu $f(x) = y$, amb y l'element del conjunt Y que s'obté en aplicar la funció f a $x \in D$. Al subconjunt $R \subset Y$ format pels valors o imatges obtinguts al aplicar la funció f a tots els elements del domini D se l'anomena **rang** de la funció:

$$R \equiv f(D) = \{y \in Y \mid \exists x \in D,\ f(x) = y\} \ . \tag{1.8}$$

Finalment, una **preimatge** de $y \in Y$ és algun $x \in D$ tal que $f(x) = y$. Podem visualitzar la funció f de la manera següent:



Comentari: Cada $x \in D$ té una única imatge, tal com requereix la definició 1.4, però $y \in R$ pot ser imatge de més d'un element de D. Un exemple senzill seria la funció $f(x) = x^2$. A cada valor de x li correspon un únic valor de $f(x)$, el seu quadrat, però dos nombres diferents poden tenir el mateix quadrat: $f(-2) = f(2) = 4$, per exemple.

Nota: El domini de la funció f també es pot denotar com a D_f. Igualment, el codomini i el rang de la funció f es poden denotar com a Y_f i R_f, respectivament. D'aquesta manera es ressalta que aquests conjunts estan associats a la funció f. Finalment, al rang de la funció també se l'anomena **imatge** o **recorregut** de la funció.

Les funcions poden ser de molts tipus diferents, segons siguen els conjunts domini i codomini. La taula següent recull alguns casos particulars amb interès especial per al nostre curs:

D	Y	Exemple	Nom
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	Funció real d'una variable real
$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$a_n = \dfrac{1}{n^2}$	Successió
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$	$f(x, y) = x + 2y$	Funció real de diverses variables reals
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n$	$f(x) = (\sin x, \cos x)$	Funció vectorial d'una variable real
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^m$	$f(x, y, z) = (x^2 + y^2, x - y + z)$	Camps escalar ($m = 1$) i vectorial ($m > 1$)
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$f(z) = 2z$	Funció complexa d'una variable complexa

En aquest tema i en els següents centrarem el nostre estudi en el cas particular de les *funcions reals d'una variable real.* Posteriorment, en el tema 4, estudiarem *successions*, i finalment en el tema 5 introduirem els conceptes fonamentals sobre *funcions reals de diverses variables reals.*

Definició 1.5: Funció real d'una variable real

Una **funció real d'una variable real** f és una funció que assigna a un nombre real $x \in D_f \subset \mathbb{R}$ un altre nombre real $y = f(x) \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : D_f \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \in D_f \subset \mathbb{R} &\xrightarrow{\ f\ } y = f(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Totes les definicions fetes per a una funció general són també vàlides per a aquest cas particular. Per tant, podem parlar de domini, codomini i rang de la funció real f. En tots els casos el codomini serà $\mathbb{R}$, però el rang dependrà de la funció.

Exemples 1.4:

(i) $f(x) = x^2 : D_f = \mathbb{R}$ i $R_f = [0, \infty)$.

(ii) $f(x) = \dfrac{1}{x} : D_f = R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(iii) $f(x) = \sqrt{x} : D_f = R_f = [0, \infty)$.

(iv) $f(x) = \sqrt{4 - x} : D_f = (-\infty, 4]$ i $R_f = [0, \infty)$.

(v) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} : D_f = [-1, 1]$ i $R_f = [0, 1]$.

(vi) $f(x) = \sin x : D_f = \mathbb{R}$ i $R_f = [-1, 1]$.

Nota: A partir d'ara i fins que arribem al tema 5, anomenarem simplement *funció* a una *funció real d'una variable real.*

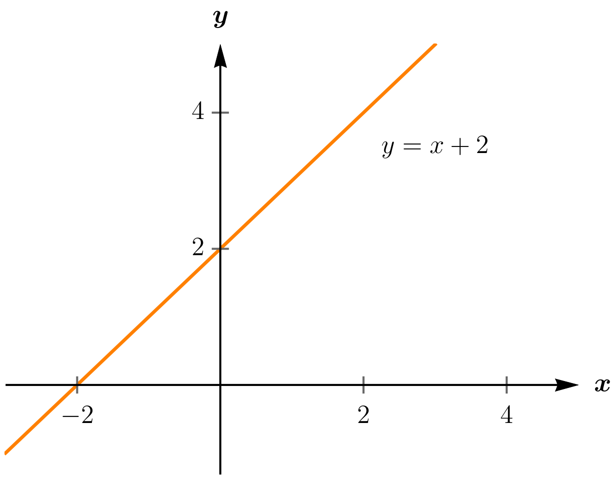
Definició 1.6: Gràfica

Donada la funció f, la seua **gràfica** és el subconjunt $G_f \subset \mathbb{R}^2$ definit per

$$G_f = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in D_f, x_2 = f(x_1) \right\} . \tag{1.9}$$

Una funció amb una variable dependent i una altra independent es pot representar gràficament en un eix d'ordenades i abscisses, fent correspondre el valor de cada variable a la posició en els eixos. Normalment s'utilitza la variable x per a l'eix d'abscisses i la variable y per a l'eix d'ordenades.

Exemple 1.5: La gràfica de la funció $f(x) = x + 2$ és el conjunt de punts (x, y) del pla per als quals $y = x + 2$. Si els representem podem veure que és una recta:



Comentari: Recordem que la definició de funció (definició 1.4) implica que el valor $f(x)$ és únic per a cada $x \in D_f$. Per tant, és evident que si dibuixem *rectes verticals* (és a dir paral·leles a l'eix y) per cada punt del domini, aquestes rectes tallaran la gràfica en un sol punt. Les curves en el pla cartesià $\mathbb{R}^2$ que no satisfan aquest requisit no representen una funció.

Definició 1.7: Operacions algebraiques amb funcions

Siguen f i g dues funcions. Aleshores, per a $x \in D_f \cap D_g$ i $c \in \mathbb{R}$ una constant, definim les funcions $f+g$, $f-g$, $f\,g$, $\dfrac{f}{g}$ i $c\,f$ com a

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (f\,g)(x) &= f(x)\,g(x)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{on } g(x)\neq 0)\\ (c\,f)(x) &= c\,f(x)\end{aligned}$$

Comentari: La definició requereix que x estiga en els dominis de les dues funcions. Per tant, només podem aplicar operacions algebraiques sobre funcions en la intersecció dels seus dominis ($D_f \cap D_g$).

Definició 1.8

Siga f una funció definida en un interval $I \subset D_f$.

- f és **creixent** en I si $f(x_2) > f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in I$ amb $x_2 > x_1$.
- f és **decreixent** en I si $f(x_2) < f(x_1)$ $\forall x_1, x_2 \in I$ amb $x_2 > x_1$.

És important notar que les desigualtats donades en aquesta definició han de satisfer-se per a qualsevol parella de punts x_1 i x_2 en l'interval I tals que $x_2 > x_1$.

Exemple 1.6: La funció $f(x) = \sin x$ és creixent en l'interval $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Comentari: Direm que una funció és **monòtona** en l'interval I si és creixent o decreixent en aquest interval.

Definició 1.9

- Una funció f és una funció **parella** si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in D_f$.
- Una funció f és una funció **imparella** si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D_f$.

Comentari 1: En les funcions parelles i imparelles, tant x com $-x$ estan en el domini.

Propietats:

(i) La suma de dues funcions parelles és parella: $p_1(-x) + p_2(-x) = p_1(x) + p_2(x)$.

(ii) Qualsevol múltiple constant d'una funció parella és parella: $c\,p(-x) = c\,p(x)$.

(iii) La suma de dues funcions imparelles és imparella: $i_1(-x)+i_2(-x) = -\left(i_1(x) + i_2(x)\right)$.

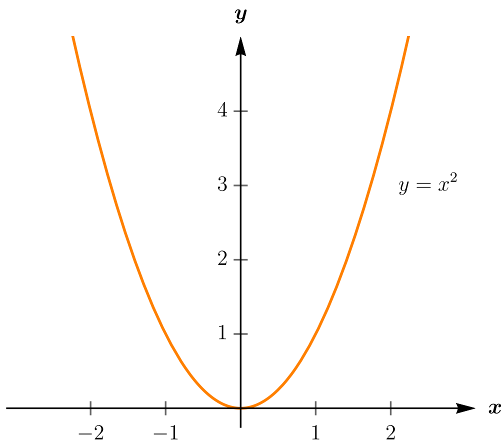
(iv) Qualsevol múltiple constant d'una funció imparella és imparella: $c\, i(-x) = c\, i(x)$.

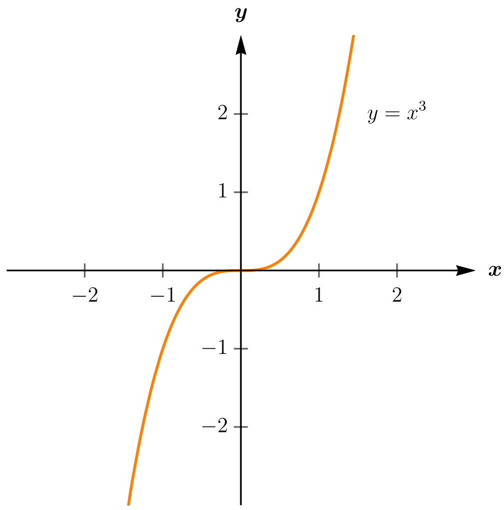
(v) El producte de dues funcions parelles, o de dues funcions imparelles, és una funció parella: $p_1(-x)\, p_2(-x) = p_1(x)\, p_2(x)$, $i_1(-x)\, i_2(-x) = i_1(x)\, i_2(x)$.

(vi) El producte d'una funció parella i una funció imparella és una funció imparella: $p(-x)\, i(-x) = -p(x)\, i(x)$.

Comentari 2: La gràfica d'una funció parella és simètrica respecte a l'eix y. La gràfica d'una funció imparella és simètrica respecte a l'origen.

Exemple 1.7: La funció $f(x) = x^2$ és parella i la funció $f(x) = x^3$ és imparella.





Definició 1.10: Composició de funcions

Siguen f i g dues funcions. Si $x \in D_g$ és tal que $g(x) \in D_f$, definim la funció **composició** $f \circ g$ com a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))\,. \tag{1.10}$$

$f \circ g$ es pronuncia "*f composta amb g*".

La definició implica que $f \circ g$ pot definir-se quan el rang de g està en el domini de f:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) \tag{1.11}$$

En cas contrari, l'aplicació de f sobre $g(x)$ no és possible.

Propietats:

(i) **Associativitat**: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \equiv f \circ g \circ h$.

Demostració. $f \circ (g \circ h)$ i $(f \circ g) \circ h$ tenen el mateix domini (D_h) i rang (R_f) i, per tant, podem preguntar-nos si són iguals. I efectivament, $\forall x \in D_h$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)\,. \quad (1.12)$$

□

(ii) **No commutativitat**: $f \circ g \neq g \circ f$ en general.

Exemple 1.8: Siguen les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x + 1$. Aleshores,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ amb domini $D_{f \circ g} = [-1, \infty)$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$ amb domini $D_{g \circ f} = [0, \infty)$.

Definició 1.11: Funció injectiva

Una funció f és **injectiva** si $\forall x_1, x_2 \in D_f$ tals que $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

De manera equivalent, direm que una funció f és injectiva quan no existeix cap imatge que tinga associada més d'una preimatge del domini. A més, també podem definir una funció **injectiva en un interval** $I \subset D_f$ si la restricció donada en la definició prèvia se satisfà $\forall x_1, x_2 \in I$.

Comentari: Una funció f és injectiva si i només si la seua gràfica talla cada *recta horitzontal* (és a dir, paral·lela a l'eix x) com a molt una vegada.

Exemple 1.9: La funció $f(x) = x^3$ és injectiva, ja que $x_1^3 \neq x_2^3$ si $x_1 \neq x_2$. Per contra, la funció $f(x) = x^2$ no és injectiva, ja que $x^2 = (-x)^2$ i, per tant, la mateixa imatge té associada dues preimatges en D_f.

Definició 1.12: Funció inversa

Siga f una funció injectiva. Aleshores, definim la **funció inversa** f^{-1} com a

$$\begin{aligned} f^{-1} : R_f &\longrightarrow D_f \\ y \in R_f &\xrightarrow{f^{-1}} x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

tal que $f(x) = y$.

És fonamental que f siga injectiva perquè tinga inversa. En cas contrari, a una imatge li correspondria més d'una preimatge i, per tant, no seria una funció. Una funció que té inversa s'anomena **invertible**.

Comentari 1: El domini de f^{-1} és el rang de f, és a dir, $D_{f^{-1}} = R_f$.

Comentari 2: Una funció creixent o decreixent en tot el seu domini és injectiva i, aleshores, invertible.

Exemple 1.10: Siga

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2}\,. \tag{1.13}$$

Com que es tracta d'una funció creixent en tot el domini, és una funció invertible. Ara mostrarem com calcular la funció inversa. Escrivim primer

$$y = 1 + \frac{x}{2}\,. \tag{1.14}$$

A continuació aïllem x. Obtenim

$$2\,y = 2 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,y - 2\,. \tag{1.15}$$

Finalment, intercanviem $x \leftrightarrow y$ i obtenim $y = 2\,x - 2$. Per tant, la funció inversa de f és

$$f^{-1}(x) = 2\,x - 2\,. \tag{1.16}$$

Teorema 1.1

Siga f una funció invertible. Aleshores

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D_f \tag{1.17}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in R_f \tag{1.18}$$

Demostració. Siga $x \in D_f$ amb $y = f(x)$. Provem la primera identitat del teorema per aplicació directa de les definicions 1.10 i 1.12:

$$(f^{-1} \circ f)(x) \underset{\text{D1.10}}{=} f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \underset{\text{D1.12}}{=} x\,, \tag{1.19}$$

on en el primer pas hem utilitzat la definició de composició de funcions i en l'últim la definició de funció inversa. La segona identitat del teorema pot provar-se de manera anàloga:

$$(f \circ f^{-1})(y) \underset{\text{D1.10}}{=} f(f^{-1}(y)) \underset{\text{D1.12}}{=} f(x) = y\,. \tag{1.20}$$

□

Comentari 1: El teorema 1.1 implica que les funcions $f^{-1} \circ f$ i $f \circ f^{-1}$ són les **funcions identitat**,

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_D\,, \tag{1.21}$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_R\,, \tag{1.22}$$

ja que la seua aplicació sobre elements dels seus dominis dona com a imatges els mateixos elements: $\mathrm{Id}_D(x) = x$ i $\mathrm{Id}_R(y) = y$. Ara bé, no són, en general, la mateixa funció identitat, ja que Id_D té domini D_f i Id_R té domini R_f.

Comentari 2: És fàcil comprovar que la funció identitat és la seua propia inversa. Siga Id_I la funció identitat definida en $I \subset \mathbb{R}$. Aleshores $\mathrm{Id}_I(x) = x \; \forall x \in I$ i per tant, per aplicació de la definició de funció inversa, $\mathrm{Id}_I^{-1}(x) = x$ també $\forall x \in I$. Com que Id_I i Id_I^{-1} tenen el mateix domini i rang i fan la mateixa correspondència entre elements d'aquests dos conjunts, són la mateixa funció: $\mathrm{Id}_I = \mathrm{Id}_I^{-1}$. A una funció que és la seua propia inversa se l'anomena **involució**.

Teorema 1.2

Siguen f i g dues funcions invertibles. Aleshores

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \,. \tag{1.23}$$

Demostració. La funció $f \circ g$ té domini D_g i rang R_f. Per tant, la funció $(f \circ g)^{-1}$ té domini R_f i rang D_g. Siguen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tals que

$$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} c \,.$$

Equivalentment, $g(a) = b$ i $f(b) = c$, i $a \in D_g$, $b \in R_g \cap D_f$ i $c \in R_f$. Deduïm

$$(f \circ g)(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad (f \circ g)^{-1}(c) = a \,. \tag{1.24}$$

Per altra banda

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(c) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1}(b) = a \,. \tag{1.25}$$

I aleshores $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$. □

Teorema 1.3

Siga f una funció invertible. Aleshores

$$(f^{-1})^{-1} = f. \tag{1.26}$$

Demostració. Per a provar aquest teorema farem ús de les definicions prèvies i els resultats anteriorment deduïts. En primer lloc, notem que la funció $(f^{-1})^{-1}$ té domini D_f i rang R_f, exactament igual que f. Per tant, si demostrem que les dues funcions fan la mateixa correspondència entre els dos conjunts, haurem demostrat que són iguals. Pel teorema 1.1, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_R$ és una funció que té com a domini i rang el conjunt R_f. Per tant, la seua inversa $(f \circ f^{-1})^{-1}$ també té com domini i rang R_f. Siguen $x \in D_f$ amb $y = f(x) \in R_f$. Podem escriure

$$(f \circ f^{-1})^{-1}(y) \underset{\mathrm{T1.1}}{=} \mathrm{Id}_R^{-1}(y) = \mathrm{Id}_R(y) = y = f(x) \,, \tag{1.27}$$

ja que $\mathrm{Id}_R^{-1} = \mathrm{Id}_R$. Però també

$$(f \circ f^{-1})^{-1}(y) \underset{\text{T1.2}}{=} ((f^{-1})^{-1} \circ f^{-1})(y) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(y)) \underset{\text{D1.12}}{=} (f^{-1})^{-1}(x) \,. \tag{1.28}$$

Comparant les dues expressions queda demostrat que $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$ $\forall x \in D_f$ i, per tant, $f = (f^{-1})^{-1}$. □

Exemple 1.11: És fàcil comprovar els teoremes 1.1 i 1.3 per al cas particular en les equacions (1.13) i (1.16).

1.3 Límits de funcions

Definició 1.13: Límit d'una funció en un punt

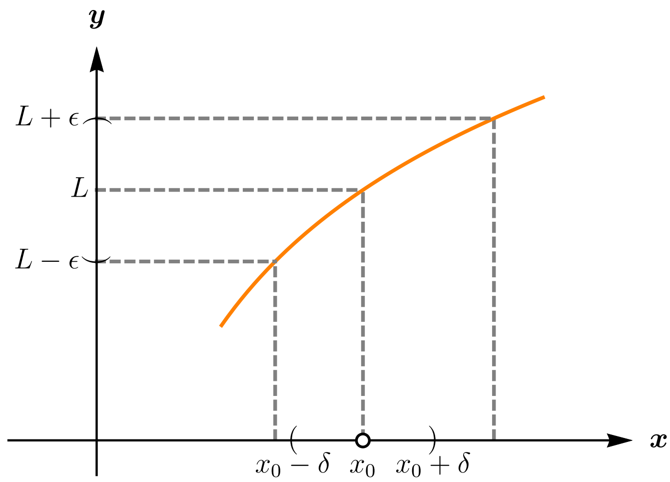
Siga f una funció definida en un interval obert al voltant de x_0, excepte possiblement en x_0. Direm que **el límit de $f(x)$ quan x tendeix a x_0** és $L \in \mathbb{R}$ i escriurem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \,,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \,.$$

La figura següent il·lustra els conceptes que apareixen en la definició:



La definició 1.13 exigeix fer dos passos per a determinar l'existència del límit. En primer lloc, triem un nombre real positiu ϵ, que pot ser arbitràriament menut, i després busquem un altre nombre real δ, també positiu, tal que la imatge de qualsevol x que complisca $0 < |x - x_0| < \delta$ verifique $|f(x) - L| < \epsilon$. En la figura podem veure que per al ϵ triat és fàcil trobar un δ amb la propietat requerida. Si haguérem triat un ϵ més menut, el δ requerit podria haver sigut també més menut. En general el δ que busquem dependrà de ϵ, encara que no hi ha una única elecció possible. La clau és que per a qualsevol $\epsilon > 0$ triat sempre és possible trobar un δ corresponent i, per tant, L és el límit de la funció quan x tendeix a x_0.

La definició pot reformular-se de diverses maneres que ajuden a entendre-la millor:

- Com que $|x - x_0|$ és la distància de x a x_0 i $|f(x) - L|$ és la distància de $f(x)$ a L, i com que ϵ pot ser arbitràriament menut, la definició de límit pot expressar-se com a: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *significa que la distància entre* $f(x)$ *i* L *es pot fer arbitràriament menuda reduint la distància entre* x *i* x_0 *tant com siga necessari (però no fent-la* 0*).*

- La desigualtat $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que x es troba en l'interval obert $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i que $x \neq x_0$, com s'il·lustra en la figura. De manera equivalent, $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, la unió de dos intervals oberts que exclouen el punt x_0. Igualment, $|f(x) - L| < \epsilon$ implica $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Per tant, podem expressar la definició de límit com a: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *significa que per a cada* $\epsilon > 0$ *(per menut que siga) podem trobar un* $\delta > 0$ *tal que si* x *es troba en l'interval obert* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *i* $x \neq x_0$*, aleshores* $f(x)$ *es troba en l'interval obert* $(L - \epsilon, L + \epsilon)$*.*

Exemple 1.12: Volem demostrar que $\lim_{x \to 3}(4\,x - 5) = 7$. Siga $\epsilon > 0$ un nombre real positiu. Hem de trobar un nombre $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |(4\,x - 5) - 7| < \epsilon\,.$$

Ara, com que $|(4\,x - 5) - 7| = |4\,x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$, el requisit que ha de complir el δ que busquem és

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{aleshores} \quad 4|x - 3| < \epsilon\,,$$

és a dir

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |x - 3| < \frac{\epsilon}{4}\,,$$

i resulta evident que $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ és una bona elecció. Efectivament, és fàcil comprovar que aquest valor de δ verifica el requisit que ens imposa la definició de límit. Si $|x - 3| < \delta$ es verifica

$$|(4\,x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4\,\delta = \epsilon\,,$$

resultat que prova que $\lim_{x \to 3}(4\,x - 5) = 7$. Ara bé, és important adonar-se que $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ és només una possibilitat per a demostrar aquest límit. Podríem haver escollit $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$, i també hauria sigut una bona elecció. En aquest cas, si $|x - 3| < \delta$ es verificaria

$$|(4\,x - 5) - 7| = 4|x - 3| < 4\,\delta = \frac{4}{5}\,\epsilon < \epsilon\,,$$

i, per tant, provem igualment que la nostra elecció de δ compleix $|(4\,x-5)-7|<\epsilon$, i aleshores que $\lim_{x\to 3}(4\,x-5)=7$.

Exemple 1.13: Demostrem dos límits bàsics. Siga $c\in\mathbb{R}$ una constant. Aleshores:

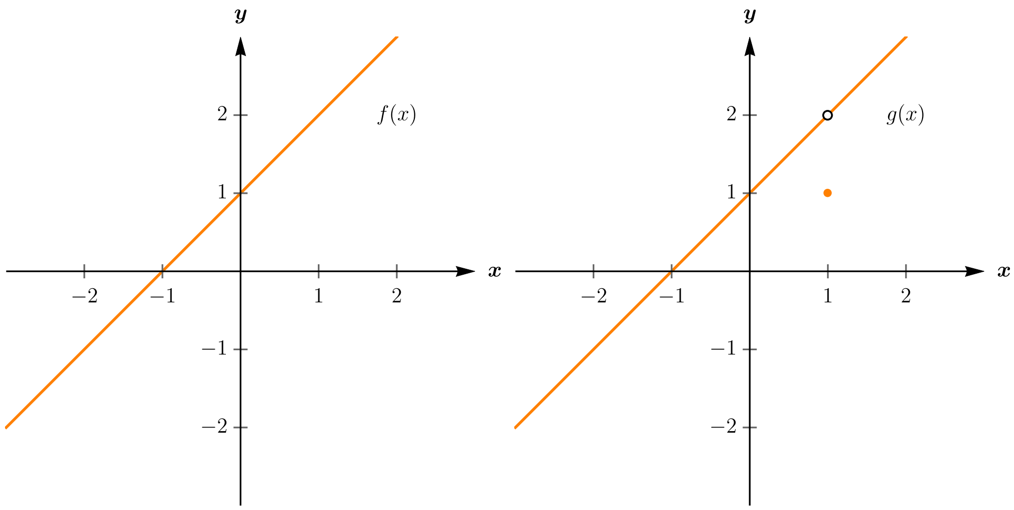
$$\lim_{x\to x_0} c = c\,, \qquad \lim_{x\to x_0} x = x_0\,. \tag{1.29}$$

- Comencem amb $\lim_{x\to x_0} c = c$. Siga $\epsilon>0$. Hem de trobar un $\delta>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta$ aleshores $|f(x)-c|<\epsilon$, amb $f(x)=c$. Però en aquest cas tan senzill és trivial. Qualsevol $\delta>0$ és vàlid, ja que $|f(x)-c|=|c-c|=0<\epsilon$. D'aquesta manera el primer límit queda demostrat.
- Considerem ara $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. En aquest cas hem de provar que existeix un $\delta>0$ tal que si $0<|x-x_0|<\delta$ aleshores $|f(x)-x_0|<\epsilon$, amb $f(x)=x$. De nou és senzill. Escollim $\delta=\epsilon$. Aleshores $0<|x-x_0|<\delta$ és equivalent a $0<|x-x_0|<\epsilon$ i justament $|x-x_0|=|f(x)-x_0|$. Per tant, el límit queda demostrat.

Comentari: El valor de la funció en x_0 no és rellevant per al límit $\lim_{x\to x_0} f(x)$, com hem remarcat en la definició 1.13. De fet, les funcions

$$f(x)=x+1\,, \quad g(x)=\begin{cases} x+1\,, & x\neq 1 \\ 1\,, & x=1 \end{cases}$$

representades per aquestes gràfiques



tenen el mateix límit quan x tendeix a 1, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 2$, encara que en el segon cas no coincideix amb el valor $g(1)=1$.

Teorema 1.4: Unicitat del límit

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ i $\lim_{x\to x_0} f(x) = K$ aleshores $L=K$.

Demostració. La premissa del teorema ens diu que per a $\epsilon > 0$, existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tals que

$$\begin{aligned} &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \epsilon\,, \\ &\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - K| < \epsilon\,. \end{aligned}$$

Hem escollit dos nombres reals δ_1 i δ_2 perquè en principi no sabem si el valor de δ vàlid en la primera definició també serà vàlid en la segona. Definim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Amb aquesta elecció podem escriure

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \epsilon \text{ i } |f(x) - K| < \epsilon\,.$$

I hem trobat un δ que ens permet establir els dos límits L i K. Ara demostrarem que no poden ser diferents. Per a arribar a aquesta conclusió, farem ús del mètode de la *reducció a l'absurd.* Suposarem que $L \neq K$ i veurem que això ens condueix a una contradicció. Siga, per tant, $L \neq K$, amb $|L - K| > 0$. Triem el valor particular $\epsilon = \frac{|L-K|}{2}$. En aquest cas tenim

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \frac{|L-K|}{2} \text{ i } |f(x) - K| < \frac{|L-K|}{2}\,.$$

I això implica que

$$\begin{aligned} |L - K| = |L - f(x) + f(x) - K| &\leq |L - f(x)| + |f(x) - K| \\ &< \frac{|L-K|}{2} + \frac{|L-K|}{2} \\ &= |L - K|\,, \end{aligned}$$

on en el segon pas hem fet ús de la desigualtat triangular, una propietat fonamental del mòdul. El resultat és clarament una contradicció (el nombre $|L - K|$ no pot ser menor que ell mateix), i per tant la suposició $L \neq K$ no pot ser correcta. □

Teorema 1.5: Propietats dels límits

Siguen dues funcions f i g i un punt $x_0 \in D_f \cap D_g$ tals que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L\,, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = K\,,$$

i $c \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores es verifiquen les següents igualtats:

(i) $\lim_{x \to x_0} [c\, f(x)] = c \lim_{x \to x_0} f(x) = c\, L.$

(ii) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm K.$

(iii) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L\, K.$

(iv) $\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{K}$, si $K \neq 0$.

(v) $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n = L^n$, amb $n \in \mathbb{R}$.

(vi) $\lim_{x \to x_0} [\sqrt[n]{f(x)}] = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

Demostració. Demostrarem ací les propietats (i) i (ii). La resta de propietats estan demostrades en l'apèndix A.

(i) Si $c = 0$ tenim un cas particular de $\lim_{x \to x_0} c$ i la demostració és trivial. Per tant, considerem $c \neq 0$. La premissa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que existeix un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|} \,.$$

Ha de notar-se que hem escrit $\frac{\epsilon}{|c|}$ en lloc de ϵ. Ara bé, aquesta elecció és perfectament consistent amb la definició 1.13, ja que $\frac{\epsilon}{|c|} > 0$ i pot fer-se arbitràriament menut. Aquesta *tècnica* s'utilitza freqüentment en les demostracions que fan servir la definició de límit. Fet aquest aclariment, continuem amb la prova. Hem de demostrar que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |c\, f(x) - c\, L| < \epsilon \,.$$

Escollim $\delta = \delta_1$. Si $0 < |x - x_0| < \delta$ aleshores

$$|c\, f(x) - c\, L| = |c||f(x) - L| < |c| \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon \,.$$

I hem demostrat la propietat (i).

(ii) Considerem $\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)]$. La demostració per a la resta $\lim_{x \to x_0}[f(x) - g(x)]$ és completament anàloga i, a més, pot deduir-se a partir de la identitat per a la suma i la propietat (i) que acabem de provar. Les premisses $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ i $\lim_{x \to x_0} g(x) = K$ impliquen l'existència de $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ tals que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2} \,, \tag{1.30}$$

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{aleshores} \quad |g(x) - K| < \frac{\epsilon}{2} \,. \tag{1.31}$$

Hem de provar que existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x) + g(x) - (L + K)| < \epsilon \,.$$

Escollim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - x_0| < \delta$ aleshores

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + K)| &= |\, (f(x) - L) + (g(x) - K) \,| \\ &\leq |\, (f(x) - L) \,| + |\, (g(x) - K) \,| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \,. \end{aligned}$$

En el segon pas hem fet servir la desigualtat triangular del mòdul. En el tercer pas hem utilitzat que, amb la nostra elecció de δ, $0 < |x - x_0| < \delta_1$ i $0 < |x - x_0| < \delta_2$ i, per tant, podem fer ús dels resultats en les equacions (1.30) i (1.31). I d'aquesta manera queda demostrada la propietat (ii). □

Exemple 1.14: Siga una funció f tal que

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \,.$$

Volem obtenir $\lim_{x \to 2} f(x)$ fent ús de les propietats dels límits en el teorema 1.5. Primer, calculem $\lim_{x \to 2} x^2$. Per la propietat (v)

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \left[\lim_{x \to 2} x \right]^2 = 2^2 = 4 \,.$$

Ara, com que $\lim_{x \to 2} x^2 \neq 0$, podem utilitzar la propietat (iv) i escriure

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\lim_{x \to 2} f(x)}{\lim_{x \to 2} x^2} = \frac{\lim_{x \to 2} f(x)}{4} = 1 \,,$$

i, per tant, trobem

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \,.$$

Exemple 1.15: Siga una funció f tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \,.$$

I de nou volem obtenir un límit, en aquest cas $\lim_{x \to 0} f(x)$, fent ús de les propietats dels límits en el teorema 1.5. Pel que hem vist en l'exemple anterior, tenim

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \,,$$

i no podem fer ús de la propietat (iv). Ara bé, podem aprofitar la propietat (iii) i escriure

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{f(x)}{x^2} \cdot x^2 \right] = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \lim_{x \to 0} x^2 = 1 \cdot 0 = 0 \,.$$

Teorema 1.6

Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ en un interval obert que conté x_0 (excepte possiblement en x_0) i

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{i} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = K \,,$$

aleshores $L \leq K$.

Demostració. Farem servir de nou el mètode de la reducció a l'absurd. Suposem que $L > K$. Per la propietat (ii) dels límits sabem que

$$\lim_{x \to x_0} [g(x) - f(x)] = K - L\,.$$

Per tant, per a qualsevol $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |\,[g(x) - f(x)] - (K - L)| < \epsilon\,.$$

En particular, podem triar $\epsilon = L - K$, positiu, ja que per hipòtesi $L > K$. Existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |\,[g(x) - f(x)] - (K - L)| < L - K\,.$$

Com que $a \leq |a|\ \forall a \in \mathbb{R}$, tenim que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad [g(x) - f(x)] - (K - L) < L - K\,,$$

que es pot simplificar per a obtenir que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad g(x) < f(x)\,.$$

Això contradiu $f(x) \leq g(x)$ i, per tant, la desigualtat $L > K$ ha de ser falsa. En conclusió, $L \leq K$. □

Teorema 1.7: Teorema de l'entrepà

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ \forall x$ en un interval obert que conté x_0 (excepte possiblement en x_0) i

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L\,,$$

aleshores

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L\,.$$

Demostració. Siga $\epsilon > 0$. Com que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, existeix un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \epsilon\,,$$

és a dir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon\,.$$

Per altra banda, com que $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$, existeix un $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{aleshores} \quad |h(x) - L| < \epsilon\,,$$

és a dir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{aleshores} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon\,.$$

Escollim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x-x_0| < \delta$ aleshores $0 < |x-x_0| < \delta_1$ i $0 < |x-x_0| < \delta_2$. Per tant, en aquest cas

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon\,,$$

i en particular $L-\epsilon < g(x) < L+\epsilon$ o, de manera equivalent, $|g(x)-L| < \epsilon$. En conclusió, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$. □

Definició 1.14: Límits laterals

Siga f una funció definida en un interval obert al voltant de x_0, excepte possiblement en x_0. Direm que té **límit lateral per la dreta igual a $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{x_0}$** i escriurem

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\,,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Direm que té **límit lateral per l'esquerra igual a $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{x_0}$** i escriurem

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\,,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Teorema 1.8

Una funció $f(x)$ té un límit quan x tendeix a x_0 si i només si té límits laterals per la dreta i per l'esquerra i aquests són iguals:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \tag{1.32}$$

Demostració. Si $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$ aleshores per a cada $\epsilon > 0$ existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tals que

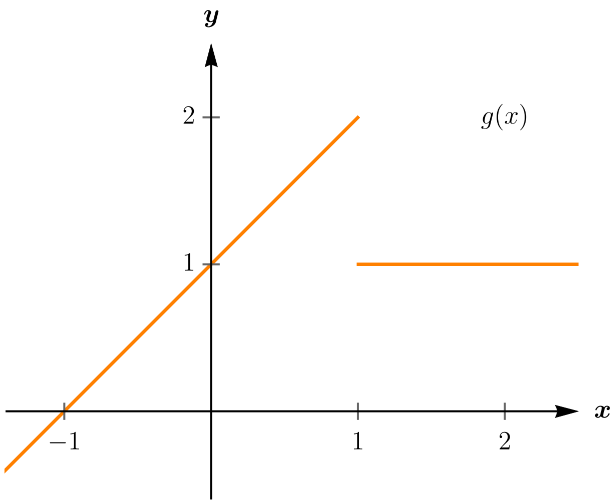
$$\begin{array}{llll} \text{si} & x_0 < x < x_0 + \delta_1 & \text{aleshores} & |f(x) - L| < \epsilon\,, \\ \text{si} & x_0 - \delta_2 < x < x_0 & \text{aleshores} & |f(x) - L| < \epsilon\,. \end{array}$$

Definim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - x_0| < \delta$ aleshores o bé $x_0 - \delta_2 \le x_0 - \delta < x < x_0$ o bé $x_0 < x < x_0 + \delta \le x_0 + \delta_1$, i, per tant, $|f(x) - L| < \epsilon$. □

Exemple 1.16: La funció $f(x) = x^2$ verifica $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ i, per tant, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Per contra, la funció

$$g(x) = \begin{cases} x + 1\,, & x \le 1 \\ 1\,, & x > 1 \end{cases}$$

té per gràfica



i verifica

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1^+} g(x) = 1\,.$$

Per tant $\nexists \lim_{x\to 1} g(x)$.

Definició 1.15: Límit a l'infinit

Direm que la funció f té **el límit L quan x tendeix a infinit** i escriurem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L\,,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real M corresponent, tal que

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Direm que la funció f té **el límit L quan x tendeix a menys infinit** i escriurem

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L\,,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real N corresponent, tal que

$$x < N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

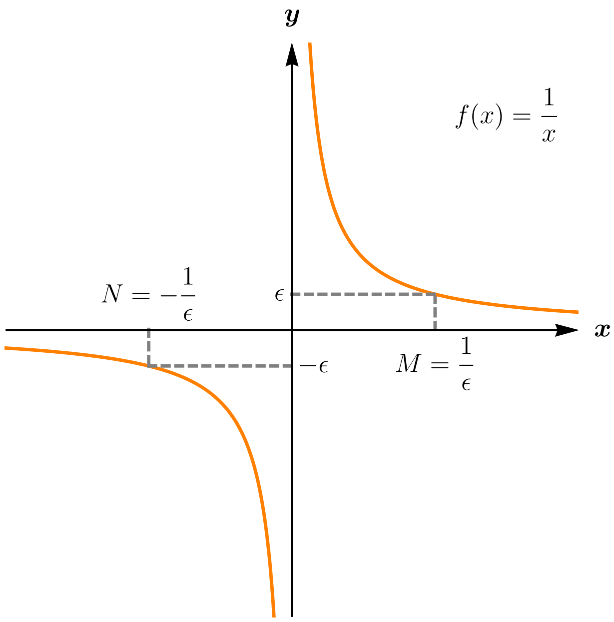
Exemple 1.17: Demostrem que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Siga $\epsilon > 0$. Hem de trobar un nombre M tal que

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon\,.$$

La implicació es complirà per a qualsevol $M \geq \dfrac{1}{\epsilon}$. Per tant, hem demostrat que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. De manera anàloga podem provar que $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. En aquest cas hem de trobar un nombre N tal que

$$x < N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon\,.$$

I de nou és fàcil determinar que qualsevol $N \leq -\dfrac{1}{\epsilon}$ verifica la implicació, resultat que demostra $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Aquests dos resultats poden ser visualitzats en la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$:



Seguint el mateix procediment podem demostrar el resultat general

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \,, \quad r \in \mathbb{N}, r > 0 \,, \tag{1.33}$$

on la restricció $r \in \mathbb{N}$ s'ha d'introduir per a garantir $\frac{1}{x^r} \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Aquest resultat també pot ser obtingut fàcilment fent ús del següent teorema.

Teorema 1.9

Les propietats dels límits en el teorema 1.5 són vàlides també per a límits a l'infinit.

Demostració. Les demostracions de les propietats dels límits a l'infinit són completament anàlogues a les de les propietats dels límits del teorema 1.5. □

Definició 1.16: Asímptota horitzontal

Una recta $y = b$ és una **asímptota horitzontal** de la gràfica d'una funció $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \,.$$

Exemple 1.18: La gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ té l'asímptota horitzontal $y = 0$.

Definició 1.17: Asímptota obliqua

Una recta $y = m\,x + n$ és una **asímptota obliqua** de la gràfica d'una funció $y = f(x)$ si

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \,, \tag{1.34}$$

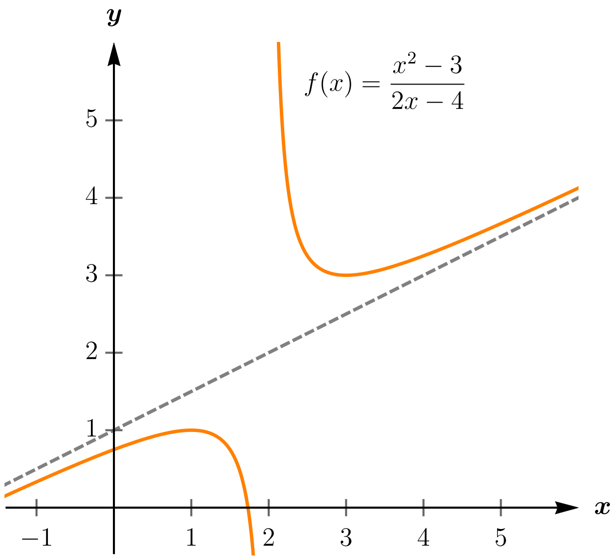
$$n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - m\,x \right] \,, \tag{1.35}$$

o

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \,, \tag{1.36}$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - m\,x \right] \,. \tag{1.37}$$

Exemple 1.19: Les funcions racionals (funcions que s'escriuen com el quocient de dos polinomis) tenen una asímptota obliqua si el grau del numerador és una unitat més gran que el del denominador. La funció $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$ és un exemple d'aquest tipus de funcions:



Definició 1.18: Límit infinit

Siga f una funció definida en un interval obert al voltant de x_0, excepte possiblement en x_0. Direm que $\boldsymbol{f(x)}$ **tendeix a infinit quan** $\boldsymbol{x}$ **tendeix a** $\boldsymbol{x_0}$ i escriurem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \,,$$

si per a tot $M > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M \,.$$

Direm que $\boldsymbol{f(x)}$ **tendeix a menys infinit quan** $\boldsymbol{x}$ **tendeix a** $\boldsymbol{x_0}$ i escriurem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \,,$$

si per a tot $N > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -N \,.$$

Comentari 1: Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, direm que el límit *no existeix* ja que no té un valor finit.

Comentari 2: Podem definir i denotar els **límits laterals infinits** de manera anàloga al cas dels límits laterals finits de la definició 1.14. Simplement hem de substituir $0 < |x - x_0| < \delta$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$ o $x_0 - \delta < x < x_0$, segons el límit lateral siga per la dreta o per l'esquerra.

Exemple 1.20: La funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tendeix a infinit quan x tendeix a 0 per la dreta.

Podem provar-ho fent ús de la definició. Siga $M > 0$. Volem trobar un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{aleshores} \quad \frac{1}{x} > M\,.$$

Ara, podem deduir que

$$\frac{1}{x} > M \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{M}\,.$$

Aleshores, si seleccionem $\delta = \dfrac{1}{M}$ o qualsevol nombre menor que aquest, veurem que

$$x < \delta \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{M}\,,$$

i per tant, per la definició de límit infinit, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Definició 1.19: Asímptota vertical

Una recta $x = x_0$ és una **asímptota vertical** de la gràfica d'una funció $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty\,.$$

Exemple 1.21: La funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ té una asímptota vertical en $x = 0$.

Definició 1.20: Límit infinit a l'infinit

Siga f una funció definida en un interval (x_0, ∞). Direm que **el límit de la funció f a l'infinit és infinit** i escriurem

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

si per a tot $M > 0$ existeix un nombre real N corresponent, tal que

$$x > N \quad \Rightarrow \quad f(x) > M\,.$$

Aquesta notació serveix per a denotar simbòlicament el fet que una funció cresca indefinidament quan la variable pren valors més grans. Les expressions $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ tenen definicions similars.

Teorema 1.10

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty \,, \tag{1.38}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = \infty \,. \tag{1.39}$$

Demostració. Siga f una funció definida en un interval obert al voltant de x_0, excepte possiblement en x_0. Suposem que $f(x)$ no s'anul·la en l'interval considerat i això ens permet considerar $\frac{1}{f(x)}$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ implica que per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \epsilon \,,$$

és a dir,

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\epsilon} \,. \tag{1.40}$$

Considerem ara el signe de la funció $f(x)$ en l'interval considerat:

- Si $f(x) > 0$, aleshores l'equació (1.40) és equivalent a $\frac{1}{f(x)} > M$, amb $M > 0$, i per la definició 1.18 tenim $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
- Si $f(x) < 0$, aleshores l'equació (1.40) és equivalent a $-\frac{1}{f(x)} > N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(x)} < -N$, amb $N > 0$. De nou, per la definició 1.18 trobem $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

La implicació en sentit contrari es demostra de manera anàloga. Igualment, les demostracions per als casos de límits a l'infinit són similars. □

1.4 Càlcul de límits

En la pràctica, el càlcul de límits no es fa a partir de la seua definició formal, sinó que resulta més convenient utilitzar mètodes més directes desenvolupats per a tal fi. Encara que en principi seria possible utilitzar les definicions, aquests mètodes són més sistemàtics i permeten obtenir fàcilment els límits de funcions complicades.

No obstant això, és important emfatitzar que tots els mètodes per al càlcul de límits tenen el seu origen en la definició. Amb la definició poden obtenir-se de manera senzilla els límits de funcions fonamentals, com ara $f(x) = x$ o $f(x) = \frac{1}{x}$, com hem fet en la secció 1.3. Límits de funcions més complicades poden ser calculats a partir d'aquests límits fonamentals fent ús d'operacions algebraiques (com la suma o la multiplicació), gràcies a les propietats dels límits introduïdes en el teorema 1.5. Eventualment, aquest procés pot aplicar-se de manera sistemàtica a un tipus de funcions concret, donant lloc a un mètode que podria semblar que no té cap connexió amb la definició, però que naix d'aquesta.

En aquesta secció estudiarem alguns mètodes habituals per al càlcul de límits de funcions i donarem alguns exemples pràctics. A més, en alguns casos mostrarem de quins resultats fonamentals naixen aquests mètodes, encara que no demostrarem de manera exhaustiva aquesta connexió. Cal mencionar que altres resultats que apareixeran més endavant en el curs, com el concepte de continuïtat o el teorema de l'Hôpital, ens donaran eines addicionals per al càlcul de límits.

Quocients de polinomis

El càlcul de límits de quocients de polinomis pot fer-se fàcilment gràcies a dos teoremes. Siguen $P(x)$ i $Q(x)$ dos polinomis de graus p i q, respectivament,

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,, \\ Q(x) &= b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \,. \end{aligned}$$

Teorema 1.11

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p}{b_q} \lim_{x\to\pm\infty} x^{p-q} = \begin{cases} \pm\infty \,, & p > q \\ 0 \,, & p < q \\ \dfrac{a_p}{b_p} \,, & p = q \end{cases} \tag{1.41}$$

Aquest teorema pot demostrar-se fàcilment a partir de les definicions i resultats de la secció 1.3. Les propietats dels límits del teorema 1.5 ens diuen que podem aplicar operacions algebraiques (sumes, restes, multiplicacions i divisions) sobre la funció de la qual volem calcular el límit, sense alterar-lo. En aquest cas tenim la funció

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \,,$$

i podem traure el factor comú x^{p-q}

$$f(x) = x^{p-q} \, \frac{a_p + a_{p-1} x^{-1} + \cdots + a_1 x^{1-p} + a_0 x^{-p}}{b_q + b_{q-1} x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-q} + b_0 x^{-q}} \,.$$

Tots els termes amb potències negatives de x desapareixen en agafar el límit, ja que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \; \forall r \in \mathbb{N}$. Per tant

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{p-q} \, \frac{a_p}{b_q} = \frac{a_p}{b_q} \lim_{x\to\pm\infty} x^{p-q} \,,$$

i el resultat del teorema resulta evident.

Comentari 1: La primera igualtat del teorema 1.11 és equivalent a afirmar que quan x tendeix a $\pm\infty$, l'únic terme rellevant d'un polinomi és el monomi de grau més alt. Per exemple, el comportament del polinomi $3x^2 - x + 2$ en l'infinit està determinat pel monomi $3x^2$. Aquest terme s'anomena **terme dominant en l'infinit**.

Comentari 2: Quan $p > q$ el límit és $\pm\infty$. El signe està determinat pels següents límits fonamentals

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \, , \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty & n \text{ parell} \\ -\infty & n \text{ imparell} \end{cases} \tag{1.42}$$

Exemple 1.22: Calculem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x + 8}{(2x-3)(3x+1)} \, .$$

Com que $\lim_{x\to\infty}(2x^2 - 4x + 8) = \infty$ i $\lim_{x\to\infty}[(2x-3)(3x+1)] = \infty$, tenim una **indeterminació** $\boldsymbol{\frac{\infty}{\infty}}$. Amb el teorema 1.11 pot calcular-se de manera immediata:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 4x + 8}{(2x-3)(3x+1)} = \frac{1}{3} \, .$$

Teorema 1.12

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} \, , & Q(x_0) \neq 0 \\[2ex] \pm\infty \, , & P(x_0) \neq 0 \, , \; Q(x_0) = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\bar{P}(x_0)}{\bar{Q}(x_0)} \, , & P(x_0) = Q(x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

On

$$\frac{\bar{P}(x)}{\bar{Q}(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

és el resultat de simplificar el quocient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eliminant l'arrel comuna en x_0.

Comentari: En el cas amb $P(x_0) \neq 0\,,\ Q(x_0) = 0$, el límit és $\pm\infty$, on el signe és el signe de $P(x_0)$.

Exemple 1.23: Calculem

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}\,.$$

Es tracta d'una **indeterminació** $\mathbf{\frac{0}{0}}$, ja que els dos polinomis s'anul·len en $x = 2$. Això vol dir que els dos polinomis tenen l'arrel comuna $x = 2$:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= (x-2)(x+1)\,, \\ x^2 + x - 6 &= (x-2)(x+3)\,. \end{aligned}$$

Aleshores, podem simplificar el quocient i trobar el límit:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{5}\,.$$

Exemple 1.24: Calculem

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12}\,.$$

Tenim de nou una indeterminació $\frac{0}{0}$. El primer pas torna a ser trobar les arrels dels dos polinomis:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 4x - 4 &= (x-2)(x+1)(x+2)\,, \\ x^3 - x^2 - 8x + 12 &= (x-2)^2(x+3)\,. \end{aligned}$$

Aleshores, podem simplificar el quocient i trobar el límit:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \infty\,.$$

En aquest cas $\bar{P}(2) \neq 0\,,\ \bar{Q}(2) = 0$ després de fer la simplificació, i per això el límit és infinit.

Exemple 1.25: Calculem

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right]\,.$$

En aquest cas tenim una **indeterminació** $\boldsymbol{\infty - \infty}$. Per a resoldre-la, comencem agrupant els dos termes en un únic quocient de polinomis:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}\,.$$

D'aquesta manera, aplicant ara el teorema 1.12, obtenim senzillament

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right] = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Funcions amb expressions radicals

Els límits de funcions amb expressions radicals (que inclouen arrels) poden calcular-se seguint un mètode similar al del cas anterior. No obstant això, en aquest cas normalment s'ha de manipular algebraicament la funció a integrar abans que siga un límit evident.

Exemple 1.26: Calculem

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-\sqrt{x^2+16}\right].$$

Els dos termes, x i $\sqrt{x^2+16}$, tendeixen a infinit quan $x\to\infty$ i, per tant, tenim una indeterminació del tipus $\infty-\infty$. Multipliquem numerador i denominador per l'expressió radical conjugada

$$x-\sqrt{x^2+16}=\left(x-\sqrt{x^2+16}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{x+\sqrt{x^2+16}}=\frac{x^2-(x^2+16)}{x+\sqrt{x^2+16}}=\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}$$

El límit resultat és evidentment 0, ja que el numerador és una constant i el denominador tendeix a infinit quan $x\to\infty$. Podem demostrar-ho fent ús de les propietats dels límits

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{16}{x}}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{16}{x^2}}}=\frac{0}{1+\sqrt{1+0}}=0.$$

Funcions trigonomètriques

Els límits de funcions trigonomètriques poden calcular-se a partir de dos teoremes bàsics.

Teorema 1.13

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1. \tag{1.44}$$

Teorema 1.14

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.45}$$

Els dos teoremes poden demostrar-se a partir de desigualtats trigonomètriques fonamentals, fent ús del teorema 1.7 (el teorema de l'entrepà). En el cas del primer teorema tenim les desigualtats

$$-|x|\le\sin x\le|x|, \tag{1.46}$$
$$-|x|\le 1-\cos x\le|x|, \tag{1.47}$$

que poden demostrar-se gràficament. Com que

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 \,, \tag{1.48}$$

l'aplicació del teorema de l'entrepà a aquestes desigualtats ens diu que $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ i $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$. Seguim un procediment molt similar per a provar el segon teorema. Per a tot $0 < x < \frac{\pi}{2}$, pot demostrar-se gràficament

$$\sin x \leq x \leq \tan x \,, \tag{1.49}$$

o equivalentment (dividint per $\sin x > 0$ e invertint)

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \,. \tag{1.50}$$

Com que les funcions $\dfrac{\sin x}{x}$ i $\cos x$ són parelles, la desigualtat de l'equació (1.50) també és vàlida per a $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Finalment, l'aplicació del teorema de l'entrepà, unit al resultat $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ del teorema 1.13, demostra el teorema 1.14.

Exemple 1.27: Calculem

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \,.$$

Apliquem primer la fórmula del sinus de l'angle meitat

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

per a escriure

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{2\sin^2(x/2)}{x} \,.$$

A continuació farem el **canvi de variable** $x = 2h$, tal que $x \to 0$ implica $h \to 0$ igualment. Això permet escriure el límit com a

$$\lim_{x \to 0} -\frac{2\sin^2(x/2)}{x} = -\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \sin h = -\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \sin h = -1 \cdot 0 = 0 \,.$$

Límits de la forma 1^∞

Els límits que involucren la **indeterminació** $\mathbf{1^\infty}$ estan relacionats amb **el nombre** $\boldsymbol{e}$. Recordem la seua definició.

Definició 1.21: Nombre e

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n , \quad n \in \mathbb{N} . \tag{1.51}$$

Comentari 1: La definició del nombre e és el límit d'una successió. És possible demostrar que el límit (anàleg) d'una funció donaria el mateix resultat

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e . \tag{1.52}$$

Estudiarem successions i els seus límits en el tema 4.

Comentari 2: Una definició completament equivalent del nombre e és

$$e = \lim_{n \to 0} \left(1 + n \right)^{\frac{1}{n}} . \tag{1.53}$$

Comentari 3: La funció exponencial pot definir-se com una generalització de la definició del nombre e:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n . \tag{1.54}$$

Després d'aquesta definició i aquests comentaris podem enunciar el teorema que ens dona un mètode sistemàtic per al càlcul de límits del tipus 1^∞. El mètode consisteix a transformar el límit original en un altre límit més senzill, normalment d'una funció racional, que podem avaluar per procediments ja coneguts.

Teorema 1.15

Siguen les funcions $f(x)$ i $g(x)$ tals que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1 , \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty ,$$

on a pot ser un valor $x = a$ o $\pm\infty$. Aleshores

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{g(x)} = e^\lambda , \tag{1.55}$$

amb

$$\lambda = \lim_{x \to a} \left[f(x) - 1 \right] g(x) . \tag{1.56}$$

Per a demostrar aquest teorema s'han d'utilitzar eines pròpies de les funcions contínues, que veurem en la secció 1.5.

Exemple 1.28: Calculem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x .$$

El límit és del tipus 1^∞ i es donen les premisses del teorema. Per tant, trobem

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = e^\lambda ,$$

amb

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2\,x}{x+1}\right) = -2 .$$

En l'últim pas hem fet ús dels mètodes habituals per a calcular límits de quocients de polinomis.

1.5 Continuïtat

Definició 1.22: Continuïtat en un punt

Una funció $f(x)$ és **contínua en un punt interior a** del seu domini si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) .$$

Definició 1.23: Continuïtat lateral

Una funció $f(x)$ és **contínua per la dreta en un punt extrem esquerre b** del seu domini si

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b) .$$

Una funció $f(x)$ és **contínua per l'esquerra en un punt extrem dret c** del seu domini si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) .$$

Quan una funció no és contínua en un punt a, diem que és **discontínua** en a o que té una **discontinuïtat** en a. En aquest cas, a pot estar en el domini de la funció o no.

Comentari 1: Una funció és contínua en un punt interior a del seu domini si i només si és contínua per la dreta i per l'esquerra en aquest punt.

Comentari 2: Si fem ús de la definició de límit, podem escriure la definició de continuïtat en un punt en termes ja familiars per a nosaltres. La funció f és contínua en un punt interior c si per a qualsevol $\epsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon \,.$$

Comentari 3. Prova de continuïtat: Una funció $f(x)$ és contínua en un punt interior a del seu domini si i només si es compleixen les següents tres condicions:

- $\exists f(a)$.
- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple 1.29: Estudiem la continuïtat en $x = 1$ de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1\,, & x \leq 1 \\ 3 - x\,, & x > 1 \end{cases}$$

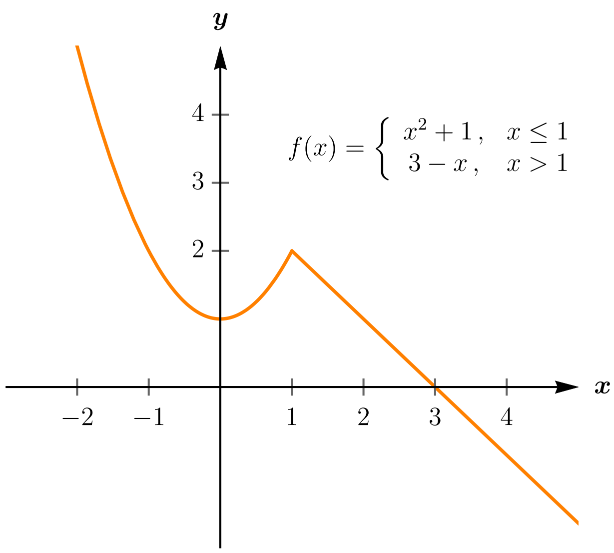
Vegem ara si es compleix la definició de continuïtat en $x = 1$.

- $\exists f(1) = 2$.
- $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = 2$, ja que existeixen els dos límits laterals i són iguals:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left[x^2 + 1\right] = 2\,,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [3 - x] = 2\,.$$

- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Per tant, la funció és contínua. Aquesta conclusió pot comprovar-se fàcilment a partir de la gràfica de la funció:



Exemple 1.30: La funció $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ no és contínua en $x = 1$ perquè $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

Definició 1.24: Tipus de discontinuïtats

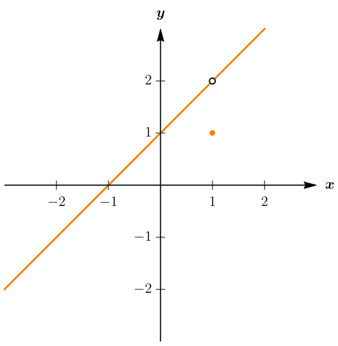
Siga $f(x)$ una funció amb una discontinuïtat en $x = a$. Aquesta discontinuïtat pot ser de diversos tipus, segons siga el requisit de la prova de continuïtat que no es compleix.

- **Discontinuïtat evitable:** $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L$, però $L \neq f(a)$ o $\nexists f(a)$.
- **Discontinuïtat de salt:** $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = L^-$ i $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = L^+$, però $L^- \neq L^+$.
- **Discontinuïtat essencial:** $\nexists \lim_{x\to a^-} f(x)$ o $\nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Comentari: Els noms dels tipus de discontinuïtats varien molt d'un text a un altre. Per exemple, en alguns llibres s'anomena discontinuïtat essencial a qualsevol discontinuïtat que no és evitable. A les discontinuïtats essencials també se'ls anomena *discontinuïtats infinites* en alguns casos. Finalment, algunes discontinuïtats essencials s'anomenen *discontinuïtats oscil·lants* si el límit no existeix perquè la funció presenta un comportament oscil·latori creixent en el punt en qüestió.

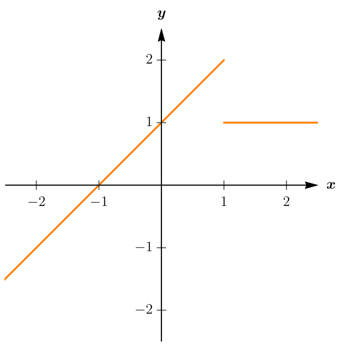
Exemples 1.31:

Discontinuïtat evitable



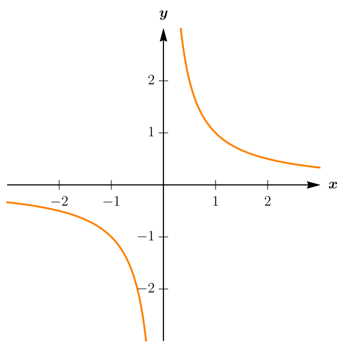
$$f(x) = \begin{cases} x+1\,, & x \neq 1 \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}$$

Discontinuïtat de salt



$$f(x) = \begin{cases} x+1\,, & x \leq 1 \\ 1\,, & x > 1 \end{cases}$$

Discontinuïtat essencial



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Definició 1.25: Funció contínua en un interval

Una funció és **contínua en un interval I** si i només si és contínua $\forall x \in I$.

Definició 1.26: Funció contínua

Una funció és **contínua** si i només si és contínua $\forall x \in D_f$.

Exemple 1.32: Els polinomis són funcions contínues. En les seccions anteriors hem demostrat que $\lim_{x\to c} b = b$ i $\lim_{x\to c} x^n = c^n$, amb $b, c \in \mathbb{R}$ dos constants. Per tant, per a un polinomi definit com a

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,,$$

tenim

$$\lim_{x\to c} P(x) = a_p c^p + a_{p-1} c^{p-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = P(c) \,,$$

i queda demostrada la seua continuïtat. Altres funcions que són contínues en tot el seu domini són les funcions sinus i cosinus, la funció exponencial, i els quocients de polinomis.

Comentari: La definició de funció contínua requereix continuïtat en tot el domini de la funció, però no necessàriament en tot $\mathbb{R}$. Per exemple, els quocients de polinomis són funcions contínues, però no existeixen en els punts on el seu denominador s'anul·la. Com que aquests punts no pertanyen al domini de la funció, no afecta la definició de continuïtat.

Teorema 1.16: Propietats de les funcions contínues

Si les funcions f i g són contínues en $x = c$, aleshores les següents combinacions són també contínues en $x = c$:

(i) Sumes: $f + g$.

(ii) Diferencies: $f - g$.

(iii) Múltiples constants: $k\,f$, per a $k \in \mathbb{R}$ constant.

(iv) Productes: $f \cdot g$.

(v) Quocients: f/g, si $g(c) \neq 0$.

(vi) Potències: f^n, amb $n \in \mathbb{N}$.

(vii) Arrels: $\sqrt[n]{f}$, amb $n \in \mathbb{N}$, si és definida en un interval que continga a c.

Demostració. La majoria de les propietats de les funcions contínues poden deduir-se de les propietats dels límits (teorema 1.5). Per exemple, la propietat de la suma de funcions contínues la podem obtenir de la propietat (ii) dels límits:

$$\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] \underset{\text{P(ii)}}{=} \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = f(c) + g(c) = (f+g)(c) \,.$$

Això demostra que $f+g$ és contínua. Les altres propietats poden provar-se de manera similar. $\square$

Comentari: Aquestes propietats permeten demostrar fàcilment que funcions complicades són contínues si poden ser expressades com a combinacions algebraiques de funcions contínues conegudes. Per exemple, podem afirmar que un polinomi és una funció contínua perquè els seus monomis són funcions contínues. De la mateixa manera, la funció $f(x) = \sin^2 x - e^x$ és contínua perquè ho són tant $g(x) = \sin x$ com $h(x) = e^x$, i $f(x) = g(x)^2 - h(x)$.

Teorema 1.17: Límits de funcions contínues

Si f és contínua en el punt b i $\lim_{x\to c} g(x) = b$, aleshores

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(b) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) . \tag{1.57}$$

Demostració. Siga $\epsilon > 0$. Com que f és contínua en b, existeix un $\eta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |y-b| < \eta \quad \text{aleshores} \quad |f(y) - f(b)| < \epsilon .$$

Igualment, com que $\lim_{x\to c} g(x) = b$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x-c| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |g(x) - b| < \eta .$$

En aquesta segona desigualtat hem escollit $\epsilon = \eta$. Per tant, podem combinar les dues desigualtats per a afirmar que per a qualsevol $\epsilon > 0$ existeix un δ tal que

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - b| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon ,$$

que, per la definició de límit, significa que $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(b)$, com volíem demostrar. $\square$

Teorema 1.18: Composició de funcions contínues

Si g és contínua en c i f és contínua en $g(c)$, aleshores la composició $f \circ g$ és contínua en c.

Demostració. Aquest teorema és conseqüència directa de l'anterior. Com que g és contínua en c tenim

$$\lim_{x\to c} g(x) = g(c) .$$

Com que f és contínua en $g(c)$, podem aplicar el teorema anterior per a obtenir

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(g(c)) ,$$

que és precisament la prova que la funció $f(g(x))$ és contínua en c, és a dir, $f \circ g$ és contínua en c. $\square$

Comentari: La definició de continuïtat i els últims tres teoremes ens donen eines molt poderoses per al càlcul de límits.

- Si una funció f és contínua en un punt c, automàticament sabem que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ i, per tant, calcular el límit es redueix a avaluar la funció en el punt c. Aquest mètode per a calcular límits s'anomena **càlcul per substitució**.

- El teorema 1.17 permet intercanviar l'ordre entre el càlcul del límit i la composició de funcions. Per exemple, les funcions exponencial i logaritme són funcions contínues, i per tant

$$\exp\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = \lim_{x\to c} \exp f(x) \,, \tag{1.58}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = \lim_{x\to c} \ln f(x) \,. \tag{1.59}$$

També podem provar (suposant que tots els límits a partir d'ara existeixen) que

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^{\lim_{x\to c} g(x)} \,. \tag{1.60}$$

De fet, la prova fa un ús continuat del teorema 1.17:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to c}\left[\exp\left(\ln f(x)^{g(x)}\right)\right] = \lim_{x\to c}\left[\exp\left(g(x)\,\ln f(x)\right)\right] \\
&= \exp\left(\lim_{x\to c}\left[g(x)\,\ln f(x)\right]\right) = \exp\left(\lim_{x\to c} g(x)\cdot\lim_{x\to c}\left[\ln f(x)\right]\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to c} g(x)\cdot\ln\lim_{x\to c} f(x)\right) = \left(\exp\left(\ln\lim_{x\to c} f(x)\right)\right)^{\lim_{x\to c} g(x)} \\
&= \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^{\lim_{x\to c} g(x)} \,.
\end{aligned}$$

Podem fer ús d'aquests important resultats per a demostrar un resultat que ja hem vist. Suposem $\lim_{x\to c} f(x) = 1$. Aleshores

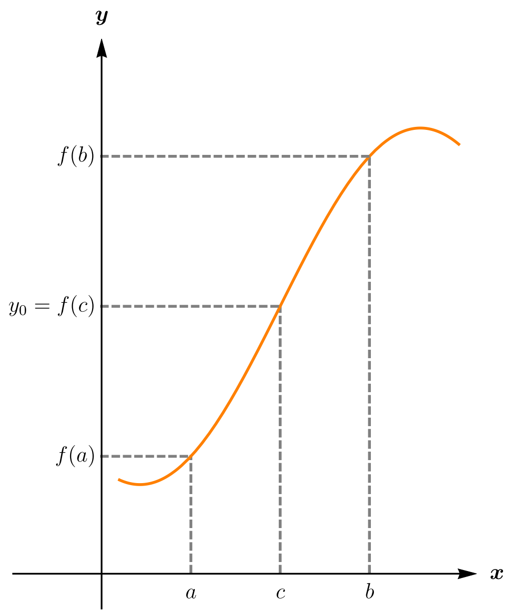
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to c}(1+f(x)-1)^{g(x)} = \lim_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)} \\
&= \lim_{x\to c}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{g(x)\,\frac{f(x)-1}{f(x)-1}} \\
&= \lim_{x\to c}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)} \\
&\underset{\text{Eq.(1.60)}}{=} \lim_{x\to c}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim_{x\to c}[g(x)(f(x)-1)]} \\
&= \exp\left(\lim_{x\to c}\left[g(x)(f(x)-1)\right]\right) \,.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

En l'últim pas hem utilitzat la definició de la funció exponencial i el fet que $\lim_{x\to c} f(x) = 1$. Aquest resultat és clau per al mètode de càlcul de límits de tipus 1^∞ en la secció 1.4.

Teorema 1.19: Teorema del valor intermedi

Siga f una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$ i $f(a) < y_0 < f(b)$. Aleshores, $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y_0$.

Intuïtivament, es pot dir que si una funció va des d'un valor inicial fins a un altre final, i és contínua, ha de passar per tots els valors intermedis. La prova del teorema del valor intermedi depèn de la propietat de *completesa* dels nombres reals, i no la donarem ací. En qualsevol cas, es tracta d'un teorema amb una interpretació gràfica senzilla:



Si f és contínua en l'interval $[a,b]$ i $f(a) < y_0 < f(b)$, aleshores sempre podrem trobar un c que tinga per imatge el valor y_0. Equivalentment, la recta horitzontal $y = y_0$ tallarà necessàriament la gràfica de la funció en almenys un punt en l'interval $[a,b]$. El teorema del valor intermedi seria fals si la funció f no fora contínua, ja que podem garantir que no tinga un *buit*. També és important remarcar que el teorema del valor intermedi aplica a funcions reals de variable real. Seria fals per a funcions definides només en els nombres racionals. Per exemple, la funció $f(x) = x^2$ és contínua, però no compleix el teorema si restringim el seu domini als nombres racionals. De fet, $f(0) = 0$ i $f(2) = 4$, però $f(c) = 2$ no té solució per a c racional.

Corol·lari. Teorema de Bolzano: Siga f una funció contínua en un interval tancat $[a,b]$ amb $f(a)$ i $f(b)$ de signes contraris. Aleshores, $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

Aquest teorema és un cas particular del teorema de valor intermedi i s'obté en fer $y_0 = 0$.

Exemple 1.33: Utilitzem el teorema del valor intermedi (o el teorema de Bolzano) per a demostrar que l'equació

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

té una solució entre 1 i 2. Comencem definint la funció $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Una solució de l'equació és equivalent a una arrel de la funció $f(x)$. Calculem el valor de la funció en 1 i 2:

$$f(1) = -1 < 0\,,$$
$$f(2) = 12 > 0\,.$$

Com que $f(x)$ canvia de signe entre 1 i 2 i es tracta d'una funció contínua (ja que és un polinomi), necessàriament existeix un punt c tal que $f(c) = 0$. En conclusió, l'equació $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ té al menys una solució en l'interval $[1, 2]$.

Teorema 1.20

Siga $f(x)$ contínua i creixent (decreixent) en un interval tancat $[a, b]$. Aleshores $\exists g = f^{-1}$, contínua i creixent (decreixent) en l'interval $[f(a), f(b)]$.

Demostració. Com ja comentàrem en fer la definició 1.12, una funció creixent o decreixent és necessàriament injectiva i, per tant, invertible. Això prova l'existència de $g = f^{-1}$. Demostrem ara que g és definida en l'interval $[f(a), f(b)]$. Suposem que f és creixent. La prova per al cas decreixent és completament anàloga. Si $a < x < b$, aleshores $f(a) < f(x) < f(b)$ o, equivalentment, $f(x) \in [f(a), f(b)]$ i $x = f^{-1}(f(x))$. Això significa que $g = f^{-1}$ estableix una correspondència entre els punts de l'interval $[f(a), f(b)]$ i els de l'interval $[a, b]$, i aleshores és definida en $[f(a), f(b)]$. Cal encara demostrar que és contínua i creixent en aquest interval. Siga un punt $x_0 \in [a, b]$ i $f(x_0) = y_0$. Siga $\epsilon > 0$. Com que f és una funció creixent, estableix una correspondència entre l'interval obert $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ i l'interval obert $(f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon))$, on està contingut y_0. Siga $\delta > 0$ tal que l'interval obert $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ estiga contingut en l'interval $(f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon))$. Aleshores, g estableix una correspondència entre l'interval $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ i $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Per tant,

$$\text{si} \quad 0 < |y - y_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |g(y) - g(y_0)| < \epsilon\,.$$

I això prova que $g = f^{-1}$ és contínua. □

Teorema 1.21

Siga f una funció contínua i injectiva en un interval I. Aleshores f és monòtona en I.

Demostració. Ja sabíem que una funció monòtona (creixent o decreixent) és necessàriament injectiva. Aquest teorema ens diu que l'afirmació inversa és certa si la funció és contínua. Demostrarem el teorema per al cas en què $I = [a, b]$, amb $a < b$, és un interval tancat. En aquest cas el teorema és equivalent al fet que si $f(a) < f(b)$ i $a < x < b$, aleshores $f(a) < f(x) < f(b)$. Provem aquest enunciat per reducció a l'absurd.

- Si $f(x) < f(a)$ aleshores tenim l'ordenació $f(x) < f(a) < f(b)$ i pel teorema del valor intermedi ha d'existir $z \in [x, b]$ tal que $f(z) = f(a)$. Però això contradiu la injectivitat de f, ja que $a < x$.
- Si $f(x) > f(b)$ aleshores tenim l'ordenació $f(a) < f(b) < f(x)$ i pel teorema del valor intermedi ha d'existir $z \in [a, x]$ tal que $f(z) = f(b)$. Però de nou això contradiu la injectivitat de f, ja que $b > x$.

Concloem que $f(a) < f(x) < f(b)$ i, per tant, f és una funció creixent. Si haguérem partit de la suposició $f(a) > f(b)$, procedint de manera anàloga amb la funció $-f$ hauríem provat que f és decreixent. Per tant, f ha de ser necessàriament monòtona. Es pot generalitzar la prova a qualsevol tipus d'interval considerant punts concrets en l'interval i reduint aleshores la demostració al cas ja vist. $\square$

Comentari: Un exemple que mostra la importància de la condició de continuïtat per a demostrar que una funció injectiva és monòtona és la funció f, definida com a

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0, 1] \\ x + 2\,, & x \in [2, 3] \\ x - 2\,, & x \in [4, 5] \end{cases}$$

Aquesta funció és injectiva en tot el seu domini, però no monòtona.

2

Derivació

La bellesa de les matemàtiques només es mostra als seguidors més pacients.

— Maryam Mirzakhani

2.1 La derivada

Definició 2.1: Derivada

La **derivada de la funció $f(x)$ respecte de x** és la funció

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,, \tag{2.1}$$

si el límit existeix.

El domini de f' és el conjunt de punts de f per als quals existeix el límit i, per tant, $D_{f'} \subset D_f$. Una fórmula alternativa per a la derivada s'obté de definir $z = x+h$, i aleshores $h = z - x$ tendeix a 0 quan z tendeix a x:

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,. \tag{2.2}$$

Exemple 2.1: Calculem la derivada de la funció

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

a partir de la definició. Tenim

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Definició 2.2: Derivada en un punt

La **derivada de la funció $f(x)$ en un punt x_0** és

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,, \tag{2.3}$$

si el límit existeix.

Notació: Hi ha diverses maneres de denotar la derivada d'una funció $y = f(x)$. Les més comunes són

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = D(f)(x) = D_x f(x) \,.$$

La notació $f'(x)$ va ser introduïda per Lagrange i s'utilitza habitualment quan es consideren funcions d'una variable. Com veurem més endavant en el curs, aquesta notació no és vàlida per a funcions de diverses variables, ja que no indica respecte de quina variable es deriva. Per això resulta més convenient la notació de Leibniz ($\frac{dy}{dx}$). Finalment, les tres últimes notacions interpreten l'acció de prendre una derivada com un *operador* que actua sobre la funció. Les notacions més comunes per al valor de la derivada en un punt $x = x_0$ són

$$f'(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} \,.$$

Definició 2.3: Derivades laterals

La **derivada per la dreta de la funció $f(x)$ en un punt x_0** és

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,, \tag{2.4}$$

si el límit existeix. La **derivada per l'esquerra de la funció $f(x)$ en un punt x_0** és

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,, \tag{2.5}$$

si el límit existeix.

Definició 2.4: Derivabilitat

Una funció $f(x)$ és **derivable en un interval obert (a, b)** si $\exists f'(x)\ \forall x \in (a, b)$.
Una funció $f(x)$ és **derivable en un interval tancat $[a, b]$** si $\exists f'(x)\ \forall x \in (a, b)$, $\exists f'_+(a)$ i $\exists f'_-(b)$.

Definició 2.5: Funció derivable

Direm que una funció $f(x)$ és **derivable** si és derivable en tot el seu domini.

Comentari: Per a funcions d'una variable s'utilitza el terme **diferenciable** amb el mateix significat que derivable.

Teorema 2.1

Una funció $f(x)$ és derivable en un punt $x_0 \in D_f$ si i només si $\exists f'_+(x_0)$, $\exists f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Demostració. El teorema és evident a partir del teorema 1.8 sobre l'existència de límits. $\square$

Exemple 2.2: La funció $f(x) = |x|$ és derivable en tots els punts excepte en $x = 0$. Calculem el límit

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \,.$$

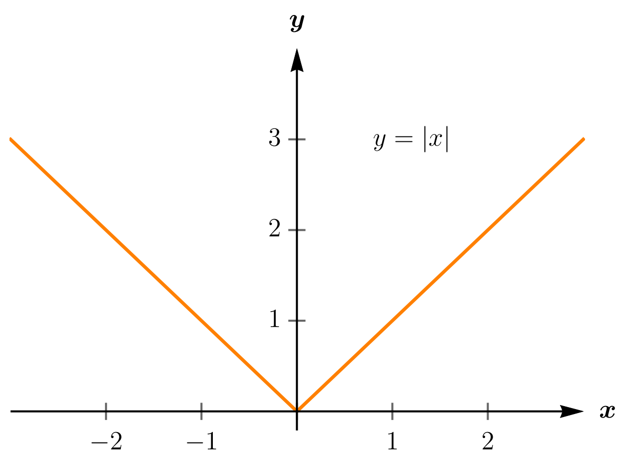
Aquest límit no existeix (i aleshores $f(x) = |x|$ no és derivable) perquè

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ -1\,, & x < 0 \end{cases}$$

i, per tant,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1\,, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1\,.$$

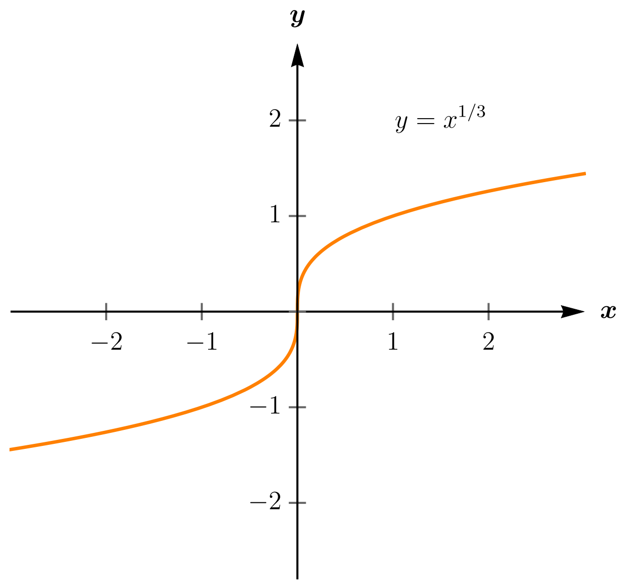
En aquest cas direm que la gràfica de $f(x) = |x|$ té un **punt angulós** en $x = 0$:



Exemple 2.3: La funció $f(x) = x^{1/3}$ no és derivable en $x = 0$. Podem demostrar-ho fent ús de la definició de derivada

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty \,.$$

En aquest cas direm que la gràfica de $f(x) = x^{1/3}$ té una **tangent vertical** en $x = 0$:



> **Teorema 2.2**
>
> Si la funció $f(x)$ és derivable en $x = c$, aleshores és contínua en $x = c$.

Demostració. Sabem que $\exists f'(c)$ i hem de provar que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Primer, notem que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{h \to 0} f(c + h) \,,$$

senzill resultat que es pot demostrar fent el canvi de variable $x = h + c$, que implica $x \to c \Rightarrow h \to 0$. Ara, si $h \neq 0$, podem escriure

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h) - f(c)) = f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \,.$$

I finalment podem calcular, fent ús de les propietats dels límits

$$\lim_{h \to 0} f(c+h) \underset{\text{T1.5}}{=} \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c) \,.$$

$\square$

Comentari: És molt important ressaltar que l'enunciat invers del teorema 2.2 no és cert. Una funció pot ser contínua però no derivable. Un bon exemple és $f(x) = |x|$, que com hem vist és contínua però no derivable.

2.2 Interpretació de la derivada

Definició 2.6: Increment

Siga $f(x)$ una funció de la variable independent x. Anomenem **increment** de x en l'interval $[x_1, x_2]$ a la diferència

$$\Delta x = x_2 - x_1 \,. \tag{2.6}$$

L'increment corresponent per a la variable dependent $y = f(x)$ és

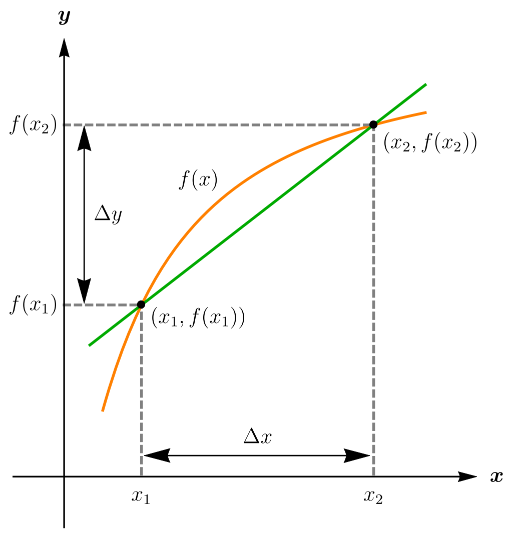
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \,. \tag{2.7}$$

Definició 2.7: Taxa de canvi

La **taxa de canvi** de la funció $f(x)$ en l'interval $[x_1, x_2]$ és el quocient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \,. \tag{2.8}$$

La taxa de canvi ens diu com ha variat la funció entre els punts x_1 i x_2. Gràficament, la taxa de canvi és el pendent de la **recta secant**, que talla a la funció en els punts $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$:

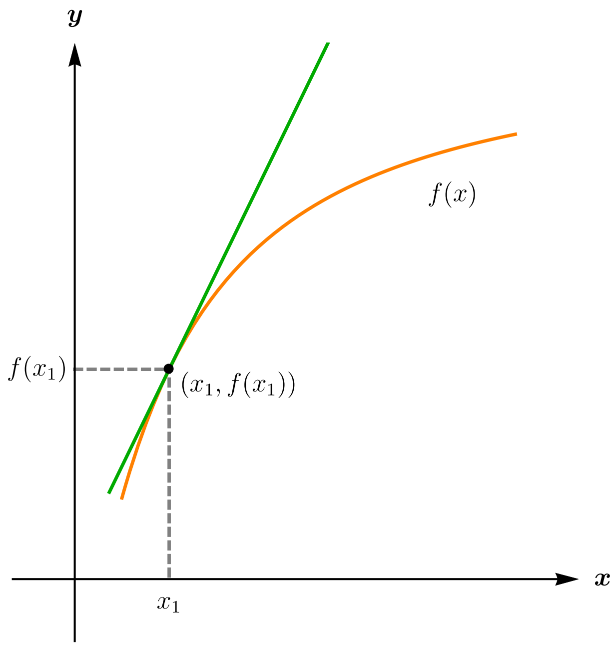


Definició 2.8: Taxa de canvi instantània

La **taxa de canvi instantània** de la funció $f(x)$ en el punt x_1 és

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \,. \tag{2.9}$$

La taxa de canvi instantània ens diu com varia la funció en un punt, és a dir, quin és el *ritme de canvi* en aquest punt. Comparant amb la definició de derivada, o amb l'equació (2.2), és evident que la taxa de canvi instantània d'una funció en un punt x_1 és la seua derivada en x_1. Per tant, la derivada ens dona informació sobre com varia una funció en cada punt. Si la derivada té un valor gran, la funció canvia *ràpidament*, i si la derivada és menuda, la funció canvia *lentament*. Geomètricament, és el pendent de la **recta tangent** a la gràfica de la funció en el punt $(x_1, f(x_1))$:



Exemple 2.4: La **bruixa d'Agnesi** és una corba definida per

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \, ,$$

amb a un nombre real. S'anomena així en honor de Maria Agnesi, una matemàtica milanesa del segle XVIII que va destacar per la seua precocitat i el seu treball en el camp del càlcul diferencial. El terme *bruixa* es deu a un error en la traducció de l'italià, llengua en la qual originalment s'anomenava *corba d'Agnesi*. Calculem l'equació de la recta tangent a la corba en el punt $x = a$. Trobem primer la funció derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2} \, ,$$

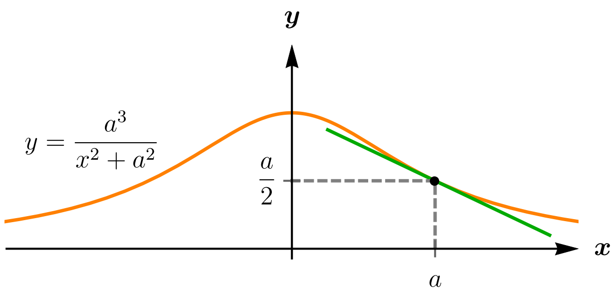
i, per tant, en $x = a$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{-2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2}\right|_{x=a} = -\frac{1}{2} \, .$$

A més, substituint $x = a$ en l'equació de la corba trobem $y = \frac{a}{2}$. Aleshores, l'equació de la recta tangent a la corba d'Agnesi en el punt $(a, a/2)$ és

$$y = -\frac{x}{2} + a\,.$$

Finalment, dibuixem la gràfica de la bruixa d'Agnesi i la recta tangent en el punt $(a, a/2)$:



2.3 Regles de derivació

Teorema 2.3: Propietats de la derivada

Siguen u i v dues funcions derivables de la variable x i c una constant. Aleshores

(i) $\dfrac{dc}{dx} = 0.$

(ii) $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\,\dfrac{du}{dx}.$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}.$

(iv) $\dfrac{d}{dx}(u\,v) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}.$

(v) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$

Demostració. Totes les propietats poden ser demostrades a partir de la definició de derivada:

(i) Apliquem la definició de la derivada a la funció $f(x) = c$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c - c}{h} = 0\,.$$

(ii) $\dfrac{d}{dx}(cu) = \lim_{h\to 0} \dfrac{c\,u(x+h) - c\,u(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = c\dfrac{du}{dx}.$

(iii) Farem la demostració per a la suma. El cas de la resta és completament anàleg i també pot ser demostrat fent ús de la regla per a la suma i la propietat (ii).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)] &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)+v(x+h)] - [u(x)+v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\,.
\end{aligned}$$

(iv) Per la definició, tenim

$$\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}\,.$$

Sumem i restem $u(x+h)v(x)$ al numerador

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[u(x+h)\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,.
\end{aligned}$$

Quan $h \to 0$, $u(x+h) \to u(x)$, ja que u, al ser derivable, és contínua. En conclusió,

$$\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\,.$$

(v) Comencem amb

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{h\,v(x+h)v(x)}\,.$$

Sumem i restem $v(x)u(x)$ al numerador i obtenim

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{h\,v(x+h)v(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\,,
\end{aligned}$$

i prenent els límits en el numerador i el dominador arribem a la regla del quocient que volíem demostrar. □

Teorema 2.4: Derivades de les funcions elementals

(i) $\dfrac{d}{dx} x^p = p\, x^{p-1}$, $p \in \mathbb{R}$ constant.

(ii) $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

(iii) $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.

(iv) $\dfrac{d}{dx} \tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(v) $\dfrac{d}{dx} \arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

(vi) $\dfrac{d}{dx} \arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

(vii) $\dfrac{d}{dx} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(viii) $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \, \ln a$, $a \in \mathbb{R}$ constant.

(ix) $\dfrac{d}{dx} e^x = e^x$.

(x) $\dfrac{d}{dx} \log_a x = \dfrac{1}{x} \, \log_a e$, $a \in \mathbb{R}$ constant.

(xi) $\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$.

(xii) $\dfrac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$.

(xiii) $\dfrac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$.

(xiv) $\dfrac{d}{dx} \tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

(xv) $\dfrac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(xvi) $\dfrac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

(xvii) $\dfrac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.

Demostració. Mostrarem dues demostracions il·lustratives de derivades de funcions elementals amb la prova d'un cas particular de (i) i la prova general de (ii). La resta de demostracions poden trobar-se en l'apèndix B.

(i) Demostrarem $\frac{d}{dx}x^p = p\,x^{p-1}$ per al cas particular $p \in \mathbb{N}$. Farem ús del mètode de demostració per inducció. Primer, provem que la igualtat es verifica per a $p = 1$. Tenim

$$\frac{d}{dx}x = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,.$$

Suposem ara que l'equació és certa per a $p = n-1$,

$$\frac{d}{dx}x^{n-1} = (n-1)\,x^{n-2}\,, \tag{2.10}$$

i provem que aleshores també ho és per a $p = n$. Per a aconseguir-ho necessitarem la propietat (iv) del teorema 2.3. Trobem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\cdot x\right) \underset{\text{P(iv)}}{=} \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right)\cdot x + x^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}x \underset{\text{Eq.(2.10)}}{=} (n-1)\,x^{n-2}\cdot x + x^{n-1}\cdot 1\\ &= (n-1)\,x^{n-1} + x^{n-1} = n\,x^{n-1}\,.\end{aligned}$$

I així queda provada (i) per a $p \in \mathbb{N}$. En l'apèndix B pot trobar-se una demostració general.

(ii) Per a demostrar aquest cas hem de recordar una identitat trigonomètrica, el sinus de la suma d'angles:

$$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x \sin h\,. \tag{2.11}$$

Per la definició de derivada, tenim

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \underset{\text{Eq.(2.11)}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x\sin h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right]\\ &= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Hem fet ús de dos límits de funcions trigonomètriques que van aparèixer en la secció 1.4. □

Teorema 2.5: Regla de la cadena

Si g és una funció derivable en x i f és una funció derivable en $g(x)$, la funció composta $F = f\circ g$, definida per $F(x) = f(g(x))$ és derivable en x i F' és

$$F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)\,. \tag{2.13}$$

Demostració. Recordem la definició d'increment de la funció $y = f(x)$ quan la variable x canvia del valor a a $a + \Delta x$:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \, .$$

Per altra banda, tenim per la definició de derivada que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) \, .$$

Aleshores, si definim ϵ com la diferència entre el quocient i la derivada, obtenim

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0 \, .$$

Però també

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a) \, \Delta x + \epsilon \, \Delta x \, .$$

Si definim que ϵ es fa 0 quan $\Delta x = 0$, aleshores ϵ és una funció contínua de la variable Δx. Concloem per tant que per a qualsevol funció derivable f podem escriure

$$\Delta y = f'(a) \, \Delta x + \epsilon \, \Delta x \quad \text{on } \epsilon \to 0 \text{ quan } \Delta x \to 0 \, . \tag{2.14}$$

Aquesta propietat de les funcions derivables és fonamental per a demostrar la regla de la cadena. Siguen $u = g(x)$ derivable en a i $y = f(u)$ derivable en $b = g(a)$. Si Δx és un increment en x i Δu i Δy els corresponents increments en u i y, respectivament, aleshores podem utilitzar l'equació (2.14) per a escriure

$$\Delta u = g'(a) \, \Delta x + \epsilon_1 \, \Delta x = \left[g'(a) + \epsilon_1 \right] \Delta x \, , \tag{2.15}$$

$$\Delta y = f'(b) \, \Delta u + \epsilon_2 \, \Delta u = \left[f'(b) + \epsilon_2 \right] \Delta u \, , \tag{2.16}$$

on $\epsilon_1 \to 0$ si $\Delta x \to 0$ i $\epsilon_2 \to 0$ si $\Delta u \to 0$. Substituint l'equació (2.15) en l'equació (2.16) obtenim

$$\Delta y = \left[f'(b) + \epsilon_2 \right] \left[g'(a) + \epsilon_1 \right] \Delta x \, ,$$

i aleshores

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'(b) + \epsilon_2 \right] \left[g'(a) + \epsilon_1 \right] \, .$$

L'equació (2.15) ens diu que quan $\Delta x \to 0$ aleshores $\Delta u \to 0$. Per tant, quan $\Delta x \to 0$ tenim $\epsilon_1 \to 0$ i $\epsilon_2 \to 0$. En conclusió,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(b) + \epsilon_2 \right] \left[g'(a) + \epsilon_1 \right] \\ &= f'(b) \, g'(a) = f'(g'(a)) \, g'(a) \, , \end{aligned}$$

i la regla de la cadena queda provada. □

Comentari: En notació de Leibniz, si $y = f(u)$ i $u = g(x)$, la regla de la cadena s'escriu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\,. \tag{2.17}$$

Exemple 2.5: Calculem la derivada de la funció $F(x) = e^{\sin x}$. $F(x)$ s'obté per composició de les funcions $f(x) = e^x$ i $g(x) = \sin x$ com a $F = f \circ g$. Aleshores

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x\,.$$

Exemple 2.6: La regla de la cadena pot aplicar-se a funcions compostes per més de dues funcions elementals. Calculem la derivada de la funció $F(x) = e^{\sin 2x}$. $F(x)$ s'obté per composició de les funcions $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ i $h(x) = 2\,x$ com a $F = f \circ g \circ h \equiv f \circ (g \circ h)$. Aleshores podem aplicar la regla de la cadena dues vegades i obtenir

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g \circ h(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2\,. \end{aligned}$$

Exemple 2.7: Podem comprovar la regla de la cadena en un cas senzill. Siga $F(x) = \sin 2x$. Podem calcular-ne la derivada de dues maneres:

- Aplicant la regla de la cadena: $F'(x) = \cos 2x \cdot 2$.
- Fent ús de la identitat trigonomètrica $\sin 2x = 2\,\sin x\,\cos x$ i aplicant la regla de la derivada d'un producte de funcions: $F'(x) = 2\,\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$.

Tots dos mètodes donen el mateix resultat, ja que $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Comentari: Pot comprovar-se fàcilment que la regla de la derivada d'un quocient de funcions en el teorema 2.3 pot ser obtinguda a partir de la regla per al producte de funcions fent ús de

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{v(x)} = -\frac{1}{v^2(x)}\frac{dv}{dx}\,, \tag{2.18}$$

que generalitza el resultat obtingut en l'exemple 2.1.

Teorema 2.6: Derivada de la funció inversa

Siga $f(x)$ una funció derivable i monòtona. Aleshores, la funció inversa f^{-1} és derivable i

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,, \quad \forall b \in D_{f^{-1}}\,. \tag{2.19}$$

Demostració. Ja sabem pel teorema 1.20 que una funció contínua i monòtona és invertible. Pel teorema 2.2, si f és derivable és també contínua i, per tant, existeix f^{-1} i és contínua. Denotem $g = f^{-1}$ i definim $a = g(b)$. Hem de demostrar que

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$$

existeix i trobar la seua relació amb f'. Com que g és la inversa de f, si $y = f(x)$ aleshores $g(y) = x$. A més, com que $g(y)$ és contínua, x tendeix a a quan $g(y)$ tendeix a b. Podem per tant escriure

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} \,,$$

com volíem demostrar. □

Comentari 1: Si la funció f només és derivable e injectiva en un interval $I \subset D_f$, aleshores el teorema 2.6 està restringit a l'interval I.

Comentari 2: En notació de Leibniz:

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}} \tag{2.20}$$

Exemple 2.8: La funció $\ln x$ és la inversa de la funció exponencial e^x. Podem calcular-ne la derivada a partir del teorema 2.6. Denotem $f(x) = e^x$ i $f^{-1}(x) = \ln x$. Trobem:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\left.\frac{d}{dy} e^y\right|_{y=\ln x}} = \frac{1}{\left. e^y \right|_{y=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \,.$$

Definició 2.9: Funció implícita

Direm que $y(x)$ és una funció implícita si és definida per una relació de la forma

$$F(x, y) = 0 \,.$$

Les funcions considerades fins ara estaven donades indicant de manera explícita la relació entre la variable dependent y i la variable independent x. De manera més general, podríem trobar casos en què la relació és implícita, i és definida per una equació del tipus $F(x, y) = 0$ en la qual no podem aïllar $y(x)$.

Exemple 2.9: L'equació

$$y^4 + x\,y = x^3 - x + 2$$

estableix una relació entre la variable independent x i la variable dependent y. Encara que no podem aïllar $y(x)$ explícitament, si donem un valor a x podem trobar el valor corresponent de $y(x)$. No obstant això, podem calcular la derivada de la funció y, $\frac{dy}{dx}$, seguint dos senzills passos:

1. Derivem respecte a x als dos costats de l'equació tractant y com una funció de x.
2. Agrupem els termes proporcionals a $\frac{dy}{dx}$ i a continuació l'aïllem.

En aquest cas:

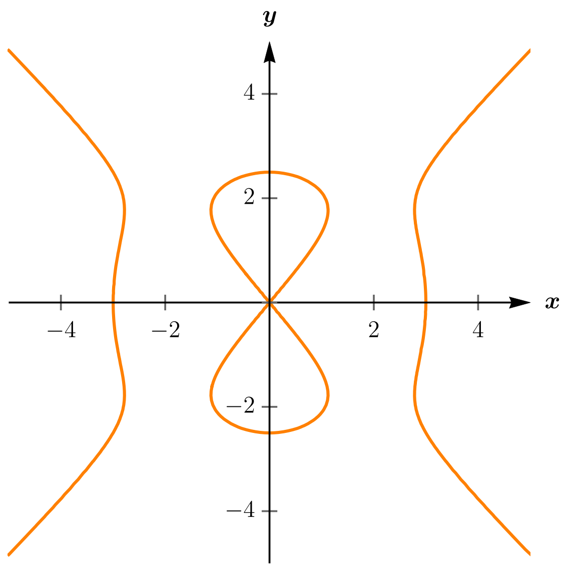
$$\begin{aligned} y^4 + x\,y = x^3 - x + 2 \quad &\Rightarrow \quad 4y^3\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (4y^3 + x)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y - 1}{4y^3 + x}\,. \end{aligned}$$

La derivada d'una funció donada en forma implícita està també donada en forma implícita.

Exemple 2.10. La corba del diable: Una corba del diable és una corba definida per l'equació

$$y^2(y^2 - a^2) = x^2(x^2 - b^2)\,,$$

on a i b són dos nombres reals. Per a $a = 2.5$ i $b = 3$, els punts del pla cartesià que verifiquen aquesta equació són representats per la gràfica següent:



Les corbes del diable van ser estudiades pel matemàtic suís Gabriel Cramer. Sembla que el nom de la corba procedeix del joc del diàbolo, que té una forma similar a la d'aquesta corba. I, segons pareix, la confusió ve del fet que la paraula italiana *diabolo* també vol dir *diable*. És fàcil verificar que el punt $(x,y)=(b,a)$ pertany a la corba del diable. Volem calcular el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt. Per a obtenir aquest resultat hem de fer ús de la derivació d'una funció implícita:

$$\begin{aligned} y^2(y^2-a^2)=x^2(x^2-b^2) \quad &\Rightarrow \quad y^4-a^2\,y^2=x^4-b^2\,x^2 \\ &\Rightarrow \quad 4y^3\frac{dy}{dx}-2a^2y\frac{dy}{dx}=4x^3-2b^2x \\ &\Rightarrow \quad \left(4y^3-2a^2y\right)\frac{dy}{dx}=4x^3-2b^2x \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-2b^2x}{4y^3-2a^2y}=\frac{2x^3-b^2x}{2y^3-a^2y}\,. \end{aligned}$$

Per tant, en el punt (b,a) tenim que el pendent de la recta tangent a la corba és

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(b,a)}=\frac{2b^3-b^2b}{2a^3-a^2a}=\frac{b^3}{a^3}\,.$$

Finalment, cal aclarir que la corba del diable no és una funció, ja que al mateix valor de la variable x li corresponen més d'un valor de la variable y. No obstant això, la corba pot dividir-se en diferents peces que sí que serien funcions.

Comentari 1: La funció $F(x,y)$ que determina la relació entre x i y és una funció de dues variables. Per aquesta raó, les funcions implícites poden estudiar-se utilitzant tècniques pròpies de les funcions de diverses variables (en particular el teorema de la funció implícita).

Comentari 2. Derivació logarítmica: La derivació de funcions implícites pot usar-se en combinació amb el logaritme per a trobar derivades que d'altra manera no serien tan fàcils de trobar. Per exemple, considerem la funció $f(x)=x^x$ i calculem la derivada. Com que tant la base com l'exponent són funcions de x, no podem fer servir ni la regla de derivació per al monomi x^n, amb n constant, ni la regla de derivació per a una funció del tipus a^x, que de nou requereix que a siga una constant. El mètode per a trobar la derivada comença agafant logaritmes als dos costats de la igualtat $y=f(x)$:

$$y=x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y=\ln x^x=x\,\ln x\,.$$

I ara podem derivar aquesta expressió, que equival a una funció donada en forma implícita:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1\,.$$

Per tant, aïllem la derivada i trobem

$$\frac{dy}{dx}=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)\,.$$

Aquest mètode que ens permet trobar la derivada d'una funció aplicant les propietats dels logaritmes s'anomena **derivació logarítmica**.

Definició 2.10: Corba paramètrica

Si x i y són donades com a funcions

$$x = f(t)\,, \quad y = g(t)$$

per a un interval I de valors de la variable t, aleshores el conjunt de punts $(x, y) = (f(t), g(t))$ definit per aquestes equacions és una **corba paramètrica.** Les equacions són les **equacions paramètriques** de la corba.

A la variable t li direm el **paràmetre** de la corba. També direm que la corba ha sigut **parametritzada**.

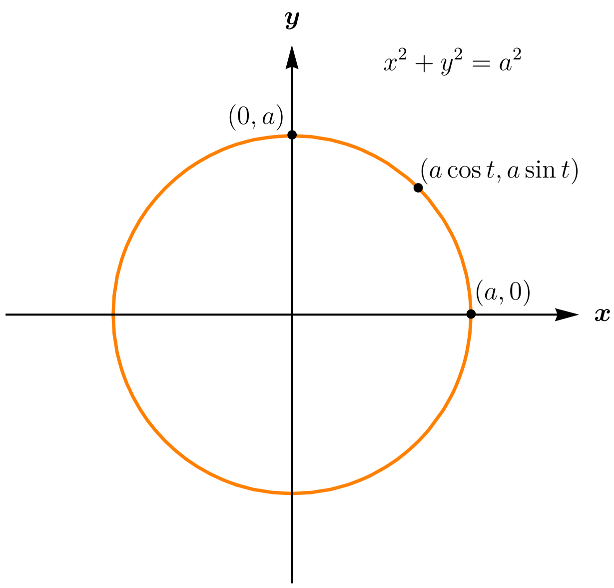
Exemple 2.11: Siga la corba

$$\begin{aligned} x &= a\,\cos t\,, \\ y &= a\,\sin t\,, \end{aligned}$$

amb a una constant i $0 \leq t \leq 2\pi$. Aquesta corba és la circumferència de radi a, ja que tots els seus punts (x, y) estan a una distància a de l'origen. Per a provar-ho eliminem el paràmetre t:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2\,.$$

Per a $t = 0$ tenim el punt $(a, 0)$ i per a $t = \frac{\pi}{2}$ tenim el punt $(0, a)$. La figura següent il·lustra aquests dos punts, a més d'un punt genèric $(x, y) = (a\,\cos t, a\,\sin t)$:



Teorema 2.7

La corba parametritzada $x = f(t)$ i $y = g(t)$ és derivable en t si f i g són derivables en t. En un punt de la corba on y és també derivable en x, es verifica

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \,. \tag{2.21}$$

Demostració. Aquest teorema s'obté per aplicació directa de la regla de la cadena. □

Si $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$, el pendent de la corba pot calcular-se fàcilment a partir de l'equació (2.21):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \,.$$

Exemple 2.12: Calculem el pendent de la circumferència de radi a en un punt (x, y). En primer lloc fem les derivades de les dues equacions paramètriques:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\,(a\,\cos t) = -a\,\sin t\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\,(a\,\sin t) = a\,\cos t\,.$$

I simplement dividint:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{a\,\cos t}{a\,\sin t} = -\cot t = -\frac{x}{y}\,.$$

Podem donar el resultat en funció del paràmetre $(-\cot t)$ o de les dues variables $(-x/y)$. Comprovem el resultat aplicant-lo a dos punts especials, $(a, 0)$ i $(0, a)$. En el primer cas la derivada no existeix (és infinita), tal com podríem haver anticipat, ja que la recta tangent a la circumferència en aquest punt és una tangent vertical. En el segon cas la derivada és 0, de nou com esperàvem, ja que la tangent és horitzontal en el punt $(0, a)$.

Comentari: Altres exemples de corbes paramètriques són:

- L'el·lipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ i $0 \leq t \leq 2\pi$.
- La paràbola: $x = \sqrt{t}$, $y = t$ i $t \geq 0$.
- La cicloide: $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ i $t \geq 0$.
- L'astroide: $x = a\,\cos^3 t$, $y = a\,\sin^3 t$ i $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definició 2.11: Segona derivada

Siga $y = f(x)$ una funció derivable. Si $f'(x)$ també és derivable, la derivada s'anomena **segona derivada** de la funció f i es denota per $f''(x)$.

Notació: Altres maneres alternatives per a denotar la segona derivada de la funció f són

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x)\,.$$

Definició 2.12: Derivada n-èsima

De manera anàloga a la segona derivada, definim la **derivada n-èsima** de la funció $y = f(x)$ com la funció resultant de derivar respecte de la variable x n vegades. La denotarem com a $f^{(n)}(x)$.

Notació:

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)} = \frac{d^nf}{dx^n} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = D^n(f)(x) = D_x^n f(x)\,.$$

Exemple 2.13: Siga $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Calculem totes les seues derivades:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x\,, \\ y'' &= 6x - 6\,, \\ y''' &= 6\,, \\ y^{(4)} &= 0\,. \end{aligned}$$

La funció té derivades de tots els ordres. La cinquena derivada i totes les derivades d'ordres superiors són zero.

Comentari: La funció d'aquest exemple té derivades de tots els ordres en tot el seu domini, que és la recta real. Una funció com aquesta, que admet derivades de tots els ordres, s'anomena **funció suau** o **infinitament derivable**. Recordem ara el teorema 2.2, que ens diu que si una funció $f(x)$ és derivable en un punt $x = c$, aleshores és contínua en $x = c$. Aleshores, en el cas d'una funció suau totes les derivades són contínues.

Teorema 2.8: Fórmula de Leibniz de la derivada n-èsima d'un producte

Siguen u i v dues funcions amb derivades fins a ordre n en tots els punts d'un interval $I \subset \mathbb{R}$. Aleshores, es verifica en I

$$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}\,v^{(k)}\,. \tag{2.22}$$

Comentari 1: Hem introduït la **notació sigma** per a la suma. Pot trobar-se més informació en l'apèndix C.

Comentari 2: Abans de demostrar aquest teorema recordem algunes propietats dels **nombres combinatoris** (també anomenats **coeficients binomials**). Els nombres combinatoris són els coeficients dels termes del polinomi que resulta de desenvolupar el binomi de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}\, b^k \,, \tag{2.23}$$

i són expressats per

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.24}$$

on $n, k \in \mathbb{N}$ i $n!$ representa el factorial del nombre natural n, $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 1$. Per exemple,

$$(a+b)^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} a^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} a\, b + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} b^2 = a^2 + 2\, a\, b + b^2 \,.$$

Tenen les següents propietats:

(i) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$

(ii) $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1.$

(iii) $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n.$

(iv) $\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n.$

(v) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}.$

(vi) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}.$

(vii) $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n.$

(viii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0.$

Totes aquestes propietats poden ser demostrades fàcilment a partir de la definició de nombre combinatori i la fórmula del binomi de Newton.

Comentari 3: Fent servir la propietat (v) dels nombres combinatoris es pot demostrar una expressió alternativa per a la regla de Leibniz per a la derivada n-èsima d'un producte:

$$(u\, v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u^{(n-k)}\, v^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u^{(k)}\, v^{(n-k)} \,.$$

Demostració. Demostrarem la regla de Leibniz per a la derivada n-èsima d'un producte per inducció. Primer, comprovem que la regla se satisfà per a $n = 1$:

$$(u\,v)' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u'\,v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u\,v' = u'\,v + u\,v' \,. \tag{2.25}$$

I efectivament el resultat coincideix amb la regla de derivació d'un producte de funcions, la propietat (iv) del teorema 2.3. De fet, la regla de Leibniz per a la derivada n-èsima d'un producte és una generalització de la regla del producte. Suposem ara que la regla és vàlida per al cas $n-1$,

$$(u\,v)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n-1-k)}\,v^{(k)}$$

i demostrem que aleshores és certa per a n. Necessitarem fer ús de nou de la regla de derivació del producte de funcions:

$$\begin{aligned}
(u\,v)^{(n)} &= \frac{d}{dx}(u\,v)^{(n-1)} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n-1-k)}\,v^{(k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\left(u^{(n-1-k)}\,v^{(k)}\right) \qquad (2.26) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \left(u^{(n-k)}\,v^{(k)} + u^{(n-1-k)}\,v^{(k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n-k)}\,v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n-1-k)}\,v^{(k+1)} \,. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Fem ara un canvi d'índex en el segon sumatori,

$$k \quad \to \quad k-1 \,,$$

que implica un canvi també en les fites inferior i superior del sumatori,

$$\begin{aligned} k = 0 \quad &\to \quad k = 1 \\ k = n-1 \quad &\to \quad k = n \,. \end{aligned}$$

Per tant, l'equació (2.27) queda

$$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n-k)}\,v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} u^{(n-k)}\,v^{(k)} \,, \tag{2.28}$$

i si ara separem cada sumatori en dues peces,

$$\begin{aligned}
(u\,v)^{(n)} = &\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} u^{(n)}\,v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} u^{(n-k)}\,v^{(k)} \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} u^{(n-k)}\,v^{(k)} + \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} u^{(0)}\,v^{(n)} \,. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Per les propietats dels nombres combinatoris tenim

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \underset{\mathrm{P(vi)}}{=} \binom{n}{k} \, ,$$

i a més

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1 \, .$$

Aplicant aquestes dues relacions en l'equació 2.29 trobem

$$\begin{aligned}(u\,v)^{(n)} &= \binom{n}{0} u^{(n)}\, v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u^{(n-k)}\, v^{(k)} + \binom{n}{n} u^{(0)}\, v^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}\, v^{(k)} \, .\end{aligned}$$

Com volíem demostrar. □

Exemple 2.14: Calculem la derivada 2020 de la funció $f(x) = x^3\, e^x$. La regla de Leibniz ens permet escriure

$$\frac{d^{2020}}{dx^{2020}} \left(x^3\, e^x\right) = \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} \left(x^3\right)^{(k)} \left(e^x\right)^{(2020-k)} \, .$$

Calculem les derivades n-èsimes de les dues funcions. Trobem dos resultats clau:

$$\begin{aligned}\left(x^3\right)^{(k)} &= 0 \, , \quad k \geq 4 \, , \\ \left(e^x\right)^{(2020-k)} &= e^x \, , \quad \forall k \, .\end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}\frac{d^{2020}}{dx^{2020}} \left(x^3\, e^x\right) &= e^x \sum_{k=0}^{3} \binom{2020}{k} \left(x^3\right)^{(k)} \\ &= e^x \left[\binom{2020}{0} \cdot x^3 + \binom{2020}{1} \cdot 3x^2 + \binom{2020}{2} \cdot 6x + \binom{2020}{3} \cdot 6 \right] \, .\end{aligned}$$

Podríem terminar l'exemple ací, però és il·lustratiu usar la definició i les propietats dels nombres combinatoris i escriure els que apareixen en aquesta expressió com a

$$\begin{aligned}\binom{2020}{0} &= 1 \, , \\ \binom{2020}{1} &= 2020 \, , \\ \binom{2020}{2} &= \frac{2020!}{2!(2020-2)!} = \frac{2020 \cdot 2019 \cdot 2018!}{2 \cdot 2018!} = \frac{1}{2} \left(2020 \cdot 2019\right) , \\ \binom{2020}{3} &= \frac{2020!}{3!(2020-3)!} = \frac{2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot 2017!}{6 \cdot 2017!} = \frac{1}{6} \left(2020 \cdot 2019 \cdot 2018\right) .\end{aligned}$$

S'ha de notar que el càlcul d'aquests nombres combinatoris seria un problema no trivial si no férem servir les propietats dels factorials, ja que els valors numèrics que apareixen són molt grans.

2.4 Extrems d'una funció

Definició 2.13: Extrems absoluts

Siga f una funció amb domini D_f. Aleshores f té un valor **màxim absolut** sobre D_f en un punt c si

$$f(x) \leq f(c) \, \forall x \in D_f \, ,$$

i un valor **mínim absolut** sobre D_f en c si

$$f(x) \geq f(c) \, \forall x \in D_f \, ,$$

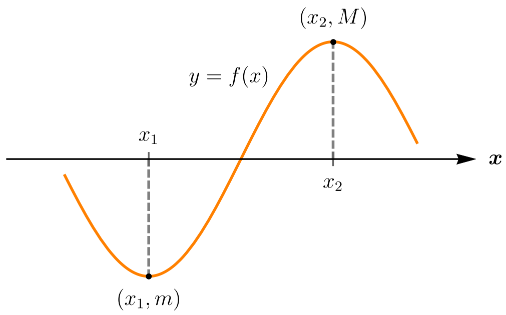
Els valors màxim i mínim també s'anomenen valors **extrems** de la funció f. Els extrems absoluts també s'anomenen **extrems globals**. La definició pot restringir-se a un interval i, per tant, parlar d'extrems absoluts en un interval on la funció està definida.

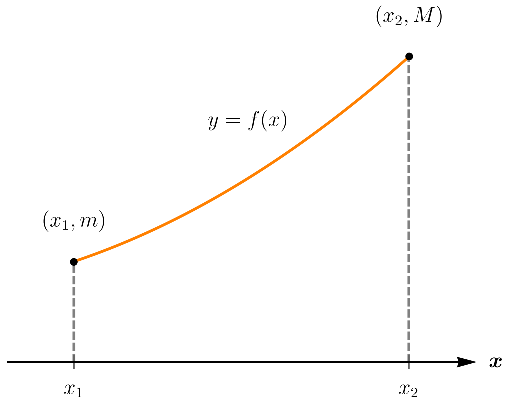
Exemple 2.15: La funció $f(x) = x^2$ té un mínim absolut en $x = 0$, ja que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

Teorema 2.9: Teorema de Weierstrass

Siga f una funció contínua en l'interval tancat $[a, b]$. Aleshores, f té un màxim i un mínim absoluts en $[a, b]$. És a dir, $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ amb $f(x_1) = m$ $f(x_2) = M$, tals que $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$.

Aquest teorema també s'anomena **teorema dels valors extrems** o **1r teorema de Weierstrass**. La prova del teorema fa ús de propietats dels nombres reals que no estudiem en aquest curs, i per tant no la donarem ací. En qualsevol cas, es tracta d'un resultat molt intuïtiu. Si la funció és monòtona en l'interval $[a, b]$, els extrems de la funció es trobaran en la frontera de l'interval, mentre que si la funció no és monòtona en aquest interval, almenys un d'aquests serà un punt interior:





Per contra, si la funció no és contínua, el teorema és fals. Un exemple és la funció

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \leq x < 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

Aquesta funció discontínua està definida en l'interval $[0, 1]$ i té valors mínims en $x = 0$ i $x = 1$, on $f(x) = 0$, però no té valor màxim.

Comentari: Una funció que verifica el teorema 2.9 en un interval tancat $[a, b]$ és una **funció fitada en $[a, b]$**, ja que té un valor mínim i un valor màxim. De forma més general, direm que una funció $f(x)$ és fitada en un interval I si existeix un nombre real M tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in I$. Si $f(x) \leq A$ $\forall x \in I$, la funció es diu que és **fitada per damunt** i A és una **fita superior**. D'altra banda, si $f(x) \geq B$ $\forall x \in I$, llavors la funció es diu que és **fitada per davall** i B es diu que és una **fita inferior**.

Definició 2.14: Extrems locals

Siga f una funció amb domini D_f. Aleshores f té un valor **màxim local** en un punt $c \in D_f$ si

$$f(x) \leq f(c)$$

per a tot $x \in D_f$ que pertany a algun interval obert que conté c, i un valor **mínim local** sobre D_f en c si

$$f(x) \geq f(c)$$

per a tot $x \in D_f$ que pertany a algun interval obert que conté c.

Podem reformular la definició. La funció f té un màxim (mínim) local en el punt c si $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$) per a tot x en algun interval obert $(c - \delta, c + \delta)$, amb $\delta > 0$.

Comentari: Un extrem absolut també és un extrem local. Els extrems locals també s'anomenen **extrems relatius**.

Teorema 2.10: Teorema de Fermat

Siga f una funció amb un màxim o mínim local en un punt interior c del seu domini, on és derivable. Aleshores

$$f'(c) = 0\,.$$

Demostració. Suposem que f té un màxim local en $x = c$. La demostració per al cas de mínim local és anàloga. Considerem les derivades laterals de la funció f en $x = c$. Primer, la derivada per la dreta,

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0\,,$$

ja que $(x - c) > 0$ (és un límit per la dreta) i $f(x) \leq f(c)$ per la condició de màxim local. Ara, la derivada per l'esquerra,

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0\,,$$

ja que $(x - c) < 0$ (és un límit per l'esquerra) i $f(x) \leq f(c)$, de nou per la condició de màxim local. Com que f és derivable en c, $f'_+(c) = f'_-(c)$ i els dos límits anteriors han de ser necessàriament zero. En conclusió, $f'(c) = 0$. □

Aquest teorema és fonamental per al càlcul d'extrems d'una funció, que es redueix a resoldre l'equació $f'(x) = 0$.

Exemple 2.16: Els extrems de la funció $f(x) = \sin x$ són les solucions de l'equació

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x = 0\,,$$

i es troben en $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots = \frac{\pi}{2} + n\,\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, amb $n \in \mathbb{N}$.

Comentari 1: És important ressaltar que el teorema de Fermat només s'aplica a punts interiors del domini. Si la funció f està definida en un interval tancat $[a, b]$, els seus punts frontera poden ser extrems de la funció sense que la derivada hi siga nul·la.

Comentari 2: A conseqüència del teorema de Fermat, deduïm que la recta tangent a la funció en un punt extrem és horitzontal (paral·lela a l'eix x).

Definició 2.15: Punt crític

Un punt interior del domini d'una funció f on f' és zero o no està definida s'anomena **punt crític**.

Comentari 1: Els únics punts del domini d'una funció que poden ser valors extrems són els seus punts crítics o les fronteres del seu domini.

Comentari 2: Un punt interior del domini d'una funció f on f' és zero s'anomena **punt estacionari**. Per tant, un punt estacionari és un cas particular de punt crític.

Teorema 2.11: Teorema de Rolle

Siga f una funció contínua en un interval tancat $[a, b]$ i derivable en tots els punts interiors d'aquest interval. Si $f(a) = f(b)$, aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostració. Segons el teorema de Weierstrass (el teorema 2.9), la funció f té valors màxims i mínims absoluts en l'interval $[a, b]$. I pel teorema de Fermat (el teorema 2.10), aquests extrems només poden assolir-se de tres maneres:

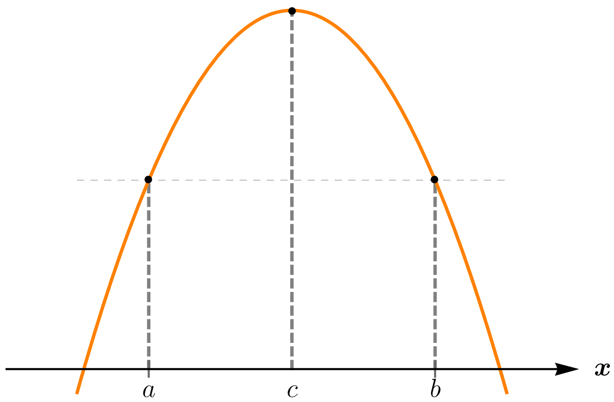
1. En punts interiors on f' és zero.

2. En punts interiors on f' no existeix.

3. En els punts frontera, en aquest cas a i b.

La possibilitat 1 és precisament el que volem demostrar. En aquest cas, qualsevol dels punts interiors on la derivada és nul·la poden ser identificats amb c. Les premisses del teorema descarten la possibilitat 2, ja que f és derivable en tots els punts interiors. Per tant només hem de considerar la possibilitat 3. Suposem que els dos extrems, el mínim i el màxim absoluts, s'assoleixen en els punts frontera a i b. Aleshores, com que $f(a) = f(b)$, a i b són mínim i màxim absoluts alhora, i f ha de ser la funció constant $f(x) = f(a) = f(b)$ $\forall x \in [a, b]$. Per tant, $f'(x) = 0$ i el punt c pot ser qualsevol punt en l'interval. $\square$

El teorema de Rolle resulta molt intuïtiu gràficament:



Exemple 2.17: El teorema de Rolle pot combinar-se amb el teorema del valor intermedi (teorema 1.19) per a mostrar que només existeix una única solució real d'equacions $f(x) = 0$. Siga per exemple l'equació

$$x^3 + 3x + 1 = 0\,.$$

Volem provar que té exactament una solució real. Definim la funció contínua $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Com que $f(-1) = -3$ i $f(0) = 1$, el teorema del valor intermedi (o el teorema de Bolzano), ens diu que la funció s'anul·la en algun punt de l'interval obert $(-1, 0)$. A més, la derivada $f'(x) = 3x^2 + 3$ és sempre positiva per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, no es fa mai zero. Si hi haguera dos punts, $x = a$ i $x = b$, on $f(x) = 0$, el teorema de Rolle ens garantiria l'existència d'un punt $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$. Com que f' no pot fer-se zero, f només té una arrel i l'equació una solució real.

Teorema 2.12: Teorema del valor mitjà de Lagrange

Siga f una funció contínua en un interval tancat $[a, b]$ i derivable en tots els punts interiors d'aquest interval. Aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Comentari: Abans de demostrar aquest teorema, cal adonar-se d'un detall. Si $f(a) = f(b)$ el teorema ens diu que $\exists c$ tal que $f'(c) = 0$. Per tant, el teorema del valor mitjà de Lagrange es tracta d'una generalització del teorema de Rolle.

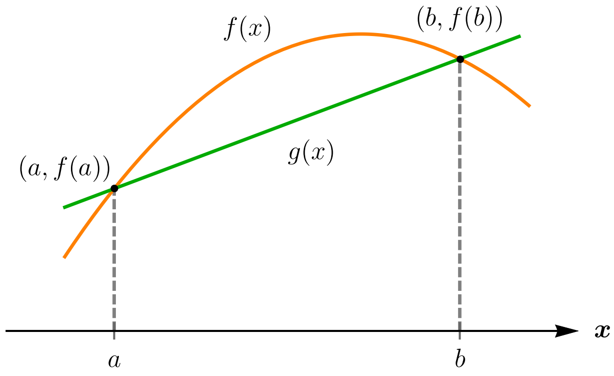
Demostració. Considerem una recta que talle la funció en els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. L'equació d'aquesta recta és

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)\,, \tag{2.30}$$

i la diferència entre la funció $f(x)$ i la recta $g(x)$ és donada per la funció

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \, . \tag{2.31}$$

Podem il·lustrar aquestes definicions amb una gràfica:



La funció h satisfà el teorema de Rolle en l'interval $[a, b]$, ja que és contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b), ja que f i g ho són. A més, $h(a) = h(b) = 0$. Aleshores, $\exists c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Derivem ara l'equació (2.31). Obtenim

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \, , \tag{2.32}$$

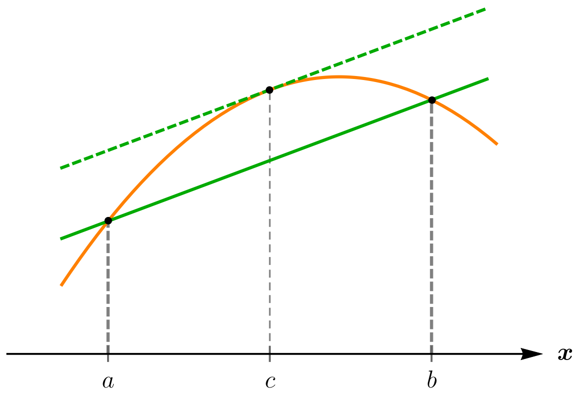
que per a $x = c$ resulta

$$h'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \, . \tag{2.33}$$

□

El teorema del valor mitjà de Lagrange admet dues interpretacions complementàries:

- **Interpretació geomètrica:** $f'(c)$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica en $x = c$ i $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ és el pendent de la recta secant que talla en els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Per tant, el teorema del valor mitjà de Lagrange ens diu que podem trobar un punt on la tangent té el mateix pendent que la recta secant:



- **Interpretació en termes de taxes de canvi:** $f'(c)$ és la taxa de canvi instantània en $x = c$ i $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ és la taxa de canvi en l'interval $[a, b]$. Per tant, el teorema del valor mitjà de Lagrange ens diu que algun punt interior la taxa de canvi instantània ha de ser igual a la taxa de canvi mitjana de tot l'interval.

Corol·lari 1. Si $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$, aleshores $f(x) = C \ \forall x \in (a, b)$, on C és una constant.

Demostració. Siguen $x_1, x_2 \in (a, b)$, amb $x_1 < x_2$. La funció f satisfà les hipòtesis del teorema del valor mitjà de Lagrange en l'interval $[x_1, x_2]$. Per tant, $\exists c \in [x_1, x_2]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \,. \tag{2.34}$$

Com que $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ aleshores $f'(c) = 0$. En aquest cas, l'equació (2.34) implica que $f(x_1) = f(x_2)$, ja que $x_1 \neq x_2$. Com que x_1 i x_2 són dos punts qualssevol de l'interval $[a, b]$, això implica que la funció és constant en l'interval, com volíem provar. □

Corol·lari 2. Si $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in (a, b)$, aleshores existeix una constant C tal que $f(x) = g(x) + C \ \forall x \in (a, b)$.

Demostració. Siga la funció diferència $h = f - g$. La seua derivada en cada punt és

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \,.$$

Per tant, pel corol·lari 1, $h(x) = C$ i $f(x) = g(x) + C \ \forall x \in (a, b)$. □

Els corol·laris 1 i 2 també són certs si l'interval no és finit, és a dir, si l'interval és del tipus (a, ∞), $(-\infty, b)$ o $(-\infty, \infty)$.

Corol·lari 3. Siga f contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b).

- Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$, aleshores f és creixent en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$, aleshores f és decreixent en $[a, b]$.

Demostració. Siguen $x_1, x_2 \in [a, b]$, amb $x_1 < x_2$. El teorema del valor mitjà de Lagrange ens diu que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

per a algun $c \in (a, b)$. Per hipòtesis, $x_2 - x_1 > 0$. Per tant, el signe del costat dret de la igualtat és el signe de $f'(c)$. Aleshores, $f(x_2) > f(x_1)$ si $f'(c)$ és positiva en (a, b) i $f(x_2) < f(x_1)$ si $f'(c)$ és negativa en (a, b). □

El corol·lari 3 és vàlid tant per intervals finits com infinits, i és clau per a determinar les regions on una funció és creixent o decreixent. Primer trobem els punts crítics de la funció i després trobem el signe de la derivada en un punt qualsevol en cadascuna de les regions definides per aquests. La clau és que si $a < b$ són dos punts crítics de f, i la derivada és contínua, però no és mai zero en els punts interiors de l'interval (a, b), aleshores el teorema del valor intermedi (teorema 1.19) garanteix que la derivada és sempre positiva o sempre negativa en aquest interval.

Exemple 2.18: Calculem els punts crítics de la funció $f(x) = x^3 - 12x - 5$ i determinem els intervals on és creixent o decreixent. El primer pas és trobar la derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3\,(x^2 - 4) = 3\,(x-2)(x+2)\,.$$

La derivada es fa zero en $x = -2$ i en $x = 2$. Aquests dos punts crítics divideixen el domini de la funció en tres intervals: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ i $(2, \infty)$. Podem agafar un punt qualsevol en cada interval i determinar si la funció és creixent o decreixent en aquest interval:

- $f'(-3) = 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ és creixent en $(-\infty, -2)$.
- $f'(0) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ és de decreixent en $(-2, 2)$.
- $f'(3) = 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ és creixent en $(2, \infty)$.

Comentari. Criteri de la primera derivada: El corol·lari 3 ens dona un criteri per a determinar extrems locals. Siga c un punt crític d'una funció contínua f i siga f derivable en tots els punts d'un interval que conté c, excepte possiblement en c. Determinem si c és un extrem local amb tres passos:

1. Si f' canvia de signe negatiu a positiu en c aleshores f té un mínim local en c.
2. Si f' canvia de signe positiu a negatiu en c aleshores f té un màxim local en c.
3. Si f' no canvia de signe en c aleshores f no té un extrem local en c.

Teorema 2.13: Teorema del valor mitjà de Cauchy

Siguen f i g dues funcions contínues en un interval tancat $[a, b]$ i derivable en tots els punts interiors d'aquest interval, amb $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Aleshores existeix almenys un $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Comentari: El teorema del valor mitjà de Cauchy es tracta d'una generalització del teorema del valor mitjà de Lagrange. De fet, si fem $g(x) = x$ en l'enunciat del teorema del valor mitjà de Cauchy, trobem el teorema del valor mitjà de Lagrange. Per aquesta raó, aquests teoremes s'anomenen també **teorema del valor mitjà** i **teorema del valor mitjà generalitzat**.

Demostració. En primer lloc demostrem que $g(a) \neq g(b)$. Suposem que $g(a) = g(b)$. Aleshores, pel teorema del valor mitjà de Lagrange ha d'existir un punt $c \in (a, b)$ on

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0 ,$$

i això contradiu que $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Aleshores $g(a) \neq g(b)$. A continuació considerem la funció

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a) \right) . \tag{2.35}$$

Aquesta funció és contínua i derivable en els intervals on f i g ho són. A més, $F(a) = F(b) = 0$. Per tant, podem aplicar-li el teorema de Rolle. Existeix un punt $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$. Aleshores, fent ús de l'equació (2.35), tenim

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 ,$$

i només resta aïllar el quocient que volem trobar:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

□

Definició 2.16: Concavitat

Siga una funció derivable f definida en un interval obert I.

- La gràfica de f és **còncava** en l'interval I si f' és creixent en I.
- La gràfica de f és **convexa** en l'interval I si f' és decreixent en I.

Aquesta propietat de la funció f, que pot ser còncava o convexa en un interval, s'anomena **concavitat**. De fet, els termes còncava cap a dalt (en lloc de còncava) i còncava cap a baix (en lloc de convexa) són també comuns.

Exemple 2.19: La gràfica de la funció $f(x) = x^3$ és convexa en $(-\infty, 0)$ i còncava en $(0, \infty)$.

Els resultats previs ens permeten establir un criteri operatiu senzill. El creixement o decreixement de la derivada pot determinar-se estudiant el signe de la segona derivada:

1. Si $f'' > 0$ en I, la gràfica de f és còncava.
2. Si $f'' < 0$ en I, la gràfica de f és convexa.

Definició 2.17: Punt d'inflexió

Siga f una funció contínua en $x = c$. Direm que el punt $(c, f(c))$ és un **punt d'inflexió** si i només si existeix un $\delta > 0$ tal que la gràfica de f té concavitat diferent en els intervals $(c - \delta, c)$ i $(c, c + \delta)$.

La concavitat d'una funció canvia en els seus punts d'inflexió.

Teorema 2.14

Si $(c, f(c))$ és un punt d'inflexió, aleshores o $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existeix.

Demostració. Aquest resultat és conseqüència directa del teorema del valor intermedi (teorema 1.19). Si la funció és contínua en c, el canvi de signe de la segona derivada implica que passa per zero. $\square$

Teorema 2.15: Criteri de la segona derivada

Siga una funció derivable f, amb f'' contínua en un interval que conté el punt $x = c$.

- Si $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, aleshores f té un màxim local en $x = c$.
- Si $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, aleshores f té un mínim local en $x = c$.

És important adonar-se que aquest teorema no especifica res per al cas $f''(c) = 0$.

Demostració. Si $f''(c) < 0$ aleshores $f''(x) < 0$ en algun interval obert que conté el punt c, ja que f'' és contínua. Per tant, f' és decreixent en I. Com que $f'(c) = 0$, el signe de f' canvia de positiu a negatiu en $x = c$. Per tant, el criteri de la primera derivada, f té un màxim local en c. La prova del cas amb $f''(c) > 0$ és completament anàloga. $\square$

Exemple 2.20: Considerem les funcions $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ i $h(x) = x^3$. Per als tres casos la segona derivada és zero en $x = 0$. No obstant això, en aquest punt f té un mínim local, g té un màxim local i h és creixent en qualsevol interval que continga $x = 0$ i, per tant, no té màxim ni mínim en $x = 0$. Aquestes tres funcions demostren que el teorema anterior no ens dona informació si $f''(c) = 0$.

Comentari: En comparació amb el criteri de la primera derivada, aquest teorema no requereix conèixer la funció en un entorn del punt c, sinó només en c. Això és un avantatge operatiu. Per contra, si $f''(c) = 0$ el teorema no ens dona cap informació, i hem de recórrer al criteri de la primera derivada.

Exemple 2.21: Siga la funció $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Volem trobar els seus extrems locals de dues maneres: amb el criteri de la primera derivada i amb el criteri de la segona derivada. Primer, calculem les derivades primera i segona

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2\,(x-3)\,, \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x = 12x\,(x-2)\,. \end{aligned}$$

Els punts crítics de la funció són les solucions a l'equació $f'(x) = 0$, és a dir, $x = 0$ i $x = 3$. Dividim el domini de la funció en tres regions, i estudiem el signe de la derivada en cada una:

- $f'(-1) = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ és decreixent en $(-\infty, 0)$.

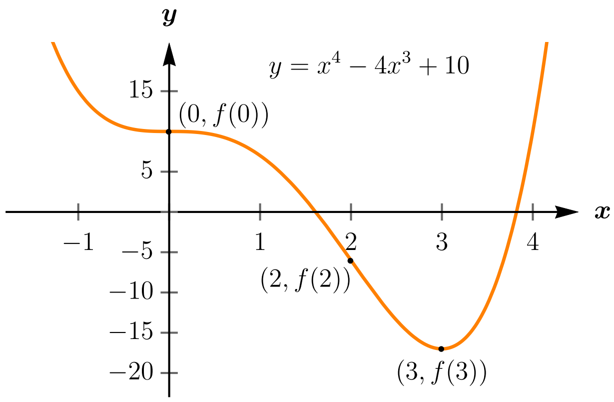
- $f'(1) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ és de decreixent en $(0, 3)$.

- $f'(4) = 64 > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ és creixent en $(3, \infty)$.

Aleshores, segons el criteri de la primera derivada, no hi ha un extrem en $x = 0$ i hi ha un mínim local en $x = 3$. Apliquem ara el criteri de la segona derivada. Tenim

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0\,, \\ f''(3) &= 36 > 0\,. \end{aligned}$$

Per tant, el criteri de la segona derivada no ens diu res sobre el punt $x = 0$ i ens diu que $x = 3$ és un mínim local, com havíem deduït amb el criteri de la primera derivada. Finalment, podem també trobar els punts d'inflexió de la funció. S'obtenen en resoldre l'equació $f''(x) = 0$ i, per tant, són $x = 0$ i $x = 2$. Aquests punts determinen on canvia la concavitat de la funció. Ací tenim la gràfica:



2.5 Regla de l'Hôpital

La regla de l'Hôpital s'anomena així pel matemàtic francès Guillaume François Antoine, Marquès de l'Hôpital, el qual donà a conèixer la regla en la seua obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), el primer text que es va escriure sobre càlcul diferencial. De tota manera, hom atribueix gran part del contingut d'aquest llibre (i aquest teorema en particular) a Johann Bernoulli, que tingué L'Hôpital com a alumne i, segons pareix, li va vendre alguns resultats perquè L'Hôpital els publicara amb el seu nom.

Teorema 2.16: Regla de l'Hôpital

Siguen dues funcions f i g, derivables en un interval obert I que conté el punt $x = a$, amb $g'(x) \neq 0 \; \forall x \neq a$ en I, i tals que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty \,.$$

Aleshores

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,,$$

si el límit $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existeix o és ∞ o $-\infty$.

Demostració. Demostrem primer el teorema per al cas en què els límits són zero. Suposem aleshores que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Definim les funcions

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\,, & x \neq a \\ 0\,, & x = a \end{cases} \quad , \quad G(x) = \begin{cases} g(x)\,, & x \neq a \\ 0\,, & x = a \end{cases}$$

La funció F és contínua en l'interval I, ja que f ho és $\forall x \neq a$ en I i

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 = F(a)\,.$$

De manera similar, G és contínua en I. Considerem un valor $x > a$ en l'interval I. Les funcions F i G són contínues en $[a,x]$ i derivables en (a,x). A més, $G' \neq 0$ en (a,x) ja que $g'(x) \neq 0$ $\forall x \neq a$ en I. Aleshores, es donen totes les condicions per a poder utilitzar el teorema del valor mitjà de Cauchy amb les funcions F i G en l'interval $[a,x]$. Existeix un y tal que $a < y < x$ i

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}\,. \tag{2.36}$$

Com que $a < y < x$, el límit quan $x \to a^+$ és equivalent al límit quan $y \to a^+$. Aleshores, podem escriure

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} \underset{\text{Eq.(2.36)}}{=} \lim_{y\to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

on en l'últim pas simplement hem fet un canvi del nom de la variable. Considerant valors $x < a$ i l'interval $[x,a]$ es pot demostrar un resultat anàleg per al límit per l'esquerra. La combinació dels dos resultats proven la regla de l'Hôpital quan els límits de les funcions f i g són zero. Demostrem ara el teorema per al cas en què els límits són infinits. Definim la variable $t = 1/x$, de manera que $x \to \infty$ implica $t \to 0^+$. Tenim

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}\,.$$

Ara fem servir la regla de l'Hôpital per a límits en un punt que acabem de demostrar:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(-1/t^2)\, f'(1/t)}{(-1/t^2)\, g'(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Cal adonar-se que en el primer pas hem derivat fent ús de la regla de la cadena. □

Comentari: La regla de l'Hôpital també és vàlida per a límits laterals, com resulta evident per la prova que hem fet.

Teorema 2.17: Regla de l'Hôpital per a límits a l'infinit

Siguen dues funcions f i g, derivables en l'interval (b,∞) amb $g'(x) \neq 0$ $\forall x > b$, i tals que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

o

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty\,.$$

Aleshores

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

si el límit $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existeix o és ∞ o $-\infty$. La mateixa regla és vàlida per a límits a $-\infty$.

Demostració. No demostrarem aquesta versió de la regla de l'Hôpital perquè fa ús de propietats fonamentals dels nombres reals que no estudiem en aquest curs. □

La regla de l'Hôpital és una eina molt poderosa per a resoldre indeterminacions de tipus $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ si les funcions f i g respecten les condicions del teorema. És fonamental comprovar que efectivament les condicions es verifiquen, o en cas contrari el teorema no és vàlid i l'aplicació de la regla de l'Hôpital dona lloc a resultats incorrectes.

Exemple 2.22: Volem calcular

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{x}\,.$$

Es tracta d'una indeterminació $\frac{0}{0}$ i la volem resoldre amb la regla de l'Hôpital. Primer comprovem si es donen les premisses del teorema. La continuïtat i derivabilitat de les funcions es dona, i a més

$$\lim_{x\to 0} [3x - \sin x] = 0\,, \quad \lim_{x\to 0} x = 0\,.$$

Aleshores, podem fer ús de la regla de l'Hôpital. Trobem

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3 - \cos x}{1} = 2\,,$$

on en l'últim pas simplement hem substituït el valor $x = 0$.

Exemple 2.23: Volem calcular

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}\,.$$

Es tracta de nou d'una indeterminació $\frac{0}{0}$ i podem fàcilment comprovar que es donen les condicions del teorema. Podem per tant aplicar la regla de l'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}\,.$$

El resultat és una altra indeterminació $\frac{0}{0}$ i comprovem que es verifiquen de nou les condicions per a tornar a aplicar la regla de l'Hôpital. Insistim en la importància de fer aquesta comprovació després de cada aplicació de la regla de l'Hôpital, per a evitar obtenir un resultat incorrecte. En aquest cas es verifiquen les condicions i, per tant, podem tornar a derivar numerador i denominador. De fet, apliquem la regla repetidament fins que el resultat ja no siga una indeterminació:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}\,.$$

Exemple 2.24: Volem calcular

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,.$$

De nou comprovem que es donen les condicions que fan vàlid el teorema. La continuïtat i derivabilitat de les funcions es dona, i a més

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{1+x^2} = \infty\,, \qquad \lim_{x \to \infty} x = \infty\,.$$

Aleshores tenim una indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$ i podem aplicar la regla de l'Hôpital. Trobem

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,. \tag{2.37}$$

Si tornem a derivar trobarem de nou el límit original i el nostre càlcul no progressa. Per això, ens aturem a analitzar el resultat que hem trobat. Per les propietats dels límits (teorema 1.5)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to \infty} f(x)}\,,$$

que en aquest cas implica

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{L}\,.$$

Aleshores, l'equació (2.37) és equivalent a

$$L = \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 1\,.$$

De les dues solucions possibles, $L = 1$ i $L = -1$, descartem la segona, ja que $\sqrt{1+x^2}$ i x tenen el mateix signe quan $x > 0$. Per tant, $L = 1$.

Comentari: Fins ara hem aplicat la regla de l'Hôpital a indeterminacions $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Si ens trobem indeterminacions d'altres tipus, podem fer operacions algebràiques bàsiques i aprofitar les propietats dels límits per a transformar-les en indeterminacions $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

- **Indeterminació $\mathbf{0 \cdot \infty}$:** Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$,
$$L = \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} \,.$$
- **Indeterminació $\mathbf{\infty - \infty}$:** Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$,
$$L = \lim_{x\to a} \left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}} \,.$$
- **Indeterminacions $\mathbf{0^0}$, $\mathbf{1^\infty}$ i $\mathbf{\infty^0}$:** Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, o si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, o si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x\to a} g(x) = 0$,
$$\begin{aligned} & L = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \\ \Rightarrow \quad & \ln L = \ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln \lim_{x\to a} f(x) \,. \end{aligned}$$

En tots els casos hem transformat la indeterminació original en una indeterminació diferent. Per exemple, en l'últim cas hem arribat a una indeterminació $0\cdot\infty$, que podem transformar de nou. L'objectiu és obtenir una indeterminació a la qual li puguem aplicar la regla de l'Hôpital.

Exemple 2.25: Volem resoldre la indeterminació $0\cdot\infty$
$$L = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\ln x \,.$$
Primer la transformem en $\frac{\infty}{\infty}$ i després apliquem la regla de l'Hôpital:
$$L = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/2x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-2\sqrt{x}\right) = 0 \,.$$

Exemple 2.26: Volem resoldre la indeterminació ∞^0
$$L = \lim_{x\to\infty} x^{1/x} \,.$$
Podem prendre logaritmes als dos costats de la igualtat. Trobem
$$\ln L = \ln \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \ln x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \,.$$
Ara podem calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, que és una indeterminació de tipus $\frac{\infty}{\infty}$, fent servir la regla de l'Hôpital:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \,.$$
En conclusió
$$\ln L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 1 \,.$$

2.6 Aproximació polinòmica de funcions

Definició 2.18: Aproximació lineal

Si f és una funció derivable en $x = a$, aleshores la funció

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

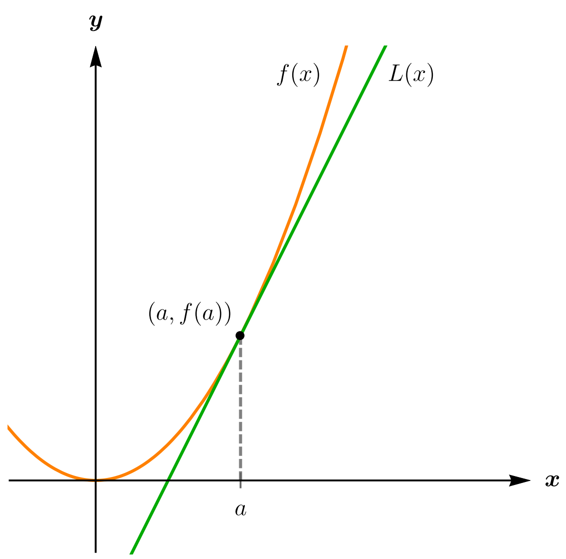
és una **linearització** de f en a. L'aproximació

$$f(x) \approx L(x)$$

de f mitjançant L és **l'aproximació lineal** de f en a. El punt $x = a$ s'anomena **centre** de l'aproximació.

Comentari 1: $f(a) = L(a)$ i $f'(a) = L'(a)$, però $f''(a)$ és en principi diferent de $L''(a) = 0$.

Comentari 2. Interpretació geomètrica: L'aproximació lineal d'una funció ens permet aproximar una funció complicada per una funció lineal, molt més senzilla, corresponent a la recta tangent en el centre de l'aproximació. Normalment, quan estudiem un punt proper al centre de l'aproximació, l'aproximació lineal és numèricament bona, però a mesura que ens allunyem, la funció i la recta tangent es distancien més, el que fa que l'aproximació siga cada vegada pitjor:



Exemple 2.27: Considerem la funció

$$f(x) = \sqrt{1 + x}\,,$$

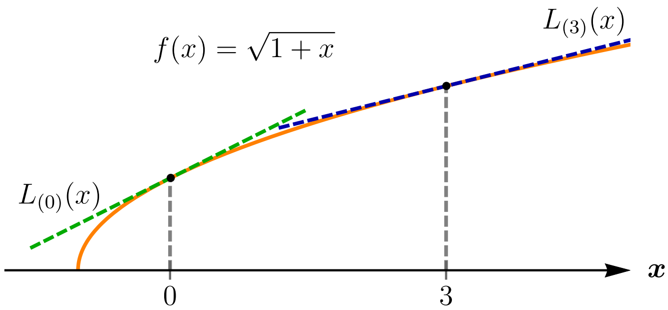
trobem la seua linearització en $x = 0$ i en $x = 3$ i estudiem l'aproximació lineal corresponent en cadascun d'aquests punts. Comencem calculant la derivada de la funció en $x = 0$ i en $x = 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(0) = \dfrac{1}{2} \\ \\ f'(3) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

I per tant, les funcions linearitzades, que denotem per $L_{(0)}$ i $L_{(3)}$, són

$$L_{(0)}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \frac{1}{2}\,x = 1 + \frac{x}{2}\,,$$
$$L_{(3)}(x) = f(3) + f'(3)(x-3) = 2 + \frac{1}{4}\,(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}.$$

Representem les gràfiques de la funció i de les dues rectes tangents que aproximen la funció en els punts $x = 0$ i en $x = 3$:



Per a comparar l'aproximació lineal i la funció, i d'aquesta manera avaluar la qualitat de l'aproximació, fem dues taules de valors. Primer, per a estudiar l'aproximació en $x = 0$:

x	$f(x)$	$L_{(0)}(x)$	$\lvert f(x) - L_{(0)}(x)\rvert$
0.005	1.002497	1.0025	0.000003
0.05	1.024695	1.025	0.0003
0.2	1.095445	1.1	0.0046
1.0	1.414214	1.5	0.086
2.0	1.732051	2.0	0.27

Veiem que prop de $x = 0$ l'aproximació és molt bona, però a mesura que ens allunyem d'aquest punt va empitjorant. En $x = 2$ la diferència entre la funció i la linearització és ja de pràcticament 0.27. Passem ara a estudiar l'aproximació en $x = 3$:

x	$f(x)$	$L_{(3)}(x)$	$\lvert f(x) - L_{(3)}(x)\rvert$
3.005	2.0012496	2.00125	0.0000004
3.05	2.0124612	2.0125	0.00004
3.2	2.0493902	2.05	0.0006
4.0	2.2360680	2.25	0.014
5.0	2.4494897	2.5	0.05

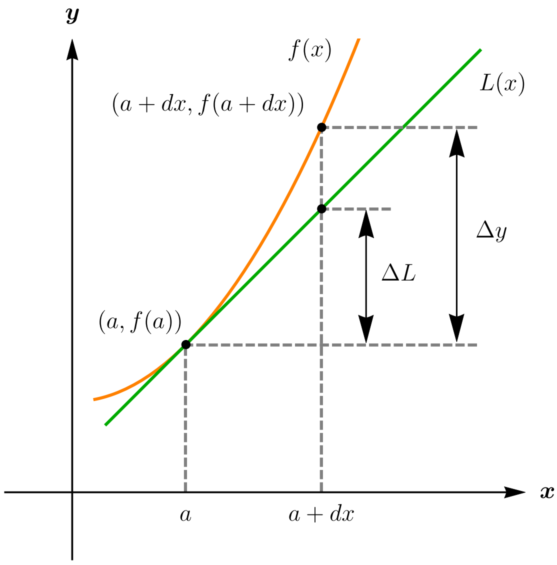
De nou, l'aproximació empitjora en allunyar-nos del centre, però notem que fins i tot en $x = 5$ continua sent relativament bona. Això concorda amb l'observat en la gràfica, en la qual pot apreciar-se que la tangent en $x = 3$ no es desvia molt de la funció fins que estem ben allunyats de $x = 3$.

Definició 2.19: Diferencial

Siga $y = f(x)$ una funció derivable. La **diferencial *dx*** és una variable independent. La **diferencial *dy*** és una variable dependent que s'obté com a

$$dy = f'(x)\, dx\,. \tag{2.38}$$

Fins ara, hem utilitzat a vegades la notació de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ per a representar la derivada d'una funció y respecte de x. Al contrari del que pot parèixer, no es tracta d'un quocient, però la notació de Leibniz com una fracció té una raó. Amb la definició dels diferencials dx i dy, si el seu quocient existeix, aleshores coincideix amb la derivada. La **interpretació geomètrica** del diferencial s'il·lustra en la figura següent:



Siga $x = a$. Si definim un increment $\Delta x = dx$, el canvi corresponent en la funció $y = f(x)$ és $\Delta y = f(a + dx) - f(a)$. Per altra banda, el canvi en la recta tangent pot calcular-se a partir de la linearització de la funció f,

$$\Delta L = L(a+dx) - L(a) = f(a) + f'(a)\,[(a+dx)-a] - f(a) = f'(a)\,dx\,.$$

Aleshores, el canvi en la linearització de la funció f quan fem un increment dx és precisament dy. El diferencial dy representa per tant la quantitat que augmenta o disminueix la recta tangent quan x canvia en una quantitat dx.

Notació: Si $y = f(x)$, és possible també denotar dy com a df.

Comentari: Totes les relacions i propietats de la derivada es verifiquen també per a diferencials, com és evident a partir de la seua definició. Per exemple, $d(u\,v) = u\,dv + v\,du$.

Exemple 2.28: Siga $y = x^3$, aleshores

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}\,dx = 3\,x^2\,dx\,.$$

En aquest exemple podem veure explícitament com la variable dependent dy és funció de les variables independents x i dx.

L'aproximació lineal és una eina molt útil per a simplificar càlculs. Si no estem interessats a obtenir un resultat amb una precisió alta, podem reemplaçar una funció per la seua linearització, i el resultat serà molt proper a l'exacte. La qüestió ara és: és possible millorar l'aproximació lineal?

Definició 2.20: Polinomi de Taylor

Siga f una funció amb derivades d'ordre $k = 1, 2, \ldots, N$ en algun interval I que conté el punt a com a punt interior. Aleshores, per a $n = 0, 1, \ldots, N$, el **polinomi de Taylor d'ordre *n*** generat per f en $x = a$ és el polinomi

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,. \qquad (2.39)$$

Comentari 1: El polinomi de Taylor d'ordre 1 d'una funció en un punt coincideix amb la seua linearització en aquest punt, $P_1(x) = L(x)$.

Comentari 2: La funció i el seu polinomi de Taylor d'ordre n en el punt $x = a$ tenen el mateix valor i les mateixes derivades fins a ordre n en $x = a$. És a dir, $f(a) = P_n(a)$ i $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$, per a $k = 1, 2, \ldots, n$. Ara bé, $f^{(n+1)}(a)$ és en principi diferent de $P_n^{(n+1)}(a) = 0$.

Comentari 3: El polinomi de Taylor d'ordre n en $x = a$ serà de grau $m < n$ si $f^{(n)}(a) = 0$.

Comentari 4: El polinomi de Taylor en $x = 0$ s'anomena també **polinomi de Maclaurin**. Es tracta, per tant, d'un cas particular del polinomi de Taylor.

Exemple 2.29: Determinem els polinomis de Taylor de la funció

$$f(x) = e^x$$

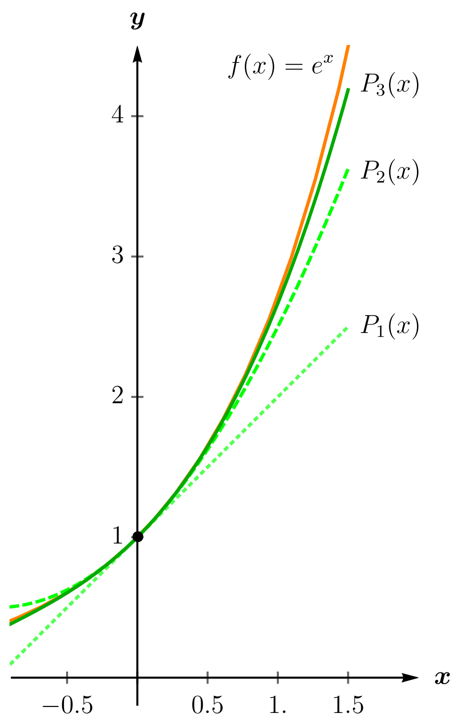
en $x = 0$. Aquest cas és molt senzill, ja que

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 1\,.$$

Aleshores, en aplicar la definició del polinomi de Taylor d'ordre n trobem

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\,,\\
P_1(x) &= 1 + x\,,\\
P_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,,\\
P_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\,,\\
&\vdots\\
P_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Com hem comentat, aquests polinomis també s'anomenen polinomis de Maclaurin de la funció $f(x) = e^x$. Podem finalment comparar les gràfiques dels polinomis P_1, P_2 i P_3 amb la funció f:



Podem veure com augmentar l'ordre fa que el polinomi de Taylor corresponent s'acoste més a la funció $f(x)$. De fet, el polinomi $P_3(x)$ dona una molt bona aproximació a la funció per a un rang de valors de x considerable. A més, tots els polinomis s'apropen a la funció quan x tendeix a 0 i, per contra, comencen a diferir d'ella quan ens allunyem d'aquest punt.

Exemple 2.30: Determinem els polinomis de Taylor de la funció

$$f(x) = \sin x$$

en $x = 0$. Fem derivades successives de la funció:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x\,, \\ f'(x) &= \cos x\,, \\ f''(x) &= -\sin x\,, \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x\,, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x\,, \\ f^{(5)}(x) &= \cos x\,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

i trobem les expressions generals

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x\,, \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x\,, \end{aligned}$$

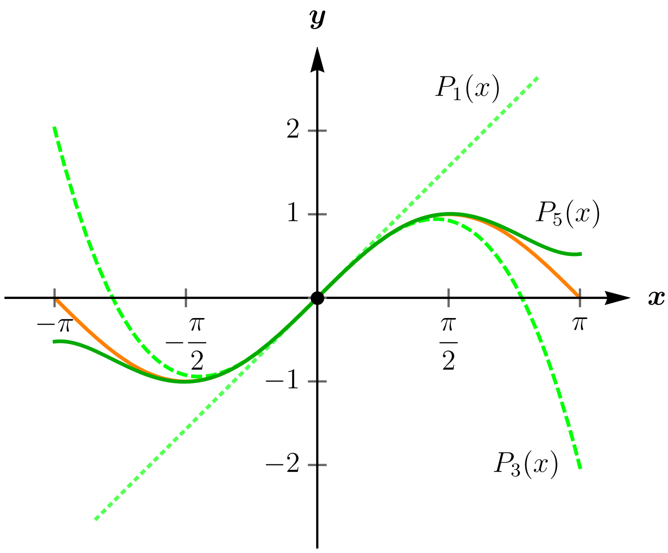
amb $k = 0, 1, \ldots$. Ara trobem els valors d'aquestes derivades en $x = 0$. Com que $\sin x = 0$ i $\cos x = 1$, tenim el resultat:

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= 0\,, \\ f^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k\,. \end{aligned}$$

Aleshores, els polinomis de Taylor de la funció $f(x) = \sin x$ en $x = 0$ són

$$\begin{aligned} P_0(x) &= f(0) = 0\,, \\ P_1(x) &= f(0) + f'(0)\,x = 0 + 1\cdot x = x\,, \\ P_2(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 0 + 1\cdot x + 0 = x\,, \\ P_3(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = 0 + 1\cdot x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3\,, \\ &\vdots \\ P_{2k+1}(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\,, \end{aligned}$$

i com que $f^{(2k+2)}(0) = 0$, aleshores $P_{2k+2}(x) = P_{2k+1}(x)$. De nou, comparem les gràfiques. En aquest cas, dels polinomis P_1, P_3 i P_5 amb la funció f:



La conclusió és la mateixa. Polinomis d'ordres més grans ens donen una millor aproximació a la funció, i tots s'apropen a la funció quan x s'apropa a $x = 0$. Per a acabar aquest exemple, cal fer una observació. La funció $f(x) = \sin x$ és imparella, $\sin(-x) = -\sin x$, i tots els seus polinomis de Maclaurin també, $P_n(-x) = -P_n(x)$, ja que només contenen potències imparelles de la variable x (x, x^3, x^5, ...).

Exemple 2.31: Determinem els polinomis de Taylor de la funció

$$f(x) = \cos x$$

en $x = 0$. Amb un procediment similar al de l'exemple previ, trobem

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= f(0) = 1\,,\\
P_1(x) &= f(0) + f'(0)\,x = 1 + 0 = 1\,,\\
P_2(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + 0 - \frac{1}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2\,,\\
P_3(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = 1 + 0 - \frac{1}{2!}x^2 + 0 = 1 - \frac{1}{2}x^2\,,\\
&\vdots\\
P_{2k}(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\,,
\end{aligned}$$

amb $k = 0, 1, \ldots$. En aquest cas, la funció $f(x) = \cos x$ és parella, $\cos(-x) = \cos x$, i tots els seus polinomis de Maclaurin també, $P_n(-x) = P_n(x)$, ja que només contenen potències parelles de la variable x (x^0, x^2, x^4, ...).

Exemple 2.32: Determinem els polinomis de Taylor de la funció

$$f(x) = \ln x$$

en $x = 1$. Com en els exemples anteriors, hem de començar fent les derivades successives de la funció:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \,, \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \,, \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \,, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} \,, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} \,, \\ f^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5} \,, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n} \,, \end{aligned}$$

i per tant, en el punt $x = 1$,

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \,, \\ f'(1) &= 1 \,, \\ f''(1) &= -1 \,, \\ f^{(3)}(1) &= 2 \,, \\ f^{(4)}(1) &= -6 \,, \\ f^{(5)}(1) &= 24 \,, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(1) &= (-1)^{n+1} (n-1)! \,. \end{aligned}$$

Amb aquesta informació podem escriure els polinomis de Taylor de $\ln x$ en $x = 1$:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= f(1) = 0 \,, \\ P_1(x) &= f(1) + f'(1)\,(x-1) = 0 + 1\,(x-1) = x - 1 \,, \\ P_2(x) &= f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 0 + 1\,(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 \,, \\ P_3(x) &= f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 0 + 1\,(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \,, \\ &\vdots \\ P_n(x) &= 1\,(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \,. \end{aligned}$$

Per a concloure l'exemple, hem d'adonar-nos que la funció $\ln x$ no té polinomis de Taylor en $x = 0$, ja que les seues derivades no existeixen en aquest punt. Ara bé, sí que podríem haver proposat obtenir els polinomis de Taylor de $\ln(x + 1)$ en $x = 0$, ja que en aquest cas sí que existeixen les derivades. Amb els resultats obtinguts podem trobar-los sense necessitat de calcular-los explícitament, simplement fent un canvi de variable $x - 1 = y$ en els polinomis de Taylor per a $\ln x$. Per exemple,

$$y - \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{3}\, y^3$$

és el polinomi de Taylor d'ordre 3 de $\ln(y + 1)$ en $y = 0$.

Comentari: Hem vist en aquests exemples que podem aproximar les funcions considerades usant els seus polinomis de Taylor. La qualitat de l'aproximació depèn de l'ordre del polinomi i de com de prop estiguem del punt en què s'obté. No obstant això, no sabem per què funciona aquest procediment ni com serà de bona l'aproximació. Això ens ho diu el **teorema de Taylor**.

Teorema 2.18: Teorema de Taylor

Siga f una funció derivable $n+1$ vegades en l'interval obert (a, b) amb $f^{(n)}$ contínua en $[a, b]$. Aleshores existeix un $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \,. \tag{2.40}$$

Demostració. Suposem $a < b$. El polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ en $x = a$, $P_n(x)$, i les seues primeres n derivades, coincideixen amb la funció i les seues primeres n derivades en $x = a$. Aquest fet no canvia si afegim un term de la forma $K\,(x - a)^{n+1}$, amb K una constant, ja que aquest terme i les seues primeres n derivades són 0 en $x = a$. Definim, per tant, la nova funció

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K\,(x - a)^{n+1} \,.$$

La funció ϕ_n i les seues primeres n derivades coincideixen amb f i les seues primeres n derivades en $x = a$. Escollim un valor particular per a la constant K. En particular, escollim el valor que fa que la funció $\phi_n(x)$ coincidisca amb la funció $f(x)$ en $x = b$. És a dir

$$f(b) = P_n(b) + K\,(b - a)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b - a)^{n+1}} \,. \tag{2.41}$$

Definim ara la funció

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x) \,,$$

que mesura la diferència entre la funció original f i ϕ_n en l'interval $[a,b]$. Pel valor que hem escollit per a la constant K, tenim que $F(a) = F(b) = 0$. A més, F i F' són contínues en $[a,b]$ ja que tant f com ϕ_n ho són. Aleshores, podem fer ús del teorema de Rolle (teorema 2.11) i determinar que

$$\exists\, c_1 \in (a,b) \quad \text{tal que} \quad F'(c_1) = 0\,.$$

Ara, com que $F'(a) = F'(c_1) = 0$ i F' i F'' són contínues en $[a,c_1]$, sabem que

$$\exists\, c_2 \in (a,c_1) \quad \text{tal que} \quad F''(c_2) = 0\,.$$

Podem ara aplicar el teorema de Rolle de manera successiva a F'', $F^{(3)}$, ..., $F^{(n-1)}$ per a determinar que

$$\begin{aligned} \exists\, c_3 \in (a,c_2) &\quad \text{tal que} \quad F^{(3)}(c_3) = 0\,, \\ \exists\, c_4 \in (a,c_3) &\quad \text{tal que} \quad F^{(4)}(c_4) = 0\,, \\ &\vdots \\ \exists\, c_n \in (a,c_{n-1}) &\quad \text{tal que} \quad F^{(n)}(c_n) = 0\,. \end{aligned}$$

Finalment, com que $F^{(n)}$ és contínua en $[a,c_n]$ i derivable en (a,c_n), i $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$, el teorema de Rolle implica que existeix un c_{n+1} tal que

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0\,. \tag{2.42}$$

Si derivem $F(x) = f(x) - P_n(x) - K\,(x-a)^{n+1}$ un total de $n+1$ vegades obtenim

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n+1)!\,K\,. \tag{2.43}$$

Per tant, al combinar les equacions (2.42) i (2.43), deduïm

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \tag{2.44}$$

amb $c = c_{n+1}$ un valor en (a,b). Si finalment combinem aquest resultat amb l'equació (2.41) trobem

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,.$$

$\square$

Comentari: Prenent $n = 0$ en el teorema de Taylor recuperem el teorema del valor mitjà de Lagrange (teorema 2.13). Per tant, el teorema de Taylor és una generalització del teorema del valor mitjà de Lagrange.

Normalment apliquem el teorema de Taylor fixant a i deixant b com una variable independent. Per tant, és útil escriure el teorema de Taylor de la següent forma completament equivalent.

Teorema 2.19: Teorema de Taylor

Siga f una funció derivable $n+1$ vegades en un interval obert I que conté el punt a. Aleshores, per a cada $n \in \mathbb{N}$ i $\forall x \in I$, existeix un valor c entre a i x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,, \tag{2.45}$$

on $P_n(x)$ és el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ en $x = a$ i

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,. \tag{2.46}$$

La funció $R_n(x)$ s'anomena **residu**, **resta** o **error**, i mesura la diferència entre la funció i el polinomi de Taylor,

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|\,.$$

Si $R_n(x)$ té un valor menut, l'aproximació $f(x) \approx P_n(x)$ és bona. Es coneixen diverses formes per al residu. La versió del teorema de Taylor que hem donat fa ús d'una forma per al residu, l'equació (2.46), que s'anomena **forma de Lagrange del residu**. És molt important destacar que, en general, no coneixem el residu, ja que aquest depèn del valor de la derivada $n+1$ de la funció f en un punt c desconegut. Ara bé, en alguns casos podrem trobar una fita per al residu, i d'aquesta manera estimar la qualitat de l'aproximació de la funció pel polinomi de Taylor. Ressaltem també que el punt c depèn del valor de x. Ara bé, per la continuïtat de la funció $f^{(n+1)}$ sabem que $\lim_{x\to a} f^{(n+1)}(c)$ té un valor finit i, per tant,

$$\lim_{x\to a} R_n(x) \underset{\text{Eq.(2.46)}}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0\,.$$

Aquest resultat explica el que havíem observat en els exemples 2.29 i 2.30. Tots els polinomis s'apropen a la funció quan x s'apropa al valor $x = a$. A més, també trobem que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) = 0\,,$$

i això significa que la funció $R_n(x)$ tendeix a 0 més ràpidament que $(x-a)^n$. Esperem aleshores que, en general, l'aproximació de la funció per un polinomi de Taylor siga millor quan el seu ordre, n, siga més gran.

Comentari: En els exemples 2.29 i 2.30 vam veure que l'aproximació millora si augmentem l'ordre del polinomi. Estudiarem el límit $n \to \infty$ en el Tema 4, quan fem l'extensió del polinomi de Taylor a la sèrie de Taylor.

Exemple 2.33: Volem calcular el nombre e de manera aproximada. En l'exemple 2.29

calculàrem els polinomis de Taylor per a la funció $f(x) = e^x$ en $x = 0$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \,. \tag{2.47}$$

Particularitzant l'equació (2.47):

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 1 + x \,, \\
P_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} \,, \\
P_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \,, \\
P_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \,.
\end{aligned}$$

Obtinguem una aproximació per al nombre e a partir de polinomis de Taylor d'ordre 1, 2 i 4. D'aquesta manera veurem com varia l'error comès en el càlcul amb l'ordre del polinomi utilitzat.

- Ordre $n = 1$.

A ordre $n = 1$, determinem la següent aproximació per al nombre e:

$$e \approx P_1(1) = 2 \,.$$

Ara volem trobar una fita per al residu i d'aquesta manera saber l'error més gran que podem estar fent amb aquesta aproximació. Calculem el residu d'ordre 1. A partir de l'equació (2.46),

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(c)}{2!} x^2 = \frac{e^c}{2} x^2 \quad \Rightarrow \quad R_1(1) = \frac{e^c}{2} \,,$$

amb $0 < c < 1$. Insistim que no és possible calcular el residu ja que c és un nombre desconegut. Ara bé, sí que podem trobar una fita superior per a $R_1(1)$. Per a fer això, necessitem alguna informació sobre $f^{(2)}(c) = e^c$. En aquest podem aprofitar que sabem que la funció e^x és creixent i, per tant, $e^c < e$, ja que $c < 1$. Aleshores

$$R_1(1) = \frac{e^c}{2} < \frac{e}{2} \,,$$

és a dir, l'error de la nostra aproximació és menor que $e/2$. Això ens permet trobar una fita superior per al nombre e:

$$R_1(1) = f(1) - P_1(1) = e - 2 < \frac{e}{2} \quad \Rightarrow \quad e < 4 \,.$$

A més, podem trobar una altra fita per al nombre e, en aquest cas inferior. Com que la funció exponencial no es fa mai zero, sabem que $e^c > 0$. Això significa que $R_1(1) > 0$ i aleshores

$$R_1(1) = f(1) - P_1(1) = e - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad e > 2 \,.$$

En conclusió:

$$2 < e < 4\,.$$

Curiosament, hem trobat $e > 2$ i, per tant, la nostra aproximació $e \approx 2$ no pot ser perfecta, ja que en aquest cas el residu és una quantitat estrictament positiva.

- Ordre $n = 2$.

Ara repetim el procediment previ amb un polinomi de Taylor d'ordre $n = 2$. Trobem primer el resultat aproximat,

$$e \approx P_2(1) = 2.5\,.$$

El residu d'ordre 2 és

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{e^c}{6}x^3 \quad \Rightarrow \quad R_2(1) = \frac{e^c}{6}\,,$$

amb $0 < c < 1$. De nou, com que $e^c < e$, sabem que

$$R_2(1) = f(1) - P_2(1) = e - 2.5 < \frac{e}{6} \quad \Rightarrow \quad e < 3\,.$$

I a partir de $R_2(1) > 0$ deduïm de nou que $e > 2.5$. Aleshores, trobem l'interval per al nombre e

$$2.5 < e < 3\,.$$

Podem veure que hem reduït substancialment l'interval en el qual sabem que es troba el nombre e.

- Ordre $n = 4$.

Finalment, repetim el procediment amb un polinomi de Taylor d'ordre $n = 4$. El primer pas, de nou, és avaluar el polinomi en $x = 1$:

$$e \approx P_4(1) = 2.70833\,.$$

El residu d'ordre 4 és

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5 = \frac{e^c}{120}x^5 \quad \Rightarrow \quad R_4(1) = \frac{e^c}{120}\,,$$

amb $0 < c < 1$. De nou, com que $e^c < e$, obtenim la fita

$$R_4(1) = f(1) - P_4(1) = e - 2.70833 < \frac{e}{120} \quad \Rightarrow \quad e < 2.73109\,.$$

I a partir de $R_4(1) > 0$ deduïm de nou que $e > 2.70833$. Aleshores, trobem l'interval per al nombre e

$$2.70833 < e < 2.73109\,.$$

Recordem, que $e = 2.71828\ldots$. Si repetim aquest mateix procediment amb ordres superiors aconseguirem reduir encara més l'interval, i fitar el nombre e cada vegada més. De fet, augmentant l'ordre podem obtenir e amb la precisió que es desitge.

Exemple 2.34: En l'exemple previ hem vist com fitar l'error de la nostra aproximació per al nombre e per a tres valors particulars de n. El que volem fer ara és determinar fins a quin ordre n hem d'arribar per a garantir que l'error siga igual o menor que 10^{-4}. En general, el residu d'ordre n en el cas d'un polinomi de Taylor centrat en $a = 0$ és

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \,.$$

En el cas de la funció exponencial tenim $f^{(n+1)}(x) = e^x$ i per tant $f^{(n+1)}(c) = e^c$. Si a més considerem el valor $x = 1$, obtenim la fórmula general

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \,,$$

amb $0 < c < 1$. Ara, en l'exemple previ vam raonar que $e^c < e$, ja que e^x és una funció creixent. A més, en el cas amb $n = 1$ vam trobar el resultat $e < 4$. Aleshores, $e^c < e < 4$ i una possible fita per al residu d'ordre n en $x = 1$ seria

$$R_n(1) < \frac{4}{(n+1)!} \,. \tag{2.48}$$

L'objectiu era calcular el nombre e amb un error igual o menor que 10^{-4}. Per tant, donem successivament valors $n = 1, 2, 3, \ldots$ en l'equació (2.48) i determinem com varia la fita sobre $R_n(1)$ amb l'ordre n:

$$\begin{aligned}
R_1(1) &< \frac{4}{2!} = 2 > 10^{-4} \,, \\
R_2(1) &< \frac{4}{3!} = \frac{2}{3} > 10^{-4} \,, \\
R_3(1) &< \frac{4}{4!} = \frac{1}{6} > 10^{-4} \,, \\
R_4(1) &< \frac{4}{5!} = \frac{1}{30} > 10^{-4} \,, \\
R_5(1) &< \frac{4}{6!} = \frac{1}{180} > 10^{-4} \,, \\
R_6(1) &< \frac{4}{7!} = \frac{1}{1260} > 10^{-4} \,, \\
R_7(1) &< \frac{4}{8!} = \frac{1}{10080} < 10^{-4} \,.
\end{aligned}$$

Aleshores, per a estar segurs d'obtenir el nombre e amb un error igual o menor que 10^{-4} és necessari arribar a ordre $n = 7$. Podem comprovar-ho. Tenim

$$e \approx P_7(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2.71825 \,.$$

I com que $e = 2.71828\ldots$, si comparem el resultat exacte amb l'aproximat,

$$|2.71828 - 2.71825| = 0.0000279 < 10^{-4}\,,$$

la diferència és menor que 10^{-4}, com volíem.

Exemple 2.35: Volem calcular $\sqrt{1.2}$ amb un error igual o menor que 10^{-4}. Primer, definim la funció

$$f(x) = \sqrt{1+x}\,,$$

de manera que $\sqrt{1.2} = f(0.2)$. És important destacar que no hem utilitzat la funció $\sqrt{x}$ perquè les seues derivades no existeixen en $x = 0$, i aleshores no podem trobar el seu polinomi de Taylor en $x = 0$. Sí que podríem haver considerat el seu polinomi de Taylor en $x = 1$, però fent un canvi de variable $y = x + 1$ resulta evident que això és completament equivalent a considerar la funció $f(x) = \sqrt{1+x}$ en $x = 0$. Continuem aleshores amb $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Calculem les seues derivades,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{1/2}\,,\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{1/2-1}\,,\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{1/2-2}\,,\\
f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+x)^{1/2-3}\,,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{1/2-n}\,,
\end{aligned}$$

que en $x = 0$ prenen els valors

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1\,,\\
f'(0) &= \frac{1}{2}\,,\\
f''(0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\,,\\
f^{(3)}(0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\,,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)\,.
\end{aligned}$$

Podem reescriure $f^{(n)}(x)$ fent manipulacions senzilles del producte

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-2}{2}\right)\left(\frac{1-4}{2}\right)\dots\left(\frac{1-2(n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\left[1\cdot 3\dots(2(n-1)-1)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}(-1)^{n+1}\, I_n\,,
\end{aligned}$$

on

$$I_n = \prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

és el producte dels primers $n-1$ nombres imparells. Per tant

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\, I_n\,(1+x)^{1/2-n}\,, \\
f^{(n)}(0) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\, I_n\,,
\end{aligned}$$

i podem escriure els polinomis de Taylor

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= f(0) = 1\,, \\
P_1(x) &= f(0) + f'(0)\,x = 1 + \frac{1}{2}x\,, \\
P_2(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\,, \\
P_3(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3\,, \\
&\vdots \\
P_n(x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n\, n!} I_n\, x^n\,.
\end{aligned}$$

Per a l'expressió del residu d'ordre n necessitem la derivada d'ordre $n+1$ de la funció,

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}}\, I_{n+1}\,(1+x)^{-n-1/2}\,,$$

i aleshores, amb la forma del residu de Lagrange en l'equació (2.46),

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+1}\,(n+1)!}\, I_{n+1}\,(1+c)^{-n-1/2}\,x^{n+1}\,,$$

per a un cert valor de c, amb $0 < c < x$. Si ara particularitzem per a $x = 0.2$ i prenem el mòdul, tenim

$$|R_n(0.2)| = \frac{I_{n+1}\,(1+c)^{-n-1/2}\,0.2^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}\,,$$

per a un cert valor de c, amb $0 < c < 0.2$. En l'expressió obtinguda apareix el factor $(1+c)^{-n-1/2}$. Com que $c > 0$, $1+c > 1$, i aleshores $(1+c)^{-n-1/2} < 1$. Això ens permet trobar una fita per al residu en 0.2:

$$|R_n(0.2)| < \frac{I_{n+1}\, 0.2^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}\,. \tag{2.49}$$

L'objectiu era calcular $\sqrt{1.2}$ amb un error menor que 10^{-4}. Per tant, donem successivament valors $n = 1, 2, 3, \ldots$ en l'equació (2.49) i determinem com varia la fita amb l'ordre:

$$\begin{aligned}
|R_1(0.2)| &< \frac{I_2\, 0.2^2}{2^2\, 2!} = 0.005 > 10^{-4}\,,\\
|R_2(0.2)| &< \frac{I_3\, 0.2^3}{2^3\, 3!} = 0.0005 > 10^{-4}\,,\\
|R_3(0.2)| &< \frac{I_4\, 0.2^4}{2^4\, 4!} = 0.0000625 < 10^{-4}\,.
\end{aligned}$$

Aleshores, per a estar segurs d'obtenir $\sqrt{1.2}$ amb un error menor que 10^{-4} és necessari arribar a ordre $n = 3$. Tenim

$$\sqrt{1.2} \approx P_3(0.2) = 1 + \frac{1}{2}0.2 - \frac{1}{8}0.2^2 + \frac{1}{16}0.2^3 = 1.0955\,.$$

En efecte, si mirem el valor exacte, $\sqrt{1.2} = 1.095445$, i comparem amb el nostre resultat aproximat

$$|1.095445 - 1.0955| = 0.000055\,,$$

la diferència és menor que 10^{-4}, com volíem.

Comentari: Com hem vist, necessitem informació sobre $f^{(n+1)}$ per a fitar el residu i estimar la qualitat de la nostra aproximació. En l'exemple 2.33 hem utilitzat que el residu era estrictament positiu per a obtenir una fita inferior per al nombre e, però podríem haver imposat una fita més fort. Com que $0 < c < 1$, $e^c > e^0 = 1$ i, per tant, el residu d'ordre n és necessàriament més gran que $1/(n+1)!$. Aquesta restricció sobre el residu és un poc més forta que dir simplement que és positiu. Aleshores, hauríem trobat una fita inferior per al nombre e un poc més alta. Ambdues fites són correctes, però una és més restrictiva que l'altra, i per tant *millor* si volem trobar un resultat numèric precís. En l'exemple 2.35, $f^{(n+1)}$ no tenia signe definit, i per tant hem pres el mòdul per a establir les fites. Això s'ha traduït en fites inferior i superior. En general, la fita sobre el residu depèn essencialment del nostre coneixement sobre la funció.

Teorema 2.20: Estimació del residu

Si la derivada $n+1$ de la funció f satisfà

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

per a tot t en un interval que conté el punt a, aleshores per a tot x en aquest interval tenim

$$m\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq M\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad \text{si } x > a\,,$$

i

$$m\,\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} R_n(x) \leq M\,\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\,, \quad \text{si } x < a\,.$$

Demostració. La demostració és immediata a partir de l'expressió del residu en l'equació (2.46) i és òbvia després dels dos exemples que hem vist. A més, la segona desigualtat pot demostrar-se fàcilment a partir de la primera. □

Definició 2.21: Notació $\mathcal{O}$

Escriurem

$$f(x) = \mathcal{O}(u(x))$$

quan $x \to a$ si es verifica $|f(x)| \leq K\,|u(x)|$ per a alguna constant K en algun interval obert que conté $x = a$. De manera similar,

$$f(x) = g(x) + \mathcal{O}(u(x))$$

quan $x \to a$ significa que $|f(x) - g(x)| \leq K\,|u(x)|$ per a alguna constant K en algun interval obert que conté $x = a$.

Si $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ quan $x \to a$, direm que $\boldsymbol{f(x)}$ **és d'ordre** $\boldsymbol{u(x)}$ **quan** $\boldsymbol{x \to a}$. Aquesta notació es fa servir amb molta freqüència per a descriure el comportament d'una funció en un cert límit comparant-la amb una altra funció coneguda.

Exemple 2.36: La funció $f(x) = 4\,x^2$ verifica

$$4\,x^2 = \mathcal{O}(x^2)$$

quan $x \to 0$, ja que, trivialment, $|4x^2| \leq K\,|x^2|$ és cert $\forall x$ en un interval obert que conté $x = 0$ si escollim $K = 4$. Ara bé, $4\,x^2 \neq \mathcal{O}(x^3)$, ja que no podem trobar cap constant K que garantisca $|4x^2| \leq K\,|x^3|$ $\forall x$ en un interval que conté $x = 0$. Per a qualsevol K que escollira, sempre podria trobar un valor de x prou prop de zero que fera que $K\,|x^3| < |4x^2|$. En general, $C\,x^n = \mathcal{O}(x^n)$, si C és una constant.

Exemple 2.37: Com ja sabem, el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció e^x en $x = 0$ és

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Pel que hem vist en l'exemple anterior, podem escriure, per exemple,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\,,$$

per a denotar que l'error d'ordre 2 és d'ordre x^3, és a dir, que el mòdul del residu d'ordre 2 és menor que una certa constant multiplicada per x^3 si x està prou prop de 0. En general, el teorema de Taylor ens diu que si P_n és un polinomi de Taylor d'ordre n en $x = a$, aleshores

$$f(x) = P_n(x) + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})\,.$$

3

Integració

És impossible ser matemàtic sense ser un poeta de l'ànima.
— Sofia Kovalévskaya

3.1 La integral indefinida

Definició 3.1: Funció primitiva

Una funció $F(x)$ és la **primitiva** de la funció $f(x)$ en l'interval (a, b) si $F(x)$ és derivable en (a, b) i $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$.

La funció primitiva de la funció f també s'anomena l'antiderivada de f.

Exemple 3.1: $F(x) = x^2 + \sin x$ és la primitiva de $f(x) = 2x + \cos x$ en $\mathbb{R}$, ja que $F'(x) = f(x)$.

Comentari: Si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$ en un interval (a, b), aleshores qualsevol funció $G(x) = F(x) + C$, amb C una constant, també és primitiva de $f(x)$ en aquest interval. Aquest resultat és conseqüència del corol·lari 2 del teorema 2.12 (el teorema del valor mitjà de Lagrange). Per tant, la primitiva és una família de funcions $F(x)+C$.

Definició 3.2: Integral indefinida

El conjunt de totes les primitives de la funció f s'anomena **integral indefinida** de f respecte de x, i es denota com a

$$\int f(x)\, dx\,.$$

$\int$ és el **signe integral**, la funció f s'anomena **integrand** i x és la **variable d'integració**.

Exemples 3.2:

1. $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C.$

2. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

3. $\displaystyle\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \sin x + C.$

Teorema 3.1: Propietats de la integral indefinida

Siguen f i g dues funcions derivables i $K \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores

(i) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int K\,f(x)\,dx = K \int f(x)\,dx.$

(iii) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x).$

(iv) $\displaystyle\int f'(x)\,dx = \int df = f(x) + C.$

Demostració. Les demostracions d'aquestes propietats són trivials a partir de la definició de primitiva i les propietats de les derivades (teorema 2.3). Si F i G són les primitives de f i g, respectivament, aleshores:

(i) $\displaystyle\frac{d}{dx}(F(x) \pm G(x) + C) = f(x) \pm g(x)$
$$\Rightarrow \quad \int (f(x) \pm g(x))\,dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

(ii) $\displaystyle\frac{d}{dx}(K\,F(x) + C) = K\,f(x) \quad \Rightarrow \quad \int K\,f(x)\,dx = K\,F(x) + C = K \int f(x)\,dx.$

(iii) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\,(F(x) + C) = f(x).$

(iv) $\displaystyle\frac{d}{dx}(f(x) + C) = f'(x) \quad \Rightarrow \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C.$

La propietat (iv) ens diu que una funció derivable f és la primitiva de la seua derivada f'. En el seu enunciat hem fet servir la definició de diferencial d'una funció (definició 2.19). □

Anomenarem **integrals immediates** les que resulten evidents perquè l'integrand és la derivada d'una funció coneguda. En particular, recordem la llista de derivades de funcions elementals del teorema 2.4. A partir d'ella i de les propietats bàsiques de les integrals indefinides podem elaborar una llista d'integrals immediates.

Teorema 3.2: Integrals immediates

Siguen $a, p \in \mathbb{R}$ constants. Aleshores:

(i) $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, $p \neq -1$.

(ii) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

(iii) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$.

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

(vii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

(viii) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a \neq 1$.

(ix) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$.

(x) $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$.

(xi) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$.

(xii) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$.

(xiii) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$.

(xiv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$.

(xv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$, $a > 0$.

(xvi) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C,\ a>0.$

(xvii) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|,\ a\neq 0.$

Demostració. Les integrals immediates són trivials a partir del teorema 2.4. Les úniques excepcions són les integrals dels casos (v) i (xiv), que poden trobar-se derivant el resultat i fent ús de la regla de derivació d'un quocient. En les últimes tres integrals hem donat dues formes per a la primitiva, amb expressions alternatives per a les funcions hiperbòliques inverses

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,, \\
\operatorname{arccosh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geq 1\,, \\
\operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ |x|<1\,,
\end{aligned}$$

que poden deduir-se a partir de les definicions en l'equació (B.13). Amb aquestes expressions, i absorbint $\ln a$ en la constant d'integració C, trobem les integrals immediates (xv)-(xvii). □

El càlcul d'una primitiva té sovint l'objectiu d'arribar a una expressió per a l'integrand que permeta utilitzar les integrals immediates del teorema 3.2.

3.2 Tècniques d'integració

Si bé és en general possible obtenir la derivada d'una funció usant les regles de derivació de manera *mecànica*, trobar una primitiva pot no resultar gens evident, i caldre usar mètodes molt laboriosos per a trobar la funció buscada.

Integració immediata

Les integrals indefinides més senzilles de calcular són les que es resolen per aplicació directa de la llista d'integrals immediates del teorema 3.2. A vegades és necessari fer alguna manipulació prèvia.

I1.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\,.
\end{aligned}$$

I2.

$$\int \frac{dx}{3x^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + C = \frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + C\,.$$

I3. Volem calcular la integral

$$I = \int \frac{a\,x+b}{\alpha\,x+\beta}\,dx\,,$$

però abans hem de preparar l'integrand:

$$\frac{ax+b}{\alpha x+\beta} = \frac{a}{\alpha}\left[\frac{x+\left(\frac{b}{a}\right)}{x+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right] = \frac{a}{\alpha}\left[\frac{x+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)}{x+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\right] = \frac{a}{\alpha}\left[1+\frac{A}{x+B}\right]\,,$$

amb

$$A = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)\,,$$
$$B = \frac{\beta}{\alpha}\,.$$

Aleshores, després d'aquestes manipulacions, la integral resultant ja és immediata:

$$I = \frac{a}{\alpha}\int\left(1+\frac{A}{x+B}\right)dx = \frac{a}{\alpha}\,\left(x + A\,\ln|x+B|\right) + C\,.$$

Mètode del canvi de variable

El mètode del canvi de variable és una de les tècniques més habituals per al càlcul de primitives i es fonamenta en el teorema següent.

Teorema 3.3: Regla de substitució

Si $t = g(x)$ és una funció derivable amb rang R_g i f és contínua en R_g, aleshores

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\,.$$

Demostració. Siga F la primitiva de f. Per aplicació de la regla de la cadena trobem

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)\,.$$

Aleshores, fent servir la propietat (iv) del teorema 3.1:

$$\begin{aligned}\int f(g(x))\, g'(x)\, dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))\, dx \underset{\text{P(iv)}}{=} F(g(x)) + C \\ &= F(t) + C \underset{\text{P(iv)}}{=} \int F'(t)\, dt = \int f(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

□

Comentari 1: La continuïtat de la funció f garanteix l'existència de la primitiva F, com veurem en la secció 3.4.

Comentari 2: La regla de substitució es pot entendre com una aplicació de la definició de diferencial d'una funció (definició 2.19). Tenim $g'(x)\, dx = dg$, i com que $g = t$, aleshores $f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g)\, dg = f(t)\, dt$.

Comentari 3: En molts casos, la regla de substitució s'aplica de forma implícita, sense fer explícit el canvi de variable. Per exemple, en l'últim pas del càlcul de la integral 1 estem fent el canvi de variable $t = x + 1$.

La regla de substitució es tradueix en el **mètode del canvi de variable**. Suposem la integral indefinida

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx\,,$$

on f i g són funcions contínues. Podem avaluar-la en tres passos:

1. Definim la nova variable $t = g(x)$, tal que $dt = g'(x)\, dx$ i substituïm l'integrand per $f(t)\, dt$.
2. Integrem respecte de t.
3. Reemplacem t per $g(x)$ en el resultat.

En la pràctica, no sempre apareixerà explícitament en l'integrand la derivada de la funció g. Per exemple, si la integral original s'escriu com a

$$\int f(g(x))\, dx\,,$$

també podem definir $t = g(x)$ i obtenir

$$\int \frac{f(t)}{g'(x)}\, dt\,.$$

Si ara podem invertir $t = g(x)$ per a trobar $x = g^{-1}(t)$, la integral resultant serà

$$\int \frac{f(t)}{g'(g^{-1}(t))}\, dt\,,$$

que és una integral indefinida en la variable t. Si aquest procés ha fet que la integral siga més fàcil de resoldre, aleshores el canvi de variable serà un mètode efectiu. En general, l'èxit del mètode depèn de trobar un canvi de variable que faça que la nova integral siga més fàcil de calcular que l'original.

I4.

$$I = \int x\,(5x^2-3)^7\, dx = \frac{1}{10}\int 10x\,(5x^2-3)^7\, dx\,.$$

Canvi de variable:

$$5x^2 - 3 = t \quad \Rightarrow \quad dt = 10x\, dx\,.$$

$$I = \frac{1}{10}\int t^7\, dt = \frac{1}{80}\, t^8 + C = \frac{1}{80}(5x^2-3)^8 + C\,.$$

I5.

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}\,.$$

Canvi de variable:

$$x^2 - 2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{t^2+2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\, dt\,.$$

$$I = \int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2+2}\,\sqrt{t^2+2}\, t} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\arctan\sqrt{\frac{x^2-2}{2}} + C\,.$$

I6.

$$I = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Canvi de variable:

$$x = \sin t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t\, dt\,.$$

$$I = \int \frac{\sin^2 t\,\cos t\, dt}{\cos t} = \int \sin^2 t\, dt\,.$$

Fem servir ara la identitat trigonomètrica del cosinus de l'angle doble

$$\cos 2t = 1 - 2\,\sin^2 t \quad \Rightarrow \quad \sin^2 t = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2t)\,,$$

que converteix la integral en immediata,

$$I = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\,\sin 2t\right) + C\,.$$

I finalment desfem el canvi de variable. Com que $x = \sin t$, $t = \arcsin x$, i $\sin 2t = 2\,\sin t\,\cos t = 2\,x\,\sqrt{1-x^2}$ i, per tant,

$$I = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x}{2}\,\sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Comentari: Algunes expressions se simplifiquen notablement amb certs canvis de variable. Col·loquialment, es diu que aquestes expressions *suggereixen* un canvi de variable concret. En l'exemple anterior n'hem fet un. Esmentem aquests canvis de variable habituals:

- Integrals amb el terme $\sqrt{a^2 - x^2}\,:\, x = a\,\sin t \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a\,\cos t$.
- Integrals amb el terme $\sqrt{x^2 - a^2}\,:\, x = a\,\sec t \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = a\,\tan t$.
- Integrals amb el terme $\sqrt{x^2 + a^2}\,:\, x = a\,\tan t \Rightarrow \sqrt{x^2+a^2} = a\,\sec t$.

En els últims dos casos hem utilitzat la identitat trigonomètrica $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

Integració per parts

La regla de derivació del producte de dues funcions, la propietat (iv) del teorema 2.3, condueix a una regla equivalent en el càlcul d'integrals indefinides. Per aplicació de la regla per a la derivada:

$$\int \frac{d}{dx}\,[f(x)\,g(x)]\,dx = \int\,[f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)]\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx\,.$$

Si ara fem ús de la propietat (iv) del teorema 3.1 i reescrivim el resultat, trobem la **fórmula d'integració per parts**

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx\,. \tag{3.1}$$

És més comú donar-la en forma diferencial. Siguen $u = f(x)$ i $v = g(x)$. Aleshores $du = f'(x)\,dx$ i $dv = g'(x)\,dx$ i l'equació (3.1) es transforma en

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du\,. \tag{3.2}$$

Aquesta fórmula expressa la integral $\int u\, dv$ en termes d'una altra integral, $\int v\, du$, que suposadament és més fàcil de resoldre. El seu ús es recomana quan volem integrar un producte de dues funcions, una és fàcil de derivar (u) i l'altra fàcil d'integrar (v).

Comentari: És famosa la regla mnemotècnica per a facilitar la memorització de l'equació (3.2): *"Un dia viu una vaca vestida d'uniforme"* o *"Un dia veuré una vaca vestida d'uniforme"*. Una altra versió afegeix el signe en la regla mnemotècnica: *"Un dia viu una vaca menys flaca vestida d'uniforme"*.

I7.

$$I = \int x \, \cos x \, dx \, .$$

Integrem per parts:

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Leftrightarrow \quad du = dx \, , \\ dv = \cos x \, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = \sin x \, . \end{aligned}$$

I aplicant l'equació (3.2)

$$I = x \, \sin x - \int \sin x \, dx = x \, \sin x + \cos x + C \, ,$$

i hem trobat la primitiva. És il·lustratiu veure que si haguérem escollit u i v d'una altra forma, per exemple

$$\begin{aligned} u = \cos x \quad &\Leftrightarrow \quad du = -\sin x \, dx \, , \\ dv = x \, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = \frac{x^2}{2} \, , \end{aligned}$$

el resultat d'aplicar l'equació (3.2) hauria fet que la integral resultat fora més complicada que l'original:

$$I = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, dx \, .$$

La identificació de les funcions u i v més convenients és clau perquè el mètode d'integració per parts siga efectiu.

I8.

$$I = \int \ln x \, dx \, .$$

Integrem per parts:

$$\begin{aligned} u = \ln x \quad &\Leftrightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \, , \\ dv = dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = x \, . \end{aligned}$$

$$I = x\,\ln x - \int dx = x\,\ln x - x + C\,.$$

En aquest cas hem escrit $\ln x = \ln x \cdot 1$ i hem escollit $u = \ln x$ i $v = 1$.

I9. A vegades és necessari integrar per parts més d'una vegada. Siga la integral indefinida

$$I = \int x^2\, e^x\, dx\,.$$

Integrem per parts:

$$\begin{aligned} u = x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad du = 2x\, dx\,, \\ dv = e^x\, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = e^x\,. \end{aligned}$$

$$I = x^2\, e^x - 2 \int x\, e^x\, dx\,.$$

La Integral resultant encara no és immediata, però és més senzilla que l'original, ja que x apareix amb una potència inferior. Podem per tant tornar a integrar per parts:

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Leftrightarrow \quad du = dx\,, \\ dv = e^x\, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = e^x\,. \end{aligned}$$

$$I = x^2\, e^x - 2\left[x\, e^x - \int e^x\, dx\right] = x^2\, e^x - 2x\, e^x + 2e^x + C\,.$$

I10.

$$I = \int e^x\, \cos x\, dx\,.$$

Integrem per parts:

$$\begin{aligned} u = e^x \quad &\Leftrightarrow \quad du = e^x\, dx\,, \\ dv = \cos x\, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = \sin x\,. \end{aligned}$$

$$I = e^x\, \sin x - \int e^x\, \sin x\, dx\,.$$

Tornem a integrar per parts:

$$\begin{aligned} u = e^x \quad &\Leftrightarrow \quad du = e^x\, dx\,, \\ dv = \sin x\, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = -\cos x\,. \end{aligned}$$

$$I = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right] .$$

La Integral original torna a aparèixer. De fet, podem escriure

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I \, ,$$

i aïllar I, la incògnita d'aquesta equació,

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C \, ,$$

on en l'últim pas hem afegit també la constant d'integració. Les integrals que tornen a aparèixer quan integrem per parts s'anomenen **integrals cícliques** o **integrals que es mosseguen la cua**.

Comentari: La tècnica d'integració per parts pot usar-se per a demostrar **fórmules de reducció**, com per exemple

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \, \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \, . \tag{3.3}$$

Integrem per parts:

$$\begin{aligned} u = \cos^{n-1} x \quad &\Leftrightarrow \quad du = -(n-1) \cos^{n-2} x \, \sin x \, dx \, , \\ dv = \cos x \, dx \quad &\Leftrightarrow \quad v = \sin x \, . \end{aligned}$$

$$I = \int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \, \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, \sin^2 x \, dx \, .$$

Si ara escrivim $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, aquesta expressió és equivalent a

$$I = \cos^{n-1} x \, \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \, I \, ,$$

i aïllant I resulta el que volíem demostrar. Fórmules com l'equació (3.3) permeten reduir la potència de la funció a integrar tantes vegades com siga necessari fins que siga més fàcil d'avaluar.

Integrals amb trinomi quadrat

Considerem ara tres tipus d'integrals en les quals apareix el trinomi quadrat $ax^2 + bx + c$:

$$I_{\rm T1} = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx \, , \quad I_{\rm T2} = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} \, dx \, , \quad I_{\rm T3} = \int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \, dx \, .$$

La clau per a resoldre-les és reescriure el trinomi de la forma

$$ax^2 + bx + c = a(x + k)^2 + l \, . \tag{3.4}$$

Trobem k i l expandint l'expressió i igualant els coeficients dels monomis amb la mateixa potència de x:

$$a(x+k)^2+l=a(x^2+2kx+k^2)+l=ax^2+2akx+ak^2+l \quad \Rightarrow \begin{cases} 2ak=b \\ ak^2+l=c \end{cases}$$

És a dir

$$k=\frac{b}{2a}\,, \quad l=c-ak^2\,. \tag{3.5}$$

Aquest procediment per a transformar un trinomi general a la forma de l'equació (3.4) s'anomena **completar el quadrat**. Una vegada reescrit el trinomi, podem resoldre les tres integrals fàcilment. Comencem amb la integral I_{T1}:

$$I_{\mathrm{T1}}=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{1}{a(x+k)^2+l}\,dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{(x+k)^2+\frac{l}{a}}\,dx\,.$$

Definim $\frac{l}{a}=d$ i fem el canvi de variable

$$x+k=u \quad \Rightarrow \quad dx=du\,.$$

Trobem

$$I_{\mathrm{T1}}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2+d}\,.$$

I la integral ja està preparada per a convertir-se en immediata. Tenim dos casos segons el signe de d:

- $d>0$

En aquest cas definim $d=\alpha^2$ i la integral resultant és de tipus arctan:

$$I_{\mathrm{T1}}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2+\alpha^2}=\frac{1}{a}\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{u}{\alpha}+C=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{l}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{l}}(x+k)\right)+C\,.$$

- $d<0$

En aquest cas definim $d=-\alpha^2$ i la integral resultant s'escriu com a

$$I_{\mathrm{T1}}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2-\alpha^2}=-\frac{1}{a}\int\frac{du}{\alpha^2-u^2}\,.$$

i aleshores podem aplicar la integral immediata (xvii) del teorema 3.2 i trobar

$$I_{\mathrm{T1}}=-\frac{1}{2a\alpha}\ln\left|\frac{u+\alpha}{u-\alpha}\right|+C=-\frac{1}{2a\alpha}\ln\left|\frac{x+k+\alpha}{x+k-\alpha}\right|+C\,. \tag{3.6}$$

Passem ara a la integral I_{T2}. En aquest cas hem de reescriure el numerador de manera que aparega la derivada del trinomi,

$$mx+n=m\frac{2a}{2a}x+\frac{mb}{2a}-\frac{mb}{2a}+n=\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}\,.$$

Això ens permet descompondre la integral en dues peces:

$$I_{\text{T2}} = \int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\, dx = I_{\text{T2}}^{(1)} + I_{\text{T2}}^{(2)} \,, \tag{3.7}$$

amb

$$I_{\text{T2}}^{(1)} = \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{m}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + C \,, \tag{3.8}$$

$$I_{\text{T2}}^{(2)} = \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \left(n - \frac{mb}{2a}\right) I_{\text{T1}} \,, \tag{3.9}$$

i per a I_{T1} podem fer servir el resultat en l'equació (3.6). Finalment, la integral I_{T3} es resol exactament pel mateix mètode. Si $m \neq 0$ hem de reescriure el numerador per a fer aparèixer de manera explícita la derivada del trinomi. Com a resultat d'aquesta reescriptura, separem I_{T3} en dues peces, i fent el canvi de variable $x = u + k$, com en I_{T1} i I_{T2}, passem a integrals immediates. En aquest cas les integrals resultants tenen l'arrel quadrada del trinomi en el denominador i seran de tipus arcsin, arcsinh o arccosh, com podem veure en les integrals immediates (vi), (xv) i (xvi) del teorema 3.2.

Comentari: En el càlcul de la integral I_{T1} ens hem trobat amb la integral

$$\int \frac{du}{u^2-\alpha^2}$$

i hem aplicat directament la integral immediata (xvii) del teorema 3.2. En particular, hem fet ús de la segona expressió, que dona la funció $\operatorname{arctanh} x$ en termes de logaritmes. És instructiu resoldre la integral amb un mètode alternatiu que ens porte directament a l'expressió en termes dels logaritmes. Primer separem l'integrand fent una descomposició en fraccions simples, un procediment que estudiarem en detall quan considerem el càlcul d'integrals de funcions racionals. Escrivim:

$$\frac{1}{u^2-\alpha^2} = \frac{1}{(u+\alpha)(u-\alpha)} = \frac{A}{u+\alpha} + \frac{B}{u-\alpha} \,.$$

Multipliquem per $(u+\alpha)(u-\alpha)$:

$$1 = A\,(u-\alpha) + B\,(u+\alpha) \,.$$

Aquesta igualtat s'ha de verificar per a tot valor de la variable u i, per tant, s'ha de verificar per a $u = \alpha$ i $u = -\alpha$. Substituint aquests dos valors trobem A i B:

$$A = -\frac{1}{2\alpha} \,, \quad B = \frac{1}{2\alpha} \,.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2-\alpha^2} &= \int \left[\frac{\frac{-1}{2\alpha}}{u+\alpha} + \frac{\frac{1}{2\alpha}}{u-\alpha} \right] du \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \left[\ln|u+\alpha| - \ln|u-\alpha| \right] + C = -\frac{1}{2\alpha} \ln\left| \frac{u+\alpha}{u-\alpha} \right| + C \,, \end{aligned}$$

i hem trobat el mateix resultat que donem per a la integral immediata (xvii) del teorema 3.2.

I11.

$$I = \int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx\,.$$

Es tracta d'una integral de trinomi quadrat del tipus I_{T2}. Identifiquem

$$m=1\,,\quad n=-1\,,\quad a=1\,,\quad b=-1\,,\quad c=-1\,.$$

Aleshores, amb l'equació (3.5) trobem

$$k=-\frac{1}{2}\,,\quad l=-1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}\,,$$

i $d=\frac{l}{a}=-\frac{5}{4}<0$ i, per tant, definim $\alpha^2=-d=\frac{5}{4}$. Amb les expressions generals de les equacions (3.6), (3.7), (3.8) i (3.9) obtenim

$$I=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}}\right|+C\,.$$

I12.

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx\,.$$

Es tracta d'una integral de tipus I_{T3}. Comencem escrivint el numerador com a

$$x=\frac{1}{10}(10x-2)+\frac{1}{5}\,.$$

Fent servir aquesta expressió podem separar I en dues peces, amb integrals més senzilles

$$I=\frac{1}{10}\int\frac{10x-2}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}=I_1+I_2\,.$$

Les calculem per separat. La primera és immediata:

$$I_1=\frac{1}{10}\int\frac{10x-2}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\,.$$

Per a resoldre la segona hem d'escriure el trinomi de la forma de l'equació (3.4). Trobem

$$5x^2-2x+1=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\,,$$

i, per tant,

$$I_2=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{25}}}$$

$$=\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{25}}\right|\,,$$

on hem utilitzat la integral immediata (xv) en l'últim pas. Finalment, recopilant tots els resultats,

$$I = \frac{1}{5}\left[\sqrt{5x^2-2x+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x + \sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}}\right|\right] + C\,.$$

Funcions racionals

Considerem ara la integració indefinida de funcions racionals. Denotem com a $R(x)$ una funció racional genèrica. Aquestes funcions tenen la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

amb $P(x)$ i $Q(x)$ dos polinomis de graus p i q, respectivament. Abans d'explicar el mètode d'integració hem d'introduir una definició.

Definició 3.3: Fraccions pròpies i impròpies

Direm que una funció racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

és una **fracció pròpia** si $p < q$. En cas contrari, és a dir, si $p \geq q$, direm que és una **fracció impròpia**.

Qualsevol fracció impròpia es pot escriure com la suma d'un polinomi i una fracció pròpia. Per exemple:

$$\frac{x^2+2x-2}{x-3} = x + 5 + \frac{13}{x-3}\,,$$

com podem veure en fer la divisió de manera explícita:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +\,2x & -\,2 & x-3 \\ \cline{4-4} -\,x^2 & +\,3x & & x+5 \\ \cline{1-2} & 5x & -\,2 & \\ & -\,5x & +\,15 & \\ \cline{2-3} & & 13 & \end{array}$$

Per tant, a partir d'ara considerarem únicament fraccions $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pròpies. El procediment fonamental per a trobar la primitiva d'un quocient d'aquest tipus és la **descomposició en fraccions simples**, també coneguda com a descomposició en fraccions parcials. El mètode consisteix a separar el quocient original en una suma de fraccions més senzilles, que després podrem integrar fàcilment. La forma de la descomposició depèn de les arrels del polinomi en el denominador, $Q(x)$, que sempre es podrà factoritzar com un producte de factors lineals

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)\,(a_2 x + b_2)\,\ldots\,(a_k x + b_k)\,,$$

com un producte de factors quadràtics irreductibles

$$Q(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)\,(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)\,\ldots\,(a_k x^2 + b_k x + c_k)\,,$$

o com un producte que conté factors lineals i factors quadràtics irreductibles. Els factors quadràtics irreductibles es corresponen amb arrels complexes. Per exemple, el factor x^2+1 és un factor quadràtic irreductible, ja que no pot ser igual a zero si x és un nombre real. Per cada factor hem d'afegir un o més sumands a la descomposició. Considerem quatre casos:

- **Cas 1:** Factors lineals diferents

En aquest cas cada factor lineal està associat a una arrel real simple. Per cada factor lineal $ax+b$ hem d'afegir a la descomposició el terme

$$\frac{A}{ax+b}\,,$$

on A és un coeficient a determinar.

- **Cas 2:** Factors lineals repetits

Els factors lineals repetits estan associats a arrels reals múltiples. Per cada factor lineal $ax+b$ que apareix repetit r vegades hem d'afegir a la descomposició els termes

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}\,.$$

on A_1, A_2, …, A_r són coeficients a determinar.

- **Cas 3:** Factors quadràtics diferents

Els factors quadràtics irreductibles estan associats l'existència d'arrels complexes. Per cada factor quadràtic ax^2+bx+c hem d'afegir a la descomposició el terme

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,,$$

on A i B són coeficients a determinar.

- **Cas 4:** Factors quadràtics repetits

Finalment, per cada factor quadràtic $ax^2 + bx + c$ que apareix repetit r vegades hem d'afegir a la descomposició els termes

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_r x + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r} \,,$$

on A_1, A_2, $\ldots$, A_r i B_1, B_2, $\ldots$, B_r són coeficients a determinar.

Els coeficients que apareixen en la descomposició s'han de determinar per mètodes algebraics comuns. En primer lloc, hem de simplificar l'expressió resultant, multiplicant pels factors necessaris per a eliminar totes les fraccions. A continuació, podem usar diverses tècniques. El mètode general consisteix a igualar els factors que multipliquen a cada potència de la variable x als dos costats de la igualtat i d'aquesta manera obtenir un sistema d'equacions per als coeficients. Alternativament, en alguns casos podem utilitzar un mètode directe molt senzill. Com que la descomposició ha de ser vàlida per a qualsevol valor de la variable x, també podem donar valors específics a x i d'aquesta manera obtenir també un sistema d'equacions. Finalment, la resolució del sistema proporciona els valors dels coeficients, allò que completa la descomposició en fraccions simples.

Una vegada feta la descomposició en fraccions més senzilles les integrals resultants són de tipus potència, de tipus logaritme (o funcions hiperbòliques inverses) o de tipus arctangent. En alguns casos també poden aparèixer integrals de tipus trinomi quadrat.

I13.

$$I = \int \frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} \, dx \,.$$

Identifiquem $P(x) = x$ i $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ i procedim a la descomposició en fraccions simples. El primer pas és trobar els factors de $Q(x)$. En general, la factorització d'un polinomi pot ser un problema no trivial. Ara bé, en aquest cas és relativament fàcil, ja que resulta evident que $x = 1$ és una arrel de $Q(x)$ i, per tant, $(x - 1)$ és un dels factors. I si dividim $Q(x)$ per $x - 1$ trobem que el resultat és $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. En conclusió,

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)\,(x + 1)^2 \,.$$

Tots els factors de $Q(x)$ són lineals. Un és simple $(x - 1)$ i l'altre té multiplicitat doble $(x + 1)$. Aleshores, la descomposició de l'integrand en fraccions simples és

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B_1}{x + 1} + \frac{B_2}{(x + 1)^2} \,. \tag{3.10}$$

Hem de determinar A, B_1 i B_2. Comencem multiplicant l'equació (3.10) per $(x-1)(x+1)^2$,

$$x = A\,(x + 1)^2 + B_1\,(x - 1)(x + 1) + B_2\,(x - 1) \,.$$

Aquesta igualtat ha de donar-se per a qualsevol valor de x. Aleshores, podem substituir alguns valors particulars que simplifiquen l'equació i ens permeten trobar fàcilment els coeficients:

$$\begin{aligned}
x = 1 :& \quad 1 = 4\,A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}\,, \\
x = -1 :& \quad -1 = -2\,B_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{2}\,, \\
x = 0 :& \quad 0 = A - B_1 - B_2 \quad \Rightarrow \quad B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Aleshores, la integral resulta

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right] - \frac{1}{2(x+1)} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C\,.
\end{aligned}$$

I14.

$$I = \int \frac{x^3+2x+1}{x(x^2+1)}\,dx\,.$$

L'integrand és una fracció impròpia i, per tant, el primer pas és fer la divisió dels polinomis:

$$\frac{x^3+2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+2x+1}{x^3+x} = \frac{x^3+x+x+1}{x^3+x} = 1 + \frac{x+1}{x^3+x}\,.$$

Aleshores

$$I = \int dx + \int \frac{x+1}{x^3+x}\,dx = x + I_1\,.$$

Apliquem la separació en fraccions simples a l'integrand de I_1. El denominador té dos factors, el factor lineal x i el factor quadràtic irreductible x^2+1. Escrivim

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1}\,,$$

i multipliquem per x^3+x,

$$x+1 = A\,(x^2+1) + (Mx+N)\,x\,.$$

Agrupem el costat dret de la igualtat per potències de x,

$$x+1 = (A+M)\,x^2 + N\,x + A\,.$$

Ara igualem els factors de les mateixes potències de x als dos costats de la igualtat. Això ens condueix al sistema d'equacions

$$\begin{aligned}
A + M &= 0\,, \\
N &= 1\,, \\
A &= 1\,,
\end{aligned}$$

que té per solució $A = 1$, $M = -1$ i $N = 1$. Per tant

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln x + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \arctan x\,. \end{aligned}$$

I finalment

$$I = x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \arctan x + C\,.$$

Funcions irracionals

El càlcul de primitives de funcions irracionals sol requerir fer canvis de variable que transformen l'integrand per a donar lloc a expressions més fàcils d'integrar. De fet, ja comentàrem que els termes $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$ suggereixen canvis de variable que involucren funcions trigonomètriques. En altres casos, el canvi pot ser simplement a una potència de la nova variable.

I15.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

El canvi de variable

$$x = a\,\sin t \quad \Rightarrow \quad dx = a\,\cos t\,dt\,,$$

simplifica $a^2 - x^2 = a^2\,\cos^2 t$ i condueix a

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a\cos t}{a^3\cos^3 t}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \frac{\tan t}{a^2} + C = \frac{1}{a^2}\,\frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{1}{a^2}\,\frac{\frac{x}{a}}{\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C\,. \end{aligned}$$

I16.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$$

En general, si l'integrand és una funció racional de la forma

$$R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots\right],$$

el canvi de variable adequat és

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\text{m.c.m.}(q1,q2,\dots)} .$$

En aquest cas, seguim la regla general i fem el canvi de variable

$$2x - 1 = t^4 \quad \Rightarrow \quad 2\,dx = 4\,t^3\,dt ,$$

i trobem la integral de funció racional

$$I = \int \frac{2t^3}{t^2 - t}\,dt = 2\int \frac{t^2}{t-1}\,dt .$$

L'integrand resultant és una fracció impròpia i, per tant, podem fer la divisió de polinomis,

$$\frac{t^2}{t-1} = \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} = \frac{(t+1)(t-1)+1}{t-1} = t + 1 + \frac{1}{t-1} .$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
I &= 2\left[\int t\,dt + \int dt + \int \frac{dt}{t-1}\right] \\
&= 2\left[\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right] + C = t^2 + 2t + 1 - 1 + \ln(t-1)^2 + C = (t+1)^2 + \ln(t-1)^2 - 1 \\
&= \left(\sqrt[4]{2x-1} + 1\right)^2 + \ln\left(\sqrt[4]{2x-1} + 1\right)^2 + C ,
\end{aligned}$$

on en l'últim pas hem absorbit -1 en la constant d'integració C.

I17.

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{2x-1}}\,dx .$$

Canvi de variable:

$$2x - 1 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{t^2+1}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = t\,dt .$$

$$I = \int \frac{\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^3}{t}\,t\,dt = \frac{1}{8}\int (t^2+1)^3\,dt .$$

L'integrand resultant de fer el canvi és un polinomi,

$$(t^2+1)^3 = t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1 ,$$

que pot integrar-se fàcilment:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{8}\int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1)\,dt = \frac{t}{8}\left(\frac{t^6}{7} + 3\frac{t^4}{5} + t^2 + 1\right) + C \\
&= \frac{1}{8}\sqrt{2x-1}\left[\frac{(2x-1)^3}{7} + \frac{3(2x-1)^2}{5} + 2x\right] + C .
\end{aligned}$$

Funcions trigonomètriques

El càlcul de primitives de funcions trigonomètriques combina moltes de les tècniques prèvies. En molts casos, l'aplicació d'identitats trigonomètriques permet passar directament a integrals immediates. Vam veure un exemple en la integral 6, quan per a obtenir $\int \sin^2 t\, dt$ usàrem una identitat del cosinus de l'angle doble, cos $2t$. També hem vist alguns casos en què la tècnica adequada és la integració per parts, en particular quan la funció trigonomètrica està multiplicant a una altra funció elemental, com per exemple x o e^x. Considerem ara alguns casos especials.

- **Tipus 1:** $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\, dx$.

Si l'integrand és una funció racional de $\sin x$ i $\cos x$, existeix un canvi de variable que sempre funciona, conegut com la **substitució de Weierstrass**:

$$\tan\frac{x}{2} = t \quad \Rightarrow \quad x = 2\,\arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,.$$

Aprofitant identitats trigonomètriques podem escriure $\sin x$ i $\cos x$ en termes de la nova variable t. Per a $\sin x$ fem

$$\sin x = \frac{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)\,\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,,$$

i dividint per $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$,

$$\sin x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1} = \frac{2t}{t^2+1}\,.$$

De manera anàloga

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

i tenim tots els ingredients per a trobar la nova integral després del canvi de variable. Aquesta serà una integral d'una funció racional i per tant es podrà resoldre per mètodes coneguts.

I18.

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}\,.$$

L'aplicació del canvi de variable recomanat dona lloc a la integral

$$I = \int \frac{\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

Aquest tipus d'integral de funció trigonomètrica té uns casos particulars en els quals hi ha un canvi de variable alternatiu que pot resultar més efectiu:

Integral	**Canvi de variable**
$\int R(\sin x)\,\cos x\,dx$	$\sin x = t$
$\int R(\cos x)\,\sin x\,dx$	$\cos x = t$
$\int R(\tan x)\,dx$	$\tan x = t$
$\int R(\sin^{2m} x, \cos^{2n} x)\,dx,\ m,n \in \mathbb{N}$	$\tan x = t$

I19.

$$I = \int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x}\,dx\,.$$

Canvi de variable:

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = dt\,.$$

$$I = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C\,.$$

I20.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x + 2}\,.$$

Tenim una funció racional de potències parelles de $\sin x$ i $\cos x$. Per tant, el canvi de variable recomanat és

$$\tan x = t \quad \Rightarrow \quad x = \arctan t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Trobem expressions per a $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ en termes de la funció $\tan x$:

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1}\,,$$
$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}\,.$$

Aleshores

$$I = \int \frac{\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)}{\frac{t^2}{1+t^2} + 4\frac{1}{1+t^2} + 2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C\,.$$

- **Tipus 2:** $\int \sin^\alpha x \, \cos^\beta x \, dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Considerem tres casos particulars:

▷ **Tipus 2a:** α o β imparell positiu.

Siga $\beta = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Aleshores tenim la integral

$$\int \sin^\alpha x \, \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^\alpha x \, \cos^{2k} x \, d(\sin x) = \int \sin^\alpha x \, (1 - \sin^2 x)^k \, d(\sin x) \,,$$

i el canvi de variable

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad d(\sin x) = dt \,,$$

resulta evident. Obtenim la integral d'un polinomi

$$I = \int t^\alpha (1 - t^2)^k \, dt \,.$$

▷ **Tipus 2b:** α i β parells positius.

Siguen $\alpha = 2m$ i $\beta = 2n$, $m, n \in \mathbb{N}$. La integral s'escriu com a

$$I = \int \sin^{2m} x \, \cos^{2n} x \, dx \,.$$

Ara recordem les identitats

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \,, \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \,. \end{aligned}$$

Si $m \neq n$ la integral I resulta

$$I = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^m \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^n dx = \frac{1}{2^{m+n}} \int (1 - \cos 2x)^m \, (1 + \cos 2x)^n \, dx \,,$$

i el següent pas consistiria a aplicar la fórmula del binomi de Newton. Si $m = n$ el procediment és similar. Primer reescrivim el producte

$$(1 - \cos 2x)^m \, (1 + \cos 2x)^m = (1 - \cos^2 2x)^m = (\sin^2 2x)^m = (\sin 2x)^{2m} = \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^m \,,$$

i d'aquesta manera la integral I resulta

$$I = \frac{1}{2^{2m}} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^m dx \,,$$

i de nou aplicaríem ara la fórmula del binomi de Newton.

▷ **Tipus 2c:** α i β parells i un de negatiu.

Siga $\alpha > 0$ i $\beta = -\gamma < 0$. Aleshores, si $\alpha > \gamma$ tenim l'integrand

$$\sin^\alpha x \, \cos^\beta x = \frac{\sin^\alpha x}{\cos^\gamma x} = \tan^\gamma x \, \sin^{\alpha - \gamma} x \,,$$

i el canvi de variable adequat per a resoldre la integral és $\tan x = t$. En altres casos, si $\alpha < 0$ o si $\alpha > 0$ però $\alpha < |\beta|$, el canvi d'integral serà $\cot x = t$. L'integrand contindrà sempre altres factors de la forma $\sin^k x$, $\cos^k x$, que podem escriure en termes de t fent ús d'identitats trigonomètriques.

I21.

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} \, dx \,.$$

Tenim $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\beta = 3$ i, per tant, es tracta d'una integral de tipus 2a. Fem el canvi de variable

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad d(\sin x) = \cos x \, dx = dt \,.$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^{-1/2} x \, (1 - \sin^2 x) \, d(\sin x) = \int t^{-1/2} (1 - t^2) \, dt = \int (t^{-1/2} - t^{3/2}) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t} - \frac{2\sqrt{t^5}}{5} + C = \frac{\sqrt{\sin x}}{2} - \frac{2\sqrt{\sin^5 x}}{5} + C \,. \end{aligned}$$

I22.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^2 x \, \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \, (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - \cos 2x (1 - \sin^2 2x) \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x + \cos 2x \, \sin^2 2x \right] dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right] + C \,. \end{aligned}$$

- **Tipus 3:** $\int \sin \alpha x \, \cos \beta x \, dx$, $\int \cos \alpha x \, \cos \beta x \, dx$, $\int \sin \alpha x \, \sin \beta x \, dx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$.

Per a resoldre aquestes integrals s'han de fer servir les identitats

$$\sin \alpha x \, \cos \beta x = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x \right] ,$$
$$\cos \alpha x \, \cos \beta x = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x \right] ,$$
$$\sin \alpha x \, \sin \beta x = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x \right] .$$

I23.

$$I = \int \sin 9x \, \sin x \, dx \, .$$

Primer escrivim

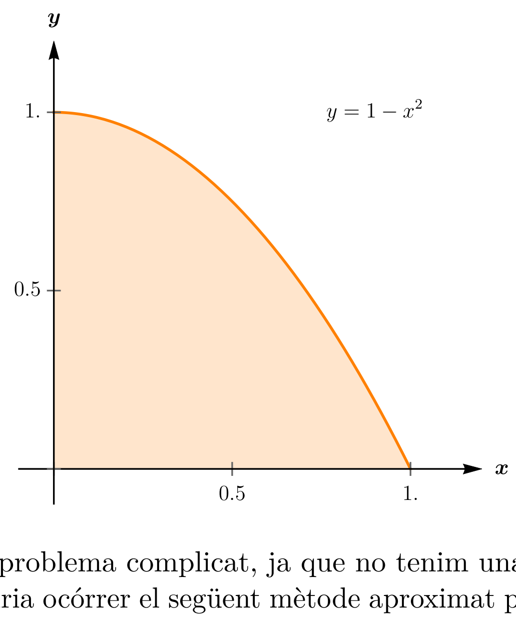
$$\sin 9x \, \sin x = \frac{1}{2} \left[\cos(9-1)x - \cos(9+1)x \right] = \frac{1}{2} \left(\cos 8x - \cos 10x \right) \, .$$

Aleshores

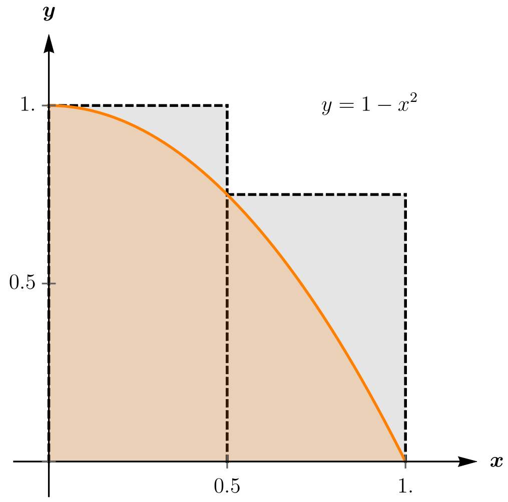
$$I = \frac{1}{2} \left[\int \cos 8x \, dx - \int \cos 10x \, dx \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \sin 8x - \frac{1}{10} \sin 10x \right] + C \, .$$

3.3 La integral definida

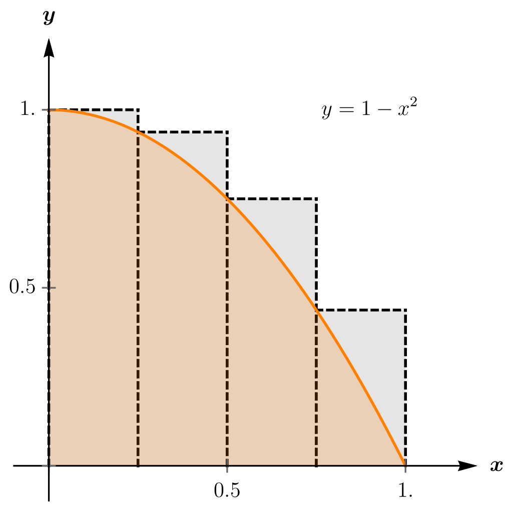
Suposem que volem calcular l'àrea de la regió R compresa entre la corba $y = f(x) = 1 - x^2$, l'eix x i les rectes vertical $x = 0$ i $x = 1$:



En principi sembla un problema complicat, ja que no tenim una fórmula per a calcular aquesta àrea. Se'ns podria ocórrer el següent mètode aproximat per a obtenir-la. Dividim l'interval $[0, 1]$ en els subintervals $[0, 0.5]$ i $[0.5, 1]$ i dibuixem en cada un un rectangle, d'altures $f(0)$ i $f(0.5)$, respectivament:



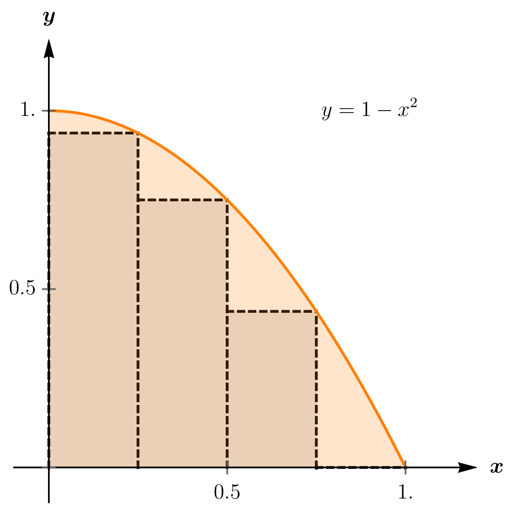
Una primera aproximació a l'àrea de la regió R és la suma de les àrees dels dos rectangles, que sí que sabem calcular. Si considerem que l'aproximació és molt roïna, podem augmentar el nombre d'intervals, i per tant el nombre de rectangles:



En aquest cas tenim quatre rectangles, de bases 0.25 i altures $f(0)$, $f(0.25)$, $f(0.5)$ i $f(0.75)$. Aleshores, podríem trobar un resultat aproximat per a l'àrea de la regió R com a

$$A \approx 0.25 \cdot f(0) + 0.25 \cdot f(0.25) + 0.25 \cdot f(0.5) + 0.25 \cdot f(0.75) = 0.78125\,.$$

Per la construcció que hem fet resulta evident que el nostre resultat serà necessàriament més gran que l'àrea que volem trobar, ja que la regió R es troba sempre dins dels rectangles. La raó és que hem escollit per a l'alçada de cada rectangle el valor màxim de la funció $f(x) = 1 - x^2$ en l'interval que forma la base del rectangle. Direm per tant que 0.78125 és una **suma superior**. Podríem haver escollit una alçada diferent. Per exemple, si haguèrem escollit el valor mínim de $f(x) = 1 - x^2$ en cada subinterval



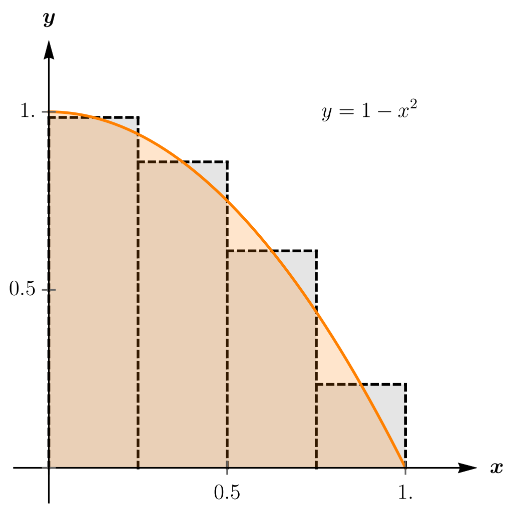
hauríem obtingut

$$A \approx 0.25 \cdot f(0.25) + 0.25 \cdot f(0.5) + 0.25 \cdot f(0.75) + 0.25 \cdot f(1) = 0.53125\,.$$

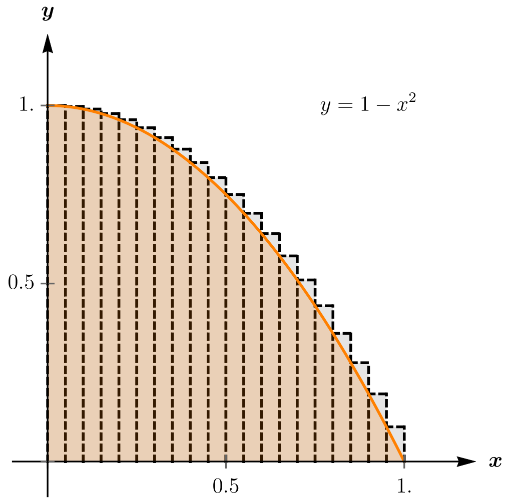
En aquest cas direm que hem obtingut una **suma inferior**. Per tant, amb els intervals considerats, arribem a la conclusió

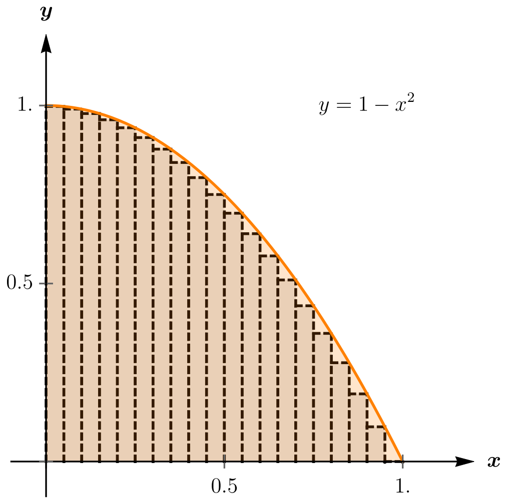
$$0.53125 < A < 0.78125\,.$$

Qualsevol altra estimació de l'àrea de la regió R es trobarà entre aquestes fites inferior i superior per a A. Per exemple, si per a l'alçada dels rectangles escollim el valor de la funció $f(x)$ en el punt intermedi de cada subinterval, obtenim

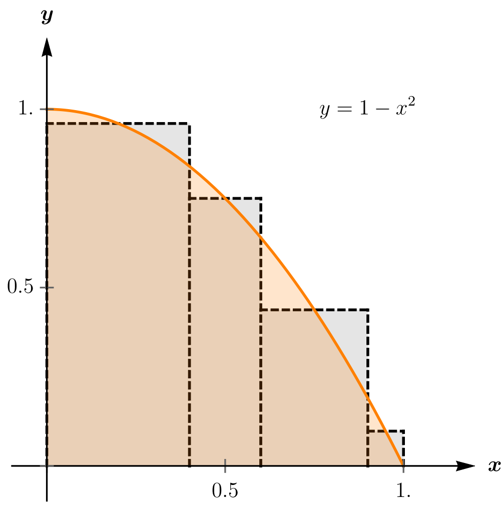


i és fàcil comprovar que $A \approx 0.671875$. Podem millorar l'aproximació considerant més intervals. Per exemple, per a 20 intervals dibuixem els rectangles





i trobem $0.64125 < A < 0.69125$. I encara podríem millorar més. Per exemple, el resultat per a 100 intervals seria $0.66165 < A < 0.67165$. I finalment, fins ara hem fet la divisió en subintervals amb longituds iguals, però, en principi, podríem haver escollit subintervals amb longituds diferents:



En general, si escollim n intervals, amb rectangles de bases Δx_1, Δx_2, $\ldots$, Δx_n i altures $f(c_1)$, $f(c_2)$, $\ldots$, $f(c_n)$, la nostra aproximació per a l'àrea de la regió R serà

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \,. \tag{3.11}$$

La qüestió ara és si podem trobar l'àrea de la regió R *exactament*. Com a primer pas, trobem la suma inferior, escollint tots els subintervals amb la mateixa longitud

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \,.$$

Si volem calcular la suma inferior hem de seleccionar en cada subinterval el punt on la funció és mínima. Com que $f(x) = 1 - x^2$ és decreixent en l'interval $[0, 1]$, aquest punt és el valor màxim de x en cada subinterval, és a dir, $c_k = \frac{k}{n}$. Aleshores, l'equació (3.11) ens diu

$$A \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \,. \qquad (3.12)$$

Ens hem trobat $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, la suma dels primers n quadrats perfectes. En l'apèndix C demostrem que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)\,,$$

i, per tant, arribem al resultat general

$$A \approx 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\,. \qquad (3.13)$$

Per exemple, si $n = 4$ obtenim $A \approx 0.53125$ com ja havíem vist abans. Ara estem preparats per a obtenir el resultat exacte. Com hem vist, si dividim l'interval $[0, 1]$ en un nombre més gran de subintervals, l'aproximació millora. Quan fem això, la longitud de cada interval es fa més menuda. Finalment, en el límit $n \to \infty$, la longitud de cada interval es fa zero i l'equació (3.13) ens dona el resultat exacte per a A:

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right] = \frac{2}{3}\,. \qquad (3.14)$$

Aquest resultat coincideix amb el que trobem numèricament quan escollim un nombre gran d'intervals.

Després d'aquesta introducció, les definicions formals que farem ara resultaran més intuïtives.

Definició 3.4: Partició d'un interval

Siga l'interval tancat $[a, b]$. El conjunt de punts

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}\,,$$

amb $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ és una **partició** de l'interval $[a, b]$.

Una partició $\mathcal{P}$ divideix l'interval $[a, b]$ en n subintervals tancats: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$.

Definició 3.5: Selecció de punts

Una **selecció de punts** en la partició $\mathcal{P}$ és un conjunt de punts

$$\mathcal{S} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n\} \ ,$$

amb $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Definició 3.6: Suma de Riemann

Siga un interval tancat $[a, b]$, amb una partició $\mathcal{P}$ i una selecció $\mathcal{S}$. La suma

$$S_f = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \ ,$$

on $\Delta x_k = x_k - x_{k_1}$, s'anomena **suma de Riemann per a la funció $\boldsymbol{f}$ en l'interval $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**.

El valor de la suma de Riemann S_f depèn de la partició $\mathcal{P}$ i la selecció $\mathcal{S}$ escollides.

Definició 3.7: Norma d'una partició

La **norma d'una partició $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ d'un interval $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**, denotada com a $||\mathcal{P}||$, és la longitud màxima de tots els subintervals definits per $\mathcal{P}$:

$$||\mathcal{P}|| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \ .$$

Com hem vist, quan la norma $||\mathcal{P}||$ es fa més menuda, la suma de Riemann s'aproxima al valor de l'àrea sota la corba de la funció f.

Definició 3.8: Integral de Riemann

Siga $f(x)$ definida en $[a, b]$. Siguen $\mathcal{P}$ i $\mathcal{S}$ de l'interval $[a, b]$. Direm que

$$S = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k - S \right| < \epsilon \qquad (3.15)$$

per a tot $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ amb $||\mathcal{P}|| < \delta$ i per a tot $\mathcal{S}$ de $[a, b]$. En aquest cas direm que

S és la **integral de Riemann de $f(x)$ en $[a, b]$** i escriurem

$$S = \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

Comentari: Si la partició $\mathcal{P}$ té tots els subintervals amb la mateixa longitud,

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} \,,$$

la suma de Riemann pren la forma

$$S_f = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x = (b-a) \sum_{k=1}^{n} \frac{f(c_k)}{n} \,,$$

i el límit $||\mathcal{P}|| \to 0$ és equivalent a $n \to \infty$.

Notació: La integral de Riemann també s'anomena **integral definida**. La notació que utilitzem va ser introduïda per Leibniz. El signe d'integració ($\int$) representa una lletra S allargada, un recordatori que la integral és una suma. Els valors a i b s'anomenen límits superior i inferior d'integració.

Definició 3.9: Funció integrable

Una funció $f(x)$ definida en l'interval $[a, b]$ és **integrable** si i només si existeix la integral definida en $[a, b]$.

Teorema 3.4

Si una funció f és contínua en l'interval $[a, b]$, aleshores és integrable en $[a, b]$.

Demostració. La prova rigorosa d'aquest teorema fa servir uns conceptes que van més enllà del curs i, per tant, no la donarem. No obstant això, la idea fonamental que hi ha darrere de la prova és senzilla. Si f és contínua aleshores sempre podrem escollir el punt c_k en cada subinterval de manera que $f(c_k)$ prenga el seu valor màxim en $[x_{k-1}, x_k]$. Això ens permet calcular la suma de Riemann superior. Igualment, podem escollir c_k de manera que $f(c_k)$ prenga el seu valor mínim en $[x_{k-1}, x_k]$ i calcular així la suma de Riemann inferior. És possible demostrar que les dues sumes tenen el mateix límit quan $||\mathcal{P}|| \to 0$. I com totes les sumes de Riemann es troben entre aquestes dues sumes, totes tenen el mateix límit. En conclusió f és integrable en $[a, b]$. $\square$

Comentari 1: Aquest teorema també és vàlid per a funcions que tenen un nombre finit de discontinuïtats de salt en l'interval $[a, b]$.

Comentari 2: El teorema 3.4 ens diu que per a una funció contínua tots els límits de sumes de Riemann tenen el mateix valor, independentment de la partició i selecció escollides. Per tant, el càlcul de la integral definida de qualsevol funció contínua pot fer-se escollint una partició i una selecció particulars.

Teorema 3.5

Si una funció f és integrable en l'interval $[a, b]$, aleshores és fitada en $[a, b]$.

Demostració. Suposem que f no és fitada en $[a, b]$. Sense pèrdua de generalitat, suposem que no és fitada per damunt en un subinterval $[x_{j-1}, x_j]$. Aleshores, no existeix cap nombre real A tal que $f(x) \leq A \; \forall x \in [x_{j-1}, x_j]$. Això implica que existeix un valor $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$ on $\lim_{x \to c_j} f(x) = \infty$. Podem, per tant, definir una selecció $\mathcal{S}$ en la qual per a $k \neq j$ escollim el punt c_k en cada subinterval de manera que $f(c_k)$ prenga el seu valor màxim en $[x_{k-1}, x_k]$, i per a $k = j$ escollim el punt c_j on la funció tendeix a infinit. Aleshores, la suma de Riemann resultant tendeix a infinit

$$S_f = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k = \sum_{k \neq j} f(c_k)\, \Delta x_k + f(c_j)\, \Delta x_j \to \infty$$

i no és possible verificar l'equació (3.15). □

Teorema 3.6: Propietats de la integral definida

Siguen f i g dues funcions integrables en l'interval $[a, b]$, o en $[a, b]$, $[b, c]$ i $[a, c]$ per a la propietat (vi), i $K \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$

(iii) $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0.$

(iv) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

(v) $\displaystyle\int_a^b K\, f(x)\, dx = K \int_a^b f(x)\, dx.$

(vi) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx.$

(vii) Si f té valors màxim i mínim en $[a, b]$, aleshores

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \max f \cdot (b - a)\,.$$

(viii) Si $f(x) \geq g(x)\, \forall x \in [a,b]$, aleshores $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

(ix) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Demostració. Les proves d'aquestes propietats es deriven directament de la definició d'integral definida com a límit d'una suma de Riemann. En alguns casos, es tracta de noves definicions que permeten estendre la definició original. Demostrarem ací les propietats (i)-(iv). Les proves de la resta de propietats poden trobar-se en l'apèndix D.

(i) Aquesta propietat ens diu que la integral definida no depèn de la variable d'integració. És un nombre real que només depèn de la funció i els límits d'integració.

(ii) Fins ara, havíem considerat intervals $[a,b]$ amb $a < b$. Aquesta propietat és en realitat una extensió de la definició al cas $a > b$.

(iii) Aquesta propietat també és una definició.

(iv) Considerem el cas de la suma. La prova per a la resta és completament anàloga. Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un nombre $\delta > 0$ tal que per a qualssevol partició $\mathcal{P}$ i selecció $\mathcal{S}$ de l'interval $[a,b]$, amb $||\mathcal{P}|| < \delta$, tenim

$$\left|S_{f+g} - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\right)\right| < \epsilon\,. \tag{3.16}$$

Com que f és integrable en $[a,b]$, existeix δ_1 tal que si $\mathcal{P}$ és una partició amb $||\mathcal{P}|| < \delta_1$ aleshores

$$\left|S_f - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

De manera similar, existeix un δ_2 tal que si $\mathcal{P}$ és una partició amb $||\mathcal{P}|| < \delta_2$ aleshores

$$\left|S_g - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Siga $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $\mathcal{P}$ és una partició amb $||\mathcal{P}|| < \delta$ trivialment trobem

$$S_{f+g} = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) + g(c_k)]\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\,\Delta x_k = S_f + S_g\,,$$

per a qualsevol selecció $\mathcal{S}$. Aleshores

$$\begin{aligned}\left|S_{f+g} - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\right)\right| &= \left|S_f + S_g - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\right)\right| \\ &\leq \left|S_f - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|S_g - \int_a^b g(x)\,dx\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,\end{aligned}$$

on hem fet ús de la desigualtat triangular per al mòdul. Ha quedat demostrada l'equació (3.16). $\square$

Exemple 3.3: Demostrem que

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x} \leq \sqrt{2}\,.$$

La funció $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ assoleix el seu valor màxim $\max f = \sqrt{2}$ quan $\cos x = 1$. Per la propietat (vii),

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x} \leq \max f \cdot (1-0) = \sqrt{2}\,.$$

Comentari: Com un cas especial de la propietat (viii), si $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, aleshores

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

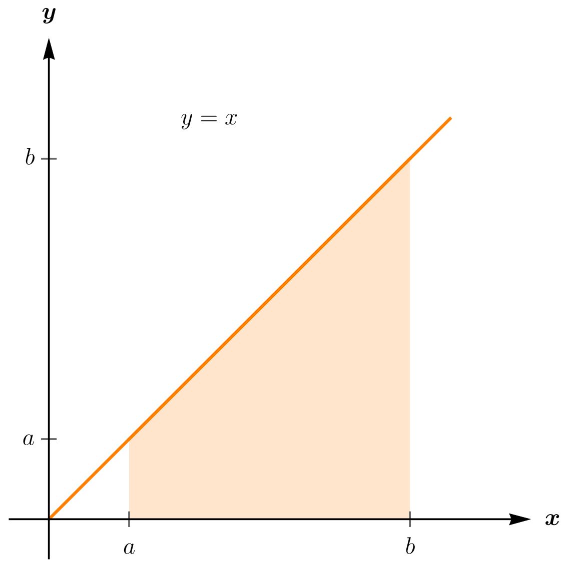
Aquest resultat és clau per a interpretar la integral definida com una àrea sota la corba.

Definició 3.10

Si $y = f(x)$ és no negativa i integrable en un interval tancat $[a,b]$, aleshores **l'àrea sota la corba $\boldsymbol{y = f(x)}$ en $\boldsymbol{[a,b]}$** és la integral de f de a a b,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Exemple 3.4: Calculem l'àrea sota la corba $y = x$ en l'interval $[a,b]$, amb $0 < a < b$:



Com que la funció $f(x) = x$ és contínua, el teorema 3.4 garanteix que qualsevol suma de Riemann té el mateix límit. Per tant, per a calcular la integral definida

$$A = \int_a^b x\,dx$$

podem escollir una partició i una selecció particulars. Escollim una partició $\mathcal{P}$ que divideix l'interval $[a, b]$ en n intervals de la mateixa longitud

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}\,,$$

i seleccionem c_k com l'extrem dret de cada subinterval, on la funció és màxima. La partició és

$$\mathcal{P} = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right\}\,,$$

i la selecció

$$\mathcal{S} = \left\{c_k = a + \frac{k(b-a)}{n}\right\}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Per tant, la suma de Riemann és

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \\ &= \frac{b-a}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} a + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right] = \frac{b-a}{n}\left[n\,a + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right]\,.\end{aligned}$$

La suma dels primers n nombres naturals $\sum_{k=1}^{n} k$ pot trobar-se a l'apèndix C. El resultat és $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ i, per tant,

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\left[n\,a + \frac{b-a}{n}\,\frac{n(n+1)}{2}\right] = (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2}\,\frac{n+1}{n}\,.$$

Finalment, trobem el límit d'aquesta expressió quan $n \to \infty$, el límit equivalent a $||\mathcal{P}|| \to 0$,

$$\begin{aligned} A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k &= (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Podem comprovar que el resultat és correcte calculant l'àrea per un mètode alternatiu. En aquest cas resulta senzill, ja que A és la diferència entre l'àrea d'un triangle de base i alçada b i l'àrea d'un triangle de base i alçada a:

$$A = \frac{1}{2} b \cdot b - \frac{1}{2} a \cdot a\,.$$

Definició 3.11: Valor mitjà

Si f és integrable en $[a, b]$, aleshores el seu **valor mitjà en $[a, b]$** és

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{3.18}$$

Comentari: Si m i M són els valors mínim i màxim de la funció $f$en l'interval $[a, b]$, aleshores la propietat (vii) del teorema 3.6 ens diu que

$$m \le \mu \le M\,.$$

Teorema 3.7: Teorema del valor mitjà per a integrals definides

Siga f una funció contínua en l'interval $[a, b]$. Aleshores, existeix almenys un punt $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Demostració. La funció f és contínua en $[a, b]$ i per tant, pel teorema 2.9, té un mínim m i un màxim M en aquest interval. Com hem vist, en aquest cas $m \le \mu \le M$, on μ és el valor mitjà de la funció en $[a, b]$, definit en l'equació (3.18). I de nou, com que f és contínua i pren valors m i M en $[a, b]$, el teorema 1.19 garanteix l'existència d'un punt c tal que s'assoleix el valor intermedi $f(c) = \mu$. Això demostra el teorema. □

Comentari: Aquest teorema significa que l'àrea sota la corba és igual a l'àrea del rectangle de base $b-a$ i alçada $f(c)$. De manera equivalent, també significa que per a tota funció contínua en $[a,b]$ existeix sempre un punt $c \in [a,b]$ tal que $f(c)$ és igual al valor mitjà de la funció en aquest interval.

3.4 El teorema fonamental del càlcul

Fins ara, la derivació i la integració han aparegut com a dues operacions independents, sense relació aparent entre si. D'una banda, la derivada ens dona una mesura de com varia una funció, mentre que la integral definida determina l'àrea davall la seua corba. Podria semblar que la integral indefinida estableix una relació entre aquestes, però, en principi, només té a veure amb la derivada, ja que es tracta de la seua operació inversa. Haver adoptat una notació semblant a la de la integral definida pot confondre'ns, però fins ara no hem vist cap relació entre si. Aquesta relació és expressada pel teorema fonamental del càlcul.

Teorema 3.8: Teorema fonamental del càlcul (I)

Siga $f(x)$ una funció contínua en $[a,b]$. Aleshores

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b), i la seua derivada és $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,.$$

Demostració. Apliquem la definició de derivada a la funció $F(x)$, quan x i $x+h$ estan en (a,b):

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \underset{\text{P(vi)}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

on hem fet servir la propietat (vi) de la integral definida. Segons el teorema del valor mitjà per a integrals definides, existeix un punt $c \in [x, x+h]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Com que $x < c < x+h$, quan $h \to 0$, $c \to x$. Aleshores, com que f és contínua en el punt x, $f(c) \to f(x)$:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)\,.$$

En conclusió, tenim

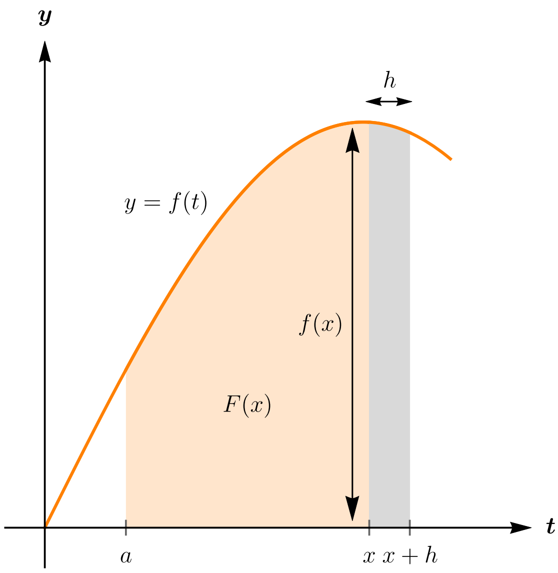
$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x)\,.$$

Si $x = a$ o $x = b$, el límit de l'equació (3.19) és un límit lateral amb $h \to 0^+$ o $h \to 0^-$. Finalment, el teorema 2.2 implica que F és contínua. I així conclou la prova. □

Comentari: En la definició de la funció $F(x)$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,,$$

a és un límit que deixem fix i x és un límit variable. Per tant, si $f(t) \geq 0$ $\forall t \in [a, x]$, $F(x)$ és l'area sota la corba $y = f(t)$ en l'interval $[a, x]$, i és llavors una funció de x. A més, la diferència $F(x + h) - F(x)$ representa la diferència entre l'àrea baix la corba en l'interval $[a, x + h]$ i l'àrea sota la corba en l'interval $[a, x]$, com representem en aquesta figura en color gris:



Si h és una quantitat menuda, l'àrea de la regió en color gris és aproximadament $h \cdot f(x)$. Aleshores,

$$F(x + h) - F(x) \approx h \cdot f(x)\,,$$

i, per tant,

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} \approx f(x)\,,$$

i el límit d'aquesta expressió quan $h \to 0$ és $F'(x)$. Encara que aquest raonament no és una demostració, ens dona una idea intuïtiva i una interpretació geomètrica del teorema 3.8.

Corol·lari. Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$, aleshores té primitiva en $[a,b]$.

Aquest resultat és evident a partir del teorema 3.8. Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$ aleshores és integrable en aquest interval, com ens diu el teorema 3.4 i, per tant, existeix la seua funció primitiva $F(x)$, que verifica el teorema 3.8. Ara bé, que una funció tinga primitiva no significa necessàriament que aquesta puga ser expressada en termes de funcions elementals. Per exemple, la funció $f(x) = e^{-x^2}$ és contínua en tot el seu domini, i aleshores és integrable i té primitiva, però no és possible escriure la funció $F(x)$ corresponent en termes de funcions elementals.

Teorema 3.9: Teorema fonamental del càlcul (II). Newton-Leibniz

Siga $f(x)$ una funció contínua en $[a,b]$ i siga F qualsevol primitiva de f en $[a,b]$. Aleshores

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{3.20}$$

Aquest teorema, que també es coneix com a **regla de Barrow**, proporciona una manera alternativa de calcular integrals definides. En lloc de construir sumes de Riemann i calcular els seus límits, podem obtenir integrals definides a partir de la primitiva de la funció a integrar, avaluada en els dos límits d'integració.

Demostració. La primera part del teorema fonamental del càlcul implica l'existència d'una primitiva de f, que es pot calcular com a

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

El corol·lari 2 del teorema 2.12 ens diu que qualsevol primitiva de la funció f pot ser expressada com a $F(x) = G(x) + C$, amb C una constant. Com que F i G són contínues en $[a,b]$, aquesta igualtat també és certa per a $x = a$ i $x = b$. Aleshores, fent servir les propietats de les integrals definides, calculem

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] = G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \underset{\text{P(iii)}}{=} \int_a^b f(t)\,dt \underset{\text{P(i)}}{=} \int_a^b f(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

$\square$

Notació: La diferència $F(b) - F(a)$ s'escriu a vegades com a

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b = [F(x)]_a^b\,.$$

Exemple 3.5:

$$\int_a^b x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,.$$

El resultat coincideix amb l'obtingut en l'equació (3.17). En aquell exemple usàrem la definició de la integral definida en termes del límit de les sumes de Riemann. En aquest cas ha sigut molt més fàcil d'obtenir, ja que només ha calgut calcular la primitiva de la funció $f(x) = x$ i avaluar-la en $x = b$ i $x = a$.

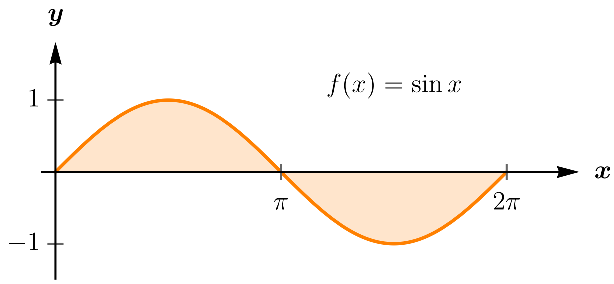
Exemple 3.6: Calculem el valor mitjà de la funció $f(x) = \sin x$ en l'interval $[0, 2\pi]$. Per la definició 3.11, el podem calcular com a

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cos x|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\cos 0 - \cos 2\pi) = 0\,.$$

La interpretació d'aquest resultat és senzilla. Les integrals definides entre 0 i π i entre π i 2π són iguals però de signe contrari:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = 0\,.$$

La primera integral, $\int_0^\pi \sin x\,dx$ es correspon amb l'àrea sota la corba de la funció $\sin x$, que és no negativa en $[0, \pi]$. La segona integral pot interpretar-se com una *àrea negativa*, en aquest cas damunt de la corba de la funció $\sin x$, que és no positiva en $[\pi, 2\pi]$:



Si volguérem calcular l'àrea entre la funció $\sin x$ i l'eix x entre 0 i 2π hauríem de canviar-li el signe a la integral entre π i 2π, i d'aquesta manera fer-la positiva. Això s'aconsegueix prenent els mòduls de les dues integrals definides:

$$A = \left|\int_0^{\pi} \sin x\,dx\right| + \left|\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx\right| = |\cos 0 - \cos\pi| + |\cos\pi - \cos 2\pi| = |2| + |-2| = 4\,.$$

En general, per a calcular l'àrea entre una funció $f(x)$ i l'eix x en un interval $[a, b]$, s'han de donar els següents passos:

1. Dividir l'interval $[a, b]$ en els punts on funció $f(x)$ es fa zero.
2. Calcular la integral definida en cada subinterval.
3. Sumar els mòduls de les integrals definides.

Teorema 3.10: Regla de substitució per a integrals definides

Si $t = g(x)$ és una funció contínua en l'interval $[a, b]$, amb rang R_g, i f és contínua en R_g, aleshores

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt\,.$$

Demostració. Siga F qualsevol primitiva de f. Aleshores aplicant la regla de la cadena trobem

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)\,,$$

i, per tant,

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} = F(g(b)) - F(g(a)) = F(t)\big|_{t=g(a)}^{t=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt\,.$$

$\square$

Aquest teorema és una versió del mètode del canvi de variable per a integrals definides. En la pràctica, tenim dues maneres de calcular una integral definida amb canvi de variable. Podem primer trobar la primitiva amb una integral indefinida en la qual apliquem un canvi de variable, o fer un canvi de variable en la integral definida i després trobar la primitiva. En el segon cas s'ha de tenir en compte que en l'aplicació del canvi de variable en les integrals definides s'han de canviar també els límits d'integració.

Exemple 3.7:

$$I = \int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\,.$$

- **Mètode 1:**

Canvi de variable

$$x^3 + 1 = t \quad \Rightarrow \quad 3x^2 dx = dt\,,$$

que, segons el teorema 3.10, també s'ha d'aplicar als límits d'integració:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1 \\ \\ x = -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ \\ t = 0 \end{array}\right.$$

$$I = \int_0^2 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 0^{3/2}\right) = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,.$$

- **Mètode 2:**

Considerem primer la integral indefinida

$$\int 3x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx\,,$$

que podem resoldre fent el canvi de variable

$$x^3 + 1 = t \quad \Rightarrow \quad 3x^2 dx = dt\,,$$

$$\int 3x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx = \int \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C\,.$$

Aleshores

$$I = \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\left[\left(1^3+1\right)^{3/2} - \left((-1)^3+1\right)^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 0^{3/2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,.$$

Trobem el mateix resultat.

Teorema 3.11

Siga $f(x)$ una funció integrable en $[-a, a]$, $a > 0$. Aleshores:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx\,, & \text{si } f(-x) = f(x) \quad \text{(funció parella)} \\ 0\,, & \text{si } f(-x) = -f(x) \quad \text{(funció imparella)} \end{cases}$$

Demostració.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx \underset{\mathrm{P(vi)}}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx\,.$$

Li apliquem ara a la primera integral

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx$$

el canvi de variable

$$x = -t \quad \Rightarrow \quad dx = -dt\,,$$

$$\left.\begin{array}{c} x = 0 \\ \\ x = -a \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ \\ t = a \end{array}\right.$$

Trobem

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) \underset{\mathrm{P(ii)}}{=} \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx\,,$$

on en l'últim pas simplement hem canviat el nom de la variable d'integració. Aleshores, hem trobat el resultat

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \underset{\mathrm{P(vi)}}{=} \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \underset{\mathrm{P(iv)}}{=} \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx\,.$$

Si f és una funció parella, $f(-x) = f(x)$, obtenim

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} 2\,f(x)\,dx \underset{\mathrm{P(v)}}{=} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$

Si f és una funció imparella, $f(-x) = -f(x)$, obtenim

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} 0\cdot dx \underset{\mathrm{P(v)}}{=} 0\,.$$

□

Exemple 3.8: Considerem la integral definida

$$I = \int_{-2}^{2} \left(x^3 \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4-x^2}\,dx\,.$$

Aparentment, el càlcul és molt complicat, ja que no és fàcil trobar la primitiva de la funció

$$f(x) = \left(x^3 \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{4-x^2}\,,$$

i, per tant, no podem utilitzar la regla de Barrow. Ara bé, si ens fixem en la forma de $f(x)$ és fàcil veure que es tracta de la suma d'una funció imparella $f_I(x)$ i una altra parella $f_P(x)$:

$$\begin{aligned} f_I(x) &= x^3 \cos\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\,, \\ f_P(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,. \end{aligned}$$

Com que l'interval d'integració és simètric respecte de $x = 0$, el teorema 3.11 ens diu que la contribució de $f_I(x)$ a la integral és nul·la:

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} f_P(x)\,dx\,.$$

I la integral definida de f_P és fàcilment calculable amb el canvi de variable

$$x = 2\sin t \quad \Rightarrow \quad dx = 2\cos t\,dt\,,$$

$$\left.\begin{array}{r} x=2 \\ \\ x=-2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{2} \\ \\ t=-\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$I=\int_{-2}^{2} f_P(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\,.$$

Apliquem ara la identitat

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\,,$$

amb la qual podem escriure

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\;dt=\left[t+\frac{1}{2}\,\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\,\sin\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\,\sin(-\pi)\right)=\pi\,.$$

El teorema fonamental del càlcul relaciona derivades e integrals i, com hem vist, fa possible utilitzar molts resultats de les integrals indefinides en el càlcul d'integrals definides. El mètode del canvi de variable és un exemple, i el de la integració per parts un altre. Recordem la fórmula d'integració per parts per a la integral indefinida

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx\,. \tag{3.21}$$

Seguint un procediment anàleg, es pot trobar la **fórmula d'integració per parts per a la integral definida**:

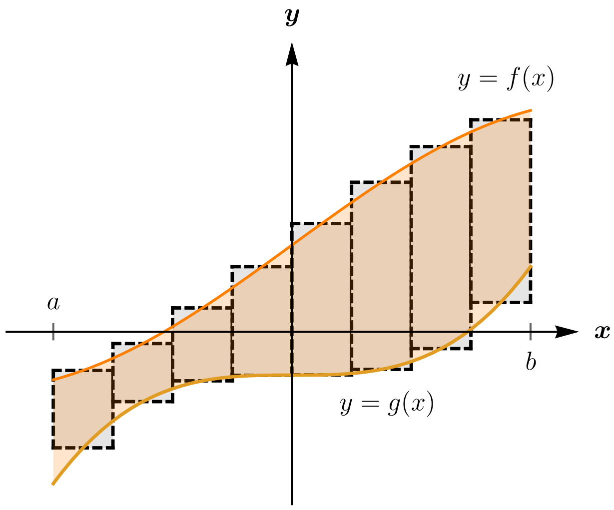
$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx=\left.f(x)\,g(x)\right|_a^b-\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx\,. \tag{3.22}$$

3.5 Aplicacions de la integral definida

En la secció 3.4 hem vist una aplicació de la integral definida, el càlcul d'àrees sota la corba definida per una funció. En aquesta secció veurem altres aplicacions de la integral definida, que també pot fer-se servir per a calcular altres longituds, àrees i volums.

Àrea entre dues corbes

Per a determinar l'àrea entre les corbes $y=f(x)$ i $y=g(x)$ entre dos punts a i b, amb $f(x)\geq g(x)$ per a tot x en $[a,b]$, podem seguir un procediment similar al ja conegut. Primer definim una partició $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ de l'interval $[a,b]$, i fem una selecció de punts $\mathcal{S}=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ amb $c_k\in[x_{k-1},x_k]$. Aproximem la regió amb n rectangles, amb base $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ i alçada $f(c_k)-g(c_k)$:



L'àrea s'obté com la suma de Riemann

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \left[f(c_k) - g(c_k) \right] \Delta x_k \, .$$

Si f i g són contínues en $[a, b]$ i prenem el límit $||\mathcal{P}|| \to 0$, la suma tendeix a la integral definida de la funció $f(x) - g(x)$ entre a i b:

$$A = \lim_{||\mathcal{P}|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[f(c_k) - g(c_k) \right] \Delta x_k = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \, .$$

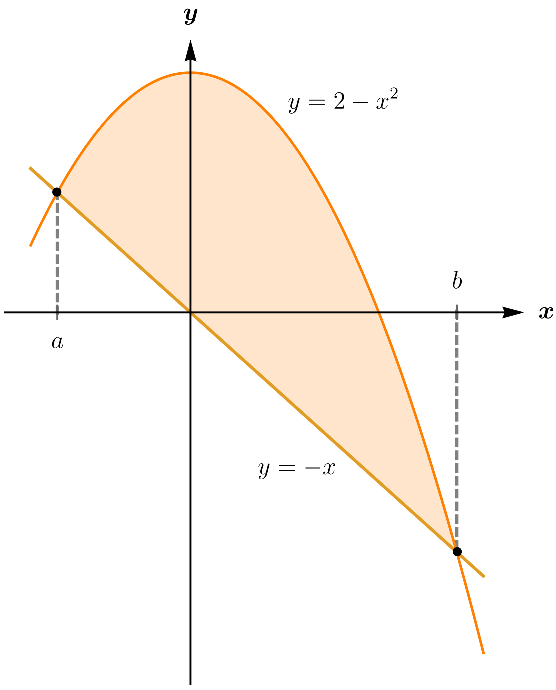
Definició 3.12: Àrea entre dues corbes

Si f i g són funcions contínues en l'interval $[a, b]$, amb $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, aleshores **l'àrea de la regió entre les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ de a a b** és

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] \, dx \, .$$

A vegades, els límits d'integració a i b són definits pels punts on les corbes es tallen.

Exemple 3.9: Calculem l'àrea entre la paràbola $y = 2 - x^2$ i la recta $y = -x$. Si dibuixem les dues corbes trobem que es tallen en dos punts:



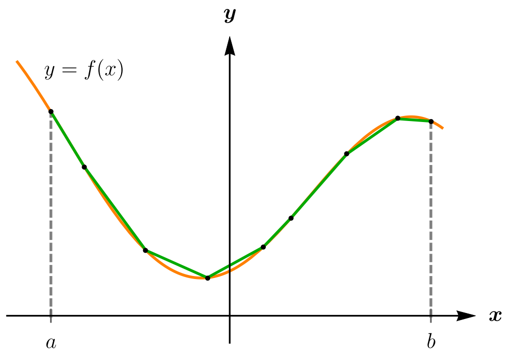
Els podem trobar simplement resolent l'equació $2 - x^2 = -x$, que té per solucions $x = -1$ i $x = 2$. Aleshores, els límits d'integració són $a = -1$ i $b = 2$. L'àrea entre les dues corbes és

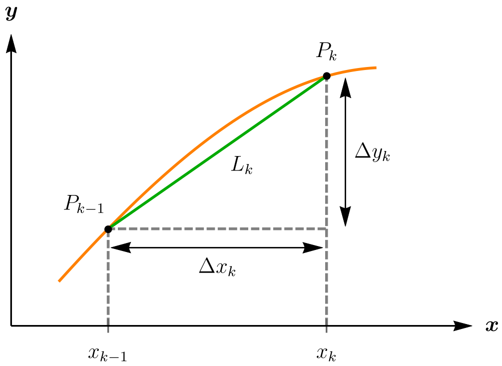
$$A = \int_{-1}^{2} \Big[(2 - x^2) - (-x) \Big] \, dx = \int_{-1}^{2} \left(2 + x - x^2 \right) dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-1}^{2}$$
$$= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} \, .$$

El resultat és un nombre real positiu, com era d'esperar perquè la interpretació en termes d'una àrea siga possible.

Longitud d'una corba plana

Suposem que volem calcular la longitud d'una corba $y = f(x)$ entre dos punts $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$. Si la funció té derivada contínua en $[a, b]$ podem seguir un procediment similar al que ja coneixem. Dividim l'interval $[a, b]$ en n subintervals, amb $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Si $y_k = f(x_k)$, el punt $P_k = (x_k, f(x_k))$ forma part de la corba. A continuació connectem els punts consecutius P_{k-1} i P_k amb un segment de recta. Junts, els segments aproximen la corba.





Considerem un segment particular entre els punts P_{k-1} i P_k. Si $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ i $\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1})$, el teorema de Pitàgores ens diu que la longitud del segment és

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \, .$$

Pel teorema del valor mitjà de Lagrange (teorema 2.12), existeix un punt c_k amb $x_{k-1} < c_k < x_k$, tal que

$$\Delta y_k = f'(c_k) \, \Delta x_k \, ,$$

i aleshores

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k) \, \Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \, \Delta x_k \, .$$

La longitud total de la corba entre A i B s'aproxima per

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \, \Delta x_k \, .$$

La longitud L té la forma d'una suma de Riemann. Aleshores, si fem la divisió en subintervals més fina, L tendeix a una integral indefinida:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2} \, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \, .$$

Definició 3.13: Longitud d'una corba

Si f' és contínua en l'interval $[a, b]$, aleshores la **longitud de la corba** $y = f(x)$ entre el punt $(a, f(a))$ i el punt $(b, f(b))$ és

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \, . \tag{3.23}$$

Exemple 3.10: Calculem la longitud de la corba $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ entre 1 i 4. Primer calculem f':

$$f'(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2} .$$

Per tant,

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2} \right)^2 = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right)^2 ,$$

i la longitud resulta

$$L = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right)^2 dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x} \right]_1^4 = \left(\frac{64}{12} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{1}{12} - 1 \right) = 6 .$$

Exemple 3.11: Calculem la longitud d'una circumferència de radi R i l'àrea d'un cercle de radi R. L'equació de la circumferència és

$$x^2 + y^2 = R^2 ,$$

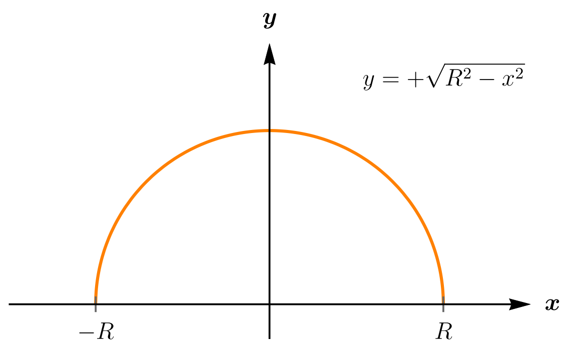
i aleshores

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} .$$

Tècnicament, y no és una funció, ja que per a cada valor de la variable independent x trobem dos valors per a la variable dependent y. Ara bé, definim

$$f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2} ,$$

i aleshores la longitud de la circumferència serà el doble de la longitud de la corba $y = f(x)$ entre $x = -R$ i $x = R$:



Calculem primer la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

i llavors

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

Ara substituïm en l'equació (3.23) i obtenim

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2R \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \underset{\mathrm{T}3.11}{=} 4R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= 4R \left[\arcsin \frac{x}{R}\right]_0^R = 4R\,[\arcsin 1 - \arcsin 0] = 4R \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 2\,\pi R. \end{aligned}$$

Finalment, l'àrea del cercle de radi R és el doble de l'àrea sota la corba $y = f(x)$ i es calcula directament com a

$$A = 2\int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \underset{\mathrm{T}3.11}{=} 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Fem el canvi de variable

$$x = R\,\sin t \quad \Rightarrow \quad dx = R\,\cos t\, dt,$$

$$\left.\begin{array}{c} x = R \\ \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} t = \frac{\pi}{2} \\ \\ t = 0 \end{array}\right.$$

i obtenim

$$A = 4\,R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt.$$

Per a resoldre aquesta integral fem servir les tècniques que vam veure en la secció 3.2. En particular, aquest tipus d'integrals poden ser transformades en immediates amb identitats trigonomètriques com a

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

que ens permeten escriure

$$\begin{aligned} A &= 2\,R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\; dt = 2\,R^2 \left[t + \frac{1}{2}\,\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\,R^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin \pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right] = 2\,R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi R^2. \end{aligned}$$

Comentari 1: En alguns casos pot interessar calcular la longitud de la corba expressant x com a funció de y i integrant sobre la variable y. En particular, si la derivada $\frac{dy}{dx}$ no existeix en algun punt, és possible que la derivada $\frac{dx}{dy}$ sí que existisca. En aquest cas, si g' és contínua en $[c, d]$, la longitud de la corba $x = g(y)$ entre els punts $A = (g(c), c)$ i $B = (g(d), d)$ és

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy\,.$$

Comentari 2: Si $y = f(x)$ és contínua en $[a, x]$, el teorema fonamental del càlcul ens permet definir la funció

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt\,.$$

La funció $s(x)$ s'anomena **funció longitud d'arc**. És una funció contínua que mesura la longitud de la corba $y = f(x)$ entre el punt inicial $(a, f(a))$ i el punt $(x, f(x))$. Segons el teorema fonamental del càlcul, $s(x)$ és derivable i té per derivada

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.$$

El seu diferencial és

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\,,$$

i podem escriure

$$ds^2 = dx^2 + dy^2\,.$$

Aleshores, l'equació (3.23) és equivalent a

$$L = \int_a^b ds\,.$$

El diferencial ds té una interpretació geomètrica senzilla. Si prenem increments Δx i Δy, la longitud de la corba varia una quantitat Δs, amb $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Si els increments són diferencials, $\Delta x \approx dx$ i $\Delta y \approx dy$, s varia el diferencial ds.

Exemple 3.12: Com vam veure en el tema 2, una circumferència de radi R és expressada en forma paramètrica per

$$x = R\,\cos t\,,$$
$$y = R\,\sin t\,,$$

amb $0 \leq t \leq 2\pi$. Calculem de nou la longitud, però ara a partir de la forma paramètrica. En general, tenim una expressió de la forma

$$x = \psi(t)\,,$$
$$y = \phi(t)\,,$$

amb $t_1 \leq t \leq t_2$. El diferencial de longitud d'arc pot expressar-se com a

$$ds = \left[dx^2 + dy^2\right]^{1/2} = \left[\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 dt^2\right]^{1/2} = \left[\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt\,.$$

I aleshores

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt\,. \tag{3.24}$$

En aquest cas particular $\psi(t) = R\,\cos t$, $\phi(t) = R\,\sin t$, $t_1 = 0$ i $t_2 = 2\pi$. Aleshores

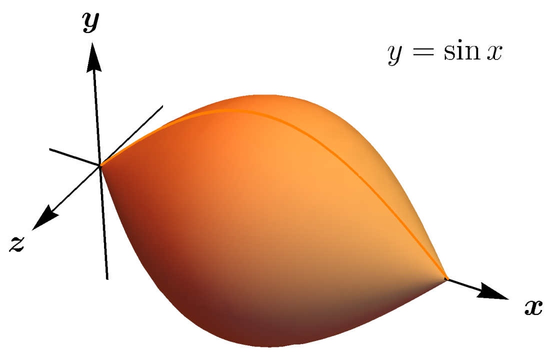
$$\frac{d\psi}{dt} = -R\,\sin t\,,$$
$$\frac{d\phi}{dt} = R\,\cos t\,,$$

i substituint en l'equació (3.24),

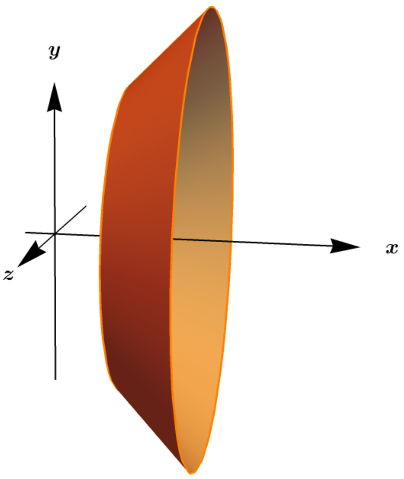
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\,\sin^2 t + R^2\,\cos^2 t}\,dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\,\pi R\,.$$

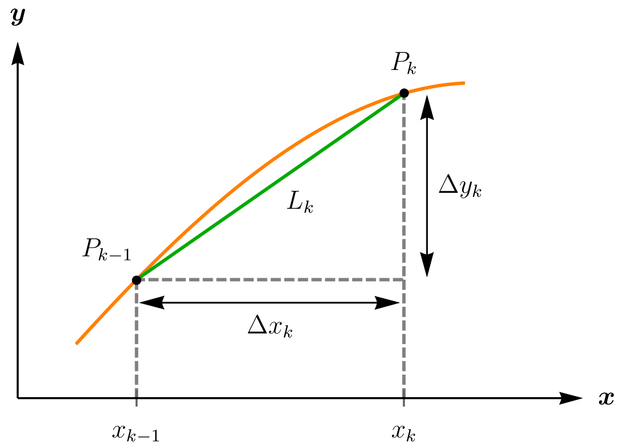
Àrea d'una superfície de revolució

Una **superfície de revolució** és la que es genera mitjançant la rotació d'una corba plana al voltant d'una recta directriu, anomenada eix de rotació, la qual es troba en el mateix pla que la corba. El següent exemple mostra la superfície de revolució generada per la rotació de la corba $y = \sin x$ al voltant de l'eix x entre els punts $x = 0$ i $x = \pi$:



Per a calcular l'àrea d'una superfície de revolució utilitzem un mètode similar a l'anterior. Suposem que volem calcular l'àrea d'una superfície de revolució generada per la rotació d'una corba entre dos punts $x = a$ i $x = b$ al voltant de l'eix x. Dividim l'interval $[a, b]$ en n subintervals, amb $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A continuació connectem punts consecutius amb segments de recta i considerem un segment particular en l'interval $[x_{k-1}, x_k]$. Com ja sabem, la longitud d'aquest segment és $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$, amb $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ i $y_k = f(x_k)$. La seua revolució al voltant de l'eix x genera un **tronc de con**:





L'àrea d'un tronc de con és el producte de la semisuma dels perímetres de les bases per la generatriu. En aquest cas, aquesta regla general es tradueix en

$$S_k = \frac{1}{2} \left[2\,\pi\, f(x_{k-1}) + 2\,\pi\, f(x_k) \right] L_k = \pi \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right] \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \,.$$

Pel teorema del valor mitjà de Lagrange (teorema 2.12), existeix un punt c_k amb $x_{k-1} < c_k < x_k$, tal que

$$\Delta y_k = f'(c_k)\, \Delta x_k \,,$$

i aleshores

$$S_k = \pi \left[f(x_{k-1}) + f(x_k) \right] \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\, \Delta x_k \,.$$

L'expressió resultant no és exactament una suma de Riemann, ja que el factor $f(x_{k-1}) + f(x_k)$ no està avaluat en $x = c_k$. Ara bé, en el límit $n \to \infty$ la diferència Δx_k es fa més menuda i $f(x_{k-1}) + f(x_k)$ tendeix a $2\, f(c_k)$. Aleshores $S = \sum_{k=1}^{n} S_k$ tendeix a una integral definida.

Definició 3.14: Àrea de la superfície de revolució al voltant de l'eix $\boldsymbol{x}$

Si $f'(x)$ és contínua en $[a,b]$, amb $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]$, **l'àrea de la superfície de revolució** en fer girar la corba $y = f(x)$ **al voltant de l'eix $\boldsymbol{x}$** és

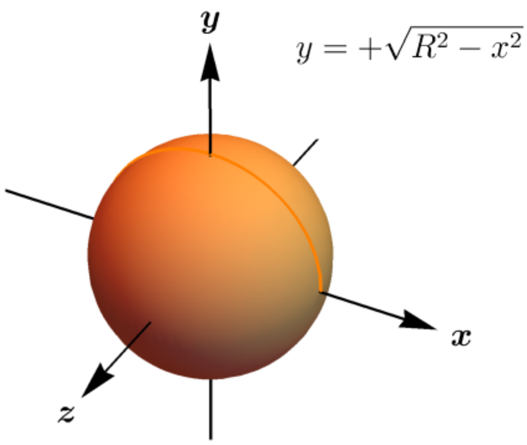
$$S = 2\,\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,. \tag{3.25}$$

En forma diferencial, aquesta definició és equivalent a

$$dS = 2\,\pi\,y \cdot ds\,,$$

on ds és el diferencial de longitud d'arc. La interpretació geomètrica és clara. L'àrea dS de la superfície de revolució generada per la rotació d'un diferencial de longitud d'arc ds és la del rectangle de base $2\,\pi\,y$ i alçada ds.

Exemple 3.13: Calculem l'àrea d'una esfera de radi R, la superfície de revolució generada per la funció $f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$:



En l'exemple 3.11 trobàrem

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}\,.$$

Aleshores, substituint en l'equació (3.25) obtenim

$$S = 2\,\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 2\,\pi R \int_{-R}^{R} dx \underset{\text{T3.11}}{=} 4\,\pi R \int_0^R dx$$
$$= 4\,\pi\,R^2\,.$$

Igualment, és possible considerar la rotació d'una corba al voltant de l'eix y. El càlcul de l'àrea de la superfície de revolució generada és completament anàleg.

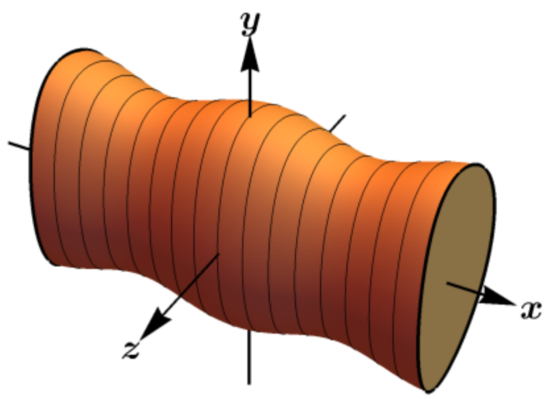
Definició 3.15: Àrea de la superfície de revolució al voltant de l'eix y

Si $g'(y)$ és contínua en $[c,d]$, amb $x = g(y) \geq 0 \; \forall y \in [c,d]$, **l'àrea de la superfície de revolució** en fer girar la corba $x = g(y)$ **al voltant de l'eix y** és

$$S = 2\,\pi \int_c^d g(y)\,\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy\,. \tag{3.26}$$

Volum d'un sòlid de secció transversal coneguda

El volum d'un cilindre que té base amb àrea A i alçada h és simplement $V = A \cdot h$. Aquest resultat ben conegut pot ser estès a sòlids més complicats si coneixem la secció transversal en cada punt. Considerem un sòlid general. La secció transversal en cada punt x de l'interval $[a,b]$ té àrea $A(x)$, una funció contínua de x que se suposa coneguda. Dividim l'interval $[a,b]$ en n subintervals, amb $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Això divideix el sòlid en n *llesques*. Considerem ara el subinterval $[x_{k-1}, x_k]$, corresponent a una llesca de volum V_k.



Aproximem V_k pel volum d'un cilindre de base amb àrea $A(x_k)$ i alçada $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$$V_k \approx A(x_k)\,\Delta x_k\,,$$

i aleshores, el volum total entre a i b és

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_k \approx \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\,\Delta x_k\,.$$

Aquesta aproximació millora quan la distància entre x_{k-1} i x_k es fa més menuda, és a dir, quan $n \to \infty$ o, equivalentment, quan la norma de la partició definida tendeix a zero.

En conclusió

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\, \Delta x_k = \int_a^b A(x)\, dx\,.$$

Definició 3.16: Volum d'un sòlid de secció transversal coneguda

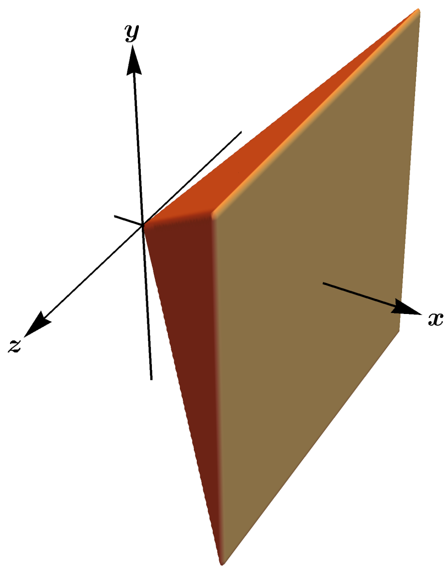
Siga un sòlid de secció transversal d'àrea $A(x)$ coneguda, amb $A(x)$ una funció integrable en $[a, b]$. Aleshores, el seu **volum** des de $x = a$ fins a $x = b$ és

$$V = \int_a^b A(x)\, dx\,. \tag{3.27}$$

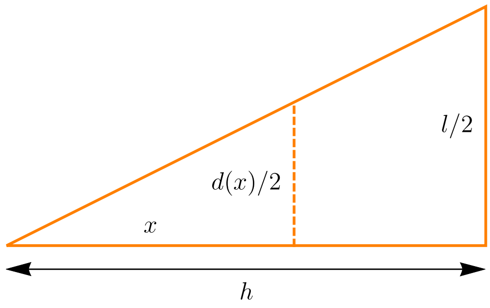
La forma diferencial d'aquesta definició és

$$dV = A\, dx\,.$$

Exemple 3.14: Calculem el volum d'una piràmide d'alçada h i base quadrada de costat l. Dibuixem la piràmide amb el seu vèrtex en l'origen i la seua alçada al llarg de l'eix x:



Les seccions transversals de la piràmide en cada valor de la variable x són quadrats amb costats $d(x)$. El valor de $d(x)$ pot trobar-se fàcilment per semblança de triangles:



Aleshores,

$$d(x) = l \, \frac{x}{h} \, ,$$

i l'àrea de cada secció transversal és

$$A(x) = d(x)^2 = l^2 \, \frac{x^2}{h^2} \, .$$

Finalment, podem aplicar l'equació (3.27) per a trobar el volum de la piràmide:

$$V = \int_0^h A(x) \, dx = \frac{l^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx = \frac{l^2}{h^2} \, \frac{x^3}{3} \bigg|_0^h = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \, l^2 \, h \, .$$

Volum d'un sòlid de revolució

En un sòlid de revolució generat per la rotació d'una corba $y = f(x)$ al voltant de l'eix x totes les seccions transversals són cercles de radi $R(x) = f(x)$. Per tant, es tracta d'un cas particular de sòlid amb secció transversal coneguda, amb

$$A(x) = \pi \, R(x)^2 = \pi \, f(x)^2 \, ,$$

i aleshores, el volum generat entre els punts $x = a$ i $x = b$ és

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, . \tag{3.28}$$

Exemple 3.15: Calculem el volum d'una esfera de radi R. Per l'exemple 3.11, ja sabem que l'esfera de radi R es genera per revolució al voltant de l'eix x de la funció $f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$. Per tant, per aplicació directa de l'equació (3.28):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2 \right) \, dx \underset{\text{T3.11}}{=} 2\,\pi \int_0^R \left(R^2 - x^2 \right) \, dx \\ &= 2\,\pi \left[R^2 \, x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\,\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\,\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 \\ &= \frac{4}{3} \, \pi \, R^3 \, . \end{aligned}$$

Comentari: El procediment és anàleg si el sòlid de revolució es genera per rotació d'una corba $x = g(y)$ al voltant de l'eix y. En aquest cas el volum del sòlid generat entre els punts $y = c$ i $y = d$ es calcula com a

$$V = \int_c^d A(y)\,dy = \pi \int_c^d g(y)^2\,dy\,.$$

3.6 Integrals impròpies

La definició de la integral definida (definició 3.8) té dos requisits. En primer lloc, l'interval d'integració és finit, i en segon lloc, l'integrand és finit en tots els punts de l'interval d'integració. Introduïm ara un nou concepte, la **integral impròpia**, que permet anar més enllà i considerar altres casos.

Definició 3.17: Integral impròpia de tipus I

Les integrals amb límits d'integració infinits s'anomenen **integrals impròpies de tipus I**.

1. Si $f(x)$ és contínua en $[a, \infty)$, aleshores

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

2. Si $f(x)$ és contínua en $(-\infty, b]$, aleshores

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

3. Si $f(x)$ és contínua en $(-\infty, \infty)$, aleshores

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx\,,$$

   on c és qualsevol nombre real.

En cada cas, si el límit és finit, direm que la integral impròpia **convergeix** i que el límit és el valor de la integral impròpia. Si el límit no existeix, la integral impròpia **divergeix**.

Comentari 1: L'elecció de c en la part 3 de la definició no és important i, per tant, en la pràctica es pot escollir qualsevol valor que resulte convenient per al càlcul.

Comentari 2: Les integrals de la definició poden ser interpretades com a àrees si $f(x) \geq 0$ en l'interval d'integració. En aquest cas, l'àrea sota la corba $y = f(x)$ serà finita si la integral impròpia convergeix i infinita si divergeix.

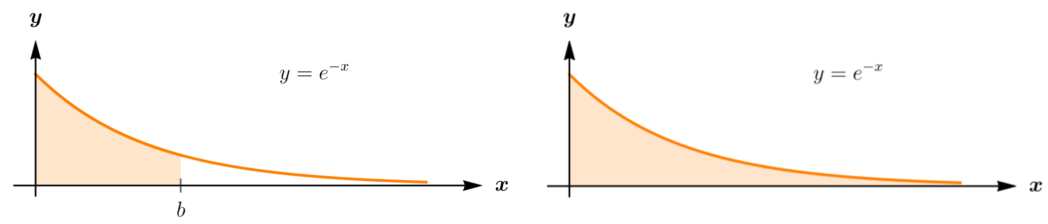
Exemple 3.16: Calculem

$$\int_0^\infty e^{-x}\,.$$

Com que $e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, aquesta integral impròpia és l'àrea sota la corba $y = e^{-x}$ entre 0 i ∞. Podem calcular-la com a

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} A(b)\,,$$

on $A(b)$ és l'àrea sota la corba entre 0 i b:



Primer calculem $A(b)$,

$$A(b) = \int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\big|_0^b = -e^{-b} + 1\,,$$

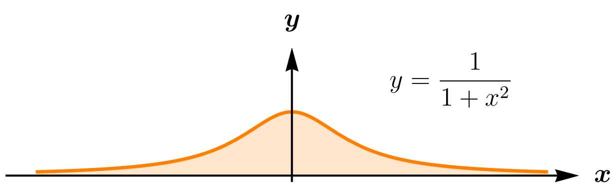
i després calculem el límit,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + 1\right) = 1\,.$$

Exemple 3.17: Calculem

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Com que $\frac{1}{1+x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, aquesta integral impròpia és l'àrea sota la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ entre $-\infty$ i ∞:



Ens trobem en el cas 3 de la definició 3.17 i escollim $c = 0$. Aleshores, podem escriure

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

i avaluar les dues integrals impròpies resultants:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \\
\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{b\to\infty} \arctan x\big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aleshores, l'àrea sota la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ entre $-\infty$ i ∞ és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Pot comprovar-se fàcilment que si haguérem escollit un altre valor per a c el resultat final hauria sigut exactament el mateix.

Exemple 3.18: Calculem

$$I(\alpha) = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Calculem primer la primitiva de la funció $\frac{1}{x^\alpha}$:

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \\ \ln x & \alpha = 1 \end{cases}$$

Considerem dos casos:

- $\alpha = 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \ln x\big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - 0) = \ln \lim_{b\to\infty} b = \infty,$$

on hem intercanviat l'ordre del càlcul del límit i el logaritme aprofitant que es tracta d'una funció contínua. En conclusió, $I(1)$ divergeix.

- $\alpha \neq 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{b\to\infty} x^{-\alpha+1}\Big|_1^b = \frac{1}{-\alpha+1} \lim_{b\to\infty} \left(b^{-\alpha+1}-1\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha}\right] .$$

El límit $\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha}$ depèn del signe de $1-\alpha$. Si $1-\alpha > 0$, el límit és infinit, i si $1-\alpha < 0$, el límit és 0. Aleshores

$$I(\alpha) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \begin{cases} \text{divergeix} & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \text{convergeix a } \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

De nou, la interpretació en termes d'àrees ajuda a verificar el resultat. L'àrea baix la corba de la funció $f(x) = x^2$ entre 1 i ∞ és $I(-2)$, que evidentment divergeix.

Definició 3.18: Integral impròpia de tipus II

Les integrals de funcions amb asímptotes verticals en un punt de l'interval d'integració s'anomenen **integrals impròpies de tipus II**.

1. Si $f(x)$ és contínua en $(a,b]$ i discontínua en a, aleshores
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx .$$
2. Si $f(x)$ és contínua en $[a,b)$ i discontínua en b, aleshores
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx .$$
3. Si $f(x)$ és discontínua en c, amb $a < c < b$, i és contínua en $[a,c) \cup (c,b]$, aleshores
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

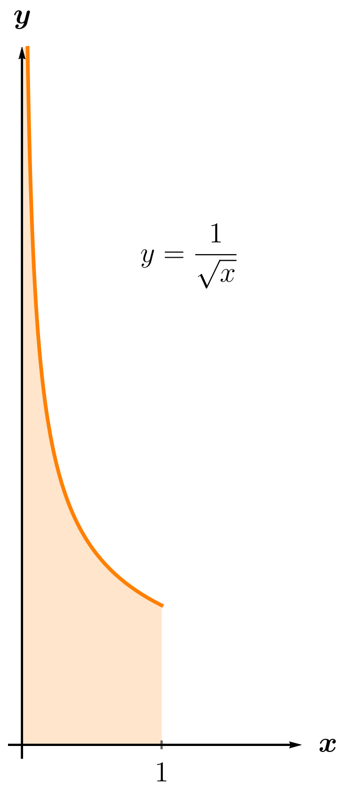
En cada cas, si el límit és finit, direm que la integral impròpia **convergeix** i que el límit és el valor de la integral impròpia. Si el límit no existeix, la integral impròpia **divergeix**.

Comentari: De nou, si la funció $f(x)$ és no negativa en tot l'interval d'integració, la integral impròpia pot interpretar-se com una àrea, que pot ser finita o infinita.

Exemple 3.19: Calculem

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

La funció $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no és contínua en $x = 0$, on té una asímptota vertical.



Per aquesta raó, la integral és impròpia. La calculem de manera senzilla, trobant primer una integral definida i després avaluant un límit

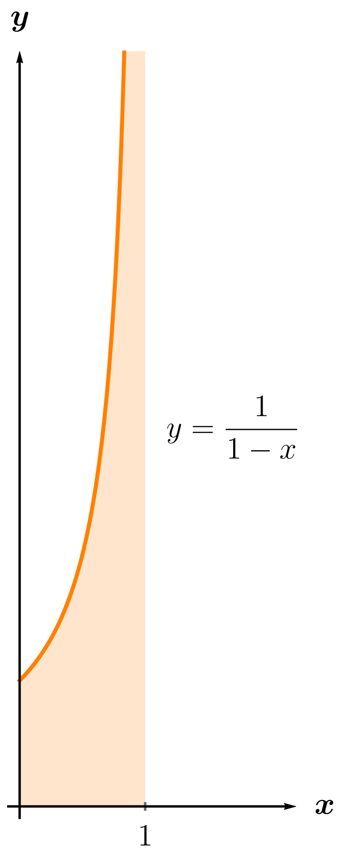
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2 \lim_{a \to 0^+} (1 - \sqrt{a}) = 2\,.$$

Aleshores, l'àrea sota la corba $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre 0 i 1 és finita.

Exemple 3.20: Calculem

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}\,.$$

De nou, l'integrand presenta una discontinuïtat en un punt, concretament en $x = 1$.



Aleshores, seguim el mateix procediment de l'exemple 3.19

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{1-x} = \lim_{b \to 1^-} \left[-\ln|1-x| \right]_0^b = \lim_{b \to 1^-} \left[-\ln(1-b) \right] = \infty \, .$$

El límit és infinit i, per tant, la integral divergeix. L'àrea baix la corba $y = \frac{1}{1-x}$ entre 0 i 1 és infinita.

Establirem ara uns **criteris** que ens permeten saber si una integral impròpia és convergent o divergent, sense necessitat de calcular-la.

Teorema 3.12: Criteri de comparació directa

Siguen f i g contínues en $[a, \infty)$, amb $0 \leq f(x) \leq g(x) \; \forall x \geq a$.

1. Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\, dx$ convergeix aleshores $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ convergeix.
2. Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ divergeix aleshores $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\, dx$ divergeix.

Demostració. Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq a$, aleshores, per la propietat (viii) de les integrals definides (teorema 3.6), tenim

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,, \quad b > a\,,$$

i, per tant, si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x)\, dx$ és finit, també ho és $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$. De la mateixa manera, si $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ és divergent, també ho és $\lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x)\, dx$. Aquesta comparació de límits és molt intuïtiva i pot demostrar-se de manera rigorosa, encara que no ho farem ací. □

Comentari 1: Aquest teorema té una interpretació immediata en termes d'àrees. La condició $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \geq a$ significa que l'àrea sota la corba $y = f(x)$ és igual o menor que l'àrea sota la corba $y = g(x)$ $\forall x \geq a$. Aleshores, és evident que si la segona és finita, la primera també ho ha de ser. Igualment, si la primera és infinita, la segona ho ha de ser.

Comentari 2: Les afirmacions contràries no són certes. Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ convergeix no sabem si $\int_a^\infty g(x)\, dx$ convergirà o no. Igualment, si $\int_a^\infty g(x)\, dx$ divergeix no sabem si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ divergirà o no.

Comentari 3: El teorema també és vàlid per a integrals impròpies amb l'interval d'integració infinit $(-\infty, b]$, o amb intervals d'integració finits $[a, b)$ i $(a, b]$.

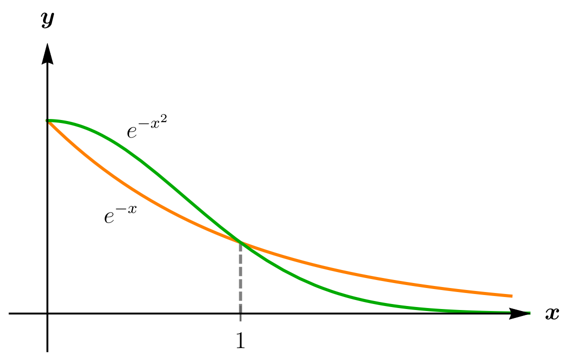
Exemple 3.21: Volem saber si la integral impròpia

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$$

és convergent. Per la definició d'integral impròpia de tipus I,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x^2}\, dx\,,$$

però no és possible trobar una primitiva de la funció $f(x) = e^{-x^2}$ en termes de funcions elementals i, per tant, no podem avaluar la integral definida. En aquest cas, hem de recórrer a un criteri de convergència. Sabem que per a $x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$:



Aleshores,

$$\int_1^b e^{-x^2}\,dx \le \int_1^b e^{-x}\,dx = -e^{-b} + e^{-1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^b}\,,$$

i, per tant, $\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$ convergeix a algun valor finit. Encara que aquest valor és desconegut, sabem que és finit i podem trobar una fita:

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx \le \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^b}\right) = \frac{1}{e}\,.$$

Exemple 3.22: Podem fer servir el resultat de l'exemple 3.18 per a demostrar la convergència o divergència d'altres integrals impròpies.

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ és convergent.

Perquè $0 \le \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$ en $[1,\infty)$ i $I(2) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ és convergent.

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}\,dx$ és divergent.

Perquè $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} \ge \dfrac{1}{x}$ en $[1,\infty)$ i $I(1) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ és divergent.

Teorema 3.13: Criteri de comparació del límit

Siguen f i g dues funcions positives i contínues en $[a,\infty)$. Si existeix el límit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$$

amb $L > 0$ un nombre positiu, aleshores les integrals impròpies

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{i} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

ambdues convergeixen o ambdues divergeixen.

Demostració. Suposem primer que l'integral $\int_a^\infty g(x)\,dx$ és convergent. Com que $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$, per la definició 1.15 sabem que per a tot nombre real $\epsilon > 0$ existeix un valor $M > a$ corresponent, tal que

$$x > M \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon\,.$$

Siga $\epsilon = 1$. En aquest cas, la desigualtat es tradueix en

$$-1 < \frac{f(x)}{g(x)} - L < 1\,,$$

o de manera equivalent

$$L - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} < L + 1\,.$$

Com que $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$ $\forall x \geq a$, trobem finalment

$$0 < f(x) < (L+1)\,g(x)\,. \tag{3.29}$$

Com que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergeix, $\int_M^\infty g(x)\,dx$ també convergeix, ja que $M > a$. Aleshores, existeix un nombre real c tal que

$$\lim_{b\to\infty}\int_M^b g(x)\,dx = c\,,$$

i podem calcular

$$\int_M^\infty (L+1)\,g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_M^b (L+1)\,g(x)\,dx = (L+1)\lim_{b\to\infty}\int_M^b g(x)\,dx = (L+1)\,c\,.$$

En conseqüència, $\int_M^\infty (L+1)\,g(x)\,dx$ és convergent. Pel criteri de comparació directa i la desigualtat (3.29), deduïm que $\int_M^\infty f(x)\,dx$ també és convergent. Finalment, escrivim

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^M f(x)\,dx + \int_M^\infty f(x)\,dx\,.$$

Com que $\int_a^M f(x)\,dx$ és una integral definida (i aleshores finita) i hem provat que $\int_M^\infty f(x)\,dx$ és convergent, aleshores $\int_a^\infty f(x)\,dx$ és convergent. Suposem ara que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ és divergent. En aquest cas fem servir de nou la definició de límit a l'infinit però escollint $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$. Aleshores, arribem a la desigualtat

$$-\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{L}{2}$$

per a $x > M$. Amb un procediment similar al del cas anterior, podem traduir aquesta desigualtat en

$$0 < g(x) < \frac{2}{L}\,f(x)\,. \tag{3.30}$$

Com que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergeix i $\int_a^M g(x)\,dx$ és finita, $\int_M^\infty g(x)\,dx$ divergeix. Pel criteri de comparació directa deduïm que $\int_M^\infty \frac{2}{L}\,f(x)\,dx$ divergeix també. Aleshores,

$$\int_M^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_M^b f(x)\,dx = \frac{L}{2}\lim_{b\to\infty}\int_M^b \frac{2}{L}\,f(x)\,dx = \frac{L}{2}\int_M^\infty \frac{2}{L}\,f(x)\,dx$$

és divergent, i en conclusió $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergeix. □

Comentari: El teorema també és vàlid en altres casos:

- En $(-\infty, b]$ si $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$.
- En $[a, b)$ si $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$.
- En $(a, b]$ si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$.

Exemple 3.23: La integral impròpia

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

és convergent. Per a demostrar-ho fem ús del criteri de comparació de límits, fent servir el resultat de l'exemple 3.18, on trobàrem que $I(2) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ convergeix. Definim

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Les dues funcions són positives i contínues en $[1, \infty)$. Trobem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1\,.$$

Aleshores, com que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ convergeix, $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ també convergeix. No obstant això, és important assenyalar que els seus valors poden ser diferents. De fet

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = I(2) = \frac{1}{2-1} = 1\,,$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} [\arctan b - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Exemple 3.24. La funció gamma: La **funció gamma** es defineix com a

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\,. \tag{3.31}$$

Té les següents propietats:

(i) És convergent si $x > 0$.

(ii) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

(iii) $\Gamma(1) = 1$.

(iv) $\Gamma(x+1) = x!$ si $x \in \mathbb{N}$.

(v) $\Gamma(x+1) \approx x^x\, e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ quan $x \to \infty$.

Demostració. Les demostracions d'aquestes propietats fan ús de molts dels conceptes introduïts en aquest tema.

(i) Aquesta demostració segueix diversos passos, obtenint resultats intermedis que després s'aplicaran en diferents moments. En primer lloc, si $x > 0$, la integral $\int_0^\infty e^{-xt}\, dt$ és convergent:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-xt}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-xt}}{x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-e^{-bx}}{x} + \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x}\,. \tag{3.32}$$

Siga ara $n \in \mathbb{N}$. Aleshores, per aplicació repetida de la regla de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{t/2}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{(n-1)\, t^{n-2}}{\frac{1}{2}\, e^{t/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)\, t^{n-3}}{\frac{1}{2^2}\, e^{t/2}} = \dots \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)\, t^{n-k-1}}{\frac{1}{2^k}\, e^{t/2}}\,. \end{aligned}$$

Com que t^{n-1} és un polinomi de grau $n-1$, eventualment l'aplicació de la regla de l'Hôpital donarà zero. En particular, per a $k = n$. En conclusió,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{t/2}} = 0\,. \tag{3.33}$$

Això significa que per a tot $\epsilon > 0$, existeix un nombre real $M > 0$ corresponent, tal que si $t > M$ aleshores

$$\left|\frac{t^{n-1}}{e^{t/2}}\right| < \epsilon\,.$$

Siga $\epsilon = 1$. En aquest cas trobem que per a tot $t > M$, $0 < t^{n-1} < e^{t/2}$. Multiplicant per $e^{-t} > 0$, trobem

$$0 < e^{-t}\, t^{n-1} < e^{-t/2}\,. \tag{3.34}$$

El resultat en l'equació (3.32) implica que, en particular, la integral impròpia $\int_0^\infty e^{-t/2}\, dt$ és convergent. Aleshores, pel criteri de comparació directa i tenint en compte la desigualtat (3.34), la integral $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-1}\, dt$ també és convergent. Per tant, hem demostrat la convergència de $\Gamma(x)$ en el cas en què x és un nombre natural. Considerem ara el cas en què x és un nombre real positiu. Primer, estudiem $x \geq 1$. Definim la **funció part entera** de x, $\lfloor x \rfloor$, com el nombre enter més gran tal que $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$. Per exemple, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$ i $\lfloor 7.8 \rfloor = 7$. Aleshores, per a $t \geq 0$ tenim

$$0 \leq e^{-t}\, t^{x-1} \leq e^{-t}\, t^{\lfloor x \rfloor}\,. \tag{3.35}$$

Com que hem demostrat que $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-1}\, dt$ és convergent per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$, en particular $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{\lfloor x \rfloor}\, dt$ és convergent. Aleshores, l'aplicació del criteri de comparació directa en combinació amb la desigualtat (3.35) ens diu que $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ és convergent per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$. Només queda considerar el cas $0 < x < 1$. Resulta convenient separar

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\,. \tag{3.36}$$

Hem de demostrar que les dues integrals són convergents. Estudiem primer la segona. Si $t \geq 1$ aleshores

$$0 \leq \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} \leq \frac{t}{e^{t/2}}\,,$$

Sabem per l'equació (3.33), que els límits quan $t \to \infty$ dels termes als extrems d'aquesta desigualtat són zero. Aleshores, pel teorema de l'entrepà (teorema 1.7), deduïm

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0\,.$$

Seguim ara un raonament anàleg al del cas en què x era un nombre natural i trobem

$$0 < e^{-t}\, t^{x-1} < e^{-t/2}\,. \tag{3.37}$$

La integral $\int_1^\infty e^{-t/2}\, dt$ és convergent, ja que tant $\int_0^1 e^{-t/2}\, dt$ com $\int_0^\infty e^{-t/2}\, dt$ ho són. Aleshores, pel criteri de comparació directa, la integral $\int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ és convergent si $0 < x < 1$. Finalment, estudiem $\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$. Per a $t \geq 0$, $e > 1$ implica $e^{-t} \leq 1$ i aleshores

$$0 \leq e^{-t}\, t^{x-1} \leq t^{x-1}\,. \tag{3.38}$$

Per altra banda, si $0 < x < 1$, la integral $\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ és una integral impròpia de tipus II, ja que la funció t^{x-1} té una asímptota vertical en $t = 0$. Aleshores, l'hem d'avaluar com un límit:

$$\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 t^{x-1}\, dt = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{t^x}{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{a^x}{x}\right) = \frac{1}{x}\,.$$

Com que $\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ és convergent, el criteri de comparació directa i la desigualtat (3.38) impliquen que $\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ també és convergent. Per tant, hem demostrat que les dues integrals en l'equació (3.36) són convergents, i aleshores $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ també ho és. Amb aquest resultat queda provat per a qualsevol $x > 0$.

(ii) $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^x\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t}\, t^x\, dt$. Integrem per parts:

$$\begin{aligned} u = t^x \quad &\Leftrightarrow \quad du = x\, t^{x-1}\, dx\,, \\ e^{-t} dt = dv \quad &\Leftrightarrow \quad v = -e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Aleshores, utilitzant la fórmula de la integració per parts per a la integral definida, trobem

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-t} t^x\right]_0^b - \int_0^\infty (-e^{-t})(x\, t^{x-1}\, dt)\,.$$

Per una banda, tenim

$$\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-t}t^x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}b^x\right) = 0\,,$$

on l'últim pas pot demostrar-se, per exemple, usant la regla de l'Hôpital. Aleshores,

$$\Gamma(x+1) = 0 + x\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt = x\,\Gamma(x)\,.$$

(iii) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty} e^{-b} + 1 = 1.$

(iv) A conseqüència de les propietats (ii) i (iii), si x és un nombre natural tenim

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) = x\,[(x-1)\,\Gamma(x-1)] = x(x-1)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = x!\,.$$

(v) Aquesta fórmula asimptòtica de la funció gamma s'anomena **fórmula de Stirling** i permet obtenir un resultat aproximat per al factorial d'un nombre natural quan aquest és molt gran. No la demostrarem. □

La funció gamma va nàixer com una generalització del factorial per a nombres no naturals, una qüestió plantejada a principis de segle XVIII i resolta per Euler, el qual va introduir una primera versió d'aquesta funció. Efectivament, hem vist que $\Gamma(x+1) = x!$ per a $x \in \mathbb{N}$, però la funció gamma també pot aplicar-se a nombres no naturals. Per exemple, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, un resultat que no demostrarem ací. Posteriorment, matemàtics de la talla de Stirling, Gauss, Weierstrass o Legendre li van donar ús en diferents branques de les matemàtiques. Actualment, la funció gamma té moltes aplicacions, en àrees tan diverses com la probabilitat, l'anàlisi complexa o la teoria de nombres.

4

Successions i sèries

Les sèries divergents són un invent del dimoni.

— Niels Henrik Abel

4.1 Successions

Definició 4.1: Successió

Una **successió de nombres reals** és un conjunt ordenat de nombres reals. Per tant, és una funció definida en els nombres naturals i amb valors reals:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow a_n \end{aligned}$$

Definició 4.2: Successió infinita

Una **successió infinita** és una successió que té com a domini el conjunt dels nombres naturals.

En general, una successió o seqüència és una llista ordenada d'objectes. En aquest tema considerarem sempre successions infinites de nombres reals i farem servir el terme genèric *successió* per a referir-nos-hi. Les denotarem com a

$$\{a_1, a_2, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ,$$

on a_1, a_2, ... són els **termes** de la successió. L'**índex** de la successió és el nombre natural n, que determina la posició dels termes en la successió. L'expressió d'un terme qualsevol de la successió segons el seu valor de n s'anomena **terme general** o **terme n-èsim** i es denota per a_n. Si coneixem a_n podem determinar tots i cadascun dels termes que formen la successió.

Exemples 4.1:

- $a_n = n^2$, $\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$.
- $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\{b_n\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots\right\}$.
- $c_n = (-1)^n$, $\{c_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$.

Una manera alternativa de definir una successió és a partir del valor o valors del terme o termes inicials i una fórmula recursiva per a calcular qualsevol valor a partir dels anteriors.

Exemples 4.2:

- $a_1 = 2$ i $a_n = 3\,a_{n-1} - 1$ per $n > 1$, $\{a_n\} = \{2, 5, 14, 41, 122, \dots\}$.
- Els **nombres de Fibonacci**: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ i $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ per $n > 2$, $\{b_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5 \dots\}$.

Dues classes de successions d'especial importància són la progressió aritmètica i la progressió geomètrica. Una **progressió aritmètica** és una successió en la qual cada terme, excepte el primer, s'obté sumant a l'anterior un mateix nombre real:

$$\text{Progressió aritmètica:} \quad a_{n+1} = a_n + d \,, \quad d \in \mathbb{R}$$

En aquest cas és fàcil trobar el terme general a partir de la llei de formació de nous termes:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \,, \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2\,d \,, \\
a_4 &= a_4 + d = a_1 + 3\,d \,, \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)\,d \,.
\end{aligned}$$

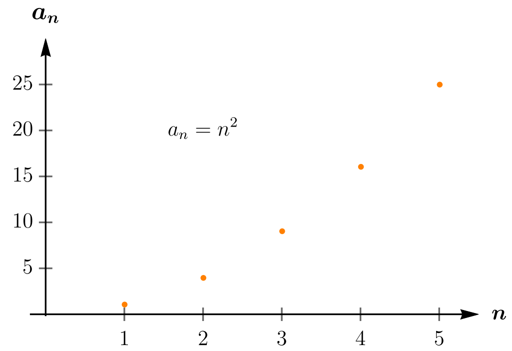
Una **progressió geomètrica** és una successió en la qual cada terme, excepte el primer, s'obté multiplicant l'anterior per un mateix nombre real:

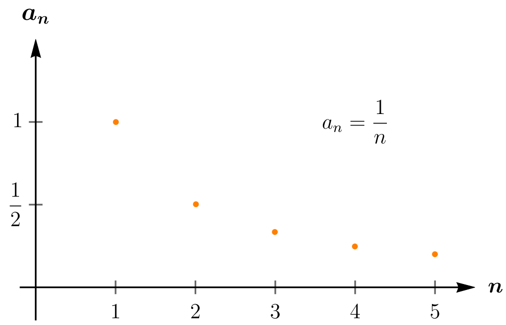
$$\text{Progressió geomètrica:} \quad a_{n+1} = a_n \cdot r \,, \quad r \in \mathbb{R}$$

De nou, podem trobar el terme general a partir de la llei de formació de nous termes:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot r \,, \\
a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \,, \\
a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \,, \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \,.
\end{aligned}$$

Els següents dos exemples mostren un mètode per a representar gràficament una successió:





Definició 4.3: Successió fitada

Una successió $\{a_n\}$ està **fitada superiorment** si existeix un nombre $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M \ \forall n$. El nombre M és una **fita superior** per a $\{a_n\}$. La mínima fita superior per a $\{a_n\}$ s'anomena **suprem** i es denota com a $\sup\{a_n\}$.

Una successió $\{a_n\}$ està **fitada inferiorment** si existeix un nombre $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m \ \forall n$. El nombre m és una **fita inferior** per a $\{a_n\}$. La màxima fita inferior per a $\{a_n\}$ s'anomena **ínfim** i es denota com a $\inf\{a_n\}$.

Una successió $\{a_n\}$ està **fitada** si està fitada superiorment i inferiorment.

Exemple 4.3: La successió $\{1/n\}$ està fitada superiorment i inferiorment, ja que $0 \leq 1/n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A més, $\sup\{1/n\} = 1$ i $\inf\{1/n\} = 0$.

Exemple 4.4: La successió $\{2^n\}$ està fitada inferiorment, ja que $1 \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. L'ínfim de la successió és $\inf\{2^n\} = 1$ i no existeix suprem.

Exemple 4.5: La successió $\{(-1)^n \, 2^n\} = \{-2, 4, -8, 16, -32, \dots\}$ no està fitada.

Definició 4.4: Successió monòtona

Diem que la successió $\{a_n\}$ és **creixent** si i només si $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Diem que $\{a_n\}$ és **estrictament creixent** si i només si $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Diem que la successió $\{a_n\}$ és **decreixent** si i només si $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Diem que $\{a_n\}$ és **estrictament decreixent** si i només si $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

En qualsevol dels casos anteriors, la successió és **monòtona**.

Exemple 4.6: La successió $\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ és estrictament creixent.

Exemple 4.7: La successió $\{(-1)^n\, n\} = \{-1, 2, -3, \dots\}$ no és monòtona.

Definició 4.5: Límit d'una successió

La successió $\{a_n\}$ **convergeix** al nombre $L \in \mathbb{R}$ si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un enter N corresponent, tal que

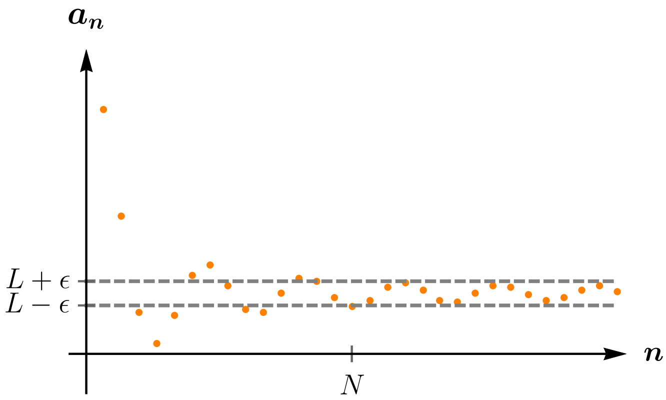
$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon \, .$$

En aquest cas escriurem

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \, , \quad \text{o} \quad a_n \to L \, ,$$

i direm que L és el **límit** de la successió $\{a_n\}$. Si L no existeix, la successió $\{a_n\}$ **divergeix**.

Comentari: Aquesta definició és molt similar a la de límit a l'infinit d'una funció (definició 1.15). Pot il·lustrar-se gràficament de la manera següent:



Com veurem, podem aprofitar aquesta similitud per a calcular límits de successions.

Exemple 4.8: Demostrem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \, . \tag{4.1}$$

Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un enter N, tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \, .$$

Efectivament, si N és qualsevol enter més gran que $\frac{1}{\epsilon}$, aquesta desigualtat es verifica per a tot $n > N$.

Exemple 4.9: Siga $k \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores,

$$\lim_{n \to \infty} k = k \, . \tag{4.2}$$

La demostració fa servir de nou la definició de límit d'una successió. Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un enter N, tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |k - k| = 0 < \epsilon \,,$$

però això és evident perquè $\epsilon > 0$.

Exemple 4.10: La successió $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ divergeix. Per a demostrar-ho suposem que la successió convergeix a un nombre L. Escollim $\epsilon = \frac{1}{2}$. Aleshores, per la definició 4.5, existeix un enter N tal que per a tot $n > N$, $|a_n - L| < \frac{1}{2}$. Com que el nombre 1 és part de la successió, tenim en particular $|1 - L| < \frac{1}{2}$ o, de manera equivalent, $\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$. De la mateixa manera, com que el nombre -1 és part de la successió, tenim $|-1 - L| < \frac{1}{2}$ i, per tant, $-\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}$. Com que L no pot estar en els dos intervals obtinguts, L no existeix i la successió divergeix.

Definició 4.6: Divergència a infinit

La successió $\{a_n\}$ **divergeix a infinit** si per a tot nombre $M \in \mathbb{R}$ existeix un enter N corresponent, tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n > M \,.$$

En aquest cas escrivim

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \,, \quad \text{o} \quad a_n \to \infty \,.$$

La successió $\{a_n\}$ **divergeix a menys infinit** si per a tot nombre $m \in \mathbb{R}$ existeix un enter N corresponent, tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n < m \,.$$

En aquest cas escrivim

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \,, \quad \text{o} \quad a_n \to -\infty \,.$$

Com hem vist en l'exemple 4.10, una successió pot divergir sense que la divergència siga a infinit o menys infinit.

Exemple 4.11: La successió $\{\sqrt{n}\}$ divergeix perquè els seus termes es fan més grans quan n creix. Aleshores, per a qualsevol nombre $M \in \mathbb{R}$ sempre puc trobar un enter N tal que $a_n > M$ per a $n > N$. Escrivim

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty \,.$$

Teorema 4.1

Tota successió convergent és fitada.

Demostració. Siga $\{a_n\}$ una successió convergent. Aleshores, $a_n \to L$. Això significa que per a tot nombre real $\epsilon > 0$ existeix un enter N tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon\,.$$

Siga $\epsilon = 1$. Aleshores, $|a_n - L| < 1$ si $n > N$. Considerem ara $|a_n|$. Fent servir la desigualtat triangular per al mòdul tenim

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L|\,,$$

i, per tant,

$$|a_n| < 1 + |L| \quad \Rightarrow \quad -1 - |L| < a_n < 1 + |L|\,.$$

□

Comentari 1: L'afirmació inversa no és certa. Una successió fitada pot ser divergent, com hem vist en l'exemple 4.10. La successió $\{(-1)^n\}$ és fitada, ja que $-1 \leq a_n \leq 1$, però és divergent.

Comentari 2: Aquest teorema implica que tota successió no fitada és divergent.

Exemple 4.12: La successió $\{1/n\}$ és convergent, ja que $1/n \to 0$, i és fitada, ja que $0 < 1/n \leq 1$.

Teorema 4.2: Teorema de Weierstrass de la successió monòtona

Tota successió monòtona i fitada és convergent.

Demostració. Suposem que $\{a_n\}$ és creixent i fitada, amb $L = \sup\{a_n\}$. Per a qualsevol $\epsilon > 0$, existeix un enter N tal que $a_N > L - \epsilon$, ja que en cas contrari $L - \epsilon$ seria el suprem de $\{a_n\}$. Com que la successió és creixent, $a_n \geq a_N > L - \epsilon$, i llavors $|a_n - L| < \epsilon$, per a tot $n \geq N$. Per la definició de límit d'una successió, $\{a_n\}$ convergeix a L. La demostració per al cas en què $\{a_n\}$ és decreixent és completament anàloga. □

Comentari 1: Si la successió és creixent i fitada superiorment, convergeix al seu suprem. Si la successió és decreixent i fitada inferiorment, convergeix al seu ínfim.

Comentari 2: L'afirmació inversa no és certa. Per exemple, la successió $\{(-1)^n/n\}$ és convergent i fitada, però no monòtona perquè alterna entre signes positius i negatius.

Els teoremes 4.1 i 4.2 podem resumir-se d'aquesta manera:

$$\begin{array}{ccc} \text{Convergent} & \Rightarrow & \text{Fitada} \\ \text{Divergent} & \Leftarrow & \text{No fitada} \\ \text{Convergent} & \Leftarrow & \text{Fitada i monòtona} \end{array}$$

Teorema 4.3: Propietats dels límits de successions

Siguen dues successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ tals que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B\,,$$

i $k \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores es verifiquen les següents igualtats:

(i) $\lim_{n\to\infty} [k\, a_n] = k \lim_{n\to\infty} a_n = k\, A$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} [a_n \pm b_n] = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} [a_n \cdot b_n] = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A\, B$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_n}{b_n}\right] = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$, si $B \neq 0$.

(v) $\lim_{n\to\infty} [a_n]^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p = A^p$, amb $p \in \mathbb{R}$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} [\sqrt[p]{a_n}\,] = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[p]{A}$.

Demostració. Les propietats dels límits de successions són completament anàlogues a les dels límits de funcions (teorema 1.5 i apèndix A) i les demostracions són equivalents. No obstant això, demostrarem la propietat (ii) per a il·lustrar aquesta equivalència. Siga $\epsilon > 0$. Com que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, existeixen dos nombres enters N_1 i N_2 tals que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{4.3}$$

$$\text{si} \quad n > N_2 \quad \text{aleshores} \quad |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{4.4}$$

Escollim $N = \min(N_1, N_2)$. Aleshores, per a $n > N$ es verifica

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,$$

on hem fet ús de la desigualtat triangular del mòdul. Queda provada la propietat. $\square$

Teorema 4.4: Teorema de l'entrepà per a successions

Siguen les successions $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$. Si existeix un enter N tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n > N$ i si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, aleshores $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Demostració. Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un enter M tal que

$$n > M \quad \Rightarrow \quad |b_n - L| < \epsilon \, .$$

De la premissa $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ deduïm que existeix un enter N_1 tal que

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < a_n - L < \epsilon \, .$$

Igualment, com que $\lim_{n\to\infty} c_n = L$, existeix un enter N_2 tal que

$$n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |c_n - L| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\epsilon < c_n - L < \epsilon \, .$$

Siga $M = \max(N, N_1, N_2)$. Aleshores, totes les condicions prèvies es verifiquen per a $n \geq M$. En particular, tenim $a_n \leq b_n \leq c_n$. Si restem L obtenim $a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L$. Combinant aquest resultat amb les altres desigualtat s'obté $-\epsilon < b_n - L < \epsilon$, que implica $|b_n - L| < \epsilon$. Per la definició de límit d'una successió, $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. □

Comentari: Una conseqüència d'aquest teorema és que si $|b_n| \leq c_n$ i $c_n \to 0$, aleshores $b_n \to 0$, ja que $-c_n \leq b_n \leq c_n$.

Exemple 4.13: Podem utilitzar el resultat $\dfrac{1}{n} \to 0$ per a demostrar altres límits de successions:

- $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$, ja que $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\cos n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.
- $\dfrac{1}{2^n} \to 0$, ja que $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$.
- $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, ja que $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{(-1)^n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Teorema 4.5

Siga $\{a_n\}$ una successió tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Aleshores, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostració. Sabem que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$. A més, per la propietat (i) dels límits de successions,

$$\lim_{n\to\infty} (-|a_n|) \underset{\text{P(i)}}{=} - \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \, .$$

Aleshores, pel teorema de l'entrepà, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Teorema 4.6

Siguen les successions $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$.

- Si existeix un enter N tal que $a_n \geq b_n$ $\forall n > N$ i si $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- Si existeix un enter N tal que $a_n \leq b_n$ $\forall n > N$ i si $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Demostració. Demostrem el primer cas. La prova del segon cas és anàloga. Com que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, per a tot $M \in \mathbb{R}$, existeix un enter N_1 tal que si $n > N_1$, $b_n > M$. Siga $N_2 = \max(N, N_1)$. Aleshores, si $n > N_2$, $a_n \geq b_n$ i $b_n > M$, i per tant $a_n > M$, amb M un nombre real arbitrari. En conclusió, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Aquest teorema és molt útil per a demostrar la divergència d'una successió a partir de la divergència d'una altra successió coneguda.

Teorema 4.7: Teorema de la funció contínua per a successions

Siga $\{a_n\}$ una successió. Si $a_n \to L$ i f és una funció contínua en L i definida per a tot valor de a_n, aleshores $f(a_n) \to f(L)$.

Demostració. Siga $\epsilon > 0$. Com que f és una funció contínua, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - L| < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - f(L)| < \epsilon \,.$$

Per altra banda, com que $a_n \to L$, existeix un enter N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad |a_n - L| < \delta \,.$$

Per tant, deduïm que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad |f(a_n) - f(L)| < \epsilon \,,$$

i en conclusió $f(a_n) \to f(L)$. □

Aquest teorema bàsicament ens diu que prenem els límits de les seqüències de la mateixa manera que prenem el límit de funcions. En particular, l'aplicació d'una funció i el càlcul del límit són operacions que poden intercanviar-se, com ja coneixíem en el cas de funcions contínues.

Exemple 4.14: Calculem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \,.$$

Fent servir la propietat (ii) dels límits de successions i els resultats dels exemples 4.8 i 4.9, trobem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\text{P(ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1\,.$$

Ara, prenem $f(x) = \sqrt{x}$ i $L = 1$ en el teorema 4.8, i obtenim

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}} = \sqrt{1} = 1\,.$$

Teorema 4.8

Siga $f(x)$ una funció definida per a $x \geq n_0$, amb $n_0 \in \mathbb{N}$, i $\{a_n\}$ una successió tal que $a_n = f(n)$ per a $n \geq n_0$. Aleshores

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Demostració. Siga $\epsilon > 0$. Com que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, existeix un nombre real M tal que

$$\text{si} \quad x > M \quad \text{aleshores} \quad |f(x) - L| < \epsilon\,.$$

Siga N un enter, amb $N > M$ i $N \geq n_0$. Aleshores

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n = f(n) \text{ i } |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon\,.$$

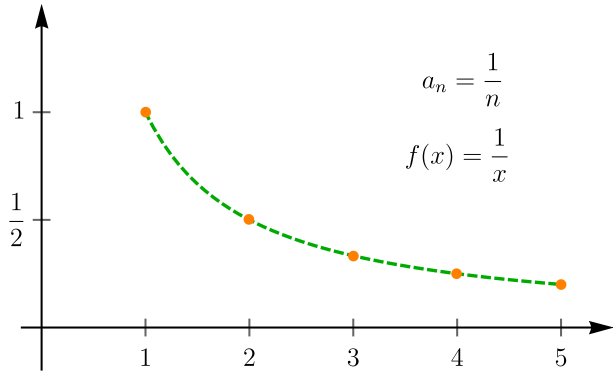
□

Comentari 1: Aquest teorema també és vàlid si el límit de la funció és infinit, és a dir

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,,$$

com es pot demostrar de manera anàloga.

Comentari 2: Siga una funció real d'una variable real que coincideix amb una successió quan restringim el seu domini als nombres enters. Aleshores, aquest teorema ens diu que el límit de la funció quan $x \to \infty$ és igual al límit de la successió quan $n \to \infty$. Per exemple, considerem la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ i la successió $a_n = \frac{1}{n}$. Tenim $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$:



Comentari 3: L'afirmació inversa no és certa. Considerem la successió trivial $a_n = 0$. La funció $f(x) = \cos(\pi x)$ s'anul·la en tots els naturals, $f(n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, i aleshores podem escriure $a_n = f(n)$. No obstant això, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ però $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Comentari 4: El teorema 4.8 formalitza la relació entre el límit d'una funció i el d'una successió. Ens diu que en lloc de calcular el límit d'una successió, podem calcular el límit de la funció corresponent. Això ens *arma* amb totes les eines desenvolupades per al càlcul de límits de funcions. Per exemple, ens permet usar la **regla de l'Hôpital** per a obtenir límits de successions. A més, aquest teorema s'uneix als resultats trobats en els teoremes 4.3 i 4.4, que són equivalents als que vam obtenir per funcions. En conclusió, en la pràctica el procediment de càlcul és exactament el mateix per a funcions i per a successions.

Exemple 4.15: Siga la successió $\{a_n\}$ amb terme general

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n .$$

Volem obtenir $\lim_{n\to\infty} a_n$. Es tracta d'una **indeterminació 1^∞**. Per a aplicar la regla de l'Hôpital hem de fer algunes transformacions prèvies. Comencem trobant el logaritme del terme general,

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) .$$

Per tant

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} .$$

Aquesta expressió és una **indeterminació $\frac{0}{0}$** i podem aplicar la regla de l'Hôpital. Formalment, el que fem ara és definir una funció real d'una variable real que coincideix amb la successió que considerem quan restringim el seu domini als nombres enters. Gràcies al teorema 4.8, sabem que el seu límit és el mateix que el de la successió. Ara bé, en la pràctica, podem fer aquest pas de manera implícita i directament derivar numerador i denominador tractant n com si fora una variable real:

$$\frac{d}{dn}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{n+1}{(n-1)^2}\right) = -\frac{2}{n^2-1}\,,$$
$$\frac{d}{dn}\frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}\,,$$

i llavors

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2\,.$$

En conclusió

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} \ln a_n} = e^2\,.$$

Abans de concloure la secció, demostrem alguns límits que apareixen amb freqüència.

Teorema 4.9

Siga $x \in \mathbb{R}$. Aleshores

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1,\ x > 0.$

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n = 0,\ |x| < 1.$

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$

(vi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$

Demostració. Les demostracions d'aquests límits de successions fan servir els resultats d'aquesta secció.

(i) Es tracta d'una indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$. Podem, per tant, aprofitar el teorema 4.8 i aplicar la regla de l'Hôpital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0\,.$$

(ii) Escrivim primer $\ln \sqrt[n]{n} = \ln n^{1/n} = \dfrac{1}{n} \ln n$. Aleshores, fent ús del límit (i),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1\,.$$

(iii) Si $x > 0$, $\ln x^{1/n} = \frac{1}{n} \ln x$ i tenim

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = e^{\ln \lim_{n\to\infty} x^{1/n}} = e^{\ln x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1\,.$$

(iv) En aquest cas hem de recórrer a la definició de límit. Siga $\epsilon > 0$. Hem de demostrar que existeix un enter N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad |x^n| < \epsilon\,.$$

Pel límit (iii) sabem que $\epsilon^{1/n} \to 1$. Per tant, existeix un enter M tal que

$$\text{si} \quad n > M \quad \text{aleshores} \quad |\epsilon^{1/n} - 1| < 1 - |x|\,,$$

amb $|x| < 1$, de manera que $1 - |x| > 0$. L'última desigualtat és equivalent a $\epsilon^{1/n} > |x|$, i això ens condueix a $|x^n| = |x|^n < \epsilon$, si $n > M$. Per tant, identifiquem $M = N$ i hem trobat l'enter que buscàvem.

(v) Siga $a_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Aleshores

$$\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)\,,$$

i calculem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + x/n} = x\,,\end{aligned}$$

on en la segona línia hem aplicat la regla de l'Hôpital. En conclusió

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^x\,.$$

(vi) Com que $-\dfrac{|x|^n}{n!} \le \dfrac{x^n}{n!} \le \dfrac{|x|^n}{n!}$, hem de provar que $\dfrac{|x|^n}{n!} \to 0$ i, per aplicació del teorema de l'entrepà, haurem provat el límit que calculem. Escollim un enter $M > |x|$ i, per tant, $|x|/M < 1$. El límit (iv) ens diu que $(|x|/M)^n \to 0$. Com que ens interessa el límit $n \to \infty$, podem considerar un valor $n > M$ i escriure

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdots M \cdot (M+1) \cdots n} \le \frac{|x|^n}{M!\, M^{n-M}} = \frac{|x|^n\, M^M}{M!\, M^n} = \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n\,.$$

En conclusió

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n\,.$$

El factor $M^M/M!$ no canvia quan n augmenta i, per tant, l'últim terme convergeix a 0 perquè $(|x|/M)^n \to 0$. Queda així provat el límit. $\square$

4.2 Sèries

Definició 4.7: Sèrie

Siga una successió $\{a_n\}$. La suma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

és una **sèrie infinita**. El nombre a_n és el **terme n-èsim** de la sèrie. La successió $\{s_n\}$, definida com a

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

és la **successió de sumes parcials** de la sèrie, on s_n és la **n-èsima suma parcial**. Si la successió de sumes parcials convergeix a un límit L, diem que la sèrie **convergeix** i la seua **suma** és L. En aquest cas, escrivim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \, .$$

Si la successió de sumes parcials de la sèrie no convergeix, diem que la sèrie **divergeix**.

Exemple 4.16: Considerem la suma dels inversos de les potències de 2:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \, .$$

Volem saber si la sèrie és convergent o divergent. Construïm la successió de sumes parcials:

k	**Suma parcial**	**Expressió**
1	$s_1 = 1$	$2 - 1$
2	$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
3	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
4	$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$	$2 - \frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Resulta evident que la suma parcial n-èsima és

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Aleshores, podem considerar la convergència de la successió de sumes parcials,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2\,.$$

En conclusió, la suma dels inversos de les potències de 2 és una sèrie convergent, amb suma 2.

Exemple 4.17: Considerem la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n\,.$$

Per a determinar si és convergent o divergent construïm la successió de sumes parcials. Tenim senzillament

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n\,.$$

Aleshores, com que $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, la sèrie és divergent.

Comentari: Comentem algunes **propietats bàsiques de les sèries**. En primer lloc, en una sèrie podem afegir o suprimir un nombre finit de termes sense alterar el seu caràcter, convergent o divergent, encara que si la sèrie és convergent la suma pot modificar-se. Per exemple, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent, aleshores $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ també és convergent per a qualsevol $k > 1$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n\,.$$

Una altra propietat bàsica de les sèries és la llibertat per a fer un canvi d'índex. Sempre és possible numerar els termes de la sèrie d'una altra manera sense alterar la seua convergència si no es canvia el seu ordre. Per tant, podem substituir l'índex n per $n - h$ i escriure

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + \ldots$$

Estudiem ara un parell de sèries d'especial importància.

Definició 4.8: La sèrie geomètrica

Una **sèrie geomètrica** és una sèrie de la forma

$$a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1}\,,$$

amb $a, r \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Comentari 1: Podem comprovar que la sèrie geomètrica és la suma dels termes de la progressió geomètrica, definida en la secció 4.1. Hem fet $a_1 = a$.

Comentari 2: També podem escriure la sèrie geomètrica com a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a\,r^{n}\,.$$

Comentari 3: El nombre real r s'anomena **raó**, ja que és el quocient a_{n+1}/a_n.

Teorema 4.10: Convergència de la sèrie geomètrica

Si $|r| < 1$, la sèrie geomètrica $a + a\,r + a\,r^2 + \ldots$ convergeix, amb

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = \frac{a}{1-r}\,, \qquad |r| < 1\,.$$

Si $|r| \geq 1$, la sèrie geomètrica divergeix.

Demostració. Considerem diversos casos segons el valor de r:

- Si $r = 1$, la n-èsima suma parcial de la sèrie geomètrica és $s_n = a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + \cdots = n\,a$. Com que $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, on el signe està determinat pel signe de a, la sèrie divergeix. L'exemple 4.17 és un cas particular de sèrie geomètrica amb $r = 1$.

- Si $r = -1$, les sumes parcials de la sèrie geomètrica són de la forma

k	**Suma parcial**
1	$s_1 = a$
2	$s_2 = a - a = 0$
3	$s_3 = a - a + a = a$
4	$s_4 = a - a + a - a = 0$
$\vdots$	$\vdots$

El terme general s_n és

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, a = \begin{cases} a\,, & n\,\text{imparell} \\ 0\,, & n\,\text{parell} \end{cases}$$

Aquest tipus de successió s'anomena **oscil·lant** i no té límit. Per tant, la sèrie divergeix.

- Si $|r| \neq 1$, la suma parcial n-èsima és

$$s_n = a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-2} + a\,r^{n-1}\,.$$

Si multipliquem per r trobem

$$r\,s_n = a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \cdots + a\,r^{n-1} + a\,r^n\,.$$

Restant les últimes dues expressions obtenim

$$s_n - r\,s_n = a - a\,r^n\,,$$

i per tant, com que $r \neq 1$,

$$s_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}\,.$$

Calculem el límit de la successió de sumes parcials. Si $|r| < 1$, el límit (iv) del teorema 4.9 implica que $r^n \to 0$ i aleshores

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\,.$$

Finalment, considerem $|r| > 1$. Si $r > 1$ aleshores $r^n \to \infty$. Si $r < -1$, la successió és oscil·lant. En ambdós casos la sèrie divergeix.

□

Definició 4.9: La sèrie harmònica generalitzada

Una **sèrie harmònica generalitzada** és una sèrie de la forma

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\,,$$

amb $p \in \mathbb{R}$.

Comentari 1: La sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ s'anomena **sèrie harmònica**.

Comentari 2: La sèrie harmònica generalitzada també s'anomena **sèrie $\boldsymbol{p}$**.

Teorema 4.11: Convergència de la sèrie harmònica generalitzada

Si $p > 1$, la sèrie harmònica generalitzada $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$ convergeix. Si $p \leq 1$, la sèrie harmònica generalitzada divergeix.

Demostració. Provem el teorema considerant diversos casos per al nombre real p.

- $p = 1$

Aquest cas és la sèrie harmònica. Per a demostrar que és divergent agrupem els termes de manera apropiada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right] + \dots$$

Cadascuna de les sumes entre claudàtors és més gran que $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,, \\
\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\,, \\
\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} &> \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\,, \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m} &> 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}\,, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Per tant, podem fitar la suma parcial s_q, corresponent a $q = 2^m$ termes de la sèrie, com a

$$s_q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m \text{ vegades}} = 1 + \frac{1}{2}\, m\,.$$

Sabem que $\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2}\, m\right) = \infty$. Aleshores, pel teorema 4.6, $\lim_{m\to\infty} s_q = \infty$ i la sèrie és divergent. Aquesta demostració de la divergència de la sèrie harmònica fou presentada per Nicole d'Oresme al segle XIV. Un resultat impressionant per a l'edat mitjana.

- $p < 1$

La divergència en aquest cas pot demostrar-se a partir de la divergència del cas previ. Si $p < 1$ i $n > 1$,

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = t_N\,,$$

$\{s_N\}$ és la successió de sumes parcials de la sèrie harmònica generalitzada amb $p < 1$ i $\{t_N\}$ és la successió de sumes parcials de la sèrie harmònica. Com que $t_N \to \infty$, el teorema 4.6 ens diu que $s_N \to \infty$.

- $p > 1$

De nou, el primer pas és agrupar termes de manera apropiada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \left[\frac{1}{1^p}\right] + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right] + \left[\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right] + \ldots$$

Podem fitar ara cadascun dels termes entre claudàtors:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1^p} = 1 &= \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^0 \,, \\
\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} &= \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 \,, \\
\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{(2^2)^{p-1}} &= \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 \,, \\
\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p} &= \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 \,, \\
&\vdots \\
\frac{1}{(2^m)^p} + \frac{1}{(2^m+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^p} &< \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m \,, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Per tant, si considerem la suma parcial dels primers $q = 2^{m+1} - 1$ termes de la sèrie, tenim

$$s_q = \frac{1}{1^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^p} < \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^0 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^m = t_m \,.$$

$\{t_m\}$ és la successió de sumes parcials de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n \,,$$

que és la sèrie geomètrica amb $x = \dfrac{1}{2^{p-1}}$. Com que $p > 1$, $0 < x < 1$ i per tant, segons el teorema 4.10, aquesta sèrie geomètrica convergeix. Per tant, tenim $s_q < t_m \, \forall m > 0$ i la successió $\{t_m\}$ convergeix a un valor finit. A més, la successió $\{s_q\}$ és creixent, ja que totes les sumes parcials són positives. Aleshores, $\{s_q\}$ és una successió fitada i monòtona. Pel teorema 4.2, és una successió convergent i, en conclusió, la sèrie harmònica generalitzada amb $p > 1$ convergeix. $\square$

Comentari: Hem demostrat que la sèrie harmònica generalitzada amb $p > 1$ convergeix, però no hem trobat la seua suma. Aquest és un problema ben complicat. El cas $p = 2$, la suma dels inversos dels quadrats perfectes, va donar lloc al famós **problema de Basilea**, que va resoldre Euler en 1735.

Teorema 4.12: Condició necessària de convergència

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie convergent, aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demostració. Suposem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$. Siga $\{s_n\}$ la successió de sumes parcials d'aquesta sèrie. Aleshores tenim

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1} \,,$$

i si prenem el límit als dos costats de la igualtat,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L - L = 0 \,,$$

ja que, per definició de convergència d'una sèrie, la suma de la sèrie és el límit de la successió de sumes parcials. □

Corol·lari. Criteri del terme n-èsim: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una sèrie divergent.

Aquest corol·lari és simplement la negació del teorema previ.

Comentari 1: Que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no implica que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ siga convergent. De fet, tenim l'exemple de la sèrie harmònica, que té per terme general $a_n = \frac{1}{n}$. En aquest cas $a_n \to 0$ però la sèrie és divergent. Per aquesta raó, el teorema 4.12 és una condició *necessària* i no *suficient* de convergència.

Comentari 2: El primer pas en l'estudi de la convergència o divergència d'una sèrie és comprovar si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ja que en cas que no siga així sabem que la sèrie és divergent.

Exemples 4.18:

- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ divergeix perquè $n^2 \to \infty$. Es tracta de la sèrie harmònica generalitzada amb $p = -2$ i en el teorema 4.11 ja vam demostrar que és divergent.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ divergeix perquè $\frac{n+1}{n} \to 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ divergeix perquè $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existeix.

Teorema 4.13

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ són dues sèries convergents i $k \in \mathbb{R}$ una constant, aleshores

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} k\, a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k\, A$.

Demostració. Les propietats de les sèries convergents provenen de les propietats dels límits de successions del teorema 4.3. Demostrem primer la propietat (i). Siga $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ la suma parcial de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ la suma parcial de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. La suma parcial s_n de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ és

$$\begin{aligned} s_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n + B_n\,. \end{aligned}$$

Aleshores, per la propietat (ii) del teorema 4.3, com que $A_n \to A$ i $B_n \to B$, $s_n \to A + B$. La demostració en el cas de la resta és anàloga. Provem ara la propietat (ii). La suma parcial s_n de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} k\, a_n$ és

$$s_n = k\, a_1 + k\, a_2 + \cdots + k\, a_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k\, A_n\,.$$

Aleshores, per la propietat (i) del teorema 4.3, $s_n \to k\, A$. □

Comentari 1: La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ pot ser convergent encara que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siguen divergents. Un exemple trivial d'aquest fet és el que s'obté amb $a_n = 1$ i $b_n = -1$. Tant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + \ldots$ com $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 - 1 - 1 + \ldots$ són divergents, però $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \ldots$ és convergent. Un exemple menys trivial és el de la **sèrie de Mengoli**, definida com a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,.$$

En primer lloc, comprovem que $\frac{1}{n(n+1)} \to 0$ i, per tant, la sèrie pot ser convergent. Aplicant la tècnica de descomposició en fraccions simples trobem que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

Aquesta expressió resulta molt útil per a trobar la suma parcial n-èsima, s_n:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

Tots els termes en aquesta suma es cancel·len, excepte el primer i l'últim. Aleshores,

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Hem trobat el terme general de la successió de sumes parcials. Calculem el seu límit

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

En conclusió, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ convergeix i la seua suma és 1. Les sèries en les quals la suma parcial pot ser expressada com a $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = b_n - b_0$, com la sèrie de Mengoli, s'anomenen **sèries telescòpiques**. Finalment, notem que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\,,$$

però

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\,.$$

Aquest pas estaria permès si les sumes foren finites, però amb sumes infinites (és a dir, sèries) no té sentit perquè les dues sèries resultants són divergents. La primera és la sèrie harmònica i la segona es transforma en la sèrie harmònica fent un canvi d'índex $n+1=k$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\,.$$

Tenim, per tant, un exemple de sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ convergent amb $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ divergents.

Comentari 2: La manipulació de sèries divergents s'ha de fer amb compte, ja que fàcilment podem incórrer en errades que conduïsquen a resultats absurds. Per exemple, considerem la sèrie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

que ès clarament divergent. Si multiplique per 2

$$2\,S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

i podria, incorrectament, concloure que $2\,S = S - 1$ i, per tant, $S = -1$, un resultat absurd perquè S és divergent. En la secció 4.4 mostrem altres exemples de resultats absurds, obtinguts en aquest cas per l'agrupació incorrecta de termes en sèries amb signes alternats.

Sovint no és possible trobar el terme general de la successió de sumes parcials d'una sèrie i no podem determinar la seua convergència a partir de la definició. En aquests casos hem de recórrer a **criteris de convergència**, teoremes que garanteixen la convergència d'una sèrie si es donen certes condicions. A continuació estudiem aquests criteris, considerant de manera separada dos tipus de sèries amb propietats ben diferents: sèries de termes no negatius i sèries alternades.

4.3 Convergència de sèries de termes no negatius

Estudiem primer criteris de convergència per a sèries de termes no negatius, és a dir, sèries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ amb $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.14: Criteri bàsic de convergència

Una sèrie de termes no negatius convergeix si i només si les seues sumes parcials estan fitades superiorment.

Demostració. Siga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie amb $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Aleshores, cada suma parcial és més gran que l'anterior, ja que $s_{n+1} = s_n + a_n$. Per tant, la successió de sumes parcials és creixent. Si a més és fitada superiorment, el teorema 4.2 garanteix que convergeix. □

Comentari: Ja hem fet ús d'aquest resultat en la demostració del teorema 4.11 sobre la convergència de la sèrie harmònica generalitzada.

Teorema 4.15: Criteri de la integral

Siga $\{a_n\}$ una successió de termes positius. Si existeix una funció f, positiva, contínua i decreixent en l'interval $[1, \infty)$ tal que $f(n) = a_n$, aleshores

- $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx + a_n \leq s_n \leq \int_1^n f(x)\,dx + a_1$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix si i només si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ convergeix.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeix si i només si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ divergeix.

Demostració. Comencem demostrant el primer punt. Siga $n \in \mathbb{N}$. La integral definida de la funció f en l'interval $[1, n]$ pot ser expressada com la suma de les integrals en els subintervals $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[n-1, n]$:

$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) .$$

Com que f és una funció decreixent en $[1, \infty)$, per a tot $k \in \{2, 3, \dots\}$ i per a tot $x \in [k, k+1]$ tenim

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) .$$

Aleshores, per la propietat (viii) del teorema 3.6, deduïm

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \right) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} f(k)\,dx \right) ,$$

és a dir,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} a_{k+1}\, dx \right) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_k^{k+1} a_k\, dx \right) . \tag{4.5}$$

El terme a_k no és una funció de la variable x i, per tant,

$$\int_k^{k+1} a_{k+1}\, dx = a_k\, [(k+1) - k] = a_k \quad \forall k\,,$$

i l'equació (4.5) esdevé

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k\,.$$

Ara, com que $\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} = a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_n - a_1$ i $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_n - a_n$, amb s_n el terme general de la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, trobem

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq s_n - a_n\,,$$

i la desigualtat del primer punt del teorema s'obté simplement reescrivint aquesta expressió:

$$\int_1^n f(x)\, dx + a_n \leq s_n \leq \int_1^n f(x)\, dx + a_1\,. \tag{4.6}$$

Passem ara als altres dos punts. Suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix i que la seua suma és s. Aleshores, la successió de sumes parcials $\{s_n\}$ convergeix a s. A més, pel teorema 4.12, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Si prenem el límit en l'equació (4.6), obtenim

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)\, dx \leq s\,.$$

Aquest resultat no implica, en general, que la integral impròpia resultant siga convergent, ja que podria divergir a menys infinit. Ara bé, com que per hipòtesi f és una funció positiva en $[1, \infty)$, la integral impròpia resultant not pot divergir a menys infinit i, per tant, és convergent. Demostrem ara la implicació inversa. Suposem que $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ convergeix a s. Com que f és una funció positiva

$$\int_1^n f(x)\, dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\, dx\,,$$

i de nou, fent servir l'equació (4.6) trobem

$$s_n \leq \int_1^n f(x)\, dx + a_1 \leq \int_1^{\infty} f(x)\, dx + a_1 = s + a_1\,.$$

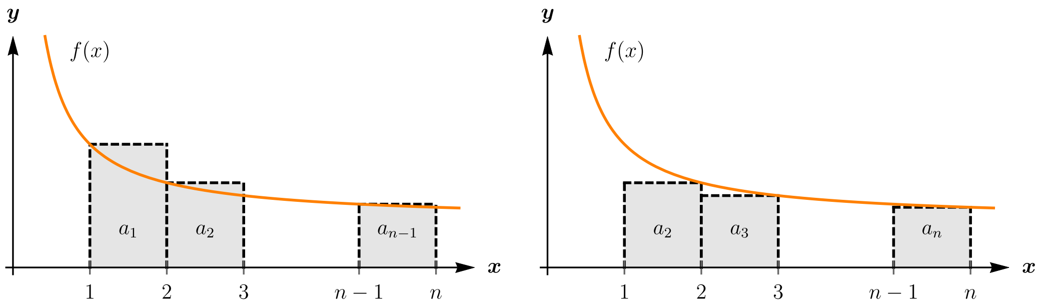
Aleshores, $\lim_{n\to\infty} s_n \leq s + a_1$ i per tant la successió de sumes parcials és fitada. Per tant, pel teorema 4.14, és convergent. Finalment, el tercer punt del teorema és simplement la negació del segon. $\square$

Aquest criteri també s'anomena **criteri de Maclaurin-Cauchy**.

Comentari 1: El teorema pot aplicar-se també al cas en què f siga positiva, contínua i decreixent en l'interval $[N, \infty)$, amb $N > 1$ un enter positiu qualsevol.

Comentari 2: Si la integral i la sèrie convergeixen, els seus valors poden ser diferents.

Comentari 3: Podem donar una senzilla interpretació a aquest criteri de convergència. Considerem l'àrea sota la corba $y = f(x)$ entre $x = 1$ i $x = n$, amb $n \in \mathbb{N}$. Com ja sabem, la podem estimar dividint l'interval i sumant les àrees dels rectangles que dibuixem en cada subinterval. Podem fer-ho de dues maneres:



Tots els rectangles tenen àrea $1 \cdot f(n) = a_n$. En la figura de l'esquerra, la suma de les àrees dels rectangles és major que l'àrea sota la corba i, per tant,

$$\int_1^n f(x)\, dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_n - a_n \,,$$

mentre que en la figura de la dreta, la suma de les àrees dels rectangles és menor que l'àrea sota la corba i, per tant,

$$\int_1^n f(x)\, dx \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_n - a_1 \,.$$

Obtenim d'aquesta manera el primer punt del teorema 4.15. Els altres s'obtenen prenent el límit. Si l'àrea sota la corba en $[1, \infty)$ és finita, la suma de les àrees dels rectangles de la figura de la dreta serà també finita, ja que és menor. I si l'àrea sota la corba en $[1, \infty)$ és infinita, la suma de les àrees dels rectangles de la figura de l'esquerra serà també infinita, ja que és major.

Exemple 4.19: Fem servir el criteri de la integral per a demostrar que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

convergeix. La funció $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ és positiva, decreixent i contínua per a $x \geq 1$ i

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{b\to\infty} \arctan x \Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} [\arctan b - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \,.$$

Com que la integral impròpia convergeix, la sèrie convergeix, encara que no coneixem el valor de la suma.

Exemple 4.20: Demostrem que la sèrie harmònica divergeix fent ús del criteri de la integral. La funció $f(x) = 1/x$ és positiva, decreixent i contínua per a $x \geq 1$. Per tant, podem fer servir el criteri de la integral. Obtenim

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln x|_1^b = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \ln 1] = \infty\,.$$

Com que la integral impròpia divergeix, la sèrie divergeix.

Teorema 4.16: Criteri de comparació

Siguen $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dues successions de termes no negatius. Si existeix un enter N tal que $a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq N$, aleshores

- Si $\sum_{n=1}^\infty b_n$ convergeix, $\sum_{n=1}^\infty a_n$ convergeix.
- Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergeix a infinit, $\sum_{n=1}^\infty b_n$ divergeix a infinit.

Demostració. Suposem primer que $\sum_{n=1}^\infty b_n$ convergeix i que la seua suma és B. Considerem les sèries $\sum_{n=N}^\infty a_n$ i $\sum_{n=N}^\infty b_n$. Com que $a_n, b_n \geq 0$ i $a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq N$, tenim

$$0 < \sum_{n=N}^\infty a_n \leq \sum_{n=N}^\infty b_n \leq \sum_{n=1}^\infty b_n = B\,. \tag{4.7}$$

Aleshores, la sèrie $\sum_{n=N}^\infty a_n$ és fitada superiorment. Com els seus termes són no negatius, el teorema 4.14 garanteix que convergeix. Per altra banda, la suma finita $\sum_{n=1}^{N-1} a_n$ és necessàriament convergent. Per tant, hem provat que $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^\infty a_n$ és convergent i això finalitza la demostració del primer punt del teorema. Suposem ara que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergeix a infinit. Com que l'eliminació de termes d'una sèrie no altera la seua convergència o divergència, $\sum_{n=N}^\infty a_n$ també divergeix a infinit. Per tant, si definim la suma parcial $A_n = \sum_{k=N}^n a_k$, amb $n > N$, tenim $A_n \to \infty$. La suma parcial anàloga per a la sèrie $\sum_{n=N}^\infty b_n$ és $B_n = \sum_{k=N}^n b_k$. Com que $a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq N$, $B_n \to \infty$ també i la sèrie corresponent és divergent. □

Comentari: El criteri de comparació permet establir la convergència o divergència d'una sèrie a partir d'una altra coneguda però s'ha d'utilitzar amb compte. Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ convergeix, no podem concloure res sobre $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Igualment, si $\sum_{n=1}^\infty b_n$ divergeix, no tenim cap informació sobre $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Exemple 4.21: La sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{5}{5\,n-1}$ divergeix, ja que

$$\frac{5}{5\,n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

i la sèrie harmònica divergeix.

Exemple 4.22: Considerem la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Tots els seus terms són positius i menors o iguals que els de la sèrie

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

i aquesta és convergent, ja que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ és una sèrie geomètrica amb $r = 1/2$ (i $a = 1$). De fet, pel teorema 4.10, tenim

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \underset{\text{T4.10}}{=} 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,.$$

A més d'establir la convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, hem trobat una fita superior:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3\,.$$

Com veurem en la secció 4.5, la suma d'aquesta sèrie és el nombre e.

Teorema 4.17: Criteri de comparació del límit

Siguen $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ dues successions i N un enter tal que $a_n > 0$ i $b_n > 0$ per a tot $n \geq N$.

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeixen o divergeixen ambdues.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeix, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergeix, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeix.

Demostració. Comencem amb el primer punt. Com que $\frac{L}{2} > 0$, la definició de límit d'una successió aplicada a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ens diu que existeix un nombre N_1 tal que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2}\,.$$

Per tant, per a $n > \max(N, N_1)$,

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2}\, b_n < a_n < \frac{3L}{2}\, b_n \, .$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeix, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3L}{2}\, b_n$ convergeix i, pel criteri de comparació, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix. Per altra banda, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergeix, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{2}\, b_n$ divergeix i, pel criteri de comparació, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeix. Això prova el primer punt del teorema. La prova dels altres dos punts és similar. Suposem que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Aleshores, existeix un nombre N_1 tal que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad \left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{L}{2} \, .$$

Per tant, per a $n > \max(N, N_1)$,

$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n < \frac{L}{2}\, b_n \, .$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeix, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{2}\, b_n$ convergeix i, pel criteri de comparació, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix. Finalment, suposem $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Aleshores, per a tot $M \in \mathbb{R}$ existeix un enter N_1 corresponent, tal que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad \frac{a_n}{b_n} > M \, .$$

Per tant, per a $n > \max(N, N_1)$,

$$\frac{a_n}{b_n} > M \quad \Rightarrow \quad a_n > M\, b_n \, .$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergeix, $\sum_{n=1}^{\infty} M\, b_n$ també divergeix i, pel criteri de comparació, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeix. □

Comentari: El criteri de comparació del límit és especialment útil per a establir la convergència o divergència de sèries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ amb a_n una funció racional.

Exemple 4.23: Volem utilitzar el criteri de comparació del límit per a determinar la convergència o divergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1} \, .$$

Hem de trobar una altra sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ que siga apropiada per a fer ús d'aquest criteri. Per a aconseguir-ho, fem la següent anàlisi. Quan $n \to \infty$, a_n es comporta com a $2n/n^2 = 2/n$. Això suggereix escollir $b_n = 1/n$. Aleshores, calculem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2 \, .$$

Com que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeix, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ també divergeix.

Teorema 4.18: Criteri de d'Alembert

Siga $\{a_n\}$ una successió de termes positius amb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho\,.$$

Aleshores, la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix si $\rho < 1$ i divergeix si $\rho > 1$ o és infinit.

El criteri de d'Alembert també s'anomena **criteri del quocient**.

Demostració. Considerem tres casos diferents segons el valor del límit ρ.

- $\rho < 1$

Siga r un nombre real entre ρ i 1, $\rho < r < 1$. Aleshores, $\epsilon = r - \rho$ és positiu i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ significa que existeix un enter N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < r - \rho\,,$$

i per tant, si $n > N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$. De manera explícita, podem escriure

$$\begin{aligned} a_{N+1} &< r\, a_N\,, \\ a_{N+2} &< r\, a_{N+1} < r^2\, a_N\,, \\ a_{N+3} &< r\, a_{N+2} < r^3\, a_N\,, \\ &\vdots \\ a_{N+m} &< r\, a_{N+m-1} < r^m\, a_N\,. \end{aligned}$$

Això ens indica que a partir de $n = N$, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és menor que una sèrie geomètrica de raó r. Pel teorema 4.10, aquesta sèrie geomètrica és convergent, ja que $|r| < 1$. Aleshores, separem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\,.$$

La suma finita $\sum_{n=1}^{N} a_n$ és necessàriament convergent i la sèrie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ és convergent per comparació amb una sèrie geomètrica amb $|r| < 1$. En conclusió, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent.

- $\rho > 1$ finit

Siga en aquest cas r un nombre real entre 1 i ρ, $1 < r < \rho$. Aleshores, $\epsilon = \rho - r$ és positiu i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ significa que existeix un enter N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < \rho - r\,,$$

i per tant, si $n > N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r$. De manera explícita, podem escriure

$$\begin{aligned} a_{N+1} &> r\, a_N \,, \\ a_{N+2} &> r\, a_{N+1} > r^2\, a_N \,, \\ a_{N+3} &> r\, a_{N+2} > r^3\, a_N \,, \\ &\vdots \\ a_{N+m} &> r\, a_{N+m-1} > r^m\, a_N \,. \end{aligned}$$

Això ens indica que a partir de $n = N$, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és major que una sèrie geomètrica de raó r. Pel teorema 4.10, aquesta sèrie geomètrica és divergent, ja que $r > 1$. Aleshores, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és divergent.

- ρ infinit

Aquest cas és molt similar a l'anterior. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ significa que per a tot $r \in \mathbb{R}$ existeix un enter N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > r \,,$$

i per tant, si escollim $r > 1$ la demostració es redueix al cas anterior. □

Comentari 1: El criteri de d'Alembert no és concloent si $\rho = 1$. Per exemple, considerem les sèries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,.$$

En els dos casos tenim

$$\text{Si} \quad a_n = \frac{1}{n} \quad \text{aleshores} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1 \,.$$

$$\text{Si} \quad a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{aleshores} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1 \,.$$

La primera és la sèrie harmònica i divergeix, mentre que la segona és la sèrie harmònica generalitzada amb $p = 2$ i convergeix.

Comentari 2: El criteri de d'Alembert resulta normalment útil quan els termes d'una sèrie contenen factorials d'expressions que inclouen a n o expressions elevades a un exponent que inclou a n.

Exemple 4.24: Estudiem la convergència o divergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$. Tenim el quocient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1} + 5)/3^{n+1}}{(2^n + 1)/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1} + 5}{2^n + 5} \to \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} < 1 \,.$$

La sèrie és convergent. Ara bé, la seua suma no és 2/3. De fet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{21}{2}\,.$$

Exemple 4.25: Estudiem la convergència o divergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$. Tenim

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)\,n!\,(n+1)\,n!}\,,$$

i, per tant,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4 > 1\,,$$

i la sèrie és divergent.

Exemple 4.26: Estudiem la convergència o divergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$. Tenim

$$a_n = \frac{4^n n!\,n!}{(2n)!} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{4\,4^n(n+1)\,n!(n+1)\,n!}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}\,,$$

i aleshores

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2\,(n+1)}{2n+1} \to 1\,.$$

El criteri de d'Alembert no ens diu res en aquest cas, ja que obtenim $\rho = 1$. Ara bé, hem trobat que $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$ i aquest quocient és sempre major que 1. Per tant, la successió $\{a_n\}$ és creixent i tots els termes són majors que $a_1 = 2$. En conseqüència, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ i la sèrie divergeix.

Teorema 4.19: Criteri de Cauchy

Siga $\{a_n\}$ una successió i N un enter tal que $a_n \geq 0$ per a tot $n \geq N$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho\,,$$

aleshores la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix si $\rho < 1$ i divergeix si $\rho > 1$ o és infinit.

El criteri de Cauchy també s'anomena **criteri de l'arrel**.

Demostració. Considerem tres casos diferents segons el valor del límit ρ.

- $\rho < 1$

Siga un $\epsilon > 0$ tal que $\rho + \epsilon < 1$. Aleshores, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ significa que existeix un enter N_1 tal que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad |\sqrt[n]{a_n} - \rho| < \epsilon\,,$$

i, per tant, si $n > \max(N, N_1) = M$,

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon \quad \Rightarrow \quad a_n < (\rho + \epsilon)^n\,.$$

La sèrie $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ és una sèrie geomètrica de raó $r = \rho + \epsilon$. Pel teorema 4.10, aquesta sèrie geomètrica és convergent, ja que $|r| < 1$. Aleshores, pel criteri de comparació, $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ també és convergent. Separem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{M-1} a_n + \sum_{n=M}^{\infty} a_n\,.$$

La suma finita $\sum_{n=1}^{M-1} a_n$ és convergent i hem provat que la sèrie $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ és convergent. En conclusió, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent.

- $\rho > 1$ finit

Siga un $\epsilon > 0$ tal que $\rho - \epsilon > 1$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ significa que existeix un enter N_1 tal que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad |\sqrt[n]{a_n} - \rho| < \epsilon\,,$$

i, per tant, si $n > \max(N, N_1) = M$,

$$\sqrt[n]{a_n} > \rho - \epsilon \quad \Rightarrow \quad a_n > (\rho - \epsilon)^n\,.$$

La sèrie $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho - \epsilon)^n$ és una sèrie geomètrica de raó $r = \rho - \epsilon$. Pel teorema 4.10, aquesta sèrie geomètrica és divergent, ja que $\rho - \epsilon > 1$ i, per tant, $|r| > 1$. Aleshores, pel criteri de comparació, $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ també és divergent i, de manera anàloga al cas anterior, podem concloure que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és divergent.

- ρ infinit

Aquest cas és molt similar a l'anterior. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ significa que per a tot $r \in \mathbb{R}$ existeix un enter N_1 tal que

$$\text{si} \quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad \sqrt[n]{a_n} > r\,,$$

i per tant, si escollim $r > 1$ la demostració es redueix al cas anterior. □

Comentari 1: El criteri de Cauchy no és concloent si $\rho = 1$. De nou, els exemples de la sèrie harmònica i la sèrie harmònica generalitzada il·lustren perfectament aquesta limitació del criteri.

Exemple 4.27: Estudiem la convergència o divergència de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Tenim

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1^2}{2} < 1\,,$$

on hem fet servir que $\sqrt[n]{n} \to 1$, com vam veure en el límit (ii) del teorema 4.9. Aleshores, la sèrie convergeix.

Exemple 4.28: Siga la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$. Apliquem el criteri de Cauchy

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \to \frac{2}{1^3} > 1\,.$$

Aleshores, la sèrie és divergent.

4.4 Convergència de sèries alternades

En la secció prèvia hem estudiat sèries de termes no negatius. Ara considerem sèries que alternen el signe dels seus termes.

Definició 4.10: Sèrie alternada

Una **sèrie alternada** és una sèrie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, u_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, u_n\,,$$

amb $u_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4.29: La sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

s'anomena **sèrie harmònica alternada**. Comprovem que efectivament $u_n = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.20: Criteri de Leibniz

Siga la successió $\{u_n\}$, positiva i monòtona decreixent. Si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,,$$

llavors la sèrie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,u_n$ és convergent.

El criteri de Leibniz també s'anomena **criteri de la sèrie alternada**.

Demostració. Definim $a_n = (-1)^{n+1}\,u_n$. Com que tots els termes de la successió $\{u_n\}$ són positius, els terms imparells de la successió $\{a_n\}$ són positius i els termes parells són negatius. Siga $\{s_n\}$ la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Com que $\{u_n\}$ és decreixent, $-a_{2n} > a_{2n+1}\ \forall n$. Per tant, $a_{2n} + a_{2n+1} < 0$ i aleshores

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} + a_{2n+1} < s_{2n-1}\,.$$

Això demostra que els termes imparells de la successió de sumes parcials formen una successió decreixent:

$$s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2n-1} > \ldots \tag{4.8}$$

Per altra banda, $a_{2n+1} > -a_{2n+2}\ \forall n$ i, per tant, $a_{2n+1} + a_{2n+2} > 0$. Aleshores

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} > s_{2n}\,.$$

Això prova que els termes parells de la successió de sumes parcials formen una successió creixent:

$$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \ldots \tag{4.9}$$

Com que a_{2n} és negatiu i $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n}$, trobem que $s_{2n} < s_{2n-1}$. Aquest resultat ens permet combinar les equacions (4.8) i (4.9) i escriure

$$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < s_{2n-1} < \cdots < s_5 < s_3 < s_1\,.$$

Aquesta equació ens diu que tant $\{s_{2n}\}$ com $\{s_{2n-1}\}$ són successions fitades i monòtones, i aleshores pel teorema 4.2, són convergents. Definim

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = L_1\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = L_2\,.$$

Ara bé, com que $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} = u_n$ i $u_n \to 0$, els límits de les dues successions són iguals. Per tant, $L_1 = L_2 = L$. Queda provar que la successió de sumes parcials s_n convergeix al mateix límit. Siga $\epsilon > 0$. Aleshores, existeixen dos nombres enters N_1 i N_2 tals que

$$\text{si}\quad n > N_1 \quad \text{aleshores} \quad |s_{2n} - L| < \epsilon\,, \quad \text{si} \quad n > N_2 \quad \text{aleshores} \quad |s_{2n+1} - L| < \epsilon\,.$$

Siga $N = \max(N_1, N_2)$,

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad |s_n - L| < \epsilon \, ,$$

i, per tant, la successió de sumes parcials s_n també convergeix a L. Queda així provat que la sèrie alternada és convergent. $\square$

Corol·lari. Fita de l'error de la suma parcial: Siguen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = L$ una sèrie alternada convergent i $\{s_n\}$ la successió de sumes parcials de la sèrie. Aleshores $|s_n - L| \leq u_{n+1}$.

Demostració. En la demostració del criteri de Leibniz hem provat que tant els termes parells com els termes imparells de la successió de sumes parcials són successions fitades i monòtones, i llavors convergents, i que en ambdós casos el seu límit és L, la suma de la sèrie. La successió de termes parells és una successió creixent i, pel teorema 4.2, convergeix al seu suprem. La successió de termes imparells és una successió decreixent i, pel teorema 4.2, convergeix al seu ínfim. Podem per tant escriure

$$s_{2n} \leq L \leq s_{2n+1} \, .$$

A més, recordem la definició $a_n = (-1)^{n+1} u_n$, que fa que els terms imparells de la successió $\{a_n\}$ siguen positius i els termes parells negatius. Considerem ara dos casos. Si $n = 2m + 1$, amb $m \in \mathbb{N}$, tenim

$$|s_n - L| = |s_{2m+1} - L| = s_{2m+1} - L \leq s_{2m+1} - s_{2m+2} = -a_{2m+2} = u_{n+1} \, .$$

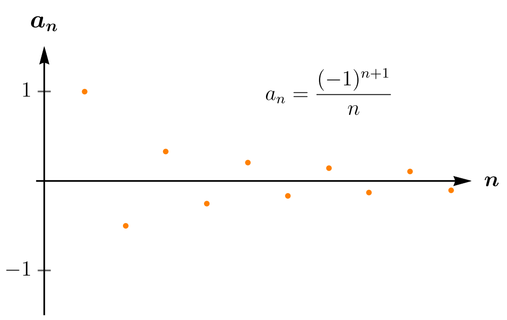
I si $n = 2m$, amb $m \in \mathbb{N}$, tenim

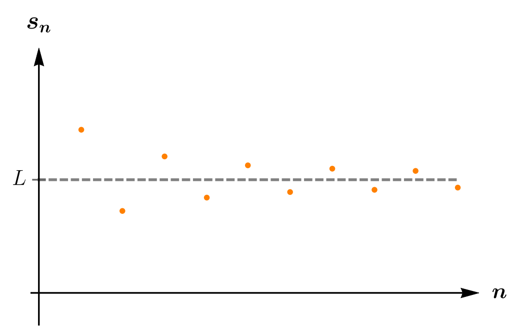
$$|s_n - L| = |s_{2m} - L| = L - s_{2m} \leq s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} = u_{n+1} \, .$$

El corol·lari queda provat en els dos casos. $\square$

Aquest corol·lari permet fitar l'error que fem si en lloc de sumar tots els termes de la sèrie ens aturem en un terme concret amb $n = k$. La diferència entre la suma parcial $\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} u_n$ i la suma de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ és menor que el següent terme de la successió positiva, u_{k+1}.

Exemple 4.30: La sèrie harmònica alternada, de terme general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, satisfà tots els requisits del criteri de Leibniz i és, per tant, convergent. Dibuixem la successió $\{a_n\}$ i la successió de sumes parcials, $\{s_n\}$, que convergeix a la suma de la sèrie:





Com veurem en la secció 4.5, la suma de la sèrie és $\ln 2$.

Definició 4.11: Convergència absoluta

Una sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és **absolutament convergent** si la sèrie de valors absoluts $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ és convergent.

Definició 4.12: Convergència condicional

Una sèrie convergent que no és absolutament convergent és **condicionalment convergent**.

Comentari: En el cas de sèries de termes no negatius no existeix diferència entre convergència i convergència absoluta. Una sèrie de termes no negatius convergent és, òbviament, també absolutament convergent.

Exemple 4.31: La sèrie geomètrica alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

és absolutament convergent, ja que la sèrie de valors absoluts corresponent és una sèrie geomètrica amb raó $|r| = \frac{1}{2} < 1$, i, per tant, convergent.

Exemple 4.32: La sèrie harmònica alternada és condicionalment convergent, ja que la sèrie de valors absoluts associada és la sèrie harmònica, divergent.

Teorema 4.21: Criteri de la convergència absoluta

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeix, aleshores $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeix.

Demostració. Per a tot n,

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n|\,.$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeix, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} 2\,|a_n|$ convergeix, i pel criteri de comparació, la sèrie de termes no negatius $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ convergeix. Ara escrivim

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,.$$

Com que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és la diferència de dues sèries convergents, és convergent. □

Comentari 1: Aquest teorema ens permet demostrar la convergència d'una sèrie alternada estudiant la convergència de la sèrie de valors absoluts associada, per a la qual podem utilitzar els criteris de la secció prèvia.

Comentari 2: Tota sèrie absolutament convergent convergeix. Ara bé, moltes sèries convergents no són absolutament convergents. Un exemple seria la sèrie harmònica alternada.

Exemple 4.33: Siga la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$. Com que $\sin n \in [-1,1]$, la sèrie té termes positius i termes negatius. La sèrie de valors absoluts corresponents és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$. Fem servir el criteri de comparació per a establir que aquesta sèrie és convergent, ja que

$$\frac{|\sin n\,|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\,,$$

i la sèrie harmònica generalitzada amb $p = 2$ és convergent. Aleshores, com que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ és absolutament convergent, és convergent.

Exemple 4.34: Si $p > 0$, la successió $\{1/n^p\}$ és decreixent i amb límit zero. Aleshores, pel criteri de Leibniz, la sèrie harmònica generalitzada alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$$

és convergent si $p > 0$. Com que la sèrie harmònica generalitzada convergeix si $p > 1$ i divergeix si $p \leq 1$, concloem que la sèrie harmònica generalitzada alternada és condicionalment convergent si $0 < p \leq 1$ i absolutament convergent si $p > 1$.

La manipulació de termes en sèries alternades ha de fer-se amb compte, com ara veurem amb dos exemples.

Exemple 4.35: La sèrie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

s'anomena **sèrie de Grandi**. En els exemples 4.18 ja hem comentat que es tracta d'una sèrie divergent segons el teorema 4.12, ja que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existeix. No obstant això, podem *caure en la temptació* d'agrupar els termes de la manera següent,

$$S = (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + \dots$$

i concloure que la suma de la sèrie és $S = 0$. També podem agrupar d'una manera alternativa,

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots$$

i concloure $S = 1$. Finalment, podem calcular

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = S\,,$$

i obtenir $S = \frac{1}{2}$. Òbviament, la suma de la sèrie no pot ser alhora 0, 1 i $\frac{1}{2}$. De fet, sabem que la sèrie és divergent. Per tant, les manipulacions que hem fet no són possibles.

Exemple 4.36: Considerem de nou la sèrie harmònica alternada,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

Multipliquem per 2:

$$2\,S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Ara podem agrupar els termes amb el mateix denominador. Tenim $2 - 1$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$, $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}$, ... També podem reordenar els termes. Aquestes operacions condueixen a

$$2\,S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = S\,.$$

La sèrie harmònica alternada és convergent i, com veurem en la secció 4.5, la seua suma no és zero. De fet, podem demostrar que $S \neq 0$ a partir de la fita a l'error de la suma parcial que trobem com a corol·lari al teorema 4.20. Si considerem per exemple la suma parcial $s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ trobem $\left|\frac{1}{2} - S\right| \leq \frac{1}{3}$, és a dir, $\frac{1}{2} - S \leq \frac{1}{3}$ i $S \geq \frac{1}{6}$. En conclusió, $S \neq 0$ i podem, per tant, dividir per S en aquesta equació. Trobem

$$2 = 1\,.$$

De nou, un resultat absurd.

Els següents teoremes fixen les condicions baix les quals les manipulacions fetes en aquests exemples estan permeses. Encara que no els demostrarem, és important conèixer-los per a evitar cometre errades en la reordenació o agrupació de termes d'una sèrie. El primer teorema tracta sobre la **commutativitat** dels termes en una sèrie convergent.

Teorema 4.22

Siga $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sèrie convergent.

- Si convergeix absolutament, aleshores la sèrie que s'obté en fer qualsevol reordenació dels seus termes és també convergent i té la mateixa suma.
- Si convergeix condicionalment, per a tot $M \in \mathbb{R}$ existeix una reordenació dels seus termes tal que la nova sèrie convergisca a M. També existeixen reordenacions que fan divergir la sèrie a menys o més infinit.

Comentari 1: Aquest teorema ens diu que els termes de les sèries absolutament convergents tenen la propietat commutativa, igual que en el cas de les sumes finites.

Comentari 2: El segon punt d'aquest teorema s'anomena **Teorema de Riemann**. Ens diu que sempre podrem trobar una reordenació dels termes d'una sèrie condicionalment convergent de manera que la sèrie convergisca a qualsevol valor, inclosos menys o més infinit. Per tant, l'operació de reordenació pot alterar el valor de la sèrie i per tant, en general, no està permesa.

El segon teorema tracta sobre l'**associativitat** dels termes d'una sèrie, és a dir, sobre la validesa d'agrupar un nombre finit de termes i sumar-los de manera separada.

Teorema 4.23

Siga la sèrie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tal que $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

- Per a tota successió $n_1 < n_2 < n_3 < \dots.$ amb $n_1 = n_0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{n_k} + a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}-1}\right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \,.$$

- Una reordenació dels termes de la sèrie no altera la sèrie.

Comentari: Si la sèrie és de termes no negatius, el primer punt del teorema ens diu que podem agrupar termes i el segon que podem reordenar-los.

Hem de recordar que una sèrie és el límit d'una successió de sumes parcials. No és, per tant, una suma. Aleshores, en principi, no hem d'esperar que les propietats de commutativitat i associativitat siguen vàlides en qualsevol sèrie. Hem vist que en les sèries absolutament convergents i les sèries de termes no negatius algunes d'aquestes propietats es respecten, com si foren sumes finites. En canvi, en els exemples 4.35 i 4.36 hem agrupat i reordenat termes en sèries en les quals no és possible. El primer cas, la sèrie de Grandi, és una sèrie alternada i divergent, i el segon cas, la sèrie harmònica alternada, és una sèrie condicionalment convergent.

4.5 Sèries de potències

Definició 4.13: Sèrie de potències

Una **sèrie de potències al voltant de $x = x_0$** és una sèrie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n = c_0 + c_1 \left(x - x_0\right) + c_2 \left(x - x_0\right)^2 + \cdots + c_n (x - x_0)^n + \dots \tag{4.10}$$

on $x_0 \in \mathbb{R}$ és el **centre** i els **coeficients** c_n són constants.

Comentari: En molts casos ens interessa una sèrie de potències al voltant de $x = 0$, equivalent a fer $x_0 = 0$ en l'equació (4.10). En aquest cas l'expressió se simplifica a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_n\, x^n + \ldots$$

Exemple 4.37: En el cas $x_0 = 0$ i $c_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ obtenim la sèrie geomètrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$$

de primer terme igual a 1 i raó x. Vam demostrar en el teorema 4.10 que aquesta sèrie és convergent si $|x| < 1$, i que en aquest cas la suma és $1/(1-x)$. Aleshores, escrivim

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

Fins ara, havíem llegit aquesta igualtat d'esquerra a dreta. Si la sèrie convergeix, la seua suma és $1/(1-x)$. A partir d'ara llegirem també la igualtat de dreta a esquerra, és a dir,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

La funció $f(x) = 1/(1-x)$ és expressada per una sèrie de potències de terme general x^n.

Exemple 4.38: La sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \ldots$$

és una sèrie de potències de centre $x_0 = 2$ i coeficients $c_n = (-1/2)^n$. De nou, es tracta d'una sèrie geomètrica de primer terme igual a 1 i raó $r = -(x-2)/2$. Llavors, la sèrie és convergent per a

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 4\,,$$

i la seua suma és

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}\,.$$

Aleshores, escrivim

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \ldots\,, \quad 0 < x < 4\,.$$

Si $0 < x < 4$, podem representar la funció $f(x) = \frac{2}{x}$ per la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$.

Teorema 4.24: Teorema de convergència de sèries de potències

Si la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$ convergeix per a $x = a \neq 0$, aleshores convergeix absolutament per a tot x amb $|x| < |a|$. Si divergeix per a $x = b$, aleshores divergeix per a tot x amb $|x| > |b|$.

Demostració. Suposem primer que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, a^n$ convergeix. Llavors, $\lim_{n\to\infty} c_n \, a^n = 0$ pel criteri del terme n-èsim i, per tant, existeix un enter N tal que

$$\text{si} \quad n > N \quad \text{aleshores} \quad |c_n \, a^n| < 1 \, ,$$

és a dir

$$|c_n| < \frac{1}{|a|^n} \, , \quad \text{si } n > N \, .$$

Siga x tal que $|x| < |a|$, i aleshores $|x|/|a| < 1$. Multiplicant l'equació prèvia per $|x|^n$ obtenim

$$|c_n||x|^n < \frac{|x|^n}{|a|^n} \, , \quad \text{si } n > N \, .$$

Com que $|x|/|a| < 1$, la sèrie geomètrica $\sum_{n=0}^{\infty} |x/a|^n$ convergeix. Pel criteri de comparació, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n$ convergeix, i aleshores la sèrie original $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$ és absolutament convergent per a $-|a| < x < |a|$. Suposem ara que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, b^n$ divergeix. Siga x un nombre real tal que $|x| > |b|$. Si la sèrie és convergent en x, aleshores la primera part del teorema implica que la sèrie és absolutament convergent en $x = b$, en contradicció amb la premissa. Aleshores, per reducció a l'absurd, la sèrie ha de ser divergent per a tot x amb $|x| > |b|$. □

Comentari: Si la sèrie de potències té centre $x_0 \neq 0$, el teorema 4.24 s'aplica a la sèrie $\sum_{n=0} c_n \, (x')^n$, amb $x' = x - x_0$.

Corol·lari. La convergència de la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n$ es descriu per una de les següents tres possibilitats:

(i) Existeix un nombre real positiu R tal que sèrie divergeix per a tot x amb $|x - x_0| > R$ però convergeix absolutament per a tot x amb $|x - x_0| < R$. La sèrie pot ser convergent o divergent en $x = x_0 \pm R$.

(ii) La sèrie és absolutament convergent per a tot valor de x ($R = \infty$).

(iii) La sèrie convergeix en $x = x_0$ i divergeix en qualsevol altre valor ($R = 0$).

Comentari: El valor R s'anomena **radi de convergència** de la sèrie de potències i l'interval de radi R centrat en x_0 s'anomena **interval de convergència**.

Exemples 4.39: Estudiem la convergència de les sèries de potències

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots$

aplicant el criteri de d'Alembert a les sèries de valors absoluts associades.

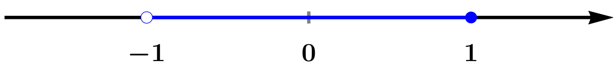
(i) Si $a_n = (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}$ aleshores $|a_n| = \frac{|x|^n}{n}$, i tenim

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = \frac{n}{n+1}\,|x| \to |x|\,.$$

En conclusió, la sèrie convergeix absolutament si $|x| < 1$ i divergeix si $|x| > 1$. Hem d'estudiar el comportament de la sèrie en $|x| = 1$, és a dir, en $x = 1$ i $x = -1$. En $x = 1$ la sèrie és la sèrie harmònica alternada, que és convergent. En $x = -1$, com que $(-1)^{n+1}(-1)^n = -1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

i ens trobem amb la sèrie harmònica, que és divergent. En conclusió, la sèrie té radi de convergència $R = 1$, convergeix per a x amb $-1 < x \leq 1$ i divergeix per a altres valors. Podem representar aquest resultat de la manera següent:



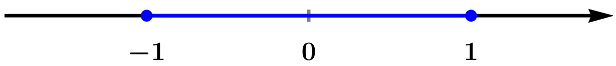
(ii) Si $a_n = (-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ aleshores

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}\,x^2 \to x^2\,.$$

Deduïm que la sèrie és absolutament convergent si $x^2 < 1$ i divergeix si $x^2 > 1$. Estudiem la convergència en el cas $x^2 = 1$, equivalent als punts $x = 1$ i $x = -1$. Si $x = 1$ la sèrie de potències es converteix en la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \ldots$$

Es tracta d'una sèrie alternada amb $u_n = 1/(2n-1)$. Com que u_n és decreixent i $u_n \to 0$, el criteri de Leibniz ens diu que la sèrie és convergent. Obtenim la mateixa conclusió en $x = -1$, ja que el terme general de la sèrie resultant té el mateix valor absolut. Aleshores, la sèrie té radi de convergència $R = 1$, convergeix per a x amb $-1 \leq x \leq 1$ i divergeix per a altres valors. Representem aquest resultat de la manera següent:



(iii) Si $a_n = \frac{x^n}{n!}$ aleshores

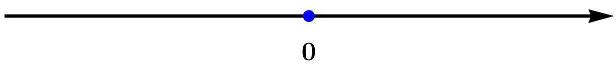
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \, \forall x \, .$$

La sèrie té radi de convergència $R = \infty$ i és per tant absolutament convergent en tota la recta real:

(iv) Si $a_n = n! \, x^n$ aleshores

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)! \, x^{n+1}}{n! \, x^n}\right| = (n+1)\,|x| \to \infty \, \forall x \neq 0 \, .$$

Aleshores, el criteri de d'Alembert ens diu que la sèrie només convergeix si $x = 0$. En aquest cas el radi de convergència és $R = 0$:



En els exemples 4.37 i 4.38 vam veure que una sèrie de potències de x convergeix a una funció $f(x)$ en el seu interval de convergència i que, de manera inversa, una funció $f(x)$ pot representar-se per una sèrie de potències dins d'un cert interval de convergència. El següent teorema reforça aquesta equivalència.

Teorema 4.25: Teorema de diferenciació i integració terme a terme

Siga la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n$, amb radi de convergència $R > 0$. Aleshores, la funció

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - x_0)^n$$

és derivable en l'interval $(x_0 - R, x_0 + R)$ i

(i) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[c_n\,(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,(x-x_0)^{n-1},$$

(ii) $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n\,(x-x_0)^n\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

El radi de convergència de les sèries de potències $\sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,(x-x_0)^{n-1}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ és també R.

Comentari 1: Com que $f(x)$ és derivable en l'interval de convergència, també és contínua en aquest interval, com sabem pel teorema 2.2.

Comentari 2: L'aplicació repetida del teorema implica que les sèries $\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,c_n\,(x-x_0)^{n-2}$, $\sum_{n=3}^{\infty} n\,(n-1)\,(n-2)\,c_n\,(x-x_0)^{n-3}$, ..., també són convergents en (x_0-R, x_0+R) i es corresponen amb les derivades successives de la sèrie original.

Comentari 3: Aquest teorema estableix una igualtat entre funcions i sèries de potències dins d'un cert interval de convergència, però no diu res sobre els extrems de l'interval. Per a resoldre aquesta qüestió hem de fer servir el **teorema d'Abel**, que diu que si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,x^n$ en $-b < x < b$ i la sèrie convergeix en $x = b$, aleshores

$$f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,b^n\,,$$

mentre que si convergeix en $x = -b$ tenim

$$f(-b) = \lim_{x\to -b^+} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,(-b)^n\,.$$

Aquest teorema, que no demostrarem, estableix les condicions per a identificar la funció amb la sèrie de potències en els extrems de l'interval de convergència. Podem veure que per a funcions contínues l'equivalència està garantida si la sèrie és convergent.

Demostració. Per simplicitat, i sense pèrdua de generalitat, demostrem el teorema per a $x_0 = 0$. Comencem demostrant el primer punt del teorema, el **teorema de diferenciació terme a terme**. Aquest punt es prova en dos passos. Primer hem de demostrar que la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1}$ convergeix en l'interval $(-R, R)$ i a continuació que es tracta de la derivada de la sèrie original. Siga $x \in (-R, R)$ i $\epsilon > 0$ tal que $|x| < |x| + \epsilon < R$. Com que $|x| + \epsilon$ es troba en l'interval de convergència, la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\,(|x|+\epsilon)^n|$ convergeix. Ara, per les propietats dels límits de successions (teorema 4.3) i els límits del teorema 4.9, tenim

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{1/n}\,|x|^{(n-1)/n}\right] \underset{\mathrm{P(iii)}}{=} \lim_{n\to\infty} n^{1/n}\cdot\lim_{n\to\infty}|x|^{(n-1)/n} \underset{\mathrm{T4.9}}{=} 1\cdot|x| = |x|\,.$$

Això implica que existeix un nombre enter N tal que si $n > N$ aleshores

$$n^{1/n}\,|x|^{(n-1)/n} < |x| + \epsilon \quad \Rightarrow \quad |n\,x^{n-1}| < (|x|+\epsilon)^n \quad \Rightarrow \quad |n\,c_n\,x^{n-1}| < |c_n\,(|x|+\epsilon)^n| \;.$$

Com que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\,(|x|+\epsilon)^n|$ convergeix, el criteri de comparació ens diu que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{d}{dx}\,(c_n\,x^n) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| n\,c_n\,x^{n-1} \right|$$

també convergeix, i aleshores, pel teorema 4.21,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\,(c_n\,x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1}$$

convergeix. Ara hem de provar que aquesta sèrie és la derivada de la sèrie original, és a dir, que la funció representada per aquesta sèrie és la derivada de la funció $f(x)$ representada per la sèrie original. Siga $x \in (-R, R)$ i

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\,(c_n\,x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1} \,.$$

Hem de provar que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x) \,.$$

Per a $x + h \in (-R, R)$, amb $h \neq 0$, tenim

$$\begin{aligned}
\left| g(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n\,(x+h)^n - c_n\,x^n}{h} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right] \right| \,.
\end{aligned}$$

Ara, pel teorema del valor mitjà de Lagrange (teorema 2.12), existeix un nombre real $t_n \in (x, x+h)$ tal que

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\,t_n^{n-1} \,.$$

Aleshores, podem escriure

$$\begin{aligned}
\left| g(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,t_n^{n-1} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n \left[x^{n-1} - t_n^{n-1} \right] \right| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} n\,c_n \left[x^{n-1} - t_n^{n-1} \right] \right| \,.
\end{aligned}$$

Fem servir el teorema del valor mitjà de Lagrange de nou. Existeix un nombre real $p_{n-1} \in (x, t_n)$ tal que

$$\frac{x^{n-1} - t_n^{n-1}}{x - t_n} = (n-1)\, p_{n-1}^{n-2}\,,$$

i aleshores

$$|x^{n-1} - t_n^{n-1}| = |x - t_n| \cdot |(n-1)\, p_{n-1}^{n-2}|\,.$$

Com que $|x - t_n| < |h|$ i $|p_{n-1}| \leq |\alpha|$, amb $|\alpha| = \max(|x|, |x+h|)$, obtenim

$$|x^{n-1} - t_n^{n-1}| \leq |h| \cdot \left|(n-1)\alpha^{n-2}\right|\,.$$

En conclusió, hem trobat la fita

$$\left|g(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} \left|n\,(n-1)\, c_n\, \alpha^{n-2}\right|\,. \tag{4.11}$$

La sèrie $\sum_{n=2}^{\infty} \left|n\,(n-1)\, c_n\, \alpha^{n-2}\right|$ és convergent en $(-R, R)$, ja que es tracta de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}\left[c_n\, \alpha^n\right]$ i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \alpha^n$ convergeix. Aleshores, podem calcular fàcilment

$$\lim_{h \to 0}\left[|h| \sum_{n=2}^{\infty} \left|n\,(n-1)\, c_n\, \alpha^{n-2}\right|\right] = 0\,,$$

i l'equació (4.11) implica que

$$\lim_{h \to 0}\left|g(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = 0\,,$$

i $g(x) = f'(x)$. Així queda demostrat el primer punt del teorema. Passem ara al segon, el **teorema d'integració terme a terme**. En primer lloc notem que

$$\left|\frac{c_n}{n+1}\, x^n\right| \leq |c_n\, x^n|\,,$$

i per tant, pel criteri de comparació, la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{c_n}{n+1} x^n\right|$ convergeix en $(-R, R)$. Multiplicant per x s'obté que $x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ també convergeix en aquest interval. Això demostra que la sèrie considerada és convergent en el mateix interval de convergència. Ara hem de demostrar que es tracta de la primitiva de la sèrie original. Definim $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$. El primer punt d'aquest teorema prova que $F'(x) = f(x)$. Aleshores, per la definició de funció primitiva,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C\,.$$

□

Comentari: Aquest teorema constitueix una eina molt poderosa per sumar sèries de potències i trobar les funcions corresponents a partir d'altres sèries de potències de suma coneguda relacionades mitjançant derivació o integració.

Exemple 4.40: Volem sumar la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. En primer lloc, estudiem la seua convergència fent ús del criteri de d'Alembert. Si $a_n = \frac{x^n}{n}$ aleshores $|a_n| = \frac{|x|^n}{n}$, i tenim

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \to |x| \, .$$

En conclusió, la sèrie convergeix absolutament si $|x| < 1$ i divergeix si $|x| > 1$. A més, en $x = 1$ la sèrie és divergent, perquè es tracta de la sèrie harmònica, i en $x = -1$ convergent, perquè es tracta de la sèrie harmònica alternada. Concloem que el seu radi i interval de convergència són $R = 1$ i $-1 \leq x < 1$. Ara, per a trobar la seua suma en $-1 < x < 1$ notem que si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \, , \quad -1 < x < 1 \, ,$$

aleshores

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \, ,$$

on en l'últim pas hem identificat la sèrie geomètrica. La funció $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$,

$$\int f'(x) \, dx = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C \, ,$$

i la constant d'integració la podem determinar a partir de la condició $f(0) = 0$, que deduïm directament amb la substitució $x = 0$ en la sèrie $f(x) = \sum_{n=1} \frac{x^n}{n}$. Tenim

$$-\ln(1-0) + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \, .$$

I en conclusió

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \, , \quad -1 < x < 1 \, .$$

Com a comentari final notem que la sèrie és convergent en $x = -1$ i que, pel teorema d'Abel, convergeix en aquest extrem al valor $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$.

Exemple 4.41: Si en l'exemple previ fem el canvi $x \to -x$ obtenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x) \, , \quad -1 < x < 1 \, ,$$

i aleshores, simplement multiplicant per -1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n = \ln(1+x)\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ convergeix en $x = 1$, ja que és la sèrie harmònica alternada. A més, la funció $\ln(1+x)$ és contínua en $x = 1$. Per tant, pel teorema d'Abel, obtenim que la suma de la sèrie harmònica alternada és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2\,.$$

Exemple 4.42: Volem identificar la funció

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\,, \quad -1 \le x \le 1\,.$$

Per aplicació del teorema 4.25, podem trobar $f'(x)$ derivant la sèrie terme a terme:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - \ldots\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

Es tracta d'una sèrie geomètrica amb primer terme igual a 1 i raó $-x^2$. Aleshores,

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Ara integrem per a obtenir $f(x)$:

$$\int f'(x)\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C\,.$$

Com que $f(0) = 0$, $C = 0$. En conclusió

$$f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

Finalment, la sèrie de potències convergeix en $x = 1$ i $x = -1$. Com que la funció $\arctan x$ és contínua en els dos punts, la sèrie convergeix a $\arctan x$ també en els extrems de l'interval de convergència.

El teorema 4.25 garanteix que la suma d'una sèrie de potències és una funció contínua i derivable, amb derivades de tots els ordres dins de l'interval de convergència. Ara plantegem la qüestió inversa. Si una funció té derivades de tots els ordres en un cert interval, podem expressar-la com una sèrie de potències? I si és així, quins són els coeficients d'aquesta sèrie? Abans de donar resposta a aquestes qüestions recordem el **teorema de Taylor** (teorema 2.19). Si f és una funció derivable $n+1$ vegades en un interval obert I que conté el punt a, aleshores, per a cada $n \in \mathbb{N}$ i $\forall x \in I$, existeix un valor c entre a i x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,,$$

on

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,, \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

són el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ en $x = a$ i el residu.

Definició 4.14: Sèrie de Taylor

Siga f una funció amb derivades de tots els ordres en un interval obert I que conté el punt a. Aleshores, la **sèrie de Taylor** generada per f en $x = a$ és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

Comentari: La sèrie de Taylor és el límit del polinomi de Taylor:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,.$$

Teorema 4.26: Convergència de la sèrie de Taylor

Siga f una funció amb derivades de tots els ordres en un interval obert I que conté al punt a i siguen P_n i R_n el polinomi de Taylor d'ordre n de f en $x = a$ i el residu, respectivament. Aleshores, si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0\ \forall x \in I$, la sèrie de Taylor de f en $x = a$ convergeix a la funció f en I, i escrivim

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\,.$$

Demostració. La funció $f(x)$ s'escriu com la suma d'un polinomi de Taylor i un residu, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. Per tant, $P_n(x) = f(x) - R_n(x)$. Si $R_n \to 0$, tenim

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left[f(x) - R_n(x)\right] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)\,.$$

□

Comentari 1: La sèrie de Taylor és una sèrie de potències al voltant de $x = a$ amb coeficients

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} .$$

Comentari 2: El cas particular $a = 0$ s'anomena **sèrie de Maclaurin**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

Comentari 3: En els exemples 2.29 i 2.30 de la secció 2.6 vam veure que l'aproximació d'un polinomi de Taylor a la funció que el genera millora si augmentem l'ordre del polinomi. El teorema 4.26 dona una explicació a aquest fet, que vam comprovar per a les funcions e^x i $\sin x$. Efectivament, si es donen les premisses del teorema, en el límit $n \to \infty$ el polinomi és exactament la funció.

Comentari 4: Donada una funció f amb derivades de tots els ordres en un cert interval I, podem afirmar que existeix una sèrie de Taylor associada, però aquesta sèrie només serà equivalent a la funció si $R_n \to 0$. En cas contrari la sèrie no convergeix a la funció.

Comentari 5: Considerem el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ en $x = a$. El teorema d'estimació del residu (teorema 2.20) permet fitar el residu si la derivada $n+1$ de la funció f satisfà $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$, amb $m, M \in \mathbb{R}$, per a tot $t \in I$, on I és un interval obert que conté el punt a. Si aquesta condició se satisfà per a tot n, aleshores $R_n \to 0$ i la sèrie convergeix a la funció. La prova és senzilla. Siga l'interval $I = (a - R, a + R)$, amb $R > 0$. Suposem que existeix un nombre real $M > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $\forall n \geq 0$ i $\forall x \in I$. Aleshores

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Com que $x \in I$, $|x - a| < R$ i tenim

$$|R_n(x)| \leq M \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} .$$

El límit (vi) del teorema 4.9 és $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Aleshores, $|R_n(x)| \to 0$ per a tot $x \in (a - R, a + R)$ i la sèrie de Taylor convergeix a la funció. Com a exemples, podem considerar les funcions $f(x) = e^x$ i $g(x) = \sin x$. Vam obtenir els seus polinomis de Taylor en els exemples 2.29 i 2.30. En els dos casos podem fitar les seues derivades:

- En el cas de la funció exponencial, tenim $f^{(n)}(x) = e^x$. A més, sabem que és una funció creixent, i aleshores per a tot $R > 0$, si $x \in (a - R, a + R)$ trobem la fita $|f^{(n)}(x)| \leq e^{a+R}$. En conclusió, la sèrie de Taylor associada convergeix a e^x.
- Les derivades successives de la funció $g(x) = \sin x$ són necessàriament $\sin x$ o $\cos x$, amb signe positiu o negatiu. Com que aquestes funcions verifiquen $|\sin x| \leq 1$ i $|\cos x| \leq 1$, concloem que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ i de nou la sèrie de Taylor de la funció $\sin x$ és convergent.

Comentari 6: En el seu interval de convergència, una sèrie de potències és la sèrie de Taylor de la seua suma. Per a arribar a aquesta conclusió només hem de derivar terme a terme una sèrie de potències. Siga la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n$, de suma $f(x)$ en un cert interval de convergència. Tenim

$$f(x) = c_0 + c_1 \, x + c_2 \, x^2 + \cdots + c_k \, x^k + \ldots$$

i aleshores

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2\, c_2 \, x + 3\, c_3 \, x^2 + \cdots + k\, c_k \, x^{k-1} + \ldots \\ f''(x) &= 2\, c_2 + 6\, c_3 \, x + \cdots + k\,(k-1)\, c_k \, x^{k-2} + \ldots \\ f'''(x) &= 6\, c_3 + \cdots + k\,(k-1)\,(k-2)\, c_k \, x^{k-3} + \ldots \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= k!\, c_k + \ldots \end{aligned}$$

Si ara substituïm $x = 0$ en aquesta expressió obtenim $c_1 = f'(0)$, $2\, c_2 = f''(0)$, $6\, c_3 = f'''(0)$, ..., $k!\, c_k = f^{(k)}(0)$, ... i aleshores

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \, .$$

L'equivalència és exactament anàloga si la sèrie és al voltant d'un punt $x_0 \neq 0$.

Comentari 7: El procediment de càlcul de la sèrie de Taylor d'una funció és exactament el mateix que vam veure en la secció 2.6 per al càlcul dels seus polinomis de Taylor.

Teorema 4.27

Algunes sèries de Maclaurin habituals i els seus intervals de convergència:

(i) $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \, , \quad |x| < 1.$

(ii) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \, , \quad |x| < \infty.$

(iii) $\displaystyle \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \, , \quad |x| < \infty.$

(iv) $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \, x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \, , \quad |x| < \infty.$

(v) $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \, x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \, , \quad -1 < x \leq 1.$

(vi) $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad |x| \leq 1.$

(vii) $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n\, n!} I_n\, x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots, \quad |x| < 1,\ I_n = \prod_{k=1}^{n-1}(2k-1).$

Demostració. La sèrie de Taylor de la funció $1/(1-x)$ és la sèrie geomètrica, com sabem pel teorema 4.10. Les sèries de Taylor de les funcions e^x, $\sin x$ i $\cos x$ poden deduir-se directament a partir dels seus polinomis de Taylor, calculats en els exemples 2.29, 2.30 i 2.31. La sèrie de Taylor de la funció $\ln(1+x)$ pot deduir-se també a partir del seu polinomi de Taylor, que vam estudiar en l'exemple 2.32 i que ens tornàrem a trobar en l'exemple 4.41. La sèrie de Taylor de la funció $\arctan x$ va aparèixer en l'exemple 4.42. Finalment, la sèrie de Taylor per a la funció $\sqrt{1+x}$ va ser calculada com part de l'exemple 2.35. El seu radi de convergència ($R = 1$) pot deduir-se amb les tècniques habituals. □

Altres sèries de Taylor es calculen de manera similar. Ara bé, en alguns casos resulta més senzill trobar-les a partir d'aquestes sèries de Taylor habituals.

Exemple 4.43: Volem obtenir les sèries de Maclaurin de les funcions $\sinh x$ i $\cosh x$. En principi podríem trobar-les amb el procediment habitual per a calcular polinomis de Taylor, consistent en calcular els coeficients $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, però resulta més fàcil fer ús de les definicions

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

Com que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

tenim

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Aleshores

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(2\,x + 2\,\frac{x^3}{3!} + 2\,\frac{x^5}{5!} + \dots\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(2 + 2\,\frac{x^2}{2!} + 2\,\frac{x^4}{4!} + \dots\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Ambdues sèries de Taylor convergeixen per a tot $x \in \mathbb{R}$, ja que la sèrie de Taylor de la funció e^x també ho fa.

Finalitzem el tema amb alguns **exemples d'aplicació** de les sèries de Taylor.

Exemple 4.44: Volem calcular

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \, .$$

Es tracta d'una indeterminació $\frac{0}{0}$ i la podem resoldre fent ús de la sèrie de potències de la funció $\ln x$ al voltant del punt $x = 1$. En l'exemple 2.32 vam trobar els polinomis de Taylor de $\ln x$. Tenim

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ldots$$

Aleshores, dividint per $x - 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left[1 + \mathcal{O}(x-1) \right] = 1 \, .$$

En l'últim pas hem utilitzat que els termes d'ordre $x - 1$ tendeixen a 0 quan x tendeix a 1.

Exemple 4.45: Volem calcular

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \, .$$

En aquest cas es tracta d'una indeterminació $\infty - \infty$. Calculem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \, \sin x} &= \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \right)}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \right)} \\ &= \frac{x^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots \right)}{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots \right)} = x \cdot \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots} \, . \end{aligned}$$

Aleshores

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left[x \cdot \frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \ldots} \right] = 0 \, ,$$

ja que la fracció en el segon factor tendeix a una quantitat finita quan $x \to 0$.

Exemple 4.46: Siga la integral definida

$$J = \int_0^1 \sin x^2 \, dx \, .$$

La funció $\sin x^2$ no té primitiva en termes de funcions elementals i, per tant, no podem recórrer a la regla de Barrow. Comencem trobant la sèrie de Maclaurin de $\sin x^2$. És fàcil a partir de la sèrie de Maclaurin de la funció $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \, x^{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \, (x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \, x^{4n+2} \, .$$

Aleshores, si substituïm en la integral definida

$$J = \int_0^1 \sin x^2 \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{4n+2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{x^{4n+3}}{4n+3} \right]_0^1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{4n+3} \right) .$$

D'aquesta manera hem aconseguit expressar la integral definida com una sèrie, que ara podem estimar sumant els seus termes fins a l'ordre desitjat:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \ldots$$

Per exemple, suposem que volem trobar J amb un error menor que 10^{-4}. La sèrie resultant per a J és una sèrie alternada i els seus termes tenen valor absolut decreixent. Aleshores, el teorema 4.20 garanteix que és convergent, resultat que ja coneixíem perquè la integral definida de la qual partíem és òbviament finita. Ara bé, el corol·lari a aquest teorema ens permet fitar l'error de la suma parcial. En particular, si

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{4n+3} \right) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \, u_n \, ,$$

tenim $|s_N - J| \leq u_{N+1}$. El quart terme en la suma és $1/75600 < 10^{-4}$. Aleshores, per a tenir un error menor a 10^{-4} és suficient sumar els tres primers termes. Obtenim

$$J \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0.31028 \, .$$

5

Introducció al càlcul diferencial en $\mathbb{R}^n$

Un matemàtic és una màquina que transforma cafè en teoremes.
— Paul Erdös

5.1 Elements de topologia en $\mathbb{R}^n$

Per a cada nombre natural n, podem definir **l'espai real n-dimensional** $\mathbb{R}^n$ com el conjunt de totes les seqüències ordenades, o *n-tuples*, de n nombres reals. És, per tant, el producte cartesià

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vegades}} .$$

Els elements de $\mathbb{R}^n$ són n-tuples que denotem com a

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) ,$$

on cada x_i és un nombre real. Podem tractar-los com a *vectors* i, per tant, fer les operacions habituals amb aquests. Per exemple, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ són dos elements de $\mathbb{R}^n$ i α és un nombre real, definim

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) ,$$
$$\alpha\, \mathbf{a} = (\alpha\, a_1, \alpha\, a_2, \ldots, \alpha\, a_n) .$$

Casos particulars de $\mathbb{R}^n$ són la recta real ($\mathbb{R}$), el pla ($\mathbb{R}^2$) i l'espai tridimensional ($\mathbb{R}^3$).

Definició 5.1: Norma

Siga $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. La quantitat

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{5.1}$$

és la **norma** de $\mathbf{x}$.

Aquesta definició de norma es correspon amb la **norma euclidiana** i és equivalent a la noció habitual de longitud d'un vector.

Propietats:

(i) $||\mathbf{a}|| \geq 0$.

(ii) $||\mathbf{a}|| = 0 \Leftrightarrow ||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{0}||$, on $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

(iii) $||\mathbf{a}|| = || - \mathbf{a}||$.

(iv) $||\mathbf{a} + \mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$ (*Desigualtat triangular*).

Les primeres tres propietats poden provar-se fàcilment a partir de la definició. Per a la quarta calculem

$$||\mathbf{a} + \mathbf{b}||^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k \, b_k \, .$$

Si ara fem ús de la **desigualtat de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz**,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \, b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right) \, , \tag{5.2}$$

obtenim

$$||\mathbf{a} + \mathbf{b}||^2 \leq ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 + 2 \, ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| = \left(||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}|| \right)^2 \, ,$$

i en prendre l'arrel quadrada s'obté la propietat (iv).

Definició 5.2: Distància

Siguen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. La quantitat

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ||\mathbf{b} - \mathbf{a}|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} \tag{5.3}$$

és la **distància** entre $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Comentari 1: Casos particulars:

- $\mathbb{R}^3$: Siguen $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, amb $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}$. Aleshores, la distància entre $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ és

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ||\mathbf{b} - \mathbf{a}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \, .$$

- $\mathbb{R}^2$: Siguen $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ i $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, amb $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Aleshores, la distància entre $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ és

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ||\mathbf{b} - \mathbf{a}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \, .$$

- $\mathbb{R}$: Siguen $\mathbf{a} = (x_1)$ i $\mathbf{b} = (x_2)$, amb $x_i \in \mathbb{R}$. Aleshores, la distància entre $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ és

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ||\mathbf{b} - \mathbf{a}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1| \, ,$$

  i coincideix amb la distància entre els nombres reals x_1 i x_2, $d(x_1, x_2)$, que vam introduir en la definició 1.2.

Comentari 2: A partir de la seua definició i de les propietats de la norma d'un punt de $\mathbb{R}^n$ podem deduir les següents **propietats** de la distància entre dos punts de $\mathbb{R}^n$:

(i) $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq 0$.

(ii) $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

(iii) $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

(iv) $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ (*Desigualtat triangular*).

(v) $||\mathbf{a}|| = d(\mathbf{a}, \mathbf{0})$.

Definició 5.3: Bola

Siga $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i siga $r > 0$ un nombre real. El conjunt de tots els punts $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tals que $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r$ s'anomena **bola oberta** n-dimensional de centre $\mathbf{x}_0$ i radi r. La denotem com a

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r\} \, .$$

El conjunt de tots els punts $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tals que $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leq r$ s'anomena **bola tancada** n-dimensional de centre $\mathbf{x}_0$ i radi r. La denotem com a

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leq r\} \, .$$

El concepte de bola generalitza el concepte d'interval:

- Per a $n = 1$, la bola oberta $B(\mathbf{x}_0, r)$ és l'interval obert $(x_0 - r, x_0 + r)$ i la bola tancada $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ és l'interval tancat $[x_0 - r, x_0 + r]$. Per tant, les definicions de bola oberta i tancada generalitzen a $\mathbb{R}^n$ les definicions d'interval obert i tancat en $\mathbb{R}$.

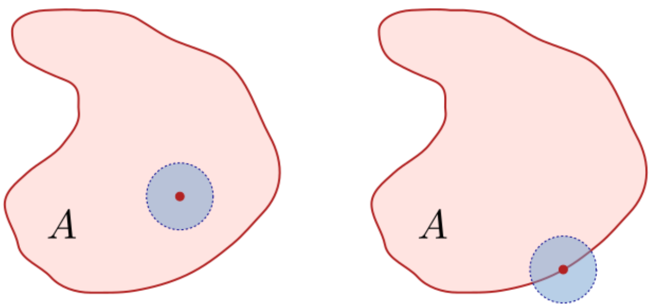
- Considerem $\mathbb{R}^2$. El conjunt dels punts (x, y) tals que $x^2 + y^2 < a^2$ és el cercle de radi a i centre en l'origen $(0, 0)$ i es denota com a C_a. El conjunt dels punts (x, y) tals que $x^2 + y^2 = a^2$ és la circumferència de radi a i centre en l'origen $(0, 0)$ i es denota com a ∂C_a. Aleshores, tenim $C_a = B(\mathbf{0}, a)$ i $C_a \cup \partial C_a = \overline{B}(\mathbf{0}, a)$.

- En $\mathbb{R}^3$, $B(\mathbf{x}_0, a)$ és l'esfera de radi a i centre en el punt $\mathbf{x}_0$, sense incloure la seua superfície.

Definició 5.4

Un punt $\mathbf{x}_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ és un **punt interior** de A si existeix un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, r) \in A$. El conjunt de tots els punts interiors formen **l'interior** de A. Direm que $\mathbf{x}_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ és un **punt frontera** de A si tota bola $B(\mathbf{x}_0, r)$ conté tant punts dins de A com punts fora de A. El conjunt de tots els punts frontera s'anomena **frontera** de A i es denota ∂A. Un conjunt A és **obert** si només conté punts interiors. Un conjunt és **tancat** si conté la seua frontera.

Comentari: $A \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert si per a tot punt en A és possible trobar una bola centrada en aquest punt i continguda en A. $A \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt tancat si qualsevol bola centrada en algun dels seus punts no està continguda completament en A. La figura següent mostra un conjunt $A \subset \mathbb{R}^2$ i dos punts particulars:



En el dibuix de l'esquerra hem identificat un punt interior, al voltant del qual s'ha definit una bola continguda en A. En el dibuix de la dreta hem identificat un punt frontera, al voltant del qual s'ha definit una bola que conté punts de A i punts que estan fora del conjunt A.

Teorema 5.1

Per a tot $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, $B(\mathbf{x}_0, r)$ és un conjunt obert.

Demostració. Hem de provar que si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$, existeix una bola oberta amb centre en $\mathbf{x}$ que està continguda en $B(\mathbf{x}_0, r)$. Això és equivalent a l'existència d'un nombre $s > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, s) \subset B(\mathbf{x}_0, r)$. Siga $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ i siga $s = r - ||\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|| > 0$. Per a qualsevol punt $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, s)$ tenim, per definició de bola oberta, $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < s$. Aleshores, fent servir la desigualtat triangular de la norma, tenim

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}_0|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + ||\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|| < s + ||\mathbf{y} - \mathbf{x}_0|| = r \, ,$$

i, per tant, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$. □

Comentari: Aquest teorema ens diu que tota bola oberta és un conjunt obert, però no tots els conjunts oberts són boles obertes.

Exemple 5.1: Demostrem que el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ és un conjunt obert. Siguen $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$, $r = x_0 > 0$ i $\mathbf{x} = (x, y) \in B(\mathbf{x}_0, r)$. Hem de provar que $\mathbf{x} \in A$. Tenim

$$|x - x_0| < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < r = x_0 \, .$$

Llavors, $|x - x_0| < x_0$, i això implica $-x_0 < x - x_0 < x_0$. Sumant x_0 en aquesta desigualtat deduïm que $x > 0$ i, per tant, $\mathbf{x} \in A$.

5.2 Funcions de diverses variables

Definició 5.5: Funció de diverses variables

Una **funció de diverses variables** f és una funció que assigna a un element $\mathbf{x} \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ un altre element $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$:

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (y_1, \ldots, y_m) \in R_f \subset \mathbb{R}^m$$

El conjunt $D_f \subset \mathbb{R}^n$ és el **domini** de la funció. El conjunt $R_f \subset \mathbb{R}^m$ format pels valors obtinguts en aplicar la funció f a tots els elements del domini és el **rang** de la funció.

Comentari: Les variables $x_1, \ldots, x_n$ s'anomenen **variables independents** i les variables $y_1, \ldots, y_m$ s'anomenen **variables dependents**. Podem denotar les variables dependents com a

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \, ,$$

i les **funcions components** $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ són funcions de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Casos particulars:

- Si $n = m = 1$, f és una funció real d'una variable real (definició 1.5). Exemple: $f(x) = x^2$ és una funció de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
- Si $n > 1$ i $m = 1$, f és una **funció real de n variables reals**, també anomenada **camp escalar**. Exemple: $f(x, y, z) = \sin(x + y + 2z^2)$ és una funció de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.
- Si $n, m > 1$, f és una **funció vectorial de n variables reals**, també anomenada **camp vectorial**. Cadascuna de les funcions components d'un camp vectorial és un camp escalar. Exemple: $f(x, y, z) = (x + y, 2y - e^z)$ és una funció de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.

Exemples 5.2: Alguns exemples senzills de funcions reals de dues variables reals:

(i) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ i $R_f = [0,\infty)$.

(ii) $f(x,y) = \dfrac{1}{x\,y}$: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \neq 0\}$ i $R_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

(iii) $f(x,y) = \sin xy$: $D_f = \mathbb{R}^2$ i $R_f = [-1,1]$.

Exemple 5.3: Siga la funció $z = f(x,y) = (1-x^2-y^2)^k$, amb $k \in \mathbb{N}$. Estudiem el seu domini per a diferents valors del paràmetre k.

- $k=-1$: En aquest cas $D_f = \mathbb{R}^2 - \partial C_1$, és a dir, tot $\mathbb{R}^2$ menys la circumferència de radi 1 i centre en l'origen.
- $k=1/2$: En aquest cas $D_f = C_1 \cup \partial C_1$, és a dir, el cercle i la circumferència de radi 1 i centre en l'origen.
- $k=2$: En aquest cas tots els punts (x,y) són part del domini de f i aleshores $D_f = \mathbb{R}^2$.

Exemple 5.4: Considerem la funció $z = f(x,y) = \sqrt{\sin x \, \sin y}$. El seu domini està format per les regions del pla on es dona una de les següents condicions:

$$\begin{array}{llll} (1) & \sin x \geq 0 & \wedge & \sin y \geq 0 \\ (2) & \sin x \leq 0 & \wedge & \sin y \leq 0 \end{array}$$

Si D_1 és la regió del pla on es verifica la condició (1) i D_2 és la regió del pla on es verifica la condició (2), tenim

$$D_f = D_1 \cup D_2 \,.$$

Desenvolupem les condicions per a identificar D_1 i D_2 d'una forma més precisa. Siguen $k, l \in \mathbb{Z}$, amb $k \neq l$ en general. Aleshores, la condició (1) és equivalent a

$$\begin{array}{llll} (1a) & \sin x \geq 0 & \Rightarrow & 2\,k\,\pi \leq x \leq (2\,k+1)\,\pi \\ (1b) & \sin y \geq 0 & \Rightarrow & 2\,l\,\pi \leq y \leq (2\,l+1)\,\pi \end{array}$$

i, per tant,

$$D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \,\text{verifica (1a)} \wedge y \,\text{verifica (1b)}\Big\} \,.$$

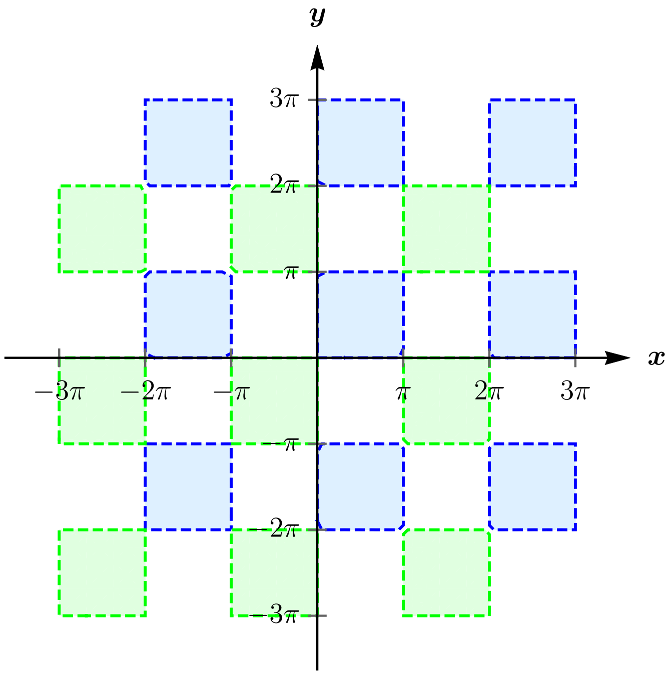
Igualment, la condició (ii) és equivalent a

$$\begin{array}{llll} (1c) & \sin x \leq 0 & \Rightarrow & (2\,k-1)\,\pi \leq x \leq 2\,k\,\pi \\ (1d) & \sin y \leq 0 & \Rightarrow & (2\,l-1)\,\pi \leq y \leq 2\,l\,\pi \end{array}$$

i, per tant,

$$D_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \,\text{verifica (1c)} \wedge y \,\text{verifica (1d)}\Big\} \,.$$

Si representem el domini de la funció f obtenim aquesta gràfica:



En blau representem D_1 i en verd D_2. Junts, componen D_f, el domini de la funció f, que té la forma d'un *tauler d'escacs infinit*.

Definició 5.6: Gràfica

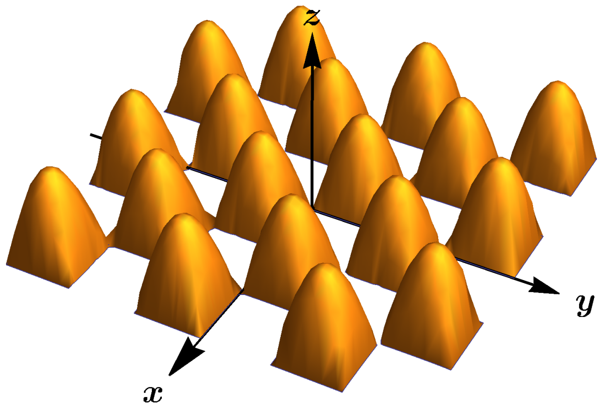
Siga $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La gràfica de f és el conjunt de punts de $\mathbb{R}^{n+1}$ format pels punts

$$(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} ,$$

on $(x_1, \dots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Aquesta definició generalitza el concepte de gràfica d'una funció d'una variable real a camps escalars. De fet, si $n = 1$ la gràfica d'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una corba en $\mathbb{R}^2$ donada pels punts $(x, f(x))$, amb x en el domini de f i, per tant, aquesta definició es redueix a la definició 1.6. En el cas de $n = 2$, la gràfica d'una funció és una superfície en $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.5: La gràfica de la funció $f(x, y) = \sqrt{\sin x \, \sin y}$ estudiada en l'exemple 5.4 és una superfície en $\mathbb{R}^3$ amb forma d'*ouera*:



Definició 5.7: Conjunts de nivell

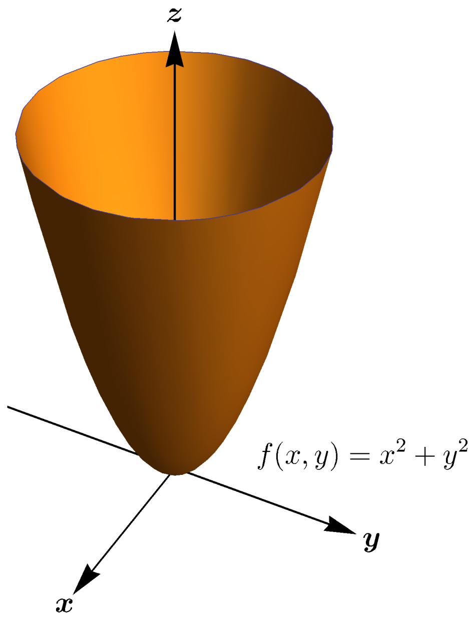
Siga $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i c un nombre real. El conjunt de punts $\mathbf{x} \in D_f$ per als quals $f(\mathbf{x}) = c$ s'anomena **conjunt de nivell** de valor c.

Per a $n = 2$ els conjunts de nivell són típicament corbes en $\mathbb{R}^2$, d'equació $f(x, y) = c$ i, per tant, s'anomenen **corbes de nivell**. En el cas $n = 3$ els conjunts de nivell són típicament superfícies en $\mathbb{R}^3$, d'equació $f(x, y, z) = c$ i, per tant, s'anomenen **superfícies de nivell**. Per valors de n més elevats, els conjunts de nivell s'anomenen **hipersuperfícies de nivell**.

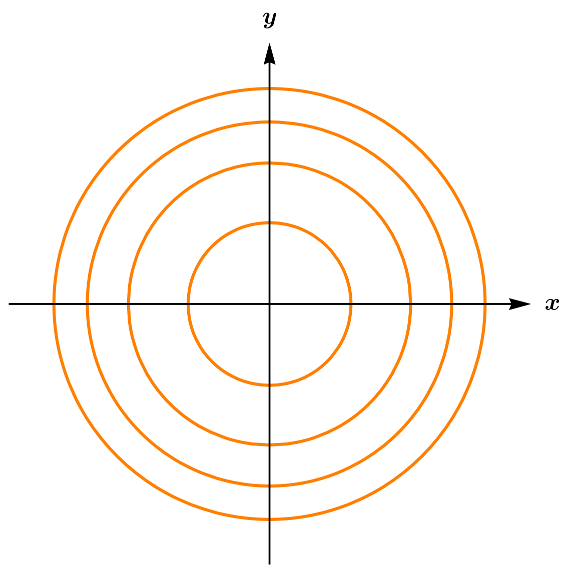
Comentari: Hi ha nombroses aplicacions de les corbes de nivell en cartografia, meteorologia, i electromagnetisme. En aquests casos també s'utilitza de manera habitual el nom alternatiu **isolínies**.

Exemple 5.6: Siga la funció $f(x, y) = x + y + 2$. Les seues corbes de nivell de valor c són els punts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfan $f(x, y) = x + y + 2 = c$. Són per tant rectes d'equació $y = c - 2 - x$.

Exemple 5.7: Siga la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$. La gràfica és un paraboloide de revolució:



I les seus corbes de nivell de valor c són els punts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfan $f(x, y) = x^2 + y^2 = c$. Són per tant circumferències de radi $\sqrt{c}$ centrades en l'origen:



5.3 Límits i continuïtat

Definició 5.8: Límit d'una funció de diverses variables

Siguen $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x}_0$ un punt de D_f o de la frontera de D_f. Direm que **el límit de $\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$ quan $\mathbf{x}$ tendeix a $\mathbf{x}_0$** és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ i escriurem

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\,,$$

si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un nombre real $\delta > 0$ corresponent, tal que

$$0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}|| < \epsilon\,,$$

per a tot $\mathbf{x} \in D_f$.

Aquesta definició és una extensió de la definició de límit d'una funció d'una variable real (definició 1.13).

Exemple 5.8: Demostrem que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4\,x\,y^2}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Siga $\epsilon > 0$ un nombre real positiu. Hem de trobar un nombre real $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta \quad \text{aleshores} \quad \left| \frac{4\,x\,y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon\,.$$

Tenim $||(x,y) - (0,0)|| = \sqrt{x^2+y^2}$ i, per tant, aquest requisit és equivalent al fet que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{aleshores} \quad \frac{4\,|x|\,y^2}{x^2+y^2} < \epsilon\,.$$

Ara, com que $x^2 \leq x^2+y^2$ i $y^2 \leq x^2+y^2$, deduïm la desigualtat

$$\frac{4\,|x|\,y^2}{x^2+y^2} \leq 4\,|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Aleshores, si $\delta = \frac{\epsilon}{4}$, $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ implica $\frac{4\,|x|\,y^2}{x^2+y^2} < \epsilon$ i la definició 5.8 ens condueix al límit que volíem demostrar.

Exemple 5.9: Demostrem tres límits bàsics per al cas de funcions de dues variables, que trivialment poden ser estesos a camps escalars de més variables. Siga $c \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0\,. \tag{5.4}$$

- Comencem amb $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c$. Siga $\epsilon > 0$. Hem de trobar un $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ aleshores $|f(x,y)-c| < \epsilon$, amb $f(x,y) = c$. Però en aquest cas tan senzill és trivial. Qualsevol $\delta > 0$ és vàlid perquè $|f(x,y)-c| = |c-c| = 0 < \epsilon$. D'aquesta manera el primer límit queda demostrat.

- Considerem ara $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$. En aquest cas hem de provar que existeix un $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ aleshores $|f(x,y) - x_0| < \epsilon$, amb $f(x,y) = x$. De nou és senzill. Escollim $\delta = \epsilon$. Aleshores $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ és equivalent a $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \epsilon$ i, per tant, $|f(x,y)-x_0| = |x-x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \epsilon$. El límit queda així demostrat.

- La demostració d'aquest límit és completament anàloga a la de l'anterior.

Aquests límits són anàlegs als de l'exemple 1.13 i les seues demostracions segueixen passos equivalents.

Teorema 5.2: Unicitat del límit

Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_1$ i $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_2$ aleshores $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$.

Demostració. La definició de límit d'una funció de diverses variables ens diu que per a tot $\epsilon > 0$, existeixen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tals que

$$\begin{array}{llll} \text{si} & 0 < ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| < \delta_1 & \text{aleshores} & ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1|| < \epsilon\,, \\ \text{si} & 0 < ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| < \delta_2 & \text{aleshores} & ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_2| \ < \epsilon\,. \end{array}$$

Definim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Això ens permet escriure

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|| < \delta \quad \text{aleshores} \quad ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1|| < \epsilon \text{ i } ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_2|| < \epsilon\,.$$

Aleshores, hem trobat un δ comú als dos límits $\mathbf{y}_1$ i $\mathbf{y}_2$. Ara demostrarem que aquests límits no poden ser diferents fent ús del mètode de la reducció a l'absurd. Suposem $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$, amb $||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|| > 0$, i escollim el valor particular $\epsilon = \frac{||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||}{2}$. En aquest cas tenim

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{aleshores} \quad ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_1|| < \frac{||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||}{2} \text{ i } ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_2|| < \frac{||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||}{2}\,.$$

I això implica que

$$\begin{aligned} ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|| = ||\mathbf{y}_1 - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_2|| &\leq ||\mathbf{y}_1 - f(\mathbf{x})|| + ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_2|| \\ &< \frac{||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||}{2} + \frac{||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||}{2} \\ &= ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||\,, \end{aligned}$$

on en el segon pas hem fet ús de la desigualtat triangular de la norma. El resultat és clarament una contradicció, ja que el nombre $||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||$ no pot ser menor que ell mateix. En conclusió, la suposició $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$ no pot ser correcta. □

Comentari 1: De nou, ressaltem que aquest teorema és anàleg al teorema equivalent per a funcions d'una variable real (teorema 1.4). A més, la demostració ha sigut molt similar.

Comentari 2: Aquest teorema garanteix que si un límit existeix, ha de ser únic. Tornarem sobre aquest punt més endavant.

Teorema 5.3: Propietats dels límits

Siguen dues funcions f i g de $D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i un punt $\mathbf{x}_0$ un punt de D o de la frontera de D tals que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\,, \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\,,$$

i $c \in \mathbb{R}$ una constant. Aleshores:

(i) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [c\, f(\mathbf{x})] = c \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(x) = c\,\mathbf{a}$.

(ii) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$.

(iii) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = a\, b$.

(iv) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left[\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right] = \dfrac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})} = \dfrac{a}{b}$, si $b \neq 0$.

(v) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x})]^n = \left[\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})\right]^n = a^n$, amb $n \in \mathbb{R}$.

(vi) Si $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [\sqrt[n]{f(\mathbf{x})}] = \sqrt[n]{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})} = \sqrt[n]{a}$.

Demostració. Demostrarem ací les propietats (i) i (ii). Com veurem, les demostracions són iguals a les demostracions de les propietats (i) i (ii) del teorema 1.5, que considera el cas particular de límits de funcions d'una variable real. La resta de propietats es demostren també igualment, i les proves per a funcions d'una variable poden trobar-se en l'apèndix A.

(i) Si $c = 0$ tenim un cas particular de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} c$ i la demostració és trivial. Per tant, considerem $c \neq 0$. La premissa $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(x) = \mathbf{a}$ significa que existeix un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}|| < \frac{\epsilon}{|c|}\,.$$

Hem de demostrar que existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \quad \text{aleshores} \quad ||c\, f(\mathbf{x}) - c\,\mathbf{a}|| < \epsilon\,.$$

Escollim $\delta = \delta_1$. Si $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$ aleshores

$$||c\, f(\mathbf{x}) - c\,\mathbf{a}|| = |c| \cdot ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}|| < |c| \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon\,.$$

I hem demostrat la propietat (i).

(ii) Considerem $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})]$. La demostració per a la resta $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}[f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})]$ és completament anàloga i, a més, pot deduir-se a partir de la identitat per a la suma i la propietat (i) que acabem de provar. Per les premisses $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ i $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, existeixen $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ tals que

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad ||f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}|| < \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{5.5}$$

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta_2 \quad \text{aleshores} \quad ||g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}|| < \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{5.6}$$

Hem de provar que existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \quad \text{aleshores} \quad ||f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b})|| < \epsilon\,.$$

Escollim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$ aleshores

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b})|| &= ||\,(f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}) + (g(\mathbf{x}) - \mathbf{b})\,|| \\ &\le ||\,(f(\mathbf{x}) - \mathbf{a})\,|| + ||\,(g(\mathbf{x}) - \mathbf{b})\,|| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon\,. \end{aligned}$$

En el segon pas hem fet servir la desigualtat triangular de la norma i en el tercer els resultats en les equacions (5.5) i (5.6). I d'aquesta manera queda demostrada la propietat (ii). $\square$

Exemple 5.10: Molts límits de funcions de diverses variables poden calcular-se a partir de les propietats del teorema 5.3 i els límits bàsics de l'exemple 5.9. Per exemple, considerem

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3}\,,$$

i apliquem de manera repetida les propietats dels límits fins a finalment poder utilitzar els límits bàsics ja coneguts:

$$\begin{aligned} L &\underset{\text{P(iv)}}{=} \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x - xy + 3)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} (x^2 y + 5xy - y^3)} \underset{\text{P(ii)}}{=} \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x - \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} xy + \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} 3}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x^2 y + \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} 5xy - \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y^3} \\ &\underset{\text{P(iii}-\text{v)}}{=} \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x - \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y + \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} 3}{\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x\right)^2 \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y + 5 \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y - \left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y\right)^3} \\ &\underset{\text{Ex 5.9}}{=} \frac{0 - 0 \cdot 1 + 3}{0^2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3} = -3\,. \end{aligned}$$

En molts casos, no és possible calcular un límit simplement per aplicació de les propietats dels límits i els límits bàsics de l'exemple 5.9, cosa que fa del càlcul del límit una tasca no trivial. La raó és fàcil de comprendre. En el cas de funcions d'una sola variable vam veure que hi ha dues maneres d'apropar-se al punt on s'avalua el límit, per la dreta i per l'esquerra, i com vam provar en el teorema 1.8, el límit existeix si i només si els dos límits laterals existeixen i són iguals. En el cas de funcions de diverses variables hi ha infinites maneres d'apropar-se al punt on s'avalua el límit. En molts casos trobarem que el resultat del càlcul és diferent si ens apropem per diferents camins. Si això passa, direm que el límit no existeix, com diem quan els límits per la dreta i per l'esquerra d'una funció d'una variable no són iguals. El problema és que no podem comprovar si les infinites trajectòries condueixen al mateix resultat. Per tant, si el límit existeix, pot ser difícil demostrar-ho, ja que hem de provar que s'obté el mateix resultat independentment del camí escollit. En canvi, és molt més fàcil tractar el cas en què el límit no existeix, ja que sovint podem provar l'existència de dos camins pels quals el límit és diferent.

Per exemple, considerem una funció de dues variables, $f(x, y)$, i suposem que volem calcular el seu límit quan $(x, y) \to (0, 0)$. Començant en un punt qualsevol (x, y), podem apropar-nos al punt $(0, 0)$ de moltes maneres:

- Podem apropar-nos a l'origen des d'un punt qualsevol mantenint primer y constant i fent $x \to 0$, per a després mantenir $x = 0$ i fer $y \to 0$. En aquest cas estem calculant
$$L_1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)\,.$$
- Per altra banda, podem escollir una trajectòria diferent en la qual primer fem $y \to 0$ mantenint x constant i després ens apropem a l'origen fent $x \to 0$. En aquest cas calculem
$$L_2 = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} f(x, y)\,.$$

Si $L_1 = L_2$ no podem concloure res, ja que existeixen infinites altres trajectòries que ens apropen a $(0, 0)$ des de (x, y). De fet, no hem de restringir-nos a apropar-nos $(x, y) \to (0, 0)$ des d'una direcció particular, sinó que podem acostar-nos a aquest punt per un camí que no siga una línia recta. Trobar que dos camins particulars ens porten al mateix resultat no significa que també trobarem el mateix en els infinits camins restants. Ara bé, si $L_1 \neq L_2$ sí que podem concloure que el límit no existeix.

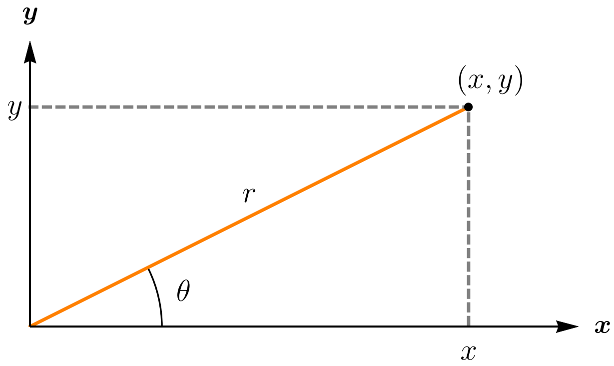
Exemple 5.11: Considerem la funció de dues variables $f(x, y) = x^2+y^2$, ja estudiada en l'exemple 5.7. Calculem primer el límit en dues trajectòries particulars:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) = \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} (x^2 + y^2) \right) = \lim_{y\to 0} y^2 = 0\,,$$
$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} (x^2 + y^2) = \lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} (x^2 + y^2) \right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0\,.$$

Com que hem obtingut el mateix resultat, no podem concloure res. Fem ara un canvi a **coordenades polars**. Substituïm les coordenades cartesianes (x, y) per les coordenades (r, θ), definides com a

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta\,, \\ y &= r\,\sin\theta\,. \end{aligned}$$

És fàcil comprovar que $||(x, y)|| = r$ i, per tant, r és la distància del punt (x, y) a l'origen. S'anomena **coordenada radial**. Per altra banda, θ és l'angle per a arribar al punt a partir de l'eix x i s'anomena **coordenada angular**. Les il·lustrem en aquesta figura:



El canvi de coordenades pot invertir-se. Si $x > 0$ tenim

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x}\,. \end{aligned}$$

Si $x < 0$ s'ha d'adaptar la segona relació per a garantir que θ siga un angle positiu. En el cas que ens interessa, tenim

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2\,,$$

i, per tant, $(x, y) \to (0, 0)$ és equivalent a $r \to 0$. Aleshores

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = \lim_{r\to 0} r^2 = 0\,.$$

Després del canvi a coordenades polars, $f(x, y)$ s'ha convertit en una funció d'una única variable, la coordenada radial r. El càlcul de $\lim_{r\to 0} f(r)$ pot fer-se de la manera habitual, sense les dificultats degudes al nombre infinit de camins entre (x, y) i $(0, 0)$. Per tant, podem concloure que el límit existeix i és 0. Finalment, comprovem que efectivament el límit és 0 a partir de la definició formal. Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{aleshores} \quad |x^2 + y^2| < \epsilon\,.$$

És evident que si escollim $\delta = \sqrt{\epsilon}$, la desigualtat $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \sqrt{\epsilon}$ implica $|x^2+y^2| < \epsilon$ i el límit queda demostrat.

Exemple 5.12: Considerem ara la funció

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\,.$$

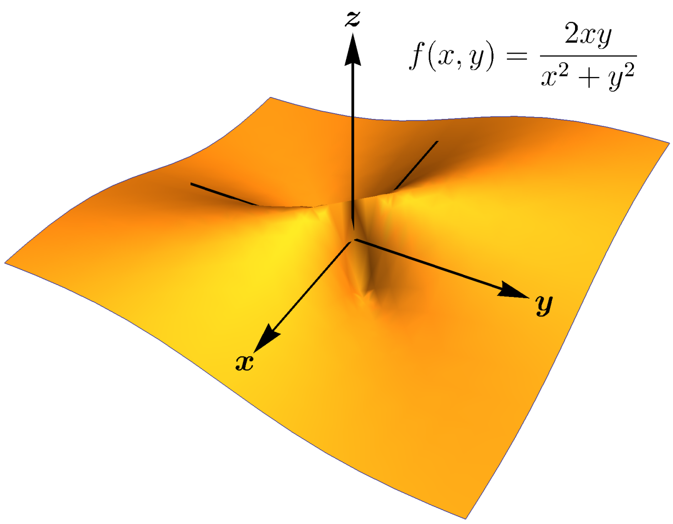
Volem estudiar el límit de la funció quan $(x,y) \to (0,0)$. Primer calculem el resultat quan ens apropem al punt $(0,0)$ seguint les trajectòries bàsiques paral·leles als eixos cartesians:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0\,,$$
$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0\,.$$

De nou, no és suficient per a afirmar que existeix el límit. Considerem ara altres trajectòries que passen per l'origen. En particular, considerem les rectes $y = m\,x$, amb $m \in \mathbb{R}$, i avaluem el límit al llarg d'aquestes trajectòries. Trobem

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2(m^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2m}{m^2+1} = \frac{2m}{m^2+1}\,.$$

El límit depèn del valor de m i, per tant, del camí escollit per a apropar-nos al punt $(0,0)$. En conclusió, el límit no existeix. Finalment, mostrem la gràfica de la funció:



Definició 5.9: Continuïtat en un punt

Siguen una funció $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x}_0 \in D_f$. Direm que f és **contínua en $\mathbf{x_0}$** si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\,.$$

Comentari. Prova de continuïtat: Una funció $f(\mathbf{x})$ és contínua en un punt $\mathbf{x}_0$ del seu domini si i només si es compleixen les següents tres condicions:

- $\exists f(\mathbf{x}_0)$.
- $\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Exemple 5.13: Siga la funció

$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & x \le 0 \wedge y \le 0 \\ 0\,, & x > 0 \vee y > 0 \end{cases}$$

Volem demostrar que no és contínua en $(0,0)$. Farem servir el mètode de reducció a l'absurd. Suposem que és contínua en $(0,0)$. Aleshores, per a tot $\epsilon > 0$ ha d'existir un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{aleshores} \quad |f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y) - 1| < \epsilon\,.$$

Els punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ pertanyen a un cercle de radi δ centrat en l'origen. Aquest cercle conté punts amb $x > 0$ o $y > 0$, per als quals $f(x,y) = 0$ i $|f(x,y) - 1| = |-1| = 1$. La desigualtat $|f(x,y) - 1| < \epsilon$ ha de verificar-se per a tot ϵ positiu, però per al cas particular $\epsilon = \frac{1}{2}$ no es verifica, ja que $1 > \frac{1}{2}$. Aleshores, la funció no pot ser contínua en el punt $(0,0)$.

Definició 5.10: Funció contínua

Una funció és **contínua** si ho és en cada punt del seu domini. Direm que és **discontínua** si no és contínua en algun punt del seu domini.

Teorema 5.4: Propietats de les funcions contínues

Siguen dues funcions f i g de $D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínues en un punt $\mathbf{x}_0 \in D$. Aleshores, les següents combinacions són també contínues en $\mathbf{x}_0$:

(i) Sumes: $f + g$.

(ii) Diferències: $f - g$.

(iii) Múltiples constants: $k\,f$, per a $k \in \mathbb{R}$ constant.

(iv) Productes, si $m = 1$: $f \cdot g$.

(v) Quocients, si $m = 1$: f/g, si $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$.

(vi) Potències, si $m = 1$: f^n, amb $n \in \mathbb{N}$.

(vii) Arrels, si $m = 1$: $\sqrt[n]{f}$, amb $n \in \mathbb{N}$, si està definida en un interval que continga a $\mathbf{x}_0$.

Demostració. Les demostracions d'aquestes propietats són anàlogues a les dels límits de funcions de diverses variables. □

Comentari: Aquest teorema ens diu que les funcions polinomials i racionals són contínues en tots els punts del seu domini, ja que poden ser obtingudes a partir de les funcions contínues $\mathbf{x}_i$ utilitzant les operacions elementals considerades en aquest teorema.

Definició 5.11: Composició de funcions de diverses variables

Siguen les funcions $g : D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $f : D_f \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Si $g(D_g) \subset D_f$, definim la funció **composició** $f \circ g : D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ com a

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))\,.$$

La definició requereix que el rang de la funció g estiga en el domini de la funció f. En cas contrari no podem aplicar la funció f a $g(\mathbf{x})$.

Teorema 5.5: Límits de funcions contínues

Si f és contínua en el punt $\mathbf{b}$ i $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, aleshores

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{b}) = f\left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})\right)\,.$$

Demostració. Siga $\epsilon > 0$. Com que f és contínua en $\mathbf{b}$, existeix un $\eta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{y} - \mathbf{b}|| < \eta \quad \text{aleshores} \quad ||f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{b})|| < \epsilon\,.$$

Igualment, com que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta \quad \text{aleshores} \quad ||g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}|| < \eta\,,$$

on hem fitat $||g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}||$ amb el cas particular $\eta > 0$. Si combinem les dues desigualtats podem afirmar que per a qualsevol $\epsilon > 0$ existeix un δ tal que

$$0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||g(\mathbf{x}) - \mathbf{b}|| < \eta \quad \Rightarrow \quad ||f(g(\mathbf{x})) - f(\mathbf{b})|| < \epsilon\,,$$

que, per la definició de límit, significa que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(g(\mathbf{x})) = f(\mathbf{b})$, com volíem demostrar. $\square$

Teorema 5.6: Composició de funcions contínues

Si g és contínua en $\mathbf{x}_0$ i f és contínua en $g(\mathbf{x}_0)$, aleshores la composició $f \circ g$ és contínua en $\mathbf{x}_0$.

Demostració. Com que g és contínua en $\mathbf{x}_0$ tenim

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0)\,.$$

Com que f és contínua en $g(\mathbf{x}_0)$, podem aplicar el teorema anterior per a obtenir

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(g(\mathbf{x})) = f\left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})\right) = f(g(\mathbf{x}_0))\,,$$

i això demostra que la funció $f(g(\mathbf{x}))$ és contínua en $\mathbf{x}_0$, és a dir, $f \circ g$ és contínua en $\mathbf{x}_0$. $\square$

Comentari: Aquests resultats són similars als obtinguts per a funcions d'una variable i també poden utilitzar-se en la pràctica per a calcular límits. Si una funció $f(\mathbf{x})$ és contínua en un punt $\mathbf{x}_0$, aleshores el límit quan $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ s'obté simplement per substitució:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\,.$$

5.4 Diferenciació

Definició 5.12: Derivada parcial

Siga la funció $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La **derivada parcial** de f respecte a la variable x_j és una funció real de n variables,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n &\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

definida per

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}\,.$$

Notació: Hi ha diverses maneres de denotar la derivada parcial d'una funció. Considerem el cas particular de la funció $z = f(x, y)$. Les formes més comunes de denotar la seua derivada parcial respecte a x són

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = z'_x = \partial_x f = D_x f\,.$$

Comentari 1: Una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ té n derivades parcials.

Comentari 2: La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ és la derivada de f respecte a la variable x_j mantenint les altres variables constants. Es calcula, per tant, com una derivada ordinària.

Exemple 5.14: Calculem les derivades parcials de la funció $f(x,y) = x^2\, y + y^3$. Trobem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\, x\, y\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3\, y^2\,.$$

Definició 5.13: Derivada parcial en un punt

Siga la funció $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La **derivada parcial de f respecte a la variable x_j en el punt $\mathbf{x_0} = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$** és

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0j} + h, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0n})}{h}\,.$$

Notació: Considerem la funció $f(x,y)$. Les maneres més comunes de denotar la derivada parcial respecte a x en un punt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ són

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\,.$$

Comentari: La derivada parcial té una **interpretació geomètrica** senzilla. Siga la funció $z = f(x,y)$, amb derivades parcials en tot el seu domini $D_f \subset \mathbb{R}^2$. La gràfica és una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$. Considerem un punt $(x_0, y_0) \in D_f$, amb $z_0 = f(x_0, y_0)$. Aleshores, $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$. La derivada parcial de f respecte a x en (x_0, y_0),

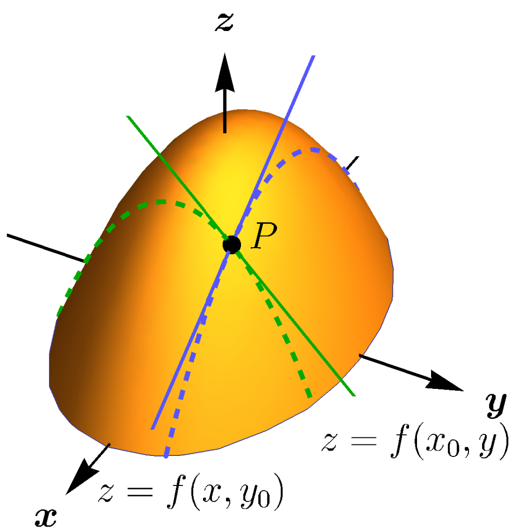
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\,,$$

és la derivada ordinària de f respecte a x, considerant $y = y_0$ com una constant i calculada en (x_0, y_0). L'equació $y = y_0$ determina un pla paral·lel al format pels eixos x i z. La intersecció entre aquest pla i la superfície S és una corba d'equació $z = f(x, y_0)$, que passa pel punt P. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ és el pendent de la recta tangent a aquesta corba en el punt P continguda en el pla $y = y_0$. Igualment, la derivada parcial de f respecte a y en (x_0, y_0),

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}\,,$$

és la derivada ordinària de f respecte a y, considerant $x = x_0$ com una constant i calculada en (x_0, y_0). L'equació $x = x_0$ determina un pla paral·lel al format pels eixos y

i z. La intersecció entre aquest pla i la superfície S és una corba d'equació $z = f(x_0, y)$, que també passa pel punt P. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ és el pendent de la recta tangent a aquesta corba en el punt P continguda en el pla $x = x_0$. Mostrem aquests elements en la figura següent:



En conclusió, les derivades parcials d'una funció $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un punt són els pendents de 2 rectes tangents a la gràfica de la funció en aquest punt. Aquestes 2 rectes són paral·leles als eixos de les variables independents x i y i, per tant, determinen dues direccions particulars. En principi podem considerar rectes tangents en les infinites altres direccions. L'existència de les derivades parcials en aquest punt no garanteix que les altres rectes tangents a la gràfica en aquest punt existisquen també. Això motiva una definició de diferenciabilitat que garantisca l'existència de tangents en qualsevol direcció.

Definició 5.14: Diferenciabilitat

Siga la funció $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Direm que f és **diferenciable en $\mathbf{x_0} \in \boldsymbol{D_f}$** si existeixen les derivades parcials de f en $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ i si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)||}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = 0\,, \tag{5.7}$$

on $\mathbf{T}$ és una matriu de dimensions $m \times n$ d'elements

$$T_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,,$$

$f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$, són les funcions components de f i el producte $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ és un vector de m components, definit per

$$(\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}(\mathbf{x}_0)\,(x_j - x_{0j})\,.$$

Comentari 1: La matriu $\mathbf{T}$ també es denota per $T(f)$ o Df i s'anomena **matriu de derivades parcials** o **matriu jacobiana**. En aquesta definició es troba avaluada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, però en general és una matriu de funcions, on cada element és una derivada parcial. Considerem alguns casos particulars:

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció d'una variable la matriu $\mathbf{T}$ és simplement la derivada $Df = f'$.

- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és un camp escalar, la matriu $\mathbf{T}$ és un vector fila $(1 \times n)$ que s'anomena **gradient** i està donat per

$$Df = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} .$$

  El símbol ∇ s'anomena **operador nabla**.

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ és una funció vectorial definida en $\mathbb{R}$, pot ser escrita en components com a $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Les funcions components són funcions d'una variable i la matriu $\mathbf{T}$ és un vector columna (3×1) anomenat **vector velocitat** i donat per

$$Df = f' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} .$$

- En general, la matriu $\mathbf{T}$ associada a una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és de la forma

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} .$$

Comentari 2: Siga $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. En aquest cas la matriu jacobiana és una matriu quadrada $n \times n$. El seu determinant s'anomena **jacobià** de la funció i es denota per

$$J = \det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Si $J \neq 0$, la matriu jacobiana té inversa.

Comentari 3: En el cas d'una funció d'una variable, la matriu jacobiana és simplement la derivada $Df = f'$ i la definició de diferenciabilitat coincideix amb la de derivabilitat (definició 2.4), com és fàcil de comprovar. Si $f(x)$ és derivable en un punt x_0 tenim

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) .$$

Definim $x = x_0 + h$ i, per tant,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \, .$$

Ara podem reescriure aquesta expressió fent servir el límit trivial $\lim_{x \to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0) \, ,$$

i finalment obtenim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \, ,$$

que no és altra cosa que l'equació (5.7) particularitzada al cas d'una funció real d'una única variable. En conclusió, la definició 5.14 generalitza el concepte de derivabilitat a funcions de diverses variables.

Comentari 4: L'equació (5.7) pot escriure's de manera alternativa com a

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{||f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}||}{||\mathbf{h}||} = 0 \, , \tag{5.8}$$

amb $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$.

Comentari 5: La funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és diferenciable si i només si les funcions components f_k, $k = 1, \ldots, m$, són diferenciables. Per a facilitar la demostració, definim $\mathbf{v} = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}$, amb $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Tenim, per la definició de norma,

$$||\mathbf{v}||^2 = \sum_{k=1}^{m} v_k^2 = \sum_{k=1}^{m} |v_k|^2 \, ,$$

on v_k és una component de $\mathbf{v}$ i aleshores depèn de la funció component f_k. Podem escriure

$$\frac{||\mathbf{v}||^2}{||\mathbf{h}||^2} = \frac{\sum_{k=1}^{m} |v_k|^2}{||\mathbf{h}||^2} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{|v_k|}{||\mathbf{h}||} \right)^2 \, . \tag{5.9}$$

Aleshores:

- Si totes les funcions components són diferenciables, $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{|v_k|}{||\mathbf{h}||} = 0 \; \forall k$ i per tant, per la propietat (v) dels límits,

  $$\sum_{k=1}^{m} \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \left(\frac{|v_k|}{||\mathbf{h}||} \right)^2 = 0 \, .$$

  Fent servir ara l'equació (5.9), i de nou la propietat (v) dels límits, obtenim

  $$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{||\mathbf{v}||^2}{||\mathbf{h}||^2} = \left(\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{h}||} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{h}||} = 0$$

  i f és diferenciable.

- Com que $\left(\frac{|v_k|}{||\mathbf{h}||}\right)^2 \geq 0 \ \forall k$, $\left(\frac{|v_i|}{||\mathbf{h}||}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{|v_k|}{||\mathbf{h}||}\right)^2$, on v_i és una component qualsevol del vector $\mathbf{v}$. Aleshores l'equació (5.9) implica

$$\left(\frac{|v_i|}{||\mathbf{h}||}\right)^2 \leq \frac{||\mathbf{v}||^2}{||\mathbf{h}||^2} \, .$$

Si f és diferenciable, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{v}||}{||\mathbf{h}||} = 0$, i aleshores, l'última desigualtat implica $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|v_i|}{||\mathbf{h}||} = 0$, i f_i és diferenciable. Com que el valor de l'índex i és arbitrari, totes les funcions components són diferenciables.

Exemples 5.15: Calculem la matriu jacobiana de les següents funcions vectorials:

(i) $f(x,y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2\,x\,y \end{pmatrix} \, .$$

(ii) $f(x,y) = (x^2 + \cos y, y\, e^x)$.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x & -\sin y \\ y\, e^x & e^x \end{pmatrix} \, .$$

(iii) $f(x,y,z) = (z\, e^x, -y\, e^z)$.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\, e^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -y\, e^z \end{pmatrix} \, .$$

Exemples 5.16: Calculem el gradient dels següents camps escalars:

(i) $f(x,y,z) = x\, e^y$.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & x\, e^y & 0 \end{pmatrix} \, .$$

(ii) $f(x,y) = e^{x\,y} + \sin x\, y$.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,(e^{x\,y} + \cos x\, y) & x\,(e^{x\,y} + \cos x\, y) \end{pmatrix}$$
$$= (e^{x\,y} + \cos x\, y)\ (y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) \ ,$$

on hem introduït els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$
$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Teorema 5.7

Si $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in D_f$, aleshores f és contínua en $\mathbf{x}_0$.

Demostració. Siga $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$. Hem de provar que si

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{||f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}||}{||\mathbf{h}||} = 0\,, \tag{5.10}$$

aleshores

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0)\,. \tag{5.11}$$

Comencem fent servir la desigualtat de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, donada en l'equació (5.2), per a demostrar

$$\begin{aligned} ||\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}||^2 &= \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h})_k^2 = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} T_{kj}(\mathbf{x}_0)\,h_j\right)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} T_{kj}(\mathbf{x}_0)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} h_j^2\right) = M^2\,||\mathbf{h}||^2\,, \end{aligned}$$

on $h_j = x_j - x_{0j}$ i hem definit el nombre positiu

$$M = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} T_{kj}(\mathbf{x}_0)^2}\,.$$

Aleshores

$$||\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}|| \leq M\,||\mathbf{h}||\,. \tag{5.12}$$

Ara, l'equació (5.10) implica que per a tot $\epsilon > 0$, existeix un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < ||\mathbf{h}|| < \delta_1$ aleshores

$$||f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}|| < \epsilon\,||\mathbf{h}||\,. \tag{5.13}$$

En particular, la desigualtat es verifica per a $\epsilon = 1$. Aleshores, si $||\mathbf{h}|| < \delta_1$, tenim per la desigualtat triangular de la norma, que es verifica

$$\begin{aligned} ||f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)|| &= ||f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h} + \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}|| \\ &\leq ||f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}|| + ||\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}|| \end{aligned}$$

i en aplicar el resultat de l'equació (5.12) i la desigualtat (5.13) particularitzada per a $\epsilon = 1$ trobem

$$||f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)|| < ||\mathbf{h}|| + M\,||\mathbf{h}|| = (1+M)\,||\mathbf{h}||\,.$$

Siga ara $\epsilon' > 0$ i $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\epsilon'}{1+M}\right)$. Si $||\mathbf{h}|| < \delta$

$$||f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)|| < (1+M)\frac{\epsilon'}{1+M} = \epsilon'\,,$$

i per tant, per la definició de límit, obtenim l'equació (5.11), que volíem provar. □

Comentari: Aquest teorema ens dona una condició necessària perquè una funció siga diferenciable en un punt $\mathbf{x}_0$ del seu domini. Si la funció no és contínua en $\mathbf{x}_0$, aleshores no és diferenciable.

Teorema 5.8

Siga la funció $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i el punt $\mathbf{x}_0 \in D_f$. Si existeixen totes les derivades parcials $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ i són contínues en $B(\mathbf{x}_0, \delta)$, amb $\delta > 0$, aleshores f és diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Demostració. Considerem primer una funció $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i un punt $\mathbf{x} \in D_f$. Es tracta, per tant, del cas $m = 1$. Suposem que existeixen totes les derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ i són contínues en $B(\mathbf{x}, \delta)$, amb $\delta > 0$. Hem de provar que

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\left| f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,h_i \right|}{||\mathbf{h}||} = 0\,,$$

on $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$. Escrivim

$$\begin{aligned}
f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \\
&f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) \\
&+ f(x_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n + h_n) \\
&+ \ldots \\
&+ f(x_1, \ldots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) \\
&+ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)\,.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ara, pel teorema del valor mitjà de Lagrange (teorema 2.12), podem escriure

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)\, h_1\,, \\ f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n+h_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{y}_2)\, h_2\,, \\ &\vdots \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}+h_{n-1}, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+h_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{y}_{n-1})\, h_{n-1}\,, \\ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)\, h_n\,, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= (c_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)\,, \quad c_1 \in [x_1, x_1+h_1]\,, \\ \mathbf{y}_2 &= (x_1, c_2, \dots, x_n+h_n)\,, \quad c_2 \in [x_2, x_2+h_2]\,, \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{n-1} &= (x_1, \dots, c_{n-1}, x_n+h_n)\,, \quad c_{n-1} \in [x_{n-1}, x_{n-1}+h_{n-1}]\,, \\ \mathbf{y}_n &= (x_1, \dots, x_{n-1}, c_n)\,, \quad c_n \in [x_n, x_n+h_n]\,. \end{aligned}$$

Per tant, podem escriure l'equació (5.14) com a

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{y}_2)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)\, h_n\,,$$

i aleshores

$$\left| f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, h_i \right| = \\ \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right) h_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) h_1 \right|\,.$$

Per la desigualtat triangular del mòdul, aquesta expressió és menor o igual que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| |h_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| |h_n|$$

que de nou és menor o igual que

$$\left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \right) ||\mathbf{h}||$$

ja que $|h_i| \leq ||\mathbf{h}||$. Per tant, hem demostrat que

$$\frac{\left| f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\, h_i \right|}{||\mathbf{h}||} \\ \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right|\,.$$

Quan $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, $\mathbf{y}_i \to \mathbf{x}$ i, com totes les derivades parcials són contínues, el costat dret d'aquesta expressió tendeix a zero. Per tant, el costat esquerre també ha de tendir a zero, i el teorema queda demostrat per al cas $m = 1$. Si $m > 1$, la demostració per al cas $m = 1$ implica que totes les funcions components de $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que són camps escalars, són diferenciables. Llavors la funció f també ho és. $\square$

Comentari: Aquest teorema ens dona una condició suficient perquè una funció siga diferenciable en un punt $\mathbf{x}_0$ del seu domini. Per tant, els últims dos teoremes ens permeten establir les següents implicacions:

Parcials contínues $\Rightarrow$ Diferenciable $\Rightarrow$ Contínua i existeixen les parcials
No contínua $\Rightarrow$ No diferenciable
No existeixen les parcials $\Rightarrow$ No diferenciable

Exemple 5.17: La funció $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ que vam estudiar en l'exemple 5.12 no és diferenciable perquè no és contínua en l'origen.

Exemple 5.18: Considerem la funció $f(x, y) = x^2 + y^2$, ja estudiada en els exemples 5.7 i 5.11. Volem ara estudiar la seua diferenciabilitat en el punt $(0, 0)$. Com que es tracta d'un camp escalar, la seua matriu jacobiana és el vector gradient, que calculem com a

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x & 2\,y \end{pmatrix} .$$

Les dues derivades parcials existeixen en el punt $(0, 0)$. A més, com que són dos monomis, són contínues. Per tant, el teorema 5.8 garanteix que és diferenciable en $(0, 0)$. De fet, és diferenciable en tot $\mathbb{R}^2$, pel mateix argument. Podem finalment comprovar-ho fent ús de la definició de diferenciabilitat i l'equació (5.7). Considerem un punt qualsevol $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Aleshores $f(\mathbf{x}) = x^2 + y^2$, $f(\mathbf{x}_0) = x_0^2 + y_0^2$ i

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\
&= 2\,x_0\,(x - x_0) + 2\,y_0\,(y - y_0) ,
\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2\,x_0\,(x - x_0) - 2\,y_0\,(y - y_0) \\
&= x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y \\
&= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||^2 .
\end{aligned}$$

En conclusió

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||^2}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| = 0 ,$$

i la funció és diferenciable en tot $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5.19: Siga la funció

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{x^2+y^2}\,.$$

Estudiem la seua diferenciabilitat. Comencem de nou calculant les seues derivades parcials. Obtenim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-\sin x\,(x^2+y^2) - \cos x \cdot 2\,x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2+y^2)\,\sin x + 2\,x\,\cos x}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2\,y\,\cos x}{(x^2+y^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Les derivades parcials són clarament contínues en tots els punts, excepte en l'origen. Per a demostrar que no ho són en l'origen considerem per exemple $\frac{\partial f}{\partial y}$ i calculem

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left[-\frac{2\,y\,\cos x}{(x^2+y^2)^2}\right]\right) = -\lim_{y\to 0}\frac{2\,y}{y^4} = -2\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^3} = -\infty\,,\\
\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left[-\frac{2\,y\,\cos x}{(x^2+y^2)^2}\right]\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

Com que el límit no existeix, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ no és contínua. En conclusió, f és diferenciable en tot $\mathbb{R}^2$ excepte en l'origen.

Definició 5.15

Una funció és de **classe C^1** en un conjunt obert D si totes les seues derivades parcials existeixen i són contínues en D.

Tota funció C^1 és diferenciable.

Teorema 5.9: Propietats de les funcions diferenciables

Siguen $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dues funcions diferenciables en un punt $\mathbf{x}_0 \in D$. Aleshores:

(i) Si $c \in \mathbb{R}$ és una constant, la funció $c\,f(\mathbf{x})$ és diferenciable en $\mathbf{x}_0$ i la seua matriu jacobiana en $\mathbf{x}_0$ és

$$D(c\,f)(\mathbf{x}_0) = c\,Df(\mathbf{x}_0)\,.$$

(ii) La funció $f+g$ és diferenciable en $\mathbf{x}_0$ i la seua matriu jacobiana en $\mathbf{x}_0$ és

$$D(f+g)(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0) + Dg(\mathbf{x}_0)\,.$$

(iii) Si $m = 1$, la funció $f\,g$ és diferenciable en $\mathbf{x}_0$ i la seua matriu jacobiana en $\mathbf{x}_0$ és

$$D(f\,g)(\mathbf{x}_0) = Df(\mathbf{x}_0)\,g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\,Dg(\mathbf{x}_0)\,.$$

(iv) Si $m = 1$ i $g(\mathbf{x}) \neq 0\ \forall \mathbf{x} \in D$, la funció $\dfrac{f}{g}$ és diferenciable en $\mathbf{x}_0$ i la seua matriu jacobiana en $\mathbf{x}_0$ és

$$D(f/g)(\mathbf{x}_0) = \frac{Df(\mathbf{x}_0)\,g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\,Dg(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)^2}\,.$$

Comentari: És important notar que les expressions de la matriu jacobiana són operacions amb matrius.

Demostració. Les demostracions són molt similars a les que vam fer per a les propietats de la derivada de funcions d'una variable (teorema 2.3).

(i) La funció f és diferenciable i, per tant,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{||c\,f(\mathbf{x}) - c\,f(\mathbf{x}_0) - c\,Df(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)||}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||} = |c| \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)||}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||}$$
$$= 0\,.$$

(ii) Considerem la quantitat

$$||(f+g)(\mathbf{x}) - (f+g)(\mathbf{x}_0) - D(f+g)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|| =$$
$$||f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - g(\mathbf{x}_0) - [Df(\mathbf{x}_0) + Dg(\mathbf{x}_0)]\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)||\,.$$

Per la desigualtat triangular de la norma, aquesta quantitat és menor o igual que

$$||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|| + ||g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)||\,.$$

Si ara dividim per $||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||$ i prenem el límit $\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0$, aquests dos termes donen zero, ja que f i g són diferenciables. Per tant, la fita prèviament trobada implica

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{||(f+g)(\mathbf{x}) - (f+g)(\mathbf{x}_0) - D(f+g)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)||}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||} = 0\,.$$

(iii) Considerem la quantitat

$$|(f\,g)(\mathbf{x}) - (f\,g)(\mathbf{x}_0) - D(f\,g)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)| =$$
$$|f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\,g(\mathbf{x}_0) - [Df(\mathbf{x}_0)\,g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\,Dg(\mathbf{x}_0)]\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|\,.$$

Sumem i restem $f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x})\,Df(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$. Obtenim

$$\begin{aligned}
&|f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\,g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})\,g(\mathbf{x}_0) \\
&\qquad - [Df(\mathbf{x}_0)\,g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\,Dg(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x})\,Df(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})\,Df(\mathbf{x}_0)]\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)| = \\
&\quad |f(\mathbf{x})\,[g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)] + g(\mathbf{x}_0)\,[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)] \\
&\qquad + [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)]\,Dg(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|\,.
\end{aligned}$$

La desigualtat triangular del mòdul ens diu que aquesta quantitat és menor o igual que

$$|f(\mathbf{x})||g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| + |g(\mathbf{x}_0)||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \\ +| [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)] \, Dg(\mathbf{x}_0) \, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \, .$$

Finalment, dividim per $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||$ i prenem el límit $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Els tres termes de l'última expressió tenen límit igual a zero, ja que f i g són diferenciables. A més, com que f és diferenciable en $\mathbf{x}_0$, el teorema 5.7 ens diu que és contínua en $\mathbf{x}_0$ i, per tant, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)] = 0$. En conclusió

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{|(f\,g)(\mathbf{x}) - (f\,g)(\mathbf{x}_0) - D(f\,g)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||} = 0 \, .$$

(iv) Considerem ara la quantitat

$$|(f/g)(\mathbf{x}) - (f/g)(\mathbf{x}_0) - D(f/g)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| = \\ \left| \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} - \frac{f(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)} - \frac{Df(\mathbf{x}_0)\, g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\, Dg(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right|$$

La podem reescriure com a

$$\frac{|N|}{|g(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}_0)|} \, ,$$

on

$$|N| = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}) - \left[Df(\mathbf{x}_0)\, g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\, Dg(\mathbf{x}_0) \frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x}_0)} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, .$$

Ara sumem i restem $f(\mathbf{x}_0)\, g(\mathbf{x}_0) + [Df(\mathbf{x}_0)\, g(x_0) + Dg(\mathbf{x}_0)\, f(x_0)]\, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Agrupant els termes resultants podem escriure N com a

$$|N| = g(\mathbf{x}_0)\, [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] - f(\mathbf{x}_0)\, [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] \\ - [g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)]\, Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0) \left[1 - \frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x}_0)} \right] Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \, .$$

De nou, fem ara ús de la desigualtat triangular del mòdul. Trobem

$$\frac{|N|}{|g(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}_0)|} \leq \frac{|g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}_0)|} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \\ + \frac{|f(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}_0)|} |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \\ + \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x}_0)|} |Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| - \left| f(\mathbf{x}_0) \left[1 - \frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x}_0)} \right] \right| |Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \, .$$

Finalment, dividim per $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||$ i prenem el límit $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Els quatre termes de l'última expressió tendeixen a zero, ja que f i g són diferenciables. A més, com que

g és diferenciable en $\mathbf{x}_0$, el teorema 5.7 ens diu que és contínua en $\mathbf{x}_0$ i, per tant, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}[g(\mathbf{x})-g(\mathbf{x}_0)] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left[1-\frac{g(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x}_0)}\right] = 0$. En conclusió

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|(f/g)(\mathbf{x})-(f/g)(\mathbf{x}_0)-D(f/g)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||} = 0\,.$$

$\square$

Comentari 1: Aquestes propietats són vàlides en el cas particular d'un camp escalar i, per tant, són també propietats del gradient. Per exemple, si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ són dues funcions diferenciables, aleshores $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.

Comentari 2: Les propietats del teorema 5.9 són completament anàlogues a les de les derivades de funcions d'una variable del teorema 2.3 i de fet es redueixen a aquelles per al cas particular $m = n = 1$.

A

Propietats dels límits de funcions

En aquest apèndix demostrem les propietats dels límits (iii)-(vi) del teorema 1.5. Les propietats (i) i (ii) ja estan demostrades en la secció 1.3.

(iii) En primer lloc utilitzem les propietats (i) i (ii) per a demostrar

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - L] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} L = L - L = 0\,,$$
$$\lim_{x\to x_0} [g(x) - K] = \lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} K = K - K = 0\,.$$

Siga $\epsilon > 0$. Existeixen $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ tals que

$$\begin{array}{lll} \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 & \text{aleshores} & |(f(x) - L) - 0| < \sqrt{\epsilon}\,, \\ \text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 & \text{aleshores} & |(g(x) - K) - 0| < \sqrt{\epsilon}\,. \end{array}$$

Escollim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. En aquest cas podem combinar les dues expressions prèvies per a obtenir

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |[f(x) - L]\,[g(x) - K] - 0| = |f(x) - L|\,|g(x) - K| < \sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon} = \epsilon\,.$$

Per tant, hem demostrat que

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - L]\,[g(x) - K] = 0\,. \tag{A.1}$$

Aparentment aquest resultat no té res a veure amb el que es pretén demostrar. No obstant això, és una peça necessària per als càlculs que realitzarem ara. Primer expandim el producte

$$[f(x) - L]\,[g(x) - K] = f(x)\,g(x) - K\,f(x) - L\,g(x) + L\,K\,,$$

que ens permet trobar

$$f(x)\,g(x) = [f(x) - L]\,[g(x) - K] + K\,f(x) + L\,g(x) - L\,K\,. \tag{A.2}$$

Ara ja estem preparats per a demostrar la propietat (iii):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) &\underset{\text{Eq.(A.2)}}{=} \lim_{x\to x_0} [[f(x)-L]\,[g(x)-K] + K\,f(x) + L\,g(x) - L\,K] \\
&\underset{\text{P(ii)}}{=} \lim_{x\to x_0} [f(x)-L]\,[g(x)-K] + \lim_{x\to x_0} K\,f(x) + \lim_{x\to x_0} L\,g(x) - \lim_{x\to x_0} L\,K \\
&\underset{\text{Eq.(A.1)}}{=} 0 + \lim_{x\to x_0} K\,f(x) + \lim_{x\to x_0} L\,g(x) - \lim_{x\to x_0} L\,K \\
&\underset{\text{P(i)}}{=} K\,L + L\,K - L\,K \\
&= L\,K\,.
\end{aligned}$$

I ha quedat demostrada la propietat.

(iv) El primer pas de la demostració consisteix a provar

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{K}\,. \tag{A.3}$$

Siga $\epsilon > 0$. Com que $\lim_{x\to x_0} g(x) = K$, existeix un $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{aleshores} \quad |g(x) - K| < \frac{|K|}{2}\,.$$

Per tant, si $0 < |x - x_0| < \delta_1$ tenim

$$|K| = |K - g(x) + g(x)| \le |K - g(x)| + |g(x)| = |g(x) - K| + |g(x)| < \frac{|K|}{2} + |g(x)|\,,$$

on en el segon pas hem utilitzat la desigualtat triangular del mòdul. Podem reagrupar els termes d'aquesta expressió per a obtenir

$$|K| < \frac{|K|}{2} + |g(x)| \quad \Rightarrow \quad \frac{|K|}{2} < |g(x)| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|K|}\,. \tag{A.4}$$

També existeix un $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \text{aleshores} \quad |g(x) - K| < \frac{|K|^2}{2}\,\epsilon\,. \tag{A.5}$$

Escollim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Si $0 < |x - x_0| < \delta$ tenim

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{K}\right| &= \left|\frac{K - g(x)}{K\,g(x)}\right| = \frac{1}{|K\,g(x)|}\,|K - g(x)| = \frac{1}{|K|}\,\frac{1}{|g(x)|}\,|g(x) - K| \\
&\underset{\text{Eq.(A.4)}}{<} \frac{1}{|K|}\,\frac{2}{|K|}\,|g(x) - K| \underset{\text{Eq.(A.5)}}{<} \frac{1}{|K|}\,\frac{2}{|K|}\,\frac{|K|^2}{2}\,\epsilon = \epsilon\,.
\end{aligned}$$

I queda provada l'equació (A.3). Demostrar ara la propietat (iv) és trivial a partir de la propietat (iii):

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] \underset{\text{P(iii)}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{K}\,.$$

I queda provada la propietat (iv).

(v) Aquesta propietat la demostrarem només per al cas en què $n \geq 2$ és un nombre enter. Farem ús de la propietat (iii) i del *mètode de prova per inducció.* Per a $n = 2$ tenim

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^2 = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot f(x) \underset{\mathrm{P(ii)}}{=} \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = L^2 \,.$$

Suposem ara que

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{n-1} = L^{n-1} \,.$$

Si aconseguim provar $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = L^n$ la demostració estarà completa. Tenim

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \lim_{x \to x_0} \Big[[f(x)]^{n-1} \cdot f(x) \Big] \underset{\mathrm{P(iii)}}{=} \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{n-1} \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = L^{n-1} \, L = L^n \,.$$

I hem terminat la prova. La demostració es pot generalitzar per a $n \in \mathbb{R}$, però no ho provarem ací.

(vi) Aquesta propietat pot considerar-se un cas particular de l'anterior. Encara que no hem provat el cas general $n \in \mathbb{R}$, donarem aquesta propietat per demostrada.

B

Derivades de les funcions elementals

En aquest apèndix demostrem les expressions conegudes per a les derivades de les funcions elementals, donades en el teorema 2.4.

(i) En el Tema 2 hem donat una demostració per al cas particular $p \in \mathbb{N}$. El cas general es demostra fent servir derivació logarítmica:

$$y = x^p \quad \Rightarrow \quad \ln y = p \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{p}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{x}\, y = p\, x^{p-1}\,.$$

(ii) Aquesta expressió ja ha sigut demostrada en el Tema 2.

(iii) Per a demostrar aquest cas hem de recordar de nou una identitat trigonomètrica, el cosinus de la suma d'angles:

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h\,. \tag{B.1}$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \underset{\text{Eq.(B.1)}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \sin x \sin h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x\,.
\end{aligned}$$

(iv) Aquesta expressió pot demostrar-se a partir de les derivades de $\sin x$ i $\cos x$ i la propietat (v) del teorema 2.3, és a dir, la regla de derivació del quocient de dues funcions:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &\underset{\text{P(v)}}{=} \frac{\cos x \frac{d}{dx}\sin x - \sin x \frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.
\end{aligned}$$

(v) En aquest cas farem ús de la derivada de $\sin x$, obtinguda en l'equació (2.12), i del teorema 2.6, que ens diu com obtenir la derivada de la funció inversa. Denotem

$f(x) = \sin x$ i $f^{-1}(x) = \arcsin x$, i suposem que x pertany al domini de la funció $\sin x$, és a dir, $|x| < 1$. Trobem:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin y\Big|_{y=\arcsin x}} \underset{\text{Eq.(2.12)}}{=} \frac{1}{\cos y|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1-\sin^2 y}\right)\Big|_{y=\arcsin x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{B.2}$$

(vi) Podríem trobar aquesta derivada seguint exactament el mateix procediment del cas previ, però tenim una alternativa. Podem fer servir la identitat de les funcions inverses trigonomètriques

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aleshores, és trivial obtenir

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

(vii) De nou, farem servir el teorema 2.6, en aquest cas en combinació amb la derivada de la funció $\tan x$, que podem escriure d'una manera alternativa gràcies a una altra identitat trigonomètrica:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\,. \tag{B.3}$$

Aleshores

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\tan y\Big|_{y=\arctan x}} \underset{\text{Eq.(B.3)}}{=} \frac{1}{(1+\tan^2 y)|_{y=\arctan x}} = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{B.4}$$

(viii) Per la definició de derivada, i fent ús de les propietats de les potències,

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x\,L\,, \tag{B.5}$$

on hem definit el límit

$$L = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\,. \tag{B.6}$$

Per a calcular L definim la variable

$$t = a^h - 1 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}\,,$$

que també tendeix a 0 quan h tendeix a 0, i substituïm en l'equació (B.6),

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \lim_{t\to 0}\frac{t\,\ln a}{\ln(t+1)} = \ln a\,\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}\,. \tag{B.7}$$

Ara hem de fer algunes manipulacions de l'expressió resultant i obtenim

$$L = \ln a \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \ln a \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(t+1)} \tag{B.8}$$

$$= \ln a \lim_{t \to 0} \frac{1}{\ln(t+1)^{1/t}} = \frac{\ln a}{\lim_{t\to 0}\ln(t+1)^{1/t}} = \frac{\ln a}{\ln \lim_{t \to 0}(t+1)^{1/t}} \,. \tag{B.9}$$

En l'últim pas hem fet ús del fet que $\ln x$ és una funció contínua i, per tant, podem intercanviar l'ordre d'aplicació de la funció i el càlcul del límit pel teorema 1.17. El límit que apareix en el denominador és el nombre e, com és fàcil de veure fent el canvi de variable $t = \frac{1}{y}$:

$$\lim_{t \to 0}(t+1)^{1/t} = \lim_{y \to \infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e\,.$$

Per tant,

$$L = \frac{\ln a}{\ln \lim_{t \to 0}(t+1)^{1/t}} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a\,, \tag{B.10}$$

i finalment, substituint en l'equació (B.5) trobem

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \, \ln a\,. \tag{B.11}$$

(ix) Aquesta derivada és un cas particular de l'anterior i la podem demostrar simplement fent $a = e$ en l'equació (B.11).

(x) En aquest cas farem ús de la derivada de a^x en l'equació (B.11) i del teorema 2.6, que ens diu com obtenir la derivada de la funció inversa. Denotem $f(x) = a^x$ i $f^{-1}(x) = \log_a x$. Trobem:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\frac{d}{dy}a^y\Big|_{y=\log_a x}} \underset{\text{Eq.(B.11)}}{=} \frac{1}{(a^y \, \ln a)\big|_{y=\log_a x}} = \frac{1}{a^{\log_a x}\,\ln a} = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x}\log_a e\,. \tag{B.12}$$

En l'últim pas hem utilitzat la propietat dels logaritmes $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

(xi) Aquesta expressió ha sigut ja demostrada en el Tema 4, com un exemple d'ús del teorema 2.6. A més, és un cas particular de l'anterior i la podem trobar fent $a = e$ en l'equació (B.12).

(xii)-(xiii) Definim les funcions $\sinh x$ i $\cosh x$ com a

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,. \tag{B.13}$$

La funció $\sinh x$ és imparella, $\sinh(-x) = -\sinh x$, i $\cosh x$ parella, $\cosh(-x) = \cosh x$. Calculem les seues derivades fàcilment a partir de les definicions

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,, \tag{B.14}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x\,. \tag{B.15}$$

(xiv) La funció $\tanh x$ es defineix com a

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}\,.$$

Per tant, la seua derivada pot trobar-se a partir de les derivades de $\sinh x$ i $\cosh x$ i la propietat (v) del teorema 2.3, és a dir, la regla de derivació del quocient de dues funcions. En el càlcul hem de recordar una identitat de les funcions hiperbòliques,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,,$$

que pot provar-se amb les definicions de l'equació (B.13). Aleshores, trobem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) \underset{\mathrm{P(v)}}{=} \frac{\cosh x \frac{d}{dx}\sinh x - \sinh x \frac{d}{dx}\cosh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}\,.\end{aligned}$$

(xv) Una vegada més, hem de fer servir el teorema 2.6. Denotem $f(x) = \sinh x$ i $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x$. Trobem:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x &= \frac{1}{\frac{d}{dy}\sinh y\Big|_{y=\operatorname{arcsinh} x}} \underset{\mathrm{Eq.(B.14)}}{=} \frac{1}{\cosh y|_{y=\operatorname{arcsinh} x}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\sinh^2 y + 1}\right)\Big|_{y=\operatorname{arcsinh} x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.\end{aligned} \tag{B.16}$$

(xvi) De nou, la clau de la prova està en el teorema 2.6. Denotem $f(x) = \cosh x$ i $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} x$. Trobem:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x &= \frac{1}{\frac{d}{dy}\cosh y\Big|_{y=\operatorname{arccosh} x}} \underset{\mathrm{Eq.(B.15)}}{=} \frac{1}{\sinh y|_{y=\operatorname{arccosh} x}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\cosh^2 y - 1}\right)\Big|_{y=\operatorname{arccosh} x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\end{aligned} \tag{B.17}$$

on hem suposat que $x > 1$ i, per tant, pertany al domini de les funcions que hem considerat.

(xvii) Com que $\tanh t < 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$, suposarem a continuació que $|x| < 1$. Farem de nou servir el teorema 2.6, en combinació amb la derivada de la funció $\tanh x$, que podem escriure d'una manera alternativa gràcies a una identitat de funcions hiperbòliques

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \,. \tag{B.18}$$

Per tant, si denotem $f(x) = \tanh x$ i $f^{-1}(x) = \operatorname{arctanh} x$, trobem

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{\left.\frac{d}{dy} \tanh y\right|_{y=\operatorname{arctanh} x}} \underset{\text{Eq.(B.18)}}{=} \frac{1}{\left.\left(1 - \tanh^2 y\right)\right|_{y=\operatorname{arctanh} x}} = \frac{1}{1 - x^2} \,. \tag{B.19}$$

C

Sumes finites

La **notació sigma** ens permet escriure una suma de manera compacta:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \, .$$

El símbol Σ indica suma. El nombre k s'anomena **índex de la suma**, que en aquest cas comença en $k = 1$ i acaba en $k = n$.

Exemples:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 = -1 + 2 - 3.$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$

Definició C.1: Suma finita

Una suma amb un nombre finit de sumands s'anomena **suma finita**.

Totes les sumes dels exemples previs són sumes finites.

Teorema C.1: Propietats de les sumes finites

Siga c un nombre constant. Aleshores,

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k.$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$.

Demostració. Totes les propietats són trivials a partir de les propietats bàsiques de l'operació elemental de la suma. □

A continuació, demostrem algunes **sumes finites notables**.

Teorema C.2: Suma dels primers n naturals

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Demostració. Una forma elegant de demostrar aquesta suma és escriure els sumands primer en ordre creixent i després, en la següent línia, en ordre decreixent:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

La suma de cada columna és $n+1$ i tenim n columnes. Per tant

$$2 \sum_{k=1}^{n} k = n\,(n+1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

□

Teorema C.3: Suma dels primers n quadrats perfectes

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1) .$$

Demostració. Farem ús del mètode de demostració per inducció. Primer comprovem que la igualtat és certa per a $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 .$$

Suposem ara que és certa per a $n = m - 1$. Per tant, tenim

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^2 = \frac{1}{6}\,(m-1)\,m\,(2m-1)\,.$$

I finalment, demostrem que aleshores també és certa per a $n = m$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k^2 &= \sum_{k=1}^{m-1} k^2 + m^2 = \frac{1}{6}\,(m-1)\,m\,(2m-1) + m^2 \\ &= \frac{1}{6}\,m\,[(m-1)(2m-1)+6m] = \frac{1}{6}\,m\left[2m^2 - m - 2m + 1 + 6m\right] \\ &= \frac{1}{6}\,m\,(m+1)(2m+1)\,.\end{aligned}$$

I aleshores queda provada la igualtat. $\square$

D

Propietats de la integral definida

En aquest apèndix demostrem les propietats de la integral definida (v)-(ix) del teorema 3.6. Les propietats (i)-(iv) ja estan demostrades en la secció 3.3.

(v) Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un nombre $\delta > 0$ tal que per a qualssevol partició $\mathcal{P}$ i selecció $\mathcal{S}$ de l'interval $[a, b]$, amb $||\mathcal{P}|| < \delta$, tenim

$$\left| S_{K\,f} - K \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon\,. \tag{D.1}$$

Com que f és integrable en $[a, b]$, existeix δ_1 tal que si $\mathcal{P}$ és una partició amb $||\mathcal{P}|| < \delta_1$ aleshores

$$\left| S_f - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\epsilon}{|K|}\,.$$

Escollim $\delta = \delta_1$. Si $\mathcal{P}$ és una partició amb $||\mathcal{P}|| < \delta$ trivialment trobem

$$S_{Kf} = \sum_{k=1}^{n} K\,f(c_k)\,\Delta x_k = K \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = K\,S_f\,,$$

per a qualsevol selecció $\mathcal{S}$. Aleshores

$$\begin{aligned} \left| S_{Kf} - K \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| K\,S_f - K \int_a^b f(x)\,dx \right| = |K| \left| S_f - \int_a^b f(x)\,dx \right| \\ &< |K|\,\frac{\epsilon}{|K|} = \epsilon\,. \end{aligned}$$

(vi) Com que en aquest cas hem de considerar tres intervals diferents, $[a, b]$, $[b, c]$ i $[a, c]$, denotarem de manera explícita l'interval amb un superíndex. Suposem $a < b < c$. Si els límits d'integració s'ordenen d'altra manera la demostració és anàloga. Siga $\epsilon > 0$. Hem de provar que existeix un nombre $\delta > 0$ tal que per a qualssevol partició $\mathcal{P}^{[a,c]}$ i selecció $\mathcal{S}^{[a,c]}$ de l'interval $[a, c]$, amb $||\mathcal{P}^{[a,c]}|| < \delta$, tenim

$$\left| S_f^{[a,c]} - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \right) \right| < \epsilon\,. \tag{D.2}$$

Fem primer la demostració per al cas en què $b \in \mathcal{P}^{[a,c]}$. Com que f és integrable en $[a, b]$, existeix δ_1 tal que si $\widetilde{\mathcal{P}}^{[a,b]}$ és una partició amb $||\widetilde{\mathcal{P}}^{[a,b]}|| < \delta_1$ aleshores

$$\left| \widetilde{S}_f^{[a,b]} - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{D.3}$$

on $\widetilde{S}_f^{[a,b]}$ és la suma de Riemann corresponent a $\widetilde{\mathcal{P}}^{[a,b]}$. Igualment, com que f és integrable en $[b, c]$, existeix δ_2 tal que si $\widetilde{\mathcal{P}}^{[b,c]}$ és una partició amb $||\widetilde{\mathcal{P}}^{[b,c]}|| < \delta_2$ aleshores

$$\left| \widetilde{S}_f^{[b,c]} - \int_b^c f(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{D.4}$$

on $\widetilde{S}_f^{[b,c]}$ és la suma de Riemann corresponent a $\widetilde{\mathcal{P}}^{[b,c]}$. Com que $b \in \mathcal{P}^{[a,c]}$, és evident que podem separar la suma de Riemann total $S_f^{[a,c]}$ en dues peces,

$$S_f^{[a,c]} = S_f^{[a,b]} + S_f^{[b,c]}\,.$$

Siga $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Aleshores

$$\begin{aligned}\left| S_f^{[a,c]} - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \right) \right| &= \left| S_f^{[a,b]} + S_f^{[b,c]} - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \right) \right| \\ &\leq \left| S_f^{[a,b]} - \int_a^b f(x)\, dx \right| + \left| S_f^{[b,c]} - \int_b^c f(x)\, dx \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,\end{aligned}$$

on hem fet ús primer de la desigualtat triangular per al mòdul i després de les equacions (D.3) i (D.4). Aquestes equacions són vàlides per a qualsevol partició dels intervals $[a, b]$ i $[b, c]$, sota la condició sobre les seues normes ja esmentada. Per tant, són vàlides per a les particions particulars que donen lloc a les sumes $S_f^{[a,b]}$ i $S_f^{[b,c]}$. La propietat queda, per tant, provada si $b \in \mathcal{P}^{[a,c]}$. Suposem ara $b \notin \mathcal{P}^{[a,c]}$. La prova en aquest cas és lleugerament més elaborada. De nou, com que f és integrable en $[a, b]$ i en $[b, c]$, existeixen δ_1 i δ_2 tals que si $\widetilde{\mathcal{P}}^{[a,b]}$ i $\widetilde{\mathcal{P}}^{[b,c]}$ són particions d'aquests intervals, amb $||\widetilde{\mathcal{P}}^{[a,b]}|| < \delta_1$ i $||\widetilde{\mathcal{P}}^{[b,c]}|| < \delta_2$, aleshores

$$\left| \widetilde{S}_f^{[a,b]} - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{3}\,, \tag{D.5}$$

$$\left| \widetilde{S}_f^{[b,c]} - \int_b^c f(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{3}\,. \tag{D.6}$$

Siga $[x_{j-1}, x_j]$ el subinterval definit per la partició $\mathcal{P}^{[a,c]}$ on es troba b, amb $x_{j-1} < b < x_j$. Considerem una segona partició de l'interval $[a, c]$, $\overline{\mathcal{P}}^{[a,c]}$, definida com a $\overline{\mathcal{P}}^{[a,c]} = \mathcal{P}^{[a,c]} \cup \{b\}$. Es diu que $\overline{\mathcal{P}}^{[a,c]}$ és un **refinament** de $\mathcal{P}^{[a,c]}$, ja que conté un punt addicional i, per tant, divideix $[a, c]$ en un subinterval més. Si en la partició $\mathcal{P}^{[a,c]}$

seleccionàvem el punt $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$, en la nova partició $\overline{\mathcal{P}}^{[a,c]}$ seleccionem $p_1 \in [x_{j-1}, b]$ i $p_2 \in [b, x_j]$. La resta de punts seleccionats en els altres subintervals són els mateixos. Denotem la suma de Riemann corresponent a $\overline{\mathcal{P}}^{[a,c]}$ per $\overline{S}_f^{[a,c]}$. Tenim

$$\begin{aligned}
S_f^{[a,c]} &= S_f^{[a,x_{j-1}]} + (x_j - x_{j-1})\, f(c_j) + S_f^{[x_j,c]}\,, \\
\overline{S}_f^{[a,c]} &= S_f^{[a,x_{j-1}]} + (b - x_{j-1})\, f(p_1) + (x_j - b)\, f(p_2) + S_f^{[x_j,c]}\,.
\end{aligned}$$

A més, com que $b \in \overline{\mathcal{P}}^{[a,c]}$, podem de nou separar

$$\overline{S}_f^{[a,c]} = \overline{S}_f^{[a,b]} + \overline{S}_f^{[b,c]}\,,$$

i aleshores trobem

$$\begin{aligned}
S_f^{[a,c]} &= \overline{S}_f^{[a,c]} + (x_j - x_{j-1})\, f(c_j) - (b - x_{j-1})\, f(p_1) - (x_j - b)\, f(p_2) \\
&= \overline{S}_f^{[a,b]} + \overline{S}_f^{[b,c]} + (x_j - x_{j-1})\, f(c_j) - (b - x_{j-1})\, f(p_1) - (x_j - b)\, f(p_2) \\
&= \overline{S}_f^{[a,b]} + \overline{S}_f^{[b,c]} + D\,,
\end{aligned}$$

on hem definit la quantitat $D = (x_j - x_{j-1})\, f(c_j) + (x_{j-1} - b)\, f(p_1) + (b - x_j)\, f(p_2)$. L'aplicació de la desigualtat triangular a D ens dona el resultat

$$\begin{aligned}
|D| &\leq |(x_j - x_{j-1})\, f(c_j)| + |(x_{j-1} - b)\, f(p_1)| + |(b - x_j)\, f(p_2)| \\
&= (x_j - x_{j-1})\, |f(c_j)| + (b - x_{j-1})\, |f(p_1)| + (x_j - b)\, |f(p_2)|\,.
\end{aligned}$$

Com que f és integrable en $[a, c]$, sabem pel teorema 3.5 que és fitada en $[a, c]$. Aleshores existeix un nombre real M tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, c]$. Per tant

$$|D| \leq (x_j - x_{j-1})\, M + (b - x_{j-1})\, M + (x_j - b)\, M = 2\, M\, (x_j - x_{j-1})\,.$$

Siga $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\epsilon}{6M})$. Aleshores, com que $x_j - x_{j-1} \leq \delta$, trobem que $|D| \leq \frac{\epsilon}{3}$ i, per tant,

$$\begin{aligned}
\left| S_f^{[a,c]} - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \right) \right| &= \left| \overline{S}_f^{[a,b]} + \overline{S}_f^{[b,c]} + D - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx \right) \right| \\
&\leq \left| \overline{S}_f^{[a,b]} - \int_a^b f(x)\, dx \right| + \left| \overline{S}_f^{[b,c]} - \int_b^c f(x)\, dx \right| + |D| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\,,
\end{aligned}$$

i queda provada la propietat. De nou hem utilitzat les equacions (D.5) i (D.6), que són vàlides per al cas particular de les sumes $\overline{S}_f^{[a,b]}$ i $\overline{S}_f^{[b,c]}$.

(vii) Per a cada partició $\mathcal{P}$ i per a cada selecció $\mathcal{S}$ de l'interval $[a, b]$ tenim

$$\begin{aligned}\min f \cdot (b-a) &= \min f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \min f \cdot \Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \max f \cdot \Delta x_k = \max f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \max f \cdot (b-a)\,.\end{aligned}$$

Aleshores, qualsevol suma de Riemann per a la funció f en $[a, b]$ satisfà la desigualtat

$$\min f \cdot (b-a) \leq \sum_{k=1} f(c_k)\, \Delta x_k \leq \max f \cdot (b-a)\,,$$

i llavors el seu límit, la integral definida, també.

(viii) Aquesta demostració és similar a la de la propietat anterior. Per a cada partició $\mathcal{P}$ i per a cada selecció $\mathcal{S}$ de l'interval $[a, b]$ tenim

$$\sum_{k=1} f(c_k)\, \Delta x_k \geq \sum_{k=1} g(c_k)\, \Delta x_k\,,$$

i llavors els seus límits, les integrals definides, també verifiquen la mateixa desigualtat.

(ix) Aquesta propietat és conseqüència de la desigualtat triangular per al mòdul. Per a cada partició $\mathcal{P}$ i per a cada selecció $\mathcal{S}$ de l'interval $[a, b]$ tenim

$$\left| \sum_{k=1} f(c_k)\, \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1} |f(c_k)|\, \Delta x_k\,,$$

i, per tant, les integrals definides també verifiquen la mateixa desigualtat.