VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAD DE MAGISTERIO

DOCTORADO EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS ESPECIALIDAD EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

DISEÑO DE TAREAS DE GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL QUE PROMUEVEN LA GENERACIÓN DE INCERTIDUMBRE Y NECESIDAD INTELECTUAL DE ARGUMENTAR EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

Armando Enrique Echeverry Gaitán

DIRIGIDA POR:

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Dra. Leonor Camargo Uribe

Valencia, noviembre de 2020

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA **_Department de Didàctica de la Matemàtica_**

Aptdo. 22.045 - 46071 Valencia, España

El Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y

La Dra. Dña. Leonor Camargo Uribe, profesora titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia),

HACEMOS CONSTAR

- Que la presente memoria, titulada *Diseño de tareas de geometría tridimensional que promueven la generación de incertidumbre y necesidad intelectual de argumentar en futuros profesores de matemáticas*, ha sido realizada bajo nuestra dirección por D. ARMANDO ENRIQUE ECHEVERRY GAITÁN en el Programa de Doctorado de Didácticas Específicas y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor por la Universitat de València.
- Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizamos su depósito y defensa en la Universitat de València

En Valencia, a 23 de octubre de 2020.

Fdo.: Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez Fdo.: Dra. Leonor Camargo Uribe

Teléfono: (34) 96 386 44 86 *http://www.uv.es/didmat*

Fax: (34) 96 162 51 34

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a quienes contribuyeron académicamente al desarrollo de este trabajo. Mis directores Ángel Gutiérrez y Leonor Camargo, quienes, desde la formulación de propuesta de ingreso al doctorado, hasta la redacción final de la memoria me han orientado con sus recomendaciones y han mejorado significativamente mis producciones escritas. Recibí de ellos, además, certeras recomendaciones teóricas y metodológicas que hicieron mas transitable el camino, por momentos errático, del desarrollo de la investigación. Gracias a la profesora Carmen Samper, quien no sólo me permitió adelantar la experimentación en sus cursos, sino que participó activamente en el diseño y análisis posterior a la ejecución de cada una de las tareas, fui privilegiado con sus aportes didácticos y matemáticos al conjunto de actividades que hicieron parte de la experimentación. Gracias a los estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia de los cursos Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría semestre II-2016, y Geometría del Espacio semestres II-2016 y I-2017, participaron activamente en el desarrollo de las tareas propuestas y toleraron la irrupción de cámaras en su aula. Gracias a Óscar Molina, que por un tiempo contribuyó en la discusión de la planeación y ejecución de las tareas y adicionalmente me compartió los registros de audio y video junto con sus resúmenes y transcripciones de varias clases del curso I-2017. Gracias al departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia que me permitió llevar a cabo la experimentación en sus aulas.

Agradezco a quienes proporcionan fuerza vital, Cata, Tomás, María y Vladi.

Esta tesis ha sido el resultado de mi participación en el programa de Doctorado en Didácticas Específicas, especialidad en Didáctica de las Matemáticas. Esta participación fue posible gracias a la financiación otorgada por Colciencias (hoy Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia) en el marco de la convocatoria No 679 para estudios de doctorado en el exterior. Los recursos de esta beca fueron administrados por Colfuturo.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES Y MOTIVACIÓN

La motivación por desarrollar la investigación que se reporta en la presente memoria surge de preocupaciones docentes e investigativas del autor. Docentes, a partir de la experiencia como profesor de las asignaturas de geometría en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Investigativas, porque esta experiencia ha estado asociada a los esfuerzos por innovar en esas asignaturas desarrollando proyectos de investigación con el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia, cuyo interés principal de investigación han sido los procesos de argumentación y demostración. El mencionado programa de formación de profesores fue el contexto en el cual se desarrolló también el presente trabajo.

La investigación se sitúa en la Universidad Pedagógica Nacional, ubicada en Bogotá, Colombia, institución dedicada exclusivamente a la formación de profesores para todos los niveles de la educación. Uno de los programas que la universidad ofrece es la Licenciatura en Matemáticas. Quienes obtienen su grado en esta, se desempeñan por lo general como profesores de educación básica secundaria y media[1]. Entre los cursos obligatorios que deben tomar los estudiantes, están los cursos de la línea de geometría. El primero de ellos se denomina "Elementos de Geometría", el

[1] El sistema educativo colombiano lo conforman: la educación inicial (de 0 a 5 años, no necesariamente hay grados) la educación preescolar (de 5 a 6 años, en un grado), la educación básica (primaria de 6 a 10 años en cinco grados y secundaria de 11 a 14 años en cuatro grados), la educación media (dos grados de 15 años en adelante y culmina con el título de bachiller.), y la educación superior (Ministerio de Educación Nacional, 2010).

cual tiene como propósito que los estudiantes avancen en “su aprendizaje de la visualización geométrica de figuras, la argumentación matemática fundamentada y la generalización de propiedades de triángulos y cuadriláteros, a partir del estudio de ejemplos y contraejemplos” (Perry, Samper, Camargo, Echeverry, y Molina, 2008). En el segundo curso, “Geometría Plana”, se emprende la construcción formal de un sistema teórico matemático que abarca los contenidos de geometría euclidiana referidos a ángulos, triángulos y cuadriláteros. La construcción de dicho sistema continua en el tercer curso, “Geometría del Espacio”, cuyos contenidos son: semejanza de triángulos en el plano, relaciones de perpendicularidad y paralelismo en el espacio, circunferencia y esfera.

El conjunto de los cursos de geometría hace parte de una propuesta de innovación resultado de proyectos de investigación del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. La propuesta inició en 2004 y se encuentra descrita en el capítulo 5 de Camargo (2010). En esta propuesta se ha consolidado un modelo de trabajo en el cual los estudiantes desarrollan exploraciones en un entorno de geometría dinámica (EGD), formulan conjeturas producto de esas exploraciones y proporcionan elementos teóricos en los que se basan las demostraciones de esas conjeturas. Un elemento importante de esa innovación es la búsqueda de mecanismos que estimulen la producción de argumentos teóricos ligados a las exploraciones que desarrollan en geometría dinámica. Dos aspectos diferencian el primer curso del segundo, uno es el grado de rigor en las demostraciones que deben producir y el otro la organización del contenido, pues en el segundo curso se exige trabajar en el marco de un sistema teórico. El elemento que diferencia el segundo del tercer curso es el tratamiento de objetos tridimensionales. En el curso de Geometría del Espacio los estudiantes se encuentran con nuevos objetos, nuevas formas de representación y un nuevo recurso, Cabri 3D, pues en los anteriores cursos se trabaja con Cabri II o Geogebra en el plano.

Como hemos mencionado, la propuesta de innovación ha estado asociada a diferentes proyectos de investigación del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la

Geometría, reportados en diversas publicaciones, como Perry, Samper, Camargo, Echeverry, y Molina (2008), Echeverry, Molina, Samper, Perry, y Camargo (2012), Perry, Samper, Molina, Camargo, y Echeverry (2012) y Molina, Samper, Perry, Camargo, y Echeverry (2010). La mayoría de las investigaciones están concentradas en reportar lo que sucede en los cursos de Elementos de Geometría y Geometría Plana. Respecto al curso de Geometría del Espacio, hasta ahora las experiencias de enseñanza han sido poco sistematizadas y, en particular, solo con la presente investigación se enfrenta el asunto del diseño de tareas para la geometría 3D, necesidad aún no atendida desde la óptica investigativa en el contexto descrito.

Esperamos con la investigación de esta tesis doctoral aportar un diseño estructurado de tareas para el aprendizaje de la geometría 3D que promueva en los estudiantes la argumentación y contribuya a sistematizar las experiencias de enseñanza en el curso de Geometría del Espacio.

1.2 NATURALEZA DEL ESTUDIO

Hemos descrito que nuestra experiencia investigativa ha estado asociada a intervenciones de aula respecto a la argumentación y demostración en el contexto de cursos de geometría plana y hemos expresado que consideramos relevante extender esas intervenciones al curso que aborda los contenidos de la geometría tridimensional.

Desde la perspectiva del campo de investigación en educación matemática, podemos señalar que, en un reciente trabajo sobre argumentación y demostración, Stylianides y Stylianides (2018) plantean que la investigación en el campo ha proporcionado una fuerte fundamentación empírica y teórica acerca de las dificultades de los estudiantes con la demostración, pero se ha prestado menos atención a los diseños de intervenciones que apunten a abordar esas dificultades por lo que muchos de los problemas detectados permanecen sin solución. Por lo tanto, una prioridad investigativa en el área es encontrar maneras de lograr que el conocimiento investigativo produzca intervenciones de aula promisorias, asequibles y utilizables por parte de los profesores.

Estas consideraciones nos llevaron a plantearnos el presente trabajo como una intervención en el aula del curso de Geometría del Espacio. Y dentro del repertorio de posibles metodologías para hacer la intervención, nos pareció adecuada a nuestros propósitos la investigación de diseño (Bakker y van Eerde, 2015). Incorporamos en el diseño de las tareas unos elementos que consideramos contribuyen a estimular la argumentación y generar un camino a la demostración en el aprendizaje de la geometría tridimensional. Los elementos incorporados en el diseño fueron *incertidumbre*, *necesidad intelectual* y *justificación epistemológica* tomados de la producción teórica de académicos en el campo de la argumentación y demostración.

El constructo de necesidad intelectual fue establecido por Harel (2013) y hace referencia a cuando una tarea propuesta genera un estado de perturbación en el individuo al ser ésta irresoluble o incompatible con el conocimiento que tiene en el momento. Dicho estado impulsa la búsqueda de un nuevo conocimiento para resolver la tarea. En nuestra formulación, el mencionado estado de perturbación del que habla el autor lo hemos identificado con la noción de incertidumbre formulada por Zaslavsky (2005), que la autora interpreta en términos de lo que en la literatura educativa ha sido convencionalmente llamado el conflicto cognitivo, incorporando a este el componente de interacción social para su generación. Ligada a la necesidad intelectual, Harel (2013) ha planteado la justificación epistemológica. Esta se produce cuando el sujeto que aprende experimenta necesidad intelectual, en nuestro modelo como producto de la incertidumbre generada por una tarea, y tiene éxito en la búsqueda del conocimiento que resuelve la situación. Al percibir el papel desempeñado por ese conocimiento para la resolución de la situación, entonces se produce la justificación epistemológica. La generación de necesidad intelectual y justificación epistemológica son visibles en la argumentación productiva, es decir la argumentación que produce un discuso lógicamente conectado (Douek, 2007) y con intención heurística (Duval, 1999).

Nuestra pretensión en esta investigación es incoporar en el diseño estructurado para la intervención de aula los constructos teóricos mencionados de incertidumbre, necesidad intelectual y justificación epistemológica y precisar qué otros elementos requieren articularse en el diseño. Es nuestro propósito estudiar la manera en la cual el diseño es influenciado por aspectos que consideramos relevantes como la acción del profesor, el papel del entorno de geometría dinámica (EGD) y la formulación de los enunciados de las tareas. Adicionalmente, queremos estudiar cómo las circunstancias específicas propias del contexto de aplicación (formación de los estudiantes, recursos disponibles) afectan el diseño implementado en la intervención de aula.

1.3 PREGUNTA Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Enmarcado el estudio en los aspectos descritos, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué elementos se pueden articular en el diseño de tareas en geometría del espacio, haciendo uso de un entorno de geometría dinámica 3D, para estimular en los estudiantes la generación de incertidumbre que movilice su necesidad intelectual de promover argumentaciones productivas que contribuyan a lograr justificación epistemológica en el estudio de objetos y relaciones de la geometría tridimensional?

Y en el desarrollo de la investigación nos hemos propuesto alcanzar los siguientes objetivos:

Objetivo General

Determinar aspectos relevantes a incorporar en un diseño de tareas en geometría 3D con el uso de un entorno de geometría dinámica que estimulen la generación de *incertidumbre* y movilicen la *necesidad intelectu*al en los estudiantes, futuros profesores de matemáticas, promoviendo su *argumentación productiva*.

Con el fin de avanzar en el logro del objetivo general, planteamos los siguientes objetivos específicos de investigación:

i. Diseñar, experimentar y evaluar una secuencia de instrucción en geometría tridimensional, con el apoyo de Cabri 3D, que genere en los estudiantes *incertidumbre* e impulse en ellos la *necesidad intelectual* que les induzca a elaborar *argumentación productiva*.

ii. Describir las circunstancias específicas que rodean la generación de *incertidumbre* en el desarrollo de las tareas que componen la secuencia de instrucción.

1.4 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

La presente memoria consta de ocho capítulos y uno anexos. En el primero de los capítulos introducimos el problema a estudiar a partir de sus motivaciones y presentamos los objetivos y pregunta de investigación.

En el segundo capítulo se presenta la revisión de la literatura que consideramos más relevante para documentar la problemática abordada. Esta revisión se organizó en tres secciones, dos de ellas relacionadas con la perspectiva teórica y la tercera con la perspectiva metodológica. Se abordan: la argumentación y la demostración y su relación con los constructos de necesidad intelectual e incertidumbre, la geometría tridimensional en relación con los entornos de geometría dinámica 3D (EGD 3D) y la formación de profesores, y por último la investigación de diseño.

En el tercer capítulo presentamos los elementos que constituyen el marco teórico de la investigación. De acuerdo con lo planteado por Bakker y van Eerde (2015) con base en di Sessa y Cobb (2004), con respecto al marco teórico de una investigación de diseño, se presentan tres niveles de formulación teórica. En nuestro caso: marco teórico orientador, el constructivismo social; marco teórico para la acción, teoría de la mediación semiótica, y marco teórico de dominio específico, incertidumbre, necesidad intelectual y justificación epistemológica.

En el cuarto capítulo se presentan los aspectos metodológicos de la investigación. En este se describe la manera como se estructuró el estudio como una investigación de diseño, los ciclos desarrollados, la población involucrada en cada uno de los ciclos y la manera como se hizo la recolección y análisis de los datos.

En el capítulo quinto se presentan las tareas como fueron planteadas a los estudiantes en cada uno de los ciclos. Además del enunciado de cada tarea, se presentan las hipótesis de la trayectoria hipotética de aprendizaje como fueron concebidas en el momento previo a la aplicación de cada tarea, los aspectos del sistema teórico de referencia de la geometría en los que se enmarca cada tarea y las interacciones previstas para su desarrollo.

En el sexto capítulo se presenta el análisis, en este se presenta la trayectoria hipotética de aprendizaje de cada una de las tareas en la cual se puntualiza el enunciado, las interacciones previstas y las hipótesis formuladas acerca del aprendizaje. Luego se compara la trayectoria hipotética de aprendizaje con la trayectoria real de aprendizaje. Dicha comparación se soporta con fragmentos procedentes de los datos en los cuales están partes de transcripción de interacciones u hojas de trabajo de algunos estudiantes. Cada tarea se cierra con un comentario acerca de lo observado respecto a la comparación de las trayectorias.

En el séptimo capítulo se presenta la discusión y los resultados del trabajo. Este capítulo está organizado en dos secciones. En la primera se abordan los resultados de la implementación de cada una de las tareas. En la segunda planteamos nuestra formulación de cómo deberían estructurarse las tareas para futuras aplicaciones,

El octavo capítulo lo constituyen las conclusiones del trabajo. En principio presentamos las que consideramos son conclusiones relevantes respecto a cada uno de los objetivos específicos y posteriormente las contribuciones respecto a estos mismos objetivos. En la sección siguiente abordamos las que detectamos como limitaciones del estudio y en la última sección planteamos perspectivas para futuros estudios.

Las dos últimas partes del trabajo son las referencias y los anexos. Los anexos presentan la información en extenso del análisis, cada anexo corresponde a cada una de las seis tareas analizadas. Allí está la trayectoria hipotética con la misma estructura que la descrita para el capítulo seis. También está la transcripción de las interacciones que fueron analizadas junto con la codificación que se hizo de las mismas. Adicionalmente, se incluyen las hojas de trabajo de los estudiantes, junto con la codificación. Y para cada tarea se hace la comparación entre la trayectoria hipotética y la trayectoria real de aprendizaje.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DE LITERATURA

En este capítulo describimos los principales antecedentes encontrados en la literatura de investigación sobre los elementos que integran los componentes teórico y metodológico del presente estudio. Los trabajos incorporados son los que consideramos aportan información de importancia para la estructuración de los mencionados componentes.

En primer lugar, presentamos la literatura relacionada con la argumentación y la demostración, orientando la revisión presentada a los constructos que son relevantes en nuestra propuesta: incertidumbre y necesidad intelectual. En segundo lugar, abordamos trabajos acerca de la geometría tridimensional, particularmente aquellos en los cuales se hace uso de un EGD y aquellos en los cuales se aborda la formación de profesores y la geometría tridimensional. Finalmente, relacionamos los trabajos que nos parece desempeñaron un papel relevante en la configuración de la investigación de diseño como nuestra perspectiva metodológica.

2.1 ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Como hemos descrito en la introducción, la motivación de la presente investigación está dirigida a estimular el desarrollo de procesos de argumentación y demostración en estudiantes futuros profesores, particularmente en geometría tridimensional. Por esa razón, iniciamos esta revisión de la literatura reflexionado sobre la perspectiva teórica relacionada con estos conceptos.

2.1.1 PRECISIÓN DE TÉRMINOS

En primer lugar, hacemos una consideración léxica respecto a los términos demostración y prueba. En segundo lugar, hacemos una consideración semántica respecto a lo que se establece en la literatura de educación matemática acerca del significado de demostración y argumentación. En tercer lugar, examinamos los aspectos que son relevantes para nuestro estudio acerca de la relación entre argumentación y demostración en educación matemática.

En la literatura en inglés se usan con frecuencia los términos “proof”, “prove” o “proving”, las cuales no siempre tienen el mismo significado en el contexto de la educación matemática y pueden aludir a procesos u objetos diferentes incluso en un mismo texto, como mencionan Reid y Knipping (2010). En la literatura en español también ocurre que los términos “prueba” y “demostración” pueden aludir a asuntos distintos o usarse indistintamente como si aludiesen a lo mismo. Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) comentan que prefieren hablar de “esquemas de demostración” en lugar de “esquemas de prueba” lo que parece darle relevancia a la diferencia entre los términos. En Martínez (2001) se menciona que su propuesta es considerar la “prueba empírico-inductiva” como un aspecto complementario de la demostración, planteamiento que diferencia y relaciona prueba y demostración. Sin embargo, el debate respecto a la denominación no parece ser central en los marcos conceptuales sobre demostración. Al parecer, la tendencia es considerar la demostración en una concepción amplia con un espectro que abarca diferentes modos de argumentar en el aula de matemáticas (Rodríguez y Gutiérrez 2012). Desde nuestra perspectiva la expresión “demostración” es más usual y a nuestro juicio más precisa que la denominación “prueba”. Por esa razón en la presente memoria nos referiremos a demostración.

Varios autores del campo expresan que, si bien existe un cierto entendimiento común acerca de lo que es la argumentación, no ocurre así respecto al significado de demostración en educación matemática (Cabassut, Conner, Iscimen, Furinghetti, Jahnke, y Morselli, 2012; Reid y Knipping, 2010; Stylianides, Bieda, y Morselli, 2016; Stylianides y Stylianides, 2017). Stylianides et al. (2016) lo expresan así:

> Parece haber una comprensión bastante compartida entre los investigadores sobre el significado de la *argumentación*, un término generalmente usado para describir el discurso o recurso retórico (no necesariamente matemático) usado por un individuo o un grupo para convencer a otro que una proposición es verdadera o falsa (p. 316)

Esta interpretación nos proporciona un marco acerca de la argumentación en el presente estudio. Precisamos más adelante nuestra definición de referencia para esta noción. Respecto a la demostración, nos parece apropiada para los propósitos del presente estudio la caracterización propuesta por Stylianides et al. (2016) en la que los autores declaran que no existe una definición paradigmática pero sí es recomendable en un estudio específico adoptar una perspectiva que enmarque el mismo. Proponen una definición que se circunscribe al ejercicio de la demostración en un aula de matemáticas y expresan que para que un argumento pueda ser considerado como una demostración "debe usar proposiciones, modos de razonamiento y modos de representación que son aceptados por, conocidos por o conceptualmente al alcance de, los estudiantes de una comunidad de aula dada" (p 317).

Respecto a la relación entre argumentación y demostración, Reid y Knipping (2010) expresan que las posiciones existentes pueden situarse en un espectro de interpretación acerca de la relación entre estas: a) Son distintas y la argumentación puede generar obstáculos en la comprensión de la demostración. b) Aunque existe una relación compleja entre ambas, la argumentación puede constituir un obstáculo para el apredizaje de la demostración. c) Son distintas pero la argumentación es compatible con el aprendizaje de la demostración. d) La argumentación es esencial para el aprendizaje y la enseñanza de la demostración.

Y respecto a lo que puede denominarse uno de los extremos de ese espectro, Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, y Tanguay (2012) citan a Duval (1991) para establecer que fue este autor uno de los que consideró que la argumentación puede ser un obstáculo para el aprendizaje de la demostración. Pues los estudiantes no comprenden fácilmente los requerimientos específicos de la demostración matemática y la confunden con una simple argumentación.

Reid y Knipping (2010) hacen referencia a lo que podemos considerar el otro extremo del espectro, describiendo una corriente en educación matemática que ha dado un enfoque de resolución de problemas a la relación entre argumentación y demostración. Consideran la demostración como el resultado de un proceso en el cual es admisible la argumentación. Entre los autores que respaldan este punto de vista, citan a Douek (2007, 2009) cuya perspectiva de la argumentación ha sido descrita por Reid y Knipping (2010) como “el proceso individual o colectivo de producir un discurso lógicamente conectado, aunque no necesariamente deductivo, acerca de algo” (p158). Según este marco, para Douek la demostración puede ser un tipo de argumentación. En este trabajo adscribimos a esta perspectiva pues es acorde a la naturaleza del estudio, en el cual queremos estimular la producción de demostraciones a partir de la argumentación generada en el contexto de resolución de situaciónes que generen incertidumbre.

2.1.2 DEMOSTRACIÓN Y EGD

Como han señalado Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, y Stevenson (2012) y Leung, y Bolite-Frant (2015) el uso de herramientas ha desempeñado un papel central en el desarrollo de las matemáticas como disciplina y sus procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula. Pues, mencionan que las herramientas han intervenido en muchas ocasiones en la historia de las matemáticas en la génesis de conceptos abstractos. Arzarello et al. (2012) sitúan a los EGD en esa tradición.

Ha sido documentado que la emergencia de los EGD renovó el interés por la enseñanza de la geometría y de la demostración, puesto que estos entornos proporcionan un vínculo entre lo espacio-gráfico y lo teórico (Sinclair, y Robutti, 2013), le dan el acceso al estudiante a una amplia variedad de ejemplos que no son posibles en entornos de papel y lápiz (Marrades y Gutiérrez, 2000) y permiten a los estudiantes plantear y evaluar conjeturas usando una rica variedad de ejemplos y recibiendo retroalimentación inmediata (Da Ponte, 2007).

Estos hallazgos del campo de estudio plantean una perspectiva que nos resulta de particular interés en el presente trabajo: la inserción de los EGD en las aulas y en los temas de investigación de la demostración ha generado nuevos puntos de vista que han desafiado la visión predominante acerca de la demostración y su aprendizaje (Arzarello et al., 2012).

Dentro de esos nuevos puntos de vista consideramos que aportan una visión para nuestro estudio las conceptualizaciones acerca de los "procesos de demostración" (Leung, y Or, 2007) en los que se lleva a cabo la formulación de una conjetura con el apoyo de un EGD y el desarrollo de la respectiva demostración. Contribuyen también a la intención de nuestra investigación estudios como el de Leikin, y Grossman (2013), en el cual los profesores deben transformar enunciados convencionales de demostración de los libros de texto en problemas de exploración e indagación con EGD, para estimular en los estudiantes la producción de demostraciones. Asimismo, vemos relevante la tipología de las funciones de la demostración (de Villiers, 1990), particularmente el aspecto planteado por este autor al considerar que la función explicativa de la demostración puede surgir en diseños de aprendizaje con el uso de EGD que apelen al surgimiento de eventos sorpresivos para los estudiantes durante la construcción y exploración (de Villiers, 1998).

2.1.3 DEMOSTRACIÓN Y FORMACIÓN DE PROFESORES

Conocimientos, creencias y prácticas de los profesores acerca de la demostración, son considerados por Lin, Yang, Lo, Tsamir, Tirosh, y Stylianides (2012) componentes esenciales, los cuales impactan directamente las experiencias de aprendizaje y enseñanza que se viven en las aulas en los niveles de escolaridad básica con respecto a la demostración y argumentación.

Respecto a los conocimientos, Sylianides y Ball (2008) plantean como que “a menos que los profesores tengan una buena comprensión de la demostración, no podemos esperar que puedan promover efectivamente la demostración entre sus estudiantes” (p 309). Y al asunto de cuáles conocimientos acerca de la demostración son relevantes para el profesor, los autores proponen dos aspectos que consideran ellos interrelacionados: los aspectos lógico-lingüísticos de la demostración y los conocimientos acerca de situaciones de demostración. Acerca del primer aspecto estudios como el de Echeverry, Molina, Samper, Perry y Camargo (2012) han señalado las limitaciones en la comprensión de la proposición condicional por parte de los profesores en formación, Stylianides, Stylianides, y Philippou (2007) abordan los problemas de comprensión de los docentes en formación con la lógica que subyace a la demostración por inducción y Goizueta y Planas (2013) plantean los límites de profesores en ejercicio en la comprensión de la estructura de los argumentos. Acerca del conocimiento de situaciones de demostración estudios como el de Furinghetti y Morselli (2011) han ilustrado las dificultades de los profesores con la comprensión de las funciones de la demostración y Martin y Harel (1989) destacan los problemas que tienen estos en comprender el lugar que ocupa la evidencia empírica en los procesos de demostración.

Respecto a las creencias de los profesores acerca de la demostración, probablemente sean estas más influyentes en sus prácticas que sus conocimientos. Philipp (2007) ha planteado que las creencias de los profesores acerca del aprendizaje de las matemáticas tienen un impacto sustancial en la manera en la cual ellos orientan su enseñanza en las aulas. Un hallazgo del trabajo Knuth (2002) es que, si bien los profesores reconocen la importancia de la demostración en las matemáticas, no ocurre lo mismo con el papel de la demostración como herramienta para el aprendizaje de estas. Furinghetti y Morselli (2011) han encontrado que para los profesores la demostración puede tener lugar dependiendo del énfasis formativo que tengan los estudios que cursan los estudiantes (bachillerato científico o en humanidades). Y Steele y Cervello (2012) confirman como una creencia arraigada de los profesores algo que ha sido planteado previamente por Knuth (2002), consideran que la demostración matemática es apropiada para estudiantes de altas capacidades matemáticas y no para todos los estudiantes.

Los investigadores que han estudiado conocimientos, creencias y prácticas acerca de la demostración de profesores en ejercicio (Knuth, 2002; Jones, 1997; Martin y Harel, 1989; Stylianides y Ball, 2008), sugieren que un desarrollo exitoso y seguro del profesor de matemáticas con la demostración, depende de sus experiencias en la construcción de su conocimiento matemático con esta y de la construcción de su conocimiento didáctico al respecto. Los profesores en su formación inicial deben tener la oportunidad de experimentar aproximaciones a la demostración diferentes a las convencionales. Stylianides y Ball (2008) sugieren que los investigadores y los formadores de educadores deben documentarse para organizar e implementar diseños de instrucción que contribuyan a que los futuros profesores desarrollen una sólida comprensión de la demostración.

En la dirección antes señalada es que apuntan trabajos como los de Stylianides y Stylianides (2009), que pretende explotar el conflicto cognitivo para potenciar las comprensiones deductivas de la demostración con respecto a las empíricas, y Zaslavski (2005), en donde se hace uso de la incertidumbre para generar una motivación auténtica en los estudiantes para involucrarse en la demostración. El presente trabajo pretende hacer una contribución en esta dirección.

2.1.4 ESTUDIOS SOBRE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN QUE INCORPORAN LAS NOCIONES DE CONFLICTO COGNITIVO, INCERTIDUMBRE Y NECESIDAD INTELECTUAL.

Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron, y Winicki-Ladman (2012) mencionan que los resultados en el campo de investigación ilustran que la demostración no es percibida como necesaria por muchos estudiantes. Esto ha motivado, por un lado, el desarrollo de estudios con intervenciones de aula en los cuales se ponen en práctica diseños orientados a generar en los estudiantes la visión de la demostración como una necesidad. Por otro lado, la surgimiento de una propuesta teórica en la que se plantea un marco conceptual acerca de la necesidad intelectual (Harel, 1998, 2013) el cual puede ser útil para el estudio de situaciones en las cuales los diseños de instrucción planean la emergencia de la demostración como una necesidad por parte de los estudiantes.

En ese mismo trabajo, Zaslavsky et al. (2012) referencian la existencia de investigaciones, con diseños de intervención en el aula, en las cuales se ha corroborado y ejemplificado el papel del conflicto cognitivo como fuerza motriz para generar en los estudiantes la necesidad de demostrar. Los autores aclaran que conflicto cognitivo e incertidumbre se solapan en sus significados, pero la diferencia entre los términos ha sido discutida y establecida en Zaslavsky (2005). En este estudio discutimos esa diferencia en el marco teórico y en esta sección haremos uso de los términos conflicto cognitivo e incertidumbre según la expresión empleada en la fuente referenciada.

Los estudios de Prusak, Hershkowitz, y Schwarz (2012, 2013) hacen uso del concepto de conflicto cognitivo. Buchbinder y Zaslavsky (2011) y Hadas, Hershkowitz, y Schwarz (2000) hacen uso del concepto de incertidumbre y Stylianides y Stylianides (2009) hacen uso de los conceptos de conflicto cognitivo y necesidad intelectual.

Estos trabajos tienen un elemento en común de relevancia para nuestro estudio. Son reportes de experimentos de enseñanza que incorporan en su diseño el conflicto cognitivo o la incertidumbre, con un papel central para generar en los estudiantes argumentación y necesidad de demostrar. El conflicto cognitivo puede ser usado para que los estudiantes se percaten de las limitaciones de los argumentos empíricos y experimenten la necesidad de demostrar (Stylianides y Stylianides, 2009) o útil para que se involucren en actividades de argumentación que progresivamente van de argumentos apoyados en lo visual a argumentos apoyados en lo deductivo (Prusak et al., 2012, 2013). Asimismo la incertidumbre junto con las exploraciones geométricas en un entorno de geometría dinámica (EGD) contribuyen a que los estudiantes construyan y evalúen argumentos usando su conocimiento geométrico para producir explicaciones deductivas (Hadas et al., 2000) o active la necesidad de la demostración (Buchbinder y Zaslavsky, 2011).

Cabe señalar que otro elemento común de algunos de los trabajos mencionados, de relevancia para nuestro estudio, son los principios de diseño implícitos o explícitos en los experimentos de enseñanza. Uno de estos es la ilustración de que un meticuloso diseño de instrucción puede llevar a los estudiantes a involucrarse en argumentación, guiando el diseño por tres principios: a) crear una situación de conflicto b) generar un entorno colaborativo y c) proveer un dispositivo para poner a prueba las conjeturas (Prusak et al., 2012, 2013). Otro es el papel del EGD para evaluar argumentos o hacer exploraciones que generen en los estudiantes incertidumbre (Hadas et al., 2000; Buchbinder y Zaslavsky, 2011).

2.1.5 LLAMADAS A PROFUNDIZAR EN EL CAMPO

Queremos cerrar esta sección destacando la existencia de llamadas a desarrollar estudios en el campo de la argumentación y demostración con orientaciones específicas.

En los trabajos de Stylianides et al. (2016) y Stylianides y Stylianides (2018) se hace un llamado a desarrollar intervenciones investigativas en el aula que apunten a los problemas claves y persistentes de los estudiantes con la demostración que ya han sido establecidos en numerosos estudios teóricos sobre el tema. Y en los estudios de Durand-Guerrier et al. (2012), Zaslavsky et al. (2012) y Buchbinder y Zaslavsky (2011) se destaca la necesidad de llevar a cabo investigaciones en la cuales se haga uso de la noción de incertidumbre para promover la argumentación, la necesidad de la demostración y el papel de los EGD para promover la incertidumbre.

2.2 TRABAJOS ACERCA DE LA GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

Como hemos mencionado en la introducción, nuestro estudio se desarrolla dentro del campo de la argumentación y la demostración. Específicamente en un curso de geometría tridimensional con el apoyo de un EGD y en un programa de formación inicial de profesores. Por esa razón en esta sección abordamos dos temas: investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional con el apoyo de EGD 3D y la formación de profesores y la geometría tridimensional.

2.2.1 ESTUDIOS EN GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL CON APOYO DE EGD 3D.

La enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional entraña una característica muy específica respecto a la representación de los objetos que se estudian. Parzysz (1988) plantea tres niveles de representación (el objeto matemático de la geometría tridimensional, un modelo físico de éste y un dibujo que lo representa) y muestra que, al bajar de nivel de representación del objeto, se produce necesariamente una pérdida de información respecto al objeto para quien lo estudia. Un dibujo proporciona menos información acerca de un objeto de la geometría tridimensional de la que proporciona un modelo físico. Adicionalmente señaló que los estudiantes tienden a considerar las propiedades del dibujo como propiedades del objeto mismo. Su investigación es previa a la emergencia de los EGD. El trabajo de Gutiérrez (1996), producido en la época en la cual estos ya son relevantes en el panorama investigativo, señala que el uso de software permite a los estudiantes experiencias enriquecedoras para formar mejores imágenes mentales de los objetos de la geometría 3D.

El desarrollo de la investigación en el campo ha arrojado resultados como el que presentan Widder y Gorsky (2013) acerca del uso de un EGD 3D en actividades de enseñanza y aprendizaje, para los autores el uso de un EGD contribuye a que los estudiantes superen sus dificultades de visualización de objetos de la geometría tridimensional disminuyendo en ellos la carga cognitiva (Sweller, Merriënboer, y Paas, 1998). Puede señalarse que los resultados de Gutiérrez y Jaime (2015) puntualizan las dificultades que un EGD 3D contribuye a superar. Entre sus resultados señalan que las falsas imágenes que tenía un estudiante, sujeto de su estudio, fueron eliminadas y que el trabajo con el EGD contribuyó a crear una imagen conceptual más rica y completa de los objetos y relaciones de la geometría tridimensional.

Respecto a la visualización y el estudio de los objetos de la geometría tridimensional con el uso de EGD 3D, un elemento adicional a los ya mencionados es planteado por Mithalal (2009). El autor plantea que un entorno de estos proporciona más información visual que otras representaciones como dibujos o modelos físicos. Sin embargo, es importante que el EGD sea usado para hacer conscientes a los estudiantes de las limitaciones de una visualización del objeto geométrico como una globalidad, para lo cual propone hacer uso de las herramientas de este para llevar a cabo un estudio experimental de las propiedades del objeto representado. Esta posición es respaldada por los resultados de Ferrara y Mammana (2014) y Mammana, Micale, y Pennisi (2010) quienes concluyen que la exploración por parte de los estudiantes de propiedades de un objeto de la geometría 3D con un EGD contribuyó a que fuese evidente para ellos el conflicto entre ver y conocer en las representaciones de los objetos de la geometría tridimensional.

Un aspecto de interés para nuestro trabajo es el planteado por Mithalal (2009) cuando afirma que, en la geometría tridimensional, las inferencias a partir de elementos visuales de los objetos y relaciones no son tan inmediatas como pueden serlo en la geometría plana. Y, por lo tanto, la exploración de objetos y relaciones de la geometría tridimensional con las herramientas de los EGD 3D debe ser con más frecuencia guiada con conocimientos teóricos de la geometría. Esta situación hipotéticamente proporciona un contexto ideal para el diseño y desarrollo de actividades que promuevan la argumentación y demostración en los estudiantes.

2.2.2 FORMACIÓN DE PROFESORES Y GEOMETRÍA TRIDIMENSIONAL

Sinclair et al. (2016) plantean que es difícil para los estudiantes extraer información matemática relevante de representaciones planas de objetos tridimensionales. Por lo cual, se requieren intervenciones didácticas bien concebidas y planificadas que hagan uso de distintas formas de representar objetos y situaciones. Sugieren al respecto, que esta dificultad es superable mediante actividades de enseñanza y aprendizaje que hagan uso de diferentes representaciones dentro de las cuales están las tradicionales y las disponibles con los desarrollos tecnológicos actuales. En su análisis afirman que las actividades de enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional no se desarrollan en la escuela, en buena parte porque los profesores no están familiarizados con este tipo de actividades y con el contenido geométrico específico de la geometría tridimensional.

Las dificultades de los profesores con la geometría tridimensional son corroboradas por estudios como los de Moore-Russo y Schroeder (2007) y Gonzato, Godino, y Contreras (2011) quienes señalan que los profesores en formación tienen dificultades para visualizar y para desenvolverse en geometría tridimensional. Sugieren que esto puede conllevar dificultades para la enseñanza de conocimientos de esta naturaleza en su ejercicio profesional en las aulas. Sgreccia, Amaya, y Massa (2012) expresan en las conclusiones de su estudio con profesores en ejercicio, que los participantes perciben que en su formacion inicial hubiesen querido tener más experiencias con el uso de materiales concretos y tecnología, en el aprendizaje de la geometría tridimensional.

Un resultado que se puede situar en la misma línea de lo anteriormente descrito, es lo reportado por Mullis, Martin, y Foy (2008), quienes señalan que se indagó a los profesores de estudiantes que participaron en el estudio TIMSS acerca de su preparación para la enseñanza de los diferentes temas de la matemática escolar. En Colombia, para grado 4, el porcentaje de estudiantes con profesores que se sentían muy bien preparados para enseñar geometría fue de 68% y en grado 8 fue de 83%. Al preguntar tema por tema, el porcentaje de estudiantes colombianos que tenían profesores que se sentían muy bien preparados para enseñar el tema "Relación entre formas 3D y 2D" en grado 4 fue de 51%. Éste es el porcentaje más bajo en relación con los siete temas de geometría por los que se preguntó[2]. Para grado 8 el porcentaje de estudiantes que tenían profesores que se sentían muy bien preparados para enseñar "Relación entre formas 3D y 2D" fue 64%, el más bajo también en todos los temas de geometría seleccionados.

Estos resultados investigativos ilustran la relevancia de atender el llamado expresado Sinclair y Robutti (2013) a que los trabajos de investigación apoyen al profesor en el desarrollo de nuevas tareas apropiadas a los EGD y que como mencionan Laborde y Laborde (2008) aprovechen las potencialidades que ofrecen los entornos.

2.3 INVESTIGACIÓN DE DISEÑO

La principal razón para enlazar investigación y diseño, señala Bakker (2018) es procurar cerrar la brecha existente entre la práctica y la teoría en educación. Es decir, la naturaleza de la investigación de diseño es esencialmente práctica desde su origen. En esta dirección, parece pertinente citar a Plomp (2010), quien propone esta definición de investigación de diseño:

> como el estudio sistemático de diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas -tales como programas, estrategias y materiales de enseñanza-aprendizaje, productos y sistemas- que solucionen tales problemas, que también apunta al avance de nuestro conocimiento acerca de las características de esas intervenciones y de sus procesos de diseño y desarrollo. (p. 9)

La definición anteriormente citada presenta una imagen global de la investigación de diseño que puede complementarse con las cinco características de este tipo de investigación planteadas por Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer, y Schauble (2003), las

[2] Los demás temas eran: "Comparación y dibujo de ángulos", "Propiedades elementales de formas geométricas comunes", "Áreas y perímetros", "Estimación de áreas y volúmenes", "Uso de sistema informal de coordenadas para localizar puntos en el plano" y "Reflexiones y rotaciones".

cuales son recurrentemente citadas en los trabajos que describen este tipo de investigación:

1. El propósito de los experimentos de diseño es el desarrollo de teorías acerca de los procesos de aprendizaje y de los medios diseñados para apoyar ese aprendizaje.

2. Es altamente intervencionista. A diferencia de la observación naturalista, interviene constantemente sobre el contexto que observa.

3. Los experimentos de diseño tienen dos facetas, la prospectiva y la reflexiva. Se hipotetiza cómo se desarrollará el aprendizaje y, una vez aplicado el diseño, se evalúa y reconstruye lo hecho.

4. Es iterativa, porque, una vez evaluadas las conjeturas iniciales, se reformulan o refutan y deben volverse a aplicar nuevas secuencias de instrucción.

5. La teoría que desarrolla el experimento de diseño tiene un arraigo pragmático.

La declaración de la naturaleza de la investigación, la definición aportada y las características descritas encuadran con la intención que nos hemos propuesto en el presente estudio. Como hemos señalado, queremos hacer el abordaje investigativo de unas inquietudes originadas en una preocupación docente respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la demostración en un contexto de geometría tridimensional.

Respecto a los tipos de investigación de diseño existentes, Prediger, Gravemeijer, y Confrey (2015) proponen una clasificación. Para los autores son dos tipos de investigación, en ambos casos los productos de la investigación son teóricos y prácticos. La diferencia está en el énfasis y tiempo invertido para la generación de cada tipo de producto. En uno de los casos, la investigación está orientada principalmente a usos prácticos, los resultados son productos curriculares probados para su uso. En el otro caso, la investigación está orientada a generar teoría acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los resultados de esta investigación son teorías locales y casos paradigmáticos de procesos de enseñanza y aprendizaje que resultan significativos para la comunidad.

Por su parte Plomp (2010) propone clasificar las investigaciones de diseño en dos tipos: estudios de desarrollo, cuyo propósito principal es desarrollar soluciones a problemas educativos con base en la investigación, y estudios de validación, cuyo propósito principal es el desarrollo o la validación de una teoría. En los dos tipos se desarrolla una intervención educativa con un sistemático diseño para la recolección de información.

La caracterización que hacen los autores no es excluyente y por el contrario parecen referirse a una clasificación con base en las mismas características o elementos afines que pueden integrarse como lo representamos en la Tabla 2.1 Debemos señalar en este punto, que por la naturaleza del presente estudio, consideramos que se encuentra dentro de los estudios de validación, pues se pretende poner a prueba un diseño instruccional con base en elementos teóricos provenientes del campo de la educación matemática acerca de la argumentación y demostración en un contexto específico de enseñanza y aprendizaje de la geometría tridimensional.

Tabla 2.1 Tipos de investigación de diseño

Denominación	Estudios de desarrollo	Estudio de Validación
Orientación	Práctica	Teórica
Propósito	Solucionar problemas educativos	Desarrollar o validar una teoría
Producto	Diseños curriculares probados, listos para su uso	Teorías locales probadas con casos significativos de aprendizaje y enseñanza

Respecto a lo que es la investigación de diseño nos parece apropiado lo propuesto por Bakker (2018) quien afirma que la investigación de diseño no tiene el estatus de una metodología, no es tan particular como un método y no se restringe a una estrategia investigativa pues en una investigación de diseño pueden ser usadas distintas estrategias (encuesta, estudio de caso, experimento). Entonces sugiere adoptar la designación que muchos investigadores le han dado a la investigación de diseño como un marco metodológico, en el cual se utilizan un conjunto de estrategias con cierto grado de afinidad.

Lo anteriormente descrito acerca de la investigación de diseño, es probablemente el origen del calificativo que Prediger et al. (2015) le otorgan como una aproximación debatida. Pues la principal crítica, señalan los autores, es que la investigación de diseño no tienen un método de investigación bien definido. Ellos mismos señalan que el segundo tipo de investigación descrito (ver tabla 2.1) aplica una variedad de métodos de recoleccion y análisis de los datos. Punto de vista que ya dijimos también sostiene Bakker (2018).

Esta característica de la investigación de diseño impone un reto a la presentación de los resultados de un estudio desarrollado bajo esa perspectiva. El reto es hacer suficientemente visibles al lector los elementos que permitan evaular la validez y confiabilidad de las conclusiones derivadas del estudio. Una definición simplificada de estos dos elementos la aportan Bakker y van Eerde (2015). Validez es sí efectivamente se midió lo que se deseaba medir y confiabilidad sí los hallazgos son independientes del investigador. Respecto a estos elementos, esperamos aportar en el presente trabajo la suficiente información para que, como mencionan Prediger et al. (2015), las inferencias realizadas sean trasparentes. Es decir, puedan las conclusiones ser rastreadas desde los datos y los análisis.

Por último es importante destacar una descripción hecha por Prediger et al. (2015) respecto a la investigación de diseño. Los autores mencionan que el interes de estas investigaciones es describir el diseño de un entorno de aprendizaje como una manera de hacer comprensibles procesos de innovación en enseñanza y aprendizaje. Esa descripción, a juicio de los autores, puede tomar la forma de una teoría local de instrucción. Pues la investigación de diseño más que describir “el qué funciona” describe “el cómo funciona”.

CAPÍTULO 3

MARCO TEÓRICO

Desarrollamos la presente sección con base en los planteamientos de Bakker y van Eerde (2015) acerca de la formulación del marco teórico para una investigación de diseño. Según estos autores, quienes a su vez se apoyan en las consideraciones de di Sessa y Cobb (2004), en su perspectiva de la investigación de diseño se consideran los siguientes marcos de referencia: marco teórico orientador, marco teórico para la acción y teorías de aprendizaje de dominio específico.

En la conceptualización de Bakker y van Eerde (2015), el marco teórico orientador proporciona perspectivas generales para conceptualizar aspectos del aprendizaje, la enseñanza y el diseño instruccional. Sin embargo, rara vez brinda detalladas prescripciones para el diseño experimental específico, por lo que se requiere un segundo nivel de fundamentación. El marco teórico para la acción provee algunos focos para direccionar los ambientes de aprendizaje y especificar acciones para la enseñanza. Pero no da una perspectiva detallada sobre el aprendizaje de cierto contenido concreto. Las teorías de aprendizaje del dominio específico aportan esta perspectiva detallada y concreta. Presentamos a continuación nuestras elecciones para estos niveles de elaboración teórica.

Como marco teórico orientador elegimos un enfoque del *constructivismo social* (Ernest, 2010). En el marco teórico para la acción, optamos por la *teoría de la mediación semiótica* propuesta por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). Y para la teoría de aprendizaje de dominio específico asumimos los constructos de *incertidumbre* (Zaslavsky, 2005), *necesidad intelectual y justificación epistemológica* (Harel, 2013, 2018). Con el constructivismo social nos planteamos un marco general sobre la enseñanza y el aprendizaje. Con la teoría de la mediación semiótica enmarcamos las acciones de la profesora del curso de Geometría del Espacio en donde se aplicó el diseño y el papel de los artefactos en el experimento de enseñanza. Y los conceptos de incertidumbre, necesidad intelectual y justificación epistemológica orientan específicamente el diseño de las tareas. En las siguientes secciones desarrollamos las ideas relevantes para esta investigación acerca de cada uno de los marcos.

3.1 MARCO ORIENTADOR: CONSTRUCTIVISMO SOCIAL

El constructivismo social es una postura epistemológica acerca del conocimiento (Thompson, 2014) en la cual se asume que la interacción social precede al aprendizaje individual y que en la observación de este aprendizaje es de gran relevancia el estudio de las interacciones sociales, la comunicación y la producción de signos inherente a esta comunicación. De acuerdo con Thompson (2014), el término constructivismo social fue introducido en la educación matemática por Ernest (1991, 1994a, 1998).

Un interrogante planteado por Ernest (1994b), el cual es una preocupación central para el diseño y análisis de tareas en educación matemática, es cómo conciliar el estudio del conocimiento construido individualmente por el estudiante con la naturaleza social del aprendizaje de las matemáticas escolares. Esta es una inquietud que compartimos con el autor, pues queremos proponer un diseño de tareas que articule dos aspectos: unas hipótesis acerca del aprendizaje individual de objetos y relaciones de la geometría 3D y un conjunto de condiciones de interacción social en el aula necesarias para favorecer tal aprendizaje.

Para atender este interrogante, adoptamos un enfoque complementario del constructivismo social, tal como proponen Cobb (1994) y Cobb y Bauersfeld (1995), quienes enuncian la posibilidad de estudiar el aprendizaje integrando lo que ellos denominan perspectivas psicológica y sociológica. En palabras de los autores, "cada una cuenta la mitad de una buena historia". De esta manera, retomamos algunos de los aspectos relevantes de la fundamentación que aporta Vygotsky (Ernest, 1994b, 2010 y Lerman, 2006) sobre el constructivismo social, así como la perspectiva ofrecida por Cobb (1994) acerca del aprendizaje.

De los elementos planteados por Ernest (2010), dos son relevantes para nuestro marco: el papel del lenguaje y la interacción social en el aprendizaje. Estos guardan relación con el planteamiento de Lerman (2006), quien menciona la noción de mediación como una contribución de Vygostky a retomar en el constructivismo social, pues para permitir la construcción de significado, diferentes tipos de herramientas (físicas y simbólicas) actúan como mediadoras entre el individuo y su entorno. Dentro de estas herramientas el lenguaje tiene un papel destacado.

Lerman (2006) señala que, para Vygotsky, la cognición individual se origina en la interacción social. Lo anterior destaca para nosotros el origen social del aprendizaje como aspecto importante que complementamos con la definición propuesta por Cobb (1994):

> El aprendizaje es un proceso de organización autónoma y un proceso de enculturación que ocurre mientras se participa en prácticas culturales, frecuentemente interactuando con otros. (p.18)

En esta caracterización el autor considera, además del aspecto social del aprendizaje, la organización del conocimiento de manera autónoma por el individuo que aprende.

Adicionalmente cabe mencionar que Ernest (2010) deriva de los planteamientos teóricos de lo que él denomina simple constructivismo (2) y del constructivismo social (7 y 8) unas implicaciones para la práctica educativa. Dice el autor:

> (2) La identificación de errores y concepciones equivocadas de los estudiantes y el uso de técnicas de enseñanza diagnostica y de conflicto cognitivo para intentar superarlas.
>
> …
>
> (7) La importancia de todos los aspectos del contexto social y las relaciones interpersonales, especialmente profesor-estudiante y estudiante-estudiante en situaciones de aprendizaje que incluyen negociación, colaboración y discusión.

> (8) El papel del lenguaje, textos y semiosis en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (Ernest, 2010, p. 45-46).

Las implicaciones anteriormente descritas nos proporcionan una buena síntesis de los aspectos que nos interesa retomar del enfoque del constructivismo social que hemos adoptado como marco teórico orientador. Las implicaciones 7 y 8 nos sitúan en lo que es central en el diseño de la secuencia de instrucción y en nuestro análisis de la información en aspectos como la interacción social y las producciones de los estudiantes. Estos últimos, a través de conceptos como la mediación y signos que producen estudiantes y profesora, son aspectos abordados en la sección del marco teórico para la acción. La implicación 2 nos presenta elementos importantes para el diseño de las tareas y para el análisis del aprendizaje, que serán abordados en la sección marco de dominio específico. En esta ilustraremos la relación entre lo que Ernest denomina conflicto cognitivo y los constructos, por nosotros empleados, de incertidumbre y necesidad intelectual.

3.2 MARCO PARA LA ACCIÓN: TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Según Maracci y Mariotti (2013), la teoría de la mediación semiótica (TMS) es una perspectiva arraigada en la tradición vygotskiana que combina un enfoque semiótico y uno educativo “en la cual se aborda específicamente la relación entre los significados apropiados por los estudiantes a través del uso de artefactos y el significado matemático evocado por el uso de artefactos por parte de un experto” (p. 21). En nuestra interpretación, la TMS propone la construcción de significado matemático en el aula mediado por el uso de artefactos y un representante experto de la comunidad matemática, encarnado por el profesor.

Dos presupuestos son centrales en la TMS (Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008). Uno es la consideración de que el aprendizaje está mediado por artefactos y por la interacción social. El aprendizaje se produce gracias a la construcción de significado que lleva a cabo el estudiante, en interacción social (conversación entre pares o con el profesor), cuando los signos con los que expresa la relación entre el artefacto y las tareas evolucionan hacia signos con los que expresa la relación entre el artefacto y los conocimientos matemáticos de la cultura de referencia.

El otro presupuesto de la teoría, destacado por Mariotti (2013), es que el uso de los artefactos no es suficientemente transparente para los estudiantes y requiere ser mediado por el profesor, quien debe lograr un desarrollo de formas específicas de mediación. Al considerar tal mediación, su planteamiento ofrece, además del marco de interpretación para el aprendizaje, un modelo de instrucción con el uso de artefactos. La teoría se desarrolla alrededor de dos núcleos centrales: la noción de potencial semiótico del artefacto y la noción de ciclo didáctico.

El *potencial semiótico* consiste en explotar la utilidad del artefacto, es considerado un elemento a priori indispensable para el diseño de la enseñanza y el aprendizaje. En una interpretación nuestra y orientada hacía lo que nos interesa en este trabajo, para reconocer el potencial semiótico de un artefacto es necesario su análisis en el desarrollo de tareas específicas. Este análisis involucra los aspectos epistemológicos y cognitivos, así como ocasionalmente la perspectiva histórica.

El análisis del potencial semiótico del artefacto requiere que el experto sea conocedor de las potencialidades en términos de la relación entre los significados personales que emergen en el desarrollo de la actividad y el significado matemático evocado que puede ser reconocido por un experto. Esto implica:

- Planear situaciones didácticas donde los estudiantes afronten tareas para las cuales movilicen esquemas específicos de utilización del artefacto y consecuentemente generen significados personales.

- Generar interacciones sociales con el objetivo de hacer que los significados personales que han emergido durante la actividad apoyada en el artefacto evolucionen hacia los significados matemáticos que constituyen los objetivos de enseñanza.

Respecto del *ciclo didáctico*, el profesor diseña las circunstancias para que se produzca la mediación semiótica en torno al uso del artefacto. El modelo de enseñanza y aprendizaje está centrado en este uso. En este marco, una secuencia de instrucción consiste en una iteración de ciclos de actividades de aprendizaje en los que se llevan a cabo diferentes acciones orientadas a la evolución de los signos personales en signos matemáticos (Bartolini Bussi y Martiotti, 2008). Cada uno de esos ciclos tiene la misma estructura: actividades con el artefacto, producción individual de signos y producción colectiva de signos. Cabe aclarar que los ciclos mencionados aluden a la actividad de aprendizaje concebida en la TMS y son independientes de los ciclos de la investigación de diseño descritos más adelante.

Mariotti (2013) plantea que un ciclo comienza con el desarrollo de la tarea con el artefacto. La emergencia de significados asociados al artefacto se denomina despliegue del potencial semiótico del artefacto; está emergencia se evidencia con palabras, trazos o gestos asociados al uso del artefacto. La producción de signos individuales debe ser promovida a través de actividades semióticas, muchas de ellas relacionadas con la producción de textos y reportes personales de experiencias, incluyendo dudas y preguntas que surgen ¿Cómo hacer que los significados personales que surgieron en el desarrollo de la tarea, a través del uso de cierto artefacto, se conviertan en significados matemáticos? La discusión colectiva constituye el núcleo del proceso de mediación semiótica. El principal objetivo del profesor es promover el desplazamiento de los signos personales hacia signos matemáticos, teniendo en cuenta las contribuciones individuales y explotando las potencialidades semióticas que se producen con usos particulares del artefacto.

Los constructos potencial semiótico del artefacto y ciclo didáctico son para nosotros las contribuciones más relevantes de la Teoría de la Mediación Semiótica. Complementan los aportes de la teoría de Vygotsky que mencionamos, en el marco orientador, como importantes para nuestra perspectiva del constructivismo social. Los constructos nos permiten materializar esos aportes en aspectos concretos del diseño de tareas, incorporando a éste las implicaciones 7 y 8 señaladas por Ernest (2010) y mencionadas en la sección 3.1.

Los aportes mencionados se incorporan en la formulación de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje en el diseño de las tareas y juegan un papel relevante en el análisis de las trayectorias reales de aprendizaje como herramientas para contrastar las hipótesis puestas en juego en el diseño de la secuencia de instrucción con los resultados de la implementación.

3.3 MARCO DE DOMINIO ESPECÍFICO: INCERTIDUMBRE, NECESIDAD INTELECTUAL Y JUSTIFICACIÓN EPISTEMOLÓGICA.

En la caracterización de aprendizaje que planteamos en la sección 3.1 enunciamos que éste es una "organización autónoma del conocimiento y un proceso de enculturación". Aludimos también a la implicación (2) señalada por Ernest (2010) que sugiere el uso de técnicas de conflicto cognitivo para superar errores o concepciones equivocadas de los estudiantes. A continuación, describimos cómo interpretamos la incorporación de estos conceptos en las tareas propuestas a los estudiantes.

La organización autónoma del conocimiento por parte de los estudiantes requiere la implicación individual en las acciones de aprendizaje, la cual exige para nosotros dos condiciones: el cuestionamiento acerca del estatus epistemológico del conocimiento del que se dispone (producción de conflicto cognitivo) y el despliegue de una búsqueda de respuestas en un cuerpo de conocimiento. Encontramos estas dos condiciones incorporadas en el concepto de necesidad intelectual de Harel.

Para Harel (2013), la necesidad intelectual se presenta cuando una situación *S* [en nuestro caso la tarea propuesta a la clase] genera un estado de perturbación en el individuo al enfrentarlo a algo que es incompatible con el conocimiento que tiene o que es irresoluble con este conocimiento. La situación *S* impulsa a la persona a buscar un equilibrio mediante una nueva pieza de conocimiento *C*. Si tiene éxito en conseguir la pieza de conocimiento que le permita salir del estado de perturbación, quien aprende puede ver *S* como la razón del surgimiento de C y se produce entonces la justificación epistemológica.

Nuestra interpretación de la conceptualización expresada en Harel (2018) es que si el estudiante construye, o tiene éxito en la búsqueda de esa pieza de conocimiento C y reconoce cómo ese conocimiento resuelve la situación S a la que se ha enfrentado, entonces ha construido una justificación epistemológica para ese conocimiento C. El estudiante experimenta intensamente la necesidad intelectual y, si esta se resuelve satisfactoriamente para él, se produce la justificación epistemológica.

3.3.1 ESTADO DE PERTURBACIÓN, CONFLICTO COGNITIVO, INCERTIDUMBRE

Harel (2013) alude en su definición de necesidad intelectual a "un estado de perturbación" el cual podemos asociar con la mención al conflicto cognitivo que ya hemos hecho. En la búsqueda de consistencia con el que hemos establecido como marco teórico orientador, que concede especial relevancia a la interacción social, nos encontramos con el concepto de incertidumbre (Zaslavsky, 2005).

Zaslavsky (2005) plantea la *incertidumbre* como un término que expresa el estado de indecisión, duda, perplejidad que experimenta un individuo en una situación de aprendizaje al enfrentarse a un evento inesperado, para el cual no tiene una explicación. La incertidumbre surge en la interacción social, cuando la resolución de un problema enfrenta a los estudiantes a una situación que es incompatible con su actual conocimiento o no es resoluble con éste. Es en ese momento donde se produce el cuestionamiento acerca del estatus epistemológico del conocimiento que se tiene.

Compartimos dos aspectos esenciales del planteamiento de Zaslavsky (2005). Uno, la influencia de la incertidumbre para movilizar el aprendizaje. Y dos, la inclusión de la interacción social como central para producir incertidumbre, a diferencia de la tradicional designación psicológica de conflicto cognitivo descrita por Zaslavsky (2005), según la cual no es necesaria la interacción social para que este conflicto se produzca. Entendemos entonces acá el "estado de perturbación" que menciona Harel como incertidumbre y las expresiones de ésta las precisamos a continuación.

3.3.2 EXPRESIONES DE INCERTIDUMBRE

Para poder identificar evidencias de cuándo se produce la incertidumbre, consideramos necesario precisar a qué aludimos cuando mencionamos la duda y asimismo decidimos referirnos a sorpresa en lugar de perplejidad, en la definición de incertidumbre. Perplejidad en el lenguaje común es entendida como sinónimo de sorpresa. En el diccionario de la RAE es descrita como "irresolución, confusión, duda de lo que se debe hacer en algo" y no es mencionada la sorpresa. Para evitar ambigüedades en la interpretación hablamos de duda y sorpresa como expresiones de incertidumbre y delimitamos estos dos términos.

En primer lugar, respecto a la duda, como está definida en el diccionario filosófico de Ferrater (1964), es un "estado de suspensión del juicio". La asumimos como una actitud en la cual no hay una carencia de creencias[3] sino una indecisión con respecto a las creencias. Dicha actitud moviliza en el individuo la búsqueda de certeza. La conceptualización coincide con lo expresado por Peirce (1988), quien afirma que "la duda es un estado de inquietud e insatisfacción del que luchamos por liberarnos y pasar a un estado de creencia".

La génesis de la duda está en "exponerse a creencias diferentes de las propias lo que permite a los participantes ver sus creencias bajo una nueva luz; la interacción social en el medio escolar genera esta exposición." (Bendixen, 2002, p. 196). Desde ese punto de vista, la duda como manifestación de incertidumbre se activa y manifiesta en la interacción social. Este estado en el individuo es evidenciable cuando

[3] En el uso común la palabra creencia está asociada a convicciones sin base racional. Acá la usamos para ser consistentes con la literatura consultada en inglés en la cual usan la palabra "belief". Tomando en consideración que Spector (2012) menciona que el término creencia ha sido abordado desde la filosofía, la epistemología y la sicología cognitiva, sin que exista una clara definición al respecto. Para nosotros serán la creencia o las creencias, convicciones de los individuos acerca de aspectos particulares del conocimiento matemático escolar.

lo expresa en la conversación por cuestionamiento u objeción que hace de la información con la cual se está confrontando y que lo motiva a una búsqueda por salir de ese estado.

En segundo lugar, respecto a la sorpresa las manifestaciones de esta han sido establecidas en los estudios clásicos de lenguaje corporal. Ekman (2003) las describe como: ojos más abiertos de lo normal, cejas levantadas y mandíbula caída. Por su parte, Macedo et al. (2012) mencionan las exclamaciones verbales explícitas de sorpresa. Así que en el presente estudio consideramos la sorpresa, como una manifestación perceptible de incertidumbre, como una emoción evidente a través de expresiones faciales o verbalizaciones de los individuos que lleva a estos a indagarse por las causas de lo que ha producido la sorpresa.

Hemos mencionado que la duda moviliza en el individuo la búsqueda de certeza y la sorpresa promueve la indagación en las causas del fenómeno sorpresivo. Esto nos lleva a considerar el vínculo de la duda y la sorpresa con el aprendizaje y la búsqueda de certidumbre en un cuerpo de conocimientos establecidos. Estas consideraciones pueden ponerse en perspectiva de lo dicho por Peirce (1988):

> Algunos filósofos han imaginado que para iniciar una indagación era sólo necesario proferir una cuestión, oralmente o por escrito, ¡E incluso nos han recomendado que empecemos nuestros estudios cuestionándolo todo! Pero el mero poner una proposición en forma interrogativa no estimula a la mente a lucha alguna por la creencia. Tiene que ser una duda viva y real, y sin esto toda discusión resulta ociosa.
>
> (Recuperado de: https://www.unav.es/gep/FixationBelief.html el 12 de marzo de 2017).

Lo anterior destaca un aspecto relevante: la duda puede movilizar la búsqueda epistémica, pero generarla no es resultado natural de formular preguntas o cuestionamientos cualesquiera, es necesario construir unas circunstancias (específicas de instrucción en nuestro caso) para que se produzca.

Ya mencionamos que la sorpresa ha sido estudiada en una perspectiva del aprendizaje que considera entre sus funciones esenciales la de instigadora de búsqueda epistémica. En la descripción que presentan Macedo, Cardoso, Reisenzein, Lorini, y Castelfranchi (2009) afirman que cuando los procesos mentales y acciones en curso se ven interrumpidos por el evento sorpresivo esto puede generar curiosidad acerca de la naturaleza y causas del evento, lo que representa un proceso espontaneo de búsqueda epistémica.

Las conceptualizaciones de duda y sorpresa presentadas tienen elementos comunes que son de utilidad en nuestro estudio. Los individuos tienen siempre creencias, convicciones o esquemas respecto a las situaciones y la acción de la duda, la sorpresa o de ambas es poner en cuestionamiento esas creencias, convicciones o esquemas y generar un proceso de búsqueda de: certeza, causalidad, explicación, nuevos esquemas. Lo que Macedo et al. (2009) han denominado búsqueda epistémica encuadra para nuestro estudio con la conceptualización de Harel (2013, 2018) acerca de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

3.3.3 TIPOS DE NECESIDAD INTELECTUAL, ARGUMENTACIÓN PRODUCTIVA Y JUSTIFICACIÓN EPISTEMOLÓGICA.

En su conceptualización de necesidad intelectual, Harel (2013) menciona cinco tipos de ésta: necesidad de certidumbre, necesidad de causalidad, necesidad de cálculo, necesidad de comunicación y necesidad de estructura. Para los fines de este estudio consideraremos relevantes las necesidades de certidumbre y de causalidad por estar asociados a la generación de incertidumbre.

Siguiendo a Harel, la necesidad de certidumbre es el deseo humano natural de establecer si una conjetura es verdadera y la necesidad de causalidad expresa la situación en la cual un individuo encuentra que una proposición es verdadera y quiere explicarse la causa de ello. Son de especial interés para nosotros la expresión de estos dos tipos de necesidad porque son las que consideramos más susceptibles de ser evidenciadas en las interacciones a que den lugar el desarrollo de las tareas.

En las interacciones que se producen en el desarrollo de una tarea suponemos que la necesidad intelectual se evidencie como argumentación por parte de los estudiantes. Interpretamos la argumentación en el sentido de Douek (2007) como el proceso por el cual se produce un discurso lógicamente conectado -aunque no necesariamente deductivo- acerca de algún asunto. Y consideraremos *argumentación productiva* cuando la intención de esta sea heurística, a la manera en la cual la plantea Duval (1999), es decir, orientada a resolver un problema con independencia de las creencias personales de quién argumenta, a diferencia de la que el autor denomina argumentación con intención retórica en la cual el propósito es meramente persuadir al interlocutor.

Introducimos esta noción de argumentación productiva para evidenciar la producción de necesidad intelectual y de justificación epistemológica. Pues estas deben expresarse discursivamente para poder afirmar inequívocamente por nuestra parte que se han producido. La argumentación permite evidenciar si se alude al trozo de conocimiento C que menciona Harel (2013, 2018) y dentro de esta argumentación existen indicios de sí para el estudiante es claro que esa pieza de conocimiento resuelve la situación S planteada, expresando su satisfacción con la solución lograda, para poder concluir que se ha producido la justificación epistemológica.

En la figura 3.1 presentamos un esquema de los conceptos del marco teórico y en la figura 3.2 una diagrama de flujo de lo que podría ser el desarrollo de una tarea enmarcado en la conceptualización descrita en este capítulo.

Figura 3.1 Esquematización de los conceptos del marco teórico

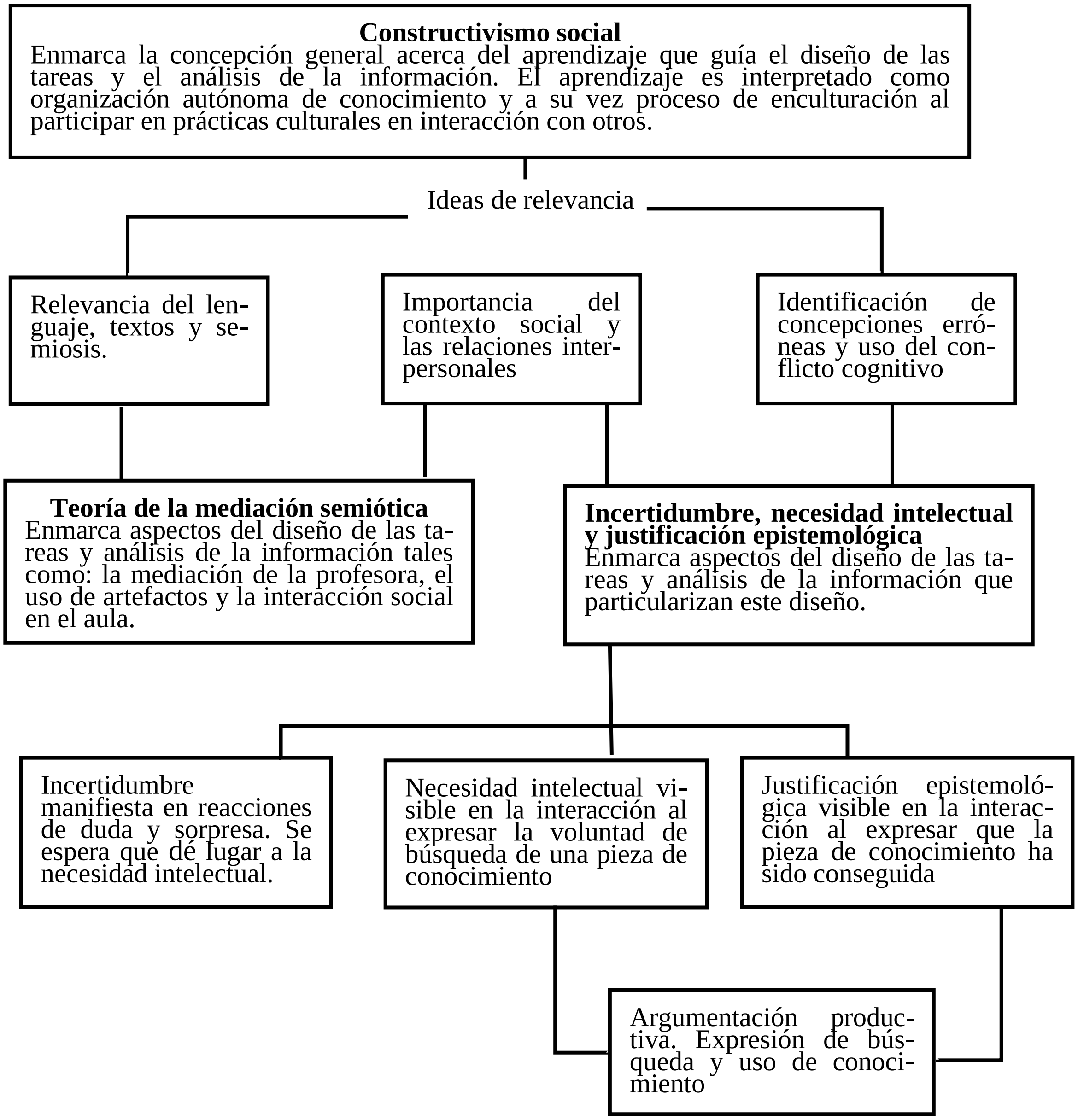
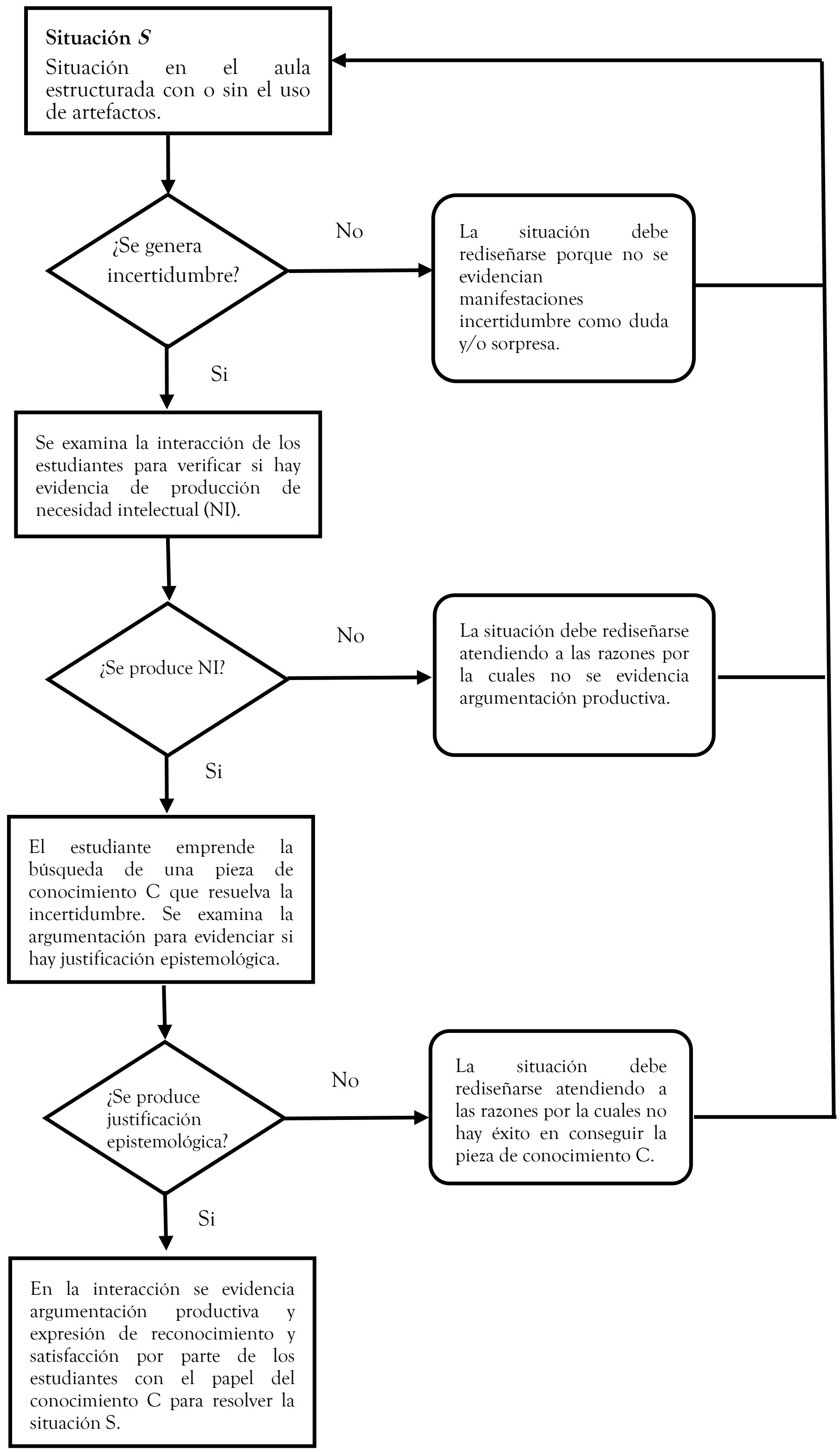


Figura 3.2 Diagrama de flujo de una posible actuación del marco teórico de dominio específico.



CAPÍTULO 4

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación tiene como objetivo general determinar aspectos relevantes a incorporar en un diseño de tareas en geometría 3D con el uso de geometría dinámica, que estimulen la generación de incertidumbre y la producción de necesidad intelectual en los estudiantes. Para atender a este propósito desarrollamos una investigación de diseño (Bakker y van Eerde, 2015). En palabras de Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer, y Schauble (2003):

> Prototípicamente, los experimentos de diseño implican una "ingeniería" de una particular forma de aprendizaje y un estudio sistemático de esas formas de aprendizaje por el contexto definido por los medios que soportan el aprendizaje. (p.1)

En el caso de la presente investigación, la "ingeniería" que mencionan los autores está inspirada en las ideas procedentes del campo de la educación matemática que han sido expuestas en el marco teórico. Estas ideas las hemos puesto a prueba de manera hipotética en nuestro diseño. A partir de las mismas, hacemos un análisis de lo que ocurre en el aula, lo que los autores denominan "unas formas particulares de aprendizaje".

De acuerdo con la metodología de las investigaciones de diseño, la nuestra está estructurada en tres fases (Gravemeijer y Cobb, 2013): preparación, experimento y análisis retrospectivo. Estas fases engloban el conjunto de nuestro diseño como se ilustra en la figura 4.1, en la que $\mathbb{P}$ representa la preparación del experimento, $\mathbb{E}$ la realización del experimento en su conjunto y $\mathbb{A}$ el análisis retrospectivo global del diseño implementado. Los autores mencionan en el desarrollo de la investigación de diseño la existencia de microciclos y macrociclos. Respecto a lo que constituye cada uno, nuestra interpretación es que el microciclo designa el ciclo de formular unas hipótesis de aprendizaje, ponerlas en ejecución con un grupo de aprendices mediante una tarea y hacer un análisis sobre la marcha de los resultados de la aplicación. Y el macrociclo designa el conjunto de las tareas de un experimento al final de las cuales se hace un análisis retrospectivo global de todo el experimento de enseñanza. En palabras de Gravemeijer y Cobb (2013):

> Un experimento de diseño completo y su subsecuente análisis retrospectivo, constituyen juntos un gran macrociclo de diseño y análisis. (p. 101)

En nuestra investigación los microciclos corresponden a cada una de las tareas y, de acuerdo con la descripción de los autores, el macrociclo corresponde al experimento en su conjunto puesto que el análisis retrospectivo global con el conjunto de los datos se hizo al finalizar este. Nosotros desarrollamos un proceso en el cual hicimos tres aplicaciones de un grupo de tareas, con tres grupos de estudiantes diferentes. Así que para dar un nombre a cada una de las aplicaciones que se hicieron del conjunto de tareas con cada uno de los grupos de estudiantes, las hemos denominado ciclos.

El experimento tuvo tres ciclos en su aplicación. Este inicia con una preparación $\mathbb{P}$ de todo el experimento que se materializa con la ejecución del primero de los ciclos. En cada ciclo se puso en práctica un proceso de preparación *p* de la ejecución *e* de las tareas propuestas y un análisis *a* posterior a la aplicación de las tareas, que sirve para tomar decisiones sobre cambios necesarios en la preparación y ejecución del siguiente ciclo. Finalizada esta aplicación de los tres ciclos, que para nosotros constituyeron todo el experimento $\mathbb{E}$, con el conjunto de los datos recolectados llevamos a cabo el análisis retrospectivo global A. El análisis que se reporta en el capítulo 6 de la presente memoria abarca el resultado de los análisis posteriores a la realización de cada tarea y del análisis retrospectivo global. Lo anterior es lo que queremos ilustrar con la figura 4.1.

La figura, como todo diagrama, esquematiza el proceso dejando de lado muchos aspectos. Por ejemplo, la preparación $\mathbb{P}$ de todo el experimento $\mathbb{E}$ no es algo que queda consolidado una vez se formula puesto que en los *p* de cada uno de los ciclos esta preparación se modifica y enriquece. Y, $\mathbb{A}$ análisis global del experimento es el resultado de cada uno de los *a* en los tres ciclos, junto con el examen exhaustivo de la información hecho al finalizar el experimento y que se reporta en la presente memoria.

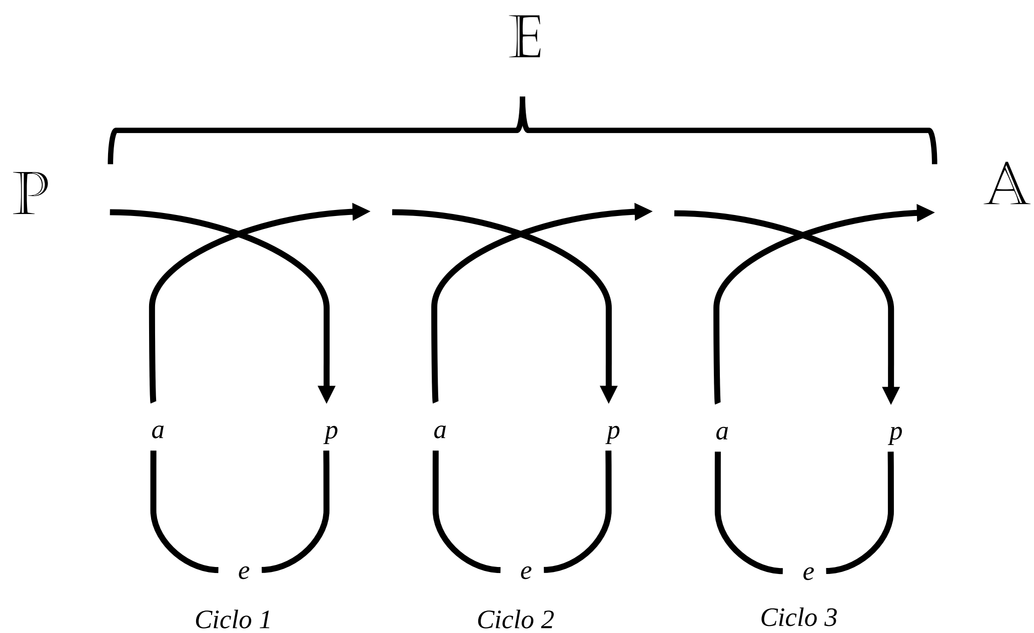


Figura 4.1. Esquema de nuestra investigación de diseño.

4.1 PREPARACIÓN $\mathbb{P}$ DEL EXPERIMENTO EN SU CONJUNTO

El contexto de la presente investigación es el programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, en los cursos de Geometría del Espacio y Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. El haber orientado la docencia en esos cursos nos había hecho conscientes de las dificultades de los estudiantes para la visualización de formas tridimensionales, particularmente de diferentes planos en el espacio. Por otro lado, nuestra experiencia previa en investigación de situaciones en las cuales los estudiantes deben argumentar nos había mostrado la dificultad que existe para generar una motivación auténtica para la búsqueda de argumentos y para aludir a elementos teóricos de la geometría en las argumentaciones.

Las anteriores consideraciones nos llevaron a elegir, como marco de dominio específico los conceptos de incertidumbre (Zaslavsky, 2005), necesidad intelectual y justificación epistemológica (Harel, 2013). A partir de estos conceptos elaboramos un diseño de tareas en el cual incorporamos de manera hipotética los mismos. Este diseño fue en primera instancia revisado por los directores del presente trabajo y tuvo modificaciones a partir de sus sugerencias. En segunda instancia fue discutido con la profesora del curso de Geometría del Espacio y allí tuvo nuevos ajustes previos a su primera aplicación.

El curso de Geometría del Espacio en el que se implementaron dos ciclos del diseño de tareas de la presente investigación tiene tres bloques temáticos: el primero, orientado a la visualización de planos, rectas, segmentos y puntos en más de un plano. El segundo, en el que se estudian las relaciones de perpendicularidad y paralelismo entre rectas y planos en el espacio. Y el tercero, en el que se aborda el estudio del ángulo diedro. Las tareas que se diseñaron en la fase de preparación $\mathbb{P}$ están pensadas para cada uno de esos bloques.

En la fase de preparación $\mathbb{P}$, además del diseño de las tareas, se estructuraron otros aspectos del conjunto del experimento $\mathbb{E}$ como la definición del número de ciclos y la manera en la cual se haría la recolección de información. Estos aspectos serán explicados en las siguientes secciones del presente capítulo.

4.2 EL EXPERIMENTO 𝔼 DE ENSEÑANZA EN SU CONJUNTO

Las tareas diseñadas se aplicaron en un período de dos semestres[4] con tres grupos de estudiantes distintos, entre agosto de 2016 y junio de 2017. No todas las tareas diseñadas en la preparación ℙ fueron aplicadas en los tres grupos.

El Ciclo 1 se desarrolló en agosto de 2016 en una sola sesión de clase del curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, con un grupo de 15 estudiantes que habían tomado ya los tres cursos de geometría de la carrera. En la preparación del experimento teníamos previsto hacer dos ciclos de experimentación del curso de Geometría del Espacio, precedidos de una experimentación piloto de las primeras tareas en un grupo de estudiantes que ya hubiese cursado las asignaturas de geometría, para poner a prueba las hipótesis de aprendizaje formuladas y ajustarlas previa a su ejecución en los cursos de Geometría del Espacio. En esta aplicación piloto, que fue el primer ciclo del experimento, pusimos a prueba seis tareas diseñadas para lo que se ha descrito en la preparación ℙ como el primer bloque temático del curso Geometría del Espacio. Tomamos registros de audio y vídeo de la interacción en dos de los grupos de trabajo y recogimos hojas de trabajo individuales de todos los estudiantes.

El Ciclo 2 se desarrolló entre agosto y noviembre de 2016 a lo largo de aproximadamente 30 sesiones de clase del curso Geometría del Espacio. El curso estaba conformado por 20 estudiantes. Implementamos las tareas diseñadas para los tres bloques del curso de Geometría del Espacio mencionados en la preparación ℙ, con las modificaciones producto del análisis *a* resultado de la aplicación en el Ciclo 1. En este tomamos registros de audio y vídeo de la interacción en dos de los grupos de trabajo en el desarrollo de cuatro de las tareas y de tres grupos en dos de estas. Igualmente registramos las sesiones de discusión con toda la clase en las cuales la

[4] Los programas de formación de la Universidad Pedagógica Nacional están organizados temporalmente en dos semestres académicos al año cada uno de 16 semanas de duración en los cuales se imparten los cursos completos. El curso de Geometría del Espacio tiene una intensidad de 4 horas a la semana y el de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría de 5 horas semanales.

profesora dirigía esta y recogimos las hojas de trabajo de todos los estudiantes del curso. Adicionalmente realizamos una conversación-entrevista con los estudiantes aplicando la técnica que Clarke (1997) ha denominado “Complementary accounts”, en donde la entrevista se desarrolla ilustrando las preguntas con fragmentos de vídeo en los cuales los propios entrevistados interactúan. Para llevar a cabo el respectivo análisis *a* en el Ciclo 2 al finalizar cada sesión de clase, especialmente de aquellas en las que se aplicaron las tareas, hicimos reuniones con la profesora de la asignatura y uno de los directores del presente trabajo.

El Ciclo 3 se desarrolló entre febrero y junio de 2017 a lo largo de aproximadamente 30 sesiones de clase. El curso estaba conformado por 35 estudiantes. Implementamos las tareas diseñadas para los dos primeros bloques del curso de Geometría del Espacio mencionados en la preparación $\mathbb{P}$, con las modificaciones producto del análisis *a* resultado de la aplicación en el Ciclo 2. Tomamos registros de audio y vídeo de la interacción comunicativa de dos de los grupos de trabajo, de las sesiones de discusión con toda la clase orientadas por la profesora y recogimos las hojas de trabajo de todos los estudiantes del curso en las seis tareas analizadas. Aplicamos también, la técnica de “Complementary account” en dos conversaciones-entrevista con el curso. De manera análoga a como se procedió en el Ciclo 2 para llevar a cabo el respectivo análisis *a* al finalizar cada sesión de clase, especialmente de aquellas en las que se aplicaron las tareas, realizamos reuniones con la profesora y uno de los directores del presente trabajo.

En la tabla 4.1 se resume el proceso descrito en esta sección acerca de las tareas implementadas y la población en cada uno de los tres ciclos. Es importante recordar que lo que hemos denominado Bloque 1, Bloque 2 y Bloque 3 corresponde a los bloques temáticos del curso Geometría del Espacio que describimos previamente. Bloque 1: visualización de planos, rectas, segmentos y puntos en más de un plano. Bloque 2: las relaciones de perpendicularidad y paralelismo entre rectas y planos en el espacio. Bloque 3: el ángulo diedro.

Tabla 4.1. Tareas implementadas y población en cada uno de los ciclos

Ciclo del experimento $\mathbb{E}$	Aplicado en	Población	Tareas aplicadas
Ciclo 1 (experimentación piloto)	Curso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. Agosto de 2016	15 estudiantes	6 tareas del Bloque 1
Ciclo 2	Curso de Geometría del Espacio. Agosto a noviembre de 2016	20 estudiantes	4 tareas del Bloque 1 5 tareas del Bloque 2 2 tareas del Bloque 3
Ciclo 3	Curso de Geometría del Espacio. Febrero a junio de 2017	35 estudiantes	4 tareas del Bloque 1 4 tareas del Bloque 2

4.3 ANÁLISIS RETROSPECTIVO GLOBAL $\mathbb{A}$, DEL DISEÑO IMPLEMENTADO

Retomando lo dicho en la introducción de este capítulo, el análisis retrospectivo global hace referencia al análisis hecho después de haber finalizado el experimento y teniendo disponible toda la información recolectada en los tres ciclos. Este análisis es diferente del que se hace durante el desarrollo del experimento. En palabras de Bakker y van Eerde (2015):

> Uno podría argumentar que el término "análisis retrospectivo" es un pleonasmo: todo análisis es retrospectivo, después de un experimento de enseñanza. Sin embargo, lo usamos acá para diferenciarlo del análisis al vuelo, el cual tiene lugar durante el experimento, ocasionalmente entre una sesión de clase y otra. (p. 438-439)

Esta diferencia es relevante en nuestro análisis porque guarda relación con la manera como presentamos las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA). Estas son un instrumento de utilidad en el desarrollo de la investigación de diseño (Bakker y van Eerde, 2015). "Constituyen el vínculo entre la teoría de dominio específico y el experimento de enseñanza desarrollado, constituyen una guía para profesores e investigadores en el desarrollo del experimento y orientan el análisis retrospectivo" (Bakker, 2004, p. 39-40).

En nuestro trabajo hemos procurado formular las THA en el sentido planteado por Simon y Tzur (2004), incorporando en estas: la meta de aprendizaje de los estudiantes, la tarea matemática que puede ser usada para promover su aprendizaje y las hipótesis acerca de este aprendizaje. Y hemos usado estas como instrumento relevante en las tres fases de la investigación.

En la fase $\mathbb{P}$ de preparación de todo el experimento, hicimos una formulación inicial de la THA para cada una de las tareas proyectadas. Durante la fase $\mathbb{E}$ del experimento de enseñanza, las THA se fueron ajustando y modificando producto de los análisis *a* hechos sobre la marcha de la implementación de cada una de las tareas en los tres ciclos. Y durante la fase $\mathbb{A}$ del análisis retrospectivo global, hicimos ajustes al planteamiento de las THA al confrontarlas con la información recolectada que nos proporcionaba un cuadro completo de las Trayectorias Reales de Aprendizaje (TRA).

En el capítulo 5 de esta memoria se presentan las THA tal como fueron formuladas en la fase $\mathbb{P}$ de preparación del experimento y cómo fueron reformándose tarea a tarea durante la fase $\mathbb{E}$ de experimento de enseñanza. En el capítulo 6 las THA se presentan como fueron ajustadas para fines del análisis en la fase $\mathbb{A}$ de análisis retrospectivo.

Las THA tuvieron que ser ajustadas en el análisis retrospectivo porque, al contrastar la información recolectada con la formulación que teníamos de las THA, encontramos que nuestra comparación THA y TRA podría dejar por fuera elementos relevantes que emergían de los datos. Nos encontramos en una situación semejante a la descrita por Bakker (2018):

> Sí la comparación de las THA (…) con los datos recogidos parece limitada, entonces una codificación abierta adicional puede ser considerada útil. (p. 140)

Así que, atendiendo a la recomendación del autor, identificamos de manera recurrente en los datos algunos aspectos que guardan relación con lo que Simon y Tzur (2004) denominan "hipótesis acerca del aprendizaje de los estudiantes". En nuestro caso atienden a las ideas de mediación semiótica, incertidumbre, necesidad intelectual y justificación epistemológica que inspiraron nuestro diseño y planteamos en el marco teórico.

Esos aspectos identificados recurrentemente en los datos nos condujeron a refinar las THA, generando así una herramienta analítica que nos permitió clasificar la información presente en los datos para hacer una comparación entre las THA y TRA que diese cuenta de mejor manera del desarrollo del experimento y el cumplimento del objetivo que nos propusimos en esta investigación. Refinar las THA para nosotros significa precisar hipótesis que estaban implícitas en la formulación inicial y que el análisis de los datos hizo visible.

En la reformulación que hicimos de las THA en el análisis retrospectivo organizamos las hipótesis acerca del aprendizaje mediante los enfoques que describimos a continuación.

4.3.1 ENFOQUE EN EL CONTENIDO (Ec)

Hace referencia a una o varias hipótesis acerca de los contenidos matemáticos de la geometría del espacio que suponíamos podrían ser utilizados en el desarrollo de la tarea. Para plantearlas respondemos a las siguientes preguntas: ¿Qué elementos del sistema axiomático de geometría estudiado se espera que sean evocados por los estudiantes en el desarrollo de la tarea? ¿Qué elementos del sistema axiomático de geometría aún por estudiar se espera que sean mencionados y la necesidad de su introducción sea reconocida por los estudiantes?

4.3.2 EL ENFOQUE EN LA MEDIACIÓN (Em)

Hace referencia a una o varias hipótesis acerca del papel que tienen en el ciclo la actividad con el artefacto (EGD 3D y modelos físicos de situaciones de la geometría tridimensional), la producción individual de signos y la producción colectiva de signos, en la generación de incertidumbre. Para su planteamiento apuntamos a responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es el papel de los artefactos en el desarrollo de la tarea, particularmente en la generación de incertidumbre? ¿Cuál es el papel de la interacción entre los integrantes del grupo en la generación de incertidumbre y de necesidad intelectual? ¿Cuál es el papel de la interacción de la profesora con la clase en la generación de incertidumbre y de producción de necesidad intelectual?

4.3.3 EL ENFOQUE EN LA GENERACIÓN DE INCERTIDUMBRE (Ei)

Hace referencia a una o varias hipótesis acerca de la manera en la cual se espera generar incertidumbre en los estudiantes producto del diseño de la tarea. Para la formulación de este enfoque nos planteamos las preguntas: ¿Cómo se espera que se produzca la incertidumbre? ¿Cómo se espera que se exprese?

4.3.4 EL ENFOQUE EN LA PRODUCCIÓN DE NECESIDAD INTELECTUAL (En)

Hace referencia a una o varias hipótesis acerca de cómo la incertidumbre generada evoluciona hacia la producción de necesidad intelectual en los estudiantes, motivando una búsqueda teórica que soporte sus explicaciones y hacía la experimentación la justificación epistemológica al encontrar satisfactoria su explicación: ¿Cómo se espera que se produzcan la necesidad intelectual y la justificación epistemológica? ¿Cómo se espera que se expresen la necesidad intelectual y la justificación epistemológica?

4.4 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Como mencionamos en la sección anterior, al emprender la revisión de la información, encontramos limitado nuestro planteamiento inicial de las THA. Revisamos las transcripciones de los vídeos, los vídeos mismos y las hojas de trabajo de acuerdo con la "Grounded Theory" (Strauss y Corbin, 2002), como sugiere Bakker (2018). A partir de esa revisión, reformulamos las THA con base en los enfoques descritos previamente y de esta manera emprendimos una revisión sistemática de transcripciones de vídeos y audios de interacciones en los grupos de trabajo, discusión de toda la clase y conversación-entrevista con el grupo, junto con las hojas de trabajo de los estudiantes.

La revisión sistemática que mencionamos nos permitió hacer una selección de las tareas que serían reportadas en el análisis retrospectivo global. Hablamos de selección pues, como se mencionó en la tabla 4.1, el número de tareas implementadas en cada uno de los ciclos es variable: seis en el Ciclo 1, once en el Ciclo 2 y ocho en el Ciclo 3. Así que redujimos nuestra comparación a seis tareas en total, tres de ellas aplicadas en los tres ciclos y tres de ellas aplicadas exclusivamente en los ciclos 2 y 3.

De estas seis tareas seleccionadas para la comparación, hicimos el análisis de las interacciones disponibles en cada una de ellas. Estas interacciones son: en todas las tareas y en los tres ciclos, las de los grupos de trabajo (G1 a G3), en algunas tareas, las de la discusión de toda la clase (Clase compl) y en unas pocas, las de la conversación-entrevista con el investigador (Entrevista). Adicionalmente, en las seis tareas se analizaron las hojas de trabajo que fueron diligenciadas por los estudiantes de manera individual o en grupo. En la tabla 4.2 resumimos la información mencionada.

Una vez hecha la selección de las tareas y con cada THA expresada en términos de los enfoques descritos, desarrollamos en cada una de las tareas a un análisis de las interacciones mencionadas, junto con el análisis de las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes. Determinamos en los datos analizados la evidencia de la verificación o no de los enfoques como expresión de las THA, codificando las transcripciones de las interacciones y las hojas de trabajo con la abreviatura de los enfoques: Ec, Em, Ei, En, acompañada de un breve memorando que describe por qué se verifica allí la presencia del enfoque aludido. Procurando resumir los elementos del análisis hicimos un cuadro comparativo de THA vs TRA, expresadas estas en términos de los enfoques, con una breve nota de análisis. Finalizamos con un comentario general de lo observado en el desarrollo de la tarea en términos de cada uno de los enfoques. Al final del análisis de cada tarea en los tres ciclos hicimos una descripción de lo analizado en términos generales para cada ciclo.

El contenido del análisis que hemos mencionado antes se encuentra expuesto en los Anexos. Lo que allí hemos elaborado está en la línea de lo que Powell, Francisco, y Maher (2003) denominan un hilo argumental (*storyline* en el original), el cual es a nuestro juicio, muy extenso para una presentación general de resultados al lector. Hicimos entonces un esfuerzo de síntesis en la vía de lo que los mismos autores denominan armar una narración (*composing narrative* en el original) que presentamos en el capítulo 6.

Al hacer el esfuerzo de síntesis mencionado omitimos presentar los datos, transcripción de interacciones y hojas de trabajo, con su codificación y presentamos: la descripción de la THA de cada tarea en términos de los enfoques, la comparación de THA vs TRA junto con fragmentos ilustrativos de los datos que sustentan lo planteado en la comparación y un comentario general de lo ocurrido con cada uno de los enfoques en cada tarea. La comparación de THA vs TRA no es una transcripción literal de lo que se encuentra en los Anexos pues, como ya mencionamos procuramos hacer un esfuerzo de síntesis. En los fragmentos ilustrativos hemos damos un contexto descriptivo para situar al lector. Con respecto a aquellos elementos del análisis que se apoyan en datos, y que no es posible incluir por su extensión, remitimos al lector a los Anexos.

Tabla 4.2 Información analizada.

Tarea analizada	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
Tarea 1	C1G1 C1G2	C2G1 C2G2	C3G1 C3G2
Tarea 2	C1G1 C1G2	C2G1 C2G2 Clase compl Entrevista	C3G1 C3G2
Tarea 3	C1G1 C1G2	C2G1 C2G2 C2G3	C3G1 C3G2
Tarea 4	No aplica	C2G1 C2G2[5] Clase compl	C3G1 C3G2 Clase compl Entrevista
Tarea 5	No aplica	C2G1 C2G2 Clase compl	C3G1 C3G2 Clase compl
Tarea 6	No aplica	C2G1 C2G2 C2G3 Clase compl Entrevista	C3G1 C3G2 Clase compl Entrevista

La remisión a los Anexos atiende a la codificación de los datos que se hizo de la siguiente manera: la primera letra alude a la tarea T, la segunda al ciclo C y la tercera al tipo de información, que puede ser: interacción en grupo de trabajo G, discusión de toda la clase con la profesora P o conversación-entrevista de la clase con el investigador I. Así, por ejemplo, si un dato proviene de la tarea 1, en el ciclo 3, en la interacción del grupo de trabajo 3 su codificación será T1C3G3, si proviene de la tarea 3, en el ciclo 2 en la discusión de toda la clase con la profesora su codificación será T3C2P y si por ejemplo la información referenciada se encuentra en la tarea 6, ciclo 3 en la conversación-entrevista con el investigador su codificación es T6C3I. Estos códigos ubican al lector que al encontrar la alusión a una interacción específica en el Capítulo 6, quiera constatar en los Anexos la transcripción completa.

[5] Este registro de audio y vídeo no estuvo disponible para el análisis, solamente la hoja de trabajo.

CAPÍTULO 5

LAS TAREAS

Se presentan a continuación las THA de los tres ciclos del diseño. De acuerdo con la caracterización de Simon y Tzur (2004), las tareas son parte de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Nuestra descripción presenta en primer lugar el enunciado de la tarea y las hipótesis de la THA como fueron concebidas en el momento previo a la experimentación de cada tarea. Como se mencionó en el capítulo 4, las THA tuvieron un posterior desarrollo en términos de explicitar las hipótesis de aprendizaje subyacentes en estas. Dicho desarrollo detallado se presenta en el Capítulo 6, en el que las THA son reformuladas.

En cada tarea se presentan los elementos de referencia del sistema teórico de geometría que se sigue en el curso Geometría del Espacio que sirvió de contexto a la investigación. Estos elementos de referencia en el curso del desarrollo de la tarea pueden ser conocimientos previos necesarios o aquellos que se espera sean aprendidos. Hablamos de un sistema teórico de geometría porque, de acuerdo con la propuesta curricular que se desarrolla en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el curso de Geometría Plana se inicia la construcción de un sistema teórico de la geometría que tiene continuidad en el curso Geometría del Espacio. Dicho sistema teórico de la geometría inicia con relaciones entre puntos, rectas y planos, continua con ángulos, congruencia de triángulos, cuadriláteros, proyección paralela y semejanza de triángulos, y en la parte de geometría plana finaliza con circunferencias. Sobre la base de lo ya establecido en ese sistema teórico, en el curso Geometría del Espacio continúa con puntos, segmentos y rectas en más de un plano, perpendicularidad y paralelismo en el espacio, ángulo diedro y finaliza con el estudio de circunferencia y esfera. Respecto al enfoque que tiene dicho sistema teórico, Samper y Molina (2013) lo describen como:

> Las directrices para dicho sistema [teórico de la geometría] son el modelo de Birkhoff (1932) para la geometría euclidiana, en el "cual se introducen los hechos encarnados en la regla y el transportador", y la propuesta de Moise (1968) que concuerda básicamente con dicho modelo. Ello, porque se corresponden, en esencia, con el modelo de geometría que corporeiza el software de geometría dinámica, artefacto que desempeña un papel importante en nuestra aproximación metodológica. (p. 9)

En la descripción que presentamos de las variantes de las tareas en cada ciclo hacemos alusión a la manera como estaba estructurado el enunciado y los momentos previstos para el desarrollo de esta. Procuramos sintetizar en una tabla los elementos centrales de la THA, con base en la manera en la cual hacen la descripción de las actividades Stylianides y Stylianides (2014).

5.1 TAREA 1

Esta tarea se encuentra dentro del Bloque 1. El propósito de este es la visualización de planos, rectas, segmentos y puntos en más de un plano. Para lograr este propósito se promueve entre los estudiantes el abordaje de los objetos desde una perspectiva teórica. Punto, recta y plano son elementos no definidos en el modelo de geometría que se estudia y la introducción de estos en el sistema teórico del curso se hace mediante postulados. El espacio se define como "conjunto de todos los puntos" pero no se ha introducido un elemento teórico que garantice la existencia del espacio; expresándolo de otra manera, no se ha introducido la garantía de la existencia de más de un plano.

La Tarea 1 tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano, pues a partir de ese momento serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Los elementos del sistema teórico de referencia que enmarcan el desarrollo de esta tarea son:

Postulado del espacio: Dado un plano, existe un punto que no pertenece a él.

Postulado puntos-plano: Dados tres puntos A, B y C, existe al menos un plano que los contiene y, si son no colineales, entonces existe un único plano que los contiene.

Postulado de la recta: Dados dos puntos diferentes, existen una única recta que los contiene.

Teorema recta-punto-plano: Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta entonces existe un único plano que los contiene.

Teorema rectas-plano: Dadas dos rectas diferentes, si las rectas se intersecan entonces existe un único plano que las contiene.

Definición de rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan.

5.1.1 TAREA 1, CICLO 1. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado consta de dos partes (tabla 5.1). Con la primera de ellas esperamos que los estudiantes evoquen los diferentes elementos del sistema teórico de referencia que permiten determinar un plano. Con la segunda, nuestra expectativa es que se produzcan diferentes soluciones respecto a cómo diferenciar el espacio del plano, el espacio del punto y el espacio de la recta. Estas diferentes soluciones deben dar lugar a discusión.

Esperamos que la segunda pregunta dé lugar a soluciones que aludirán a los aspectos figurales de los objetos como las imágenes que los estudiantes tienen de recta, punto, plano y espacio. Y otras soluciones se referirán a los aspectos teóricos, como los postulados y teoremas que determinan la existencia de punto, recta y plano. Nuestra hipótesis es que la discusión entre estas dos visiones, en el momento de abordar en grupo la solución, es la que dará lugar a la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual.

Cabe mencionar que en el Ciclo 1 no hay mediación de la profesora. Por esa razón no está contemplada en los momentos de ejecución de la tarea.

Tabla 5.1. Elementos centrales de la THA para la tarea 1 en el ciclo 1.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado: En un sistema teórico de geometría euclidiana a) ¿Cómo se determina la existencia de un plano? b) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Justifique. ¿Que necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?	La discusión en los grupos hará evidente el conflicto entre lo figural y lo teórico para establecer diferencias entre los objetos geométricos que se mencionan en la parte b) del enunciado.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes consideran la tarea individualmente y producen sus soluciones. En la parte b) del enunciado algunos responderán aludiendo a elementos figurales, dibujando una recta y un punto, o representando el plano con la mano y aludiendo a que el espacio es todo lo demás. Otros procurarán recurrir a elementos del sistema teórico de referencia, esperamos que mencionen la necesidad de postular la existencia de un punto fuera del plano para hablar del Espacio.	La discusión en los grupos acerca de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, en especial en aquellos estudiantes que recurran a elementos figurales. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.

5.1.2 TAREA 1, CICLO 2. DESCRIPCIÓN DE LA THA

Como en el Ciclo 1, en el Ciclo 2 el enunciado de la tarea consta de dos preguntas (tabla 5.2). A diferencia del enunciado en el Ciclo 1, en la parte (a) de la pregunta se omitió la palabra “existencia” para promover mayor diversidad de propuestas en la manera de determinar un plano. La parte (b) de la pregunta, se planteó más detallada para orientar a los estudiantes en la comparación del espacio con el plano, con la recta y con el punto.

La intención de la segunda pregunta continúa siendo la misma que en el Ciclo 1, es decir, generar incertidumbre a partir de la confrontación de las soluciones individuales en el trabajo en grupo. A diferencia de lo hecho en el Ciclo 1 acá hay un momento adicional, el de discusión de toda la clase con la mediación de la profesora, orientado a generar la mencionada incertidumbre en aquellos que en el trabajo en grupo no la hayan experimentado.

Tabla 5.2. Elementos centrales de la THA para la tarea 1 en el ciclo 2.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. En un sistema teórico de geometría euclidiana a) ¿Cómo se determina un plano? b) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Justifique. ¿Que necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?	La discusión en los grupos hará evidente el conflicto entre lo figural y lo teórico para establecer diferencias entre los objetos geométricos que se mencionan en la parte b) del enunciado.	La profesora seleccionará las soluciones ofrecidas que ordena previamente para fomentar el debate en la clase apuntando a generar incertidumbre en los estudiantes y orientará la discusión hacía la producción de necesidad intelectual.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes consideran la tarea individualmente y producen sus soluciones. En la parte b) del enunciado, algunos responderán aludiendo a elementos figurales, dibujando una recta y un punto, o representando el plano con la mano y aludiendo a que el espacio es todo lo demás. Otros procurarán recurrir a elementos del sistema teórico de referencia. Esperamos que mencionen la necesidad de postular la existencia de un punto fuera del plano para hablar del Espacio.	La discusión en los grupos acerca de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, en especial en aquellos que recurrieron a elementos figurales. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.	En algunos grupos podrá ocurrir que no se presenten distintas soluciones. En la discusión con toda la clase la profesora presentará las diferentes soluciones para generar incertidumbre y estimular la producción de necesidad intelectual.

5.1.3 TAREA 1, CICLO 3. DESCRIPCIÓN DE LA THA

En el Ciclo 3 la tarea se modificó sustancialmente. Pretendíamos generar mayor discusión entre los estudiantes e introducir el uso del Cabri 3D. Se plantea un enunciado inicial para motivar, mediante la construcción de un objeto geométrico, la consideración de un punto fuera del plano por parte de los estudiantes. Las preguntas se hacen en momentos distintos del desarrollo. Luego de la exploración inicial se formula la que es la parte (b) del enunciado en los ciclos 1 y 2. Y, finalmente, se retoma por parte de la profesora la pregunta inicial para desarrollar la discusión en torno a la definición de "cuadrilátero plegado" (tabla 5.3).

Los estudiantes abordan las preguntas (1) y (2) individualmente, luego las discuten en grupos. La intención en esa discusión, como en los ciclos 1 y 2, es la generación de incertidumbre a partir de las diferentes opciones de solución planteadas.

En la discusión de la definición del cuadrilátero plegado con toda la clase, la profesora retoma lo hecho por los estudiantes en su respuesta a los dos primeros enunciados para hablar de un punto fuera del plano. Y plantea, a partir de una pregunta (enunciado 3), la discusión acerca de un objeto geométrico representado en Cabri 3D a partir de un cuadrilátero en un plano en el cual redefine en principio uno de los vértices como un punto fuera del plano de referencia que tiene Cabri 3D, y posteriormente con dos puntos fuera del plano.

El propósito de la actividad dirigida por la profesora es generar incertidumbre en los estudiantes: en primer lugar, respecto a la definición de cuadrilátero y, en segundo lugar, respecto a la definición y representación del nuevo objeto geométrico que han definido como cuadrilátero plegado. En tercer lugar, esperamos que esta generación de incertidumbre tenga como desarrollo la producción de necesidad intelectual para resolver dicha incertidumbre.

Tabla 5.3. Elementos centrales de la THA para la tarea 1 en el ciclo 3.

	Consideración del enunciado 1 esperando que los estudiantes sugieran la necesidad de tener un punto fuera del plano	*Consideración del enunciado 2 para introducir la necesidad del postulado del espacio (Inicialmente de manera individual, posteriormente en grupos y finalmente en discusión de toda la clase)*	*Discusión de toda la clase sobre la definición del cuadrilátero plegado. El propósito de esta es hacer uso de los postulados del espacio y del Postulado puntos-plano.*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado: (1) Sean A, B, C y D cuatro puntos. ¿Qué figura sería la unión de segmentos determinados por estos puntos, si ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos?	Enunciado: (2) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio sea diferente a un punto, una recta y un plano?	Enunciado: (3) Dados A; B, C y D en el plano base de Cabri 3D. Y los segmentos AB, BC, CD y DA Redefina uno de los puntos para que no pertenezca al plano base. a) ¿Es la nueva figura determinada un cuadrilátero? Justifique b) Vamos a denominar a la nueva figura “Cuadrilátero plegado”. Redacte una definición para éste. Una vez de acuerdo en una definición de cuadrilátero plegado, redefinir un segundo punto fuera del plano base. ¿Es otro objeto geométrico? ¿Es necesaria una definición de cuadrilátero doblemente plegado?

Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes consideran la tarea individualmente, luego la discuten en grupos y producen sus soluciones las cuales plasman en la hoja de trabajo. Probablemente muchos asociarán la descripción dada a la definición de cuadrilátero. Algunos se percatarán que dentro de las condiciones establecidas no está la coplanariedad, en consecuencia, podrán sugerir una figura con un punto fuera del plano determinado por los otros tres puntos.	Al igual que en el Ciclo 1 y en el Ciclo 2 esperamos que algunos estudiantes ofrezcan soluciones apoyados en elementos figurales y otros en elementos conceptuales dando lugar a discusión entre estas dos alternativas.	La profesora retomará lo planteado por los estudiantes en el enunciado 1 e introducirá la discusión que formula el enunciado 3 en la parte (c). Algunos de los estudiantes considerarán que un “cuadrilátero doblemente plegado” es un nuevo objeto geométrico que requiere una nueva definición. Algunos de los estudiantes se percatarán que lo que ocurre es que el plano de referencia cambia. Esa discusión es la que esperamos active la incertidumbre en los estudiantes.

5.2 TAREA 2

Los elementos del sistema teórico de la Geometría que enmarcan el desarrollo de la tarea son los siguientes:

Postulado del espacio: Dado un plano, existe un punto que no pertenece a él.

Postulado puntos-plano: Dados tres puntos A, B y C existe al menos un plano que los contiene y si son no colineales, entonces existe un único plano que los contiene.

Teorema recta-punto-plano: Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta entonces existe un único plano que los contiene.

Teorema rectas-plano: Dadas dos rectas diferentes sí las rectas se intersecan entonces existe un único plano que las contiene.

Postulado de la llaneza del plano: Dados dos puntos A y B diferentes en un plano α entonces la recta AB está contenida en α.

Postulado de intersección de planos: Si dos planos α y β, son tales que $\alpha \cap \beta \neq \Phi$, entonces la intersección es por lo menos dos puntos.

Teorema de intersección de planos: Si dos planos se intersecan, la intersección es una recta.

5.2.1 TAREA 2, CICLO 1. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la tarea tiene una única pregunta, con la cual esperamos que los estudiantes propongan distintas alternativas (tabla 5.4). Como en la Tarea 1, esperamos que propongan soluciones con base en elementos figurales, perdiendo de vista que si afirman que los cuatro puntos son no coplanares implica que cada tres son no colineales. Adicionalmente, se espera que otros estudiantes hagan el análisis de lo que implica la información “no coplanares”. Esta diferencia de puntos de vista, que se hará evidente en el trabajo en grupos, es la que esperamos genere incertidumbre y de lugar a la necesidad intelectual en el desarrollo de la tarea.

Tabla 5.4. Elementos centrales de la THA para la tarea 2 en el ciclo 1.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. Dados cuatro puntos no coplanares ¿Qué condiciones entre ellos, dan lugar al máximo número de planos que pueden determinarse? Justifique	La discusión en los grupos hace evidente el conflicto entre lo figural y lo teórico para establecer por qué la condición de que cada tres sean no colineales está implícita en la declaración de “no coplanares”.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes consideran la tarea individualmente y producen sus soluciones. Algunos responderán mencionando que es necesario poner como condición que cada tres puntos sean no colineales. Otros procuraran recurrir a elementos del sistema teórico de referencia, haciendo la inferencia de que cada tres puntos son no colineales sí los cuatro puntos son no coplanares.	La discusión en los grupos de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, en especial en aquellos que consideran necesario poner como condición que cada tres puntos sean no colineales. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.

5.2.2 TAREA 2, CICLO 2. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la tarea en el Ciclo 2 consta de una única pregunta al igual que en el Ciclo 1 (tabla 5.5). A diferencia de la pregunta que se planteó en el Ciclo 1, en este se omitió la afirmación de que los cuatro puntos son “no coplanares” para permitir una mayor libertad de interpretación por parte de los estudiantes y así propiciar más debate en torno a la solución.

Esperamos que la incertidumbre se produzca en el momento de discutir las soluciones individuales al enunciado. En este ciclo existe un momento adicional respecto al Ciclo 1, pues la profesora tomará las soluciones consignadas por los diferentes grupos en sus hojas de trabajo y las organizará para presentarlas en la discusión de toda la clase. Esperamos que las acciones emprendidas por la profesora amplíen entre los estudiantes la posibilidad de generación de incertidumbre, si no se produjo en el trabajo de los grupos, y alienten la producción de necesidad intelectual.

En la discusión la profesora hará uso de Cabri 3D para poner en cuestionamiento las soluciones ofrecidas por los estudiantes, representando planos determinados a partir de las condiciones planteadas, pero que no corresponden a la solución solicitada con el mayor número de planos.

Tabla 5.5. Elementos centrales de la THA para la tarea 2 en el ciclo 2.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. Dados cuatro puntos ¿Qué condiciones entre ellos, dan lugar al máximo número de planos que pueden determinarse? Justifique.	Los estudiantes ponen en común sus soluciones individuales y discuten qué deben consignar en la hoja de trabajo, en este momento deben emerger las distintas soluciones que dan lugar a debate.	La profesora selecciona las soluciones ofrecidas que ha ordenado previamente para fomentar el debate en la clase apuntando a generar incertidumbre en los estudiantes y orientando la discusión hacía la producción de necesidad intelectual. Usando la representación con Cabri 3 D de las condiciones enunciadas por los estudiantes en sus soluciones.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes consideran la tarea individualmente y producen sus soluciones. Algunos afirmarán que con declarar que cada tres puntos no sean colineales basta. Otros querrán agregar otra condición a esta o declararán simplemente que los cuatro puntos deben ser no coplanares.	La discusión en los grupos, de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, en especial en aquellos que consideren que basta declarar que cada tres puntos sean no colineales. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.	Las soluciones presentadas por la profesora junto con la representación que hará en Cabri 3D producirá la participación de más estudiantes en la discusión generando incertidumbre y motivando la producción de necesidad intelectual.

5.2.3 TAREA 2, CICLO 3. DESCRIPCIÓN DE LA THA

A partir de la experiencia en el Ciclo 2 con el uso de Cabri 3D, consideramos deseable incorporar el EGD desde el comienzo del trabajo. Por esa razón, modificamos sustancialmente el enunciado procurando conservar la intención que tenía la tarea en los otros dos ciclos, que estaba dirigida a determinar más de un plano en una configuración espacial.

El enunciado de la tarea consta de tres preguntas (tabla 5.6). La primera de ellas no arroja información relevante en el marco del diseño de la presente investigación. La segunda y la tercera están dirigidas a promover la visualización de diferentes planos en una configuración espacial por parte de los estudiantes. En particular, esperamos que usen elementos del sistema teórico para determinar los distintos planos. Se espera que la incertidumbre se genere al discutir por qué los planos son distintos y al establecer la manera de justificar esa diferencia.

Tabla 5.6. Elementos centrales de la THA para la tarea 2 en el ciclo 3.

	Consideración en grupo del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. Dado el ΔABC sean D y F puntos tal que F pertenece a la recta AB y D pertenece a la recta AC, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que pertenece a la recta DI y un punto G tal que pertenece a la recta FH. a) Nombre tipos de figuras, definidas en nuestro sistema teórico, que quedan determinadas con algunos de esos puntos. Dé dos ejemplos de cada tipo si es posible. Justifique su respuesta. b) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta. c) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con el plano determinado por A, B y C?	Los estudiantes ponen en común sus soluciones individuales y discuten qué deben consignar en la hoja de trabajo, en este momento deben emerger las distintas soluciones que dan lugar a debate.

Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes desarrollan en grupos la construcción solicitada e intercambian opiniones sobre cómo representar los diferentes planos que quedan determinados y cómo observar sus intersecciones.	El trabajo en los grupos debe generar discusión en torno a las justificaciones solicitadas acerca de la determinación de planos distintos de la relación establecida a partir de la pregunta (c), que es la intersección de dos planos.

5.3 TAREA 3

Los elementos del sistema teórico que enmarcan el desarrollo de la tarea tres son los siguientes:

Postulado puntos-plano: Dados tres puntos A, B y C existe al menos un plano que los contiene y si son no colineales, entonces existe un único plano β que los contiene.

Teorema recta-punto-plano: Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta entonces existe un único plano que los contiene.

Teorema rectas-plano: Dadas dos rectas diferentes, sí las rectas se intersecan entonces existe un único plano que las contiene.

5.3.1 TAREA 3, CICLO 1. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la Tarea 3 describe una configuración particular de puntos en el espacio y formula una única pregunta (tabla 5.7). La instrucción no está acompañada de representación. Al empezar a resolver la tarea, los estudiantes reflexionan individualmente acerca de la solución. Luego, discuten las soluciones individuales que han consignado en la hoja de trabajo. Después de haber discutido, reciben un material concreto que consta de palitos de madera, plastilina y un cartón. Con esto se les pide que hagan un modelo de la situación y consideren las conclusiones de su discusión.

Esperamos que haya dos momentos que contribuyan a la generación de incertidumbre: cuando contrasten la solución individual en la discusión en grupos y cuando comparen la solución sin el uso del modelo físico y la obtenida al usar el modelo. Consideramos que pueden producirse diferencias en las soluciones obtenidas por las posibles omisiones cometidas al hacer el conteo de planos sin dibujo ni modelo. Creemos que la diferencia en las soluciones obtenidas puede movilizar la producción de necesidad intelectual en la búsqueda de certeza por parte de los estudiantes para la solución a la situación.

Tabla 5.7. Elementos centrales de la THA para la tarea 3 en el ciclo 1.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*	*Discusión en grupo de las soluciones individuales haciendo uso del modelo físico*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.	Los estudiantes ponen en común sus soluciones individuales y discuten. En este momento deben emerger las distintas soluciones que dan lugar a debate.	Los estudiantes construyen el modelo físico y contrastan sus soluciones con el modelo. Se espera que haya diferencias entre las soluciones escritas y lo comprobado con el modelo.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes consideran la tarea individualmente y producen sus soluciones. Esperamos que al hacerlo sin dibujos ni modelo físico consideren pares de puntos en α y el punto E para determinar los planos, afirmando que son cinco o seis los planos, al perder de vista algunos planos en el conteo.	La discusión en los grupos de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, pues habrán obtenido diferente número de planos entre los integrantes del grupo. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.	Al hacer el modelo físico constatarán que son siete los planos que se determinan. Harán una revisión de sus resultados y buscarán como apoyar estos en los elementos teóricos de referencia, expresando así la producción de incertidumbre y necesidad intelectual.

5.3.2 TAREA 3, CICLO 2. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la Tarea 3 se modificó a partir de la experiencia en el Ciclo 1. Se introdujo una instrucción para enfatizar en la anticipación del resultado, sin hacer uso de dibujos o modelos físicos hechos con las manos (tabla 5.8). Se les pide a los estudiantes una anticipación individual para contrastarla en la discusión en grupos. Y luego se les proporciona el material para construir el modelo físico y el computador para representar en Cabri 3D la situación y hacer la comparación con los resultados obtenidos sin estos apoyos.

Con esos cambios se espera que el contraste entre resultados individuales y grupales, por un lado, y sin artefactos y con estos, por el otro, genere incertidumbre y propicie la producción de necesidad intelectual.

Tabla 5.8. Elementos centrales de la THA para la tarea 3 en el ciclo 2.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales*	*Discusión en grupo de las soluciones individuales haciendo uso del modelo físico*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α a) Sin hacer una representación, cada integrante del grupo escriba su anticipación del número de planos que quedan determinados. b) ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.	Los estudiantes pondrán en común sus anticipaciones individuales y discutirán acerca de estas. En este momento deben emerger las distintas soluciones que dan lugar a debate.	Los estudiantes construyen el modelo físico y contrastan sus soluciones con el modelo y/o con apoyo de Cabri 3D. Se espera que haya diferencias entre las soluciones escritas y lo comprobado con el modelo o Cabri 3D.

Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes resuelven la tarea individualmente y producen sus soluciones. Esperamos que, al hacerlo sin dibujos ni modelo físico, para determinar planos, tomen pares de puntos en α y el punto E concluyendo que son cinco o seis los planos, al perder de vista algunos planos en el conteo.	La discusión en los grupos de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, pues los distintos integrantes del grupo habrán obtenido diferente número de planos. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.	Al hacer el modelo físico y/o de Cabri 3D constatarán que son siete los planos que se determinan. Harán una revisión de sus resultados y buscarán como apoyar estos en los elementos teóricos de referencia, expresando así la producción de incertidumbre y necesidad intelectual.

5.3.3 TAREA 3, CICLO 3. DESCRIPCIÓN DE THA

Para este ciclo consideramos hacer más complejo el enunciado aumentando el número de puntos que están en el plano α cada vez. También se enfatizó el aspecto de la anticipación sin apoyo de lápiz y papel o usando las manos, para que los estudiantes plasmaran su idea inicial que sería contrastada con los resultados posteriores usando el modelo físico y Cabri 3D.

Buscamos que los resultados de los diferentes momentos en el desarrollo de la tarea queden consignados en la hoja de trabajo de cada estudiante. Los momentos definidos son: en primer lugar, la anticipación; en segundo lugar, el resultado haciendo el dibujo; en tercer lugar, el resultado usando el modelo físico y por último el resultado al hacer uso de Cabri 3D.

La diferencia de los resultados obtenidos entre uno y otro momento de desarrollo es la que consideramos puede generar incertidumbre en los estudiantes. La búsqueda de un método de resolver la situación fiable y generalizado producirá la emergencia de la necesidad intelectual.

Enunciado:

Complete la tabla, para cada una de las configuraciones de puntos dadas en la primera columna, de acuerdo con las siguientes instrucciones:

En la columna Anticipación, escriba su respuesta sólo considerando la situación mentalmente.

En la columna Con dibujo, escriba su respuesta, si se ha modificado, y haga la representación gráfica correspondiente.

En la columna Con modelo, escriba su respuesta, si se ha modificado, luego de representar la situación con un modelo físico para verificar la respuesta dada en la columna Con dibujo.

En la columna Con Cabri, y sólo si lo considera necesario, escriba su respuesta luego de representar la situación en el software.

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B y C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				

a) Redacte un párrafo describiendo cómo se fueron modificando sus resultados, si es el caso. Intente justificar por qué ocurrieron los cambios.

b) Sean n puntos A, B, C … cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración? ¿Qué elementos del sistema teórico permiten soportar esta generalización?

Para esta tarea en este ciclo explicitamos los elementos centrales de la THA en la descripción inicial, pues la extensión del enunciado dificulta su presentación en una tabla como en los demás casos.

5.4 TAREA 4

Los elementos del sistema teórico de referencia que enmarcan la Tarea 4 son los siguientes:

Postulado de la Llaneza del plano: Dados dos puntos A y B en un plano α entonces la recta AB está contenida en α.

Definición de recta perpendicular a un plano: Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano, que contienen al punto de intersección de la recta y el plano.

Definición de planos paralelos: Dos planos son paralelos si no se intersecan.

Definición de rectas alabeadas: Dos rectas son alabeadas (o se cruzan) si no se intersecan y no son coplanares.

Teorema Fundamental de la perpendicular (TFP): Si una recta m interseca al plano α y m es perpendicular a dos rectas l_1 y l_2 contenidas en α, entonces m es perpendicular al plano.

Teorema Recta punto interno - plano perpendicular: Dada una recta y un punto en ella, existe un plano perpendicular a la recta por ese punto.

Teorema Plano punto interno - recta perpendicular: Dado un plano y un punto de este, existe una recta perpendicular al plano por ese punto.

Teorema Recta punto externo - plano perpendicular: Dado una recta y un punto externo a ella, existe un plano perpendicular a la recta que contiene el punto dado.

Teorema Plano punto externo - recta perpendicular: Dado un plano y un punto externo a él, existe una recta perpendicular al plano que contiene al punto dado.

5.4.1 TAREA 4, CICLO 2. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la tarea consta de tres preguntas (tabla 5.9). Existe más de una respuesta, así que esperamos que este sea un elemento importante para generar discusión en el proceso de resolución y de esta manera contribuya a la generación de incertidumbre.

En el desarrollo de la tarea se les proporciona a los estudiantes material concreto para la elaboración de un modelo físico y el computador para representar la situación en Cabri 3D. Se espera así que las configuraciones que no han aparecido en el trabajo individual del enunciado surjan con el apoyo de estos artefactos al trabajar en grupo. Nuestra intención es que las diferencias surgidas en el curso de la discusión de las soluciones generen incertidumbre en los estudiantes.

Tabla 5.9. Elementos centrales de la THA para la tarea 4 en el ciclo 2.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales con el uso de modelo físico y Cabri 3D*	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado. Determinen la respuesta a las siguientes preguntas. Si las pueden justificar, háganlo a) Un plano α y una recta *m* se intersecan ¿Qué es la intersección? b) Sean *m*, *n* y *l* rectas tales que *m* es paralela a *n* y *l* es perpendicular a *m* ¿Es *l* perpendicular a *n*? c) La recta AB está contenida en el plano α, la recta CD está contenida en el plano β. α y β son planos diferentes, las rectas AB y CD son paralelas ¿Es vacía la intersección de los planos α y β?	Los estudiantes discuten las soluciones que ofrecieron individualmente y se apoyan en el modelo físico y/o Cabri 3D. Se espera que en ese momento aparezcan distintas respuestas a las preguntas y que estas den lugar a discusión.	La profesora seleccionará las soluciones ofrecidas que ordena previamente para fomentar el debate en la clase apuntando a generar incertidumbre en los estudiantes y orientando la discusión hacia la producción de necesidad intelectual. Usará la representación con Cabri 3D de las condiciones enunciadas por los estudiantes en sus soluciones.

Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes reflexionan sobre la tarea individualmente y producen sus soluciones. Algunos de los estudiantes considerarán una sola opción en cada uno de los casos. En la pregunta (a), por ejemplo, el caso en el cual la intersección es un punto. En la pregunta (b) contestando afirmativamente porque suponen las tres rectas en un solo plano. Y en (c) suponiendo que los planos si son paralelos. Se espera que este tipo de respuestas tenga su ampliación y contraste al poner en discusión las mismas al hacer el trabajo en grupo con el apoyo de artefactos.	La discusión en los grupos de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, en especial en aquellos que consideraron una sola configuración como respuesta para cada una de las preguntas. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.	Esperamos que los estudiantes al ver las representaciones que presenta la profesora experimenten incertidumbre, pues estas representaciones entran en contradicción con las soluciones presentadas por ellos.

5.4.2 TAREA 4, CICLO 3. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado se modificó a partir de la experiencia en el Ciclo 2 (tabla 5.10). Este ciclo, consta de una única pregunta, que los estudiantes abordan en primer lugar sin el apoyo de artefactos y posteriormente con el uso del modelo físico y de Cabri 3D. Finalmente, hay una discusión de toda la clase con la profesora en la cual se consideran las distintas soluciones, representando estas con Cabri 3D.

En el Ciclo 2 no se produjo la contradicción esperada entre las primeras soluciones y la interacción en grupos o con toda la clase. Los estudiantes, en su mayoría, desde el principio consideraron las distintas posibilidades de solución. Ahora esperamos que esta nueva pregunta genere mayor debate que las formuladas en el Ciclo 2 pues intuimos que es más exigente la anticipación de imágenes de la situación. Acá contemplamos tres posibles respuestas: que la recta no existe, que existe sólo una o que son infinitas, esta amplitud de posibilidades permite generar mayor debate y por tanto emergencia de incertidumbre.

Tabla 5.10. Elementos centrales de la THA para la tarea 4 en el ciclo 3.

	Consideración individual del enunciado	*Discusión en grupo de las soluciones individuales con el uso de modelo físico y Cabri 3D*	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado: Dados *m* recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿Existe la recta *l*, *l* contenida en α, tal que *l* es perpendicular a *m*?	Los estudiantes discuten las soluciones que ofrecieron individualmente y se apoyan en el modelo físico y/o Cabri 3D. Se espera que en ese momento aparezcan distintas respuestas a las preguntas y que estas den lugar a discusión.	La profesora seleccionará las soluciones ofrecidas que ha ordenado previamente para fomentar el debate en la clase apuntando a generar incertidumbre en los estudiantes y orientará la discusión hacía la producción de necesidad intelectual. Usará la representación con Cabri 3 D de las condiciones enunciadas por los estudiantes en sus soluciones.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes abordan la tarea individualmente y producen sus soluciones. Para algunos estudiantes existen infinitas rectas porque examinan únicamente el caso en el cual la recta es perpendicular al plano. Otros asumen que la recta no existe porque consideran una recta no perpendicular al plano y la dificultad de encontrar una perpendicular les hace pensar que no existe. Algunos determinarán que hay dos casos: si la recta es perpendicular al plano y sí no lo es.	La discusión en los grupos de las soluciones producidas individualmente generará incertidumbre, en especial en aquellos que consideraron una sola configuración como respuesta para la pregunta. La incertidumbre generada dará lugar a necesidad intelectual para poder expresar una solución grupal al enunciado.	Esperamos que las representaciones que presentará la profesora y la discusión que orientará permitan ver, a aquellos que consideraron que la recta no existía, un caso en el cual la recta *l* existe pese a que *m* no es perpendicular a α. La anterior situación esperamos que produzca en los estudiantes incertidumbre.

5.5 TAREA 5

Los elementos del sistema teórico de referencia que enmarcan la tarea 5 son los siguientes:

Definición de Mediatriz: La mediatriz del segmento AB es el conjunto de puntos del plano que equidistan de A y B.

Teorema de la Mediatriz: La mediatriz del segmento AB es la recta perpendicular al segmento AB que interseca a este en su punto medio.

Teorema Interestancia – Equidistancia en el Espacio: Sean B, C, P, Q puntos no coplanares y ningún trio de ellos colineales, tal que B y C equidistan de P y Q. Sea S un punto tal que B-S-C[6]. Entonces S equidista de P y Q.

5.5.1 TAREA 5, CICLOS 2 Y 3. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la Tarea 5 plantea una situación para que los estudiantes adopten una posición (tabla 5.11). Inicialmente deben considerar la situación en grupos sin el apoyo de modelo físico o Cabri 3D. En este primer momento se espera que la mayoría de los estudiantes al pensar la situación en un solo plano coincidan con la afirmación que contiene el enunciado.

En un segundo momento se les entrega un archivo en Cabri 3D para ser explorado en el cual se les pide redefinir un punto C, dado en el plano base, como un punto en el espacio. Luego deben usar el arrastre para encontrar la equidistancia mencionada en el enunciado. Se les solicita revisar lo que respondieron inicialmente, esperando que haya diferencias entre lo que plantearon y los hallazgos de la exploración para así generar incertidumbre.

Finalmente se desarrolla una discusión de toda la clase con la profesora, en la cual se examinan las soluciones que ofrecieron los estudiantes y se plantea la

[6] La notación B-S-C se usa para representar que el punto S “está entre” los puntos B y C, lo que implica que los tres están sobre la misma recta y con S perteneciendo al segmento BC.

necesidad de justificar teóricamente el hallazgo que genera la tarea respecto a la equidistancia de los puntos.

La tarea 5 es un caso particular en este diseño, pues en el Ciclo 2 no se verificó el cumplimiento de las expectativas previstas respecto al desarrollo de esta. Pero consideramos que esto obedeció más a factores operativos en el desarrollo, que al diseño de esta. Así que, por esta razón, se repitió de la misma manera en el Ciclo 3.

Tabla 5.11. Elementos centrales de la THA para la tarea 5 en los ciclos 2 y 3.

	Consideración en grupo del enunciado	*Exploración en los grupos del archivo en Cabri 3D*	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Enunciado: Un estudiante asegura que, dados el segmento PQ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la recta BC, es mediatriz de segmento PQ. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. Indique su acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones dadas. Justifique su respuesta.	Los estudiantes exploran el archivo en Cabri 3D haciendo uso de la herramienta redefinir y a partir de esta exploración revisan sus resultados previos.	La profesora selecciona las soluciones ofrecidas que ordena previamente para fomentar el debate en la clase apuntando a generar incertidumbre en los estudiantes. Orientará la discusión hacía la producción de necesidad intelectual. Usando la representación con Cabri 3 D.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Los estudiantes abordarán la tarea individualmente y generarán sus soluciones. Muchos considerarán que la afirmación del estudiante, mencionado en el enunciado, es correcta pues para ellos los cuatro puntos son coplanares pese a que esa información no se encuentra en el enunciado.	Al explorar el archivo en Cabri 3D comprobarán que existe al menos un caso en el cual los cuatro puntos no son coplanares y la condición de equidistancia se cumple. En ese momento esperamos que el resultado genere incertidumbre en los estudiantes.	Esperamos que, a partir de las acciones de la profesora, los estudiantes, que no lo han hecho aún, se percaten de la equidistancia del punto S cuando C no está en el plano y que este hecho genere en ellos incertidumbre.

5.6 TAREA 6

Los elementos del sistema teórico de referencia que enmarcan la Tarea 6 son los siguientes:

Definición de Mediatriz: La mediatriz del segmento AB es el conjunto de puntos del plano que equidistan de A y B.

Definición de Recta perpendicular a un plano: Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano, que contienen al punto de intersección de la recta y el plano.

Teorema Fundamental de la perpendicular (TFP): Si una recta m interseca al plano α y m es perpendicular a dos rectas l_1 y l_2 contenidas en α entonces *m* es perpendicular al plano.

Teorema de la Mediatriz: La mediatriz del segmento AB es la recta perpendicular al segmento AB que interseca a este en su punto medio.

Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano: Si n, m rectas, n paralela a m, m perpendicular a α, α plano, entonces n es perpendicular a α.

Definición de conjunto mediador de un segmento: es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

Teorema Plano mediador: el conjunto de puntos que equidistan de A y B, μ es igual al plano que contiene todas las mediatrices del segmento AB.

5.6.1 TAREA 6, CICLO 2. DESCRIPCIÓN DE LA THA

El enunciado de la Tarea 6 consta de dos preguntas formuladas en relación con una descripción de una configuración que los estudiantes representarán en Cabri 3D (tablas 5.12). La primera pregunta apunta a verificar la aplicación de la definición de rectas alabeadas por parte de los estudiantes. La segunda pregunta, que es la más relevante en el diseño, pretende que los estudiantes se percaten de una relación de perpendicularidad que no se construye, sino que resulta derivada de las otras condiciones que se asignan a la construcción. Esperamos que ese hallazgo resulte sorpresivo para los estudiantes, genere incertidumbre y movilice la necesidad intelectual de justificar por qué se produce esta relación.

El desarrollo de la tarea tiene dos momentos: i) la construcción en Cabri 3D y su exploración en grupos por parte de los estudiantes y ii) la discusión con toda la clase que orienta la profesora.

Tabla 5.12. Elementos centrales de la THA para la tarea 6 en el ciclo 2.

	Construcción y exploración del archivo en Cabri 3D en grupos	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Dados un plano α y un segmento AB contenido en α. Sean las rectas *m* y *n* tales que *m* está contenida en α, A es un punto de *m* y *m* es perpendicular a AB, *n* es perpendicular a α por B. a) ¿Son alabeadas *m* y *n*? Justifique su respuesta. b) ¿Existe un punto C de *n* tal que el segmento CA es perpendicular a γ, siendo γ un plano que contiene a *m*? Justifique su respuesta.	La profesora dirige la discusión con toda la clase destacando la relación de perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. Además, hace notar a los estudiantes que dicha condición no está dada en lo establecido en el enunciado, sino que es resultado de las otras condiciones.
Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Al hacer la exploración de la construcción definida en el enunciado los estudiantes encuentran que para cualquier posición de C sobre la recta *n* la recta *m* queda siempre contenida en el plano perpendicular a AC. Este hallazgo los lleva a indagar por la relación entre AC y *m*. El encontrar que son perpendiculares las dos rectas generará en los estudiantes la incertidumbre y motivará la producción de necesidad intelectual en su búsqueda de argumentos para justificar esa relación de perpendicularidad.	La discusión con toda la clase apuntará a motivar la generación de incertidumbre en aquellos que no se percataron de la relación de perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. Y entre aquellos que, si bien notaron la relación de perpendicularidad, no se percataron que está no está dada en las condiciones de la construcción, sino que resulta de esta. Por otro lado, al discutir las razones por las cuales se produce esta perpendicularidad se motivará la producción de necesidad intelectual en los estudiantes.

5.6.2 TAREA 6, CICLO 3. DESCRIPCIÓN DE LA THA

En el Ciclo 2 evidenciamos que la primera pregunta abarcó más tiempo del previsto y no permitió una discusión más amplía por parte de los estudiantes sobre la segunda pregunta, que para nosotros tenía más interés desde el punto de vista de la generación de incertidumbre. El enunciado de la Tarea 6 para el Ciclo 3 consta de una única pregunta derivada de la situación que deben representar en Cabri 3D (tabla 5.13). Con esta pretendemos que los estudiantes se percaten de una relación de perpendicularidad que no se construye, sino que resulta derivada de las otras condiciones que se asignan a la construcción. Esperamos que ese hallazgo resulte sorpresivo para los estudiantes, genere incertidumbre y movilice la necesidad intelectual de justificar porqué se produce esta relación.

El desarrollo de la tarea tiene dos momentos: uno, la construcción en Cabri 3D y su exploración en grupos por parte de los estudiantes y dos, la discusión con toda la clase que orienta la profesora.

Tabla 5.13. Elementos centrales de la THA para la tarea 6 en el ciclo 3.

	Construcción y exploración del archivo en Cabri 3D en grupos	*Discusión de toda la clase*
Momentos en la ejecución de la tarea.	Dados un plano α y un segmento AB contenido en α. Sean las rectas *m* y *n* tales que *m* está contenida en α, A es un punto de *m* y *m* es perpendicular a AB, *n* es perpendicular a α por B ¿Existe un punto C de *n* tal que el segmento CA es perpendicular a γ , siendo γ un plano que contiene a *m*? Justifique su respuesta.	La profesora dirige la discusión con toda la clase destacando la relación de perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. Además, hace notar a los estudiantes que dicha condición no está dada en lo establecido en el enunciado, sino que es resultado de las otras condiciones.

Anticipación de lo que puede ocurrir en el proceso de ejecución en términos de aprendizaje.	Al hacer la exploración de la construcción definida en el enunciado los estudiantes encuentran que para cualquier posición de C sobre la recta *n* la recta *m* queda siempre contenida en el plano perpendicular a AC. Este hallazgo los lleva a indagar por la relación entre AC y *m*. El encontrar que son perpendiculares las dos rectas generará en los estudiantes la incertidumbre y motivará la producción de necesidad intelectual en su búsqueda de argumentos para justificar esa relación de perpendicularidad.	La discusión con toda la clase apuntará a motivar la generación de incertidumbre en aquellos que no se percataron de la relación de perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. Y entre aquellos que, si bien notaron la relación de perpendicularidad, no se percataron que está no está dada en las condiciones de la construcción, sino que resulta de esta. Por otro lado, al discutir las razones por las cuales se produce esta perpendicularidad se motivará la producción de necesidad intelectual en los estudiantes.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Presentamos en este capítulo las THA de cada una de las tareas, de acuerdo con la estructura que describen Simon y Tzur (2004) para estas: la meta en el aprendizaje de los estudiantes, la tarea matemática que puede ser usada para promover el aprendizaje y las hipótesis acerca de cómo se produce el aprendizaje. Como mencionamos en el capítulo 4, las hipótesis acerca del aprendizaje se han refinado en función de los enfoques: en el contenido, en la mediación, en la generación de incertidumbre y en la producción de necesidad intelectual. A partir de estos enfoques, hacemos la comparación entre la THA y la Trayectoria Real de Aprendizaje (TRA), lo que constituye el núcleo del presente análisis. Esta comparación se hace de acuerdo con cada uno de los enfoques, en donde contrastamos las hipótesis formuladas con lo que ocurrió en la experimentación. Presentamos en cada caso un fragmento ilustrativo procedente de los datos recogidos, para proporcionar evidencia de lo descrito.

Para cada una de las tareas de cada uno de los ciclos presentamos, en primer lugar, la THA y, en segundo lugar, la comparación entre la THA y la TRA. En la comparación, presentamos un comentario general acerca de lo que ocurrió respecto a cada uno de los enfoques.

Los fragmentos ilustrativos presentados pretenden aportar una evidencia puntual de lo que planteamos en la descripción de la TRA. El cuadro completo de lo ocurrido junto con los comentarios analíticos hechos por nosotros se encuentra en los Anexos. Por esa razón en varios pasajes de las TRA remitimos al lector interesado a los Anexos, referenciando el punto donde encontrar la información de acuerdo con la codificación descrita en el Capítulo 4: “si un dato proviene de la tarea 1, en el ciclo 3, en la interacción del grupo de trabajo 3 su codificación será T1C3G3, si proviene de la tarea 3, en el ciclo 2 en la discusión de toda la clase con la profesora su codificación será T3C2P y si, por ejemplo, la información referenciada se encuentra en la tarea 6, ciclo 3 en la conversación-entrevista con el investigador su codificación es T6C3I". En las transcripciones de las interacciones con los nombres de los participantes, sus nombres han sido sustituidos por seudónimos para protección su identidad.

Las secciones del presente capítulo presentan las seis tareas seleccionadas para el análisis. Las subsecciones atienden a cada uno de los ciclos y en estos se sigue la estructura de: THA, THA vs TRA y un comentario de análisis retrospectivo sobre los resultados de cada tarea en cada ciclo.

6.1 ANÁLISIS DE LA TAREA 1

La Tarea 1 corresponde a la parte del curso en la cual se introducen los elementos básicos para hablar del espacio desde una perspectiva teórica. Según el contenido del curso son dos aspectos a los que se hace referencia. Uno, a las diferentes maneras de determinar un plano que son ya conocidas por los estudiantes desde el curso de geometría previo. Dos, a la introducción del Postulado del espacio como el elemento teórico que permite afirmar la existencia de más de un plano en una configuración geométrica dada y por tanto de los objetos de la geometría en el espacio.

Cómo se mencionó en el Capítulo 4, los estudiantes que desarrollaron las tareas en el Ciclo 1(experimentación piloto) ya han visto los cursos de geometría, incluyendo Geometría del Espacio. Los estudiantes que desarrollaron la Tarea 1 en los ciclos 2 y 3, estudiaron por primera vez la materia Geometría del Espacio. Así que, para la formulación de las THA hemos tenido en cuenta esa diferencia.

6.1.1 TAREA 1, CICLO 1

6.1.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

La Tarea 1 tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano. Serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Tarea

Enunciado

En un sistema teórico de geometría euclidiana

a) ¿Cómo se determina la existencia de un plano?

b) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Justifique. ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben cada uno una hoja de trabajo con el enunciado y la instrucción de pensar individualmente la respuesta, consignarla por escrito y luego interactuar con sus compañeros de grupo para producir una solución.

Intervenciones previstas

En este ciclo no hay intervención de la profesora en el trabajo de los grupos, tampoco discusión orientada por la profesora.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Esperamos que en la pregunta a) los estudiantes evoquen los elementos teóricos que conocen para determinar un plano: Postulado[7] puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y cabría una mención a la definición de rectas paralelas que incluye la coplanariedad de éstas. En la pregunta b) esperamos que los estudiantes contrasten postulados, ya que no existen definiciones de referencia para determinar por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta y espacio y punto. Por tratarse de objetos no definidos de la geometría, deben recurrir al Postulado del espacio, al Postulado puntos-plano y al Postulado de la recta para hablar de lo que diferencia a estos pares de objetos.

Enfoque en la mediación (Em). En el Ciclo 1 del experimento no hay trabajo de generación de signos con el uso de artefactos específicos, como Cabri 3D o los palos y plastilina para hacer un modelo físico y representar la situación, así como tampoco intervención de la profesora. Por lo tanto, no se hace seguimiento a este enfoque en este ciclo.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se prevé que se presenten puntos de vista diferentes respecto a cómo "determinar la existencia de un plano" y "cómo establecer la diferencia entre espacio y plano", que den lugar a incertidumbre. Estos puntos de vista diferentes pueden generar discusión produciendo duda, entre los integrantes de los grupos de trabajo, acerca de la manera en la cual plantear las respuestas a las preguntas formuladas.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión sobre los puntos de vista diferentes debe llevar a la búsqueda y expresión de argumentos en la teoría estudiada en los cursos de geometría. Los estudiantes pueden recurrir a los postulados y teoremas que proporcionan las garantías teóricas para determinar un plano y establecer por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta, espacio y

[7] Los elementos del sistema teórico citados en este capítulo tendrán un hipervínculo al capítulo 5 en donde está la descripción de estos para el lector interesado en consultarlos en el momento.

punto. La exposición de estos argumentos teóricos hará evidente para nosotros la necesidad intelectual. La expresión de argumentación productiva, junto con los indicios de satisfacción con el resultado obtenido, nos permitirán determinar si se ha producido la justificación epistemológica.

6.1.1.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran o mencionaran los elementos para determinar un plano: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y definición de rectas paralelas. Para hacer la diferencia entre espacio y los otros objetos se tenía previsto que evocaran: el Postulado Puntos-plano, el Postulado de la recta, el Postulado del espacio y la característica de ser objetos no definidos el punto, la recta y el plano.	En T1C1G1, los estudiantes mencionaron varios de los elementos previstos: Postulado puntos-plano, Teorema rectas-plano, definición de rectas paralelas y aluden al Postulado del espacio. En el T1C1G2, mencionaron el Postulado puntos-plano y aludieron al Postulado del espacio. Ambos grupos mencionaron el Postulado de existencia, para argumentar la existencia del plano.
Fragmento ilustrativo de la interacción registrada en T1C1G1	
En el fragmento que sigue, el estudiante está hablando de las maneras de determinar un plano para dar respuesta a la pregunta a)	
5. Alejandro:	Pero es que hay varias formas (…) dos rectas que se intersequen, la intersección de dos rectas (…) existe un único plano; dados tres puntos no colineales, existe un único plano (…) o también, por el postulado de la existencia. Pues, en nuestro sistema teórico.

Los elementos teóricos de geometría previstos en el enfoque en el contenido de la THA aparecen mencionados por los estudiantes, y adicionalmente ellos mencionan del Postulado de existencia. La mención del Postulado de existencia no estaba prevista pues en la organización teórica del curso este postulado aparece para garantizar que los planos existen como objetos geométricos, pero no para determinar un plano en particular. La mención por parte de los estudiantes a este postulado probablemente atiende a la presencia de la palabra “existencia” en el enunciado de la tarea.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei): Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado de distintos puntos de vista respecto a las condiciones que permiten determinar un plano, que surgiesen distintos puntos de vista acerca de los elementos para establecer la diferencia entre espacio y plano, espacio y recta y espacio y punto.	En el T1C1G1, hay diferentes perspectivas en torno a sí es suficiente con argumentar que los cuatro puntos no deben ser colineales para establecer la diferencia entre espacio y plano que es lo que se indaga en la pregunta (b). En el T1C1G2, no hay discusión al respecto.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Se tenía previsto que la necesidad intelectual y la justificación epistemológica se expresaran mediante la exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre acerca de cuáles son los elementos que garantizan la existencia de un plano. Asimismo, se esperaba que los estudiantes expusiesen argumentos teóricos respecto a la diferencia entre espacio y plano, espacio y recta, espacio y punto, como resultado de la situación de incertidumbre generada por la emergencia de diferentes perspectivas. Finalmente, se preveía que fuese posible evidenciar en las interacciones de los estudiantes la argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos.	En T1C1G1 se plantearon una pregunta que pudo haber generado un desarrollo interesante en términos de necesidad intelectual, al abordar la parte (b), cuando Alejandro dice “Pero digamos eso, ¿en qué marca la diferencia?” Sin embargo, no se produjo un desarrollo en términos de discusión en el grupo. En T1C1G2 al no haberse evidenciado una presencia decisiva de generación incertidumbre tampoco hay evidencia de producción de necesidad intelectual.

Fragmento ilustrativo de la interacción registrada en T1C1G1	
En la intervención de Antonia, con la cual inicia el fragmento ilustrativo, ella está tratando de dar respuesta a la pregunta (b): ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? y por eso la respuesta de Alejandro habla de “marcar la diferencia”.	
Antonia:	(…) cuatro puntos no colineales (…) para el plano se necesitarían tres. Se necesitan cuatro puntos cada trío de ellos no colineales.
Alejandro:	Pero digamos eso, ¿en qué marca la diferencia? Es lo que estoy pensando.
Antonia:	¿Cómo así?

Alejandro:	Es que ahí dice "cuál es la diferencia". ¿Cuándo se determina un plano y cuándo se determina un espacio?
El fragmento ilustrativo termina aquí porque la discusión no tuvo más desarrollo.	

Al constatar la TRA con lo previsto en la THA respecto a la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual verificamos que, si bien se produjeron dos perspectivas distintas como las de Antonia y Alejandro, estas no tuvieron desarrollo en términos de discusión. Hay una expresión de duda en Alejandro cuando dice "eso ¿En qué marca la diferencia?" y en Antonia cuando replica ¿Cómo así? Lo que nos permite concluir que se generó incertidumbre en la interacción en este grupo, más no tuvo un desarrollo en la producción de necesidad intelectual. En T1C1G2, no hay evidencia de generación de incertidumbre.

Como se señala en el análisis en extenso, no parece ser suficiente el diseño estructurado en este ciclo para generar incertidumbre y producir necesidad intelectual. Esperamos que dos modificaciones introducidas a la Tarea 1 para el Ciclo 2 contribuyan a mejorar en estos aspectos. La primera es la mediación de la profesora. Mediación qué, cómo se señaló al inicio de esta sección, no se produjo en el Ciclo 1. Y la segunda, es la supresión de la palabra "existencia" en el enunciado de la tarea, pues, como dijimos previamente, parece haber orientado la atención de los estudiantes en una dirección no deseada, al considerar que el Postulado de la existencia basta para resolver la pregunta (a).

6.1.2 TAREA 1, CICLO 2

6.1.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

La tarea uno tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano, pues a partir de ese punto serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Tarea

Enunciado

En geometría euclidiana a) ¿Cómo se determina un plano? (b) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Justifique. ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben una hoja de trabajo por grupo. La información que reciben es que deben discutir la respuesta a las preguntas y escribir la que consideren como respuesta del grupo en la hoja.

Intervenciones previstas

La profesora y el investigador intervendrán con preguntas o cuestionamientos a los grupos de trabajo. El investigador lo hará especialmente en el grupo que se encontrará registrando en vídeo. En la siguiente sesión de clase, la profesora orientará una discusión con toda la clase a partir de lo consignado por los grupos en las hojas de trabajo.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Esperamos que en la pregunta a) los estudiantes evoquen los elementos teóricos que conocen para determinar un plano: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y cabría una mención a la definición de rectas paralelas que incluye la coplanariedad de éstas. En la pregunta b) esperamos que los estudiantes evidencien la necesidad de garantizar un punto fuera del plano, es decir que reconozcan la necesidad de formular el Postulado del espacio y de esta manera identifiquen la necesidad de contrastar postulados, ya que no existen definiciones de referencia para determinar por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta y espacio y punto.

Enfoque en la mediación (Em). No hay prevista una acción decisiva de los artefactos. La intervención de la profesora estará orientada a promover una discusión sobre las producciones de los estudiantes, planteará cuestionamientos sobre lo realizado para generar duda cuando los estudiantes contrasten lo que han escrito en sus hojas de trabajo con el conocimiento matemático de referencia.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se prevé que se presenten puntos de vista diferentes respecto a cómo abordar las preguntas y que estos den lugar a una discusión generando duda entre los integrantes de los grupos de trabajo acerca de cómo presentar las respuestas a las preguntas formuladas. Adicionalmente, se espera que la discusión de toda la clase con la profesora movilice en los estudiantes la incertidumbre expresada como duda o sorpresa ante los cuestionamientos planteados por ella.

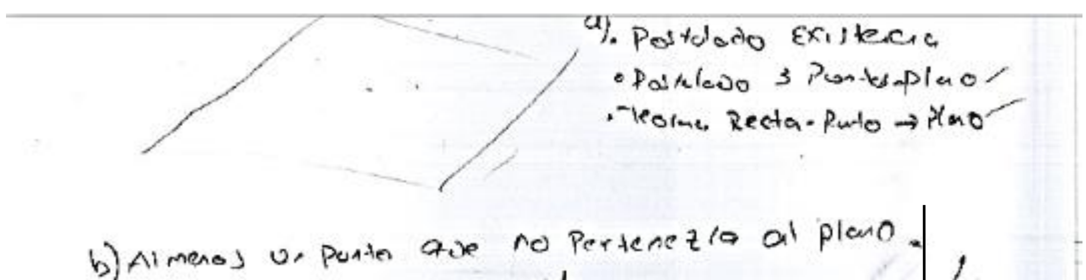
Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor los puntos de vista diferentes debe llevar a la búsqueda de argumentos en la teoría estudiada en los cursos de geometría, recurrir a los postulados y teoremas que proporcionan las garantías teóricas para determinar un plano y establecer por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta, espacio y punto. Esta búsqueda será expresión de necesidad intelectual. Los argumentos planteados procedentes de la teoría de referencia darán evidencia de la argumentación productiva y si estos resultan satisfactorios para los estudiantes se podrá verificar que se ha producido la justificación epistemológica.

6.1.2.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Esperábamos que los estudiantes evocaran en la discusión los siguientes elementos teóricos: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano, Definición de rectas paralelas. También que reconociesen la necesidad de incluir en el sistema teórico de referencia el Postulado del espacio.	Los dos grupos de trabajo mencionaron el Postulado puntos-plano y reconocieron la necesidad de garantizar la existencia de un punto fuera del plano. En el GT1 mencionaron el Teorema recta-punto-plano y el Postulado de existencia que no había sido contemplado en la THA.
Fragmento ilustrativo de las hojas de trabajo de G1 y G2	

A continuación, presentamos lo que reportaron en la hoja de trabajo cada uno de los dos grupos, al finalizar la interacción, como respuesta a las dos preguntas del enunciado.

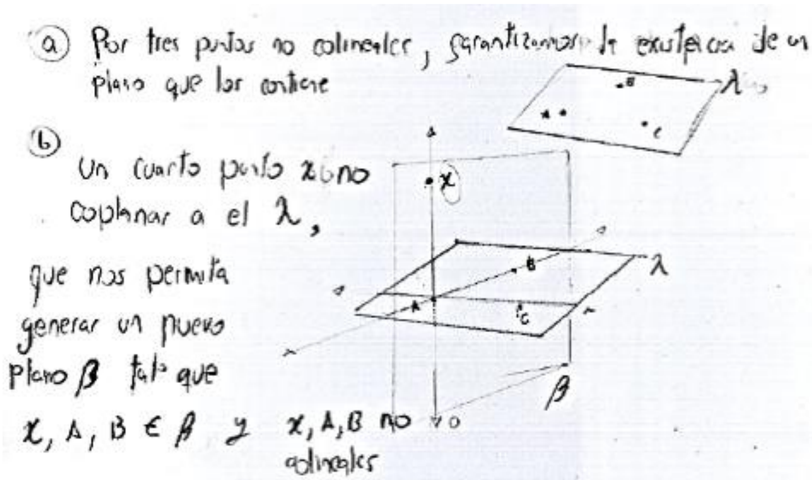
Hoja de trabajo G1


a). Postulado Existecia
• Postulado 3 Puntos-plano
• Teoma Recta-Punto → Plano
b) Al menos un Punto que no Pertenezla al plano.

a)
- Postulado Existencia
- Postulado 3 Puntos-plano
- Teorema Recta-punto-plano

b) Al menos un punto que no pertenezca al plano.

Hoja de trabajo G2



En el enfoque en el contenido de la THA previmos que los estudiantes evocarían unos elementos teóricos para determinar un plano y reconocerían la necesidad de introducir un elemento teórico para diferenciar el espacio del plano.

En la TRA verificamos que, así no aparezcan todos los elementos teóricos previstos en las respuestas a la pregunta (a), lo planteado se corresponde con la meta de aprendizaje establecida. Lo que no sucede respecto a la meta, es que surgiese un amplio espectro de respuestas respecto a cómo determinar un plano. Vemos que la pregunta debe formularse de otra manera, pues preguntamos cómo determinar un plano, no "todas" las maneras que conozcan para determinarlo. Respecto a lo previsto en la THA sobre la pregunta (b), en la TRA se evidencia en ambos grupos el reconocimiento de la necesidad de introducir el Postulado del espacio. En G1 con su declaración de "al menos un punto que no pertenezca al plano" y en G2 lo expresan como "un cuarto punto no coplanar a el λ".

Enfoque en la mediación (Em)

THA	TRA
Teníamos previsto que la profesora cuestionará lo planteado por los estudiantes a partir de sus producciones escritas, contrastando estas con el conocimiento	La profesora realizó lo que se tenía previsto en la THA haciendo una selección de lo consignado en las hojas de trabajo como solución de los estudiantes y planteando cuestionamientos a las soluciones.

matemático de referencia.	Particularmente aquellas que mencionan el Postulado de la existencia como respuesta a la pregunta (a) y aquellas que hablan de un punto fuera del plano cuando responden a la pregunta (b).

Fragmento ilustrativo de la interacción T1C2P

La profesora lee la respuesta a la pregunta ¿Cómo se determina un plano? y cuestiona la respuesta de aquellos estudiantes que dijeron que con el Postulado de la existencia. Luego, la profesora considera la respuesta a la pregunta ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?

Profesora:	Algunos de ustedes mencionaron, porque la primera pregunta decía ¿Cómo se determina un plano? Y algunos de ustedes dieron las siguientes respuestas [proyecta en la pantalla las respuestas de las estudiantes clasificadas por ella]. Ésta era la primera pregunta y me dijeron algunos: [Leyendo] “El plano existe por el Postulado de la existencia” […] El Postulado de la existencia ¿Qué es lo que dice?
Estudiantes:	[En coro] existen planos, puntos y rectas
Profesora:	“Qué existen planos, puntos y rectas” [parafraseando lo dicho por los estudiantes]. No me dice cómo determinar un plano, me dice que si yo quiero determinar un plano no estoy perdiendo mi tiempo porque existe, pero determinarlo es encontrar al plano ¿cómo lo encuentro? […] Pero la de abajo [señala una de las respuestas proyectadas en la pantalla] dice: “necesito un plano y un punto que no esté en el plano”. ¿Lo puedo asegurar? ¿Existirá un punto que no esté en el plano? ¿Con el sistema teórico que tenemos hasta ahora? No. Todo lo hemos hecho en el plano, luego si yo quiero que esto se dé, me va a tocar introducir un postulado, un plano y un punto que no está en el plano.

Respecto al enfoque en la mediación planteado en la THA la profesora desarrolla una interacción con toda la clase en la cual hace cuestionamientos a lo propuesto por los estudiantes en sus soluciones. En lo expresado por los estudiantes en esa interacción no hay evidencia que nos permita determina si se generó incertidumbre o se produjo necesidad intelectual.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)

THA	TRA
La interacción en los grupos generará incertidumbre en los estudiantes respecto a las respuestas a formular en cada una de las preguntas.	En el G1, son visibles los puntos de vista distintos en cada una de las dos preguntas. No tanto así en el G2 dado que allí parece haber consenso desde la primera formulación de opciones de respuesta. Aunque esto no es

	necesariamente un indicio de ausencia de duda. La evidencia sugiere que se produjo la incertidumbre deseada.

Fragmento ilustrativo de T1C2G1

En la primera interacción Carlos le cuestiona a Juan que el Postulado de la existencia baste para determinar un plano, cuando están discutiendo la respuesta a la pregunta (a). Y se presentan puntos de vista distintos para responder a la pregunta.

Juan: Pero entonces usted decía que por el postulado…por el Postulado de la existencia …
Carlos: El Postulado de la existencia me dice que existe ¿Pero usted cómo lo determina?

En la segunda interacción Carlos le pregunta por la garantía teórica de la existencia de distintos planos y orienta la discusión en la misma dirección respecto a recta y punto y recta y plano.

Juan: Es que acá dice: ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Pues decir que hay más de un plano y qué el plano es distinto a éste.
Carlos: Bueno, pero ¿usted cómo sabe qué hay distintos planos?
[…]
Carlos: Tenemos el punto y la recta ¿cómo sabemos que son diferentes el punto y la recta?
Juan: Porque la recta tiene infinitos puntos.
Carlos: Cierto, más puntos, eso. Ahora la recta y el plano.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)

THA	TRA
Teníamos previsto que se produjera una búsqueda teórica en la cual los argumentos expresados procediesen del sistema teórico de referencia para garantizar la diferencia entre los objetos mencionados en la parte (b) de la pregunta y que los estudiantes expresaran satisfacción con la respuesta establecida.	Los dos grupos expresan argumentos teóricos con base en el sistema de referencia para diferenciar los objetos. Sin embargo, solamente en el G1 es claro el reconocimiento de la necesidad de introducir un elemento teórico nuevo para hablar de la diferencia del espacio con los otros objetos geométricos mencionados.

Fragmento ilustrativo de T1C2G1

En la interacción Carlos está reflexionando acerca de lo que implica mencionar un punto que no pertenezca al plano y cómo eso permite argumentar que son diferentes el espacio y el plano. Cuando Juan afirma que el espacio contiene infinitos puntos, Carlos cuestiona esto como argumento que diferencie espacio y plano.

Carlos: Dos conjuntos son iguales si sus elementos son los mismos, si tenemos un único elemento que no pertenezca a uno…
Juan: …ya son distintos [completa lo dicho por Carlos]. (Lee la pregunta (b) nuevamente) Pues que el espacio tiene infinitos puntos ¿no?
Carlos: No, porqué el plano también.
Juan: Pero es que estos puntos están contenidos [en el plano] y hay uno acá (pone el dedo representando el punto que está por fuera del plano).

Acerca del enfoque en la generación de incertidumbre la comparación entre la THA y la TRA sugiere que el enunciado sí genera duda en los estudiantes, aunque se expresa de manera distinta en los dos grupos de trabajo. En el G1 se expresa como debate lo cual es visible en la interacción entre Carlos y Juan. En el G2 la duda se expresa como las pausas en la argumentación de un integrante que complementa otro con información relevante (estas no se consignan acá como fragmento ilustrativo por su extensión, se encuentran en los anexos).

Al comparar la THA y la TRA respecto al enfoque en la producción de necesidad intelectual, vemos que el enunciado parece contribuir a su propósito pues los estudiantes producen los argumentos en la dirección deseada: reconocen que es necesario hablar de un punto que no pertenece al plano y argumentan alrededor de esto una respuesta que les resulta satisfactoria. Esto se evidencia en la interacción entre Carlos y Juan acerca de la diferencia entre espacio y plano, cuando Carlos plantea el argumento “Dos conjuntos son iguales si sus elementos son los mismos, si tenemos un único elemento que no pertenezca a uno…” que Juan complementa.

En el Ciclo 3 quisimos probar una vía distinta para generar las respuestas a la pregunta (a), pues como señalamos anteriormente, la intención es que los estudiantes consideren diversas formas de determinar un plano y añadir un contexto práctico para determinar planos. Por otro lado, teníamos la intención de procurar extender en el diseño el uso de artefactos, particularmente de Cabri 3D en todas aquellas tareas en donde fuese posible introducir su uso. Por esa razón el enunciado de la tarea, aunque enmarcada en la misma meta, es distinto respecto a los ciclos 1 y 2.

6.1.3 TAREA 1, CICLO 3

6.1.3.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

La tarea uno tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano, pues a partir de ese punto serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Tarea

Enunciados

1. Sean A, B, C y D cuatro puntos. ¿Qué figura sería la unión de segmentos determinados por estos puntos, si ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos?
2. ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio sea diferente a un punto, una recta y un plano?
3. Dados A, B, C y D en el plano base de Cabri 3D. Y los segmentos AB, BC, CD y DA Redefina uno de los puntos para que no pertenezca al plano base.

a) ¿Es la nueva figura determinada un cuadrilátero? Justifique

b) Vamos a denominar a la nueva figura "Cuadrilátero plegado". Redacte una definición para éste.

c) Una vez acordada la definición de cuadrilátero plegado, redefinir un segundo punto fuera del plano base. ¿Es otro objeto geométrico? ¿Es necesaria una definición de cuadrilátero doblemente plegado?

4. En una línea de una demostración de geometría del espacio un estudiante ha escrito una aserción. Escriba todas las posibles garantías que conozca para dicha aserción, y datos correspondientes que posibilitaría usar dicha garantía (Si necesita poner más filas, puede hacerlo):

Aserción	Garantía	Datos
Sea el plano α		

Instrucciones adicionales e Intervenciones previstas

El enunciado 1 debe ser desarrollado por escrito en hojas de trabajo, primero individuales y luego en grupos. En una clase posterior al desarrollo de las hojas de trabajo, al examinar la posibilidad de que los cuatro puntos no sean coplanares, la profesora desarrolla una actividad de clase en la cual ilustra la función *redefinir* de Cabri 3D para que uno de los cuatro puntos representados en un plano, esté fuera de ese plano. A partir de la discusión generada en esa actividad se entrega a los estudiantes una hoja de trabajo individual con el enunciado 2, la cual desarrollan en grupos.

Una vez discutidas las soluciones que aportan los estudiantes al enunciado 2, la profesora introduce la discusión del enunciado 3. Plantea la pregunta 3 (a) a partir de la representación hecha por ella para toda la clase en Cabri 3D, de la situación descrita en la cual se redefine uno de los cuatro puntos por fuera del plano. La parte 3 (b) se hace también en discusión con toda la clase, construyendo la definición del "cuadrilátero plegado". La representación descrita en 3 (c) la hace la profesora y las preguntas que contiene esta se plantean para ser discutidas con toda la clase.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con el enunciado 1 se quiere indagar si los estudiantes consideran la situación con uno de los cuatro puntos fuera del plano determinado por los otros tres. Esto, dado que inician el curso de Geometría del Espacio y las situaciones deben estudiarlas en más de un plano a diferencia de lo que venían haciendo en los cursos previos. Con el enunciado 2 se espera que los estudiantes reconozcan la necesidad de introducir en el sistema teórico el Postulado del espacio, al igual que ocurrió con las tareas de los ciclos 1 y 2. En el enunciado 3 se espera, por un lado, que los estudiantes reconozcan la necesidad del Postulado del espacio para obtener la configuración con uno de los puntos del "cuadrilátero plegado" por fuera del plano. Y, por otro lado, que usen en el contexto de una configuración geométrica específica distintas maneras de determinar un plano. Particularmente en 3(c) cuando reconozcan que el plano base ha cambiado respecto al inicialmente dado (figuras 6.1 y 6.2). El enunciado 4 reformula la que era la primera pregunta d la tarea de los ciclos 1 y 2. En este caso esperamos que los estudiantes escriban las diferentes maneras de determinar un plano que pueden evocar: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto plano, Teorema rectas-plano y Definición de rectas paralelas.

Enfoque en la mediación (Em). En el desarrollo de los enunciados 2 y 3 Cabri 3D desempeña un papel relevante. El uso que haga la profesora de la herramienta redefinir en el desarrollo de esta tarea, busca ilustrar la posibilidad de determinar puntos por fuera de un plano dado. En 3 (c), al redefinir los dos puntos por fuera del plano base, y este plano permanecer aún representado, se espera generar incertidumbre en los estudiantes acerca de la definición de cuadrilátero plegado formulada, pues la definición que pueden construir en 3 b) probablemente no se ajuste a lo que están observando (figuras 6.1 y 6.2).

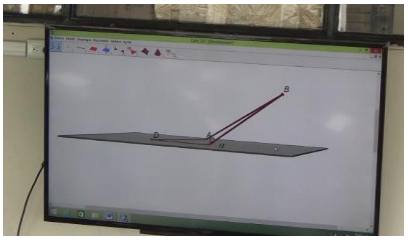


Figura 6.1. Representación con un vértice fuera del plano base.

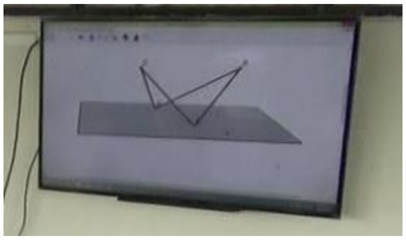


Figura 6.2. Representación con dos vértices fuera del plano base.

El papel de la mediación de la profesora es esencial para la generación de incertidumbre en el momento ya mencionado, pues es ella quien hace la representación en el software e introduce los cuestionamientos relevantes para la discusión respecto a la definición de “cuadrilátero plegado”.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que en el desarrollo de al menos dos de los enunciados la duda sea manifiesta por parte de los estudiantes: en el enunciado 2, al discutir la diferencia entre espacio y plano y en el enunciado 3, al contrastar la definición de cuadrilátero plegado con sus posibles representaciones. El momento central respecto a la generación de incertidumbre en el diseño de esta tarea es la discusión de 3 (c), pues allí esperamos generar duda respecto a las condiciones que debe cumplir un objeto geométrico para ser un cuadrilátero plegado. Esperamos que se produzca la duda al contrastar las condiciones establecidas para definirlo y la representación que se ofrece al redefinir dos puntos del cuadrilátero. También buscamos que en la discusión del enunciado 1, la acción de redefinir un punto fuera del plano y la solicitud de la profesora de estudiar esa situación con el enunciado 2, genere en los estudiantes duda respecto a cómo garantizar teóricamente la diferencia del espacio con los otros objetos.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se espera que la búsqueda teórica se produzca en el momento en el cual la profesora desarrolla la discusión con toda la clase acerca de los enunciados 2 y 3 (c), pues allí deben presentar los argumentos teóricos que garanticen un punto fuera del plano en un caso y en el otro los que garanticen que el cuadrilátero con dos vértices fuera del plano base es un cuadrilátero plegado. El planteamiento de estos argumentos proporcionará evidencia acerca de la experimentación de necesidad intelectual por parte de los estudiantes y será expresión de argumentación productiva la cual junto con las manifestaciones de satisfacción con los argumentos exhibidos hará ostensible la justificación epistemológica.

6.1.3.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que el Postulado del espacio surgiera como una necesidad en la discusión del enunciado 2, al hacer uso los distintos elementos teóricos que permiten determinar un plano, en los enunciados 3 (c) y 4: el Postulado puntos-plano, el Teorema recta-punto-plano, el Teorema rectas-plano y la definición de rectas paralelas para determinar un plano.	En la discusión del enunciado 2 surge el Postulado del espacio. Adicionalmente, la profesora proporciona la definición de espacio y los estudiantes expresan ideas relevantes acerca de la diferencia entre plano y espacio, aunque no muy claramente justificadas cómo: hay relaciones de contenencia entre el plano y el espacio y existen infinitos planos. En la discusión del enunciado 3 c) los estudiantes hacen uso del Postulado puntos-plano. En el desarrollo del enunciado 4 aparecen los elementos teóricos previstos para determinar un plano y adicionalmente otros no contemplados por nosotros en la THA como: definición de ángulos adyacentes, definición de cuadrilátero y Teorema ángulo figura coplanar.

Fragmento ilustrativo T1C3P

La profesora ha examinado las respuestas consignadas por los estudiantes en sus hojas de trabajo. Con ese material desarrolla lo que plantea a toda la clase, en este fragmento, proyectando en la pantalla las respuestas que irá discutiendo.

Profesora:	¿Es el espacio diferente a un punto, una recta, un plano? Ustedes tenían que responder esta pregunta. Vamos a analizar las diferentes respuestas que yo encontré. (…). “La diferencia con el punto, la recta y el plano es que el espacio es la unión de todos esos infinitos conjuntos” [lee una de las respuestas]. Esa no es la diferencia. Pero aquí comenzó y me gustó mucho, porque ese es el recorrido que hemos ido haciendo, comenzamos con un punto, pero el Teorema existencia me dice existen las rectas. Bueno si existen las rectas y le pusieron ese nombre diferente a punto ¿Cuál es la diferencia entre punto y recta? Y ahí fue donde nació la necesidad de que la recta tuviera por lo menos dos puntos. Porque si no, no sería distinta al punto que yo ya sé que existe. Y el postulado me dice: existen las rectas. Entonces yo la tengo que diferenciar [la recta del punto]. Y tan pronto yo dije: la recta debe tener por lo menos dos puntos, fue que descubrimos que tenía más de dos puntos, infinitos puntos. Pero se necesitaban dos puntos para yo poder hablar de recta, determinan una única recta. Y entró ese postulado [el postulado dice “dados dos puntos existe una única recta que los contiene”] ¿Sí? Y después dijimos: bueno, ¿Y el plano?, También existe ¿Pero ¿qué lo hace distinto a la recta?, Y fue como dicen ahí los tres puntos, pero necesitamos un postulado que me dijera, que dice ¿Qué?
Juan:	Que dados tres puntos no colineales…
Profesora:	Puntos-plano. Esos tres puntos no colineales generaron el plano, del cual descubrimos tenía infinitos puntos. Eso lo demostramos hace poco ¿No? Entonces ahí se ha mostrado cómo se ha ido ampliando nuestro universo y al irlo ampliando hemos metido postulados. Y con esos postulados hemos demostrado teoremas sobre esos objetos geométricos. “Debe ser más de un punto [lee una de las respuestas de los estudiantes que alude a la diferencia

	entre punto y espacio], así el espacio no sería un punto. Debe ser infinitos puntos no colineales, pues si no sería una recta. No puede ser tres puntos no colineales porque estos determinan un plano. Por lo tanto, el espacio debe determinarse por cuatro puntos no coplanares" [lo que se encuentra entre comillas es lo que la profesora lee de lo escrito por los estudiantes]. Entonces ahí se ve la necesidad de tener un punto más y que cumpla una propiedad especial que los cuatro puntos no sean coplanares. "Dados cuatro puntos [lee otra respuesta] cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos". Eso, dicen ellos, daría lugar al espacio. Cuatro puntos, ¿Por qué dicen cada tres de ellos no colineales?

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperábamos qué: La herramienta redefinir fuera útil para sugerir la necesidad del Postulado del espacio. La herramienta redefinir junto con la acción de la profesora diera lugar a un debate relevante respecto a la definición de cuadrilátero plegado en el enunciado 3 (c), pues para algunos la representación con dos puntos fuera del plano base (figura 6.2) es un cuadrilátero plegado y para otros no lo es.	Las previsiones de la THA se verifican en los dos casos. Los estudiantes sugieren diversas maneras de enunciar el Postulado del espacio. La mediación de la profesora en la discusión y el uso de Cabri 3D, da lugar a un debate en torno a la representación ofrecida y al cumplimiento de las condiciones para ser un cuadrilátero plegado cuando abordan el enunciado 3 (c).

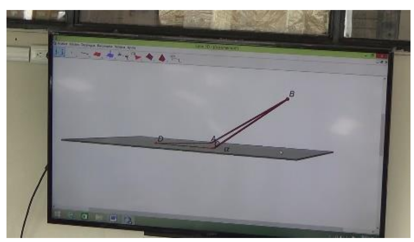
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Esperábamos que la incertidumbre se manifestara en los estudiantes en dos momentos: Al buscar cómo garantizar teóricamente que el espacio es diferente a un plano, una recta y un punto. Y al contrastar la representación con dos vértices redefinidos (figura 6.2) con la definición del cuadrilátero plegado en la discusión del enunciado 3 (c).	Respecto a la previsión de la aparición de la incertidumbre en la discusión de las respuestas al enunciado 2, no hay evidencia concluyente. En el registro de la discusión de la profesora con la clase, ella presenta las distintas soluciones, pero no es evidente una discusión entre diferentes puntos de vista. En la discusión de la profesora con toda la clase a las respuestas al enunciado 3, son evidentes los puntos de vista diferentes y esta información se corrobora en la entrevista con el investigador. En el abordaje de las respuestas a este enunciado se genera incertidumbre en los estudiantes.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Esperábamos que la duda generada en torno la justificación motivase la búsqueda teórica y diera lugar a argumentación productiva en los enunciados 2 y 3, para determinar la diferencia del espacio con los otros objetos y para establecer sí la representación con dos vértices fuera del plano base corresponde o no a un cuadrilátero plegado.	En las soluciones al enunciado dos, son visibles los argumentos teóricos exhibidos en las hojas de trabajo. Pero parecer ser que la pregunta dirige la solución hacía ese tipo de respuesta. Y no hay evidencia que esto haya sido producto de la experimentación de incertidumbre por parte de los estudiantes. En la discusión de las respuestas al enunciado 3 (c) es visible la búsqueda teórica por parte de los estudiantes para justificar por qué la representación con dos vértices fuera del plano base sí cumple la definición. Incluso se presentan dos soportes teóricos distintos a los previstos: el Postulado puntos-plano y el Teorema rectas-plano. Lo que no es visible es la justificación epistemológica dado que no hay manera de verificar el alcance de la convicción en todo el grupo.

Fragmento ilustrativo de T1C3P

En la interacción que sigue a continuación la profesora discute con los estudiantes los enunciados 3(b) y 3 (c). Aborda la definición de cuadrilátero plegado y pregunta si al redefinir otro punto del cuadrilátero plegado fuera del plano base, la figura representada continúa cumpliendo la definición de cuadrilátero plegado.

Profesora: ¿Es un cuadrilátero?



Jeison: Pues en el espacio de pronto puede ser un cuadrilátero, pero en el plano no…

[…]

Profesora: No es un cuadrilátero. Ahí vemos que no. Pero me gusta esa figura […] le vamos a dar un nombre. Lo vamos a llamar cuadrilátero plegado. ¿Está plegado, cierto? Está doblado. ¿Cómo lo definimos? (…). Entonces, vamos a hacer un listado de las propiedades y de ahí sale la definición ¿Cierto? Entonces, cuatro puntos no coplanares [escribe]…

[…]

Adriana: Profesora, o sea que si llegamos a redefinir C y lo sacamos del plano…

Profesora: Ah ahorita miramos eso, definamos el que tengo ahí.

[…]

¿Ya hicieron su representación en el computador del cuadrilátero plegado? A ver, hagan rápidamente la representación del cuadrilátero plegado, a ver si me falta o me sobra, o… de pronto no necesito algo

Juan: No ¡Le falta!

Profesora:	¿Qué pasa? ¿Qué falta?
Juan:	Queremos que exactamente un punto que no sea coplanar (…) ¿Pero ¿qué pasa si C no es coplanar, también?
Profesora:	¿Qué pasa si por ejemplo a D lo redefino? Bueno [trabajando en el computador para representar el cuadrilátero con dos puntos “fuera” del plano base] qué pasa si a D, si a D…Si a D, lo redefino. ¡Ah que bonito esto!  ¿Tengo otra figura que de pronto queremos darle otro nombre?, ¿Doblemente plegado o algo así?
[…]	
Jeison:	Si hacemos un plano que contenga a los puntos B, A y C vamos a obtener lo mismo.

Fragmento ilustrativo de T1C3I

En lo que sigue a continuación, el investigador está sosteniendo una conversación-entrevista con la clase. Les muestra fragmentos de vídeo de la discusión de la profesora con toda la clase y hace preguntas a algunos estudiantes en particular de acuerdo con sus intervenciones en la clase registrada.

Arturo:	Sí, ahí ya habían sacado B y D. ¿Qué hubiera pasado si hubiéramos sacado C, también?
Investigador:	O sea, usted está proponiendo sacar un tercer vértice.
[…]	
Zayde:	Igual si se saca el punto C del plano original, va a determinar un plano beta que va a contener los puntos A, B y C. Va a suceder lo mismo, cuatro puntos, cada tres no colineales. Va a cumplir la definición.
Profesora:	Arturo: ¿Estás de acuerdo?
Arturo:	Se hubiera eliminado…se hubiera sustituido el plano gris [se refiere al plano base que trae Cabri 3D por defecto], el plano gris perdería toda…

El reconocimiento por parte de los estudiantes de la necesidad de plantear un elemento teórico como el Postulado del espacio se había previsto respecto al enfoque en el contenido. Este reconocimiento se produce, como puede verificarse en la TRA, cuando la profesora discute con toda la clase las respuestas consignadas por los estudiantes en las hojas de trabajo al abordar el enunciado 2. La profesora lee respuestas planteadas por los estudiantes como: “No puede ser tres puntos no colineales porque estos determinan un plano. Por lo tanto, el espacio debe determinarse por cuatro puntos no coplanares”, “Dados cuatro puntos cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos”.

También, respecto al enfoque en el contenido, se esperaba en la THA que los estudiantes expresaran distintas maneras de determinar un plano. Esto ocurre en dos momentos del desarrollo de la tarea y así se evidencia en la TRA. El primero, cuando la profesora discute con los estudiantes el desarrollo del enunciado 3 (c) uno de ellos expresa “Si hacemos un plano que contenga a los puntos B, A y C vamos a obtener lo mismo” y allí está determinando un plano distinto al plano base que tiene representado en Cabri 3D la profesora. El segundo, en las hojas de trabajo en las cuales responden al enunciado 4. Consignan allí las maneras de determinar un plano, unas acordes a lo esperado en la THA y otras distintas, como la definición de ángulos adyacentes y un teorema que ellos denominaron “ángulo figura coplanar”.

Acerca del enfoque en la mediación, uno de los resultados que planteamos como esperados fue que la herramienta redefinir de Cabri 3D era de utilidad para sugerir a los estudiantes la introducción en el sistema teórico del Postulado del espacio. En la información recogida, que constituye la TRA, no encontramos evidencia que permita corroborar esa suposición. El otro resultado esperado, respecto al enfoque en la mediación, era que la acción de la profesora, junto con el uso que hace de la herramienta redefinir en Cabri 3D, podría generar debate que diese lugar a incertidumbre. Esto efectivamente ocurrió al discutir la profesora con toda la clase el enunciado 3 (c) y más aún en el enunciado 3 (c).

En la THA dijimos, sobre el enfoque en la generación de incertidumbre, que esperábamos que se generase incertidumbre en dos momentos: al abordar el enunciado 2 (donde se pregunta por la diferencia entre espacio y plano) y cuando se discute la solución al enunciado 3 c) (la definición del cuadrilátero plegado aplicada a la representación con dos vértices fuera del plano base en Cabri 3D). El registro de información que tomamos en este Ciclo 3 no es suficiente para afirmar si al abordar el enunciado 2 hay expresiones de incertidumbre.

Respecto a la discusión sobre la solución al enunciado 3 (c), lo observado en la interacción de los estudiantes con la profesora permite evidenciar la generación de incertidumbre, como duda y producción de debate en la clase. Cuando Juan expresa: “No ¡Le falta!”, “Queremos que exactamente un punto que no sea coplanar (…) ¿Pero ¿qué pasa si C no es coplanar, también?” está planteando un punto de vista que es representativo de lo que piensan varios de los estudiantes en ese momento, pues así lo expresaron en la conversación-entrevista con el investigador. Puede verificarse en los anexos T1C3I líneas 23, 33, 42 y 76, en donde otros estudiantes expresan que para ellos la representación con dos vértices fuera del plano base, no era admisible como ejemplo del cuadrilátero plegado que acababan de definir. Y, por otro lado, el planteamiento de Jeison cuando dice “Si hacemos un plano que contenga a los puntos B, A y C vamos a obtener lo mismo” representa el punto de vista de aquellos para quienes esa representación sí constituye un ejemplo de cuadrilátero plegado. Lo anterior se verifica en la conversación-entrevista con el investigador (Anexos T1C3I líneas 46, 50, 100 y 103).

Sobre el enfoque en la producción de necesidad intelectual dijimos, en la THA, que esperábamos que la generación de incertidumbre produjera necesidad intelectual evidenciable en la argumentación productiva expresada por los estudiantes para resolver las situaciones planteadas en los enunciados 2 y 3 (c). Como señalamos antes, respecto a la solución al enunciado 2 no tenemos información para determinar si se verifica o no la generación de incertidumbre. Consecuentemente tampoco podemos verificar la producción de necesidad intelectual. Respecto a la evidencia de argumentación productiva, consideramos el planteamiento de Jeison para rebatir la posición de Juan dentro de esa categoría. Al decir “Si hacemos un plano que contenga a los puntos B, A y C vamos a obtener lo mismo”, está haciendo uso del Postulado puntos-plano y este, junto con la definición que establecieron de cuadrilátero plegado, es una expresión de argumentación productiva, al recurrir a la teoría de referencia para resolver una situación de duda.

Por otro lado, el argumento de Jeison es representativo de aquellos que pensaban que la representación con dos vértices fuera del plano seguía cumpliendo la definición de cuadrilátero plegado. Esto es evidente en la conversación-entrevista con el investigador, particularmente en la interacción entre Zayde y Arturo, cuando ella le dice “Igual si se saca el punto C del plano original, va a determinar un plano beta que va a contener los puntos A, B y C. Va a suceder lo mismo, cuatro puntos, cada tres no colineales. Va a cumplir la definición”. Y el argumento le resulta persuasivo a él, lo que es visible cuando afirma “se hubiera eliminado…se hubiera sustituido el plano gris [se refiere al plano base que trae Cabri 3D por defecto], el plano gris perdería toda…” pues reconoce que el plano base de Cabri 3D no juega un papel determinante en el cumplimiento de la definición de cuadrilátero plegado. Esta última interacción nos sugiere la expresión de justificación epistemológica.

6.2 ANÁLISIS DE LA TAREA 2

De la misma manera que la Tarea 1, la Tarea 2 se enmarca en la parte inicial del curso de Geometría del Espacio en donde establecen los elementos teóricos básicos. En la Tarea 1 se han evocado maneras de determinar un plano y se ha establecido el Postulado del Espacio. En la Tarea 2 se espera hacer uso de esos elementos para determinar planos en el espacio, a partir de una configuración específica de puntos.

6.2.1 TAREA 2, CICLO 1

6.2.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Determinar varios planos en una configuración geométrica dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Dados cuatro puntos no coplanares ¿Qué condiciones entre ellos dan lugar al máximo número de planos que pueden determinarse? Justifique.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben hojas de trabajo individuales en las que deben consignar su respuesta individual. Posteriormente deben discutir en grupo lo que consignaron en las hojas individuales.

Intervenciones previstas

No estaban previstas intervenciones por parte de la profesora o el investigador, exceptuando aquellas que atendiesen a responder preguntas puntuales formuladas por los estudiantes en los grupos. Cómo ya se mencionó, en este ciclo no hay una acción intencionada de la profesora.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Esperamos que los estudiantes hagan uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos de esta configuración, pues lo dado son cuatro puntos no coplanares. Los puntos no están relacionados entre sí de ninguna otra manera.

Enfoque en la mediación (Em). En este ciclo, no se prevé trabajo de generación de signos con el uso de artefactos específicos para representar la situación, así como tampoco intervención de la profesora. Así que no se hace seguimiento a este enfoque en esta tarea.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que se presenten puntos de vista diferentes en la interacción en los grupos, sobre la coplanariedad de los puntos y sobre si esta condición implica o no que cada tres sean no colineales. La discusión de los diferentes puntos de vista y las dudas expresadas por los estudiantes al respecto serán la expresión de la producción de incertidumbre en el desarrollo de la tarea.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor de los puntos de vista diferentes debe llevar a los estudiantes a garantizar teóricamente cada una de las soluciones que se puede inferir. Si afirman qué los puntos pueden estar alineados, deben considerar que el enunciado establece la condición de no coplanares lo que excluye la posibilidad de estar alineados. Si consideran que los puntos son no colineales tres a tres deben reconocer que esta condición se puede inferir de la no coplanariedad dada de los cuatro puntos. Estas acciones representan una evidencia de presencia de necesidad intelectual. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva, y con la satisfacción que expresen por el resultado obtenido a partir de los elementos teóricos que soportan la respuesta correcta: cuatro puntos no coplanares determinan exactamente cuatro planos.

6.2.1.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran el Postulado puntos-plano para establecer el máximo número de planos que pueden determinarse.	Los dos grupos hacen uso del Postulado. Adicionalmente, en el G1 hacen mención del Teorema recta-punto-plano como contrargumento para el caso en el cual los puntos estén alineados. Usan la combinatoria como herramienta para resolver la situación. En el G2, mencionan el Teorema recta-punto-plano por la misma razón que lo hicieron los integrantes del G1, para justificar su respuesta final mencionan un teorema, que al parecer han estudiado previamente, el cual garantiza que si cuatro puntos son no coplanares son no colineales cada tres.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Teníamos previsto que la incertidumbre se generará como resultado de distintos puntos de vista respecto a las condiciones que deben cumplir los cuatro puntos y que se pueden inferir o no de la condición de no coplanariedad dada en el enunciado.	En el G1 hay evidencia de duda respecto a si la no coplanariedad implica la no colinealidad. Sin embargo, la estudiante que parece sostener el punto de vista de que sí la implica no hace explícita su posición y predomina el razonamiento de su compañero que asume que no. En el G2 consideran esta misma situación y concluyen que la coplanariedad sí implica la no colinealidad de cada tres puntos, apelando a un teorema por ellos conocido.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Se tenía previsto que la necesidad intelectual se expresara con la exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre acerca de la relación entre la no coplanariead de los cuatro puntos y la no colinealidad de cada tres. Esta exposición es evidencia de argumentación productiva. La satisfacción expresada con los argumentos expuestos es evidencia de justificación epistemológica.	En el G1 la incertidumbre no evoluciona como necesidad intelectual al no ser planteados claramente dos puntos de vista divergentes. En el G2 se plantean explícitamente, como duda, sí la no coplanariedad de los cuatro puntos implica la no colinealidad de cada tres. Concluyen que existe un teorema por ellos estudiado el cual garantiza esa relación de causalidad lógica, lo que satisface su duda.

Fragmento ilustrativo de T2C1G1	
En el fragmento que se reproduce a continuación Antonia y Alejandro discuten la solución a la tarea. Sus opiniones difieren acerca de sí se debe decir explícitamente que los puntos deben ser no colineales. La opinión de Alejandro es que es necesario hacer explicita la condición de no colinealidad. Antonia parece ser de la opinión que la no colinealidad está implícita en la condición de con coplanariedad dada.	
Alejandro:	Pues una condición… es que uno no sea coplanar y que los otros sean no colineales.
Antonia:	Pero ahí dice: Dados cuatro puntos no coplanares ¿Qué condiciones entre ellos dan lugar al máximo número de planos?

Alejandro:	¡Por eso! Los otros tres puntos siempre son colineales [sic]… ¡No son colineales!
Dilza:	Pero ahí dice…
Antonia:	Pero ahí dice: “máximo número de planos”.
Alejandro:	Por eso, porque si fueran colineales solo existiría un plano. Que [queda determinado por] es un punto y una recta. En cambio, cuando no son colineales puedo hacer todas las combinatorias.
Antonia:	Están diciendo qué los cuatro puntos no son coplanares.
Alejandro:	Por eso… ¡Me extraña! Yo digo lo siguiente: si yo tengo un punto no coplanar, no pertenece al plano. Pero, por ejemplo, sí son colineales, hay un plano que los contiene, un punto y una recta que no pertenece a él, hay un solo plano y es único. En cambio, si yo digo que no son colineales, con éste, éste y éste puedo (señala con el lápiz tríos de puntos en la representación que tiene en su hoja) armar un plano y con éste, éste y éste puedo armar otro plano. (Dilza asiente).

Fragmento ilustrativo T2C1G2

En el fragmento William razona en voz alta acerca de si la no coplanariedad implica la no colinealidad y llega a una conclusión al respecto. Sus compañeros avalan su conclusión con un gesto.

William:	Cuando son puntos no colineales, porque el hecho de que no sean coplanares no significa... ¿O sí?
Cristóbal:	(Inaudible)
William:	No, porqué si tres [puntos] son colineales y éste no entonces (pone el lápiz por encima de la mesa) …

…pero ahí es donde está el teorema: que cada cuatro puntos que son no coplanares, tres de ellos son no colineales. Entonces ahí me lo garantiza de una vez. (Brandon y Cristóbal asienten). Entonces como los cuatro puntos son no colineales…

En lo previsto en la THA respecto al enfoque en el contenido consideramos que los estudiantes usarían exclusivamente el Postulado puntos-plano para determinar el máximo número de planos que pueden determinarse. El Postulado es efectivamente mencionado en la interacción en los grupos y en las hojas de trabajo. Sin embargo, en la TRA se observa que mencionan otros elementos del sistema teórico como el Teorema recta-punto-plano evocado por Alejandro “…si fueran colineales solo existiría un plano. Que es un punto y una recta” o el teorema que resuelve la situación en la interacción del G2 y que es mencionado por William: “ahí es donde está el teorema que cada cuatro puntos que son no coplanares, tres de ellos son no colineales.”. Adicionalmente, en el G1 mencionan la combinatoria, algo que no estaba previsto.

Acerca del enfoque en la generación de incertidumbre en la THA consideramos que en la interacción en los grupos surgirían dos puntos de vista. Esperábamos que algunos estudiantes sostuvieran que la coplanariedad de los cuatro puntos implicaba la no colinealidad de cada tres y que otros plantearan que no era así, que se debía explicitar esa condición. Si bien en la TRA se observa que en los dos grupos se planteó esa preocupación, no es evidente que se haya generado debate. Las expresiones de duda no son persistentes a lo largo de la situación. En el caso del G1, Antonia no persiste en su punto de vista. En el G2, William resuelve rápidamente su inquietud citando un teorema. Sí se generó incertidumbre, esta no se produjo de la manera prevista en la THA, pues la resolución de la situación de duda ocurrió muy rápidamente sin mayor desarrollo de la discusión.

De acuerdo con lo previsto en la THA acerca del enfoque en la producción de necesidad intelectual, esperábamos que los estudiantes expusieran argumentos teóricos para resolver la incertidumbre acerca de la relación entre la no coplanariedad de los cuatros puntos y la no colinealidad de cada tres de ellos. La evocación de William, en la interacción del G2, del Teorema que asegura que cada tres puntos son no colineales, es una expresión de argumentación productiva y de producción de necesidad intelectual. No se evidencia en el G1 la exposición de argumentos teóricos para abordar satisfactoriamente la situación. Como ya se mencionó, el debate en la interacción en este grupo no tuvo desarrollo.

Para el Ciclo 2 decidimos modificar el enunciado. Eliminamos la expresión “no coplanares” dejando solamente “cuatro puntos”. Esperábamos con este cambio que la situación fuese más abierta para los estudiantes y que de esta forma considerarán distintas posibilidades para los cuatro puntos, generando una mayor riqueza de imágenes mentales que dieran lugar a discusión de distintos puntos de vista en la interacción.

6.2.2 TAREA 2, CICLO 2

6.2.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Determinar varios planos en una configuración geométrica dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia

Tarea

Enunciado

Dados cuatro puntos ¿Qué condiciones entre ellos dan lugar al máximo número de planos que pueden determinarse? Justifique.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben hojas de trabajo para consignar sus respuestas por grupos. No tenían restricciones en el uso de herramientas, tenían disponibles los computadores con Cabri 3D.

Intervenciones previstas

Durante el desarrollo del trabajo en grupo, la profesora circula por el aula interviniendo puntualmente en el trabajo de los grupos si lo considera necesario o si es requerida por los estudiantes. En la sesión de trabajo siguiente a la presente, la profesora discute con toda la clase las soluciones presentadas por ellos en las hojas de trabajo y que ella ordena para tal fin. Ilustra las representaciones sugeridas en las soluciones haciendo uso de Cabri 3D.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). En este momento del curso ya ha sido introducido el Postulado del espacio, que garantiza la existencia de puntos por fuera del plano.

Esperamos que los estudiantes hagan uso de este postulado junto con el Postulado puntos-plano para determinar las condiciones de los puntos y el número máximo de planos por el cual se indaga en el enunciado, que es cuatro. Respecto a las condiciones de los cuatro puntos, nuestra expectativa es que lleguen a afirmar que cada tres deben ser no colineales y un cuarto no coplanar con los otros tres. Expresado de otra forma: qué los cuatro puntos sean no coplanares. Acerca de la situación en la cual los cuatro puntos están alineados, esperamos que discutan las razones por las cuales esa configuración no garantiza la existencia de infinitos planos con el marco de referencia disponible en el sistema teórico en este momento del curso.

Enfoque en la mediación (Em). Como dijimos en el capítulo 5, en este Ciclo 2 esperamos que las acciones emprendidas por la profesora amplíen a toda la clase la generación de incertidumbre, si no se produjo en el trabajo de los grupos, y alienten la producción de necesidad intelectual". Uno de los elementos relevantes previstos en este enfoque para este ciclo es el uso de la herramienta redefinir de Cabri 3D. Con esta herramienta la profesora hará una representación de las soluciones reportadas por los estudiantes, ilustrando las situaciones en las cuales no se genera necesariamente la configuración de planos descrita por los estudiantes en su solución.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que se presenten puntos de vista diferentes en la interacción en los grupos de trabajo que generen duda en los estudiantes. Los puntos de vista pueden hacer alusión a cuatro puntos alineados, cuatro puntos no colineales o a tres puntos determinando un plano y un punto que no pertenezca al plano. En la interacción con la profesora se espera generar sorpresa y duda en los estudiantes al cuestionar sus soluciones usando la herramienta redefinir de Cabri 3D. Prevemos que la incertidumbre se produzca al menos en uno de momentos de interacción, en los grupos de trabajo y/o en la conversación de toda la clase con la profesora.

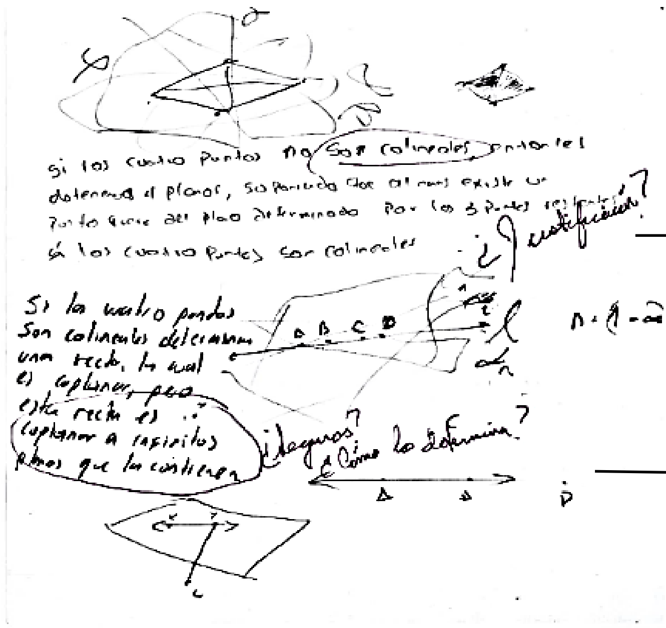
Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor los puntos de vista diferentes debe llevar a los estudiantes a garantizar teóricamente cada una de las soluciones que se puede inferir de cada perspectiva. Si afirman qué los puntos alineados determinan infinitos planos, deben soportar esto en el sistema teórico. Si plantean que tres puntos deben estar en un plano y un cuarto punto fuera del plano, deben recurrir a garantías teórica para esta solución, como el Postulado del espacio y el Postulado tres puntos-plano. Estas acciones representan una evidencia de presencia de necesidad intelectual. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva. También en las expresiones verbales de ellos que sean evidencia de lo confiable que les resulta la solución.

6.2.2.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran el Postulado del espacio y el Postulado puntos-plano. Igualmente se esperaba que hicieran consideraciones sobre las posibles configuraciones de los cuatro puntos.	En el G1 y el G2 hay evidencia del uso del Postulado puntos-plano. No hay evidencia del uso del Postulado del espacio en los dos grupos. En el G1, consideran lo que ocurriría sí los cuatro puntos estuvieran alineados, si no lo estuvieran y si uno no pertenece al plano determinado por los otros tres. En el G2, mencionan la posibilidad de que estén alineados, pero no la discuten. En las hojas de trabajo de los dos grupos mencionan la no colinealidad de los cuatro puntos, pero no mencionan la no coplanariedad.

Fragmento ilustrativo de la hoja de trabajo del G1

A continuación, se presenta la hoja de trabajo del G1 en la cual los estudiantes consignaron su respuesta a la pregunta formulada y expusieron sus consideraciones acerca de las configuraciones posibles de los cuatro puntos.



Si los cuatro puntos no son colineales entonces obtenemos cuatro planos, suponiendo que al menos existe un punto del plano determinado por los tres puntos restantes si los cuatro puntos son colineales.

Si los cuatro puntos son colineales determinan una recta, la cual es coplanar pero esta recta es coplanar a infinitos planos que la contienen

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en el contenido, uno sólo de los elementos teóricos previstos surgió en la interacción de los dos grupos: el Postulado puntos-plano. En el G1, mencionan dos configuraciones para los cuatro puntos y así lo consignaron en la hoja de trabajo: si los cuatro puntos no son colineales y si los cuatro puntos son colineales. En la interacción de G2 no hay evidencia de que hayan considerado distintas configuraciones para los cuatro puntos.

Enfoque en la mediación (Em)

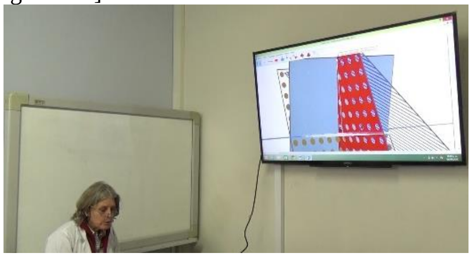
THA	TRA
Esperábamos que la acción de la profesora con el uso de Cabri 3D generara en los estudiantes sorpresa y les hiciera cuestionarse por las soluciones planteadas a la tarea.	En el momento de interacción de la clase con la profesora hay evidentes reacciones de sorpresa en los estudiantes. Estas reacciones son confirmadas por los participantes al investigador en la conversación-entrevista con el investigador.

Fragmento ilustrativo de T2C2P

La profesora presenta dos soluciones de los estudiantes. Una que afirma que la condición es "que los puntos no sean colineales tres a tres" y la otra que afirma que "un punto no sea coplanar con los otros tres mientras que los tres puntos coplanares determinan un plano". Para ir de una solución a la otra usa la herramienta redefinir de Cabri 3D.

Profesora: "Que no sean colineales tres a tres los puntos" entonces vamos a mirar este archivo [abre un archivo en Cabri 3D]. Aquí hay cuatro puntos ¿los ven? ¿los alcanzan a ver?

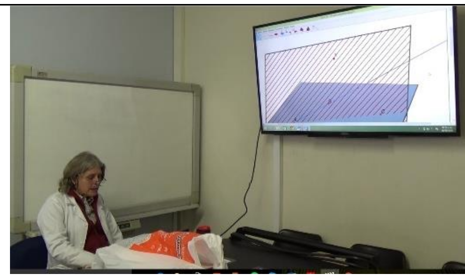
(…) Bueno ahí hay cuatro puntos que cumplen la condición que decía ese grupo, tres a tres no son colineales ¿Sí o no? ¿De acuerdo? Pero ¿Cuántos planos tengo? Uno ¿Será ese el número máximo [de planos]? ¿Quién sabe? Entonces vamos a mirar más respuestas, "que no sean colineales tres a tres" esas son las condiciones que dizque ayudan a determinar el máximo número, pero ahí hay uno solo [plano] y cumple la condición que dieron. "Qué un punto no sea coplanar con los otro tres, mientras que los tres puntos coplanares determinan un plano […]. Tengo tres puntos que me podrían determinar el plano y voy […] a sacar uno de esos puntos [del plano], […] entonces voy a hacer un punto y con el shift […]. Redefinir, sí porque la condición decía que estuviera por fuera. Lo voy a redefinir al punto C a este nuevo punto en el espacio [obtiene una nueva configuración].



Y ahí ¿Qué sucede?

Las reacciones de los estudiantes a estas acciones de la profesora y las del fragmento siguiente fueron presentadas a los estudiantes en la conversación-entrevista con el investigador y se indagó a los protagonistas por estas reacciones.

Profesora: Y me dicen que, los cuatro puntos deben ser colineales para que haya infinitos planos que los contienen, entonces voy a volver, este punto lo voy a redefinir otra vez, este punto se va a volver colineal y este también ¿Cierto?



[…] y voy a redefinir a este punto [X] para que sea éste [un punto sobre la recta].

No hay planos, no hay manera de determinar planos, entonces ¿Qué fue lo que pasó? Y estas personas se imaginaron [Vuelve a la representación inicial en el programa] que había otro punto y que ese otro punto nos iba a dar infinitos planos, porqué estaría moviendo este punto en el espacio y ese punto me iba a determinar más planos ¿Sí?

Fragmento ilustrativo de T2C2I

En el fragmento ilustrativo que se presenta a continuación, el investigador indaga a los estudiantes por sus reacciones a lo hecho por la profesora. Para situar puntualmente sus preguntas, les presenta fragmentos del vídeo de la clase con las reacciones de los estudiantes.

Investigador: Concretamente les quiero preguntar si esa actividad que realizó la profesora generó en ustedes alguna sorpresa o algún cambio respecto a lo que tenían pensado.

Carlos: Lo que pasa es que… bueno… en la clase anterior alcanzamos, con los computadores… por lo menos el grupo de nosotros, a hacer las representaciones. Una cosa es hacerla en la hoja que sería el plano y otra cosa es hacerla en el equipo. Entonces… digamos, la primera [de las soluciones abordadas por la profesora]. Que los cuatro [puntos] no sean colineales, entonces en la mente de uno ya está como por supuesto que ya no son coplanares, pero no es cierto. Entonces digamos que, lo que yo veo ahí, es que tener esa visualización de pasar del plano al espacio sí requiere como un grado más y que esas herramientas le sirven a uno para ver eso que digamos, lo que uno dice, uno lo tiene en la mente que es así, pero le faltan detalles para tener bien fundamentado lo que está diciendo.

María: Fue cuando la primera gráfica que hizo la profe, entonces cuando ella redefinió un punto y ahí fue como que los dos planos fueron el mismo [une las palmas de las manos para representar lo que está diciendo].

Entonces yo: ¡Uy que pasó aquí! [hace gesto de sorpresa], entonces fue como ese… como esa visualización, cuando al redefinir el punto se juntaron los dos planos [Une las palmas para representar lo que vio y está comentando].

Respecto a lo previsto en la THA sobre el enfoque en la mediación, se puede evidenciar, en la información recolectada, que la acción de la profesora generó en los estudiantes la reacción buscada de sorpresa y duda como lo expresan Carlos y María en la conversación-entrevista con el investigador. Este fue el primer uso de la herramienta redefinir de Cabri 3D en el diseño de tareas implementado. El segundo uso de esta se hizo en la Tarea 1, Ciclo 3, que si bien se presenta previamente en esta memoria temporalmente es posterior a la Tarea 2 pues se implementó en el Ciclo 2.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)

THA	TRA
Teníamos previsto que la incertidumbre surgiera motivada por la duda generada en la discusión de distintos puntos de vista, acerca de la configuración de los 4 puntos, en la interacción en los grupos y/o a partir de la acción de la profesora cuando discute las soluciones de los estudiantes con toda la clase representando estas con Cabri 3D.	En el G1, surgen puntos de vista diferentes acerca de la configuración de los cuatro puntos. A partir de estos diferentes puntos de vista, se produce una duda que generó discusión acerca de cómo garantizar la existencia de los cuatro planos que quedan determinados. En el G2, se insinúa un punto de vista diferente el cual no tiene desarrollo y por tanto no hubo lugar a debate e incertidumbre. Como se previó en el enfoque en la mediación, hay reacciones de sorpresa a las acciones de la profesora con el uso de Cabri 3D, las cuales confirman los estudiantes en la conversación-entrevista con el investigador.

Fragmento ilustrativo de T2C2G1

En el fragmento que se presenta a continuación Juan y Carlos están planteando cuál es el máximo número de planos que queda determinado con cuatro puntos. Plantean que hay infinitos planos. En su discusión buscan cómo sustentar esta idea.

Juan: Con los cuatro colineales, no hay plano.
Carlos: Hay infinitos planos.
[…]
Juan: Cuatro puntos colineales generan un plano no más.
Carlos: Generan infinitos. Es que mire generan infinitos planos. Pero al mismo tiempo usted no está hablando de uno en específico.
Juan: Porqué estamos viendo como a un plano.
Carlos: No, no lo estamos viendo ni siquiera como un plano. Estamos viendo una recta, pero ¿La recta es coplanar? ¡Sí! pero… ¿A cuál plano?... a un plano alfa. Ah listo, al plano alfa. Pero no sé cuál

	es alfa.
Jimmy:	Puede ser así, puede ser así [hace con la palma de la mano distintas inclinaciones para representar los planos].

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en la generación de incertidumbre la hipótesis de que la duda se generará producto de la discusión en la interacción en los grupos se verifica en el G1 y no en el G2. La hipótesis de que la acción de la profesora generará incertidumbre en los estudiantes se verifica con las reacciones de sorpresa captadas en el desarrollo de la interacción de la profesora con la clase. Se confirma en lo expresado por los estudiantes en la conversación-entrevista con el investigador (Anexos, T2C2I). Como ya mencionamos, este fue el primer uso de la herramienta redefinir de Cabri 3D. Los resultados obtenidos nos sugieren el potencial que puede tener esa herramienta en su uso en tareas para la generación de incertidumbre en los estudiantes.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Esperábamos que a partir del planteamiento de diferentes puntos de vista acerca de la configuración de los cuatro puntos, se discutieran las garantías teóricas o la ausencia de estas para cada configuración. La argumentación aportada en los grupos o en la interacción con la profesora harán evidente el uso de esas garantías teóricas.	En el G1, mencionan la necesidad de tener elementos teóricos para garantizar la existencia de más de un plano cuando los puntos están alineados. Sin embargo, no llegan a una conclusión al respecto de tal manera que no hay expresión de justificación epistemológica. En el G2, no hay evidencia de producción de necesidad intelectual. En la interacción con el investigador, los estudiantes que expresaron haber cuestionado sus concepciones, pero no aportaron más información acerca de si ese cuestionamiento motivó una búsqueda teórica.
Fragmento ilustrativo de T2C2G1	
En el fragmento que se encuentra a continuación los estudiantes del G1 están discutiendo cómo garantizar que los cuatro puntos alineados pueden determinar infinitos planos. La expresión de Juan acerca de la rotación está manifestando cómo hacer corresponder su imagen mental de un plano	

girando alrededor de una recta con los elementos del sistema teórico para garantizar la existencia de infinitos planos. La situación se resuelve con la intervención de Jimmy.

Carlos:	No, sí son colineales son coplanares porqué pertenecen a una misma recta.
Juan:	Pero entonces ¿cómo hacemos para que el plano haga una rotación?
Carlos:	Ese es el lío, eso estoy echando cabeza.
[…]	
Carlos:	Tiene que rotarlo sobre la recta (…) tenemos esos cuatro puntos, esos cuatro puntos me generan una recta. La recta es coplanar. ¿Pero a cuál plano?
Jimmy:	Es que para que haya más de un plano debe haber un punto que no esté contenido en el plano.

Acerca de lo esperado en la THA respecto al enfoque en la producción de necesidad intelectual, las reacciones más significativas se produjeron en el G1, cuando los estudiantes discutieron cómo garantizar que cuatro puntos alineados están en infinitos planos. No se evidencia necesidad intelectual en la interacción del G2, ni tampoco en la interacción de los estudiantes con la profesora. Parece necesario reorientar las preguntas, en el enunciado o en la actividad de mediación, para potenciar los resultados esperados en este enfoque.

Por las razones mencionadas anteriormente se modificó el enunciado de la tarea, así como las instrucciones adicionales para garantizar mayor exploración con Cabri 3D por parte de los estudiantes.

6.2.3 TAREA 2, CICLO 3

6.2.3.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Determinar varios planos en una configuración geométrica dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia

Tarea

Enunciado

Dado el ΔABC sean D y F puntos tal que F pertenece a la recta AB y D pertenece a la recta AC, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que pertenece a la recta DI y un punto G tal que pertenece a la recta FH.

a) Nombre tipos de figuras, definidas en nuestro sistema teórico, que quedan determinadas con algunos de esos puntos. Dé dos ejemplos de cada tipo si es posible. Justifique su respuesta.

b) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta.

c) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con el plano determinado por A, B y C?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben hojas de trabajo para desarrollar en grupo en las cuales consignan sus respuestas. Deben representar la configuración descrita en el enunciado en Cabri 3D.

Intervenciones previstas

Durante el desarrollo del trabajo en grupo, la profesora circula por el aula interviniendo puntualmente en el trabajo de los grupos si lo considera necesario o si es requerida por los estudiantes. En la sesión de trabajo siguiente, la profesora discute con toda la clase las soluciones presentadas por ellos en las hojas de trabajo y que ella ordena para tal fin. Ilustra las representaciones sugeridas en las soluciones, haciendo uso de Cabri 3D.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con la primera pregunta, se quiere indagar por el uso de la definición de cuadrilátero. En el contexto del curso de Geometría del Espacio los estudiantes deben discernir que la verificación del cumplimiento de la definición implica que los cuatro puntos deben estar en el mismo plano. A las respuestas a esta pregunta no les hacemos seguimiento en el análisis pues el interés principal en esta tarea es la determinación de más de un plano en el espacio.

Con la segunda pregunta se espera que los estudiantes usen los elementos teóricos estudiados para determinar planos: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano y Teorema rectas-plano. Adicionalmente, para justificar que los planos determinados con tríos de puntos que no pertenecen al plano base son diferentes deben hacer uso del Postulado de la llaneza del plano.

La intención de la tercera pregunta es introducir el Postulado de intersección de planos y el Teorema respectivo. Los estudiantes deben argumentar por qué el plano determinado por los triángulos que no comparten algún vértice con el triángulo ABC (ver figura 6.4) es único y por qué se interseca con el plano base en la recta DF. Se espera que usen elementos teóricos como el Teorema rectas-plano y aspectos generales de la teoría de conjuntos para justificar la intersección.

Enfoque en la mediación (Em). Cabri 3D es esencial para producir una representación dinámica de la situación. En lápiz y papel la representación es compleja y no aporta información que se requiere para el desarrollo de la tarea. Cabri 3D cumple un papel en la producción de la representación, pero no está previsto el uso de los arrastres u otras herramientas del entorno. Es en la interacción entre los estudiantes donde se espera generar incertidumbre entre los estudiantes, acerca de elementos como: ¿Cómo justificar que son distintos los planos? ¿Cómo justificar que la intersección entre los planos es una recta?

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que a partir de lo solicitado en los enunciados de la tarea se genere la duda a partir de la discusión de las preguntas (b) y (c). Al abordar la respuesta a la pregunta (b) es posible verificar, visualmente en Cabri 3D la posibilidad de determinar tres planos diferentes. Teóricamente hay que justificar por qué son diferentes y allí los estudiantes deben hacer una búsqueda de los elementos en el sistema teórico de referencia que permitan garantizar este hecho. En el desarrollo de la pregunta (c) es posible comprobar visualmente que los triángulos están en un solo plano por estar los puntos sobre rectas que se intersecan. La exigencia se presenta al garantizarlo teóricamente, así como argumentar que los dos planos se intersecan en la recta DF. Esperamos que el debate en torno a estos aspectos genere incertidumbre en los estudiantes y motive su búsqueda teórica.

En la figura 6.3 se ilustra una representación de la situación con uno de los triángulos que no comparte vértice con el triángulo ABC, en este caso el FHI. Los triángulos que no comparten vértice con el triángulo ABC son los determinados por los puntos D, F, G, H, I.

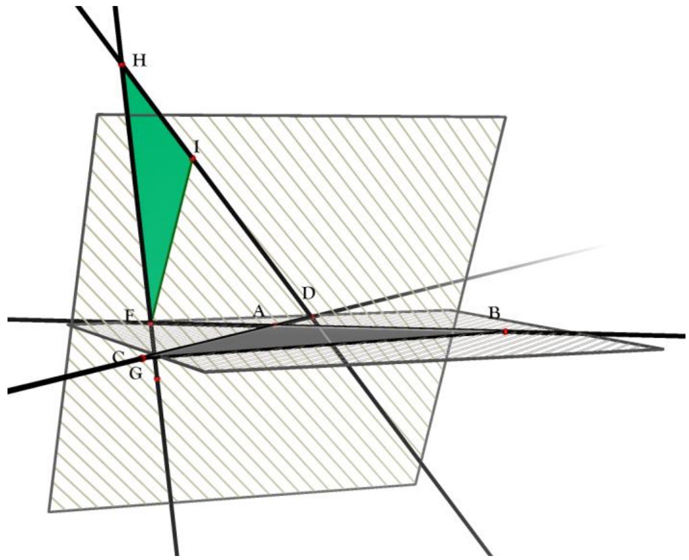


Figura 6.3 Una representación de la situación descrita

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Como se mencionó en el enfoque en la generación de incertidumbre, esperamos que los estudiantes se propongan soportar teóricamente por qué los planos son diferentes, por qué los triángulos están en un mismo plano y por qué los planos se intersecan en la recta DF. Los argumentos que expresen para dar respuesta a estas preguntas serán la evidencia de la producción de necesidad intelectual. Sí estos argumentos resultan persuasivos y satisfactorios para los estudiantes, se habrá producido justificación epistemológica.

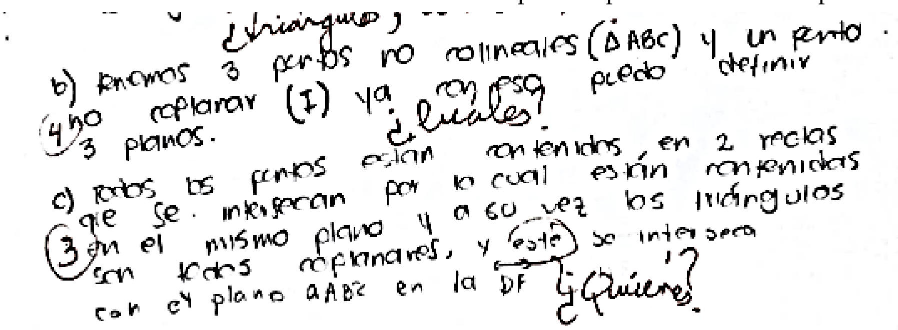
6.2.3.2 Comparación entre la trayectoria hipotética y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran el Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y Postulado de la llaneza. Adicionalmente, que se plantearan la necesidad del Postulado de intersección de planos para justificar la intersección de estos.	En el G1, aluden al Postulado puntos-plano y al Teorema rectas-plano para determinar los planos solicitados en la pregunta (b). En el G2, mencionan el Postulado de la llaneza para argumentar por qué son distintos los planos a los que alude la pregunta (b)

Fragmento ilustrativo de las hojas de trabajo de los G1 y G2

Hoja de trabajo G1

A continuación, presentamos las respuestas a la pregunta (b) consignadas en las hojas de trabajo de los G1 y G2 en estas se evidencian los elementos teóricos empleados para determinar los planos.



¿triángulo?

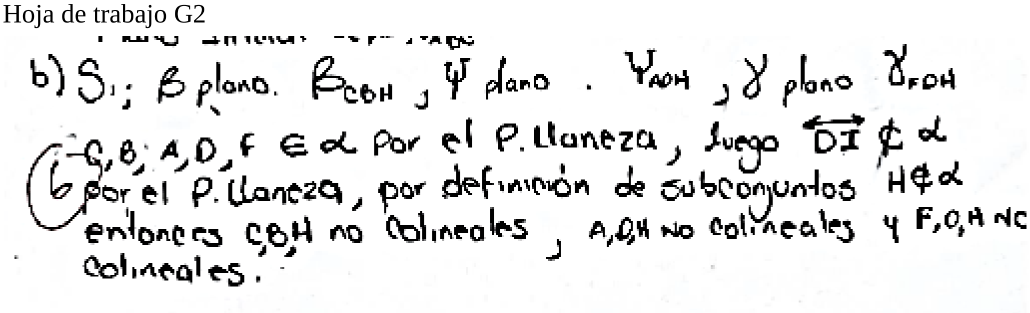
b) tenemos 3 puntos no colineales (ΔABC) y un punto no coplanar (I) ya con eso puedo definir 3 planos. ¿Cuáles?

4

c) todos los puntos están contenidos en 2 rectas que se intersecan por lo cual están contenidas en el mismo plano y a su vez los triángulos son todos coplanares, y este se interseca con el plano αABZ en la $\overleftrightarrow{DF}$ ¿Quién?

3

Hoja de trabajo G2



b) Si; β plano. β_{CBH}, ψ plano. ψ_{ADH}, γ plano γ_{FDH}

C, B, A, D, F $\in \alpha$ Por el P. Llaneza, luego $\overleftrightarrow{DI} \not\subset \alpha$ por el P. Llaneza, por definición de subconjuntos $H \notin \alpha$ entonces C, B, H no colineales, A, D, H no colineales y F, D, H no colineales.

6

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en el contenido, se observa que no todos los elementos teóricos que consideramos fueron evocados por los estudiantes. En la respuesta dada por el G1 aluden al Teorema rectas-plano y al Postulado puntos plano. La estructura de la respuesta a la pregunta (b) sugiere una proposición condicional donde la parte “tenemos tres puntos no colineales y un punto no coplanar” actúa como el antecedente y “ya con eso podemos definir tres planos” como el consecuente. Cabe suponer que la justificación de este hecho se fundamenta en el Postulado puntos-plano. Pero parece que los estudiantes no ven necesario el justificar por qué son distintos los tres planos.

En la respuesta dada por el G2 aluden al Postulado puntos-plano, al mencionar tríos de puntos, y al Postulado de la llaneza. En este grupo el investigador intervino preguntando el por qué eran diferentes. Es razonable suponer que a esta intervención atienda el introducir el Postulado de la llaneza.

En ninguno de los dos grupos examinaron por qué el plano que contiene los triángulos que no comparten vértice con ABC es único y por qué interseca al plano base en la recta DF.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperábamos que la representación en Cabri 3D fuera útil para motivar la discusión de los elementos que deben justificar.	En el G1, la representación en Cabri 3D no parece cumplir un papel muy relevante, pues cuando los estudiantes se plantean justificar la existencia de tres planos distintos al inicial en la pregunta (b) no construyen aún el modelo en el entorno. Al abordar la respuesta a la pregunta (c) hacen un arrastre bola de cristal en la representación. En el G2, cuando discuten la justificación en la pregunta (b) no hay evidencia de uso de Cabri 3D. Al abordar la respuesta a la pregunta c) los estudiantes hacen arrastre bola de cristal y arrastres sobre la representación para identificar la relación entre los planos.

Enfoques en la generación de incertidumbre (Ei) y en la producción de necesidad intelectual (En):	
THA	TRA
Teníamos previsto que la solicitud de justificar la respuesta a las preguntas (b) y (c) generara discusión entre los estudiantes en la interacción en los grupos que diera lugar a la incertidumbre en ellos. Esperábamos que la incertidumbre generada en torno a la justificación acerca de por qué los tres planos son distintos (pregunta b) o por qué comparten los planos la recta de intersección DF (en la pregunta c) motivara la búsqueda teórica y que esta se expresara como argumentación	En el G1, no se plantean justificar por qué los planos son diferentes, justifican por qué existen. En la pregunta (c) se plantea uno de los integrantes del grupo por qué los planos se intersecan. Sin embargo, no hay discusión para resolver esas dos preguntas.

productiva.

Fragmento ilustrativo de T2C3G1

En el fragmento que presentamos a continuación, los estudiantes responden la pregunta (c) mientras están trabajando sobre la representación en Cabri 3D de los planos determinados por A, B, C y F, H, I (Figura 6.3). Discuten la intersección de los planos.

Antonio:	¿Qué relación hay de éste con este plano? [Han transcurrido algunos minutos en los que Byron ha estado corrigiendo lo que escribió Jeison. En ese lapso Antonio ha representado el plano determinado por F, H e I con Cabri 3D. Hasta el momento han hablado del plano sin representarlo].
Byron:	Oiga, sí… son diferentes [está mirando la hoja].
Antonio:	Pero se intersecan en una recta [señala la pantalla].
Jeison:	Dos planos distintos…ese es un plano y el otro es el otro plano…se intersecan… ¿Dos planos se pueden intersecar?
Antonio:	Pero en este caso se intersecan, mire [hace arrastre bola de cristal].
Byron:	Ole sí. […] Sí: ¿Qué relación tienen esos planos con el plano determinado por ABC? [Leyendo, le pasa la hoja a Jeison].
Jeison:	Termínelo, termínelo.
Bayron:	Pero ¿Cómo? los dos se intersecan.
Jeison:	Nooo […], este plano que contiene a todos los planos [se refiere a todos los triángulos que no comparten vértice con el triángulo ABC] se interseca con los otros tres puntos, con el plano determinado por los otros tres puntos [El plano determinado por los puntos A, B y C].
Antonio:	En la recta DF, en la recta DF.

Fragmento ilustrativo de T2C3G2

En el fragmento ilustrativo que presentamos a continuación las integrantes del G2 discuten porqué los planos son diferentes a partir de una pregunta que les formula el investigador cuando están resolviendo la pregunta (b).

María:	¿Por qué son distintos a alfa? [Mira la pantalla]. ¡Ah! Por el triángulo [se refiere al triángulo ABC] ¿No?
Carolina:	¿Por qué el triángulo?
María:	Pues porque el triángulo está en alfa, por la llaneza las rectas están en alfa, y los puntos que…cuando trazamos las rectas, los puntos ubicados en esas rectas…por la llaneza, las rectas están en alfa, los puntos ubicados en las rectas están en alfa.
[…]	
Investigador:	¿Beta lo determinaron con tres puntos? [Beta es el plano determinado por la recta BC y el punto H]
Las tres:	Sii. [Antes ha dicho Carolina que fue con un punto y una recta].
Investigador:	¿Y uno de los tres puntos pertenece a alfa?
Carolina:	B y C pertenecen a alfa.
Violeta:	H no.
Carolina:	H no.
Investigador:	H no pertenece a alfa. ¿Por qué H no pertenece a alfa?
Carolina:	Porque I no pertenece a alfa y luego se traza una recta que contenga…bueno, la recta DI y en esa recta se ubica un punto, entonces el punto no estaría en el plano.
Investigador:	¿No estaría en el plano?
María:	Porque si estuviera en el plano, entonces la recta que trazamos con H, estaría en el plano, por llaneza.

Respecto a lo previsto en el enfoque en la mediación en la THA, nuestra previsión parece haber sido muy limitada. Los estudiantes en la interacción en los dos grupos hicieron uso de la herramienta arrastre bola de cristal, lo cual es un elemento para considerar en un eventual rediseño de la tarea. Por otro lado, la representación más que motivar la discusión como se expresó en la THA es un recurso para su desarrollo, así que si se quiere dar un papel más importante al uso de la Cabri 3D acá pueden introducirse instrucciones con respecto a: representar los triángulos que no comparten vértice con el triángulo ABC y que no se solapan (figura 6.4) o representar los planos determinados por esos triángulos.

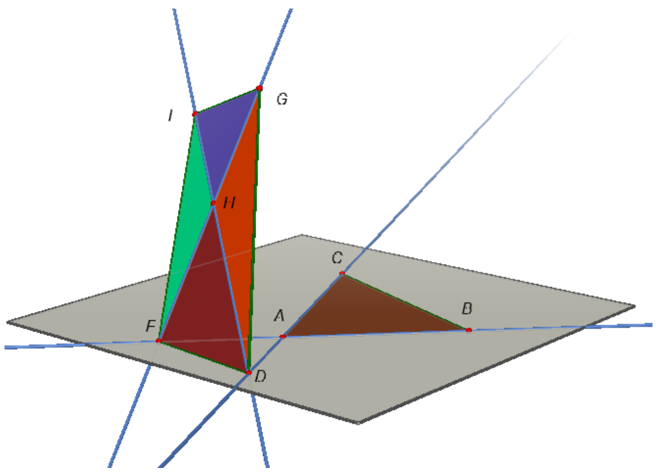


Figura 6.4. Triángulos que no comparten vértice con el triángulo ABC

Acerca de lo previsto en la THA sobre el enfoque en la generación de incertidumbre, nuestras previsiones respecto de lo que generaría la discusión entre los estudiantes no se cumplió. En el G2 discuten por qué los planos son diferentes, debido a la pregunta que les hace el investigador. Este puede ser un elemento para reconsiderar en el rediseño al abordar las intervenciones previstas. Al no generarse incertidumbre es razonable verificar que no hay evidencia concluyente de producción de necesidad intelectual.

Hemos mencionado un rediseño de la actividad, porque consideramos que una reformulación de las preguntas, así como de las intervenciones previstas, puede contribuir a que la generación de incertidumbre y la producción de necesidad intelectual tengan lugar.

6.3 ANÁLISIS DE LA TAREA TRES

En la misma línea de la Tarea 2, en la Tarea 3 los estudiantes deben hacer uso de elementos teóricos de referencia para determinar planos en el espacio, a partir de una configuración específica de puntos. A diferencia de la Tarea 2, en esta tarea no tienen libertad de decidir la manera en la cual disponen los puntos. La configuración de estos está dada y lo que deben hacer ellos es el uso de los elementos teóricos evocados para determinar un plano y definir un método para hacer un conteo organizado de los planos a determinar.

6.3.1 TAREA 3, CICLO 1

6.3.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Determinar un número planos en una configuración específica de puntos dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α. ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.

Instrucciones adicionales

En las instrucciones que se dan para el desarrollo de la tarea se indica a los estudiantes qué inicialmente planteen su solución, haciendo uso únicamente de lápiz y papel, Una vez resuelta de esa manera, hay una segunda parte en la cual se les hace entrega del material concreto: palos, plastilina y un cartón para usar como plano base y se les pide que examinen de nuevo su solución construyendo un modelo físico de la situación con el material entregado.

Intervenciones previstas

Como en las demás tareas del Ciclo 1, acá no hay prevista alguna acción de la profesora en la interacción con los grupos y tampoco un momento de discusión con toda la clase.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los aspectos de contenido involucrados en el desarrollo de esta tarea ya han sido estudiados previamente por los estudiantes, como se mencionó en el Capítulo 4 al describir los participantes en el Ciclo 1. Esperamos que determinen la cantidad exacta de planos con la configuración de puntos dada. Pueden usar elementos del sistema teórico como: el Teorema recta-punto-plano, el Postulado puntos-plano y el Teorema rectas-plano. Dado que son cuatro puntos en un plano, nuestra hipótesis es que usaran cuadrilátero el ABCD como modelo para determinar los planos que pueden establecerse con los cuatro puntos coplanares (figuras 6.5 y 6.6). Por lo tanto es probable que el elemento teórico más usado sea el Teorema recta-punto-plano. Probablemente tomarán como referencia las rectas que contienen pares de puntos, bien sea de lados o diagonales del mencionado cuadrilátero, y el punto E.

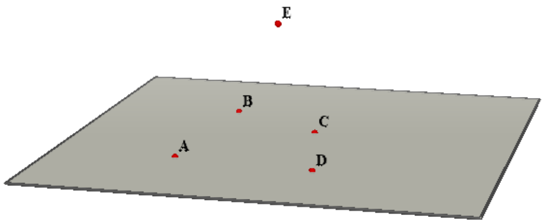


Figura 6.5. Una posible representación de la configuración descrita en el enunciado

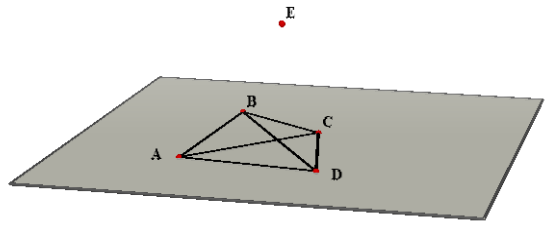


Figura 6.6. Una posible representación del cuadrilátero mencionado y sus diagonales

Enfoque en la mediación (Em). El plano es un término no definido en el modelo de la geometría que se sigue en los cursos de la Licenciatura. Así que no existe una definición de referencia para verificar las condiciones teóricas de su existencia. Éstas proceden del Postulado puntos-plano y de los teoremas que se han mencionado a lo largo de las tres tareas para determinar planos. El modelo físico con plastilina, cumpliendo el papel de los puntos y con palos como rectas, proporciona un esquema de representación, el cual puede evocar en los estudiantes contenido geométrico como el Postulado puntos-plano y los Teoremas recta-punto- plano y rectas-plano. Asimismo, el modelo proporciona a los estudiantes más información de la que pueden establecer al considerar la situación con lápiz y papel únicamente. Para quienes no hayan establecido correctamente el número de planos, el uso del modelo puede ampliar su visión de los planos que pueden determinarse (figura 6.7), contribuyendo a generar incertidumbre si la solución obtenida con el modelo riñe con la que obtuvieron previamente sin su uso. Nuestra expectativa es que el modelo físico sirva de apoyo en la construcción de imágenes mentales que permiten visualizar más de un plano en el espacio.

Se espera que en la interacción en los grupos los estudiantes hagan explícita su solución individual acerca de cuántos planos “ven” en la configuración dada. Para el Ciclo 1 no se tiene previsto desarrollar una discusión colectiva (de toda la clase) y, por esta misma razón, tampoco hay una previsión del papel de profesor para explotar el potencial semiótico del material empleado.

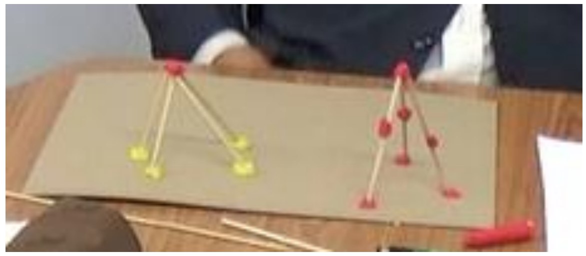


Figura 6.7. Un ejemplo de representación usando el modelo físico de palos, plastilina y cartón.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Consideramos que existen dos vías para que la incertidumbre emerja en esta situación. La primera, es que algunos estudiantes al determinar los planos a partir del cuadrilátero que mencionamos antes y representamos en la figura 6.6, pasen por alto los planos determinados por las diagonales y se genere allí una discusión respecto al número de planos en la interacción en el grupo cuando hagan uso del modelo físico. La segunda, es que la declaración de "ocho planos" que contiene el enunciado puede generar duda en aquellos estudiantes que realmente desean encontrar los ocho planos y que este elemento de lugar a debate en la interacción en el grupo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Al generarse incertidumbre acerca del número exacto de planos que queda determinado, nuestra previsión es que la necesidad intelectual se exprese en el conjunto de argumentos que exhiban los estudiantes para sostener el punto de vista que tengan acerca del número de planos. Esta argumentación productiva junto con la satisfacción expresada respecto a la respuesta acordada por el grupo será evidencia de la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

6.3.1.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que usaran elementos de la geometría como: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano y Teorema rectas-plano. Considerábamos que el elemento más usado sería el Teorema recta-punto-plano por nuestra hipótesis acerca del uso del cuadrilátero ABCD para determinar los planos.	En el G1, hay alusión al Teorema recta-punto-plano, al Postulado puntos-plano y uso de técnicas de conteo como las fórmulas combinatorias. En el G2, hay alusión al Postulado puntos-plano.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Se tenía previsto lo siguiente con respecto al uso del modelo físico y la interacción social al abordar la situación: El uso del modelo físico ampliará la información disponible para los estudiantes respecto a lo hecho con lápiz y papel. El uso del modelo contribuirá a generar incertidumbre. El uso del modelo evocará en el estudiante postulados y teoremas para determinar un plano. La interacción en los grupos de trabajo hará evidente la solución individual a la tarea.	En los G1 y G2 el uso del modelo físico amplió la información disponible respecto a lo que hicieron previamente a su uso. En ambos grupos, la interacción permitió hacer ostensivas las soluciones individuales a la situación. Los estudiantes del G2 en su exploración inicial de la solución, hacen un modelo de la situación con una hoja y el lápiz (se puede verificar en T3C1G2 línea 1, en el Anexos). En el G1, es visible el papel que desempeñó el uso del modelo físico en la generación de incertidumbre. No es así en el G2.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado de: La interacción en los grupos con el uso del modelo físico podría producir resultados distintos	Cómo se señala en el apartado anterior, el uso del modelo físico genera duda respecto a los resultados obtenidos sin el uso de éste en el G1. En el G2, hay expresión de duda respecto a los

a los obtenidos previamente y esto podría generar discusión que diera lugar a duda. La declaración en el enunciado que existen ocho planos podría motivar la búsqueda del octavo plano generando duda en los estudiantes.	resultados obtenidos sin el uso del modelo. Pero esta se zanja muy rápidamente, interpretada por ellos como un error cometido en la primera consideración. Habían hecho un conteo de seis planos y William expresa: ¿Y cuál [sería el] siete? (ver Anexos T3C1G2 líneas 25 y 26) y Cristóbal rápidamente le señala el séptimo plano. En ninguno de los dos grupos hay evidencia de la relevancia de la declaración de los ocho planos en el enunciado para la generación incertidumbre.

Enfoque producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Teníamos previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo la exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre que hubiera tenido lugar respecto a la cantidad de planos que se determinan. La argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos.	En el G1 hay evidencia de búsqueda de argumentos teóricos para resolver la duda que se ha generado, así como es observable la argumentación productiva y la satisfacción con la solución obtenida. En el G2 no hay evidencia de búsqueda de argumentos teóricos para resolver la situación de duda.
Fragmento ilustrativo de T3C1G1	

En el fragmento que se presenta a continuación, los estudiantes del G1 responden a la pregunta del enunciado en dos momentos. En principio, sin el uso del modelo físico, cuando Alejandro usa una fórmula combinatoria para responder cuál es el número de planos que se determina. Posteriormente, con el uso del modelo físico, en donde el estudiante cambia de opinión respecto a su primera solución.

Alejandro:	Eso es cinco combinado tres, ja ja ja. [Por tratarse de los cinco puntos dados A, B, C, D y E y las combinaciones de cada tres que para él determinan planos distintos].
Dilza:	Sí, cinco combinado tres.
Alejandro:	Pues sí, tengo cinco y voy a hacer grupitos de tres. [Hace los cálculos] ¡Hay diez! ¡Es falso! [el enunciado] ¡Qué pena Antonia… demuéstreme que sabe!

Con la fórmula cinco combinado tres han llegado a la conclusión que son 10 planos y así lo han escrito en la hoja de trabajo. Ahora encuentran que el número de planos es distinto de los 10 que plantearon inicialmente.

Alejandro:	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. ¿Qué estoy haciendo yo acá? No, sólo seis. Pensándolo bien… [En ese momento se lleva la mano a la cabeza].

Investigador:	¿Ya tienen los diez?
Antonia:	Mnn, mnn.
Investigador:	¿Son más de diez o menos de diez?
Alejandro:	No, hicimos mal el conteo. Para mí que ya son seis. (…) Es que estábamos haciendo mal porqué este [señala al plano base representado en el modelo por el cartón] lo contamos como tres veces más, es cuatro combinado dos, más este. Es sólo grupitos de a dos porque éste siempre está fijo [señala al punto E que está por fuera del plano base]. Están todos. Ja ja, ¡Por eso los modelos estaban de últimas!

En la THA, respecto al enfoque en el contenido, teníamos previsto que los estudiantes evocaran algunos elementos teóricos para determinar un plano. Dentro de estos elementos teóricos esperábamos que apareciese mencionado principalmente el Teorema recta-punto-plano. No ocurrió de esta manera, pues los estudiantes no establecieron la relación que nosotros anticipamos entre el modelo físico y el conocimiento geométrico. Por otro lado, los estudiantes del Ciclo 1 poseen un bagaje de formación matemática más amplia que los que participaron en los ciclos 2 y 3. Consideramos que por esta razón mencionan fórmulas combinatorias. Al tratarse de una situación de conteo y tratándose de estudiantes que han recibido un curso de probabilidad era previsible que así ocurriera que se presentara el uso de técnicas de conteo, aunque no lo consideramos en la THA.

Acerca de lo previsto en la THA sobre el enfoque en la mediación, se verificó que el uso del modelo amplía la información acerca de la situación para los estudiantes, dado que en los dos grupos modificaron su solución luego del uso del modelo físico. En el G1 es evidente la generación de incertidumbre en el momento posterior al uso del modelo.

Con relación a lo previsto en la THA sobre el enfoque en la generación de incertidumbre, el uso del modelo físico sí llevó a los estudiantes a revisar las conclusiones en los dos grupos de trabajo. Sin embargo, es marcada la diferencia entre los dos grupos en la manera en la cual este hecho se produjo. Lo ocurrido en el G1, y que se presenta en el fragmento ilustrativo de esta sección, ilustra una interesante expresión de incertidumbre que probablemente atiende al error cometido al aplicar la fórmula combinatoria y constituye un sesgo muy particular de los integrantes de ese grupo. Al confiar tanto en las fórmulas combinatorias no exploraron una representación de la situación geométrica. Adicionalmente, acerca del enunciado y nuestra previsión sobre la generación de incertidumbre producto de la declaración de "ocho planos" no se verificó. Este elemento no tuvo influencia alguna en el desarrollo de la actividad.

Lo observado en la TRA respecto al enfoque en la producción de incertidumbre guarda relación con lo mencionado anteriormente. Verificamos en el G1 la generación de incertidumbre y la producción de necesidad intelectual. Pues Alejandro dice: "Es que estábamos haciendo mal porqué este [señala al plano base representado en el modelo por el cartón] lo contamos como tres veces más, es cuatro combinado dos, más este [plano base]". Lo anterior expresa que Alejandro ajustó su perspectiva teórica basada en la combinatoria haciendo uso del modelo físico para tener en cuenta las particularidades de la configuración geométrica. Exhibió lo que hemos considerado argumentación productiva al ser la intención heurística clara, desea salir de la situación de incertidumbre generada. Cuando enuncia: "Es sólo grupitos de a dos porque éste siempre está fijo [señala al punto E que está por fuera del plano base]. Están todos. Ja ja, ¡Por eso los modelos estaban de últimas!" Esta es una manifestación de justificación epistemológica. Ha encontrado lo que le ha inducido al error y expresa satisfacción con la solución obtenida que lo saca de su errónea apreciación inicial. Sin embargo, nos parece que la situación en este grupo tuvo un sesgo muy particular debido al error en la aplicación de la fórmula combinatoria, como ya lo hemos señalado. La situación en el G2 no tuvo un desarrollo semejante.

Dos elementos fueron importantes para los cambios introducidos a la tarea en su aplicación en el Ciclo 2. Primero, el contraste entre lo anticipado y lo obtenido con el uso del modelo en el caso del G1 nos hizo enfatizar especialmente en la anticipación en el siguiente ciclo. Segundo, como se mencionó en la TRA respecto al enfoque en la mediación se observó que en el G2 en el momento inicial hacen un modelo físico con la hoja y el lápiz para explorar la situación. Así que hicimos énfasis en que la anticipación fuese enteramente a partir de su consideración de la situación mentalmente, sin hacer uso de sus manos o representar mediante dibujos la situación.

6.3.2 TAREA 3, CICLO 2

6.3.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Determinar un número planos en una configuración específica de puntos dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α.

a) Sin hacer una representación, cada integrante del grupo escriba su anticipación del número de planos que quedan determinados.

b) ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.

Instrucciones adicionales

Las instrucciones iniciales que se dan para el desarrollo de la tarea son: insistir no hacer modelo alguno con las manos y considerar la situación simplemente a nivel mental en la parte (a). Para estudiar la situación posteriormente disponen de palos, plastilina y un cartón, así como de Cabri 3D. Se les pide escribir en su hoja de trabajo la anticipación, el resultado después de usar el modelo físico y/o Cabri 3D, así como redactar un párrafo acerca de sí su solución ha cambiado después del uso de estas herramientas y responder cuál de estas contribuyó a ese cambio si se produjo.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrolla únicamente en su etapa de discusión en grupos. La profesora y el investigador interactúan con los grupos, mientras estos desarrollan su exploración

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los aspectos de contenido involucrados en el desarrollo de esta tarea ya han sido estudiados previamente. Son elementos del sistema teórico que permiten determinar un plano: el Postulado puntos-plano, el Teorema recta-punto-plano y el Teorema rectas-plano. Los estudiantes podrán determinar la cantidad exacta de planos que se determinan con la configuración de puntos dada haciendo uso de alguno de esos elementos del sistema teórico.

A partir del resultado obtenido en el Ciclo 1, nuestra hipótesis para este experimento respecto al enfoque en el contenido es que los estudiantes privilegiarán el uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos y resolver la tarea.

Enfoque en la mediación (Em). Respecto a la mediación, en el Ciclo 2, a diferencia de lo hecho en el Ciclo 1 se tiene previsto el uso de Cabri 3D además de los materiales para la construcción del modelo físico: palos, plastilina y cartón.

Cabri 3D en su herramienta “plano” tiene, entre sus opciones, tres maneras de ser construido. Una vez se elige la herramienta plano, este puede aparecer al pinchar con el puntero sobre tres puntos, una recta y un punto o dos rectas que se intersecan. Estas tres maneras pueden ser asociadas a los elementos correspondientes en el sistema teórico de referencia en el curso: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano y Teorema rectas-plano.

Para quienes no hayan establecido correctamente el número de planos, el uso del modelo y/o de Cabri 3D puede ampliar su visión de los planos que pueden determinarse contribuyendo a generar incertidumbre en los estudiantes si la solución obtenida con el modelo riñe con la que obtuvieron previamente sin su uso. Nuestra expectativa es que el modelo físico y el software sirvan de apoyo en la construcción de imágenes mentales que permitan visualizar más de un plano en el espacio evocando los elementos teóricos de referencia en el sistema teórico. En este caso Cabri 3D no generará la introducción de nuevos elementos teóricos en el sistema, pero sí hará ostensible el elemento teórico privilegiado por los estudiantes para determinar los planos, que anticipamos será el Postulado puntos-plano.

Esperamos que en la interacción en los grupos los estudiantes hagan explícita su solución individual acerca de cuántos planos “ven” en la configuración dada. Y con el uso de Cabri 3D y/o el modelo físico produzcan una solución que difiera de la anticipación obtenida individualmente. Esta diferencia contribuirá a la generación de incertidumbre. Para esta tarea no se tiene previsto desarrollar una discusión de toda la clase y, por esta misma razón, tampoco hay una previsión del papel de profesor para explotar el potencial semiótico del material empleado.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Consideramos que existen dos vías para que la incertidumbre emerja en esta situación. En la primera vía, se espera que emerja producto del contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la discusión en grupos. Probablemente, al hacer la anticipación individual el número de planos que determinen sea menor que siete.

En la segunda vía, en la discusión en grupos, como la frase en la pregunta (b) del enunciado habla de ocho planos esperamos induzca a revisar las anticipaciones individuales y el resultado que han obtenido en el trabajo en grupos usando el modelo físico y/o el software. Se espera que la incertidumbre se manifieste como duda en esta parte del desarrollo de la tarea y se evidencie en lo planteado por los estudiantes, particularmente en la interacción en los grupos de trabajo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se espera que la incertidumbre movilice la necesidad intelectual para hacer una revisión de sus resultados con base en los elementos teóricos estudiados. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación. Es decir, con la manifestación de argumentación productiva, y con la confianza que expresen con el resultado obtenido a partir de los elementos teóricos que soportan la respuesta correcta.

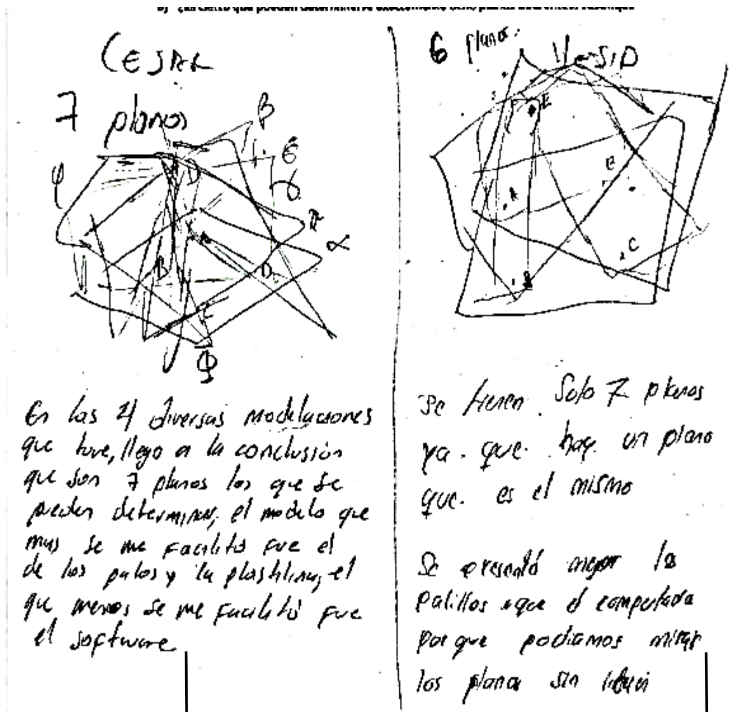
6.3.2.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes privilegiaran el uso del Postulado puntos-plano para la determinación de los planos.	En el G1, el elemento teórico empleado parece ser el Teorema rectas-plano. En el G2, el elemento que enuncian en varias ocasiones para determinar los planos es el Teorema recta-punto-plano. En el G3, el elemento que más mencionan para determinar los planos es el Postulado puntos-plano.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Se tenía previsto que la interacción de los estudiantes con el uso de Cabri 3D y/o el modelo físico hiciera ostensible el elemento teórico privilegiado por ellos para determinar los planos. Asimismo, se tenía previsto que la interacción de los estudiantes con el uso de Cabri 3D y/o el modelo físico produjese una solución que difiere de la anticipada por cada uno de ellos en la pregunta (a), Se esperaba que este hecho contribuyera a la generación de incertidumbre.	En la interacción de los tres grupos con el uso del modelo físico y/o Cabri 3D se hizo evidente la solución anticipada por cada uno en la respuesta a la pregunta (a) y su diferencia con la respuesta obtenida en el trabajo en grupo. Así lo consignaron en las hojas de trabajo. No hay evidencia acerca del vínculo entre los elementos teóricos mencionados y el uso del modelo físico y/o Cabri 3D en la interacción en los grupos.

Fragmento ilustrativo de la Hoja de trabajo del G1

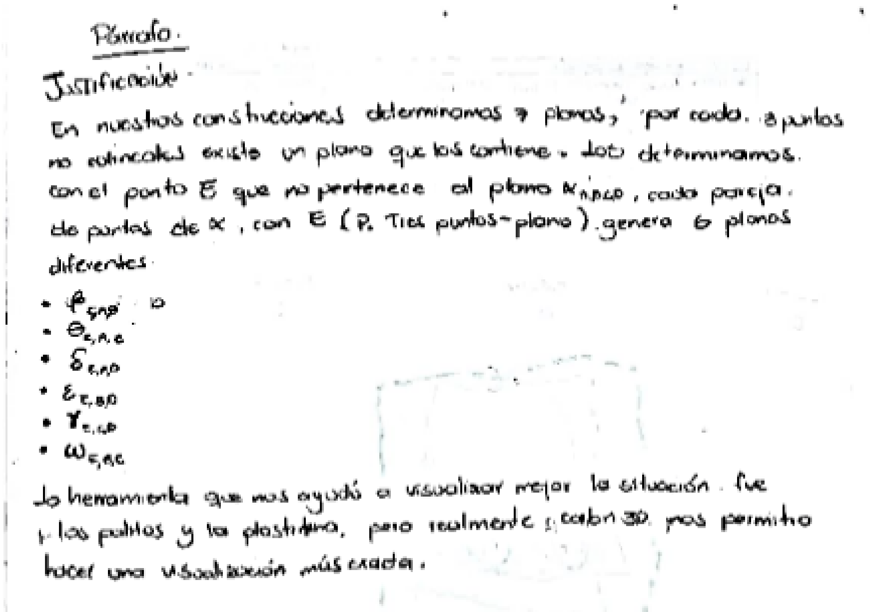
En la hoja de trabajo se encuentra la anticipación de cada uno de los dos integrantes del grupo de trabajo, una representación gráfica de la situación, el párrafo con la solución y la visión de cuál fue la herramienta que más contribuyó a la solución de la pregunta formulada en la tarea.



En las 4 diversas modelaciones que tuve, llego a la conclusión que son 7 planos los que se pueden determinar, el modelo que más se me facilitó fue de los palos y la plastilina, el que menos se me facilitó fue el software.	Se tienen solo 7 planos ya que hay un plano que es el mismo. Se presentó mejor los palillos que el computador porque podemos mirar los planos sin (ilegible)

Fragmento ilustrativo de la hoja de trabajo del G3

En la hoja de trabajo no se encuentra la anticipación. Está la solución obtenida junto con el párrafo en el cual se describe la herramienta que contribuyó más a la solución,



Párrafo.

Justificación.

En nuestras construcciones determinamos 7 planos, por cada 3 puntos no colineales existe un plano que los contiene. Los determinamos con el punto E que no pertenece al plano α_{ABCD}, cada pareja de puntos de α, con E (P. Tres puntos-plano) genera 6 planos diferentes.

- $\beta_{E,A,B}$
- $\theta_{E,A,C}$
- $\delta_{E,A,D}$
- $\varepsilon_{E,B,D}$
- $\gamma_{E,C,D}$
- $\omega_{E,B,C}$

La herramienta que nos ayudó a visualizar mejor la situación fue los palitos y la plastilina, pero realmente Cabri 3D nos permitió hacer una visualización más exacta.

Respecto al enfoque en el contenido planteado en la THA nuestra previsión era que la evocación de elementos teóricos se concentraría en el Postulado puntos-planos. No ocurrió así. A diferencia de lo que sucedió en el Ciclo 1, los estudiantes mencionaron más elementos teóricos de la geometría para determinar un plano. Probablemente, para estos estudiantes resulta más familiar el ejercicio de determinar planos pues están en el contexto de los cursos de geometría y no de enseñanza de la geometría. Ya comentamos en el capítulo 4 que los participantes en el Ciclo 2 se encuentran en el tercer curso de geometría y los estudiantes del Ciclo 1 han finalizado estos cursos por lo menos dos semestres atrás.

En la THA se planteó la hipótesis de que el uso de Cabri 3D y/o el modelo físico haría ostensible el elemento teórico usado por los estudiantes para determinar los planos. En la TRA no hay evidencia que nos permita afirmar que esto ocurrió. Por otro lado, esperábamos que se produjesen resultados diferentes entre la anticipación individual y el resultado obtenido usando Cabri 3D y/o el modelo físico y que este hecho generase incertidumbre. La diferencia en los resultados se produjo, como se evidencia particularmente en la hoja de trabajo del G1, pero no parece haber sido decisiva en la generación de incertidumbre.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Teníamos previsto que la incertidumbre se generara como resultado de: El contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la exploración de la situación en grupos usando el modelo físico o Cabri 3D. La declaración en el enunciado de que existen ocho planos lo que podría motivar la búsqueda del octavo plano generando duda en los estudiantes.	En G2 y G3 hay evidencia de anticipaciones individuales distintas acerca del número de plano y el papel desempeñado por estas anticipaciones en el desarrollo de la discusión pues aportan distintos puntos de vista. En los tres grupos de trabajo es evidente que la afirmación de los ocho planos en el enunciado genera duda y motiva el desarrollo de discusiones en torno a este punto.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Teníamos previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo: La exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre que hubiese tenido lugar. La argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos.	Hay evidencia de necesidad intelectual en los tres grupos. Al menos uno de los integrantes en cada uno de estos desarrolló una argumentación que refleja una búsqueda en el campo teórico de referencia para soportar por qué son siete planos. Asimismo, en GT1 y GT3 hay expresión de justificación epistemológica por parte de uno de los integrantes pues plantean una argumentación productiva orientada a resolver la tarea planteada y expresan satisfacción con la solución obtenida.
Fragmento ilustrativo T2C2G2	
En el fragmento que reprodujimos a continuación, los integrantes del G2 discuten acerca de la cantidad de planos que se pueden determinar. Las primeras tres líneas corresponden a la exposición que hace cada estudiante de su anticipación. Luego desarrollan la discusión, en primer lugar, a partir del modelo físico y posteriormente haciendo uso de Cabri 3D. Se observa que durante la interacción la motivación es establecer si son o no ocho los planos, pues así se declara en el enunciado de la tarea,	

en su parte B).

Sergio: Yo diría: cuatro planos

John: Son seis. Porque, piensen en las… Sí vamos a pensar en rectas, rectas-punto para un plano ¿No? [Está aludiendo al teorema rectas-punto-plano] Ahora piensen en las diagonales del cuadrilátero que nos imaginamos [El representado en la figura 6.6].

Jair: ¡Ay si! Son cuatro puntos, un cuadrilátero son cuatro rectas y las diagonales van seis rectas.

En el fragmento anterior cada uno de los integrantes del grupo ha establecido su anticipación. En las dos líneas siguientes tienen el modelo físico como referencia.

Jair: ¡Noo! Pille… si los vamos a determinar por recta y punto, plano. Van seis rectas o sea seis planos, por ese punto [Se refiere al punto E, externo al plano en el cual están A, B, C y D]. Rectas, todas las rectas, las cuatro están tan, tan, tan [Traza sobre el modelo físico rectas en el aire con las manos que unen los puntos], punto. Ahí van seis planos ¿Y los otros dos de dónde salen? [Se refiere a dos más para completar ocho que menciona el enunciado].

[…]

John: ¿Por qué hablan de ocho? [Está aludiendo a los ocho planos mencionados en la parte (b) del enunciado].

En lo que sigue uno de ellos construye en Cabri 3D un modelo de la situación.

Sergio: ¿Cómo va a hacer los planos? [dirigiéndose a Jair que trabaja en el computador].

Jair: O sea, cada recta y este punto. Póngalo de frente para ver cada plano [Le pide que haga un arrastre bola de cristal para girar la representación y tener otra perspectiva de esta]. Ahora esta recta y este punto, esta recta y este punto.

[…]

Sergio: Uno, dos, tres, cuatro, cinco y el rojo seis. [Le han puesto colores a los planos, en Cabri 3D]

Jair: ¿Sí pilla? Por cada recta un plano.

Sergio: Falta la diagonal, falta la diagonal. [Se refiere a la diagonal de cuadrilátero ABCD (ver figura 6.6)]

Jair: Primo… ¡Hay siete!

John: Si, hay siete [ha hecho la construcción de los planos en Cabri 3D y ha hecho arrastres bola de cristal, luego dirige su atención al computador en el que están trabajando Jair y Sergio] ¿De dónde sacaron que había un octavo?

Jair: Hay seis rectas en ese plano, el plano que las contiene, son siete. ¡Ah! Pille que todos esos planos [los seis planos determinados en Cabri 3D a partir de las rectas AB, AC, AD, BC, BD y CD], contienen ese punto [Se refiere al punto E]. ¿Sí o no? Entonces un plano que pasa por todas estas [Se refiere al plano en el cual están contenidas las rectas mencionadas].

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en la generación de incertidumbre, en relación con la hipótesis acerca de la diferencia entre la anticipación individual y lo encontrado en la interacción en grupo, con el uso de las herramientas, no se verificó que esta diferencia generase la incertidumbre. Y en relación con la hipótesis acerca de la afirmación en el enunciado de que son ocho los planos que se determinan, esta sí generó incertidumbre, observable en la interacción de los tres grupos registrados. En el fragmento ilustrativo que se presenta, es visible que la discusión se desarrolla en torno a si son ocho los planos o no lo son. La duda, expresión de incertidumbre, se manifiesta en diferentes momentos: Jair plantea "¿Y los otros dos de dónde salen?" Y John en dos momentos distintos dice "¿Por qué hablan de ocho?" "¿De dónde sacaron que había un octavo?".

Acerca de lo esperado en la THA sobre el enfoque en la producción de necesidad intelectual se verificó en los tres grupos registrados que para solventar el estado de incertidumbre generado por la búsqueda de los "ocho planos" los estudiantes fundamentan sus soluciones en los elementos teóricos de referencia. En el fragmento ilustrativo se observa que adoptaron como base para determinar los planos el Teorema recta-punto-plano. Jair lo hace explícito cuando afirma: "sí, los vamos a determinar por recta y punto, plano. Van seis rectas o sea seis planos, por ese punto". Lo reitera cuando es verificada con Cabri 3D su solución y Sergio le pregunta: "¿Cómo va a hacer los planos?" A lo que él responde: "O sea, cada recta y este punto". Y es expresión de justificación epistemológica lo dicho por él mismo en la última línea del fragmento, cuando explica la razón por la cual los planos son siete.

Sobre la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual, en este ciclo podemos decir que resultó bastante aproximada a lo previsto en la THA. Sin embargo, el que la generación de incertidumbre no fuese visible a partir de la diferencia entre lo anticipado y lo que se establece en la interacción en grupos con el uso de herramientas, nos llevó a replantear la actividad buscando verificar esta hipótesis. Por tal razón en el Ciclo 3 planteamos un enunciado que hiciera más compleja la determinación de la cantidad de planos en el momento de la anticipación.

6.3.3 TAREA 3, CICLO 3

6.3.3.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Determinar un número planos en una configuración específica de puntos dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Complete la tabla, para cada una de las configuraciones de puntos dadas en la primera columna, de acuerdo con las siguientes instrucciones:

En la columna “Anticipación”, escriba su respuesta sólo considerando la situación mentalmente.

En la columna “Con dibujo”, escriba su respuesta, si se ha modificado después de hacer el dibujo, haga la representación gráfica correspondiente.

En la columna “Con modelo”, escriba su respuesta, si se ha modificado, luego de representar la situación con un modelo físico para verificar la respuesta dada en la columna “Con dibujo”.

En la columna “Con Cabri”, y sólo si lo considera necesario, escriba su respuesta luego de representar la situación en el software.

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B y C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				

a) Redacte un párrafo describiendo cómo se fueron modificando sus resultados, si es el caso. Intente justificar por qué ocurrieron los cambios.

b) Sean n puntos A, B, C …cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración? ¿Qué elementos del sistema teórico permiten soportar esta generalización?

Instrucciones adicionales

Las instrucciones iniciales que se dan para el desarrollo de la tarea indican que, para atender a lo señalado en la parte referida a la anticipación, los estudiantes deben considerar la situación simplemente a nivel mental sin hacer uso de las manos. En este ciclo reciben una hoja de trabajo individual para registrar todo el desarrollo. Para estudiar la situación posteriormente disponen de lápiz y papel, palos, plastilina y un cartón, así como del software Cabri 3D. Se les pide escribir en cada una de las columnas los resultados, atendiendo a la herramienta utilizada para abordar la situación.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrolla únicamente en su etapa de discusión en grupos. En esta etapa la profesora y el investigador interactúan con los grupos de trabajo, mientras estos desarrollan su exploración.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los aspectos de contenido involucrados en el desarrollo de esta tarea ya han sido estudiados previamente. Son elementos del sistema teórico que permiten determinar un plano: el Postulado puntos-plano, el Teorema recta-punto-plano y el Teorema rectas-plano. Los estudiantes podrán determinar la cantidad exacta de planos que se determinan con la configuración de puntos dada haciendo uso de alguno de esos elementos del sistema teórico.

En el Ciclo 1 se observó que los estudiantes privilegiaron el uso del Postulado puntos-plano. En el Ciclo 2 se observó que usaron el Postulado puntos-plano, el Teorema rectas-plano y el Teorema recta-punto-plano. En la presente tarea el enunciado se modifica sustancialmente respecto a los ciclos 1 y 2. Se espera que el modelo para esta determinación de planos sea el polígono en el plano base con sus diagonales. Así que probablemente el elemento teórico más usado será el Teorema recta-punto-plano, seguido del Postulado puntos-plano y eventualmente puede aparecer el Teorema rectas-plano.

Enfoque en la mediación (Em). En el desarrollo de esta tarea se emplearán tres artefactos: lápiz y papel, modelo físico que se construye con palos y plastilina y Cabri 3D. Nos interesa particularmente examinar el papel de los dos últimos en el desarrollo de la tarea. Asimismo, hay dos momentos claramente demarcados en el desarrollo de la tarea: la anticipación individual y la interacción en grupos, donde se estudia la situación representándola con los artefactos mencionados.

Respecto al modelo físico y su potencial semiótico, consideramos que el representar la "jaula de alambre"[8] (figura 6.8) del poliedro que se forma al unir los puntos dados con los palos, sugerirá la idea de usar el Teorema recta-punto-plano. Es nuestra hipótesis porque el tener los palos, creemos, que indicará la representación de segmentos de recta y que la determinación y conteo de planos vendrá insinuada directamente por el mencionado teorema. Por otro lado, el contraste de resultados distintos de la anticipación motivará la discusión la situación hasta alcanzar un consenso satisfactorio para los integrantes de cada grupo de trabajo.

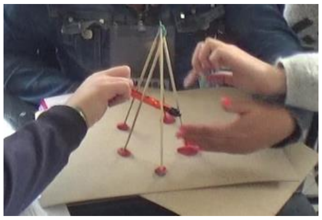


Figura 6.8. Representación de la situación para 5 puntos en el plano base.

[8] El modelo físico de un poliedro puede ser el cuerpo sólido del mismo, la superficie que representa solo sus caras o la jaula de alambre que representa exclusivamente sus aristas y vértices.

Acerca de Cabri 3D, de acuerdo con las instrucciones impartidas verbalmente, los estudiantes lo usarán después de hacer la exploración con lápiz y papel y con el modelo físico. Por tanto, el papel del entorno es en esta tarea más de verificación que de construcción conceptual. Aunque no tiene un papel decisivo para potenciar la incertidumbre, esperamos sí haga ostensible el elemento teórico privilegiado por los estudiantes para determinar los planos.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). En este ciclo se espera que la incertidumbre emerja producto del contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la discusión en grupos. La anticipación individual se hará sin uso de lápiz y papel o cualquier modelo físico con las manos. En el estudio de la situación en grupos pueden hacer uso de lápiz y papel, material concreto (palos, plastilina y cartones) para hacer modelo físico y Cabri 3D.

Esperamos que, al hacer la anticipación individual, en cada caso, el número de planos que determinen sea diferente al número exacto de planos que se pueden determinar con cada configuración de puntos, particularmente a medida que se aumenta el número de puntos en el plano base. Este resultado deberá generar duda en los estudiantes respecto a la diferencia de resultados, esta duda será evidente en la interacción en los grupos de trabajo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se espera que la incertidumbre se manifieste como duda o como sorpresa al contrastar los resultados de la anticipación individual con los obtenidos en grupo con el uso del modelo físico, como ya se mencionó en el apartado anterior. Esta incertidumbre generada movilizará la necesidad intelectual para hacer una revisión de sus resultados con base en los elementos teóricos estudiados. Lo previsto es que estos elementos teóricos permitan establecer un método confiable para obtener los resultados con independencia de los posibles errores de conteo. Adicionalmente, esperamos que la necesidad intelectual producida conduzca a los estudiantes a generalizar cómo determinar el número de planos para los casos en los cuales el conteo directo no es posible. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva, y con la confianza que expresen con el resultado obtenido a partir de los elementos teóricos que soportan la respuesta correcta que el número de planos es exactamente siete.

6.3.3.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)

THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran principalmente el Teorema recta-punto-plano y en menor medida el Postulado puntos-plano. Eventualmente será utilizado el Teorema rectas-plano.	En el G1 surge, en primer lugar, como elemento de referencia la combinatoria. Posteriormente hacen uso del Postulado puntos-plano y al emplear el modelo físico sí aluden al Teorema recta-punto-plano. En el G2, hacen referencia al Teorema recta-punto-plano al hacer uso del modelo físico.

Fragmento ilustrativo de hoja de trabajo de un integrante del G1

A continuación, se presenta la hoja de trabajo de uno de los integrantes de G1. La interpretación que hacemos es que el conteo de caras y diagonales puede atender al uso de dos elementos teóricos. Uno, a un uso del Teorema recta-punto-plano pues los lados de los polígonos junto con el punto que no pertenece al plano pueden ser los elementos establecidos por ese teorema. Dos, a un uso del Teorema rectas-plano al hablar de caras están observado lados que se intersecan para constituir esas caras. Sin embargo, en su interacción aluden al Teorema recta-punto-plano (Anexos T3C3G1).

Hoja de trabajo de Antonio:

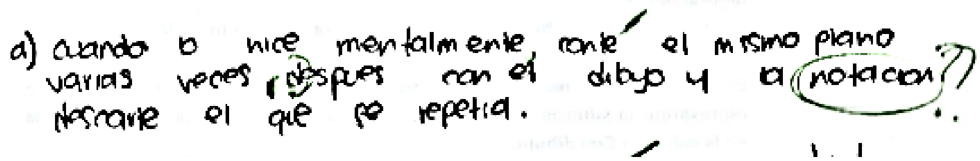
a) En un principio conte las caras del recipiente, con dichos lados, pero luego se consideraron los planos definidos por las caras. y los lados determinados por las diagonales. Luego consideramos el plano.

Acerca de los elementos del sistema teórico de geometría que preveíamos en el enfoque en el contenido, en la THA estos fueron evocados por los estudiantes. En la hoja de trabajo de Antonio se puede inferir el uso del Teorema rectas-punto-plano y/o el Teorema rectas-plano cuando menciona de "los planos definidos por las caras, y los lados determinados por las diagonales". Otros elementos, como el Postulado puntos-plano, son mencionados en la interacción en los grupos de trabajo (ver Anexos T3C3G1, línea 1). En el G1, uno de los integrantes hace uso de la combinatoria en su primera aproximación a la solución. De acuerdo con nuestra experiencia en el Ciclo 1, era previsible que por la naturaleza de la tarea fuese usada la combinatoria, así que puede haber sido una deficiencia en la formulación del enfoque en el contenido en la THA.

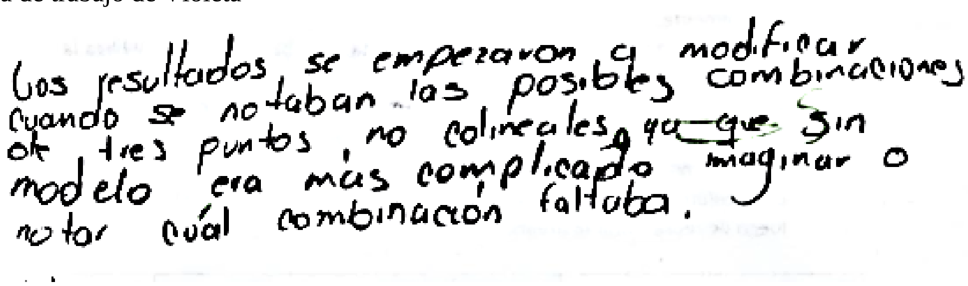
Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Teníamos previsto con respecto al uso de los artefactos y la interacción social al abordar la situación qué: El uso de modelo físico y de Cabri 3D en el estudio de la situación produjera resultados que contrastaran con los obtenidos en la anticipación de forma individual por cada uno de los integrantes de los grupos. El uso del modelo físico y de Cabri 3D hiciera ostensible en la interacción en los grupos el elemento teórico privilegiado por los estudiantes para la determinación de los planos. En el caso del modelo físico esperamos que predomine el uso del Teorema recta-punto-plano.	En el G1 es evidente la diferencia entre la solución planteada individualmente en la anticipación (Anexos T3C2G1) y la que obtienen al hacer uso del modelo en la interacción en grupo, cuando abordan la situación con cinco puntos en el plano base. Por otro lado, como se mencionó en el apartado anterior, se infiere que hacen uso del Teorema recta-punto-plano para determinar los planos. En el G2, se verifica el contraste entre los resultados obtenidos individualmente en su anticipación y los obtenidos en la interacción en grupo cuando hacen uso del modelo físico (Anexos T3C2G2). En este grupo, la intervención del investigador influye para hacer evidente ese contraste a las estudiantes, porque pregunta activamente por los resultados obtenidos y la razón que los justifica.

Fragmento ilustrativo de hojas de trabajo de integrantes de los G1 y G2

Hoja de trabajo de Jeison


a) cuando lo hice mentalmente conte el mismo plano
varias veces, despues con el dibujo y la notacion
descarte el que se repetia.

Hoja de trabajo de Violeta


Los resultados se empezaron a modificar
cuando se notaban las posibles combinaciones
de tres puntos, no colineales, ya que sin
modelo era más complicado imaginar o
notar cuál combinación faltaba.

Acerca de lo previsto en la THA respecto al enfoque en la mediación, es evidente el contraste de los resultados entre la anticipación y el trabajo posterior. Se explícita incluso en las hojas de trabajo. Jeison alude al dibujo y Violeta al modelo. Sin embargo, no se pudo verificar que el uso de Cabri 3D o el modelo físico hiciese ostensible el elemento teórico que privilegian los estudiantes para determinar un plano.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)

THA	TRA
Teníamos previsto que la incertidumbre se generara como resultado del contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la exploración en grupos de la situación usando el	Como se mencionó en el apartado anterior, el contraste se produjo tanto en el G1 como en el G2. En el G,1 es visible como la duda se genera al

dibujo, modelo físico y Cabri 3D.	hacer uso del modelo físico y al comprobar para el caso de cinco puntos en el plano base que su anticipación no correspondía con lo que observan. En el G2, se genera incertidumbre con posterioridad a las preguntas formuladas por el investigador, son visibles la duda y la sorpresa al constatar que los resultados anticipados no corresponden a lo que ilustra el modelo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Lo que teníamos previsto es que los estudiantes, a partir de la incertidumbre generada, hagan la búsqueda de elementos teóricos que permitan establecer un método confiable para obtener los resultados del número de planos con independencia de los posibles errores de conteo. Adicionalmente, esperamos que la necesidad intelectual producida conducirá a los estudiantes a generalizar cómo determinar el número de planos para los casos en los cuales el conteo directo no es posible. La argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos serán expresión de justificación epistemológica.	Hay evidencia de necesidad intelectual y de justificación epistemológica en el G1 pues examinan lo hecho y obtienen una generalización dos de los integrantes del grupo. En el G2 no hay evidencia de necesidad intelectual pues el encontrar que los resultados no se corresponden (entre la anticipación y lo obtenido posteriormente) no impulsa una búsqueda teórica.

Fragmento ilustrativo de T3C3G2

En este fragmento el investigador pregunta a las estudiantes por el resultado cuando son cinco los puntos en el plano base. Ellas han verificado con el modelo físico y afirman que son 10 los planos que se determinan.

Investigador:	Déjenme ver…perdón, las voy a molestar, déjenme ver el modelo que hicieron para cinco. En todos yo vi que ustedes contaron este también ¿No? [Señala el plano base] que es importante también.
Violeta:	Sí
Hacen nuevamente el conteo y concluyen que son diez planos otra vez.	
Investigador:	Después de éste [señala un punto sobre el modelo], íbamos cinco [hace un gesto circular sobre el modelo indicando las "caras"]. Estamos haciendo un conteo de diagonales ¿Ya las contaron todas?
María:	Otra vez [Han puesto palos para indicar las "diagonales"]
Violeta:	¡Si dan once! (ríe)

Fragmento ilustrativo de T3C2G1

En el fragmento que sigue a continuación, los estudiantes ya han verificado con el modelo y con Cabri 3D el número de planos y Antonio está comunicando a sus compañeros que tiene una manera para responder la pregunta (b), es decir para establecer cuántos planos se determinan si son n puntos en el plano base.

Antonio: Es que, por cada segmento, los planos que contienen cada segmento [le señala los segmentos AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE y DE que hay en el tercer dibujo].

[…]

[…] véase el (b) [se dirige a Bayron] véase bien el (b) y le digo como se hace. ¿Se acuerda cuando hicimos la recurrencia? Ahí la tenemos […]: el número de lados del polígono, más el número de diagonales del polígono, más uno que es el plano de abajo.

Acerca de lo previsto en la THA respecto al enfoque en la generación de incertidumbre, esta se verifica y, ya lo mencionamos, el contraste entre la anticipación y los resultados posteriores es bastante evidente en este ciclo, más de lo que lo fue en el Ciclo 2. Loa anterior con la salvedad qué el investigador intervino activamente en el G2 para que esto se produjese, como es visible en el fragmento presentado. Respecto a lo previsto en la producción de necesidad intelectual, en el G1 se produjo de acuerdo con lo previsto. En el fragmento que se presenta, Antonio en la última línea describe la generalización por la que se indaga en el enunciado. Sin embargo, en el G2 pese a haberse generado incertidumbre esta no redunda en la producción de necesidad intelectual. Es probable que un excesivo énfasis de la tarea en los aspectos operativos y de conteo haga que se pierda su dimensión conceptual.

6.4 ANÁLISIS DE LA TAREA 4

En la Tarea 4 aparecen dos elementos que marcan una diferencia en el análisis con respecto a las tareas previas. El primero es en el aspecto temático. La Tarea 4 está enmarcada en el Bloque 2 del curso, en el cual se estudian las relaciones de perpendicularidad recta-plano. Es la tarea introductoria para el estudio de esas relaciones de perpendicularidad. El segundo es respecto a los participantes que se involucran en el desarrollo de esta tarea. Como se mencionó en el Capítulo 4 en el Ciclo 1 se aplicaron las tareas 1, 2 y 3. Las tareas 4, 5 y 6 se aplicaron únicamente en los ciclos 2 y 3. Así que, a partir de esta tarea, los análisis se referirán únicamente a estos dos ciclos.

6.4.1 TAREA 4, CICLO 2

6.4.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Establecer teóricamente las condiciones para que exista una relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.

Tarea

Enunciado

Determinen la respuesta a las siguientes preguntas. Si las pueden justificar, háganlo

a) Un plano α y una recta m se intersecan ¿Qué es la intersección?

b) Sean *m*, *n* y *l* rectas tales que *m* es paralela a *n* y *l* es perpendicular a *m* ¿Es *l* perpendicular a *n*?

c) La recta AB está contenida en el plano α, la recta CD está contenida en el plano β. α y β son planos diferentes, las rectas AB y CD son paralelas ¿Es vacía la intersección de los planos α y β?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes abordan la situación en primer lugar de manera individual. Posteriormente, discuten en grupo sus soluciones y para ello cuentan con materiales para hacer un modelo físico de la situación y Cabri 3D.

Intervenciones previstas

Durante la etapa de discusión en grupos, la profesora y el investigador interactúan con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. Los estudiantes reportan su trabajo en una hoja por grupo y a partir de las respuestas la profesora organiza la discusión en la siguiente sesión de clase.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con la pregunta (a) esperamos que los estudiantes construyan imágenes mentales de la intersección de un plano y una recta. Esta intersección puede ser un punto o la recta misma (Figura 6.9). Con la pregunta (b) esperamos que los estudiantes usen la definición de rectas paralelas, la cual implica que son coplanares. A su vez, esperamos que construyan imágenes mentales de las tres rectas mencionadas. Puede ocurrir que las tres rectas estén en el mismo plano o que la perpendicular no esté contenida en el plano. A partir de esta representación se espera introducir la definición de rectas alabeadas (Figura 6.10). Con la pregunta (c) esperamos que los estudiantes usen la definición de planos paralelos, para construir imágenes mentales de la solución en la cual los planos son paralelos y del caso en el cual se cumple la condición de paralelismo entre las rectas AB y CD sin que los planos sean paralelos (Figura 6.11).

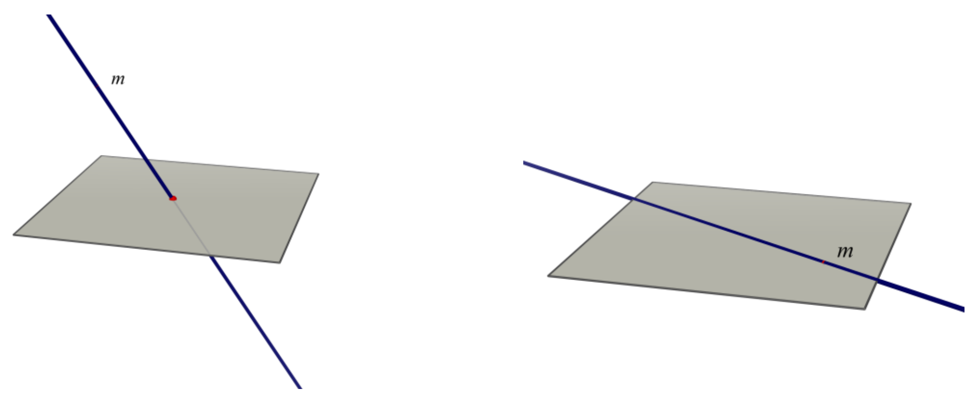


Figura 6.9. Dos posibles representaciones para la respuesta a la pregunta (a)

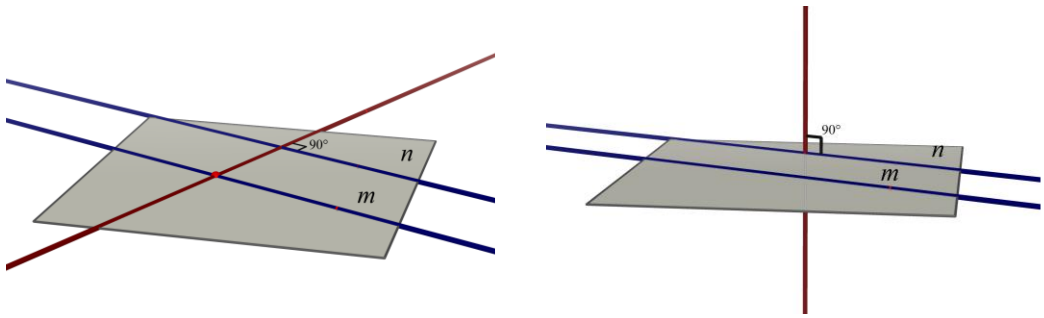


Figura 6.10. Dos posibles representaciones para la respuesta a la pregunta (b)

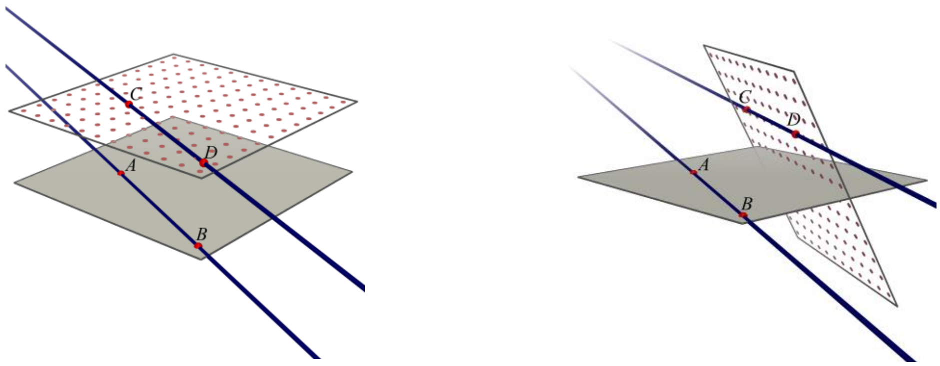


Figura 6.11. Dos posibles representaciones para la respuesta a la pregunta (c)

Enfoque en la mediación (Em). Esperamos que en el momento de la interacción en grupo al trabajar con el material concreto y/o con Cabri 3D, aquellos estudiantes que construyeron imágenes mentales de las soluciones para uno solo de los casos amplíen su visión a más de una solución, como se ilustra en las figuras 6.9, 6.10 y 6.11. Por otro lado, el momento en el cual la profesora discute las soluciones con la clase lo consideramos muy relevante. En ese momento, la profesora toma las soluciones aportadas por los estudiantes y plantea cuestionamientos a estas, representando las mismas con Cabri 3D.

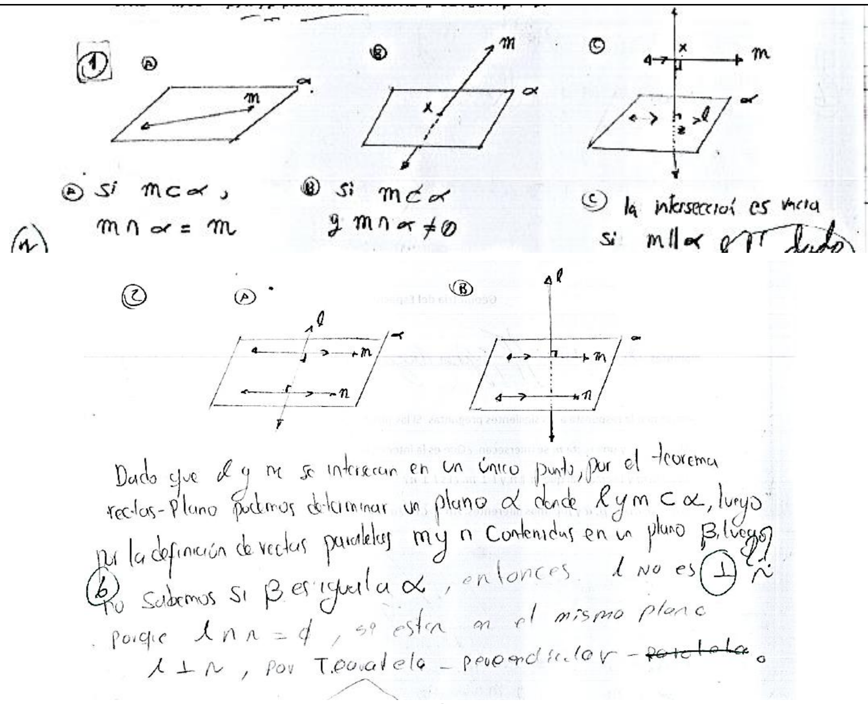
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que la incertidumbre se exprese como duda producto de las diferentes opiniones que planteen los estudiantes respecto a las soluciones a las preguntas. Por otra parte, cuando la profesora desarrolle la discusión con la clase, esperamos que la incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa ante las alternativas planteadas por la profesora, ilustradas con

Cabri 3D, que pueden no haber sido consideradas por algunos estudiantes en sus soluciones.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Esperamos que al producirse la incertidumbre se genere necesidad intelectual de fundamentar la solución a cada una de las preguntas. Esa necesidad intelectual se expresará en los argumentos teóricos que sustenten por qué la intersección puede ser uno o dos puntos, en la respuesta a la pregunta (a), por qué la perpendicular puede estar o no contenida en el mismo plano de las paralelas en la solución a la pregunta (b) y por qué los planos pueden o no ser paralelos, al responder a la pregunta (c). La argumentación productiva exhibida en la interacción en los grupos, así como la satisfacción expresada con las soluciones logradas serán evidencia de justificación epistemológica.

6.4.1.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Esperábamos que, los estudiantes al discutir la solución a cada una de las preguntas sustentaran por qué esta situación puede producirse en más de un plano. Y que apoyaran sus argumentos es elementos como: Definición de rectas paralelas, Definición de rectas perpendiculares, Definición de planos paralelos.	En la interacción del G1, así como en las hojas de trabajo de los dos grupos se evidencia que los estudiantes conciben las soluciones en más de un plano para cada una de las tres preguntas formuladas. En la escritura y discusión de la justificación de las respuestas a las tres preguntas planteadas en las hojas de trabajo, mencionan elementos de contenido no previstos en la THA como la Definición de intersección, la Definición de subconjunto, el Postulado de la llaneza y el Teorema recta-punto-plano.
Fragmento ilustrativo hoja de trabajo de G2	
En el extracto de la hoja de trabajo que se presenta a continuación se evidencia que en la solución a las preguntas (a) y (b) los estudiantes consideraron la solución en un plano y en más de un plano y que los elementos teóricos enunciados no son solo los previstos en la THA.	



Dado que *l* y *m* se intersecan en un único punto, por el teorema rectas-plano podemos determinar un plano α donde *l* y *m* están contenidas en α, luego por la definición de rectas paralelas *m* y *n* contenidas en un plano β, luego no sabemos sí β es igual a α, entonces *l* no es perpendicular a *n* porque la intersección de *l* y *n* es igual a vacío, si están en el mismo plano *l* es perpendicular a *n*, por Teorema perpendicular-paralela

Fragmento ilustrativo T4C2G1

En el fragmento de la interacción que se presenta a continuación, los integrantes del G1 discuten cómo justificar, en la respuesta a la pregunta (a), que la intersección entre el plano y la recta puede ser un punto o la recta dada. La dirección que le dieron a la discusión fue la de sustentar qué es intersección en este caso.

Juan:	Habíamos dicho que la intersección puede ser, o la recta o un punto. La intersección pueden ser dos cosas. Dos casos, se pueden justificar ambos casos.
Carlos:	Es mejor definir la intersección [empieza a escribir en su cuaderno].
Juan:	O sea, podemos justificar los dos casos.
Carlos:	La recta *m*, intersecada con alfa es igual a [va escribiendo en una hoja] los *x* tales que *x* pertenezcan a *m* y *x* pertenezcan a alfa.

Lo previsto en la THA acerca del enfoque en el contenido no se corresponde con lo que se observó en la TRA. En la pregunta (a), en el G1 los estudiantes se interesan particularmente por definir qué era la intersección. En la hoja de trabajo de G2 se observa que en la pregunta (b) los estudiantes usan el Teorema rectas-plano, la Definición de paralelas (el único elemento previsto en la THA) y el Teorema paralela-perpendicular-paralela, aunque, en realidad, parecen estar usando la proposición contrarrecíproca del mismo. Lo que podemos inferir de este resultado es que nuestra previsión fue bastante limitada cuando formulamos la THA.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperamos que los estudiantes que concibieron una solución limitada a un plano la amplíen al interactuar en los grupos con el uso del material o en el momento en el cual la profesora discute con la clase las soluciones.	No hay evidencia en la interacción del G1 de la necesidad del modelo físico o de Cabri 3D para ampliar, en la solución, sus imágenes mentales a más de un plano. Al parecer, desde un principio conciben respuestas a las preguntas en más de un plano. En este ciclo, en la interacción de la profesora con la clase sucedió algo particular. En el curso del análisis posterior a la primera sesión de lo hecho por los estudiantes no se evidencia el contraste esperado entre la solución sin el uso de artefactos y con el uso de estos, como ya se mencionó. Por tal razón decidimos introducir una situación para ser estudiada por la clase en el curso de la discusión con el uso de Cabri 3D, con el propósito de generar incertidumbre. Esta situación surge a partir de la representación, en Cabri 3D, de la respuesta a la pregunta (b). La situación se puede enunciar cómo: Dada una recta que interseca a un plano en un punto ¿Existe en ese plano otra recta perpendicular a la recta dada? Se les solicita a los estudiantes estudiar brevemente la situación en Cabri 3D, para establecer qué solución o soluciones existen a la pregunta y a partir de estas respuestas la profesora discute con la clase.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Previmos que en la interacción en los grupos con el uso de Cabri 3D y el modelo físico surgieran diferentes puntos de vista respecto a la solución de cada una de las preguntas, que produjeran en los estudiantes reacciones de duda y/o sorpresa, particularmente, en aquellos estudiantes que no concibieron la solución en más de un plano. Asimismo, se previó que, en la interacción de la clase con la profesora al debatir las soluciones presentadas por los estudiantes, con el uso de Cabri 3D, se generara incertidumbre en aquellos estudiantes que no consideraron las diferentes soluciones posibles.	No se verifican reacciones de duda o sorpresa en la interacción en el G1. Se presentan opiniones diferentes respecto a cómo sustentar la intersección de la recta y el plano, como se ilustra en el fragmento presentado en el enfoque en el contenido. Al discutir con la profesora las soluciones a las tres preguntas planteadas, tampoco se verifican reacciones de los estudiantes que fuesen expresión de incertidumbre. Cuando la profesora plantea la pregunta que introdujimos en este momento del desarrollo de la tarea y mencionamos en la sección anterior, sí se verifican reacciones de sorpresa por parte de los estudiantes.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Esperábamos que la incertidumbre generada por las diferencias producidas en la respuesta a las tres preguntas formuladas produjera en los estudiantes la búsqueda de argumentos teóricos para resolver la situación de incertidumbre.	Como ya se mencionó no se evidencia la generación de incertidumbre en la interacción alrededor de la solución a las tres preguntas formuladas. En la interacción de la profesora con la clase sí se presentan reacciones que son indicio de generación de incertidumbre, pero a la pregunta que se introdujo ya en el desarrollo. Sin embargo, como esta no estaba concebida en el diseño inicial de la tarea no tuvo un tiempo asignado para su discusión por parte de los estudiantes. Por tanto, no existió el seguimiento para verificar si produjo o no necesidad intelectual en ellos con este enunciado.
Fragmento ilustrativo de T4C2P	
Como se mencionó no hay evidencia de producción de necesidad intelectual o generación de incertidumbre a partir del enunciado de la tarea. Pero sí se produjeron reacciones interesantes, que son indicio de generación de incertidumbre, a la pregunta y exploración introducidas en la interacción con la profesora. A continuación, se reproduce un fragmento que ilustra una de estas reacciones. La profesora ha planteado la pregunta "Dada una recta (*m* en la Figura 6.12*)* que interseca a un plano en un punto ¿Existe en ese plano una recta (*l* en Figura 6.12) perpendicular a la recta dada?" Y les ha pedido que construyan: una recta (*l*) en un plano, otra recta que la interseca (*m*) y no está contenida en ese plano, tomen la medida del ángulo entre las dos rectas y exploren si se puede obtener mediante	

arrastre de la recta un ángulo recto, en alguna posición de la recta (*m*) que no está contenida en el plano (Figura 6.12). Ha hecho énfasis en que la recta no se ve perpendicular al plano. Luego les ha pedido que abran el archivo con el cual se exploró la respuesta a la pregunta (b) donde las rectas *l* y *m* (Figura 6.13) son perpendiculares por construcción robusta (*l* no es perpendicular al plano base), no por arrastre, se ha representado el plano β que contiene a *l* y *m*. En ese archivo la profesora les solicita a los estudiantes que generen una recta *n* en el plano base que interseque a las recta *l* y *m* en el punto en el cual se cruzan, que midan el ángulo determinado por *l* y *n* y que mediante arrastre de la recta *l* obtengan un ángulo recto entre estas (Figura 6.14).

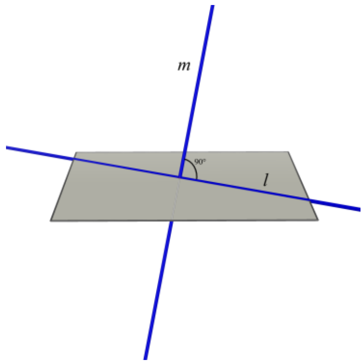


Figura 6.12. Rectas perpendiculares mediante arrastre.

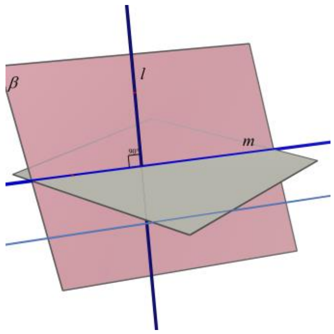
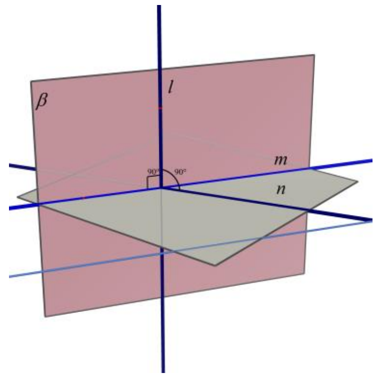


Figura 6.13. Rectas perpendiculares por construcción robusta.



6.14. Dos rectas *l* y *m* en un plano β perpendiculares a una tercera recta *n*.

Profesora: […]
Ahora quiero que miren si pueden volverlo al otro ángulo [el ángulo entre *l* y *n* en la figura 6.14] también recto. Sin cambiar, no quiero cambiar la recta original [*m*], […] esa recta está fija. Las del plano [*m* y *n*] están fijas, fijas, fijas las dos del plano. Entonces lo único que puedo cambiar es esa recta original [*l*], que nació perpendicular a una recta [*m*] nada más, ella es la problemática, digámoslo, ella es la independiente, las otras dos son dependientes, están en el plano. Una en el plano alfa, la otra estaba en el plano beta ¿Cómo hago para modificar esa recta?
Laura: ¡Ay qué chévere! [reacciona así cuando Edwin le señala la pantalla del computador].
Profesora: ¿Qué pasó? ¿Qué es chévere?
John: ¿Profe por qué pasa esto?
Profesora: ¿Qué?
John: Qué al yo ponerle ángulo recto a uno no más…
Jair: …los otros son rectos [se refiere al ángulo entre *m* y *n*].
[…]
Profesora: [Las rectas *n* y *m* son perpendiculares a]… dos rectas ¿Cierto? Y ahora ¿Cómo se ve la relación entre esa recta [*n*] y el plano [β]?
Estudiante: Queda perpendicular al plano.

Las hipótesis formuladas en la THA respecto a los enfoques en la mediación, en la generación de incertidumbre y en la producción de necesidad intelectual no se verificaron en el Ciclo 2, con la tarea diseñada. Sin embargo, la pregunta que introdujimos en la interacción de la profesora con la clase generó en los estudiantes reacciones que evidencian el potencial de la esta como enunciado de una tarea para introducir la Definición de perpendicularidad recta-plano y el Teorema fundamental de la perpendicularidad. Las reacciones de Laura y John expresan sorpresa y duda con el resultado obtenido. Como ya hemos mencionado, dado que esta pregunta se introdujo al finalizar la tarea no hicimos un diseño detallado ni un registro de las interacciones, entonces no pudimos constatar si esta incertidumbre produjo o no necesidad intelectual. Dado que el desarrollo de esta tarea como estaba concebida no permitió verificar la mayoría de las hipótesis planteadas en la THA. Y que, la pregunta introducida en la interacción con la profesora produjo reacciones que evidencian generación de incertidumbre, para el Ciclo 3, se reformuló la tarea planteando el enunciado a partir de esa pregunta.

6.4.2 TAREA 4, CICLO 3

6.4.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje.

Meta de aprendizaje

Establecer teóricamente las condiciones para que exista una relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.

Tarea

Enunciado

Dados *m* recta, α plano, m ∩ α = {X}, ¿Existe la recta *l*, *l* contenida en α, tal que *l* es perpendicular a *m*?

Instrucciones adicionales

Se entregan hojas de trabajo individuales para abordar la solución a la pregunta, luego se le solicita reunirse en grupos poniendo a su disposición el material (palos, plastilina y cartón) y Cabri 3D para hacer una representación de la situación. Entonces, se les entrega una hoja de trabajo con el mismo enunciado para hacer el reporte resultado del trabajo en grupo.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrolla en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactúan con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. La profesora dirige una interacción con la clase al finalizar el momento del trabajo en grupos.

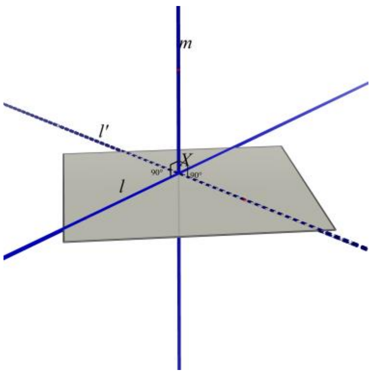


Figura 6.15. Solución para el caso particular en el cual *m* es perpendicular al plano base. La recta *l* es cualquier recta en el plano base que contenga *X*.

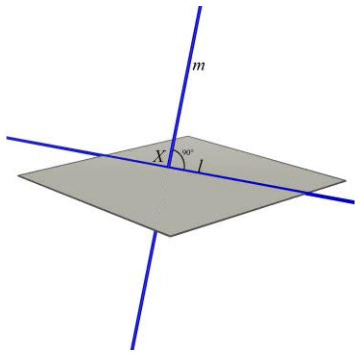
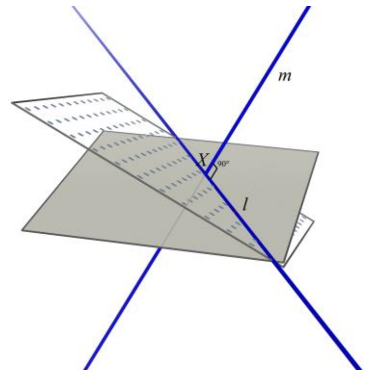


Figura 6.16. Solución por arrastre. Se construye *l* que interseca a *m* y se arrastra *l* hasta que el ángulo se vea recto.



6.17. Solución robusta determinando un plano perpendicular a *m* por *X*. La recta solicitada *l* es la intersección de los dos planos.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los estudiantes no han estudiado aún la Definición de recta perpendicular a un plano. Se espera con esta tarea introducir esta definición, el Teorema fundamental de la perpendicularidad y los teoremas de existencia de perpendicularidad recta-plano.

Enfoque en la mediación (Em). Esperamos que los estudiantes hagan uso de las herramientas de Cabri 3D arrastre y medida de ángulo cuando tengan representadas una recta en el plano y una recta cualquiera que la interseca (Figura 6.16). Este uso debe estar orientado por parte de ellos a conseguir que la medida del ángulo sea 90. Nuestra previsión es que este hecho les proporcionará evidencia empírica de la existencia de al menos una recta en un plano, perpendicular a una recta dada que interseca al plano.

En la interacción en los grupos nuestra previsión es que se presenten diferentes puntos de vista respecto a la existencia o no de esa recta perpendicular. En la interacción de la profesora con la clase se prevé potenciar las reacciones de duda para aquellos que no hayan aceptado la existencia de esa perpendicularidad.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se espera que la incertidumbre se genere en los estudiantes al encontrar una recta (*l* en la figuras 6.15, 6.16, 6.17) que es perpendicular a la recta dada (*m* en la figuras 6.16, 6.17) sin que esta recta dada sea perpendicular al plano. Se prevé que esta incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa respecto a este hallazgo y motive el estudio de las condiciones que deben cumplir las rectas para ser perpendiculares.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Esperamos que la generación de incertidumbre motive la búsqueda de las condiciones que deben cumplir las dos rectas para ser perpendiculares. Esto debe llevar a los estudiantes a examinar la relación de perpendicularidad recta-plano, establecer condiciones teóricas entre los dos objetos para que se de esa relación y buscar cómo garantizarla. Nuestra previsión es que el proceso se expresará como argumentación productiva en torno a esos aspectos y que los estudiantes manifiesten su satisfacción con los argumentos expuestos para evidenciar que se ha producido justificación epistemológica.

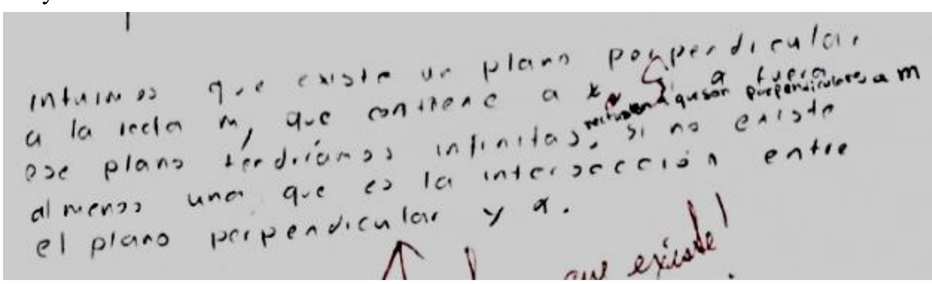
6.4.2.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que emergiera la necesidad de definir la relación de perpendicularidad entre recta y plano. Así como el teorema para	En el G1 y el G2, los estudiantes mencionan la relación de perpendicularidad entre la recta y el plano, aunque no hay una alusión directa del

garantizar la existencia de esa relación.	hecho de que esta relación no está aún definida en el sistema teórico. No hay un cuestionamiento por parte de los estudiantes sobre cómo garantizar la existencia de esta perpendicularidad, salvo por el uso del término “intuimos” en la hoja de trabajo del G1. En la interacción de la profesora con la clase, una vez ella introduce la definición de perpendicularidad entre recta y plano, uno de los estudiantes sí formula directamente la pregunta por la existencia de esa recta perpendicular al plano.

Fragmento ilustrativo de la hoja de trabajo del G1

En lo que escriben en la hoja de trabajo ellos hablan de intuir la existencia de un plano perpendicular a *m* el cual interseca al plano base y esta intersección determina la recta *l* (Figura 6.17) buscada que es perpendicular a *m* en el plano base. En realidad, es una solución general con base en uno de los teoremas de perpendicularidad recta-plano, la existencia del plano perpendicular a la recta el cual están “intuyendo”.


Intuimos que existe un plano perpendicular a la recta m, que contiene a x sí α fuera ese plano tendríamos infinitas, si no existe al menos una que es la intersección entre el plano perpendicular y α.

Intuimos que existe un plano perpendicular a la recta *m*, que contienen a *x* sí α fuera ese plano tendríamos infinitas [rectas], si no, existe al menos una [recta] que es la intersección entre el plano perpendicular y α

Fragmento ilustrativo de la hoja de trabajo del G2

En su hoja de trabajo evidencian que consideraron que la relación se cumple solamente cuanto la recta es perpendicular al plano, pues mencionan únicamente este caso.

En el modelo, se intuye que la recta m es perpendicular al plano α., es decir cualquier recta $\overleftrightarrow{XA_i} \perp m$

7

En el computador se hace la construcción blanda del problema. Se traza una recta $\overleftrightarrow{XA}$ con $A \in \alpha$ y $P \in m$ ($P \notin \alpha$. Se mide el ángulo $\angle PXA$. Se mueve P hasta que $m\angle PXA \cong 90$. Pero se observa que con un punto $B \in \alpha$. ($B \neq A$) $m\angle PXB \neq 90$ por ello se hace la construcción robusta para afirmar la conjetura anterior.

¿en un momento dado 90?

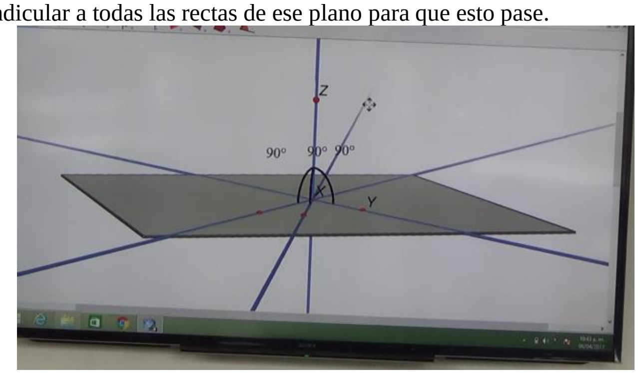
Construcción robusta, con la herramienta perpendicular al plano se observa que esta recta generada es perpendicular a cualquier recta por X. $\overleftrightarrow{XA_i} \subset \alpha$. ($A_i \in \alpha$).

Entonces m es perpendicular a cualquier recta que pase por X, y ~~no~~ que la rec

Fragmento ilustrativo de T4C3P

En el fragmento que se presenta a continuación, la profesora ha establecido la definición de recta perpendicular a plano: "una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano que contienen al punto de intersección de la recta y el plano". Y ha enfatizado el hecho de que esta recta no está contenida en el plano e ilustra la definición con una representación en Cabri 3D en la cual la perpendicularidad ha sido obtenida por arrastre (construcción blanda). Alfonso le pregunta por la existencia de esa recta que interseca al plano.

Profesora: (…) Es decir, no basta con que [la recta] sea perpendicular a una recta de ese plano, necesitamos que sea perpendicular a todas las rectas de ese plano para que esto pase.



Alfonso: ¿Esa recta existe?

Profesora: Ahora ese es el problema. Existe porque la estamos viendo ahí, pero ¿Cómo demuestro que realmente existe?, ¿Cómo puedo hacer eso? Ese es un problema que tenemos […]. Porque llegar a demostrar que [la recta] existe no va a ser tan sencillo como lo imaginamos, vamos a necesitar muchísimas cosas más. Entonces vamos a ir preparando el camino para demostrar que esa recta que Cabri nos muestra, realmente existe.

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en el contenido, en la TRA se verifica que encuentran la recta *l* solicitada en el enunciado. En el G1 aportan una solución general para determinar *l* y es usando el plano perpendicular a *m* (Figura 6.17). En el G2 aportan una solución particular, que es cuando *m* es perpendicular al plano dado (Figura 6.15). En ambos casos es necesaria la relación de perpendicularidad recta-plano, pero los estudiantes no se plantean la necesidad de definir esa relación o de garantizar la existencia de esta, como se había previsto en la THA. Lo más cercano a esta hipótesis es la pregunta formulada por Alfonso en la interacción con la profesora. Esto puede atender a que la evidencia empírica obtenida en el Cabri 3D les resulte suficientemente persuasiva o que, como el foco de la tarea es encontrar una perpendicular, esto no les parezca relevante.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperamos que las herramientas de Cabri 3D, arrastre y medida de ángulo, proporcionen evidencia empírica que resulte persuasiva para los estudiantes respecto a la existencia de la recta *l*, en plano, perpendicular a *m* (Figura 6.16). También esperamos, que en la interacción en los grupos surja entre los estudiantes diferentes puntos de vista acerca de la existencia o no de esa recta, así como en la interacción de la profesora con la clase.	En el G1 uno de los estudiantes resuelve previamente la pregunta aparentemente sin el uso de Cabri 3D. Luego usan Cabri 3D como herramienta de verificación de la solución planteada el estudiante. El modelo físico, cuyo uso no estaba previsto, lo usa este estudiante como herramienta de comunicación, y persuasión a favor de su solución, con sus compañeros de grupo. En el G2 obtienen una solución en Cabri 3D mediante el arrastre (Figura 6.16). Esta no les resulta convincente. Buscan un punto falible de esta solución, el cual hallan al pedir más decimales a la herramienta medida del ángulo. La solución ilustrada por la profesora mediante el arrastre (Figura 6.16), al parecer no les parece persuasiva a todos los estudiantes. Este punto de vista lo expresan en la entrevista con el investigador. Igualmente, varios estudiantes en la entrevista manifiestan no haber encontrado la perpendicular mediante el arrastre.

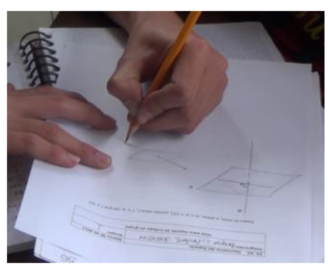
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)

THA	TRA
Teníamos previsto que el hallazgo de una recta *l* en el plano perpendicular a la recta dada *m* (Figura 6.16) generara en los estudiantes reacciones de duda y/o sorpresa que motive en ellos búsqueda de explicación al hallazgo.	En el G1 el hallazgo de *l* no es producto de la exploración en Cabri 3D. Como ya se mencionó, un estudiante resuelve la situación sin el uso de esta herramienta. Sus compañeros expresan dudas frente a la solución por él descrita y él usa Cabri 3D y el modelo físico (hecho con plastilina, palos y cartones) para persuadirlos de su solución. En el G2 encuentran la perpendicular *l* mediante el arrastre, pero no aceptan esta evidencia. En la conversación-entrevista con el investigador algunos estudiantes reconocen que no lograron obtener la representación de una recta *l* perpendicular a una recta *m* en el plano, con Cabri 3D y que ante la representación que les presentó la profesora (Figura 6.16) aún tenían una reserva de duda.

Fragmento ilustrativo de T4C3G1

En el fragmento que se presenta a continuación, Antonio quien ha encontrado la solución sin hacer uso de Cabri 3D le está comunicando la solución a sus compañeros y trata de explicarles cómo supuso la solución particular con un plano perpendicular a una recta *m* que interseca al plano base y determina la recta *l* buscada (Figura 6.17). Primero trata de explicarles con el dibujo y luego pasa a usar material concreto para representar mejor su solución.

Antonio: Yo lo había pensado así: [representa una recta que no es perpendicular al plano]



Tenía esta recta, ahí pareciera que no.

Jeison: ¿Que no, qué?

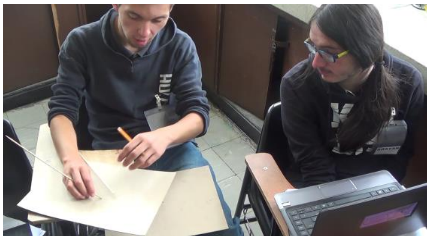
Antonio: Que no habría recta perpendicular [*l* en el plano base perpendicular a *m*].

Jeison: Pues se voltea ¿No? Gira un poco la hoja.

Antonio: Espere. Por esta recta, hay un segundo plano que tiene infinitas rectas perpendiculares [Dibuja el plano perpendicular a la recta *m* por el punto de intersección *X* de ésta el plano base y le hace la marca de ángulo recto (Ver Figura 6.17)].

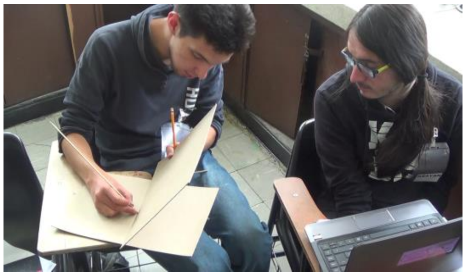
[…]

Antonio:	Yo lo tenía así



[…]

Entonces vi que aquí había todas éstas [mueve un palito sobre el nuevo plano que ha agregado]. Entonces dije: ¡Ahí, mire! Quitemos esto [El cartón que está sosteniendo con su mano] y hay una perpendicular [la determinada en el plano base por la intersección de los dos planos, en este caso los dos cartones]…sale. Entonces hay una o hay infinitas. Pero yo no lo veía. Ahí dije: ¡Si, si hay una!



43 Byron:	Yo sólo veía éste [señala el plano base representado por el cartón que está sobre el pupitre].
44 Antonio:	¿Sólo lo veía así? [pone el palo que representa a *m* perpendicular al plano base, lo que se corresponde con lo representado en la Figura 6.15]. Le faltó fue en su mente coger y decir faa (sic) [mueve el palo que representa a *m para* que no sea perpendicular al plano base y pone el cartón que representa el plan perpendicular a *m* y que interseca al plano base. Ilustrando una representación análoga a la de la figura 6.17]. A mí también me pasó lo mismo.

Fragmento ilustrativo de T4C3G2

En el fragmento ilustrativo que se presenta a continuación las integrantes del G2 han obtenido en Cabri 3D una representación en la cual la medida del ángulo determinado por *l* y *m* es 90 pero la recta *m* no es perpendicular al plano (Figura 6.16). Entonces ellas dudan de ese resultado y hacen uso de la opción de aumentar decimales en la herramienta medida del ángulo, para salir de su estado de incertidumbre. El investigador les pregunta por el resultado de la medición del ángulo que tienen en la pantalla. El ejercicio que hacen las lleva a concluir que la recta *l* perpendicular a *m*, solamente existe cuando la recta *m* es perpendicular al plano (Figura 6.15).

Investigador:	Les dio 90 [la medida del ángulo entre *l* y *m*] ¿No cierto?
María:	No es robusta.
Investigador:	Pero ahí a la recta *m* yo la veo como así. ¿Ustedes si la ven así? [Pone la recta *m* perpendicular al plano en el modelo], Yo la veo así [Modifica la posición de *m* para que no se vea perpendicular al plano].
María:	¿Cómo es posible que…?

	Haz la construcción robusta, a ver si pasa lo mismo. Porque de pronto ahí da 90 y dé con decimales.
Carolina:	¿Le pongo ahí decimales? ¿Seis? [el número de decimales en la medida del ángulo].

En ese momento al incrementar a seis los decimales Cabri 3D les muestra 90 coma y seguido de seis decimales distintos de cero, entonces las tres asienten como confirmando que es el resultado que esperaban.

María:	Toca hacer la construcción robusta a ver si da.
Investigador:	¿Y cómo es robusta?
María:	Pues ya creando el ángulo de 90.
Investigador:	Miren la hoja un momentico, lean el enunciado de la hoja [lee el enunciado] ¿Ustedes que dicen? ¿Existe o no existe? [La recta *l*].
Violeta:	Existe en el caso de que la recta que la recta *m* sea perpendicular al plano (Figura 6.15).
Investigador:	¿Solamente en ese caso?
Violeta:	Solamente en ese caso.

Fragmento ilustrativo de T4C3I

En el fragmento que presentamos a continuación, el investigador lleva a cabo una conversación entrevista con la clase, en la cual presenta fragmentos de vídeo de la interacción de la clase con la profesora y formula preguntas con relación a estos. En este caso les está preguntando por el grado de convicción respecto a la existencia de una recta *l* en el plano base, la cual es perpendicular a una recta *m* que interseca al plano en un punto, pero no es perpendicular a este plano (Figura 6.16).

Investigador:	Ahora les reformulo la pregunta, una vez ilustró Alfonso con el material [modelo físico con cartón, palos y plastilina] y una vez ilustró la Profe [construcción blanda en Cabri 3D]. ¿Quedaron ustedes convencidos de que existía la recta? [la recta *l* en el plano base, perpendicular a la recta *m* que interseca al plano base y no es perpendicular a éste (Figura 6.16)]
Varios:	Sí [asienten].
Investigador:	¿Por qué quedaron convencidos?
Laura:	Cuando se hizo esa representación en Cabri yo dije: eso no es un ángulo recto porque no está marcando el símbolo [se refiere a la marca de ángulo que aparece en Cabri 3D que es curva y no con segmentos en ángulo recto]. Entonces en un principio yo dije: ¡Ay! Pero…dice noventa. Pero…
Investigador:	O sea, siguieron como con su duda.
[…]	
Lina:	Yo iba a decir lo mismo que decía Laura. Puede aproximarlo pero exactamente no se ve un ángulo de 90 grados. Es una aproximación, entonces… y yo tampoco lo había visto de esa manera. La profesora dijo que agregar… ella lo utilizó [se refiere a que la profesora usó en una clase anterior el “agregar” decimales a la medición de un ángulo], por ejemplo, cuando hicimos el cuadrilátero plegado con cuatro ángulos rectos, porque alguien había dicho que sí, que sí podía tener los cuatro ángulos rectos. Cuando ella utiliza esa herramienta uno verifica que es una aproximación pero que realmente eso no es un ángulo de noventa grados.
[…]	
Antonio:	Yo me quedo con la duda [de la perpendicularidad entre *l* y *m*], de por qué en la representación se ve curva [la marca de ángulo] si habíamos dicho que para el [ángulo] recto es el cuadrito, la representación. Entonces, pasó con la tarea del cuadrilátero plegado que yo no me convencía porque en la representación [de la marca de ángulo] se veía curva, pero

	hasta que Adriana me explicó, […] que sí se puede. Aunque en la práctica no se vea claro, sí se puede evidenciar por esas… o sea el programa se puede equivocar por unas décimas, pero en la teoría puede existir el objeto que estamos buscando.

La hipótesis, planteadas en la THA, acerca de lo que ocurriría respecto a los enfoques en la mediación y en la generación de necesidad intelectual no se verificaron de la manera prevista. El hallazgo en Cabri 3D de una recta *l* en el plano base perpendicular a una recta *m* que interseca al plano, no generó la incertidumbre en la vía deseada. Parece que lo ocurrido con el G2 es representativo de lo que sucedió con muchos estudiantes, así lo evidencia la conversación-entrevista con el investigador. Los estudiantes dudan que el resultado sea fiable y buscan evidencia que soporte esta convicción, usando más decimales en la herramienta medida de ángulo. Así que la incertidumbre generada no redundó en la búsqueda teórica, sino en una búsqueda empírica para ser resuelta. Lo ocurrido sugiere que esta tarea podría complementarse llevando a los estudiantes a explorar un archivo en el cual la recta *m* no sea perpendicular al plano pero sí a una recta *l* contenida en el plano base, construyendo esta perpendicularidad de manera robusta como en la solución del G1 (Figura 6.17) sin que el segundo plano sea visible. Probablemente de esa manera podría orientarse la incertidumbre en la vía deseada.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Esperábamos que, una vez experimentada la incertidumbre por parte de los estudiantes, ellos emprendieran una búsqueda de argumentos teóricos respecto a la existencia de la recta *l* en el plano base perpendicular a la recta *m*. Una vez expuestos estos argumentos se esperaba evidenciar expresiones de satisfacción al tener la solución de la situación.	En el G1, se evidencia la exhibición de argumentos teóricos respecto a la existencia de la perpendicular. Reafirman esta evidencia en la hoja de trabajo en la cual consideran los dos casos: sí *m* es perpendicular al plano base o sí no lo es. Asimismo, se evidencia que los argumentos resultan satisfactorios cuando Byron cambia de opinión y defiende ahora el punto de vista de la existencia de la perpendicular (ver Anexos T4C3G1 línea 101). En el G2 los estudiantes exhiben un único

	argumento: la recta *l* perpendicular a *m* existe solamente cuando *m* es perpendicular al plano base. Pero, al parecer, este es el punto de vista que han tenido desde el principio y no se modificó producto de la exploración. Tampoco generó búsqueda de argumentos teóricos, por el contrario, buscan evidencia empírica para reafirmar su punto de vista. En la interacción de la profesora con la clase uno de los estudiantes se pregunta por la justificación de la existencia de la recta perpendicular al plano, a partir de la definición planteada por la profesora y la ilustración que hace de esta con Cabri 3D.

Fragmento ilustrativo de T4C3G2

Este fragmento es posterior al que se presentó en la sección anterior. Acá Byron, que ya ha comprendido y adoptado el punto de vista que sustentó Antonio, le explica a Jeison por qué la recta *l* es única cuando *m* no es perpendicular al plano base (Figura 6.17) y porque son infinitas cuando *m* es perpendicular al plano base (Figura 6.15).

Byron: Lo que decimos es que este plano existe [señala el segundo plano del modelo] perpendicular [a la recta *m*] por *X* entonces que al menos existe esta recta [*l*] perpendicular

que es la intersección entre alfa y este plano que es perpendicular [a la recta *m*].

Jeison: Entonces estamos partiendo de que existe el plano perpendicular.

Byron: Intuimos.

Jeison: Sí.

Byron: Intuimos que existe el plano [lee lo que ha escrito en la hoja de trabajo] perpendicular a la recta *l* que contiene a *X* , alfa…

Jeison: No, alfa no puede ser porque alfa es este [señala el plano base del modelo].

Byron: Por eso, pero es que alfa podría ser [gira el modelo de Jeison] puede que sea o puede que no. Si fuera tendríamos infinitas rectas perpendiculares (Figura 6.15).

Jeison: ¿Si fuera, tendríamos infinitas rectas perpendiculares?

Byron: Si mire [le indica en el modelo], todas las del plano perpendicular. Todas las que pasan por *X*.

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en la producción de necesidad intelectual, la búsqueda teórica no se motivó de la manera esperada. En el G1 la exploración no generó incertidumbre. Es la exposición de la solución de Antonio la que genera dudas en sus compañeros. Antonio no resolvió la situación a partir de la exploración en Cabri 3D como se había previsto, y los argumentos teóricos que son exhibidos en la interacción en ese grupo están motivados en la necesidad de convencer a sus compañeros de la solución. Antonio persuade a Byron y Byron a Jeison.

En el G2 no hay evidencia de búsqueda teórica. Por el contrario, la incertidumbre generada se resuelve mediante una búsqueda de evidencia empírica para controvertir los hallazgos que les presenta la exploración en Cabri 3D. Este punto de vista es expresado también por algunos participantes en la conversación-entrevista con el investigador. Lo anterior nos lleva a pensar en un rediseño de la tarea. Una vía posible es lo que ya comentamos al examinar los resultados en la TRA de los enfoques en la mediación y en la generación de incertidumbre: introducir una segunda exploración que ilustre la existencia de *l* en el caso de que *m* no sea perpendicular al plano.

6.5 ANÁLISIS DE LA TAREA 5

La Tarea 5 se desarrolla en el Bloque 2 del curso en el cual se estudia la relación de perpendicularidad recta-plano. Con la Tarea 5 se introduce un teorema que es usado en la demostración del Teorema fundamental de la perpendicularidad. El teorema que se introduce garantiza que si dos puntos B y C equidistan de los extremos de un segmento PQ cualquier punto entre B y C equidista de los extremos P y Q así la recta BC y el segmento PQ no se intersequen.

6.5.1 TAREA 5, CICLO 2

6.5.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Introducir experimentalmente, con el uso de Cabri 3D, las condiciones geométricas para que se cumpla el Teorema interestancia-equidistancia en el espacio.

Tarea

Enunciado

Un estudiante asegura que dados el segmento PQ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la recta BC , es mediatriz de segmento PQ. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. Indique su acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones dadas. Justifique su respuesta.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben la hoja de trabajo junto con el material, (palos, plastilina y cartón) para la representación del modelo físico, y los computadores con Cabri 3D. Después de una primera exploración se les solicita explorar un archivo previamente construido en Cabri 3D. En el archivo se les pide redefinir el punto C (Figura 6.18) fuera del plano base y una vez el punto esté libre fuera del plano se les requiere hacer arrastres hasta que las medidas cumplan que QC = PC.

Figura 6.18. Ilustración del archivo que se les pedirá explorar a los estudiantes, con C en el plano base y C fuera del plano base. En ambos casos se debe cumplir que QB = PB y QC = PC.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrolla primero en grupos, la profesora y el investigador interactúan con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. Posteriormente, la profesora dirige una interacción con la clase a partir de los resultados consignados por los estudiantes en las hojas de trabajo. En un punto de esa discusión la profesora les pide explorar el archivo en Cabri 3D previamente preparado. La intención de esa exploración es ilustrar el caso en el cual la equidistancia se cumple sin que se intersequen el segmento PQ y la recta BC.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con esta tarea se espera introducir el Teorema interestancia-equidistancia en el espacio. Para ello los estudiantes deben evocar la Definición de mediatriz, así como el Teorema de la mediatriz pues deben usar las condiciones “puntos en el plano” de la Definición y “recta perpendicular” del Teorema de la mediatriz. La primera condición implica que los cuatro puntos (P, Q, B y C) son coplanares y la segunda que la recta y el segmento se intersecan. Esperamos que contrasten estos elementos con lo dado en el enunciado de la tarea, en el cual la única condición que exige es la equidistancia de los puntos, la coplanariedad de los cuatro no es requerida.

Enfoque en la mediación (Em). Una vez la profesora les solicite a los estudiantes la exploración del archivo en Cabri 3D, esperamos que el uso combinado de las herramientas de Cabri 3D redefinir y arrastre junto con la medida de las longitudes les permitirá a los estudiantes encontrar una representación en la cual se cumpla que QB = PB y QC = PC sin que la recta BC sea mediatriz del segmento PQ (Figura 6.18). Nuestra previsión es que este hallazgo resulte sorpresivo para los estudiantes.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se espera que la incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa al discutir en grupos la solución del ejercicio. Es probable que alguno de los miembros del grupo plantee la posibilidad de considerar los cuatro puntos B, C, P y Q como no coplanares frente a otros que los consideren siempre coplanares. Por otro lado, habrá grupos en los cuales pueda que no hagan esta consideración en su interacción. Entonces, al desarrollar la discusión de la clase con la profesora y hacer la exploración del archivo preparado en Cabri 3D, se prevé que la incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa al verificar casos en los cuales B y C equidistan de los extremos del segmento PQ sin que los cuatro puntos sean coplanares.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Una vez los estudiantes hacen el hallazgo de que la equidistancia QB = PB y QC = PC puede cumplirse sin necesidad de que los cuatro puntos B, C, P y Q estén en el mismo plano, esperamos que esto impulse la búsqueda teórica en ellos del porqué esa equidistancia se mantiene. Hay dos elementos relevantes en la pretendida búsqueda. El primero, constatar que dos puntos B y C pueden equidistar de los extremos de un segmento sin pertenecer a la mediatriz, lo que representa una ruptura con lo que convencionalmente han estudiado sobre la equidistancia en el plano. Y allí emerge el segundo elemento, planteado en el enunciado: sí B y C equidistan de los extremos, ¿cualquier punto S que esté entre B y C equidistará también de los extremos del segmento? Ese elemento constituye la tesis del Teorema equidistancia-interestancia. Puede generar búsqueda teórica porque cuando B, C, P y Q están en el mismo plano, la recta BC es la mediatriz, S está sobre la mediatriz y la pregunta se resuelve de esta manera en un paso. Cuando no son coplanares es necesario argumentar por qué dado QB = PB y QC = PC se cumple que QS = PS y QS = PS.

La expresión por parte de los estudiantes de que los argumentos exhibidos sustentan satisfactoriamente el mencionado teorema, junto con la exposición de estos, será expresión de justificación epistemológica y argumentación productiva.

6.5.1.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran la Definición de mediatriz y el Teorema de la mediatriz.	En el G1, mencionan la Definición de mediatriz y la contrastan con los ejemplos que conciben para que cumpla la propiedad de equidistar. En un pasaje de la interacción uno de los integrantes señala que los puntos pueden equidistar sin estar en la mediatriz (ver Anexos T5C2G1 línea 32). En el G2, mencionan la Definición de mediatriz,

	la contrastan con las representaciones que hacen de la situación e incluso mencionan que es probable que la única condición necesaria para que sea mediatriz es la de que los puntos de la recta equidisten de los extremos del segmento. No hay mención del Teorema de la mediatriz en ninguno de los dos grupos.

Fragmento ilustrativo de T5C2G1

En el fragmento que se presenta a continuación, los estudiantes del grupo reaccionan a la lectura del enunciado diciendo que la recta BC es la mediatriz del segmento PQ. Luego, Carlos plantea que pueden equidistar sin estar en el mismo plano y por lo tanto podría no ser mediatriz. Y finalmente la presencia de la expresión “con seguridad” en el enunciado de la tarea los lleva a adoptar la posición de que los cuatro puntos están en el mismo plano. La interacción ilustra que, para los integrantes del grupo, persuadidos por Carlos, es relevante el cumplimiento de la condición de coplanariedad enunciada en la Definición de mediatriz.

Carlos:	O sea que la recta PQ es la mediatriz de ese segmento, del segmento BC.
Juan:	La recta BC es mediatriz del segmento PQ. (Ver figura 6.18)
[…]	
Carlos:	Es que nosotros nos estamos imaginando B, el punto medio y C [representa con las manos el que sería el segmento BC y su punto medio]. B punto medio y C. Nosotros nos estamos imaginando esto así [pone los dos pulgares juntos sobre la mesa como formando un solo segmento] y está así [levanta uno de los pulgares, sin separarlo del otro. Como indicando la posición de C fuera del plano que se representa en la segunda de las representaciones de la figura 6.18]. Ahí están equidistando y no está utilizando la mediatriz.
Jimmy:	O sea, [la recta BC y el segmento PQ] en diferentes planos.
[…]	
Carlos:	Pero es que ahí [en el enunciado] dice, con seguridad la recta es mediatriz.
Jimmy:	[Inaudible].
Carlos:	Ah, pero entonces, sí es coplanar. Un estudiante asegura que dados el segmento PQ y los puntos B y C tales que equidistan de los extremos del segmento… [leyendo el enunciado].

Fragmento ilustrativo de T5C2G2

En el fragmento que se presenta a continuación, un integrante del G2 supone que la recta BC no esté en el mismo plano que el segmento PQ, pero aun así considera que pueden cumplirse las condiciones que establece la definición de mediatriz. Para él, en el momento de la interacción, la definición solamente implica equidistancia no necesariamente coplanariedad.

17 Jair:	¿Hay posibilidades que no estén en el plano [la recta BC y el segmento PQ] y ambos puntos [B y C] equidisten de P y Q?
18 Sergio:	[inaudible].
19 Jair:	¿Cómo? Hable ahora o calle para siempre.
20 John:	[Inaudible].

22 Jair:	Es que lo que pasa es eso, que no sean coplanares [los cuatro puntos B, C, P y Q] ¿Se puede también que esos dos puntos [B y C] equidisten de los extremos [P y Q]? Entonces usted va a decir que el segmento [PQ] está en un plano y la recta [BC] está en otro.
[…]	
26 Jair:	Entonces si es mediatriz. Qué tal que la única definición es que existen los puntos [de la mediatriz] que equidistan [de los extremos del segmento].

Respecto a lo establecido en la THA acerca del enfoque en el contenido, esperábamos que los estudiantes hicieran uso del Teorema de la mediatriz y de la Definición de mediatriz. No hay evidencia del uso del teorema, salvo una mención del punto medio que hace Carlos en la interacción del G1. Respecto a la Definición de mediatriz, esta sí tuvo un papel relevante en la interacción de los dos grupos. En la interacción en el G1 se evidencia un uso de las dos condiciones de la definición: equidistancia y coplanariedad. En la interacción en el G2 se evidencia el uso de una sola de las condiciones: equidistancia.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperábamos que con la exploración por parte de los estudiantes del archivo preparado en Cabri 3D se generara duda o sorpresa. Y que esta reacción los indujera a revisar su solución.	En la interacción de los dos grupos previa al uso del archivo preparado en Cabri 3D mencionaron la posibilidad de que los cuatro puntos B, C, P y Q no fueran coplanares. Así se observa en el fragmento ilustrativo presentado en el enfoque en el contenido. Al explorar el archivo preparado en Cabri 3D los integrantes del G1 no logran, mediante el arrastre, que se cumpla QC = PC. En la exploración que hicieron los integrantes del G2 del archivo preparado en Cabri 3D sí logran que las longitudes solicitadas sean iguales. Sí tienen una reacción de sorpresa.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Teníamos previsto que en la interacción en grupos previa a la exploración del archivo preparado en Cabri 3D la incertidumbre se	Como ya se mencionó en el enfoque en la mediación, en la interacción en los dos grupos se plantea la posibilidad de que los puntos no sean

expresara como duda a partir de aquellas opiniones que consideraran la posibilidad de que los puntos B, C, P y Q no fueran coplanares. Por otra parte, en aquellos grupos en los cuales no fuera considerada la posibilidad de la no coplanariedad de los cuatro puntos, esperábamos que la exploración del archivo preparado en Cabri 3D generara incertidumbre expresada como sorpresa y/o duda al encontrar casos en los cuales C no pertenece al mismo plano de B, P y Q y sin embargo se cumple que QB = PB y QC = PC.	coplanares. En el G1 se genera discusión acerca de esa posibilidad, pero se zanja con la lectura del enunciado y su expresión “con seguridad es mediatriz”, como ya se describió en el enfoque en el contenido. En el G2, consideran la posibilidad de los cuatro puntos no coplanares sin que eso genere debate entre los integrantes del grupo. Tratan de obtener una representación gráfica de la situación con los cuatro puntos no coplanares, y de plasmarla en la hoja de trabajo, pero no lo consiguen. En la exploración del archivo preparado con Cabri 3D, los integrantes del G1 no consiguen obtener la equidistancia solicitada, una vez C no pertenece al mismo plano de B, P y Q. Los integrantes del G2 sí lo consiguen y se verifica en ellos una reacción de sorpresa.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Esperábamos que una vez verificada la posibilidad que se produjera estas equidistancias QB = PB y QC = PC con C fuera del plano base, los estudiantes orientaran su búsqueda teórica hacía la justificación de por qué también se cumplirá QS = PS y QS = PS, como se pregunta en el enunciado. Si los puntos están en el plano, S está en la mediatriz. Si los cuatro puntos no son coplanares hay que justificar de otra manera. Se tenía previsto que la justificación epistemológica se manifestara en la argumentación exhibida y la satisfacción expresada con la solución lograda.	Se evidencia reacción de sorpresa en la interacción del G2. Sin embargo, en ninguno de los dos grupos se percibe la motivación por justificar la equidistancia QS = PS y QS = PS. Es decir, sustentar la tesis del Teorema interestancia-equidistancia. Este como tema de discusión, aparece solamente cuando la profesora lo introduce en la interacción con la clase.

Fragmento ilustrativo de T5C2G2e
En el fragmento ilustrativo que se presenta a continuación, los integrantes del G2 están explorando el archivo preparado en Cabri 3D. Esto ocurre en un momento posterior a la exploración inicial que hicieron trabajando en grupo. Se evidencia que ellos se sorprenden cuando después de redefinir C como un plano fuera del plano determinado por B, P y Q, encuentran que aún se cumple que QB = PB y QC = PC (Figura 6.18).

John:	[El punto C] Tiene que quedar en el punto superior, el que está fuera del plano.
Sergio:	Es que dice que [el punto S] sea un punto entre.
Jair:	¿Sí cumple [la igualdad en las medidas QB = PB y QC = PC]?
John:	No 5,8 y 5,9 .
Jair:	Pero es que eso [la equidistancia] decían en la definición de mediatriz. Pero, pensando que la recta BC fuera mediatriz. Pero, ahí cada una [las rectas BC y PQ] está en un plano distinto. Entonces esa recta [BC] no está, mejor dicho, esa [BC] no es la mediatriz del segmento PQ, porque ni siquiera está contenida en el mismo plano. Entonces ese punto [S] no cumpliría esa propiedad. Tocaría hacerlo con el arrastre.
John:	¡Ah! Este es el segmento BC ¿Lo hago? Esto es una recta ¡Ay sí! una recta, que pena.
Sergio:	Ahora trace desde ese punto [C] la distancia entre P y Q.
Jair:	Punto B a P. ¡Ay […]! Pero ahí… ¡Sí [cumple la equidistancia QB = PB y QC = PC]!

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en la mediación, lo ocurrido en la TRA muestra que, si bien el archivo preparado en Cabri 3D generó reacción de sorpresa en los integrantes del G2, no funcionó como estaba previsto pues no lograron en el G1 una representación en la cual la equidistancia CP = CQ se cumpliera cuando el punto C está fuera del plano base. Lo anterior está ligado a lo previsto en la THA acerca del enfoque en la generación de incertidumbre, pues al no conseguir visualizar la equidistancia en el G1, no se genera la incertidumbre en la vía deseada. Y finalmente, respecto al enfoque en la producción de necesidad intelectual, lo que se observa en la TRA es que los estudiantes perdieron de vista la parte del enunciado en la cual se habla del punto S, pues no se refirieron a esa parte del enunciado, concentrando su atención en si la recta BC es o no mediatriz del segmento PQ.

El enunciado se aplicó sin modificación en el siguiente ciclo. Tampoco hubo cambios en el diseño de las intervenciones previstas o las instrucciones adicionales. Por esa razón, la siguiente sección empieza directamente con la comparación entre la THA y la TRA, pues la formulación de la THA es la misma que en este ciclo.

6.5.2 TAREA 5, CICLO 3

6.5.2.1 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Teníamos previsto que los estudiantes usaran la Definición de mediatriz y el Teorema de la mediatriz.	En la interacción en el G1 mencionan la Definición de mediatriz, pero en realidad se refieren a condiciones que en el sistema teórico del curso pertenecen al teorema: perpendicularidad e intersección por el punto medio. En la interacción en el G2 aluden a la definición, pero mencionan una sola condición de esta: la equidistancia.

Fragmento ilustrativo de T5C3G1

En el fragmento que se presenta a continuación, Antonio plantea la posibilidad de que los cuatro puntos no estén en el mismo plano. A eso reaccionan sus compañeros, evaluando en la discusión si la recta sería o no mediatriz. Hacen explícita la que para ellos sería la definición de mediatriz y es entonces cuando mencionan las condiciones perpendicularidad y punto medio. Las condiciones que mencionan están planteadas en el Teorema de la mediatriz (ver Capítulo 5).

Antonio: Y no estarían [los puntos de la recta BC] en la mediatriz.

Jeison: La mediatriz es la recta perpendicular…

Antonio: Por este segmento [dibuja el segmento PQ], pero mirando que esté acá y acá [la recta BC intersecando al segmento PQ (ver Figura 6.18)]. Pues ahí [cuando el segmento PQ y la recta BC no están en el mismo plano] no está en la mediatriz.

Jeison: Por definición de mediatriz, tenemos es la recta perpendicular al plano…

Byron: Por el punto medio, ahí ni siquiera se intersecan [El segmento PQ y la recta BC (segunda representación en la figura 6.18)].

Fragmento ilustrativo de T5C3G2

En el fragmento que se presenta a continuación, al leer el enunciado, una de las integrantes dice que no le suena eso de la "mediatriz" refiriéndose a lo que dice el enunciado y a partir de esa intervención evocan la definición de mediatriz establecida en el sistema teórico. Hacen referencia a una sola de las condiciones de la definición: la equidistancia, no mencionan la coplanariedad.

María: A mí no me suena esto [subraya en la hoja la frase del enunciado en donde dice BC es mediatriz de PQ].

Violeta: ¿Cuál es la definición de mediatriz?

María: Pues que equidista de los puntos. Pero es que acá dice: los puntos que equidistan de los ex… la

	definición es…
Violeta:	Que tienen la misma medida.
María:	Que equidista de los extremos del segmento. […]

Acerca de lo previsto en la THA respecto al enfoque en el contenido, se verifica que en la interacción de los dos grupos de trabajo mencionan los elementos que hacen parte de la Definición de mediatriz y del Teorema de la mediatriz. Aunque, respecto a la definición, las integrantes del G2 mencionan solamente la equidistancia y dejan de lado la coplanariedad. Y en el G1 mencionan la definición, pero enuncian las condiciones de lo que en el sistema teórico de referencia se ha establecido como el teorema.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperábamos que en la exploración por parte de los estudiantes del archivo preparado en Cabri 3D se generara en ellos duda o sorpresa. Y que esta reacción los indujera a revisar su solución.	En la interacción previa a la exploración del archivo preparado en Cabri 3D dos de los integrantes del G1 mencionan la posibilidad de que los puntos no estuviesen en el mismo plano. En el G2, una de las estudiantes expresó sus dudas acerca de la pregunta, pero no se plantearon la posibilidad de que los puntos no fuesen coplanares. En el G1 no es posible hacer la exploración del archivo en Cabri 3D porque no encendió el computador. En el G2 no atendieron a la instrucción de redefinir el punto C como un punto fuera del plano base, así que tampoco hicieron la exploración como estaba prevista.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Teníamos previsto que en la interacción en grupos previa a la exploración del archivo preparado en Cabri 3D la incertidumbre se	Ya hemos mencionado que en la interacción inicial en el G1 se plantearon la posibilidad de que los puntos no estuviesen en el mismo plano.

expresara como duda, a partir de aquellas opiniones que consideraran la posibilidad de que los puntos B, C, P y Q no fueran coplanares. Por otra parte, en aquellos grupos en los cuales no fuera considerada la posibilidad de la no coplanariedad de los cuatro puntos, esperábamos que la exploración del archivo preparado en Cabri 3D generara incertidumbre expresada como sorpresa y/o duda al encontrar casos en los cuales C no pertenece al mismo plano de B, P y Q y sin embargo se cumple que QB = PB y QC = PC.	En el inicio de la interacción Antonio lo plantea como una posibilidad ante la cual Jeison reacciona. Y posteriormente Byron expone su propuesta: que los puntos B y C estén sobre una circunferencia cuyo centro es intersecado por el segmento PQ. En la interacción del G2 Violeta expresa su duda acerca de si la respuesta es tan trivial como que S pertenece a una mediatriz BC del segmento PQ, pero esta duda no es atendida por sus compañeras. La exploración del archivo preparado en Cabri 3D, como ya lo mencionamos no se desarrolló como estaba previsto en este ciclo. De acuerdo con lo anteriormente descrito, no hay evidencia de generación de incertidumbre.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Esperábamos que una vez verificada la posibilidad que se produjesen las equidistancias QB = PB y QC = PC con C fuera del plano base, los estudiantes orientaran su búsqueda teórica hacía la justificación de por qué también se cumplía QS = PS y QS = PS como se pregunta en el enunciado. Si los puntos están en el plano, S está en la mediatriz. Si los cuatro puntos no son coplanares hay que justificar de otra manera. Se tenía previsto que la justificación epistemológica se manifestara en la argumentación exhibida y la satisfacción expresada con la solución lograda.	En la interacción del G1 se presenta un planteamiento interesante respecto a la posibilidad de que los puntos no sean coplanares. Byron presenta una propuesta para que esa situación sea posible en una configuración específica. Pero su planteamiento, al igual que el de Violeta en la interacción del G2, no genera debate. Y dado que la exploración del archivo en Cabri 3D no funcionó en este ciclo no se produce necesidad intelectual.

Fragmento ilustrativo de T5C3G1
En el fragmento ilustrativo que se presenta a continuación los integrantes del G1 están discutiendo si un punto S que esta entre B y C equidista de los extremos del segmento PQ. Byron presenta una propuesta en la cual alude a los puntos de una circunferencia y aunque no amplía su planteamiento, al parecer está haciendo varios supuestos que no hace explícitos y que serían necesarios para que su propuesta funcione. Uno que la intersección entre el segmento y el plano que contiene a la circunferencia se produce por el punto medio del segmento PQ, dos que esa circunferencia está sobre un plano perpendicular al segmento PQ y tres que el segmento BC es un diámetro de esa

circunferencia.

Antonio: ¿El punto S sí equidistará de éstos [B y C]?

Byron: Pues yo creo que sí.

Antonio: Profe nos quitó el material, ahora sí lo necesitamos [se refiere al investigador, que minutos antes se ha llevado el material físico].

Byron: Es que puede estar como por acá [Describe una circunferencia alrededor del lapicero que ha puesto en el aire].

Jeison: ¡Ah circunferencia!

Byron: Sí, como en una circunferencia. Pero una circunferencia que está así vea.

Todos estos puntos equidistan, todos estos puntos equidistan.

Fragmento ilustrativo de T3C3G1

En el fragmento que se presenta a continuación las integrantes del G2 están discutiendo si S equidista de los extremos del segmento PQ. Concluyen que como S pertenece a la mediatriz, también equidista, Violeta expresa su duda, pero no tiene eco en sus compañeras.

Carolina: B y C tales que equidistan de los extremos del segmento [lee mientras Mariana borra algo de la hoja de trabajo]… con seguridad la recta BC es mediatriz del segmento PQ, además afirma que cualquier punto S entre BC equidista de P y Q. Eso es verdad [Mariana asiente]. ¿Está de acuerdo con la aserción del estudiante? Justifique su respuesta.

Yo digo que hagamos así, que B y C equidistan de P y Q. Entonces si uno traza la recta, entonces es la mediatriz por la definición de mediatriz. Pero si tomo cualquier punto en la mediatriz… va a equidistar. [Mariana le pasa la hoja]

Violeta: Que, si S pertenece al segmento BC, entonces S pertenece a la recta [le dice a Carolina que está escribiendo] y como la recta [BC] es la mediatriz [del segmento PQ].

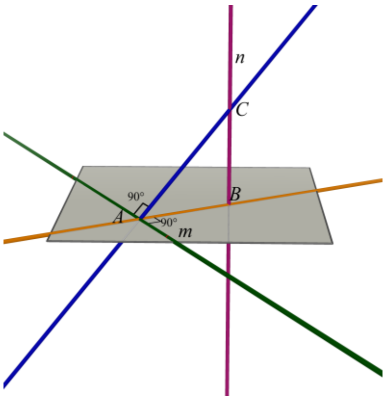
María: Por definición de mediatriz.

Violeta: ¿Será que eso es tan obvio? [Se queda pensativa]. ¿O que también tiene trampita?

En este caso haremos una breve mención de lo ocurrido con respecto a los enfoques en la mediación, en la generación de incertidumbre y en la producción de necesidad intelectual. Buena parte del diseño se apoyaba en la exploración que harían los estudiantes del archivo preparado en Cabri 3D. Al no producirse la exploración en uno de los grupos y al no desarrollarla en la vía indicada el otro grupo, el diseño falló globalmente. No es posible verificar la mayor parte de las hipótesis formuladas en la THA.

6.6 ANÁLISIS DE LA TAREA 6

La tarea 6 se desarrolla en el Bloque 2 del curso en el cual se está estudiando la relación de perpendicularidad recta-plano. El enunciado de la tarea se orienta a demostrar un teorema que comúnmente se conoce como el de las tres perpendiculares (figura 6.19). Nuestro enunciado es una adaptación de un problema planteado en Güven y Kosa (2008). Hemos orientado nuestro diseño a que el hallazgo de la perpendicularidad entre dos rectas (CA y *m*) resulte sorpresivo, generando incertidumbre en los estudiantes y motivando la necesidad intelectual para demostrar teóricamente esa perpendicularidad.



Teorema de las tres perpendiculares:

Si por el pie (B) de una perpendicular (*n*) a un plano se traza una segunda perpendicular (AB) a una recta (*m*) contenida en dicho plano, la recta (CA) que va desde el punto de corte (A) de esa recta (*n*) con la (*m*) que estaba en el plano hasta un punto cualquiera de la (*n*) perpendicular al plano es también perpendicular a la recta que estaba sobre el plano (CA es perpendicular a *m*).

Figura 6.19. Teorema de las tres perpendiculares

6.6.1 TAREA 6, CICLO 2

6.6.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Esbozar los elementos teóricos esenciales para demostrar la perpendicularidad de dos rectas en un plano distinto al plano dado a partir de la perpendicularidad entre dos rectas en un plano dado y entre una recta y ese plano.

Tarea

Enunciado

Dados un plano α y un segmento AB contenido en α. Sean las rectas *m* y *n* tales que *m* está contenida en α, A es un punto de *m* y *m* es perpendicular a AB, *n* es perpendicular a α por B.

a) ¿Son alabeadas *m* y *n*? Justifique su respuesta.

b) ¿Existe un punto C de n tal que el segmento CA es perpendicular a γ, siendo γ un plano que contiene a *m*? Justifique su respuesta.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes reciben la hoja de trabajo con el enunciado de la tarea, el material (palos, plastilina y cartón) para representación del modelo físico y los computadores con Cabri 3D. El diseño de esta tarea implica que su exploración necesariamente sea desarrollada con Cabri 3D.

Aunque en el enunciado se formulan dos preguntas acá nos concentramos en la pregunta (b) que es la que consideramos relevante para el análisis por ser la pregunta con la cual se esperamos generar incertidumbre.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrolla primero en su etapa de discusión en grupos. En esta etapa, la profesora y el investigador interactúan con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. Posteriormente, la profesora dirige una interacción con la clase al finalizar el momento del trabajo en grupos, a partir de los resultados consignados por ellos en las hojas de trabajo.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). La meta de esta tarea es que los estudiantes esbocen las ideas teóricas que permiten demostrar que la recta *m* y la recta AC son perpendiculares (figuras 6.19 y 6.20). Nuestra previsión es que los estudiantes supondrán la necesidad del Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano, que aún no ha sido introducido en el sistema teórico de referencia. Adicionalmente, consideramos que serán mencionados elementos del sistema teórico de referencia como: Definición de recta perpendicular a plano, Definición de rectas perpendiculares y el Teorema fundamental de la perpendicularidad.

Enfoque en la mediación (Em). El desarrollo de esta tarea se hace esencialmente con Cabri 3D. De acuerdo con lo que se solicita, esperamos que las herramientas de Cabri 3D que cumplirán un papel relevante son el arrastre (el punto C sobre la recta *n*) y la medida de ángulo (en especial el ángulo determinado por las rectas *m* y AC). Una relación que esperamos sea captada por los estudiantes es que al obtener la representación en Cabri 3D de un plano perpendicular (γ en el enunciado) a la recta CA, la recta *m* queda siempre contenida en ese plano perpendicular (figura 6.20). Esperamos que los estudiantes midan el ángulo determinado por las rectas *m* y AC y que perciban que al arrastrar el punto C sobre la recta *n* el ángulo es recto y así se mantiene. Estos hallazgos se harán evidente en la interacción en los grupos.

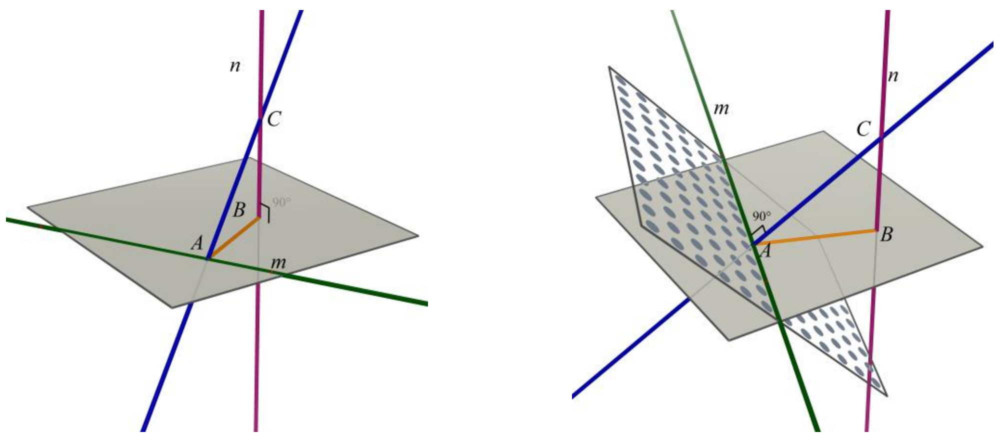


Figura 6.20. A la izquierda las condiciones dadas en el enunciado de la tarea. A la derecha con el plano γ perpendicular a la recta AC.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se tiene previsto que en la interacción en los grupos los estudiantes se percaten que existe una relación de perpendicularidad entre las rectas *m* y AC y que esta relación no está dada en las condiciones de la construcción, sino que es resultado de estas. Este hallazgo debería resultar sorpresivo para los estudiantes generando en ellos incertidumbre que movilice su interés por buscar la justificación de esa relación de perpendicularidad.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se tiene previsto que la incertidumbre generada por el hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas *m* y AC motive la búsqueda de un soporte teórico de tal perpendicularidad. Desde nuestra perspectiva, la argumentación productiva expresada alrededor de ese soporte teórico deberá llevar a los estudiantes a proponer una construcción auxiliar que en este caso será una recta *l* paralela a *n* por el punto A y por tanto perpendicular al plano. La anterior construcción es la requerida para usar el Teorema perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano en esta justificación. Esperamos que este planteamiento proporcionará una explicación satisfactoria de la perpendicularidad hallada que sea expresión de justificación epistemológica.

6.6.1.2 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Se esperaba que los estudiantes usaran la Definición de perpendicularidad recta-plano, la Definición de rectas perpendiculares, el Teorema fundamental de la perpendicularidad. Asimismo, esperábamos que la tarea llevara a introducir el Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano.	En la interacción del G1 mencionan el Teorema fundamental de la perpendicularidad una vez, en la interacción del G2 mencionan el Teorema de existencia de la recta perpendicular a una recta por un punto externo, también una vez. Ambas menciones se hacen en el contexto de la construcción de las condiciones dadas en el enunciado. En lo consignado en las hojas de trabajo en el G1 mencionan el Teorema fundamental de perpendicularidad, en el G2 Teorema de existencia de la recta perpendicular a una recta por un punto externo. No hay evidencia en la interacción de G1, G2 y G3 ni en sus hojas de trabajo de alusión alguna a la necesidad de un formular el Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano. En la interacción de G1 y G2 mencionan la mediatriz y triángulos congruentes.
Fragmento ilustrativo de T6C2G1	
Luego de discutir la solución a la parte a), los estudiantes hacen la construcción indicada en la parte (b) del enunciado. Para obtener un plano perpendicular a la recta AC siguen un plan propuesto por Carlos: construir el plano determinado por las rectas *m* y AC, una recta (*l*) perpendicular a ese plano por A. A partir de allí construyen el plano determinado por esa perpendicular (*l*) y por *m*. Ese plano les da perpendicular a la recta AC, pero no se han percatado que esto sucede gracias a que la recta AC siempre es perpendicular a la recta *m*, lo cual no está dado en las condiciones del enunciado. Entonces	

Carlos enuncia que el plano es perpendicular a la recta AC por el Teorema fundamental de la perpendicularidad, pero no se percata que para que esto se cumpla es necesario garantizar la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*, la cual no está dada.

Carlos:	Listo, listo es de 90 [el ángulo entre el plano determinado por *l* y *m* y la recta AC]. Entonces si una recta es perpendicular a dos rectas del plano es perpendicular al plano, eso es por el Teorema fundamental.

La TRA ilustra que, para la comprensión de la situación por parte de los estudiantes, no es necesaria la mención de los elementos teóricos que teníamos previstos (ver T6C2G1 en los Anexos). Al parecer basta con el Teorema fundamental de la perpendicularidad. Por otro lado, no hay mención alguna de la necesidad del Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano. Para demostrar perpendicularidad los estudiantes recurren a la que ha sido la herramienta más utilizada, el uso de la mediatriz y triángulos congruentes.

Enfoque en la mediación (Em)

THA	TRA
Esperábamos que en la interacción en los grupos los estudiantes hicieran uso de las herramientas arrastre y medida de ángulo en su exploración. Se tenía previsto que al arrastrar el punto C sobre la recta *n* percibieran que la recta *m* queda siempre contenida en el plano γ y por tanto tomen la medida del ángulo entre las rectas AC y *m*, capten que este es recto e identificaran esta relación como no dada en las condiciones de construcción de la configuración descrita en el enunciado.	En la interacción de los tres grupos de trabajo registrados en este ciclo se evidencia la identificación prevista del invariante: el ángulo entre las rectas AC y *m* permanece recto para las diferentes posiciones del punto C sobre la recta *n*. No tenemos un registro de qué tanto fueron usadas las herramientas de Cabri 3D para esta identificación En la interacción del G1 intervienen bastante el investigador y la profesora para dirigir la atención de los estudiantes hacia la identificación del invariante. No ocurrió lo mismo en los G2 y G3.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)

THA	TRA
Esperábamos que el hallazgo de la perpendicularidad descrita resultara sorpresivo	Los tres grupos registrados hacen el hallazgo de la relación de perpendicularidad y se captan sus

para los estudiantes generando en ellos incertidumbre. Y que movilizara su interés por buscar la justificación de esa relación de perpendicularidad.	reacciones a este hallazgo, las cuales fueron de sorpresa. Verificamos con estas reacciones la generación de incertidumbre. Esta generación de incertidumbre es confirmada por los estudiantes en la conversación-entrevista con el investigador.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Se tenía previsto que el hallazgo de la perpendicularidad motivara la búsqueda teórica de justificación a ésta, que se expresaran argumentos en ese sentido y que estos resultaran satisfactorios a los estudiantes.	En la interacción de los G1 y G2 se evidencia que los estudiantes plantean algunas ideas acerca de cómo demostrar por qué las rectas AC y *m* son perpendiculares. Por ejemplo, el uso de la mediatriz y los triángulos congruentes. En el G3 no abordaron las ideas para demostrar esa relación. El tiempo, al parecer no fue suficiente para abordar la discusión de la justificación pues la discusión del punto (a) del enunciado abarcó más tiempo del previsto.

Fragmento ilustrativo de T6C2G1

En el fragmento que se presenta a continuación Carlos propone una construcción (descrita en el apartado de enfoque en el contenido) y el investigador les hace una pregunta para que perciban que *m* queda contenida en el plano, sin que se haya dado que es perpendicular a la recta AC. Cuando se percatan que es perpendicular esto genera incertidumbre en ellos.

Investigador:	¿Pero ustedes si se dan cuenta el orden en el que hicieron las cosas? Ustedes hicieron el plano [γ] perpendicular [a la recta AC (ver figura 6.20)] o sea que ese [plano] igual me va a dar perpendicular.
Carlos:	Sí.
Investigador:	Pero [la recta] *m* estaba dada ¿No?
Carlos:	Sí [María asiente y Maite examina la construcción]. Y *m* es perpendicular a…No, pero *m* no es perpendicular a AC.
Investigador:	¿*m* no es perpendicular a AC? [Carlos niega con la cabeza] ¿No lo es?
María:	¡Ahí, sí! [Observando la pantalla]
Carlos:	¡Ah bueno! Ahí en ese [la configuración que tienen construida] sí. Pero cuando lo creamos no, pero si se da ¡Ve, tan raro! Sí, sí porque nosotros hicimos al segmento AB…

María: Sí, porque nosotros hicimos cualquier recta.

Investigador: ¿Qué hace Maite la vuelve a hacer? [Maite y María trabajan en el computador, Carlos en la hoja].

Maite: Sí, a ver si no queda perpend… [ríen]

En el fragmento que se presenta a continuación Carlos expone su propuesta de hacer una construcción auxiliar para demostrar que AC es perpendicular a la recta *m* usando triángulos congruentes y el Teorema de la mediatriz. Lamentablemente no hicimos captura de pantalla de los computadores de los estudiantes. Así que no podemos proporcionar toda la información acerca de los triángulos a los que se refiere Carlos.

Investigador: Pero una pregunta, una pregunta antes. Usted empezó con la frase: Ya tenemos que AC es perpendicular a *m*, “ya tenemos” ¿Por qué?

Carlos: Por lo que nos preguntó el profesor ahorita… entonces como *m* es perpendicular al segmento AB y AB a su vez es perpendicular a la recta AC, entonces podemos generar ahí que, por esa perpendicularidad que sean mediatrices, por tener puntos medios…

Investigador: *m* les quedó perpendicular a AC. Estaba dado que *m* es perpendicular a AB y que AB era perpendicular a *m*, de ahí ¿Qué se sigue?

Carlos: Entonces, por el teorema que nos tocó demostrar en la tarea, el de la intersección y pues en el espacio de los triángulos, esos triángulos siempre van a ser congruentes.

Investigador: ¿Los triángulos cuáles?

Carlos: J, A y otro punto tal que este sea el punto medio de X y J [señala sobre la pantalla].

Investigador: O sea, como que AB fuese mediatriz de un segmento en *m*.

Carlos: Exactamente.

Fragmento de T6C2I

En el fragmento que se presenta a continuación, el investigador presenta a la clase el vídeo de la interacción en el G2 y les pregunta a los integrantes de ese grupo por lo que en ese momento estaban discutiendo cuando se plantean por qué las rectas AC y *m* son perpendiculares.

Investigador:	Ahí [en el vídeo de la interacción del G2] Jair está hablando con John. Y Jair le dice a John que por qué quedó perpendicular. Ahí [en el vídeo] él [Jair] le dice: ¿Por qué queda perpendicular? Porque ustedes ya tenían el plano [γ perpendicular a la recta AC] y daban por hecho que esa perpendicularidad [entre las rectas AC y *m*] estaba dada cuando estaban demostrando. Jair le pregunta a John que por qué queda perpendicular. Ahí están discutiendo eso. No sé si ustedes recuerdan y me pueden decir algo.
Jair:	Sí, porque en la primera construcción lo que hicimos fue medir el ángulo.
Investigador:	¿Cuál ángulo?
Jair:	El ángulo [entre la recta] CA y un punto en *m* y entonces daba recto y nosotros [dijimos] ¡No!¡Eso está mal! Y lo volvimos a hacer y otra vez daba perpendicular.
Profesora:	Entonces sí les sorprendieron cosas.
Jair:	¡Sí! Hicimos eso como tres veces.
Investigador:	¡Ah! ¿Esté ángulo [entre las rectas AC y *m*] ustedes lo midieron?
Jair:	Sí, sí, porque queríamos empezar a arrastrar a C para que diera [una posición de C en *n* en la cual γ es perpendicular a AC y *m* queda contenida en γ (ver Figura 6.20)], pero dijimos ¡Ah no! Ya dio. Dio de una.
Sergio:	Queríamos hallar, así como por arrastre, ensayo y error, pero igual dio noventa, entonces dijimos ¿Por qué?
Investigador:	¿Ustedes creyeron que estaba mal?
Jair:	Sí. Nosotros dijimos, pues mucha suerte que en el primero [intento] haya dado noventa. Entonces volvimos a hacerlo, pero no midiendo el ángulo sino ya encontrando el plano. Entonces por eso en la segunda representación está hecho el plano.
Investigador:	¡Ah! Hicieron el plano perpendicular [a la recta AC].
Jair:	Sí, hicimos el plano [γ] y ahí caía *m*.

Respecto a lo previsto en la THA acerca del enfoque en la mediación, se verificó que los estudiantes sí identificaron la relación de perpendicularidad prevista. Nuestra hipótesis era que esto lo harían mediante el uso de las herramientas arrastre y medida de ángulo. Esta hipótesis la verificamos por evidencia indirecta, porque nuestros registros de información no captaron en detalle el uso de esas herramientas. Es visible el papel desempeñado por la interacción entre los integrantes de los grupos y con la profesora y el investigador para percatarse del invariante esperado (Ver AnexosT6C2G1 y T6C2G3).

Acerca de lo previsto en la THA respecto al enfoque en la generación de incertidumbre, se verifica que la tarea sí generó incertidumbre en los estudiantes en la vía deseada. Para los integrantes de los G1, G2 y G3 resultó sorpresivo el hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*.

Respecto a lo esperado en la THA acerca del enfoque en la producción de necesidad intelectual, se evidenció en los G1 y G2 que los estudiantes procuraron establecer las razones teóricas por las cuales se garantiza esa perpendicularidad. Sin embargo, esas razones no guardan relación con lo previsto por nosotros acerca del Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano. Los estudiantes recurren a los elementos teóricos que han sido más utilizados hasta ahora en el curso para demostrar perpendicularidad: triángulos congruentes, Teorema y Definición de mediatriz. Otra observación relevante en este ciclo es que el tiempo para abordar la justificación no fue suficiente dado que se destinó mucho tiempo a la discusión de la pregunta (a).

Para la aplicación en el Ciclo 3 el enunciado se modificó suprimiendo la pregunta (a). Los demás elementos de la THA no se modificaron.

6.6.2 TAREA 6, CICLO 3

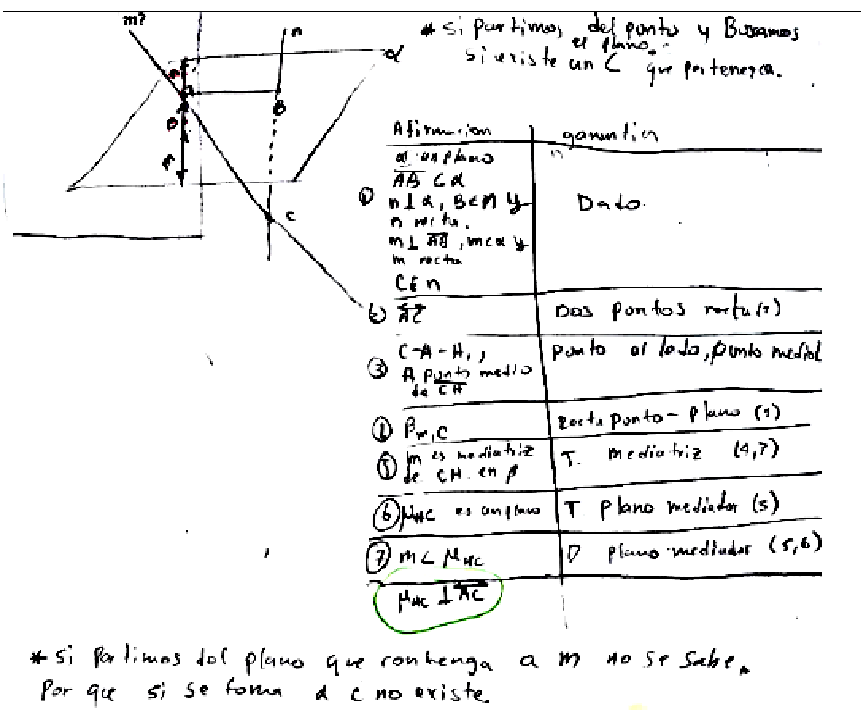
6.6.2.1 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec)	
THA	TRA
Esperábamos que los estudiantes usaran la Definición de perpendicularidad recta-plano, la Definición de rectas perpendiculares y el Teorema fundamental de la perpendicularidad. Asimismo, esperábamos que la tarea llevara a introducir el Teorema perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano.	En la interacción de los dos grupos registrados y en las hojas de trabajo mencionan la Definición de mediatriz, el Teorema del plano mediador y el Teorema fundamental de la perpendicularidad. En la interacción de la profesora con la clase, además de los anteriores, mencionan el Teorema del plano mediador, la definición de plano mediador y triángulos congruentes. Ninguno

	menciona la necesidad de un elemento teórico que se pueda asociar al Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano.

Fragmento ilustrativo de hoja de trabajo de G1

Los integrantes del G1 hacen una construcción distinta a la esperada por nosotros (Figura 6.21). Construyen la recta *n* perpendicular al plano (α en la Figura 6.21) por B que contiene al segmento AB y en ese plano α la recta *m* perpendicular al segmento AB por A. Luego para responder la pregunta formulada construyen un punto C sobre *n*, la recta AC y un punto H sobre AC tal que AC = AH, un plano β determinado por las rectas *m* y AC y finalmente un plano μ que es el plano mediador del segmento CH, el cual cumple la condición de ser perpendicular a AC para cualquier posición del punto C sobre la recta *m*. En su hoja de trabajo demuestran que existe ese plano perpendicular a la recta AC. El fragmento ilustra los elementos teóricos que mencionan: Teorema de la mediatriz, Teorema del plano mediador y Definición de plano mediador. Pero pierden de vista que no estaba dada la perpendicularidad entre las rectas AC y *m* y aun así la usan en su justificación pues para cumplir las condiciones del Teorema de mediatriz, que ellos invocan como garantía, la recta *m* debe ser perpendicular al segmento CH por el punto medio. Ellos construyeron la equidistancia para que fuese punto medio, pero dieron por sentada la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*.



* Sí partimos del punto [A] y buscamos el plano [γ], sí existe un C que pertenezca

Afirmación	Garantía
α un plano AB contenido en α *n* perpendicular a α, B pertenece a *n* y *n* recta. *m* perpendicular a AB, *m* contenida en α y *m* recta C pertenece a *n*	Dato
Sea la recta AC	Postulado Dos puntos recta
Sea A un punto entre C y H	Teoremas punto al lado, punto medio
Sea el plano β determinado por la recta *m* y el punto C	Teorema recta-punto-plano
La recta *m* es mediatriz del segmento CH en β	Teorema de la mediatriz
Sea el plano µ el plano mediador del segmento CH	Teorema del plano mediador
La recta *m* está contenida en el plano µ	Definición de plano mediador

*Si partimos del plano que contenga a *m* no se sabe. Porque si se forma α, C n existe

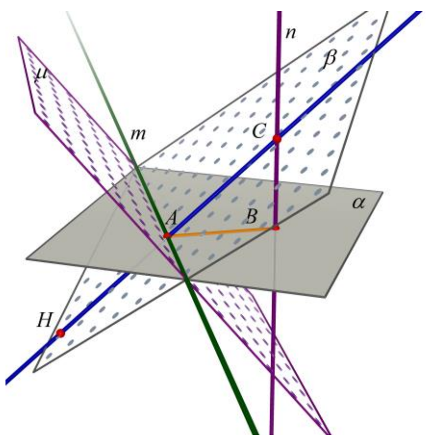


Figura 6.21. Una representación de la solución del G1 a la Tarea 6 en el Ciclo 3

Acerca de lo previsto en la THA respecto al enfoque en el contenido, ocurrió en este ciclo lo mismo que en el Ciclo 2. Los estudiantes mencionan los elementos del sistema teórico que han sido más usados para demostrar perpendicularidad: Definición de mediatriz, Teorema de la mediatriz, Congruencia de triángulos. Y mencionan uno elemento teórico de reciente incorporación como el Plano mediador, Definitivamente la tarea no requiere del uso del Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano como planteamos en un principio y por lo tanto no genera en los estudiantes la necesidad de aspectos teóricos de ese Teorema.

Enfoque en la mediación (Em)	
THA	TRA
Esperábamos que en la interacción en los grupos los estudiantes hicieran uso de las herramientas arrastre y medida de ángulo en su exploración. Se tenía previsto que al arrastrar el punto C sobre la recta *n* percibieran que la recta *m* queda siempre contenida en el plano γ y por tanto tomarán la medida del ángulo entre las rectas AC y *m*, capten que este es recto e identificarán esta relación como no dada en las condiciones de construcción de la configuración descrita en el enunciado.	En la interacción del G1 no se verifica lo previsto en este enfoque pues, como ya lo describimos, los estudiantes hacen una construcción distinta de la usual. En la interacción del G2 desarrollan la exploración de acuerdo con lo esperado. Las integrantes del grupo usan el arrastre para comprobar la invariancia de la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)	
THA	TRA
Esperábamos que el hallazgo de la perpendicularidad descrita resultara sorpresivo para los estudiantes generando en ellos incertidumbre. Y que movilizara su interés por buscar la justificación de esa relación de perpendicularidad.	En la interacción del G1 no hay evidencia de una reacción sorpresiva. En la interacción del G2 si hay evidencia de sorpresa respecto al hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. En la conversación-entrevista con el investigador algunos estudiantes expresan haber experimentado una reacción de sorpresa ante este hecho.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En)	
THA	TRA
Se tenía previsto que el hallazgo de la perpendicularidad motivara la búsqueda teórica de justificación a ésta. Que se expresaran argumentos en ese sentido y que estos resultaran satisfactorios a los estudiantes.	De acuerdo con la construcción que presentan en la hoja de trabajo del G1 es evidente que pasan por alto que la relación de perpendicularidad entre las rectas AC y *m* no está dada y es un resultado. Por tanto, no experimentan incertidumbre y tampoco necesidad intelectual. Las integrantes del G1 plantean hacer uso de la mediatriz y congruencia de triángulos, pero no logran construir un argumento completo que justifique la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. En la interacción de la profesora con la clase un estudiante presenta una justificación completa de esa relación de perpendicularidad haciendo uso de triángulos congruentes y la mediatriz.

Fragmento ilustrativo de T6C2G2

En el fragmento que se presenta a continuación las estudiantes han construido el plano perpendicular a la recta AC y María se pregunta inicialmente por qué la recta *m* queda contenida. Posteriormente, ante la pregunta del investigador hacen arrastres al punto C y allí es cuando a María le resulta claramente sorprendente que la recta quede contenida.

María:	¿Pero por qué [el plano perpendicular a la recta AC] contiene a la recta [*m*]?
Carolina:	¿Dime?
Violeta:	Es como una intersección.
María:	¿Por qué ese plano contiene a la recta?
[…]	
Investigador:	¿Qué hay que mirar ahí? Si la pregunta es por C, diferentes posiciones de C para ver si se sigue cumpliendo eso.
María:	¡Ay no! [mientras arrastra].
Carolina:	No ¿Qué?
María:	¡No! ¿Qué brujería es esta? ¿Por qué siempre cumple [la perpendicularidad entre AC y *m*]?
Violeta:	¿Siempre?
Carolina:	¿Y uno cómo puede garantizar eso?
María:	Y si utilizamos algo del plano mediador.

Fragmento de T6C3P

En el fragmento que se presenta a continuación, la profesora en su interacción con la clase ha llegado a un punto en el cual les pregunta a los estudiantes cómo puede demostrarse la perpendicularidad entre las rectas AC y *m* y Santiago le ha planteado que con una construcción auxiliar en la cual se usan triángulos congruentes. Ella le pide a Santiago que pase al frente y explique su demostración.

Profesora:	Ah bueno, pasa. […]. Bueno, entonces esta es una forma [El estudiante pasa al frente con el computador con el cual ha estado trabajando su grupo].
Santiago:	Entonces ahí tenemos [los puntos] X Y, como [el segmento] XY está contenido en [la recta] *m* (X y Y son puntos sobre la recta *m* a lado y lado del punto A y equidistantes de éste. Figura 6.22a) y [el segmento XY] es perpendicular a [el segmento] AB, entonces los ángulos internos son rectos XAB y YAB…

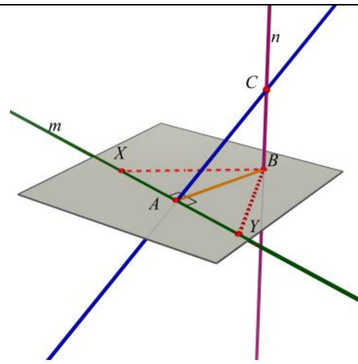


Figura 6.22a. Los puntos X e Y cumplen que XA = YA

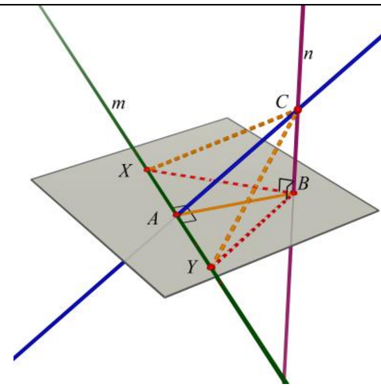


Figura 6.22b. La recta AC es una mediatriz del segmento XY

[…]	
Profesora:	¡No! sólo vas a usar los segmentos ¿No?
Santiago:	Pues es que aquí ya después está el punto C…
Profesora:	Si…
Santiago:	[Ha demostrado la congruencia de los triángulos XAB y YAB]. Que puede estar en cualquiera. Entonces como teníamos que BX es congruente a BY y como C está en una recta [*n*] que es perpendicular al plano entonces también es perpendicular a estos dos segmentos [BX y BY] y comparten este [CB] lado, entonces estos triángulos [CBY y CBX] son congruentes. CBX con CBY y entonces ahí ya C pertenece a una de las mediatrices del segmento XY (Figura 6.22b) y entonces ahí ya es perpendicular [la recta *m* con respecto a la recta AC].

Acerca de lo previsto en la THA respecto a los enfoques en la mediación, la generación de incertidumbre y la producción de necesidad intelectual, se presentaron dos hechos particulares en el Ciclo 3.

El primero es que no lo teníamos previsto lo sucedido en el G1. Ellos desarrollaron una construcción que se ajusta a lo planteado en el enunciado, pero no a las previsiones que teníamos en la THA respecto a los tres enfoques mencionados. Tendremos este hecho en cuenta en futuras aplicaciones. El segundo hecho particular es que se cumplió en buena medida lo previsto respecto a la mediación, generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual (con excepción del G1) y de manera muy semejante a como ocurrió en el Ciclo 2. Pero a diferencia de lo ocurrido en el Ciclo 2, en este ciclo se presentó una justificación teórica completa por parte de los estudiantes de la relación de perpendicularidad y con base en argumentos que no habíamos contemplado en la THA.

CAPÍTULO 7

DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Luego del proceso de análisis, descrito de forma sintética en el Capítulo 6 y en extenso en los Anexos, podemos señalar como hallazgos relevantes de la presente investigación la identificación de algunos enunciados de las tareas y algunos aspectos de la mediación que pueden contribuir a estimular la generación de incertidumbre y movilizar esa necesidad intelectual de generar argumentaciones, que nos propusimos al emprender el diseño. Queremos presentar en este capítulo la reflexión en torno a esos dos aspectos: enunciados y mediación en cada una de las tareas con base en el análisis.

En la primera sección planteamos, para cada tarea, una postura frente al enunciado y la mediación, junto con las razones por las cuales consideramos que puede o no contribuir a los propósitos educativos de la actividad con base en los resultados expresados en los análisis. En la segunda sección planteamos nuestra propuesta de formulación de los enunciados y la mediación para una futura aplicación.

7.1 EN CADA UNA DE LAS TAREAS

7.1.1 TAREA 1

Desde el punto de vista de los contenidos usuales del curso de Geometría del Espacio, la tarea está orientada a la utilización de los elementos teóricos del sistema axiomático de geometría para ver más de un plano en el espacio y adicionalmente, para introducir el Postulado del espacio como garantía teórica de la existencia de puntos por fuera del plano. Desde el punto de vista de nuestro diseño, el propósito es generar en los estudiantes incertidumbre y dar lugar a la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

Al examinar el resultado de los análisis (sección 6.1) percibimos que el enunciado (b) en los ciclos 1 y 2 y el enunciado 3 en el Ciclo 3 funcionaron mejor para los mencionados propósitos. El primero de ellos:

> ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio sea diferente a un punto, una recta y un plano?

Con esta pregunta, en el Ciclo 1 se presenta una expresión de duda en T1C1G1 que no tiene desarrollo (fragmento en sección 6.1.1.2). En el Ciclo 2 se presenta duda y discusión al respecto del enunciado y un desarrollo de argumentación alrededor de ese punto, particularmente en T1C2G1 (fragmento en sección 6.1.2.2). En el Ciclo 3 los diferentes argumentos expresados por los estudiantes son los presentados por la profesora cuando guía la discusión alrededor de ese punto T1C3P (fragmento en sección 6.1.3.2). Se evidencia en los datos que el elemento que moviliza la discusión está en la oposición entre los puntos de vista que se centran en los aspectos figurales para hacer la diferencia entre plano y espacio y aquellos que se orientan en una dirección teórica.

Con base lo observado en el análisis, nuestra propuesta es presentar el enunciado con la pregunta:

> ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio sea diferente al plano?

Y, a partir de allí, hacer la mediación por parte del profesor interviniendo con otras preguntas para orientar la discusión en una dirección teórica, preguntas que surgieron en la discusión de los grupos como lo expresado por Carlos en el Ciclo 2, cuando, para cuestionar los argumentos de Juan, le pide que hablen de lo que diferencia al punto y la recta. Las preguntas serían:

> ¿Qué necesitamos para asegurar que el punto sea diferente a la recta? ¿Qué necesitamos para asegurar que la recta sea diferente al plano?

No llegamos a establecer una manera de incorporar en el desarrollo de esta tarea el uso de material concreto o Cabri 3D.

El segundo de los enunciados que consideramos funcionó es:

> Dados A, B, C y D en el plano base de Cabri 3D. Y los segmentos AB, BC, CD y DA Redefina uno de los puntos para que no pertenezca al plano base.
>
> a) ¿Es la nueva figura determinada un cuadrilátero? Justifique
>
> b) Vamos a denominar a la nueva figura “Cuadrilátero plegado”. Redacte una definición para éste.
>
> c) Una vez acordada la definición de cuadrilátero plegado, redefinir un segundo punto fuera del plano base. ¿Es otro objeto geométrico? ¿Es necesaria una definición de cuadrilátero doblemente plegado?

Ese “funcionamiento” tiene relación con el primero de los objetivos específicos de esta investigación. Planteamos un enunciado para que los estudiantes hicieran uso de los elementos teóricos que conocen para determinar un plano en un contexto en el cual deben construir imágenes de más de un plano en el espacio. Y es con este enunciado que se verificó en el Ciclo 3 una amplia generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual evidenciadas en la conversación-entrevista que el investigador sostuvo con la clase, T1C3I (fragmento en sección 6.1.3.2).

Dos elementos fueron relevantes para lograr los resultados en el Ciclo 3. En primer lugar, se proporcionó un contexto geométrico para plantear la determinación de un plano una vez se les pide redefinir un punto fuera del plano, pues a diferencia de lo hecho en los ciclos 1 y 2 no se preguntó escuetamente cómo se determina un plano. Y, en segundo lugar, introdujimos el uso de Cabri 3D en el desarrollo de la actividad que consiguió de alguna manera “desestabilizar” las imágenes conceptuales que se habían hecho los estudiantes de los objetos geométricos, primero la de cuadrilátero y segundo la de cuadrilátero plegado.

Una visión retrospectiva global de esta tarea que procure establecer qué elementos son deseables incorporar en esta, con el objetivo de generar incertidumbre que evolucione como necesidad intelectual y justificación epistemológica. Esta mirada apunta a señalar que, en términos de contenido, la elección de objetos no definidos (como punto, recta y plano) para ser comparados entre sí parece ser un acierto pues exige un esfuerzo teórico y argumentativo en los estudiantes, más allá de lo exigido en una tarea convencional**.** El uso de Cabri 3D, particularmente de la herramienta redefinir para "transformar" objetos geométricos y juzgar su definición, ha mostrado tener bastante potencial en la intención que anima nuestro diseño.

7.1.2 TAREA 2

A diferencia de la Tarea 1 en la cual se preguntaba en general por la manera de determinar planos, en los ciclos 1 y 2 de esta tarea indagamos por las posibles representaciones de planos que pueden generarse a partir de cuatro puntos, con base en la teoría matemática de referencia en el curso. Para el Ciclo 3 el propósito trató de orientarse en una dirección más teórica al pedirles sustentar por qué son diferentes dos planos.

Los indicios de emergencia de incertidumbre en el desarrollo de esta tarea son débiles en los ciclos 1 y 2. En el Ciclo 3 no hay evidencia de que se haya producido. Decimos débiles porque, si bien en el Ciclo1 hay evidencia de duda (T2C1G1 y fragmento en sección 6.2.12), esta no dio lugar a debate y en el Ciclo 2, aunque hay reacciones de sorpresa (T2C2P y fragmento 6.2.2.2), estas no dan lugar a indagación por parte de los estudiantes.

En los datos se evidencian dos hechos interesantes. En primer lugar, las reacciones sorpresivas de algunos estudiantes en el Ciclo 2 (T2C2P) en la interacción de la profesora con la clase. Y, en segundo lugar, como comentaron en la conversación-entrevista con el investigador (T2CI y fragmento 6.2.2.2), la duda que se generó en ellos cuando la profesora hizo uso de la herramienta redefinir para problematizar algunas de las soluciones planteadas en el Ciclo 2. Sin embargo, el enunciado no parece ser lo suficientemente útil para generar incertidumbre por sí solo en ninguno de los tres ciclos, probablemente debido a que tiene un carácter muy general y no direcciona la discusión adecuadamente.

No se verifica generación de necesidad intelectual en los ciclos 1 y 3. Señalamos algo que caracterizamos como indicio de necesidad intelectual en el Ciclo 2, aunque curiosamente no guarda relación con la actividad que realizó la profesora al problematizar las soluciones con Cabri 3D, sino con los argumentos planteados por T2C2G1 al discutir el enunciado. En términos globales, la tarea no cumple el propósito particular respecto al contenido ni el general que incorporamos en el diseño, pues la generación de incertidumbre y necesidad intelectual es muy incipiente. Deja entrever que, para estos propósitos, el enunciado como se concibió en los ciclos 1 y 2 no cumple su objetivo y el del Ciclo 3 aparentemente se aleja más del mismo. Pese a no tener éxito con el enunciado, la tarea dejó un elemento positivo como lo fue el primer uso de la herramienta redefinir (la Tarea 1, Ciclo 2, fue posterior obviamente a la Tarea 2, Ciclo 2).

Lo que podría señalarse respecto a este enunciado es que no es útil para los propósitos del diseño y en futuras aplicaciones no cabría considerarlo como adecuado dentro de éste. Adicionalmente al examinar en retrospectiva las tareas, encontramos que la meta de aprendizaje propuesta para la misma (secciones 6.2.1, 6.2.2 y 6.2.3) queda incorporada en la meta propuesta para la Tarea 3 (secciones 6.3.1, 6.3.2 y 6.3.3).

7.1.3 TAREA 3

La tarea se orienta a que los estudiantes construyan imágenes mentales de planos en el espacio en las cuales relacionen, mediante el uso de los elementos del sistema teórico de referencia, una configuración específica de puntos en el espacio con el número de planos que pueden ser determinados. En los objetivos del diseño, como ya se señaló, esperábamos lograr en los estudiantes la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

A partir del análisis realizado (sección 6.3) podemos decir que el enunciado que mejor funcionó fue:

> Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α.
>
> Sin hacer una representación, cada integrante del grupo escriba su anticipación del número de planos que quedan determinados.
>
> ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.

Como ya se describió en el análisis (sección 6.3.1.2), en el Ciclo 1 se produjo un interesante evento de generación de incertidumbre en T3C1G1. Pero como se señaló ahí mismo, la explicación más razonable atiende al hecho de que los estudiantes incurrieron en un sesgo particular al usar la combinatoria con independencia del modelo geométrico. Este fenómeno no se presentó en otros estudiantes en ese mismo ciclo y tampoco en el Ciclo 2. En el Ciclo 2 se verificó la generación de incertidumbre en la interacción de los tres grupos de trabajo registrados. La evidencia aportada por estas interacciones sugiere que el enunciado jugó un papel determinante en la generación de incertidumbre y tanto el modelo físico como Cabri 3D fueron útiles para confirmar sus soluciones. En el Ciclo 3 hay evidencia de generación de incertidumbre en el registro de interacción de los dos grupos de trabajo, pero tenemos una reserva frente al resultado en T3C3G2. Como se mencionó en el análisis (sección 6.3.2.2), la intervención del investigador fue significativa para orientar el uso del modelo físico. Asimismo, la evidencia ilustra la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica en uno de los grupos en el Ciclo 1 y en uno de los grupos en el Ciclo 3, a diferencia del Ciclo 2 en el cual se evidenció en los tres grupos de trabajo que se registraron.

Lo previsto en la THA respecto a la mediación en esta tarea en cada uno de los tres ciclos parece verificarse de manera parcial y por motivos aparentemente distintos. En el Ciclo 1 el uso del modelo físico tiene una intervención decisiva en uno de los grupos y en el otro no, probablemente por el sesgo en el conteo registrado en T3C1G1. En el Ciclo 2 parecen relevantes el uso de Cabri 3D y del modelo físico para verificar el resultado en uno de los grupos (T3C2G2), en el otro no (T3C2G1). Y en el Ciclo 3 es relevante en los dos grupos el uso del modelo físico para contrastar su resultado, pero la intervención del investigador en el segundo de los grupos fue muy activa para que esto sucediera. Estos resultados parecen evidenciar que ese aspecto del diseño no está bien estructurado pues los resultados son disimiles y poco consistentes. Una posibilidad es orientar el uso de Cabri 3D directamente a la verificación de la solución acerca del número de planos, haciendo una determinación de planos, explotando las herramientas de representación del programa para diferenciarlos (estilo y color de superficie) y dirigiendo la atención a la correspondencia de la herramienta usada en el entorno para determinar el plano con los elementos teóricos del sistema de referencia (tres puntos, punto y recta o rectas que se intersecan).

7.1.4 TAREA 4

La tarea cuatro es la primera de las tres tareas en las cuales se estudia la relación de perpendicularidad entre la recta y el plano. Su propósito es introducir la Definición de perpendicularidad entre recta y plano, así como el Teorema fundamental de la perpendicularidad. El objetivo del diseño, como ya se mencionó, es lograr en los estudiantes la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

De acuerdo con lo observado en el análisis (sección 6.4), el enunciado que generó el resultado más acorde a los objetivos específicos del estudio fue:

> Dados *m* recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿Existe la recta *l*, *l* contenida en α, tal que *l* es perpendicular a *m*?

Este fue el enunciado empleado en el Ciclo 3. Nuestro balance es que la generación de incertidumbre mejoró en el Ciclo 3 respecto al Ciclo 2. Sin embargo, no evidenciamos en ninguno de los dos ciclos la producción de necesidad intelectual (secciones 6.4.2.1 y 6.4.2.2). Por otro lado, respecto al contenido, el análisis de los datos ilustra que no emergen, por parte de los estudiantes en ninguno de los dos ciclos, el planteamiento de la Definición de perpendicularidad entre recta y plano o el Teorema fundamental de la perpendicularidad. Entonces, es razonable plantear que este no puede ser un propósito en la THA respecto al enfoque en el contenido. La tarea proporciona un contexto para la discusión de estos elementos de contenido los cuales en la mayoría de los casos pueden ser propuestos por la profesora.

Acerca de la mediación, el análisis muestra, en el Ciclo 3 en especial, un particular escepticismo de los estudiantes respecto al resultado en Cabri 3D cuando arroja como resultado un ángulo de 90. Dado que en la mediación intervienen el artefacto y la profesora, este resultado sugiere que en la THA debemos incorporar estas posibles reacciones de escepticismo para prever intervenciones de la profesora cuando los estudiantes hagan su exploración en grupos. En las intervenciones, puede indagar por el grado de convicción acerca de la medición del ángulo que se hace con Cabri 3D y las hipótesis que formularían si cambian alguna condición, como la inclinación de la recta respecto al plano.

El análisis describe una valoración más positiva de la incertidumbre generada en el Ciclo 3 con respecto al Ciclo 2. El principal elemento diferenciador entre los dos ciclos fue el enunciado, pues en el Ciclo 3 se enfatizó en el estudio de la situación cuando una recta (*m*) interseca a un plano y debe encontrarse una recta (*l*) perpendicular a ésta en el plano. Así que es razonable suponer que una mejora en el enunciado potencie la emergencia de incertidumbre. Y, asimismo una mejoría en el enunciado y la intervención de mediación facilitarían la generación de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

Nuestra propuesta para una nueva versión del enunciado es:

> Dos estudiantes discuten acerca de la siguiente situación:
>
> Uno de ellos afirma que dados un plano α y una recta *m* que interseca a α, <u>siempre</u> existe una recta *n* en α tal que *n* es perpendicular a *m*. El otro estudiante afirma que <u>no siempre</u> existe esa recta *n*, solo bajo determinadas condiciones existe *n* contenida en α tal que *n* es perpendicular a *m*.

Estudie la situación y determine su punto de vista al respecto.

Consideramos que este enunciado puede mejorar el alcance de los propósitos de la tarea y de los objetivos de diseño: generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual. Una relación provechosa entre enunciado y mediación parece ser el elemento relevante. Así que mejorar el enunciado, reorientar el trabajo con artefactos y diseñar la manera en la cual interviene el profesor, pueden ser elementos relevantes para hacer un mejor uso de la idea propuesta en esta tarea para lograr los propósitos globales del diseño.

7.1.5 TAREA 5

El propósito de esta tarea es introducir un teorema que es relevante para la demostración, que se hace en el curso, del Teorema fundamental de la perpendicularidad. El teorema por introducir se denomina Teorema interestancia-equidistancia. Esperábamos hacer la introducción generando incertidumbre en los estudiantes y estimulando la producción de necesidad intelectual de tener un teorema no estudiado.

Una visión global de los resultados que muestra el análisis de esta tarea (sección 6.5) señala que las previsiones de la THA no se verificaron. La tarea no cumple con el propósito para el cual fue diseñada. Sin embargo, un examen detallado de los datos analizados puede conceder a esta tarea la posibilidad de una nueva experimentación. Las razones por las cuales consideramos que no cumplió los propósitos establecidos en la THA las atribuimos a la ejecución de esta, más que al diseño. Por ejecución hacemos referencia particularmente a los aspectos relacionados con la mediación. Consideramos que la tarea diseñada y ejecutada adecuadamente orientando la exploración en Cabri 3D, tiene potencial para la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual.

Nuestra hipótesis es que el enunciado que se presenta a continuación, junto con la exploración del archivo adecuadamente construido y garantizando su exploración por parte de los estudiantes puede contribuir al logro de los propósitos señalados.

> Un estudiante asegura que dados el segmento PQ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la recta BC es mediatriz del segmento PQ. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. Indique su acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones dadas. Justifique su respuesta.

La TRA establecida a partir de los datos en los dos ciclos (secciones 6.5.1.2 y 6.5.2.2) ilustra que la mediación fue el aspecto más débil en el desarrollo de esta tarea. En el Ciclo 2 uno de los grupos no logró la equidistancia mediante arrastre con el punto B libre en el espacio (T5C2G1e) y en el Ciclo 3 ninguno de los dos grupos logró una exploración exitosa del archivo en Cabri 3D (T5C3G1, T5C3G2). Consideramos que podemos mejorar en ese aspecto el diseño con los siguientes cambios:

- Haciendo la constatación en los grupos de trabajo del uso del archivo para explorar en Cabri 3D y del seguimiento de la instrucción de redefinir el punto.
- Dando el tiempo suficiente para que los estudiantes consideren sus hallazgos y discutan las posibles justificaciones de estos, una vez verificado que han hecho la exploración.
- Generando un archivo para explorar en el cual el punto que se redefine por fuera del plano esté sobre un plano mediador del segmento para que la equidistancia esté dada y la verificación sea solamente de la invariancia de la equidistancia para infinitos puntos que no pertenecen al plano base.

Planteamos estas hipótesis para darle una nueva oportunidad a esta tarea porque en los datos observamos que en T5C2G2 (sección 6.5.1.2) se verificó lo previsto en la THA. Y, en los grupos en los que no se verificó la THA (T5C2G1, T5C3G1 y T5C3G2), la exploración del archivo en Cabri 3D no se desarrolló como estaba prevista. Esta exploración es central para la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual, de acuerdo con cómo se diseñó esta tarea. Así que nuestra hipótesis es que, mejorando la mediación, la tarea puede cumplir con lo presupuestado en la THA.

7.1.6 TAREA 6

Dentro del contexto del estudio de las relaciones de perpendicularidad, usamos un problema que adaptamos del trabajo de Güven y Kosa (2008) que está basado en el Teorema de las tres perpendiculares (figura 6.19), lo encontramos apropiado para este momento del curso en el cual se ha estudiado la Definición de perpendicularidad recta-plano, el Teorema fundamental de la perpendicularidad y los teoremas de existencia y unicidad de perpendicularidad entre la recta y el plano. Considerábamos que, desde el punto de vista del contenido, contribuiría el estudio de esta situación al planteamiento de la necesidad del Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano y desde el punto de vista de las intenciones del diseño vimos bastante potencial en esta tarea para la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual.

Los resultados del análisis (sección 6.6) muestran diferencias respecto a la verificación de la THA entre los ciclos 2 y 3. Como se mencionó en el análisis, el elemento diferenciador más relevante fue el tiempo asignado para la exploración y discusión de la tarea en grupos, el cual fue mayor en el Ciclo 3, pues allí no mezclamos otra pregunta como en el caso del Ciclo 2. Consideramos que esto permitió que en el Ciclo 3 la justificación epistemológica tuviese más desarrollo, evidenciada en una mayor formulación de ideas para demostrar el hecho geométrico verificado en la exploración. Por otro lado, respecto a lo previsto en la THA, no es razonable suponer que pueden plantearse el Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano teniendo a mano recursos que son más familiares y que funcionan, como lo fueron la congruencia de triángulos y el uso de la mediatriz. Por lo anterior el enunciado que consideramos apropiado para una nueva aplicación de esta tarea es el asignado en el Ciclo 3:

> Dados un plano α y un segmento AB contenido en α. Sean las rectas *m* y *n* tales que *m* está contenida en α, A es un punto de *m* y *m* es perpendicular a AB, *n* es perpendicular a α por B. ¿Existe un punto C de n tal que el segmento CA es perpendicular a γ , siendo γ un plano que contiene a *m*? Justifique su respuesta.

Respecto a la mediación, podemos señalar que el papel que le asignamos a Cabri 3D funcionó en la mayor parte del diseño. Sin embargo, la interpretación diferente que los estudiantes hicieron en T6C3G1, evidencia que en este enfoque el papel de la profesora debió ser previsto de mejor manera, particularmente en su intervención en los grupos de trabajo, pues allí puede desempeñar un papel más relevante del planteado en nuestra THA, no sólo respecto a la interpretación deseada del enunciado sino a los demás aspectos del diseño.

7.2 PROPUESTA DE ENUNCIADO Y MEDIACIÓN PARA FUTURAS APLICACIONES

Una vez que hemos reflexionado acerca de los resultados en cada una de las tareas, planteamos elementos comunes identificados en aquellas tareas en las cuales se presentó una mejor correspondencia entre la THA y la TRA. Esos elementos comunes son, desde nuestra perspectiva, abstracciones resultado del análisis de los datos. En estas se presentan aspectos del enunciado y de la mediación que consideramos potenciaron la generación de incertidumbre y la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica. A partir de estos elementos proponemos los enunciados para futuras aplicaciones de las tareas junto con nuestra visión de los aspectos del enunciado y de la mediación que podrían constituir el núcleo de una nueva THA.

En la tabla 7.1 describimos el enunciado y mediación sugeridos junto con las razones por las cuales consideramos podría potenciar la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

Tabla 7.1 Propuesta de enunciados y mediación para futuras aplicaciones de las tareas

Enunciado	¿Por qué podría funcionar?	Mediación sugerida
¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio sea diferente al plano?	Este enunciado genera duda en los estudiantes porque explota la contradicción existente en las concepciones de los estudiantes acerca del carácter figural y conceptual de los objetos de la geometría, contradicción ampliamente estudiada por Fischbein (1993) así como por Tall (2002). En este caso se producen puntos de vista distintos entre los estudiantes acerca de esta diferencia porque algunos se orientarán hacía los aspectos figurales que diferencian los dos objetos y otros lo harán hacía los aspectos conceptuales.	La mediación está contemplada principalmente en el aspecto de la intervención del profesor. En la cual introduce nuevas preguntas: ¿Qué necesitamos para asegurar que el punto sea diferente a la recta? ¿Qué necesitamos para asegurar que la recta sea diferente al plano? Con el propósito de impulsar el punto de vista que privilegia los aspectos teóricos orientando la incertidumbre generada hacía la producción de necesidad intelectual.

Enunciado	¿Por qué podría funcionar?	Mediación sugerida
Dados A, B, C y D en el plano base de Cabri 3D. Y los segmentos AB, BC, CD y DA. Redefina uno de los puntos para que no pertenezca al plano base. a) ¿Es la nueva figura determinada un cuadrilátero? Justifique b) Vamos a denominar a la nueva figura “Cuadrilátero plegado”. Redacte una definición para éste. c) Una vez acordada la definición de cuadrilátero plegado, redefinir un segundo punto fuera del plano base. ¿Es otro objeto geométrico? ¿Es necesaria una definición de cuadrilátero doblemente plegado?	En el caso de este enunciado la duda se genera por dos razones, según nuestro criterio. La primera, por lo ya señalado se explota la contradicción entre los aspectos figurales y conceptuales. En este caso con respecto a las definiciones de cuadrilátero y cuadrilátero plegado. Y la segunda razón, porque para potenciar esa contradicción se hizo uso de una representación, en el caso del cuadrilátero plegado, la cual supuestamente es un “no ejemplo” del objeto definido.	La mediación está definida para las acciones del profesor y el uso de Cabri 3D particularmente de la herramienta redefinir. El profesor es quien introduce las preguntas que generan duda respecto a los objetos geométricos cuadrilátero y cuadrilátero plegado y quien orienta la discusión de toda la clase al respecto. La herramienta redefinir de Cabri 3D es útil en primer lugar para modificar una condición de la definición de cuadrilátero: la coplanariedad de los cuatro vértices. En segundo lugar, se usa para proporcionar un supuesto no ejemplo de cuadrilátero plegado al redefinir un segundo vértice fuera del plano base.

Enunciado	¿Por qué podría funcionar?	Mediación sugerida
Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α. a) Sin hacer una representación, cada integrante del grupo escriba su anticipación del número de planos que quedan determinados. b) ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.	En el caso de este enunciado explotamos la dificultad de los estudiantes para construir imágenes de objetos y relaciones de la geometría tridimensional, descrita por Gutiérrez (1996) y también por Parzysz (1988), ofreciendo en el enunciado una falsa conclusión con una certeza aparente, lo que genera duda en los estudiantes.	La mediación de los artefactos, en este caso el modelo físico y Cabri 3D, cumple el papel de solventar la dificultad de construir imágenes en geometría tridimensional proporcionando modelos en los cuales puede intervenir para tener certeza de la solución y contrastar los resultados obtenidos con la anticipación formulada.

Enunciado	¿Por qué podría funcionar?	Mediación sugerida
Dos estudiantes discuten acerca de la siguiente situación: Uno de ellos afirma que dados un plano α y una recta *m* que interseca a α, siempre existe una recta *n* en α tal que *n* es perpendicular a *m*. El otro estudiante afirma que no siempre existe esa recta *n*, solo bajo determinadas condiciones existe *n* contenida en α tal que *n* es perpendicular a *m*. Estudie la situación y determine su punto de vista al respecto.	Este enunciado reformula el enunciado empleado en el experimento, como ya se mencionó. En él se aprovecha la dificultad de los estudiantes para construir imágenes mentales de objetos de la geometría tridimensional y considerar diferentes tipos de relaciones entre estos, porque se verificó que tienden a considerar que la recta existe solamente cuando la recta que interseca al plano es perpendicular a éste. Esta dualidad de consideración se explicita en el enunciado para potenciar la aparición de la duda.	En cuanto a los artefactos, son relevantes las herramientas medida de ángulo y arrastre de Cabri 3D para considerar diferentes posiciones de la recta que interseca al plano y el ángulo determinado con la recta contenida en el plano. El papel del profesor es importante para considerar distintas posibilidades en la relación de las dos rectas y de la recta que interseca al plano con el plano mismo. Es decir, en orientar la exploración y posterior discusión de resultados.

Enunciado	¿Por qué podría funcionar?	Mediación sugerida
Un estudiante asegura que dados el segmento PQ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la recta BC es mediatriz del segmento PQ. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. Indique su acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones dadas. Justifique su respuesta.	En este enunciado explotamos mencionada contradicción entre lo figural y lo conceptual en las concepciones de los estudiantes respecto a los objetos y relaciones de la geometría, junto con su dificultad para construir imágenes de objetos y relaciones en más de un plano. Pues los resultados muestran que los estudiantes asocian equidistar con mediatriz y no conciben la equidistancia de los puntos de una recta a los extremos de un segmento sin que la recta interseque al segmento. En este caso la duda se espera introducirla por la vía de la exploración de la representación en Cabri 3D.	La herramienta redefinir de Cabri 3D junto con la medida de las distancias busca desestabilizar lo que es una aparente certeza de los estudiantes ilustrando un resultado en el cual hay equidistancia sin que se interseque la recta con el segmento. El profesor debe garantizar una adecuada exploración del archivo para que los estudiantes puedan experimentar el contraste entre lo previsto y lo que ilustra el programa, así como el hacer explícito los puntos de vista distintos en el grupo si los hubiese.

Enunciado	¿Por qué podría funcionar?	Mediación sugerida
Dados un plano α y un segmento AB contenido en α. Sean las rectas *m* y *n* tales que *m* está contenida en α, A es un punto de *m* y *m* es perpendicular a AB, *n* es perpendicular a α por B. ¿Existe un punto C de n tal que el segmento CA es perpendicular a γ , siendo γ un plano que contiene a *m*? Justifique su respuesta.	El enunciado genera duda porque presenta un hallazgo “inesperado” para los estudiantes y, en principio, aparentemente inexplicable. Lo que los incita a la búsqueda de causalidad.	Cabri 3D es esencial para establecer con las herramientas arrastre y medida de ángulo la relación de perpendicularidad que con otro soporte de representación no sería visible. El profesor debe garantizar una adecuada construcción y exploración para hacer visible la relación de perpendicularidad deseada, que genera la duda en los estudiantes.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

En este capítulo pretendemos dar cuenta de lo ocurrido con los objetivos planteados, una vez finalizada la investigación. Dada la naturaleza de nuestra investigación debemos hacer la salvedad planteada por Cronbach (1975, citado en Bakker, 2018):

> Cuando damos el peso adecuado a las condiciones locales, cualquier generalización es una hipótesis de trabajo, no una conclusión. (p. 125)

En esa dirección consideramos que las reflexiones finales no tienen un tono concluyente. Son hipótesis con un soporte fáctico razonablemente establecido en el proceso de la investigación.

Presentamos, en la primera sección, lo que consideramos son resultados relevantes de la investigación y posibles contribuciones respecto a cada uno de los objetivos específicos. En la segunda sección presentamos las posibles limitaciones del estudio y en la tercera sección los potenciales desarrollos de este.

8.1 RESULTADOS Y CONTRIBUCIONES

El primero de los objetivos específicos que nos formulamos al emprender esta investigación es:

> Diseñar, experimentar y evaluar una secuencia de instrucción en geometría tridimensional, con el apoyo de Cabri 3D, que genere en los estudiantes incertidumbre e impulse e impulse en ellos la necesidad intelectual que les induzca a elaborar argumentación productiva.

Como mencionamos en el capítulo 7, los dos aspectos en los cuales es importante el diseño para el alcance de los objetivos son los enunciados y la mediación. Podemos decir que hemos identificado en la información analizada que aquellos enunciados en los cuales se verificó de mejor manera la correspondencia entre la THA y la TRA tenían las siguientes características:

- ✓ Nos apoyamos en la contradicción generada entre los aspectos figurales y los conceptuales de los objetos y relaciones de la geometría para plantear situaciones que dieran lugar a dualidad en la interpretación y posibilitaran el surgimiento de duda y debate entre los estudiantes y por lo tanto de incertidumbre.
- ✓ Nos apoyamos en la dificultad de los estudiantes para construir imágenes mentales de objetos y relaciones de la geometría tridimensional para plantear situaciones en las cuales sus anticipaciones entraran en contradicción con posteriores comprobaciones con el uso de modelo físico o Cabri 3D. Así pretendimos generar duda y debate entre los estudiantes que diera lugar a incertidumbre.
- ✓ Usamos situaciones en las cuales la construcción y exploración con Cabri 3D arrojara un resultado inesperado y en principio inexplicable para así generar sorpresa y búsqueda de causalidad entre los estudiantes, expresiones de que se produjo la incertidumbre.

Es importante señalar que las características señaladas anteriormente la generación de incertidumbre derivo en expresiones de argumentación productiva por parte de los estudiantes, evidencia de producción necesidad intelectual.

En la misma dirección, las características identificadas de la mediación fueron:

- ✓ Uso de artefactos como modelos físicos o Cabri 3D que proporcionaron más información respecto a la situación planteada, la cual entra en contradicción con lo anticipado por los estudiantes.

- ✓ Uso de Cabri 3D, concretamente de la herramienta redefinir, pasando del plano al espacio para presentar una representación en la cual aparentemente hay cumplimiento de ciertas condiciones enunciadas y otras no, sin que en principio sea claro el discernimiento de estas condiciones para los estudiantes. Es decir, la representación muestra una prueba de existencia de un caso muy probablemente no considerado por los estudiantes (cuadrilátero plegado con dos vértices “fuera del plano”, recta cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento sin intersecarlo).
- ✓ Uso de las herramientas convencionales de geometría dinámica como medida (de longitudes o ángulos) y arrastre para guiar el hallazgo de resultados inesperados y sorpresivos para los estudiantes.
- ✓ Un papel activo de la profesora guiando las exploraciones y discusiones en grupos o con toda la clase para potenciar en los estudiantes el contraste de puntos de vista y la producción de argumentos.

Nuestra conclusión al respecto es que las contribuciones del presente trabajo con relación a este objetivo son:

El uso dado a la herramienta de Cabri 3D *redefinir* en tareas puntuales, como la del cuadrilátero plegado y la que indaga por la equidistancia de los puntos de una recta a los extremos de un segmento. Si bien partimos de una idea propuesta por Ferrara y Mammana (2014) para usar esa herramienta, encontramos una manera diferente de emplearla para generar incertidumbre en los estudiantes contrastando sus concepciones, en términos de construcción de imágenes mentales de objetos y relaciones en 3D, con representaciones que pongan en cuestionamiento esas concepciones generando estas dinámicamente a la vista de los estudiantes.

Tener un buen punto de partida para el desarrollo de un diseño más articulado de tareas en geometría 3D en el cual se promueva la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica con el uso de geometría dinámica. Los resultados aquí presentados ilustran que tenemos un conjunto de enunciados medianamente probados con una caracterización de la mediación a desarrollar en cada uno de estos.

El segundo de los objetivos específicos que nos planteamos alcanzar es:

> Describir las circunstancias específicas que rodean la generación de incertidumbre en el desarrollo de las tareas que componen la secuencia de instrucción.

Respecto a este objetivo consideramos que los resultados más relevantes son:

La construcción de un marco analítico para evidenciar la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica. Pues como ya hemos señalado antes si bien los conceptos están claramente formulados en el campo, sus expresiones visibles en los aprendices al parecer aún no están establecidas. Ese marco analítico incorporó elementos como expresiones de incertidumbre: duda y sorpresa y nuestra caracterización de la argumentación productiva.

El proceso de construcción de unas THA que nos permitieran una mejor comparación con las TRA. La formulación de las THA fue una construcción dinámica a lo largo de experimento pues si bien una vez planteada la tarea con sus metas de aprendizaje, queda esbozada una THA (como en el capítulo 5). Para una descripción más precisa de lo que ocurrió, es decir para contrastar THA y TRA, fue necesario enriquecer las THA con más elementos, en nuestro caso con los enfoques.

Las contribuciones del presente trabajo con relación a este objetivo son:

La caracterización de las manifestaciones de incertidumbre esperadas y su identificación en la ejecución de algunas tareas por parte de los estudiantes. Si bien encontramos en el trabajo de Zaslavsky (2005) una conceptualización y un rastreo en la literatura de las ideas afines a la noción de incertidumbre, así como una caracterización de los posibles tipos de ésta, no encontramos un planteamiento acerca de evidenciar su generación o no en el desarrollo de tareas por parte de los estudiantes. Consideramos que nuestra formulación teórica acerca de la duda y sorpresa como manifestaciones de incertidumbre es de utilidad para determinar si se produce o no ésta en el desarrollo de una tarea diseñada con la intención de generarla.

El planteamiento acerca de los enfoques para formular y hacer el seguimiento a una trayectoria hipotética de aprendizaje consistente con nuestro marco teórico. Cuando estudiamos la noción de THA en la literatura acerca de la investigación de diseño, encontramos formulaciones generales acerca del planteamiento de las THA y su contraste con las TRA para evaluar el diseño. Propusimos aspectos más puntuales que le den estructura a la formulación de la THA y su comparación con la TRA, para que tener unos parámetros definidos de acuerdo con los propósitos particulares de cada tarea y que tuviesen en cuenta los elementos estructurantes del diseño como lo eran la intención de generar incertidumbre y producir necesidad intelectual y justificación epistemológica haciendo uso de la geometría dinámica. La alternativa metodológica que encontramos para dar estructura a la THA en correspondencia con nuestro marco de referencia fueron los enfoques en el contenido, en la mediación, en la generación de incertidumbre y en la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

8.2 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Los recursos y el tiempo disponibles impidieron realizar una nueva iteración de los ciclos del experimento. Esta situación, vista en retrospectiva, es una limitación del estudio. Las tareas 4, 5 y 6 se realizaron solamente en dos ciclos del experimento, lo que puede constituir una cantidad reducida de información en el marco de una investigación de diseño. Hubiese sido interesante, desde el punto de vista de los objetivos del estudio, la realización de un nuevo ciclo. Por otra parte, una vez finalizado el estudio, comprobamos que hubiese aportado más y mejor información la realización de más sesiones de interacción del investigador con el grupo de aquellas que denominamos conversación-entrevista pues proporcionaron información relevante respecto a las intenciones del diseño.

8.3 PERSPECTIVAS DE FUTUROS ESTUDIOS

Todo trabajo de investigación finalizado deja en los involucrados la sensación de que muchas cosas quedaron por hacer y este no es la excepción. Al proponernos una investigación de diseño reconocemos el carácter seminal de este estudio y por lo tanto la perspectiva es que son varias las tareas a desarrollar para lograr resultados que redunden en aportes sustantivos al campo de investigación.

Nos parece relevante señalar que, si bien este trabajo aporta un diseño relativamente estructurado de tareas para un curso de geometría tridimensional en las cuales se promueve la generación de incertidumbre y producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica, es deseable hacer más aplicaciones de este diseño perfeccionando los aspectos metodológicos señalados en la sección anterior para profundizar en el estudio que iniciamos.

Para nuevas aplicaciones de las tareas, sería deseable la reformulación de las THA más ajustadas a la realidad, de acuerdo con los resultados del presente estudio y con un mayor detalle de previsión. El uso de una herramienta como el "árbol de la tarea" propuesto por Morera (2013) podría resultar útil en la formulación de THA en futuras aplicaciones del presente diseño.

Hemos hablado de la caracterización que hicimos para el presente estudio de las manifestaciones de incertidumbre, refiriéndonos a esta como un aporte nuestro. Los autores de los constructos incertidumbre, necesidad intelectual y la justificación epistemológica han hecho una tipificación de cada uno de ellos, Zaslavsky (2005) respecto a la incertidumbre y Harel (2013, 2018) respecto a la necesidad intelectual y justificación epistemológica. Sería interesante extender lo hecho en el presente estudio a un trabajo en el cual, además de identificar las manifestaciones, se hiciera una caracterización de acuerdo con la tipología de los autores. Esto con el fin de evidenciar no solo las manifestaciones de incertidumbre, necesidad intelectual y justificación epistemológica sino de tipificar estas y buscar vínculos entre esta tipificación y la clase de argumentos que generan en los estudiantes.

Como señalamos al introducir la presente memoria describiendo el contexto de aplicación y las experiencias de innovación implementadas en ese contexto, “un elemento importante de esa innovación es la búsqueda de mecanismos que estimulen la producción de argumentos teóricos ligados a las exploraciones que desarrollan en geometría dinámica”. Siendo éste el espíritu que animó la presente investigación, consideramos que, para caracterizar de mejor manera los argumentos producidos por los estudiantes, en futuras aplicaciones del diseño es conveniente dirigir nuestra atención a la caracterización de éstos, particularmente poniendo a prueba los aspectos teóricos planteados por Harel (2018) respecto a los tipos de justificación epistemológica.

REFERENCIAS

Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. G., Leung, A., Mariotti, M. A., y Stevenson, I. (2012). Experimental approach to theoretical thinking: Artefacts and proofs. In G. Hanna y M. De Villers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 97–137). Dordrecht:Springer.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrech:Utrech University.

Bakker, A. (2018). *Design research in education. A practical guide for early career reserarchers*. Nueva York: Routledge.

Bakker, A., y Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ashbahs, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 429-466). Dordrecht, Paises Bajos: Springer.

Bartolini-Bussi, M. G., y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a vygotskian perspective. En L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, y B. Sriraman (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bendixen, L. (2002). A epistemic model of epistemic belief change. En B. K. Hofer y P. R. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 191-208). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Birkhoff, G. D. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics, 33*(2), 329-345.

Buchbinder, O., y Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *ZDM Mathematics Education*, *43*(2), 269-281.

Cabassut, R., Conner, A., Iscimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., y Morselli, F. (2012). Conceptions of proof-in research and teaching. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 169-190). Dordrecht:Springer.

Camargo, L. (2010). *Descripción y analisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemática de educación secundaria*. Valencia: Universitat de València.

Clarke, D. J. (1997). Studying the classroom negotiation of meaning: complementary accounts methodology. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 98-111.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, *23*(7), 13-20.

Cobb, P., y Bauersfeld, H. (1995). Introduction: the coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 1-16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., Confrey, J., di Sessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cronbach, L. J. (1975). Beyond the two disciplines of scientific psychology. *American Psychologist*, *30*(2), 116-127.

Da Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *39*(5), 419-430

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.

de Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry? In R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369–393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

di Sessa, A. A., y Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 77-103.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 163-181). Rotterdam: Sense Publishers.

Douek, N. (2009). Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference* (Vol. 1, pp. 142-147). Taipei: National Taiwan Normal University.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., y Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 349-368). Dordrecht:Springer.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-262.

Duval, R. (1999). Questioning argumentation. Recuperado 20 de marzo de 2019, a partir de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html

Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P., y Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Ensenanza de las Ciencias*, *30*(1), 73-88.

Ekman, P. (2003). *Emotions revealed*. Nueva York: Times Books.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Londres: The Falmer Press.

Ernest, P. (Ed.). (1994a). *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education*. Londres: The Falmer Press.

Ernest, P. (1994b). Social constructivism and the psychology of mathematics education. En P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematics education* (pp. 68-79). Washington, D.C.: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany: SUNY Press.

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 39-47). Berlín: Springer.

Ferrara, F., y Mammana, M. (2014). Seeing in space is dificult:an aproach to 3D geometry through a DGE. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y A. Darien (Eds.), *Proceedings of the 38th PME Conference* (Vol. 3, pp. 57-64). Vancouver, Canada: IGPME.

Ferrater, J. (1964). *Diccionario de filosofía*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Fiallo, J., Camargo, L., y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integracion*, *31*(2), 181-205.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Furinghetti, F., y Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond : hows and whys in the teaching of proof. *ZDM Mathematics Education*, *43*(4), 587-599.

Gonzato, M., Godino, J. D., y Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En

M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: SEIEM.

Gravemeijer, K., y Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research. part A: An introduction* (pp. 72-113). Enschede, Países Bajos: SLO. Recuperado a partir de http://international.slo.nl/publications/edr/

Goizueta, M., y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(1), 61-78.

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: IGPME.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, *9*(2), 53-83.

Güven, B., y Kosa, T. (2008). The efect of dynamic geometry software on student mathematics teachers´spatial visualization skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *7*(4), 100-108.

Hadas, N., Hershkowitz, R., y Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127-150.

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). *American Mathematical Monthly*, *105*(6), 497-507.

Harel, G. (2013). Intellectual need. En K. R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 119-151). Nueva York: Springer.

Harel, G. (2018). Types of epistemological justifications, with particular reference to complex numbers. En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving. An international perspective* (pp. 35-48). Cham, Suiza:Springer.

Jones, K. (1997). Student-teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review, 9*, 21-32

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers ’ conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405.

Laborde, C., y Laborde, J.-M. (2008). The develoment of a dynamical geometry enviroment: Cabri-Géometrè. En G. W. Blume y K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching adn learning of mathematics: cases and perspectives* (pp. 31-52). Charlotte, North Caroline: Information Age.

Leikin, R., y Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from poof to investigation. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 515–531

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 347-366). Rotterdam: Sense Publishers.

Leung, A., y Or, C. M. (2007). From construction to proof: Explanations in dynamic geometry environments. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31th Conference of the PME* (Vol. 3, pp. 177-184). Seul:IGPME

Leung, A., y Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: the role of tools. In A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: The 22nd ICMI study* (pp. 191–225). New York: Springer.

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lo, J.-J., Tsamir, P., Tirosh, D., y Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 327-346). Dordrecht: Springer.

Macedo, L., Cardoso, A., Reisenzein, R., Lorini, E., y Castelfranchi, C. (2009). Artificial surprise. En J. Vallverdú y D. Casacuberta (Eds.), *Handbook of research on synthetic emotions and sociable robotics : New applications in afective computing and artificial* (pp. 267-291). Nueva York: Hershey IGI Global.

Macedo, L., Reisenzein, R., y Cardoso, A. (2012). Surprise and anticipation in learning. En *Encyclopedia of the sciences of learning* (pp. 3250-3253). Dordrecht: Springer.

Mammana, M. F., Micale, B., y Pennisi, M. (2010). Analogy and dynamic geometry software together in approaching 3d geometry 1. En J. L. Galán, G. Aguilera, y P. Rodríguez (Eds.), *Proceedings of the Conference on Technology and its Integration into Mathematics Education* (pp. 1-14). Malaga, España: ETSI Telecomunicaciones e Informática.

Maracci, M., y Mariotti, M. A. (2013). Semiotic mediation within an AT frame. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *20*(1), 21-26.

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM Mathematics Education*, *45*(3), 441-452.

Marrades, R., y Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometryin a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2) , 87–125.

Martin, G., y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Martínez, A. (2001). La demostración en matemática: una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F.Gil, M.Socas, & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 28-43). Almeria: SEIEM.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). Sistema educativo colombiano. Recuperado 3 de febrero de 2019, a partir de https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-231235.html

Mithalal, J. (2009). 3D geometry and learning of mathematical reasoning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 6* (pp. 796-805). Lyon: INRP. Recuperado a partir de www.inrp.fr/editions/cerme

Moise, E. (1968). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado*. México D.F.: Compañía Editorial Continental.

Molina, O., Samper, C., Perry, P., Camargo, L., y Echeverry, A. (2010). Estudio del cuadrilátero de Saccheri como pretexto para la construcción de un sistema axiomático Local. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *24*, 117-134.

Moore-Russo, D., y Schroeder, T. L. (2007). Preservice and inservice secondary mathematics teachers' visualization of three-dimensional objects and their relationships. En T. de S. Lamberg y L. R. Wiest (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 389-392). Stateline (Lake Tahoe), NV: PME-NA.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., y Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report*. Boston: TIMSS y PIRLS International Study Center, Lynch School of Education. Recuperado a partir de http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf

Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs «seeing». problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(1), 79-92.

Peirce, C. S. (1988). *La fijación de la creencia*. Recuperado 12 de marzo de 2017, a partir de http://www.unav.es/gep/FixationBelief.html

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., y Molina, Ó. (2008). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En A. Cano, F. Contreras, y E. Olvera (Eds.), *Libro Electrónico del XVII Simposio Iberoaméricano de Enseñanza Matemática* (pp.

1-18). Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo : Una aproximación metodológica alternativa. *Épsilon*, *29*(3), 41-56.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–318). Charlotte:Information Age.

Plomp, T. (2010). Educational research design: An introduction. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 9-35). Enschede, Países Bajos: SLO.

Powell, A. B., Francisco, J. M., y Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 405-435.

Prediger, S., Gravemeijer, K., y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM Mathematics Education*, *47*(6), 877-891.

Prusak, N., Hershkowitz, R., y Schwarz, B. B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 19-40.

Prusak, N., Hershkowitz, R., y Schwarz, B. B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 266-285.

Reid, D. A., y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics educatión. Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.

Rodríguez, F., y Gutiérrez, Á. (2012). Software DeMMaTTouL : una herramienta para la investigación sobre la estructura argumentativa de la demostración. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 457-468). Jaem: SEIEM.

Samper, C., y Molina, Ó. (2103). *Geometría plana un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Sgreccia, N., Amaya, T., y Massa, M. (2012). ¿Qué dicen los docentes, futuros docentes y formadores de docentes sobre su formación en didáctica de la geometría 3d? *Quaderni di Ricerca in Didattica /Mathematics (QRDM)*, *22*, 1-20. Recuperado a partir de http://math.unipa.it/~grim/quaderno22.htm

Simon, M. A., y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 691-719.

Sinclair, N., y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof : the case of dynamic geometry. En M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, K. Jeremy, C. Keitel, y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook in mathematics education* (pp. 571-596). Nueva York: Springer.

Spector, J. M. (2012). Belief formation. En N. Seel (Ed), *Encyclopedia of the sciences of learning* (pp. 36-38). Nueva York: Springer.

Steele, M. D., y Cervello, K. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(2), 159-180.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Universidad de Antioquía.

Stylianides, A. J., y Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(4), 307-332.

Stylianides, A., Bieda, K., y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-353). Rotterdam: Sense Publishers.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., y Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(3),145–166.

Stylianides, A. J., y Stylianides, G. J. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning: the case of proof. En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 99-115). Cham, Suiza: Springer.

Stylianides, G. J., y Stylianides, A. J. (2009). The transition from facilitating to proof empirical arguments. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Stylianides, G. J., y Stylianides, A. J. (2014). The role of instructional engineering in reducing the uncertainties of ambitious teaching. *Cognition and Instruction*, *32*(4), 374-415.

Stylianides, G. J., y Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127.

Sweller, J., Merriënboer, J. J., y Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*, 251-296.

Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-24). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (S). Constructivism in mathematics education. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 96-100). Dordrecht: Springer.

Widder, M., y Gorsky, P. (2013). How students solve problems in spatial geometry while using a software application for visualizing 3D geometric objects. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *32*(1), 89-120.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 297-321.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., y Winicki-Ladman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 215-230). Dordrecht: Springer.

ANEXOS

ANÁLISIS EN EXTENSO DE LOS DATOS

Como se mencionó en el capítulo 4 hicimos un análisis en extenso de los datos, que se encuentra en esto Anexos, y un análisis presentado de manera más sintética que se encuentra en el capítulo 6.

En este análisis presentamos para cada una de las seis tareas la THA siguiendo lo dicho por Simon y Tzur (2004), y que fue planteado en el capítulo 4, la THA consta de: "la meta en el aprendizaje de los estudiantes, la tarea matemática que puede ser usada para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis acerca del aprendizaje de los estudiantes." Expresando las hipótesis en términos de los enfoques.

Y luego de la THA presentamos: la transcripción de las interacciones, en los grupos de trabajo, discusión de toda la clase con la profesora o conversación-entrevista con el investigador y las hojas de trabajo de los estudiantes. Las transcripciones y hojas de trabajo nos proporcionan un cuadro de las TRA (Trayectorias Reales de Aprendizaje) así que constituyen nuestros datos, a los cuales les hicimos el análisis clasificando fragmentos de estos de acuerdo con los enfoques previstos en las THA. Cada interacción y cada hoja de trabajo tienen una columna anexa con cometarios analíticos basados en los enfoques.

Finalizamos el análisis de cada tarea con un cuadro resumen de THA, TRA y análisis, organizado con base en los enfoques. Y un comentario del cambio en el diseño de la tarea producto de la aplicación en ese ciclo.

ANEXO1

TAREA 1

A1. ANÁLISIS DE LA TAREA 1

La tarea uno se aplicó en los ciclos 1, 2 y 3. Tuvo cambios en el enunciado del ciclo 1 al ciclo 2 y para el ciclo 3 se modificó sustancialmente.

A1.1 TAREA 1, CICLO 1

A 1.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje (THA).

Meta de aprendizaje

La tarea uno tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano, pues a partir de ese punto serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Tarea

Enunciado

En un sistema teórico de geometría euclidiana a) ¿Cómo se determina la existencia de un plano? b) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Justifique. ¿Que necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibieron cada uno una hoja de trabajo con el enunciado y la instrucción de pensar individualmente la respuesta, consignarla por escrito y luego interactuar con sus compañeros de grupo para producir una respuesta.

Intervenciones previstas

En este ciclo no hay intervención de la profesora en el trabajo de los grupos, tampoco discusión posterior al trabajo en grupo orientada por la profesora.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Esperamos que en la pregunta a) los estudiantes evoquen los elementos teóricos que conocen para determinar un plano: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y cabría una mención a la definición de rectas paralelas que incluye la coplanariedad de éstas. En la pregunta b) esperamos que los estudiantes contrasten postulados, ya que no existen definiciones de referencia para determinar por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta y espacio y punto. Por tratarse de objetos no definidos de la geometría, deben recurrir al Postulado del espacio, al Postulado puntos-plano y al Postulado de la recta para hablar de lo que diferencia a estos pares de objetos.

Enfoque en la mediación (Em). No hay trabajo de generación de signos con el uso de artefactos específicos para representar la situación, así como tampoco intervención de la profesora en este Ciclo 1 del experimento. Por lo tanto, no se hace seguimiento a este enfoque en este ciclo.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se prevé que se presenten puntos de vista diferentes respecto a cómo “determinar la existencia de un plano” y “cómo establecer la diferencia entre espacio y plano” que den lugar a incertidumbre. Estos puntos de vista diferentes pueden generar discusión produciendo duda entre los integrantes de los grupos de trabajo acerca de la manera en la cual plantear las respuestas a las preguntas formuladas.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor los puntos de vista diferentes debe llevar a la búsqueda y expresión de argumentos en la teoría estudiada en los cursos de geometría. Los estudiantes pueden recurrir a los postulados y teoremas que proporcionan las garantías teóricas para determinar un plano y establecer por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta, espacio y punto. La exposición de estos argumentos teóricos hará evidente para nosotros la necesidad intelectual. La expresión de argumentación productiva, junto con los indicios de satisfacción con el resultado obtenido, nos permitirán determinar si se ha producido la justificación epistemológica.

A 1.1.2 Interacciones analizadas.

Se presenta a continuación el análisis de las interacciones en cada uno de los dos grupos registrados en el Ciclo uno, el grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2).

Tarea 1, ciclo 1, grupo 1. T1C1G1: Transcripción		Análisis
4 Dilza:	[Refiriéndose al enunciado en la parte a)] No sé si determine la existencia de un plano con tres puntos no colineales.	Ec: Evoca el Postulado puntos-plano
5 Alejandro:	Pero es que hay varias formas (…) dos rectas que se intersequen, la intersección de dos rectas (…) existe un único plano; dados tres puntos no colineales, existe un único plano (…) o también, por el postulado de la existencia. Pues, en nuestro sistema teórico.	Ec: Evoca diferentes elementos teóricos para determinar un plano, el Teorema rectas-plano, el Postulado puntos-plano y un postulado no contemplado en la THA como el postulado de la Existencia.
[…]		
11 Antonia:	(…) cuatro puntos no colineales (…) para el plano se necesitarían tres. Se necesitan cuatro puntos cada trío de ellos no colineales.	Ec: Asume que cuatro puntos no colineales son útiles para garantizar la existencia del espacio. Puede ser una mala interpretación del Postulado del espacio o una confusión con el Postulado del plano.
12 Alejandro:	Pero digamos eso, ¿en qué marca la diferencia? Es lo que estoy pensando.	En: Alejandro se plantea que además de postular la existencia del espacio es necesario garantizar elementos de contraste, aunque no los establecen.
13 Antonia:	¿Cómo así?	
14 Alejandro:	Es que ahí dice "cuál es la diferencia". ¿Cuándo se determina un plano y cuándo se determina un espacio?	

En el segundo de los grupos la interacción se produjo como sigue:

Tarea 1, ciclo 1, grupo 2. T1C1G2: Transcripción		Análisis
1 William:	[…] es que eso es lo que asegura la unicidad del plano, cuando los tres puntos no eran colineales, pero está preguntando cómo se determina la existencia de un plano, es decir, ¿Si existirá el plano?	Ec: Menciona el Postulado puntos-plano. Ei: Considera el Postulado puntos-plano como insuficiente para dar respuesta a la pregunta formulada en la parte a)
2 Cristóbal:	Tenemos un postulado que (…)	Ec: Menciona un elemento teórico no contemplado en la THA, el Postulado de existencia que garantiza la existencia de los objetos no definidos que él denomina primitivos.
3 William:	Eso, porqué (…) porqué son objetos primitivos punto, recta y plano. Por el postulado de la existencia, sabemos que existirá el plano. Pero sin tomarlo como un postulado, como algo ya dado.	
4 Brandon:	¿Postulado del plano?	Ec: Brandon menciona el Postulado puntos-plano y William el Postulado de existencia. Ei: Para William el Postulado puntos-plano no es suficiente para garantizar lo solicitado en la pregunta a). Parecen resolver la situación recurriendo al Postulado de Existencia.
5 William:	No, no, no, ese es un postulado que dice que es único el plano, pero por el postulado de la existencia sabemos que existe el plano alfa, por ejemplo.	
6 Brandon:	Punto, recta y plano son términos primitivos.	
7 William:	Exacto.	
[…]		
13 William:	Un punto que no está en el plano. Esa es la diferencia entre el plano y el espacio	Ec: Mencionan el Postulado del espacio como elemento que permite diferenciar el espacio del plano.
14 Brandon:	Un punto que no pertenece al plano (Cristóbal asiente).	
15 William:	Uno se llamaba el Postulado espacio puntos y el otro era el teorema, que cada cuatro puntos no colineales eran… no que, dados cuatro puntos no colineales, tres de ellos eran no coplanares, ese era un teorema. Ahí se tomaba uno como postulado y otro como teorema. El Postulado era que dado un plano existe un punto que no pertenece a ese plano (representa con las manos la situación), ese era el postulado.  Y el teorema que, dados cuatro puntos no colineales, cada terna de ellos determinaba un plano…uno de ellos no estaba en el otro plano (…) la misma: el postulado espacio puntos (…). ¿Cómo se dice que el espacio el diferente al plano? Un punto que no está en el plano.	Ei: Hay aparente consenso en torno a la solución, no se genera entonces duda y asumen que la mención del Postulado del espacio resuelve la pregunta formulada en la parte b).

A 1.1.3 Hojas de trabajo.

A continuación, mostramos y analizamos las hojas de trabajo de los integrantes de estos grupos de trabajo.

G1: Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Alejandro: • En la geometría Euclidiana y con base en el sistema teórico considerado: → Se puede garantizar la existencia de un plano de diversas maneras: 1). por el postulado de la Existencia, se concluye que existen puntos, rectas y planos. 2). A partir de dos rectas también se puede garantizar, si ~~las~~ las dos rectas se intersecan, existe un único plano que las contiene. Si no se intersecan pueden ser paralelas y en efecto serían coplanares, el único caso que se descarta es cuando son alabeadas. Y con tres puntos no colineales también se puede garantizar la existencia de este. • → Diferencia entre plano y un espacio • Primero las garantías en la existencia/determinación de cada uno es diferente, por ejemplo tres puntos no colineales determinan un plano y un espacio 4 puntos no coplanares.	Ec: Alude a varios elementos teóricos para determinar un plano: El Postulado de existencia, el Postulado puntos-plano, el Teorema rectas-plano y la definición de rectas paralelas. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: Hay un esbozo de argumentación acerca de la diferencia entre espacio y plano al enunciar las garantías teóricas para determinar cada uno de los objetos, aunque sin profundizar en los elementos que los diferencian.
Hoja de trabajo de Dilza: • En la geometría euclidiana se han considerado los términos primitivos de puntos, rectas y planos por tanto se ha aceptado su existencia, pero podemos determinar un plano por un par de rectas paralelas, pues la definición me dicen que son coplanares por tanto me determinan un plano. También cuando se intersecan. • La diferencia podría estar en la manera de cómo se determinan el plano y el espacio, pero además algo para aportar es que el espacio contiene infinitos planos.	Ec: Alude a varios elementos teóricos para determinar un plano: El Postulado de existencia, el Teorema rectas-plano y la definición de rectas paralelas. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: Hay un esbozo de argumentación acerca de la diferencia entre espacio y plano al mencionar las garantías teóricas para determinar cada uno de los objetos, aunque sin profundizar en los elementos que los diferencian. Posteriormente alude a un elemento nocional y no teórico como es la contenencia de infinitos planos en el espacio.

Hoja de trabajo de Antonia:

- El Postulado existencia me dice que existen rectas, puntos y planos.
- Aunque varios elementos de la teoría me forman un único plano, por ejemplo dos rectas paralelas, por definición son coplanares, es decir existe un único plano que las contiene, tambien cuando dos rectas se intersecan, existe un único plano que las contiene.
- En el espacio se encuentran 4 puntos no colineales; a cambio en el plano, ó si tengo 3 puntos no colineales, tengo un plano.

Ec: Alude a varios elementos teóricos para determinar un plano: El Postulado de existencia, el Teorema rectas-plano y la definición de rectas paralelas.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: Establece la diferencia entre espacio y plano con base en una consideración errónea del Postulado del espacio mencionando cuatro puntos no colineales, su argumento así expresado queda en términos cuantitativos, el espacio cuatro puntos y el plano tres puntos.

Hoja de trabajo de William:

- Punto, recta y Plano son terminos primitivos por el P. Existencia Plano, garantizamos la Existencia del Plano.
- Un punto que no pertenece al plano.

Ec: Alude al Postulado de existencia y al Postulado del espacio.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo de Brandon:

Punto, recta y plano son términos primitivos.

- Postulado. Existencia del plano.
- Un punto que no pertenece al plano.

Ec: Alude al Postulado de existencia y al Postulado del espacio.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo de Cristóbal:

→ Por el P. Existencia del plano. (Se garantiza que existe un plano)

→ Un punto que no pertenece al plano
P. Espacio – puntos

Ec: Alude al Postulado de existencia y al Postulado del espacio.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

A 1.1.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real del aprendizaje.

A continuación, presentamos la comparación de la THA y la TRA con base en los enfoques definidos en la metodología y el análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los enfoques al comparar las dos trayectorias.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran o mencionaran los elementos para determinar un plano: Postulado puntos-plano., Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y definición de rectas paralelas. Para hacer la diferencia entre espacio y los otros objetos se tenía previsto que evocaran: el Postulado Puntos-plano, el Postulado de la recta, el Postulado del espacio y la característica de ser objetos no definidos el punto, la recta y el plano.	En el G1 mencionan varios de los elementos previstos: Postulado puntos-plano, Teorema rectas-plano, definición de rectas paralelas y aluden al Postulado del espacio. En el G2 mencionan el Postulado puntos-plano y aluden al Postulado del espacio. En ambos grupos mencionan el Postulado de existencia, para argumentar la existencia del plano.	El incluir en el enunciado la palabra existencia en la parte a) sesgó la discusión en una dirección no deseada, probablemente eso explique la aparición del Postulado de existencia como una manera de determinar un plano.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado de distintos puntos de vista en la interacción en grupos respecto a las condiciones que permiten determinar un plano en un caso y en el otro establecer la diferencia entre espacio y plano, espacio y recta y espacio y punto.	En el G1 hay discusión en torno a sí es suficiente con argumentar que los cuatro puntos no deben ser colineales para establecer la diferencia entre espacio y plano. En el G2 no hay discusión al respecto.	No parece ser suficiente el diseño estructurado en esta tarea para generar incertidumbre.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo: La exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre acerca de la cuales son los elementos teóricos que garantizan la existencia de un plano y la diferencia entre espacio y plano, espacio y recta, espacio y punto. Y la argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos	En el G1 se plantea una pregunta que pudo haber generado un desarrollo interesante en términos de necesidad intelectual, al abordar la parte b), cuando Alejandro dice “Pero digamos eso, ¿en qué marca la diferencia?” Sin embargo, ésta no tuvo desarrollo. En el G2 al no haberse evidenciado una presencia decisiva de incertidumbre tampoco hay evidencia de producción de necesidad intelectual.	No parece ser suficiente el diseño estructurado en esta tarea para generar necesidad intelectual y justificación epistemológica.

A 1.1.5 Cambios en el diseño de la tarea.

La situación puede ser más abierta y dar lugar a mayor debate si se omite la palabra existencia del enunciado para que sean consideradas las distintas maneras en las cuales un plano puede ser determinado. Puesto que se identificó en este ciclo que la presencia de la palabra existencia dirigió a la mayoría de los estudiantes a mencionar el Postulado de existencia como única respuesta.

A 1.2 TAREA 1, CICLO 2

A 1.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

La tarea uno tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano, pues a partir de ese punto serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Tarea

Enunciado

En geometría euclidiana a) ¿Cómo se determina un plano? b) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Justifique. ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibieron una hoja de trabajo por grupo. La información que recibieron es que debían discutir la respuesta a las preguntas y consignar la que considerasen como respuesta del grupo en la hoja.

Intervenciones previstas

La profesora podría intervenir con preguntas o cuestionamientos a los grupos de trabajo, así como el investigador en el grupo que se encontraría registrando en vídeo. En la siguiente sesión de clase la profesora orienta una discusión con toda la clase a partir de lo consignado por los grupos en las hojas de trabajo.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Esperamos que en la pregunta a) los estudiantes evoquen los elementos teóricos que conocen para determinar un plano: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y cabría una mención a la definición de rectas paralelas que incluye la coplanariedad de éstas. En la pregunta b) esperamos que los estudiantes evidencien la necesidad de garantizar un punto fuera del plano, es decir que reconozcan la necesidad de formular el Postulado del espacio y de esta manera identifiquen la necesidad de contrastar postulados, ya que no existen definiciones de referencia para determinar por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta y espacio y punto.

Enfoque en la mediación (Em). No hay prevista una acción decisiva de los artefactos. La intervención de la profesora está orientada a promover una discusión sobre las producciones de los estudiantes, planteando cuestionamientos sobre lo realizado para generar duda en ellos contrastando lo que han escrito en sus hojas de trabajo con el conocimiento matemático de referencia.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se prevé que se presenten puntos de vista diferentes respecto a cómo abordar las preguntas y que estos den lugar a una discusión generando duda entre los integrantes de los grupos de trabajo acerca de la manera en la cual presentar las respuestas a las preguntas formuladas. Adicionalmente, se espera que la discusión de toda la clase con la profesora movilice en los estudiantes la incertidumbre expresada como duda o sorpresa ante los cuestionamientos planteados por ella.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor los puntos de vista diferentes debe llevar a la búsqueda de argumentos en la teoría estudiada en los cursos de geometría, recurrir a los postulados y teoremas que proporcionan las garantías teóricas para determinar un plano y establecer por qué son diferentes espacio y plano, espacio y recta, espacio y punto. Esta búsqueda será expresión de necesidad intelectual. Los argumentos planteados procedentes de la teoría de referencia darán evidencia de la argumentación productiva y si estos resultan satisfactorios para los estudiantes se podrá verificar que se ha producido la justificación epistemológica.

A 1.2.2 Interacciones analizadas.

En el desarrollo de esta tarea se registraron dos tipos de interacción. El primero la interacción en dos de los grupos y el segundo la interacción de toda la clase con la profesora.

A continuación, la interacción en el primero de los grupos.

Tarea 1, ciclo 2, grupo 1. T1C2G1: Transcripción		Análisis
1 Carlos:	¿Cómo se determina un plano?	Ec: Mencionan el Postulado puntos-plano.
2 Juan:	Con el postulado plano tres puntos ¿no?	
3 Carlos:	Si [asintiendo].	
[…]		
6 Juan:	Pero entonces usted decía que por el postulado…por el postulado de la existencia …	Ec: Mencionan el Postulado de la existencia y nuevamente el Postulado puntos-plano.
7 Carlos:	El postulado de la existencia me dice que existe ¿Pero usted cómo lo determina?	Ei: Se presentan dos puntos de vista distintos acerca de cómo determinar un plano. El Postulado de la existencia o el Postulado puntos-plano.
8 Juan:	A partir de…después del postulado de la existencia está el postulado que decía… decía ¿qué?	
9 Carlos:	Postulado tres puntos-plano.	
10 Juan:	Lo que pasa es que, si queremos determinar el plano, debemos llegar al postulado tres puntos-plano	
[…]		
13 Carlos:	Pero si se tienen tres puntos colineales, hay infinitos planos (alinea ahora los dedos sobre la mesa). Pero también podemos determinar por el postulado punto-recta-plano.	Ec: Mencionan en la discusión otro elemento teórico que permite determinar un plano, el Teorema recta-punto-plano.
14 Juan:	Pero eso es un teorema. Teorema punto-recta-plano (va escribiendo en la hoja) usted lo determina así.	
	¿Qué es el espacio?	
15 Carlos:	¿Cómo?	Ei: La pregunta genera la primera

16 Juan: Es que acá dice: ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano? Pues decir que hay más de un plano y qué el plano es distinto a éste.

17 Carlos: Bueno, pero ¿usted cómo sabe qué hay distintos planos?

18 Juan: O sea, si yo pongo una recta y por esta recta paso un plano así (pone un lápiz sobre la mesa y con las manos representa el plano que pasa) ya tengo otro plano ahí.

consideración acerca de cómo diferenciar espacio y plano, donde se insinúan dos vías. Juan está centrado en la representación y Carlos parece querer un argumento más teórico.

[…]

25 Carlos: Pero no. Puede ver un plano en el espacio, pero utiliza eso para crear el espacio (hace una circunferencia con la mano, para expresar que el razonamiento expresado por Juan es en círculos).

26 Juan: Es cíclico.

27 Carlos: Porqué a mí lo que se me ocurre, porqué lo que si tenemos es la llaneza del plano.

28 Juan: El plano es llano, pero con el plano ¿qué se saca? (…) pues el mismo postulado dice que existe el espacio.

29 Carlos: No, es que nada le dice que existe el espacio

30 Juan: ¿Cómo garantizamos que el espacio existe?

31 Carlos: El plano es llano y ya lo sabemos por la llaneza del plano y si yo tomo en ese plano una recta y un punto fuera de ese plano y armaría otro plano.

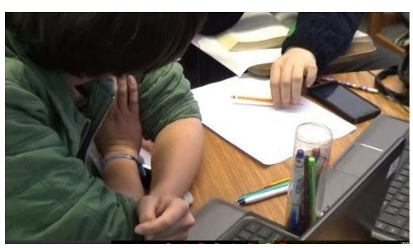
Ec: En la intervención 31 de Carlos se insinúa la formulación del Postulado del espacio.

Ei: La discusión hace explicita la duda acerca de cómo asegurar que existe el espacio.

En: La duda planteada acerca de la existencia del espacio y la respuesta expresada por Carlos ilustran la intención de abordar teóricamente la solución a ésta, garantizando un elemento como un punto fuera del plano.

[…]

36 Juan: (…) Entonces usted me dice que la llaneza tenemos que el plano es llano, una recta está contenida en el plano (pone el lápiz sobre la hoja para representar la situación) ¿Y cómo llegamos a sacar la recta del plano? (levanta el lápiz de la hoja para representar lo que está preguntando).



Ei: El abordar la posibilidad de garantizar la existencia de puntos fuera del plano da lugar a nuevas dudas.

En: La discusión acerca de si el Postulado de existencia garantiza puntos por fuera del plano va ilustrando que no hay un elemento teórico en la información disponible en el momento que lo permita.

37 Carlos: (…) tomamos un punto por fuera y listo.

38 Juan: ¿Qué garantiza el punto por fuera?

39 Carlos: La existencia de puntos.

40 Juan: Pero el punto le puede quedar en el plano, es que ese es el

problema, puede que le caiga en el plano o que no le caiga en el plano.

41 Carlos: Necesitamos un punto por fuera del plano.

42 Juan: Con un punto por fuera del plano ya tiene suficiente porqué usted puede empezar a trazar rectas así (mueve el lápiz con rapidez por encima de la mesa) después barre todo el plano y tiene el espacio ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente al plano?

43 Carlos: Necesitamos un punto fuera del plano, porqué si ese punto no pertenece al plano, ya eso nos garantiza [hace un gesto con la mano para representar un plano por encima].

44 Juan: Necesitamos un punto que no esté, que no pertenezca, es un elemento, al plano (dice esto mientras va escribiendo) ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio es diferente a punto, recta, plano? (lee la tercera parte de la pregunta) Pues con esto ya demostramos que el espacio en un plano y un punto por fuera (…) aquí en este caso estaríamos diciendo que el espacio es un punto por fuera y un plano. ¿Cómo garantizamos que es diferente a una recta?

45 Carlos: Tenemos el punto y la recta ¿cómo sabemos que son diferentes el punto y la recta?

46 Juan: Porque la recta tiene infinitos puntos.

47 Carlos: Cierto, más puntos, eso. Ahora la recta y el plano.

Ei: Expresan dos puntos de vista distintos nuevamente acerca de cómo diferenciar plano y espacio, pues Juan vuelve a los aspectos figurales y de representación y Carlos trata de hacerle ver que no es suficiente con esto.

48 Juan: Porque dijimos que el plano tiene más puntos que una recta. Vamos a decir que el espacio tiene más puntos que el plano. ¿Cómo mostramos que tiene más puntos que el plano? (lee la pregunta y empieza a escribir). Necesitamos mostrar que el espacio tiene infinitos, pero entonces los infinitos puntos están contenidos en infinitos planos.

49 Carlos: Sí, pero no lo necesitamos ahorita. Necesitamos saber que el espacio es distinto, qué es distinto a un plano.

50 Juan: Pues con esto estaríamos suponiendo que el espacio es solamente un punto y un plano. ¿Y cómo hacemos para que sea infinitos? Pues hacemos una recta y un punto y empezamos a barrer [Hace con el lápiz la representación del movimiento pendular].

51 Carlos: Dos conjuntos son iguales si sus elementos son los mismos. Si tenemos un único elemento que no pertenezca a uno…

52 Juan: Ya son distintos. (Lee la pregunta nuevamente) Pues que el espacio tiene infinitos puntos ¿no?

En: Carlos presenta un argumento teórico de las matemáticas para garantizar la diferencia entre espacio y plano, esto los conduce a la conclusión que requieren un punto por fuera del plano para diferenciar espacio y plano.

53 Carlos:	No, porqué el plano también.
54 Juan:	Pero es que estos puntos están contenidos y hay uno acá [pone el dedo representando el punto que está por fuera del plano].
	
55 Carlos:	Qué no está contenido en el plano [toma la hoja y escribe la respuesta a esta pregunta].

La interacción en el segundo de los grupos se produjo como sigue.

Tarea 1, ciclo 2, grupo 1. T1C2G2: Transcripción		Análisis
1 Jair:	¿Cómo podemos asegurar que el espacio es diferente al plano? Pues si un punto que no sea…que no pertenezca…tres puntos no colineales ¿no es suficiente sólo que no sean no colineales?	Ec: Plantean la necesidad de garantizar un punto que no pertenezca al plano. Ei: No hay una discusión de puntos de vista distintos para llegar a la conclusión que requieren un punto por fuera del plano.
2 Sergio:	(inaudible)	
3 Jair:	Pues si ¿no? Un punto que no pertenezca al plano (Lee lo que ha escrito Jeison) Tres puntos no colineales determinan la existencia de un plano. Ah pues sería puntos no coplanares.	
4 John:	Ya tenemos la existencia de un plano.	
5 Jair:	[Ha leído la segunda pregunta del enunciado]. Ahí es, lo que dice Sergio es un punto que no sea coplanar ¿cierto?	
6 Sergio:	[inaudible].	
7 Jair:	Por eso, no es coplanar.	
8 John:	¿Cuál el b?	
[…]		
24 John:	¿Cómo diferenciamos un punto de una recta?	Ei: Hay puntos de vista distintos acerca de cómo garantizar la diferencia. Para Jair basta con decir que son infinitos puntos los de la recta, John se remite al Postulado de la recta y al Postulado puntos-plano.
25 Jair:	Porque la recta tiene infinitos puntos.	
26 John:	Para una recta son dos puntos, para un plano son tres, para el espacio son cuatro ¿Qué decimos?	
27 Sergio:	[Inaudible]	
28 Jair:	[Lee lo que ha escrito Jeison] Porque tienen que ser es no coplanares, si son no colineales, yo puedo tener cuatro puntos no colineales y están en el mismo plano, yo puedo hablar de la colinealidad de cuatro puntos y no solamente tres.	En: La consideración de la diferencia entre recta y punto, recta y plano y espacio y plano los lleva a plantear un argumento consistente para cada una de las diferencias que deriva en la necesidad de garantizar un punto que no pertenezca al plano.
29 John:	Entonces, que uno de esos sea no coplanar	
30 Jair:	Sergio ¿Por qué el espacio es diferente a la recta? Porque	

la recta tiene infinitos puntos, pero son colineales [lo que registraron en la hoja, no es esta argumentación].

En la siguiente clase a partir de las producciones de los estudiantes la profesora desarrolló la siguiente discusión con toda la clase.

Tarea 1, ciclo 2, profesora. T1C1P: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Bueno, la vez pasada la pregunta que les hicimos es ¿Hay alguna diferencia entre espacio, plano, recta y punto? Algunos de ustedes mencionaron, porque la primera pregunta decía ¿cómo se determina un plano? Y algunos de ustedes dieron las siguientes respuestas [proyecta en la pantalla las respuestas de los estudiantes clasificados por ella]. Ésta era la primera pregunta y me dijeron algunos: [Leyendo] "El plano existe por el postulado de la existencia", otros me dijeron por tres puntos no colineales y otros me dijeron una recta y un punto que no está en ella. El postulado de la existencia ¿Qué es lo que dice?	Em: La profesora hace el cuestionamiento acerca del funcionamiento del Postulado de existencia como garantía teórica para determinar un plano.
2 Estudiantes:	[En coro] existen planos, puntos y rectas	
3 Profesora:	Qué existen planos, puntos y rectas. No me dice cómo determinar un plano, me dice que si yo quiero determinar un plano no estoy perdiendo mi tiempo porque existe, pero determinarlo es encontrar al plano ¿cómo lo encuentro? Sé que existe, pero si no sé cómo encontrarlo, de nada me sirve ¿de acuerdo? Eso es lo que quiere decir determinar. Sin embargo, me sorprende mucho que no hayan incluido otra ahí en esa lista, incluyeron la de tres puntos no colineales ¿Esto me lo asegura quién?	
4 Estudiantes:	[en coro] Postulado puntos-plano.	
[…]		
9 Profesora:	El semestre pasado les dijeron y en elementos también les dijimos que los elementos primitivos de la geometría euclidiana son: punto, recta y plano. Quiere decir que espacio se define, voy a usar una letra rara para nombrarlo, a mí me gusta nombrar a todo el mundo, el espacio es el conjunto de todos los puntos. Es una definición, entonces, claro, cada vez que doy una definición ¿Qué nos preguntamos? ¿Existe? ¿Existe el espacio? Esa es la definición ¿Puedo asegurar que existe el espacio?	Em: La profesora hace a reflexión acerca de que disponer de una definición del espacio no garantiza la existencia de este.
10 Juan:	¿Debemos asegurar que no existe uno solo?	
11 Profesora:	¿Qué? ¿Qué no existe uno solo? ¿Qué quiere decir demostrar que existe el espacio?	
12 John:	Demostrar que existen todos los puntos.	
13 Profesora:	Noo, que no es un conjunto vacío.	
14 Paola:	Al menos hay un punto.	

15 Profesora:	Al menos alguien está ahí. ¿Podemos asegurar que hay alguien hay?	
16 Estudiantes:	Sii.	
[…]		
23 Profesora:	Pero la de abajo dice, necesito un plano y un punto que no esté en el plano. ¿Lo puedo asegurar? ¿Existirá un punto que no esté en el plano? ¿Con el sistema teórico que tenemos hasta ahora? No. Todo lo hemos hecho en el plano, luego si yo quiero que esto se dé, me va a tocar introducir un postulado, un plano y un punto que no está en el plano. Vamos a seguir, entonces digamos vamos a tener el postulado del espacio, el espacio va a ser distinto a un plano si logro encontrar un punto que no está en ese plano, bien. Entonces aquí ¿Por qué el espacio es diferente a un punto una recta y un plano? [Leyendo] “Lo que diferencia al espacio de los demás, es la cantidad de puntos con que se determina cada uno” ¿Para determinar un punto cuántos puntos necesito? Uno ¿Para determinar una recta? Dos ¿Para determinar un plano? Tres puntos no colineales, entonces dicen que el espacio es distinto, mejor dicho, por qué necesito cuatro puntos, pero esa no es una forma de asegurar diferencia, la determinación. [Leyendo] “El espacio es la unión del punto P que no pertenece al plano y del plano, el plano contiene rectas y puntos, la recta contiene puntos”. O sea, me están diciendo, el espacio contiene punto y plano, el plano sólo contiene rectas y la recta contiene puntos, luego son diferentes. Pero no, porque el espacio es el conjunto de todos los puntos, entonces en el fondo todos son conjuntos de puntos. O sea, no hay diferencia ¿sí? ¿Es que no va a haber rectas en el espacio? ¿Es que no va a haber planos en el espacio? Esperamos que si ¿no? Entonces esa no puede ser la diferencia. [Leyendo] “Que los puntos rectas y planos hacen parte del espacio”. Pero eso no es lo que los hace distintos, objetos distintos. [Leyendo] ¿Por qué el espacio es diferente a una recta? “Porque el espacio tiene puntos no colineales, mientras que la recta es un conjunto de puntos colineales”. Eso si es una propiedad geométrica que diferencia. [Leyendo] ¿Por qué el espacio es diferente a un plano? “El espacio es un conjunto infinito de planos [hace gesto de duda] y el plano un conjunto infinito de puntos”. El espacio también es un conjunto infinito de puntos. Entonces como se darán cuenta, tienen unas nociones del espacio, así como tenían unas nociones de recta y de plano, pero tenemos que empezar a estudiarlo para ver cuáles de esas nociones son una realidad en el sistema teórico y cuales son nociones que están	Ei: Al plantear puntos de vista diferentes acerca de la respuesta la profesora presenta una “discusión” para considerar las opciones que responden a la pregunta formulada. Em: La profesora parte de las producciones de los estudiantes y al formular un cuestionamiento a cada una de éstas está introduciendo los que serán nuevos elementos del sistema teórico de la geometría a partir de este momento: la Definición de espacio y el Postulado del espacio. Ec: Plantea la Definición de Espacio y el Postulado del espacio como nuevos elementos teóricos a introducir en el sistema de referencia en el curso.

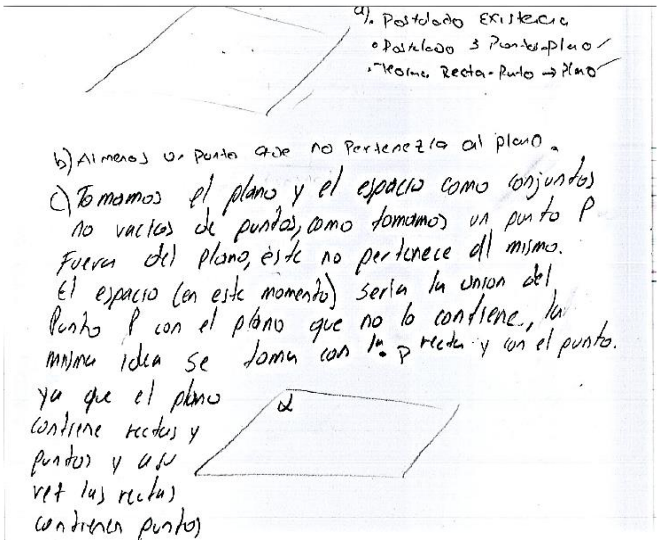
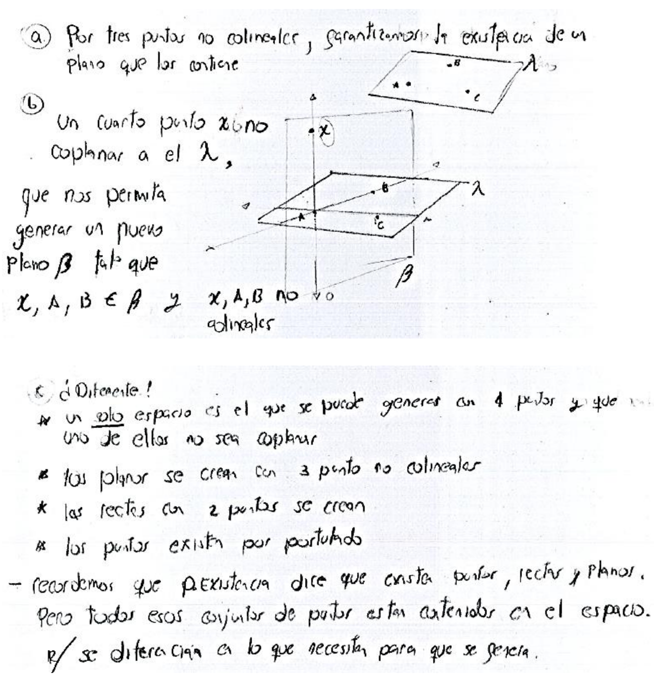
equivocadas. Entonces hasta ahora, tenemos el postulado, necesitamos, así como cuando pasamos de recta a plano, no sé si se acuerdan, pero pasar de recta a plano, exigía un punto P que no estuviera en la recta, porque ahí podía yo decir hay un plano, porque es distinto a una recta porque hay un punto que no está, luego hay alguien más por ahí. Aquí lo mismo, si quiero el espacio distinto a un plano, entonces necesito postulado del espacio (mientras escribe esto) Existe un punto que no pertenece a un plano. Pero ¿A qué plano? ¿A cualquier plano? ¿Dado cualquier plano hay un punto? ¿Hay un plano específico? ¿Y hay un punto que no pertenece a ese plano específico? No entiendo. No entiendo esa afirmación, porque no sé si me están hablando de un plano dado específico y es a ese plano dado especifico que podemos asegurar que hay un punto que no está. O si me están diciendo, mire es qué si usted me entrega un conjunto de planos, para cada uno de ellos voy a poder encontrar un punto que no está ahí, no es claro como se dice eso ¿Cómo más lo puedo decir? Ya sabemos que lo necesito ¿Pero ¿cómo más lo puedo decir? ¿No es claro aquí que este punto sea a esta recta? ¿A una recta dada?

¿O dada cualquier recta un punto que no está en ella? No es claro ¿Cómo arreglamos la situación aquí? [señala el tablero] Hablamos de tres puntos no colineales, dijimos: Si hay tres puntos no colineales, entonces hay un plano, y eso hace que sea diferente a una recta, el plano no es una recta porque el plano tiene, dijimos perdón, contiene tres puntos no colineales ¿cierto? Tenemos dos postulados, uno que dice: El plano contiene tres puntos no colineales, ese es importantísimo para que yo pueda decir: El plano y la recta no son la misma figura geométrica. Entonces aquí quiero algo parecido, quiero poder estar segura de lo que estamos diciendo ahí [señala el postulado del espacio que ha escrito].

24 Estudiantes: Puntos no coplanares.

A 1.2.3 Hojas de trabajo.

A continuación, mostramos y analizamos las hojas de trabajo de los integrantes de estos grupos de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Carlos, Juan y Jimmy  a). Postulado Existencia • Postulado 3 Puntos-plano • Teorema Recta-Punto → Plano b) Almenos un punto que no pertenezca al plano. c) Tomamos el plano y el espacio como conjuntos no vacios de puntos, como tomamos un punto P fuera del plano, éste no pertenece al mismo. El espacio (en este momento) sería la union del punto P con el plano que no lo contiene, la misma idea se toma con la recta y con el punto. ya que el plano contiene rectas y puntos y a su vez las rectas contienen puntos α	Ec: Plantean explícitamente el Postulado de existencia, el Postulado puntos-plano y el Teorema recta-punto-plano. Implícitamente plantean el Postulado del espacio. Em: No hay evidencia de este enfoque. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: Plantean la necesidad de un nuevo elemento teórico como es un punto fuera del plano y tácitamente una definición provisional del espacio como la unión del plano y un punto que no pertenece a éste.
Hoja de trabajo de Jair, John y Sergio  (a) Por tres puntos no colineales, garantizamos la existencia de un plano que los contiene (b) Un cuarto punto x no coplanar a el λ, que nos permita generar un nuevo plano β tal que x, A, B ∈ β y x, A, B no colineales λ β (c) ¡Diferente! * un solo espacio es el que se puede generar con 4 puntos y que uno de ellos no sea coplanar * los planos se crean con 3 punto no colineales * las rectas con 2 puntos se crean * los puntos existen por postulado – recordemos que P. existencia dice que existen puntos, rectas y planos. Pero todos esos conjuntos de puntos estan contenidos en el espacio. R/ se diferencian en lo que necesitan para que se genera.	Ec: Plantean explícitamente el Postulado puntos-plano, el Postulado de existencia e implícitamente el Postulado del espacio. Em: No hay evidencia de este enfoque. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: Plantean un camino para hacer la diferencia entre cada para de objetos (punto-recta, recta-plano, plano-espacio) con base en los elementos teóricos que garantizan la determinación de cada uno de los objetos.

A 1.2.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

A continuación, presentamos la comparación de la THA y la TRA con base en los enfoques definidos en la metodología y el análisis de los resultados obtenidos en cada uno de los enfoques al comparar las dos trayectorias.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que evocaran en la discusión los siguientes elementos teóricos: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano, Definición de rectas paralelas y que reconociesen la necesidad de incluir en el sistema teórico de referencia el Postulado del espacio.	En los dos grupos de trabajo mencionaron el Postulado puntos-plano y reconocieron la necesidad de un punto fuera del plano. En el G1 mencionaron el Teorema recta-punto-plano y el Postulado de existencia que no había sido contemplado en la THA.	Así no aparezcan todos los elementos teóricos previstos en las respuestas a la primera pregunta, en rigor las respuestas son correctas. Si la intención nuestra es que aparezca un amplio espectro de respuestas, la pregunta debe formularse de otra manera pues preguntamos cómo determinar un plano, no "todas" las maneras que conozca para determinarlo. Es destacable que emerja la necesidad del Postulado del espacio en ambos grupos.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
La profesora cuestiona lo planteado por los estudiantes a partir de sus producciones escritas contrastando éstas con el conocimiento matemático de referencia.	La profesora realizó lo que se tenía previsto en la THA haciendo una selección de lo consignado en las hojas de trabajo como solución de los estudiantes.	El análisis del impacto en términos de generación de incertidumbre o necesidad intelectual en los estudiantes a partir de lo hecho por la profesora es difícil de determinar con base en la información recolectada.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
La interacción en los grupos genera duda en los estudiantes respecto a la respuesta a formular en cada una de las preguntas.	En el G1 son visibles los puntos de vista distintos en cada una de las dos preguntas, no tanto así en el G2 dado que allí parece haber consenso desde la primera formulación de opciones de respuesta, aunque esto no es necesariamente un indicio de ausencia de duda.	La segunda pregunta parece generar duda en los estudiantes en el G1 se expresa como debate entre dos integrantes del grupo. En el G2 se, aunque no hay debate complementan los participantes lo dicho por sus compañeros para llegar a una solución.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que se produjera una búsqueda teórica en la cual los argumentos expresados recurrieran al sistema teórico de referencia para garantizar la diferencia entre los objetos mencionados en la parte b) de la pregunta y que los estudiantes expresasen satisfacción con la respuesta establecida.	En los dos grupos expresan argumentos teóricos con base en el sistema de referencia para diferenciar los objetos.	La pregunta si parece conducir a la necesidad de una búsqueda teórica en los estudiantes. Se intuye que la expresión acá de necesidad intelectual y justificación epistemológica está asociada a la manera como se diseñó la tarea.

A 1.2.5 Cambios en el diseño de la tarea.

Se formuló de otra manera la parte a) de la pregunta para que hicieran una evocación de las diferentes maneras que conocen de determinar un plano. Se replanteó la tarea para generar la necesidad de incorporar el Postulado del espacio en el sistema teórico, pensando en introducir el uso de Cabri 3D.

A 1.3 TAREA 1, CICLO 3

A 1.3.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

La tarea uno tiene como metas de aprendizaje que los estudiantes establezcan la garantía teórica que permite hablar de la existencia de más de un plano, que en este caso es el Postulado del espacio y que evoquen los diferentes elementos teóricos que permiten determinar un plano, pues a partir de ese punto serán herramienta fundamental para visualizar varios planos en configuraciones geométricas.

Tarea

Enunciados

1. Sean A, B, C y D cuatro puntos. ¿Qué figura sería la unión de segmentos determinados por estos puntos, si ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos?
2. ¿Qué necesitamos para asegurar que el espacio sea diferente a un punto, una recta y un plano?
3. Dados A, B, C y D en el plano base de Cabri 3D. Y los segmentos AB, BC, CD y DA Redefina uno de los puntos para que no pertenezca al plano base.

a) ¿Es la nueva figura determinada un cuadrilátero? Justifique

b) Vamos a denominar a la nueva figura "Cuadrilátero plegado". Redacte una definición para éste.

c) Una vez acordada la definición de cuadrilátero plegado, redefinir un segundo punto fuera del plano base. ¿Es otro objeto geométrico? ¿Es necesaria una definición de cuadrilátero doblemente plegado?

4. En una línea de una demostración de geometría del espacio un estudiante ha escrito una aserción. Escriba todas las posibles garantías que conozca para dicha aserción, y datos correspondientes que posibilitaría usar dicha garantía (Si necesita poner más filas, puede hacerlo):

Aserción	Garantía	Datos
Sea el plano α		

Instrucciones adicionales e Intervenciones previstas

El enunciado 1 es desarrollado por escrito en hojas de trabajo, primero individuales y luego en grupos. En una clase posterior al desarrollo de las hojas de trabajo, al examinar la posibilidad de que los cuatro puntos no sean coplanares, la profesora desarrolla una actividad de clase en la cual ilustra la función *redefinir* de Cabri 3D para que uno de los cuatro puntos representados en un plano, esté fuera de ese plano. A partir de la discusión generada en esa actividad se entrega a los estudiantes una hoja de trabajo individual con el enunciado 2, la cual desarrollan en grupos.

Una vez discutidas las soluciones que aportan los estudiantes al enunciado 2, la profesora introduce la discusión del enunciado 3. Plantea la profesora la pregunta 3 a) a partir de la representación hecha por ella para toda la clase en Cabri 3D, de la situación descrita en la cual se redefine uno de los cuatro puntos por fuera del plano. La parte 3 b) se hace también en discusión con toda la clase, construyendo la definición del "cuadrilátero plegado". La representación descrita en 3 c) la hace la profesora y las preguntas que contiene esta se plantean para ser discutidas con toda la clase.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con el enunciado 1 se quiere indagar si los estudiantes consideran la situación con uno de los cuatro puntos fuera del plano determinado por los otros tres, dado que inician el curso de Geometría del Espacio y las situaciones deben estudiarlas en más de un plano a diferencia de lo que venían haciendo en los cursos previos. Con el enunciado 2 se espera que los estudiantes reconozcan la necesidad de introducir en el sistema teórico el Postulado del espacio, al igual que ocurrió con las tareas de los ciclos 1 y 2. En el enunciado 3 se espera, por un lado, que los estudiantes reconozcan la necesidad del Postulado del espacio para obtener la configuración con uno de los puntos del "cuadrilátero plegado" por fuera del plano. Y, por otro lado, que usen en el contexto de una configuración geométrica especifica distintas maneras de determinar un plano, particularmente en 3 c) cuando deben reconocer que el plano base ha cambiado respecto al inicialmente dado (figuras 6.1 y 6.2). El enunciado 4 reformula la que era la primera pregunta en la tarea de los ciclos 1 y 2, esperando en este caso que los estudiantes escriban las diferentes maneras de determinar un plano que pueden evocar: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto plano, Teorema rectas-plano y Definición de rectas paralelas.

Enfoque en la mediación (Em). En el desarrollo de los enunciados 2 y 3 Cabri 3D desempeña un papel relevante. El uso que hace la profesora de la herramienta *redefinir* en el desarrollo de esta tarea busca ilustrar la posibilidad de determinar puntos por fuera de un plano dado. En 3 c), al redefinir los dos puntos por fuera del plano base, y este permanece aún representado, se espera generar incertidumbre en los estudiantes acerca de la definición formulada de cuadrilátero plegado pues aparentemente la definición que han construido en 3 b) no se ajusta a lo que están observando (figuras 6.1 y 6.2)

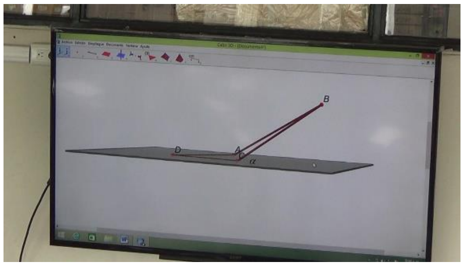


Figura 6.1. Representación con un vértice fuera del plano base.

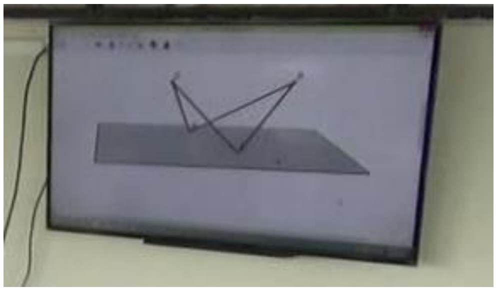


Figura 6.2. Representación con dos vértices fuera del plano base.

El papel de la mediación de la profesora es esencial para la generación de incertidumbre en el momento ya mencionado, pues es ella quien hace la representación en el software e introduce los cuestionamientos relevantes para la discusión respecto a la definición de "cuadrilátero plegado".

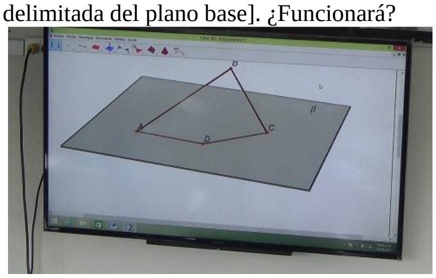
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que en el desarrollo al menos de dos de los enunciados la duda sea manifiesta por parte de los estudiantes: en el enunciado 2 al discutir la diferencia entre espacio y plano y en el enunciado 3 al contrastar la definición de cuadrilátero plegado con sus posibles representaciones. El momento central respecto a la generación de incertidumbre en el diseño de esta tarea es la discusión de 3 c), pues allí se espera generar duda respecto a las condiciones que debe cumplir un objeto geométrico para ser un cuadrilátero plegado. Se espera que se produzca la duda al contrastar las condiciones establecidas para definirlo y la representación que se ofrece al redefinir dos puntos del cuadrilátero. También se espera que en la discusión del enunciado uno, la acción de redefinir un punto fuera del plano y la solicitud de la profesora de estudiar esa situación con el enunciado dos, genere en los estudiantes duda respecto a cómo garantizar teóricamente la diferencia del espacio con los otros objetos.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se espera que la búsqueda teórica se produzca en el momento en el cual la profesora desarrolla la discusión con toda la clase acerca de los enunciados 2 y 3 c), pues allí deben presentar los argumentos teóricos que garanticen un punto fuera del plano en un caso y en el otro los que garantizan que el cuadrilátero con dos vértices fuera del plano base es un cuadrilátero plegado. El planteamiento de estos argumentos proporcionará evidencia acerca de la experimentación de necesidad intelectual por parte de los estudiantes y será expresión de argumentación productiva la cual junto con las manifestaciones de satisfacción con los argumentos exhibidos hará ostensible la justificación epistemológica.

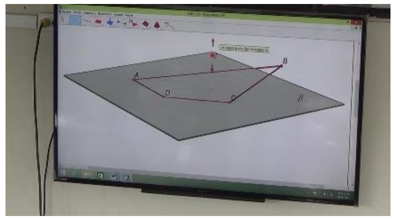
A 1.3.2 Interacciones analizadas.

En el desarrollo de esta tarea las interacciones se produjeron de la siguiente manera: en ninguno de los cuatro enunciados se hizo seguimiento a las interacciones en grupos, en algunos casos porque fueron muy breves y en otros porque no se produjeron. En los cuatro enunciados se registró la interacción de la profesora con toda la clase. Para el enunciado tres, donde se discute el cuadrilátero plegado, el investigador desarrolló una conversación-entrevista con la clase en la modalidad de complementary accounts descrita en la metodología.

En primer lugar, se presenta la interacción de la profesora con la clase para el enunciado uno.

Tarea 1, ciclo 3, profesora. T1C3Pa: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Voy a abrir otro, voy a abrir otro. Entonces, despliegue dos y … esta vez voy a nombrar a mi plano beta (…) y voy a poner mis cuatro puntos. Un punto que llamo A, otro B, otro C y otro D. Y voy a hacer los segmentos, cuando está desplegado es más fácil ¿No?, de B a C, de C a D y de D a A. Y voy a hacer lo que hicieron algunos grupos [se refiere a los grupos que en su respuesta al enunciado uno, pusieron uno de los cuatro puntos fuera del plano determinado por los otros tres]. Voy a usar la redefinición y quiero redefinir a este punto B a un punto en el espacio [arrastra B fuera de la zona delimitada del plano base]. ¿Funcionará?  ¿Lo saqué del plano? Vamos a ver. ¿Entonces cómo hago para chequear? Con el clic derecho muevo mi plano para ver si B quedó por fuera [hace arrastre bola de cristal]. Ahí, ahí.  Parece que está en el plano.	Em: La profesora introduce la herramienta *redefinir* de Cabri 3D para ilustrar la posibilidad de considerar puntos fuera del plano. Hace en principio arrastres del punto fuera de la zona demarcada como el plano y arrastre bola de cristal para examinar si lo que perceptualmente parece fuera del plano, realmente lo esté.
2 Juan:	Debe ser el Shift, subirlo	
3 Profesora:	Ahí no parece que está en el plano  Vamos a arrastrar ese punto a ver. Porque se supone que lo saqué, de pronto no lo saqué suficientemente por fuera [Arrastra nuevamente el punto B]. ¿Está en el plano cierto? Ahí se ve que está en el plano. Pero entonces eso no es lo que yo quería, entonces voy a volver a decir, entonces voy a redefinirlo. Primero que todo ¿Puedo hacer esto o no?, según nuestro sistema teórico ¿Puedo hacer este juego? [Acá algunos	

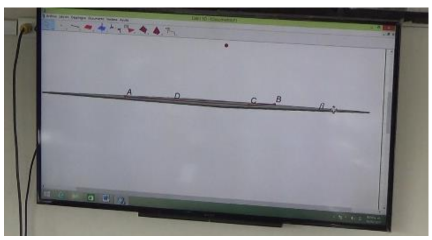
estudiantes hacen gesto de negación con su cabeza] Es decir puedo imaginarme un punto que no está en ese plano. Miren que ahí me dice: ¿Un nuevo punto en el espacio? Miren que ahí sí parece que se estuviera saliendo.



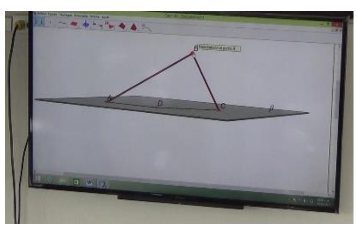
No le he dicho dónde pero bueno, lo voy a poner.

4 Juan: Ahí sí está en el espacio.

5 Profesora: ¿Ahí sí estará en el espacio? Vamos a ver, clic derecho…ese punto si no tiene el problema del punto B.



Ese si se ve flotando por allá arriba [se refiere al nuevo punto que ha definido fuera del plan base]. ¿Pero lo puedo hacer? Dos grupos lo hicieron. ¿Por qué no lo puedo hacer? Cabri me está dejando hacerlo. Le vamos hasta a dar nombre a ese punto. ¿Qué necesitaría yo para aceptar algo así? Entonces si yo quiero aceptar lo que propusieron dos grupos, entonces tengo que sacar uno de estos puntos, lo voy a redefinir a mi punto B que era el que yo quería redefinir, como punto E.



¡Ja se salió!. Se salió y se llevó todo. ¿Qué necesito yo en mi sistema teórico para validar esta cosa?

Em: La profesora usa la herramienta *redefinir* junto con el arrastre bola de cristal para ilustrar que el punto que perceptualmente se ve como fuera del plano realmente lo está.

Ec: La profesora sugiere la necesidad de introducir el Postulado del espacio.

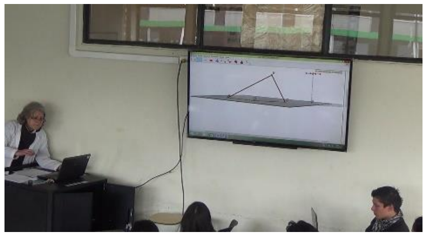
6 Juan: El espacio.

[…]

9 Profesora: Pero el espacio para nosotros, ¿Existe? El espacio hemos hablado de… ¿Nunca les hablaron del espacio? Estamos en geometría del espacio. Bueno lo voy a definir y ustedes me dirán. [Escribe la definición en el tablero]. El espacio es el conjunto de todos los puntos. Y voy a usar esta letra elegante para representar al espacio.

Ec: La profesora introduce la definición de espacio.

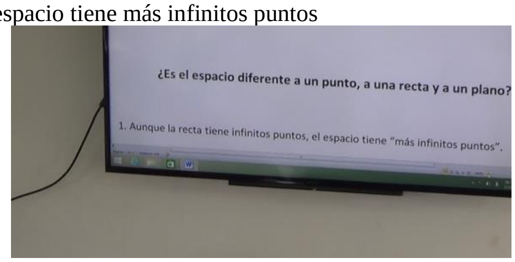
Ei: La profesora busca generar duda en los estudiantes respecto a sí la definición de espacio garantiza la existencia de puntos fuera del plano.

	 Una E bonita de esas manuscritas. Bien, lo definí. ¿Existe? Siempre pregunto lo mismo ¿No? Orlando ¿Por qué?, ¿Por qué dices que sí?	
10 Orlando:	No, no es profe	Ei: La argumentación de Orlando es un indicio de la necesidad de introducir un elemento teórico más. Para él no basta con enunciar la definición y así lo expresa.
11 Profesora:	Otra vez ¿Por qué?	
12 Orlando:	Pero es que ahí no nos está diciendo nada.	
13 Profesora:	¿No estoy diciendo nada?	
14 Orlando:	Porque es que tenemos que el plano también es un conjunto de puntos.	
15 Profesora:	Ah, pero entonces si estoy diciendo algo. El espacio existe para nosotros hace mucho tiempo. Si esta es mi definición de espacio, el espacio existe para nosotros desde que empezamos Geometría plana. Porque es el conjunto de todos los puntos. Pero como dice Orlando, pero usted no nos está introduciendo a nada nuevo. Entonces viene esta gran pregunta, primero es individual. [Se hace entrega de la hoja con el enunciado tres]. Porque el espacio para nosotros siempre ha existido y no lo sabríamos. Entonces aquí viene la gran pregunta en esta hojita. Primero individual. Individual quiere decir no mirar al vecino y dos contestarme lo que nazca, lo que ustedes crean. Yo no estoy calificando esta parte y es muy importante que ustedes me indiquen lo que piensan al respecto.	Ei: Además de la ilustración de la redefinición del punto fuera del plano, la profesora asigna la tarea del enunciado dos, para que los estudiantes al tratar de argumentar la diferencia del espacio con los objetos no definidos del sistema teórico (plano, recta y punto) experimenten la necesidad de introducir el Postulado del espacio.

En segundo lugar, la interacción de la profesora con toda la clase para el enunciado dos.

Tarea 1, ciclo 3, Pb. T1C3Pb: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Quiero recordarles que la metodología de estos cursos es precisamente construir sobre las ideas de ustedes y por eso es que es tan importante manifestarse. A veces se nos va la mano en eso de trabajo en grupos, porque en trabajo en grupos a veces hay una persona que dice esto es así y los demás se quedan calladitos sabiendo que no es así, bien. Entonces este ejercicio fue bastante interesante, desafortunadamente pues… o mejor dicho fue muy bueno, pero yo me demoré mucho porque yo tenía que leer 32 hojas o 31 hojas y tratar de sacar las ideas, ese trabajo fue fuerte para mí, pero bastante interesante. ¿Ya todos tienen computador no? Entonces mi pregunta era… yo definí espacio y mi pregunta era: ¿Es el espacio diferente a un punto, una recta, un plano? Ustedes tenían que responder esta pregunta,	

vamos a analizar las diferentes respuestas que yo encontré. Bueno, esa era la pregunta y una persona contestó: Aunque la recta tiene infinitos puntos, el espacio tiene más infinitos puntos



Es una respuesta muy interesante, primero me está tratando de dar una diferencia. Me está diciendo es diferente a la recta porque el espacio tiene más puntos. Esto es un problema bastante complicado de abordar ahorita en este curso, es un problema que se aborda en teoría de conjuntos, en cuanto a la infinitud de elementos en un conjunto. ¿Hay conjuntos con infinitos elementos?, Si, nosotros tenemos ejemplos de conjuntos con infinitos elementos: Los números naturales, los números naturales es un ejemplo de un conjunto con infinitos elementos. Pero resulta que los números naturales y los números enteros tienen igual cantidad de infinitos puntos. Porque yo puedo hacer una asignación de los números de acá, una asignación uno a uno, sobre números de acá. O sea que los puedo ir contando. En los naturales yo cuento cero, uno, dos y ahí estoy contando, ¿Si? En los enteros yo puedo contar: cero, uno, menos uno, dos, menos dos. Este es el primero, este el segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo. Y si los puedo contar tienen igual cantidad de elementos. Entonces estos dos conjuntos tienen igual cantidad de elementos, a pesar de que se ven más y en cuanto a cantidad de elementos son iguales. O sea, la cardinalidad de estos dos conjuntos es la misma. Y la cardinalidad de la recta no es ni ésta, ni ésta, sino la de los reales. Que si tiene más elementos que estos dos. La cardinalidad de los reales es mayor y la de la recta es la de los reales. Y la del espacio me imagino que también, entonces no es una real diferencia. Pero esto lo van a entender más en teoría de conjuntos donde se preocupan por la cardinalidad. Entonces esto es un buen intento.

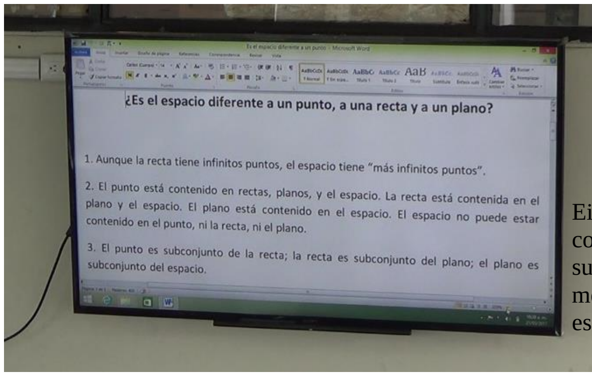
Ei: La profesora presenta un cuestionamiento al argumento de la “cantidad” de puntos del espacio vs la “cantidad” de puntos del plano. Haciendo una analogía con los conjuntos numéricos para generar un cuestionamiento a ese argumento.

Esto es otro intento: El punto está contenido en rectas, planos y el espacio. La recta está contenida en el plano y el espacio.

Eso si no sé hasta ahora o ¿Si sé que la recta está contenida en el espacio?

2 Juan: Sii. Porque como el espacio es el conjunto de todos los puntos

3 Profesora: Por definición de espacio eso es cierto. La definición de espacio decía es el conjunto de todos los puntos luego incluye a la recta. Bueno, el plano está contenido en el espacio [leyendo], el espacio no puede estar contenido ni en el punto, ni en la recta, ni en el plano.



Ei: La profesora cuestiona el argumento de la contenencia ilustrando que aún no se tienen suficientes argumentos para garantizar la mencionada contenencia de planos en el espacio

No sabemos. Porque todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Y el espacio podría ser solamente el plano. Yo lo definí como el conjunto de todos los puntos, pero puede que el conjunto de todos los puntos sea el plano.

Entonces esa no es una razón para decir que son diferentes. Que éste sea subconjunto de este no significa que éste no sea subconjunto del otro. Pueden ser conjuntos iguales y si el espacio llega a ser el plano, entonces este argumento ya no nos funciona. Pero fue interesante también. También hay que ver con conjuntos lo que uso para decir esto no es válido. Y hasta ahora no he entrado en geometría. No es válido porque en conjuntos, un conjunto puede ser subconjunto de otro y ese también ser subconjunto del uno.

Después dice: El punto es subconjunto de la recta, la recta es subconjunto del plano, el plano es subconjunto del espacio. O sea, más o menos me está diciendo lo mismo. Entonces, tampoco es una diferencia.

Me gustó porque es que me dieron argumentos algunos de ustedes, no se limitaron simplemente a decir algo. Sino a explicar lo que estaban pensando y eso me gustó muchísimo.

Dado que infinitos puntos pertenecen a una recta, infinitas rectas están en un plano [leyendo], ¿Eso lo sabemos?

4 Varios: Siii

5 Santiago: Punto-infinitas rectas

6 Profesora: Teorema punto-infinitas rectas coplanares, ¿Sí? En un plano dado un punto existen infinitas rectas que lo contienen. [Continúa leyendo] Lo que se necesitaría asegurar, para que el espacio sea diferente, es que infinitos planos estén contenidos en el espacio. Pero ¿Cuántos planos tenemos nosotros?, hasta ahora ¿Cuántos planos tenemos?

7 Varios: uno

8 Profesora: ¿Cómo sabemos que tenemos un plano?

9 Juan: Postulado de existencia

10 Profesora: Por el postulado de existencia, por lo menos tenemos uno. Pero hasta ahora no podemos decir que existan más planos ¿Sí? Entonces ahí está un poco complicada la cosa. Por lo tanto, se puede concluir que el espacio es el conjunto de todos los planos. Lo cual lo haría distinto a los demás, se supone. Pero eso no es cierto porque yo ya definí espacio como el conjunto de todos los puntos

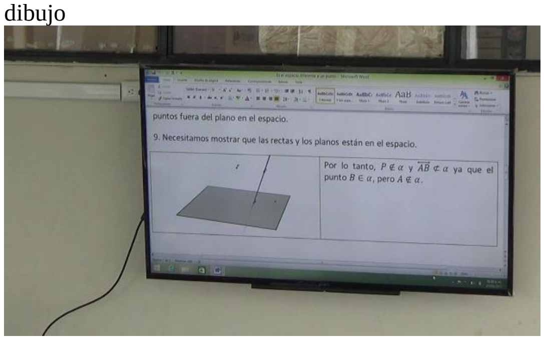
	y si ustedes me dicen “El espacio es el conjunto de todos los planos” entonces yo lo represento así: alfa uno, alfa dos, alfa tres. Pero yo definí el espacio como el conjunto de A sub uno, A sub dos, A sub tres. El conjunto de todos los puntos. Esto dos conjuntos no son iguales. Entonces no me sirve. Sin embargo, surge una cosa: ¿Será que hay infinitos planos? Hemos ido agrandando nuestro universo, comenzamos con un punto después se convirtió en…	
11 Juan:	Rectas.	
12 Profesora:	¿Cómo se convirtió un punto en dos puntos?	
13 Juan:	Ah por el postulado de la existencia. Hay por lo menos una recta y un punto	
14 Profesora:	Hay por lo menos una recta, después mostramos que la recta tenía infinitos puntos. Hay por lo menos un plano, después mostramos que el plano tenía infinitos puntos o sea que nos hemos ido expandiendo en el universo. Pero eso ya contradice mi definición de espacio. Nos dejó una inquietud: ¿Habrá infinitos planos o no? Eso lo tendremos que contestar en algún momento. El espacio es diferente de un plano [lee] porque teniendo tres puntos, encontrar un plano que no los contenga. ¿Qué es lo que dicen? ¿Qué interpretan ustedes ahí?	Ei: La profesora toma la información para plantear una inquietud que no puede resolverse aún, pero que es posible abordar después.
15 Juan:	Ahí no dice que los puntos no sean colineales	
16Profesora:	Encontrar un plano que no los contenga, dados tres puntos	
17 Santiago:	Tres no puntos colineales determinan un único plano	
18 Profesora:	Ahí no dicen nada de la colinealidad	
19 Santiago:	Si son colineales los contienen infinitos planos	
20 Profesora:	Ah ¿Qué dice un postulado que nosotros tenemos? ¿El postulado puntos plano no dice dados tres puntos están en un plano? ¿Y si no son colineales están en un único plano? O sea que esto está mal, porque tres puntos siempre están en un plano, siempre. Según ese postulado. El postulado puntos-plano dice: Dados tres puntos hay un plano que los contiene y si esos tres puntos no son colineales el plano que los contiene es único. Entonces no nos funciona esa diferencia, porque no es correcta. El espacio es la suma de todos los semiplanos determinados por [lee] las infinitas rectas que pasen por un punto.	
21 Juan:	¿Cómo hace la suma de semiplanos?	Em: El estudiante plantea el contrargumento en forma de pregunta.
22 Profesora:	Bueno primera cosa, el uso de la palabra suma está terrible ahí.	
23 Santiago:	Unión.	
24 Profesora:	Debería haber dicho unión ¿Sí? Primera crítica. Entonces el espacio es la suma de todos los semiplanos determinados por [lee] las infinitas rectas que pasen por un punto. Paula ¿Por qué no?	
25 Paula:	No sé.	
26 Varios:	Están en el mismo plano.	
27 Profesora:	Estarían en un mismo plano ¿Por qué Esteban?	
28 Esteban:	Porqué todas esas rectas pueden pertenecer al mismo plano.	Em: El estudiante plantea el contrargumento.
29 Profesora:	Hasta ahora nuestras rectas están todas en un plano.	

	Tenemos infinitas rectas en un plano que contienen a un punto, entonces la unión de todos los semiplanos ¿Acaba siendo quién…?	
30 Varios:	El plano	
31 Profesora:	El plano	
32 Santiago:	Pero sin la recta	
33 Profesora:	¡El plano!	
34 Juan:	Es con la recta	
35 Santiago:	Sin la recta	
36 Varios:	[Hablan al tiempo unos expresando que sin la recta y otros que con la recta]	
37 Profesora:	Noo porque estamos cogiendo las infinitas ¿Sí?, entonces acabamos es con el plano, entonces no logramos salirnos del plano con esta propuesta. Bueno. Asegurándonos que hay puntos y rectas fuera del plano [lee]. Ah estos ya están empezando a decir: tengo que salirme del plano. Cómo asegurarlo es el problema. ¿Cómo sé que hay puntos y rectas fuera del plano? Si logrará eso o si ya me hubiesen dado un postulado que me dice algo así parecido pues estamos bien. Porque ya quiere decir que me toca salirme del plano para buscar otras cosas y si esas otras cosas llegan a existir con esa condición, serían parte del espacio, porque el espacio es el conjunto de tooodos los puntos ¿Sí?, entonces ya no sería el plano porque estoy mirando hacia afuera. Pero el problema está ¿Y cómo lo aseguro? Entonces vamos a ver que sigue. Necesitamos asegurar que el punto la recta y el plano [leyendo]. Me gusta esa forma como hablan porque dicen el punto, el punto, nosotros ya sabemos que existen infinitos puntos, entonces debería haber dicho los puntos. La recta, las rectas. El plano, si, sólo tenemos hasta ahora un plano. Entonces el artículo es muy importante. El punto es como si sólo hubiese uno. Pero no, eso no es cierto. Bueno dice: Necesitamos asegurar que el punto, la recta y el plano están contenidos en el espacio y por ello son diferentes [lee]. Pero nosotros ya sabemos que, sí están, porque yo definí el espacio como el conjunto de todos los puntos. Entonces el punto, la recta y el plano, todos están en el espacio ¿Sí? Si un punto [continúa leyendo] está contenido en el espacio, la recta y el punto también lo están por ser subconjunto del plano. Pues si hasta ahora los puntos y las rectas son subconjuntos del plano ¿Cierto?, porque nosotros sólo hemos trabajado en un plano. Sin embargo [lee nuevamente] puede haber rectas o puntos fuera del plano en el espacio. Pero ¿Cómo hago para asegurar eso? Entonces están como los de arriba ¿No?, si necesitamos… los unos dicen hay que asegurar o sea existe la posibilidad de que no porque exista. Los otros dicen ya, hay, ah no, dicen puede haber, puede haber. Pero ¿Cómo?, esa es la pregunta. Entonces los de abajo vuelven y dicen lo mismo. Necesitamos [leyendo] mostrar que las rectas y los planos están en el espacio. ¿Está diciendo lo mismo?	Em: Hace una transición en la selección de las respuestas, desde las que trabajaron con la idea de contenencia: “El espacio es diferente porque contiene al plano, la recta y el punto” a las respuestas que insinúan la existencia de objetos fuera de un plano.
38 Juan:	No porqué…	
39 Profesora:	Necesitamos mostrar que las rectas y los planos están	

en el espacio.

40 Varios: Por definición.

41 Profesora: Ya lo sabemos por definición. Me imagino que querían decir lo mismo que los anteriores. Que además del plano que yo tengo hay más afuera. Ah y ponen este dibujo



Y dicen: por lo tanto, P no está en alfa y la recta AB no está contenida en alfa, ya que el punto B pertenece a alfa, pero A no pertenece a alfa. ¿Cómo sabemos que existe ese punto? Es que todo comenzó porque a mí se me ocurrió redefinir un punto en Cabri 3D, pero lo interesante de esa redefinición que yo hice es que Cabri 3D lo hizo. Luego Cabri 3D debe saber algo que nosotros todavía no sabemos. Pero nosotros ya sabemos que Cabri sabe más de lo que nosotros sabemos en ese momento. Cabri nos ayuda a descubrir cosas y lo que estamos tratando de hacer es: si Cabri lo permite, qué del sistema geométrico tiene Cabri, conoce Cabri, que nosotros todavía no conocemos. Entonces esa era nuestra preocupación. Y de nuevo hicieron un dibujo, pero todavía no sabemos si eso existe. En nuestro mundo, no existe todavía. Bien.

Considero que si dos puntos determinan una única recta [lee el siguiente] y tres puntos determinan un único plano ¿Eso es cierto?

Em: Enfatiza en las respuestas que están insinuando la existencia de objetos fuera del plano, apoyadas en representaciones de esa idea.

42 Bayron: No. Si no son colineales.

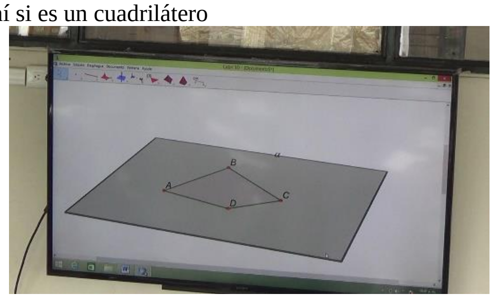
43 Profesora: No colineales, le faltó esa frasecita. Quizás [continúa leyendo] se requieren al menos cuatro puntos para hablar del espacio. Si se tienen al menos cuatro puntos no coplanares, se garantiza de alguna forma la existencia del espacio. La diferencia con el punto, la recta y el plano es que el espacio es la unión de todos esos infinitos conjuntos. Esa no es la diferencia. Pero aquí comenzó y me gustó mucho, porque ese es el recorrido que hemos ido haciendo, hemos ido…comenzamos con un punto, pero el teorema existencia me dice existen las rectas. Bueno si existen las rectas y le pusieron ese nombre diferente a punto ¿Cuál es la diferencia entre punto y recta?, Y ahí fue donde nació la necesidad de que la recta tuviera por lo menos dos puntos. Porque si no, no sería distinto al punto que yo ya sé que existe. Y el postulado me dice: existen las rectas. Entonces yo la tengo que diferenciar. Y tan pronto yo dije: la recta debe tener por lo menos dos puntos, fue que descubrimos que tenía más de dos puntos, infinitos puntos. Pero se necesitaban dos puntos para yo poder hablar de recta, determinan una única

Em: Destaca ahora una respuesta que muestra un camino constructivo teóricamente para hacer la diferencia entre los objetos. La recta se determina por dos puntos, apoyados en un postulado, el plano se determina por tres puntos, apoyados en un postulado. Y de esta manera va introduciendo la necesidad del Postulado del espacio.

	recta. Y entró ese postulado ¿Sí? Y después dijimos: bueno, ¿Y el plano?, También existe ¿Pero ¿qué lo hace distinto a la recta?, Y fue como dicen ahí los tres puntos, pero necesitamos un postulado que me dijera, que dice ¿Qué?	
44 Juan:	Que dados tres puntos no colineales…	
45 Profesora:	Puntos-plano. Esos tres puntos no colineales generaron el plano, del cual descubrimos tenía infinitos puntos. Eso lo demostramos hace poco ¿No? Entonces ahí se ha mostrado como se ha ido ampliando nuestro universo y al irlo ampliando hemos metido postulados. Y con esos postulados hemos demostrado teoremas sobre esos objetos geométricos. Debe ser más de un punto [lee], así el espacio no sería un punto. Debe ser infinitos puntos no colineales, pues si no sería una recta. No puede ser tres puntos no colineales porque estos determinan un plano. Por lo tanto, el espacio debe determinarse por cuatro puntos no coplanares. Entonces ahí se ve la necesidad de tener un punto más y que cumpla una propiedad especial que los cuatro puntos no sean coplanares. Dados cuatro puntos [lee] cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos. Eso, dicen ellos daría lugar al espacio. Cuatro puntos, ¿Por qué dicen cada tres de ellos no colineales?	Ec: En la solución que lee la profesora surge el Postulado del espacio. Ei: La profesora plantea preguntas sobre las condiciones que le han puesto a los tres puntos, para generar debate entre los estudiantes.
46 Juan:	Para garantizar al menos que hay más de un plano, suponiendo que sea externo el punto.	
47 Profesora:	¿Varios planos?	
48 Alfonso:	Porque si son colineales…	
49 Profesora:	Dice: dados cuatro puntos cada tres de ellos no colineales.	
50 Santiago:	Es que si son colineales sería una recta y con el otro punto no colineal entonces serían tres puntos no colineales estaría construyendo un plano.	Ei: Responde a la inquietud de la profesora haciendo los supuestos que implica negar las condiciones que pusieron quienes redactaron la solución que la profesora ha leído.
51 Profesora:	Acabaríamos con un plano. Por eso ponen eso, si son colineales los cuatro puntos no me van a generar algo distinto a lo que ya tenemos, un plano. Entonces dicen cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano. O sea, de los cuatro puntos, quieren, uno de esos cuatro no pertenezca al plano determinado por los otros tres puntos. Ahora si no estamos saliendo, queremos garantizar que hay un punto que no está en el plano que nosotros conocemos ¿Si? Un punto, dicen ellos y todos habían hablado de cuatro puntos, cuatro puntos, pero y él también, estos también, o esta persona. Pero después como que cambia porque dice: tres puntos no colineales y un punto que no pertenezca al plano. Y ahí se acabó, se acabó.	Em: Retoma la respuesta que establece las condiciones para el Postulado del espacio, en contraste con las respuestas previas que han enfocado sus argumentos hacia la contenencia o no han establecido adecuadamente las condiciones para hablar de la existencia del espacio, como la respuesta anterior que hablo de cuatro puntos, pero “no colineales”.
52 Varios:	No	
53 Profesora:	Sigue ¿Dónde estaba? Se necesita [lee] que, dado un plano, existe al menos un punto que no pertenece a él. Entonces las configuraciones de los puntos son las que nos han garantizado unos objetos geométricos ¿Cierto? Y aquí está la propuesta doce y la propuesta trece. La trece, que me dice: dado un plano se necesita por lo	Em: Ha tomado dos respuestas que están estableciendo las condiciones requeridas para el Postulado del espacio, pero enunciadas de manera aparentemente distintas.

	menos un punto que no pertenezca a él. Y la doce dice: dados cuatro puntos, cada tres de ellos no colineales y un punto que no pertenezca al plano que determinan los otros tres. ¿Están diciendo lo mismo o no? Eso es lo que vamos a tratar de determinar. Pero si sale a la luz que de acuerdo con el desarrollo que hemos venido haciendo, dada una recta necesitábamos otro punto no colineal para que naciera el plano y ahora dado el plano necesitamos otro punto no coplanar para que nazca…	
54 Varios:	El espacio	
55 Profesora:	El espacio ya nació, pero para que el espacio sea diferente a lo que ya tenemos. ¿Sí? Para que sea diferente. Entonces: Postulado del espacio, dice. Vamos a coger la trece, que sigue como la misma idea que hemos venido desarrollando. Dado un plano [escribe en el tablero] existe un punto que no pertenece a él. Eso hace que el espacio sea diferente al plano, sí. Que el espacio sea diferente a la recta, sí. Y a un punto.	Em: La profesora establece el enunciado formal del Postulado del espacio.

En tercer lugar, se presenta la interacción de la profesora con la clase en la discusión del enunciado tres, la definición de cuadrilátero plegado.

Tarea 1, ciclo 3, profesora. T1C3Pc: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Bueno. Entonces yo tengo ahí cuatro puntos que podrían dar lugar a un cuadrilátero, entonces voy a construirlo, usando polígono. Entonces que hago yo para que realmente les esté representando un cuadrilátero: clic derecho y le digo color de superficie, ahí si es un cuadrilátero  Y lo que yo les había propuesto era redefinir ¿Cierto?, Lo pueden ir haciendo ustedes si quieren. Entonces dijimos que íbamos a redefinir un punto en el espacio, el punto B en el espacio.  ¿Qué pasó?	Em: La profesora usa la herramienta cuadrilátero combinada con la herramienta *redefinir* en Cabri 3D para ilustrar que la condición de coplanariedad es esencial en la definición de cuadrilátero. Ec: La desaparición de la figura y el haberla construido con la herramienta polígono hace visible la condición de coplanariedad en la definición de cuadrilátero.
2 Juan:	Que no hay cuadrilátero.	
3 Profesora:	¿Y por qué?	

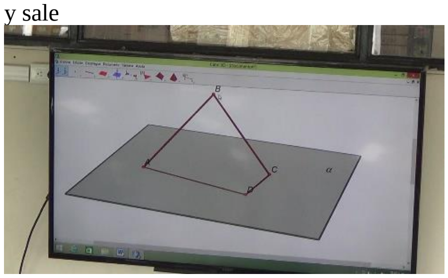
4 Santiago: Tienen que ser coplanares.

5 Jeison: Por la definición de polígono los cuatro puntos deben estar en un plano.

6 Profesora: Deben ser coplanares. Como yo lo estoy sacando del plano me dice: ya no existe polígono. Porque yo usé la herramienta polígono para dibujar. O sea, Cabri se sabe el sistema teórico. Y me está diciendo aquí usted ya perdió algo que usted tenía, porque usted está poniendo una condición que la definición no acepta.

Em: La profesora enfatiza la relación entre la definición y su representación en Cabri 3D con respecto a la condición de coplanariedad. Hace una nueva representación uniendo los puntos con segmentos para que la redefinición le mantenga la figura.

Entonces no puedo hacer lo que yo quiero de esta manera, Aquí no usé polígono, sino que construí mi cuadrilátero con segmentos. Hay dos maneras de hacerlo o la herramienta polígono o segmentos. Y yo lo que usé fue segmentos. Y voy a hacer lo mismo, voy a redefinir. Vamos a ver la diferencia, si existe. Punto B, shift y sale



¿Es un cuadrilátero?

7 Varios: Noo.

8 Juan: Sii.

9 Profesora: ¿Sí?

10 Jeison: Pues según la condición no.

11 Santiago: No porque los cuatro no son coplanares.

12 Profesora: Vamos a voltearlo acá.

¿Es un cuadrilátero?

13 Jeison: Pues en el espacio de pronto puede ser un cuadrilátero, pero en el plano no…

14Profesora: Pero, cuadrilátero, cuadrilátero tiene una definición y la tiene que cumplir. ¿Ahí la está cumpliendo?

15 Varios: No

16 Profesora: No es un cuadrilátero, ahí vemos que no. Pero me gusta esa figura y si me gusta esa figura le vamos a dar un nombre. Lo vamos a llamar cuadrilátero plegado. ¿Está plegado, cierto? Está doblado. ¿Cómo lo definimos? El cuadrilátero plegado o un cuadrilátero plegado es [escribe en el tablero]. Esto me lo estoy inventando yo.

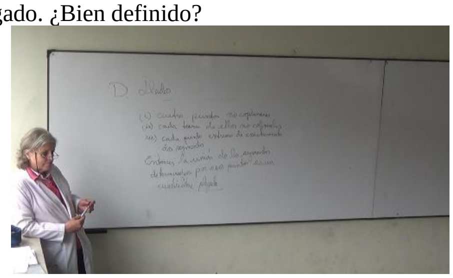
Em: Introduce el objeto nominándolo.

17 Juan: ¿Eso no entra en el sistema teórico?

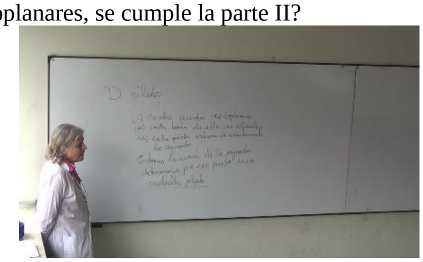
18 Profesora: Si, si yo quiero sí. Yo aquí hago el sistema teórico que yo quiera.

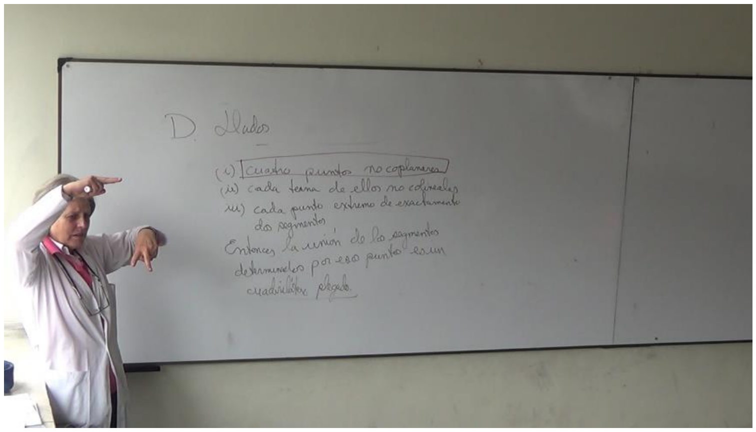
19 Varios: [Risas]

20 Profesora: No lo van a encontrar en un libro, pero nos toca a nosotros definirlo bien definido. ¿Cómo vamos a

	definir esta figurita?	
21 Jeison:	Dados cuatro puntos, tres de ellos no coplanares.	
22 Profesora:	Entonces, vamos a hacer un listado de las propiedades y de ahí sale la definición ¿Cierto? Entonces, cuatro puntos no coplanares [escribe]…	
23 Jeison:	No coplanares.	
24 Bayron:	No, porque tres son coplanares.	
25 Profesora:	…no coplanares, ¿Sólo necesito cuatro puntos no coplanares?	
26 Juan:	Cada terna no colineal.	
27 Profesora:	Cada terna de ellos [escribiendo] no colineales.	
28 Juan:	Cada punto que sea la intersección de dos segmentos.	
29 Profesora:	Cada punto…	
30 Adriana:	Profesora, o sea que si llegamos a redefinir C y lo sacamos del plano…	Ei: Sugiere lo que considera una representación de un no ejemplo del cuadrilátero plegado para cuestionar la definición formulada.
31 Profesora:	Ah ahorita miramos eso, definamos el que tengo ahí.	Em: La profesora ignora deliberadamente la sugerencia de Adriana pues ésta implica la construcción del no ejemplo que se presentará posteriormente como parte del diseño.
32 Adriana:	Pero no estamos definiendo como tal ya…	
33 Profesora:	Esa figura que tengo ahí ¿Si?, esa figura.	
34 Adriana:	Ah.	
35 Profesora:	Cada punto ¿Qué?, extremo…	
36 Juan:	De exactamente…	
37 Profesora:	De exactamente dos segmentos. Entonces, ¿Ya estoy lista?, la unión de los segmentos determinados por esos cuatro puntos. O sea que voy a comenzar así: Dado todas estas cosas, entonces la unión de los segmentos determinados por esos cuatro puntos es un cuadrilátero plegado. ¿Bien definido?  ¿Ya hicieron su representación en el computador del cuadrilátero plegado?, A ver, hagan rápidamente la representación del cuadrilátero plegado a ver si me falta o me sobra, o… de pronto no necesito algo.	Em: Establece las condiciones que definen un cuadrilátero plegado en conjunto con la clase.
38 Juan:	No ¡Le falta!	
39 Profesora:	Bueno ¿De acuerdo con la definición?	
40 Juan:	Noo.	
41 Profesora:	¿Qué pasa? ¿Qué falta?	
42 Juan:	Queremos que exactamente un punto que no sea coplanar.	Ei: Surge el primer elemento de duda respecto a la definición que han establecido.
43 Profesora:	Exactamente un punto que no sea coplanar. Pero ¿Eso no es lo que estábamos mirando antes? Y que precisamente cuando se tenía esto resultaba que un punto no era coplanar con los otros.	
44 Varios:	Si.	
45 Profesora:	Si.	
46 Juan:	¿Pero qué pasa si C no es coplanar, también?	
47 Profesora:	Ah bueno, entonces…	
48 Adriana:	Es que lo que pasa es que…	
49 Profesora:	¿Qué pasa si por ejemplo a D lo redefino? Bueno [trabajando en el computador] qué pasa si a D, si a	Ei: La profesora hace uso nuevamente de la herramienta *redefinir* de Cabri 3D para generar

	D…Si a D, lo redefino. ¡Ah que bonito esto! 	duda en los estudiantes con una nueva representación que ellos deben contrastar con la definición que establecieron de cuadrilátero plegado.
50 Santiago:	Pero hay otro plano que contiene a esos tres puntos.	
51 Jeison:	Hay otro plano que contenga a ABC.	
52 Varios:	A A y C.	
53Profesora:	¿Tengo otra figura que de pronto queremos darle otro nombre?, ¿Doblemente plegado o algo así?	Ei: Refuerza la duda planteando una situación hipotética mediante una pregunta.
54 Jeison:	Pero es que esa es la misma.	
55 Profesora:	¿Es la misma?,¿Por qué?	
56 Jeison:	Si hacemos un plano que contenga a los puntos B, A y C vamos a obtener lo mismo.	En: Plantea un argumento teórico que respalda el punto de vista de que la definición es correcta y abarca el ejemplo presentado por la profesora.
57 Profesora:	B, A y C. Un plano que contenga a los puntos B [lo está haciendo en el computador], A y C. Vamos a tener la misma figura dicen por ahí. ¿Sí?	
58 Varios:	Pero es que no cogió a B.	
59 Profesora:	No cogí a B. ¿Ah no cogí a B en el plano? (…) entonces ahí está. Me dicen que coja el plano que contiene a D, a A y a C. Y me dicen que dizque se ve igual que mi cuadrilátero plegado.  ¿Se ve igual a mi cuadrilátero plegado?	Em: Proporciona en Cabri 3D una representación de los que ha argumentado Jeison.
60 Varios:	Siii.	
61 Profesora:	¿Yudy? ¿Si?, O sea que no tendría un cuadrilátero distinto al que estoy tratando de definir. Entonces, Juan: ¿Es suficiente esto para definirlo o no?	Ei: Convoca a argumentar a quien ha sostenido el punto de vista que la definición no abarcaba el ejemplo en discusión.
62 Yudy:	No.	
63 Profesora:	No ¿Por qué?	
64 Yudy:	No, porque si pensáramos, ah, no, no.	Ei: Hay una expresión de duda
65 Profesora:	No, no te entendí. ¿Qué me ibas a decir?,¿Y por qué cambiaste de opinión? Dime, dime Yudy.	
66 Yudy:	Es que te iba a decir que…qué pasaba si pasábamos un segmento de aquí a aquí [señala en su computador] pero entonces acá ya había algunos puntos.	
67 Profesora:	Ah sí, de un punto del segmento BC a un punto del segmento BA, o algo así por el estilo. Pero es que estoy hablando de estos cuatro puntos. ¿De acuerdo?, ¿Está bien definido mi cuadrilátero?, ¿Si? Antonio.	
68 Antonio:	¿Si se tiene que los cuatro puntos no son coplanares, no se cumpliría que cada tres son no colineales?	Ei: Hay una expresión de controversia no prevista, por parte de Antonio, a la manera en la

69 Profesora:	Ah eso quería preguntarles, sí. ¿Sí tengo cuatro puntos no coplanares, se cumple la parte II? 	cual se establecen las condiciones teóricamente.
70 Varios:	[Expresan opiniones encontradas].	
71 Profesora:	Haber, haber. Uno por uno. Bayron ¿Tú dices que qué?	
72 Bayron:	Si tomamos A y C no sería coplanar con D [señala la imagen en la pantalla del televisor].	
73 Antonio	Si, claro. Mire el plano D AC no tiene ese punto.	
74 Profesora:	Entonces la pregunta del millón es: ¿Basta decir cuatro puntos no coplanares porque eso significa que cada tres ellos son: no colineales? Santiago.	Em: Le plantea como una duda a la clase el punto de vista expresado por Antonio para controvertir la manera de establecer las condiciones teóricas.
75 Santiago:	Si se suponía que hay tres colineales estarían determinando una recta y con el otro punto, estarían contenidos en un plano.	
76 Profesora:	Y los puntos serían coplanares. ¿Laura?	
77 Laura:	No, pero es que me arrepentí. Si hubiera tres planos paralelos y existieran tres puntos de tal forma que se formara una recta…	
78 Profesora:	Si es que existen los planos paralelos, porque yo no sé. Pero bueno, di, di.	
79 Laura:	Podrían determinar una única recta y por tanto ser colineales, pero no pertenecer al mismo plano.	
80 Antonio:	Pero hay un plano que los contiene.	
81 Laura:	Ah, pero hay un plano que los contiene.	
82 Profesora:	Siii, es que no es…exacto. La gran diferencia está en ¿Hay un plano que los contiene, o no? Pueda que los planos que ustedes estén mirando ahí, no. Pero de pronto yo puedo generar un plano que si los va a contener. Entonces lo que dice Santiago es: si tres de ellos son colineales, ellos determinan una recta. Si ellos determinan una recta y el cuarto punto no está ahí, acabarían siendo los cuatro puntos: coplanares. Natalia ¿Si suena como bien?, Será que basta decir no coplanares y ya quedó. Lo cual quiere decir que nuestra proposición dos se…la que decía cuatro puntos no coplanares…algo así decía. Basta decir cuatro puntos no coplanares. Existen cuatro puntos no coplanares. Ahí nos da la situación que dado un plano existe un punto que no está en él.	
83 Juan:	No, porque cómo se garantiza el otro punto.	Ei: Hay expresión de duda por parte de Juan pues no está de acuerdo con el punto de vista planteado.
84 Profesora:	Porque son no coplanares.	
85 Varios:	[no se entiende, son opiniones encontradas sobre esto].	
86 Juan:	Pero si hay dos colineales y otros dos afuera.	
87 Profesora:	Siempre hay dos colineales.	
88 Juan:	Y los otros dos en otro plano.	
89 Profesora:	Y los dos en otro plano. ¿Si hay dos en este plano y dos aquí en este plano?	Em: Hace una modelo con sus manos de la situación para animar a los estudiantes a participar en la discusión propuesta por Juan.



90 Bayron: Siempre hay un plano que contiene a tres de esos.

91 Profesora: Siempre hay un plano que contiene tres de esos y entonces el otro quedaría fuera. A menos que estuviera en esta recta que determinan estos dos y ahí serian coplanares. Si o sea tengo dos aquí y estos dos aquí. Entonces hay un plano que contiene a tres de ellos y a este no. Lo mejor o lo peor sería que estos dos que están aquí, estos tres fueran colineales. Entonces habría un plano que los contiene a todos. Entonces parece que sí.
Ahora hay otra cosa, aquí pusimos una condición muy importante de los segmentos y de los puntos. ¿No me tocaba decir como en el cuadrilátero que los puntos de intersección fueran solamente los extremos? En la definición de cuadrilátero teníamos esa condición ¿Cierto? ¿Necesito también decir que sólo se intersecan en los extremos?

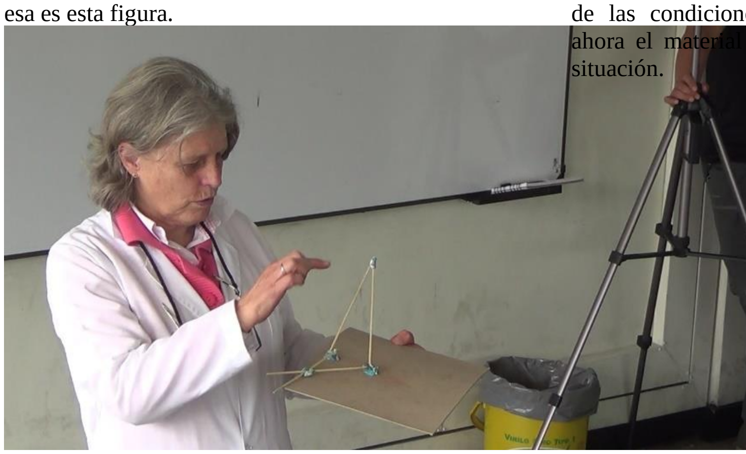
Ei: Una vez resuelta aparentemente la controversia respecto a la definición de cuadrilátero plegado y la representación redefiniendo dos puntos la profesora introduce otro elemento de duda para invitar a la discusión y reflexión. En este caso respecto a otra condición en la definición: la intersección de los segmentos.

92 Varios: [Opinan al tiempo, no se entiende].

93 Antonio: Yo creo que no.

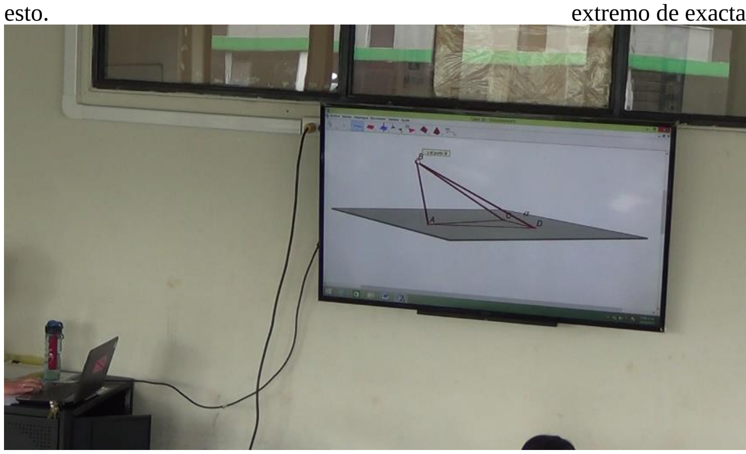
94 Profesora ¿Lo hacemos con este material? Ah ya lo tienes (…) esa es esta figura.

Em: La profesora plantea la discusión de otra de las condiciones de la definición, usando ahora el material concreto para representar la situación.



Y mi pregunta era qué, sí tengo los cuatro segmentos, tengo que añadir la condición que ningún par de puntos se intersecan en ningún punto distinto a un extremo ¿O no?

95 Santiago: Es que no es posible que se intersequen porque si no

	estarían en un mismo plano que va así, con el que va así [señala la pantalla del televisor].	
96 Jeison:	Ah son rectas distintas, si dos rectas se intersecan están en un mismo plano, no interesa que se intersequen o sea nunca se van a intersecar digo.	
97 Profesora:	Nunca se van a intersecar dicen ustedes porque, si se intersecaran un par de segmentos por ejemplo el BC y el AD, en un punto distinto a… ¿Entonces que pasaría?	
98 Jeison:	Serían coplanares.	
99 Profesora:	Serían coplanares los cuatro puntos. ¿Y se intersecaran BC y…? ¿Cuál otro puede ser?, Nada más toca con AD ¿No? O sea que parece que esa condición no la necesitamos para mi definición, va a tocar seguirlo pensando. ¿Y qué pasa si quito la de cada punto extremo de exactamente dos segmentos? O sea, si hago esto.  Si hablo de todos los posibles segmentos. ¿Eso es un cuadrilátero plegado? Si quito esta condición [señala al tablero] deja de ser cuadrilátero plegado, se convierte en… se convierte en pirámide. Entonces mientras recogemos los computadores tratemos de definir pirámide.	Ei: Una vez resuelta aparentemente la duda acerca de la intersección de los segmentos en la definición de cuadrilátero plegado, la profesora introduce otro elemento para invitar a la discusión y reflexión. Es alrededor de otra condición en la definición: que cada punto sea extremo de exactamente dos segmentos.

En cuarto lugar, la interacción del investigador con toda la clase.

Tarea 1, ciclo 3, investigador. T1C3I: Transcripción		Análisis
1 Investigador:	Yo estoy interesado en recoger información de lo que sucede acá en el curso, entonces les voy a hacer unas preguntas de los talleres que se han desarrollado. Para hacer las preguntas les voy a mostrar el vídeo de lo que hicimos en clase y me voy a dirigir puntualmente a algunos de ustedes de acuerdo con lo que les voy presentando en el vídeo. Digo estoy interesado en recoger información porque no estoy evaluando sus conocimientos de geometría. Entonces las preguntas van dirigidas es a eso: a recoger información. Esta clase sobre la cuál voy a hacer la primera pregunta, fue sobre el cuadrilátero plegado. [Presenta el fragmento de la clase en la cual la profesora estaba definiendo el cuadrilátero plegado y Adriana interviene para sugerir el sacar otro punto del plano: líneas 30 y 31 de la transcripción anterior]. La	

	pregunta es para Adriana: ¿Por qué formuló esa pregunta o sugerencia a la profe?	
2 Profesora:	¿Estábamos escribiendo la definición de qué?	
3 Varios:	De cuadrilátero plegado.	
4 Investigador:	De cuadrilátero plegado, ahí está la pregunta escrita en el subtítulo y ahí está la representación del cuadrilátero plegado en el tablero, en el televisor.	
		
5 Adriana:	Es que lo que pasa es que … es que yo ahí tenía una duda, de si se sacaba otro punto fuera del plano y entonces ahí fue cuando me dijeron que se determinaba otro plano, pero ese punto iba a estar por fuera del otro plano, entonces seguía siendo un cuadrilátero plegado.	Ei: Reconoce que dudaba de la definición formulada y quería proponer un no ejemplo.
6 Investigador:	Perdón, perdón le interrumpo. Yo sé lo que le dijeron después, pero la pregunta es ¿Por qué usted planteó eso ahí? Porque ustedes estaban hablando ahí en el grupo.	
7 Juan:	Lo que pasa profe es que nosotros, cuando…	
8 Investigador:	Espéreme, espéreme. A usted ya le voy a preguntar. Porque ahorita usted habla. Quiero escuchar a Adriana ahí, porque ella fue la primera que habló. La profe estaba escribiendo la definición en el tablero. No la había terminado de escribir y usted le hizo esta sugerencia: si llegamos a redefinir C y lo sacamos del plano.	
9 Profesora:	Ya habíamos sacado a D del plano.	
10 Adriana:	Ah sí, sí. Yo quería saber si sacaba el otro punto, yo quería saber si seguía siendo un cuadrilátero plegado, o sea con la definición que había dado hasta ahí la profe.	Ei: Reitera su intención de sugerir lo que consideraba un no ejemplo de cuadrilátero plegado.
11 Investigador:	Usted quería saber eso.	
12 Adriana:	Exacto.	
13 Investigador:	[Continúa proyectando el vídeo de la clase donde la profesora define el cuadrilátero plegado, hasta el momento donde Juan dice que debe ser "exactamente un punto"]. Ahí si habla Juan, pero no le habla a toda la clase sino a sus compañeros. Ahora si lo escucho Juan.	
14 Juan:	Lo que pasa es que yo estaba pensando en la representación, pero entonces con lo que dijo Adriana, cuando al cambiar de … se le podía mirar si faltaba algo porque podíamos encontrar un contraejemplo ¿Si? O sea, la representación cuando sacábamos el otro punto podía dejar de serlo ¿Si? Porque no había visto la otra visualización del otro plano, porque digamos un punto, porque de todas formas el otro punto va a quedar por fuera, entonces yo dije: debe hacer falta algo.	Ei: Reconoce que estaba en el mismo pensamiento de Adriana, pero asimismo que tenía una limitación en la visualización pues perdió de vista que se podía determinar otro plano.
15 Profesora:	Entonces lo que estás diciendo, es que tu decías, teniendo en cuenta lo que ella dijo, ¿Que no se podía	

	sacar otro punto, porque lo que queríamos era exactamente un punto fuera del plano?	
16 Juan:	O sea…pero…o sea…sí.	
17 Investigador:	Pero, cuando Juan dice eso…perdón no le voy a preguntar, veamos lo que sigue y ahorita le pregunto otra vez. Sí, porque ahí vuelve a hablar otra vez. [Continúa proyectando el vídeo]. Ahí me toca preguntarle a Jimmy. Porque Jimmy se paró y fue por el material, la pregunta es ¿Usted se paró por el material con relación a lo que habían dicho Adriana y Juan? ¿O usted estaba en otra cuestión?	
18 Jimmy:	[Niega con la cabeza]. No, yo estaba mirando lo que pasaba si se sacaba el otro punto… no era como eso, sino representarlo de alguna manera como yo me lo imaginaba. Si lo que estaba haciendo era exacto.	Em: Jimmy acepta que quería hacer el supuesto no ejemplo propuesto de cuadrilátero plegado con el modelo físico de palos y plastilina.
19 Investigador:	Si la definición que había hecho la profe estaba bien…y la iba a mirar con el material.	
20 Jimmy:	Si, exacto.	
21 Investigador:	[Continúa proyectando el vídeo hasta el punto donde la profesora preguntó: ¿De acuerdo con la definición? Y Juan le objeta]. Ahí me voy a detener, porqué ahí Juan le dijo a toda la clase eso y hasta ahí, no había hablado Jeison, que habló después. El resto de la clase pues no tomó una posición activa respecto a eso, excepto Sergio que estaba por acá. Les quiero preguntar a ustedes en general: ¿Si en ese momento ustedes tenían esa misma objeción de Juan, no la tenían o no la consideraron? Exceptuando Jeison y Sergio que hicieron la objeción después.	
22 Profesora:	Adriana ¿Qué dijiste?	
23 Adriana:	Yo tenía la misma duda, por eso estábamos hablando de eso.	
24 Investigador:	Sí, el grupo de ustedes era muy activo en la objeción. Le pregunto a los demás. Bueno, entonces continuo y le pregunto a los que tengo aquí enfocados. [Continúa la proyección hasta el momento en el cual la profesora redefine otro punto del cuadrilátero por fuera del plano base]. Cuando la profesora redefinió C.	
25 Profesora:	D	
26 Investigador:	Perdón, redefinió D, porque C ya estaba…	
27 Profesora:	C ya estaba redefinido.	
28 Investigador:	Dije C pero es D, perdón. ¿Quiénes de ustedes pensaron que eso no correspondía a la definición de cuadrilátero plegado? O que no cuadraba. [Juan levanta la mano].	
29 Profesora:	¿Sólo una persona?	
30 Investigador:	Tengo que preguntarle a Brayan, porque estaba mirando muy atento el tablero. ¿Usted recuerda en ese momento que pensó de la definición?	
31 Brayan:	No [Niega con la cabeza].	
32 Investigador:	No lo recuerda. Laura iba a hablar.	
33 Laura:	No, o sea. Para aclarar. Para contextualizar, hasta ese momento de la clase teníamos los tres puntos y un C que no estaba en el plano. La pregunta era ¿Si se sacaba otro vértice…?, A mí me parece que eso no era un cuadrilátero plegado.	Ei: Reconoce que también dudo de la correspondencia entre la representación redefiniendo dos puntos y la definición formulada.
34 Investigador:	A usted le pareció que no era cuadrilátero plegado.	

35 Laura:	No porque, queda todo en un plano…podría…bueno, bueno…	
36 Profesora:	A ti te pareció que no.	
37 Laura:	Si, a mí me pareció que no.	
38 Investigador:	Al sacar el otro punto, ¿No?	
39 Laura:	Ajá.	
40 Juan:	Yo tenía la misma duda.	
41 Profesora:	Arturo	
42 Arturo:	A mí también sólo hasta que construyeron el otro plano	Ei: Reconoce que también dudó.
43 Investigador:	¿Sólo hasta que construyeron el otro plano usted estuvo…?	
44 Arturo:	Que era plegado.	
45 Profesora:	¿Alguien más?	
46 Lina:	Es que yo me encontré esa visualización, pero digamos que en el dibujo. Es que si uno toma primero el plano alfa y redefine a D y se define a C, digamos tendrían algo como así.	En: Explica porque no dudó y cuáles son las razones por las cuales la representación con dos puntos “redefinidos” sigue cumpliendo la definición de cuadrilátero plegado.

Los dos puntos A y B y el otro punto C, yo miraba entonces ese C, A y B pues están contenidos en un plano por ser no colineales y quedaría este plano así y tendría el de acá.

Para mí si seguía siendo un cuadrilátero plegado.

47 Investigador:	¿Para usted si seguía siendo un cuadrilátero plegado?	
48 Lina:	Para mí seguía siendo un cuadrilátero plegado. De la forma que lo mirara seguía siendo un cuadrilátero plegado.	
49 Jeison:	Es lo que Lina dice…	
50 Profesora:	¿Pero eso, antes de explicar? ¿Antes de la explicación? ¿Tan pronto vieron la imagen?	
51 Jeison:	Pues ahora que Lina lo dice, tres puntos siempre van a definir un plano y si sabemos que cuatro puntos no son coplanares. No importa que hubiéramos sacado el otro vértice, o si estábamos mirando dos planos.	En: Presenta el argumento por el cual la representación si cumple la definición de cuadrilátero plegado.
52 Profesora:	Eso lo estás diciendo ahorita…pero ¿Qué pensaste en ese momento?	
53 Investigador:	Es que profe, perdón, él fue el que lo dijo en la clase.	
54 Profesora:	Ah.	
55 Investigador:	Él está levantando el brazo ahí, para decir eso [Se refiere a la imagen del vídeo].	

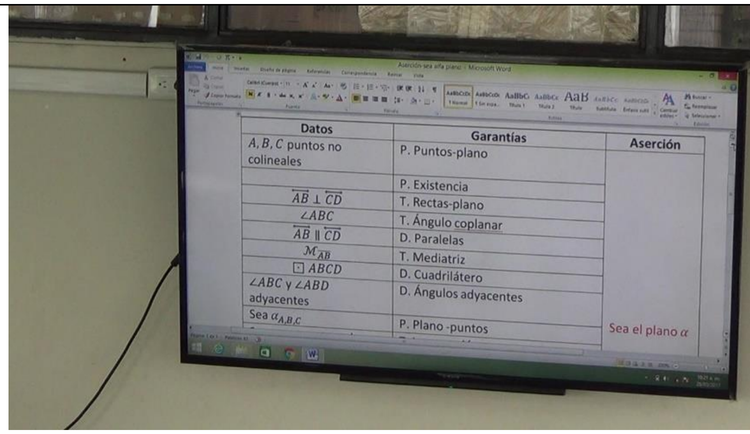
56 Profesora:	Por eso, por eso, pero entonces yo quiero saber quiénes habían pensado…	
57 Investigador:	Exacto, eso es lo que yo quiero saber.	
58 Profesora:	Porque él ya está dando una explicación. Ya dijeron unos que no, Lina dice que cree que, si lo aceptaba, que alcanzó a verlo. ¿Quién más? Tú dijiste que no [se dirige a Arturo], que no lo aceptabas.	
59 Sergio:	Como había dos lados que se intersecan en un punto. Esos ya determinan un plano.	En: Presenta un argumento distinto al presentado por los otros estudiantes. Ellos han hablado del Postulado Puntos-plano y él habla del Teorema rectas-plano.
60 Profesora:	Si, pero en ese momento.	
61 Sergio:	Por eso…	
62 Investigador:	Es que él fue el otro que dijo, él y Jeison.	
63 Profesora:	O sea que los demás parece que no pensaron la cosa.	
64 Investigador:	Ahorita tengo la otra reacción que les voy a presentar. Entonces aquí habla Jeison que está diciendo un poco más espontáneamente lo que dijo ahorita [continúa presentado el vídeo, en la parte en la cual la profesora dice “Tengo otra figura a la que debo colocarle otro nombre, doblemente plegado o algo así”]. Ahí cuando la profesora dijo eso, algunos dijeron que no. Natalia ser río, que no se le diera otro nombre, y el compañero de Natalia. Pero los demás los veo muy callados, ah y Sergio también dijo que no.	
65 Profesora:	Pero muchos pensativos.	
66 Investigador:	Por eso la pregunta, cuando la profe les dijo que si definían otra figura ¿Qué tenían ustedes en mente respecto a lo que había escuchado Jeison?	
67 Esteban:	Es que yo en ese momento estaban Natalia y Esteban, Natalia dijo no importa si sacábamos el punto B, C y D iban a determinar un plano…	
68 Profesora:	A.	
69 Esteban:	A, iban a determinar un plano y no creímos participar porque ella y yo lo vimos.	
70 Investigador:	Alguien más desea agregar algo ahí.	
71 Profesora:	Dayro, lo que le estabas diciendo a Ronald.	
72 Dayro:	Si tuviéramos el cuadrilátero y sacáramos el plano…igual… lo que decía el compañero, igual se va a armar el otro plano y C va a estar por fuera, así quedemos con este otro plano acá, va a estar, siempre va a existir.	
73 Investigador:	Eso ahorita es claro.	
74 Profesora:	Ahorita es claro, en ese momento yo veo muchas caras pensativas, así, con la mano así. Ellas tres están…	
75 Investigador:	Pero ella [Señala a Karen], ellas dos si estaban muy pensativas, no sé. ¿Laura iba a hablar?	
76 Laura:	Si. Yo creo que ahí la cuestión cuando se redefinía el otro punto era que al moverlo se corriera el riesgo que al moverlo de pronto cayera en el mismo plano determinado por el que no está y A y B que se quedaron fijos en el plano y que tal al mover…digamos este es E que no está en el plano.	Ei: Más que cuestionar si la representación coincide con la definición, cuestiona si la acción de redefinir otro punto va a dar en todos los casos un cuadrilátero plegado. Porque puede ocurrir que el segundo punto redefinido quede coplanar con los otros tres.

	Y A y B están en el plano y se sacó C. Y que tal C coincidencialmente cayera en el plano determinado por B, A y D. Entonces ahí ya no sería cuadrilátero plegado. Entonces yo ahí decía, no. Para garantizar que no son coplanares pues que si se mantenga que A, B y C estén en el plano y D no esté ¿Sí?, Porque al moverlo correría el riesgo que de pronto quedara en ese plano, pero también hay muchas posibilidades de que no cayera, en cuyo caso pues…si sería un cuadrilátero plegado.	
77 Investigador:	Permítanme [continúa corriendo el vídeo], ahí tengo que preguntar. Vuelvo a Adriana, la que comenzó el debate, que era muy necesario. ¿Ahí Adriana qué le está pidiendo al compañero que haga en Cabri?	Ei: La manera en la cual expresa Adriana sus motivos para dudar de la correspondencia entre representación y definición no permiten inferir que sea necesariamente motivada por el diseño de la tarea, pues ella se está fundamentando en un hábito que tiene de cuestionar las definiciones buscando no ejemplos en la representación.
78 Adriana:	Que definiera… oses, que sacara el plano y definiera el punto, o sea tratar de que todo…lo que estaba diciendo ella [señala a Laura]…o sea lo que yo siempre trato de hacer es que la definición esté…o sea yo siempre trato de encontrar el contraejemplo, si no encuentro el contraejemplo…lo que estaba tratando de hacer ella: que estuvieran en un mismo plano, pero creo que nosotros no…	
79 Investigador:	Usted le está pidiendo a él que determine el plano del que está hablando la profe.	
80 Adriana:	Exacto.	
81 Profesora:	No, que el punto quedara en ese plano. Con los dos puntos que se sacaron, que quedaran en el mismo plano los cuatro puntos.	
82 Investigador:	Ah ya.	
83 Adriana:	Exacto.	
84 Profesora:	Que es lo que dice Laura que le daba miedo sucediera. Que era posible.	
85 Investigador:	[Continúa corriendo el vídeo]. Ahí María le está señalando a Carolina y Violeta algo. ¿Qué está señalando? Porque parece señalar algo en el tablero y algo les dice.	
86 María:	Es que creo que la última condición para mí no era necesaria, esa no colinealidad entre los puntos no era necesaria.	
87 Investigador:	Ah ya. ¿Estaban hablando de la no colinealidad?	
88 María:	Si.	
89 Investigador:	[Continúa con la proyección del vídeo]. Ahí termina con la definición de cuadrilátero plegado. Que	

	algunos no veían.	
90 Arturo:	A mí en ese momento se me ocurrió levantar el vértice C.	
91 Investigador:	¿Levantar el vértice C?	
92 Arturo:	Pero no lo manifesté en ese momento.	
93 Investigador:	¿Pero eso cambiaba en algo la definición?	
94 Arturo:	No sé. Quedé con esa duda.	
95 Investigador:	¿Quedó con la duda? ¿Qué ocurría si C no pertenecía al plano base de Cabri?	
96 Arturo:	Si no sacábamos un solo vértice sino sacábamos otros.	Ei: Arturo propone lo que él considera otro no ejemplo y Zayde le controvierte proporcionando un argumento por el cual esa representación sigue siendo un cuadrilátero plegado.
97 Investigador:	Pero ahí ya habían sacado B y D.	
98 Arturo:	Sí, ahí ya habían sacado B y D. ¿Qué hubiera pasado si hubiéramos sacado C, también?	
99 Investigador:	O sea, usted está proponiendo sacar un tercer vértice.	
100 Zayde:	Si se sacaba ahí va a determinar un plano diferente, de todas maneras, va a ser un plano.	
101 Profesora:	Zayde, dilo más duro.	
102 Investigador:	Le tiene que hablar a la clase.	
103 Zayde:	Igual si se saca el punto C del plano original, va a determinar un plano beta que va a contener los puntos A, B y C. Va a suceder lo mismo, cuatro puntos, cada tres no colineales. Va a cumplir la definición.	
104 Profesora:	Arturo: ¿Estás de acuerdo?	
105 Arturo:	Se hubiera eliminado…se hubiera sustituido el plano gris, el plano gris perdería toda…	
106 Profesora:	Lo que está diciendo Zayde es que siempre se puede determinar un plano…	
107 Arturo:	Si claro.	
108 Profesora:	…Y un punto que no está. Y no tiene que ser el plano original, que es una de las cosas que tenemos que aprender a mirar, a visualizar.	

Y la última de las interacciones analizadas de esta tarea es la de la profesora con toda la clase respecto al enunciado cuatro.

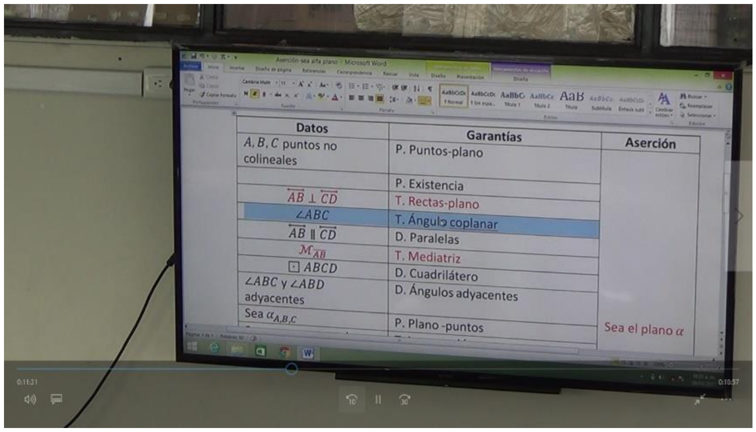
Tarea 1, ciclo 3, profesora. T1C3Pd: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Bueno, vamos a mirar uno de los problemas que les pusimos la clase pasada, el jueves. El jueves les preguntamos que si un estudiante aseguraba en una demostración: sea el plano alfa, si algún paso de la demostración decía, sea el plano alfa. Que, qué pudo haber sucedido antes de esos. O sea que datos se necesitaban. Y qué cuál era la garantía que le permitía concluir esa aserción. Y aquí puse una lista de todas las propuestas y vamos a ir examinando cada una de ellas. Y vamos a decidir si estamos de acuerdo con ella o no, entonces la que más mencionaron la mayoría de ustedes…yo puse ahí el argumento completo.	Ec: Los estudiantes enunciaron en primer lugar el Postulado puntos-plano. Em: La profesora hace un cuestionamiento a lo apropiado en esta situación del uso del Postulado de la existencia.



	Los datos que debían tener…un argumento consta de datos, garantía y aserción. La aserción es la misma para todos, todos llegaron y dijeron: sea alfa un plano y la idea era ver ¿Qué se necesitaba antes? ¿Y cómo se llegaba a esa aserción? Entonces los datos que propusieron la mayoría de ustedes es que se tuvieran tres puntos no colineales, porque si tenemos esa situación, decían unos, se puede usar el Postulado puntos-plano ¿De acuerdo? Ese es uno de los postulados más importantes que tenemos: dados tres puntos no colineales entonces hay un plano que los contiene, ¿De acuerdo? El segundo que mencionaron ustedes fue el postulado de existencia. ¿El postulado de existencia qué es lo que dice?	
2 Adriana:	Un plano que existe.	
3 Profesora:	Que existe un plano, ahí no hay datos, es simplemente en nuestro sistema existen los planos. El tercero que propuso alguien es que se tuviera como datos la perpendicularidad de dos rectas y nombran una garantía teorema rectas-plano. No tengo ni idea a qué se refiere esta persona.	
4 Bayron:	Que si dos rectas se intersecan hay un único plano que las contiene.	
5 Profesora:	Si está haciendo referencia a un teorema que tenemos que dos rectas que se intersecan determinan un plano. Entonces necesitaríamos otro dato ¿No? Que esas dos rectas realmente se intersecan. Y bueno pues sería un proceso de dos pasos para poder usar ya ese teorema, entonces digamos que éste es de cierta manera, no del todo correcta. Porque faltarían más datos para poder usar ese teorema. El siguiente dice: ángulo ABC por el teorema ángulo coplanar. Será que, si me dicen, tengo un ángulo, usar ese teorema y decir: sea el plano alfa.	Em: La profesora destaca que para poder usar un elemento teórico hay que poner en los datos lo que garantiza que se verifica el antecedente de la proposición que constituye ese elemento teórico, que puede ser un postulado o teorema.
6 Juan:	Si porque ya está demostrado.	
7 Profesora:	Adriana.	
8 Adriana:	Dice que el ángulo ABC está contenido en un plano, entonces hay tendría que volver a hacer dos pasos. Lo que estábamos diciendo del anterior, decir que no son colineales y el plano es único.	
9 Profesora:	Ah, pero es que hay un teorema que dice que el ángulo es una figura coplanar.	

10 Adriana:	Por eso.	
11 Profesora:	Es lo que ellos dicen, entonces si tengo un ángulo, entonces uso ese teorema y digo sea alfa el plano que contiene a ese ángulo.	
12 Juan:	En la demostración de ese teorema se usó así.	
13 Profesora:	En la demostración de ese teorema ¿Qué se usó?	
14 Juan:	El Postulado tres puntos-plano.	
15 Profesora:	El Postulado tres puntos-plano ¿Cierto? Y el postulado llaneza del plano, cosas así. Pero entonces la pregunta es: si yo en una demostración, si me dan como un dato ángulo ABC, si puedo inmediatamente decir sea alfa el plano que contiene a ese ángulo. Si porque sabemos que es una figura coplanar o sea sabemos por ese teorema que hay un plano que lo contiene, o sea que aceptado ¿Cierto?	Ec: Los estudiantes citaron el Teorema ángulo figura coplanar. No estaba previsto en la THA.
16 Juan:	Si señora.	
17 Profesora:	Bueno. La siguiente es, datos: dos rectas paralelas, por definición de paralelas sea alfa el plano. Diego.	Ec: Los estudiantes citaron la definición de rectas paralelas.
18 Diego:	Algún punto podría estar fuera del plano.	
19 Profesora:	¿Algún punto de quién?	
20 Zayde:	La definición dice…	
21 Profesora:	La definición dice que si son paralelas son coplanares. O sea que esa es otra forma, sea alfa el plano que los contiene. Muy pocas personas se les ocurrió esa.	
22 Juan:	Profe una pregunta. ¿Ahí no se puede establecer la garantía?	
23 Profesora:	No, la definición dice: si son paralelas entonces son coplanares. Es lo mismo del ángulo, si es un ángulo entonces es una figura coplanar. Bien, el siguiente dice: mediatriz del segmento AB por el teorema mediatriz.	
24 Brayan:	Dice que siempre se intersecan, si es perpendicular a la recta AB.	
25 Profesora:	Si, pero no dice nada de un plano, yo no puedo… ¿Ah?	
26 Zayde	Es lo mismo que el según…que el que vimos allá porque es la recta perpendicular, pero…	
27 Profesora:	Mejor dicho, se necesitarían más pasos. Pero el teorema de la mediatriz no me dice que hay un plano que los contiene. El teorema de la mediatriz ¿Qué es lo que me dice?	Em: La profesora cuestiona el uso de la definición de mediatriz para determinar un plano.
28 Lina:	Que es una recta perpendicular…	
29 Profesora:	Que es una recta perpendicular y entonces me toca…o sea que ese no lo aceptamos, pues porque ya son muchos los pasos. Ya serían muchos los pasos que necesito y… idea incompleta ¿No? El otro dice: cuadrilátero ABCD como datos y que por definición de cuadrilátero sería alfa el plano. La definición de cuadrilátero es que es una figura coplanar. ¿Entonces lo aceptamos?,¿Si yo tengo un cuadrilátero puedo decir que sea alfa el plano tal qué?	
30 Jimmy:	¿Si es el plegado?	
31 Profesora:	No, pero ahí no dice cuadrilátero plegado.	
32 Jimmy:	Es para todos, pero ¿Si es un cuadrilátero plegado?	
33 Profesora:	Es que el cuadrilátero plegado no es un cuadrilátero, es un cuadrilátero plegado, ese es su nombre [Risas], o sea su nombre completico ¿Cierto? Porque la	Ec: Los estudiantes usan la definición de cuadrilátero para determinar un plano. No estaba prevista en la THA.

	definición de cuadrilátero es una figura coplanar tal que bla, bla, bla. Entonces si tengo un cuadrilátero puedo decir, igual que hice con el ángulo, sea alfa el plano que los contiene. ¿Sí?,¿De acuerdo o no?,¿Aceptado?	
34 Juan:	Si profe, toda figura coplanar…todo polígono es coplanar.	
35 Profesora:	Bueno, siempre y cuando lo hayamos definido así o demostrado. Eh, ángulos ABC y ABD adyacentes por definición de ángulos adyacentes. ¿La definición de ángulos adyacentes qué dice?	
36 Varios:	[Hablan simultáneamente no se entiende].	
37 Profesora:	Qué tienen que estar en un mismo plano, ¿No? La definición de ángulos adyacentes dice: son dos ángulos en un mismo plano. ¿También podríamos decir, igual que hicimos con el ángulo y el cuadrilátero? ¿Si sé que son adyacentes entonces puedo decir sea alfa el plano que los contiene? Creo que tocaría, tocaría…	Ec: Los estudiantes propusieron la definición de ángulos adyacentes que no estaba prevista en la THA.
38 Alfonso:	Asegurar el cuarto punto.	
39 Profesora:	No porque dice que son adyacentes, la definición de ángulos adyacentes dice que son coplanares y cumplen otras condiciones. Entonces ¿Sí?	
40 Zayde:	Si, porque si me dice la definición que están contenidos en un mismo plano esos dos ángulos.	
41 Juan:	¿Por la de semiplano?	
42 Zayde:	No.	
43 Profesora:	Por definición de…pues es que faltaría un paso en realidad, porque si son adyacentes, por la definición de adyacentes diría que es coplanar y después por definición de coplanar diría que hay un plano que los contiene y sea alfa ese plano, ¿Cierto? Que es lo mismo que pasa con el triángulo y con el cuadrilátero. En realidad, serían dos pasos, por definición de cuadrilátero es una figura coplanar, por ser una figura coplanar, entonces sea alfa el plano que lo contiene	Em: La profesora cuestiona el encadenamiento lógico de los argumentos para usar la definición de ángulos adyacentes como garantía de la determinación de un plano.
44 Juan:	¿Definición de ángulo no dice que están en un semiplano…?	
45 Profesora:	Ahora vamos a mirar eso de semiplanos, porque ya viene. ¿Esperamos a ver si ahí contestamos tu pregunta? Bien, o sea que en el fondo tendríamos que este.	



	Tendría sentido, pero faltaría un paso, que es lo mismo que los otros, pero es como más directo que los otros. Que éste y éste. O sea, voy a ponerlos en azul.	
46 Zayde:	El de paralelos también sería en azul ¿No?, porque también me dice que son coplanares.	
47 Profesora:	Ah tienes razón ¿No?	
48 Lina:	No, pero…	
49 Zayde:	Pues sí, la definición también me dice…	
50 Profesora:	Si, en todas usamos la definición de coplanar. O bueno, lo que distingue a estos que…las paralelas, es que te dan la definición [está señalando triángulo, cuadrilátero y ángulos adyacentes] (…) es que son por definición, por X, Y o Z razón coplanares y después usar la definición de coplanar, mientras que el postulado me dice: puntos no colineales, está ese plano, ya es mucho más directa.	
51 Zayde:	Profe falta el de las paralelas [hace referencia a que falta ponerle color azul al texto de las paralelas].	
52 Profesora:	(…) ¿Qué piensan del siguiente?	
53 Zayde:	No porque me está de una vez ahí nombrando el plano.	
54 Profesora:	No tiene sentido, además el postulado es el que me dice que en un plano hay puntos y eso no es lo que estamos concluyendo. Estamos concluyendo que hay un plano, o sea que éste si es totalmente equivocado, este lo vamos a poner ¿En qué color?, no rojo ya usé, porque es totalmente equivocado (…) le vamos a poner color… naranja. Bueno, el siguiente dice: sean m y n rectas tal que la intersección de m y n es un punto, teorema intersección rectas.	Em: Cuestiona la validez del argumento explicando porque no aplica para determinar un plano.
55 Juan:	Que hace falta el otro paso. Que si se intersecan ya están en un plano.	
56 Profesora:	Noo ¿Qué dice el teorema?	
57 Varios:	Que si las rectas se intersecan determinan un plano.	
58 Profesora:	Entonces ya está. Ese es directo, ese es perfecto y ese es el que querían usar allá arriba, pero allá arriba lo llaman Teorema rectas-plano y aquí lo llaman teorema intersección rectas, ¿Cuál es?	
59 Juan:	Lo que pasa es que el de intersección de rectas dice que la intersección es única, no más.	
60 Profesora:	Si, o sea que ese está mal, la garantía está mal. La garantía que quieren aquí es… es ésta ¿No?, Teorema	

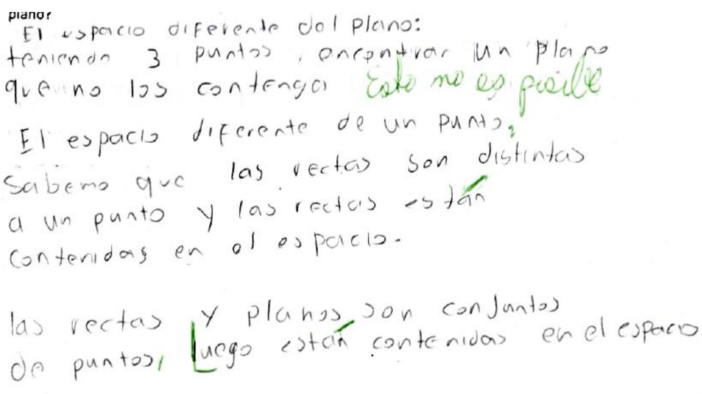
	rectas-plano. Que dice que dos rectas que se intersecan determinan un plano. El siguiente AB subconjunto de alfa, Postulado de la llaneza.	
61 Juan:	El plano ya existe.	Ei: Cuestiona la validez del argumento pues para usar el Postulado de la llaneza el plano ya debe estar dado. No es el caso acá donde toca determinarlo.
62 Profesora:	El plano ya está ahí, no están haciendo salir…o sea que esa definitivamente queda anaranjada. Bueno, ¿Triángulo ABC? ¿Ese de qué color queda?	
63 Juan:	Azul.	
64 Profesora:	Azul ¿Cierto?, porque necesitamos primero…necesitamos dos pasos, o sea no es directo. ¿Y éste?, s uno y s sub dos y m recta que los determina. O sea, semiplano, por definición de semiplano.	Em: La profesora cuestiona la definición de semiplano como elemento teórico para determinar u plano. Juan con su afirmación respalda este argumento.
65 Juan:	No tampoco.	
66 Profesora:	¿Por qué no sirve?	
67 Juan:	Porque dice que dado un plano y una recta…	
68 Profesora:	Ya tendría que estar el plano para yo poder hablar de semiplanos, o sea que esa queda…	
69 Zayde:	Anaranjada.	
70 Profesora:	Anaranjada. Bueno ¿El siguiente? Cuatro puntos A, B, C, D donde D no está en beta. ¿Postulado del espacio?	Em: La profesora cuestiona el uso del Postulado del espacio para determinar un plano.
71 Varios:	No.	
72 Profesora:	¿Están de acuerdo?	
73 Varios:	No.	
74 Profesora:	No ¿Cierto? Esa no. ¿Y la última?, ésta es anaranjada ¿Cierto? Dada una recta y un punto que no está en ella. También tenemos ese teorema ¿Cierto? O sea que las que son directas son: Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y Postulado existencia y Postulado puntos-plano. Estos me lo dan de una, los otros tenemos que usar la definición de…coplanar ¿Cierto? Bueno, son distintos caminos	Ec: Los estudiantes propusieron el Teorema recta-punto-plano

A 1.3.3 Hojas de trabajo.

Como mencionó previamente el enunciado uno no se le hace un seguimiento particular acá y en el enunciado tres no se produjeron hojas de trabajo. Se presentan entonces las hojas de trabajo de los enunciados dos y cuatro.

Hojas de trabajo para el enunciado dos	Análisis

Hoja de trabajo de Byron



Ec: Es probable que en su primer párrafo de la respuesta hay pensado en 4 puntos y haya escrito tres, hubiese podido insinuar de esa forma el Postulado del espacio.
En los otros argumentos enfatiza en la noción de contenencia de un objeto geométrico en el otro desde una perspectiva de conjuntos.

Em: No hay evidencia de este enfoque.

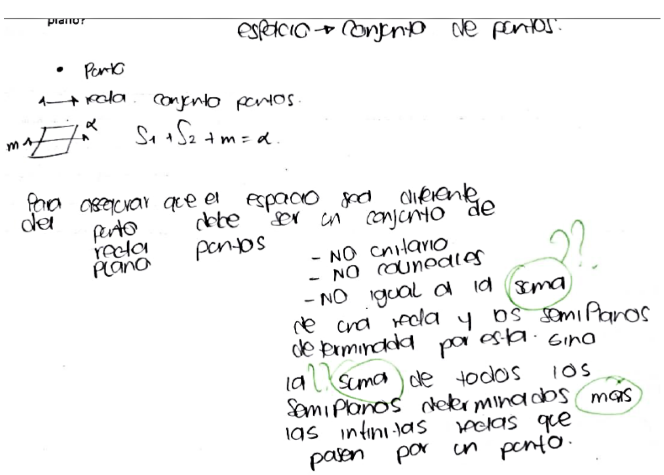
Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo Antonio

NO DISPONIBLE

Hoja de trabajo Jeison



Ec: Hace una diferencia en los aspectos que percibe como esenciales en cada objeto. En el punto ser un conjunto “unitario”, en la recta ser un conjunto con los puntos “alineados o colineales” en el plano ser la “unión o suma” de dos semiplanos y la recta que los determina en un plano. Es un intento por construir una especie de definición descriptiva de cada uno de los objetos que termina con la del espacio como lo concibe.

Em: No hay evidencia de este enfoque.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo de Violeta

Asegurandónos que hay puntos y rectos fuera del plano y por consiguiente el espacio esta formado por infinitos planos y estos a su vez estan formados por infinitas rectas.

El espacio sería la unión de estos infinitos planos.

Ec: Declara la existencia de objetos geométricos fuera del plano tales como puntos y rectas. Está el fundamento del Postulado del espacio que es declarar la existencia de objetos fuera de un plano.

Em: No hay evidencia de este enfoque.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo María

$\mathcal{E}$: Espacio.

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Es el conjunto de todos los planos. distintos. Generados por tres, puntos no colineales. diferentes.

Ec: Hace una definición procurando ser bastante general incluso en su notación. Parece tener como fundamento para su definición la noción de contenencia, el espacio contiene planos.

Em: No hay evidencia de este enfoque.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo Carolina

Necesitariamos comprobar que el espacio es la unión de todos los posibles planos y todos los elementos que hacen parte de ellos.
Por ello es necesario comprobar esta unión tan extensa y compleja, porque haciendo uso de la definición, el espacio es el conjunto de todos los puntos.

Ec: Considera que la manera de garantizar la existencia del espacio es verificando que se cumpla la definición y hace el supuesto que todos los puntos están contenidos en todos los planos

Em: No hay evidencia de este enfoque.

Ed: No hay evidencia de este enfoque.

Et: No hay evidencia de este enfoque.

Hojas de trabajo para el enunciado cuatro	Análisis

Hoja de trabajo de Byron

Aserción	Garantías	Datos
Sea el plano α	P. 3 puntos plano	A, B, C no colineales
	P. existencia	
	T. ángulo coplanar	$\angle ABC$?? E
	T intersección de rectas plano	m y l rectas distintas $m \cap l = \{A\}$

Ec: Cita los postulados puntos-plano, de la existencia y el Teorema intersección de rectas-plano y un Teorema ángulo figura coplanar.

Em: No hay información este enfoque.

Ei: No hay información este enfoque.

En: No hay información este enfoque.

Hoja de trabajo Antonio

Aserción	Garantías	Datos
Sea el plano α	P. Existencia.	
	P. llaneza del plano.	~~recta~~
	P. tres puntos - plano.	tres puntos no colineales.
	P. recta, punto - plano	Una recta, un punto que no pertenece a la recta

Ec: Cita el postulados puntos-plano, de la existencia y el Teorema intersección de rectas-plano y el Postulado de la llaneza del plano que no garantiza la existencia de un plano.

Em: No hay información este enfoque.

Ei: No hay información este enfoque.

En: No hay información este enfoque.

Hoja de trabajo Jeison

Aserción	Garantías	Datos
Sea el plano α	P. existencia.	??
	~~Def. semiplano~~	
	T. Punto-recta-Plano	
	P. 3 puntos Plano.	

Ec: Cita el postulados puntos-plano, de la existencia y el Teorema punto-recta-plano y la definición de semiplano que no garantiza la existencia de un plano.

Em: No hay información este enfoque.

Ei: No hay información este enfoque.

En: No hay información este enfoque.

Hoja de trabajo de Violeta

Aserción	Garantías	Datos
Sea el plano α	P Existencia	~ ~~~
	P Tres puntos plano	A,B,C No Colineales
	D. Semiplano	$S_1 \cup S_2 \cup m$
	T. recta - Plano	

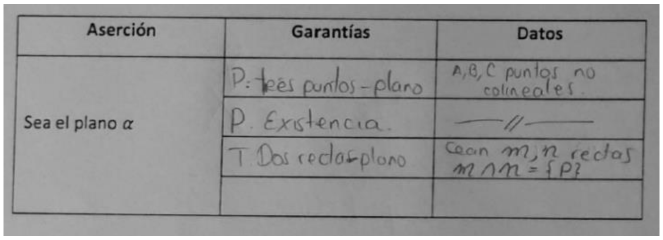
Ec: Cita el postulados puntos-plano, de la existencia y el Teorema punto-recta-plano y la definición de semiplano que no garantiza la existencia de un plano.

Em: No hay información este enfoque.

Ei: No hay información este enfoque.

En: No hay información este enfoque.

Hoja de trabajo María



Aserción	Garantías	Datos
Sea el plano α	P: ~~tres~~ tres puntos-plano	A, B, C puntos no colineales.
	P. Existencia.	—//—
	T. Dos rectas-plano	Sean m, n rectas $m \cap n = \{P\}$

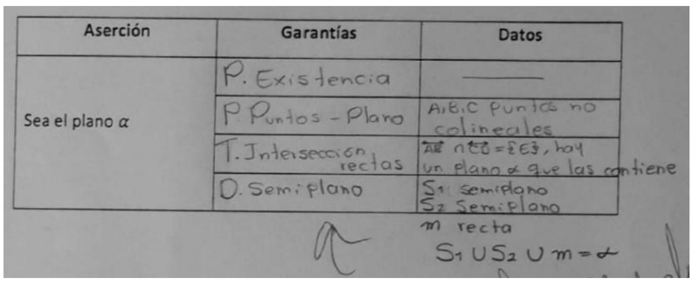
Ec: Cita el postulados puntos-plano, de la existencia y el Teorema rectas-plano

Em: No hay información este enfoque.

Ei: No hay información este enfoque.

En: No hay información este enfoque.

Hoja de trabajo Carolina



Aserción	Garantías	Datos
Sea el plano α	P. Existencia	——
	P. Puntos - Plano	A, B, C puntos no colineales
	T. Intersección rectas	$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{E\}$, hay un plano α que las contiene
	D. Semiplano	S_1 semiplano S_2 Semiplano

m recta

$S_1 \cup S_2 \cup m = \alpha$

Ec: Cita el postulados puntos-plano, de la existencia y el Teorema rectas-plano y la definición de semiplano que no garantiza la existencia de un plano.

Em: No hay información este enfoque.

Ei: No hay información este enfoque.

En: No hay información este enfoque.

A 1.3.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que el Postulado del espacio surgiese como una necesidad en la discusión del enunciado dos, que hicieran uso del Postulado puntos-plano para contrastarlo con la definición de cuadrilátero plegado en la discusión del enunciado tres y que en la solución del enunciado cuatro surgiesen: el Postulado puntos-plano, el Teorema recta-punto-plano, el Teorema rectas-plano y la definición de rectas paralelas para determinar un plano.	En la discusión del enunciado dos efectivamente surge el Postulado del espacio, adicionalmente la profesora proporcionó la definición de espacio (no la mencionamos en la THA) y los estudiantes expresaron ideas relevantes, aunque no muy claramente justificadas cómo: hay relaciones de contenencia entre el plano y el espacio y existen infinitos planos. En la discusión del enunciado tres los estudiantes hacen uso del Postulado puntos-plano, pero también del Teorema rectas-plano el cual no teníamos contemplado en la THA. En el desarrollo del enunciado cuatro aparecen los elementos teóricos previstos para determinar un plano y adicionalmente otros no contemplados por nosotros en la THA como: definición de ángulos adyacentes, definición de cuadrilátero y Teorema ángulo figura coplanar.	Se verifica que el Postulado del espacio se plantea como necesario a partir de las producciones de los estudiantes que la profesora discute con toda la clase, aquellos estudiantes que en la interacción con la profesora identificaron que la definición del cuadrilátero plegado se seguía cumpliendo con dos puntos fuera del plano de referencia de la representación sugieren cambiar el que actúa como plano base del cuadrilátero aludiendo a los tres puntos y en la solución al enunciado cuatro emergen más elementos de los que habíamos anticipado para determinar un plano.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba qué: La herramienta redefinir fuese útil para sugerir la necesidad del Postulado del espacio. La herramienta redefinir junto con la acción de la profesora diera lugar a un debate relevante respecto a la definición de cuadrilátero plegado.	Las previsiones de la THA se verifican en los dos casos. Pues los estudiantes sugieren con diversas maneras de enunciar el Postulado del espacio. Y la acción de redefinir junto con los planteamientos de la profesora dieron lugar a un debate en torno a la representación ofrecida en Cabri 3D y el cumplimiento de las condiciones para ser un cuadrilátero plegado.	En cuanto al Em no hay manera de determinar, a partir de los datos recolectados en este ciclo, si el reconocimiento de la necesidad de introducir el Postulado del espacio es resultado del uso de la herramienta redefinir. Y si es evidente que el uso de la herramienta junto con la acción de la profesora si generaron debate en torno a la definición del cuadrilátero plegado.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que la duda se manifestase en los estudiantes especialmente en dos momentos. Al abordar como garantizar teóricamente que el espacio es diferente a un plano, una recta y un punto. Y al contrastar la representación con dos vértices redefinidos con la definición del cuadrilátero plegado.	Respecto a la previsión de la aparición de la duda en la discusión del enunciado dos, no hay evidencia concluyente dado que el registro de la discusión de la profesora con la clase presenta las distintas soluciones, pero no se hace visible una discusión entre diferentes puntos de vista. En la discusión del enunciado tres de la profesora con toda la clase son evidentes los puntos de vista diferentes y esta información se corrobora en la entrevista con el investigador, en este enunciado se genera duda en lo estudiantes.	El registro de hojas de trabajo y discusión de la profesora con toda la clase no es suficiente para determinar si el enunciado dos generó o no duda en los estudiantes, ésta es visible en el trabajo de los grupos como ocurrió en los ciclos uno y dos. El enunciado tres cumple en buena medida su propósito de generar incertidumbre y necesidad intelectual. Pero no tenemos aún claro en este diseño de discusión de la profesora con toda la clase como verificar la justificación epistemológica, dado que es la profesora la que conduce la discusión, las conclusiones que cada individuo saca de la tarea en su conjunto se ocultan a la vista del observador.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que la duda generada en torno la justificación motivase la búsqueda teórica y diera lugar a *argumentación productiva* en los enunciados dos y tres, para determinar la diferencia del espacio con los otros objetos y para establecer sí la	En las soluciones al enunciado dos son visibles los argumentos teóricos exhibidos en las hojas de trabajo, pero es que la pregunta dirige la solución hacía ese tipo de respuesta, no hay evidencia que esto haya sido producto de la experimentación de *incertidumbre* por parte de los estudiantes.	

representación con dos vértices fuera del plano base corresponde o no a un cuadrilátero plegado.	En la discusión del enunciado tres es visible la búsqueda teórica para justificar porque si cumple la definición la representación con dos vértices fuera del plano base, incluso se presentaron dos soportes teóricos distintos: el Postulado puntos-plano y el Teorema rectas-plano. Lo que no es visible es la *justificación epistemológica* dado que no hay manera de verificar el alcance de la convicción en todo el grupo. Esto último es visible hasta en la entrevista donde Arturo propone lo que él considera un NO ejemplo de cuadrilátero plegado.

A 1.4 CONCLUSIONES DE LOS ENFOQUES EN LOS TRES CICLOS PARA LA TAREA 1

Al ser los enfoques los que guían nuestro análisis, las conclusiones sobre cada uno de estos en cada una de las tareas en los ciclos que se aplicaron, son las que aportan la información relevante para un análisis global del experimento de enseñanza. Por esa razón cada uno de los análisis de las tareas finaliza con esta sección en la cual intentamos sintetizar lo sucedido con cada uno de los enfoques en la aplicación.

A 1.4.1 Enfoque en el contenido (Ec).

Uno de los elementos relevantes del contenido geométrico en esta tarea es el Postulado del espacio. En el diseño de la tarea en los tres ciclos este contenido estaba estructurado para que surgiese como una necesidad por parte de los estudiantes. Al comparar la THA con la TRA en los tres ciclos se verifica que el contenido surge como resultado del desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes. Los otros elementos de contenido presentes en la tarea para los tres ciclos son los relacionados con la determinación de un plano. Respecto a este contenido, un aspecto recurrente en los tres ciclos y no previsto en la THA es la mención de los estudiantes del Postulado de la existencia como justificación de determinación de los tres planos. Otro elemento recurrentemente mencionado por los estudiantes es el Postulado tres puntos-plano. Los otros elementos de contenido previstos para determinar un plano aparecen con menciones menos extendidas entre los estudiantes: Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y definición de rectas paralelas.

A 1.4.2 Enfoque en la mediación (Em).

En los ciclos dos y tres las acciones previstas en el diseño respecto a este enfoque parecen haber sido efectivas pues contribuyeron a la generación de incertidumbre. Esto se evidencia en las interacciones de los estudiantes con la profesora al dirigir ella la discusión con toda la clase y es más explícito en algunas de las respuestas proporcionadas al investigador en la entrevista llevada a cabo en el ciclo tres.

A 1.4.3 Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei).

Lo previsto en la THA para este enfoque se verifica en los tres ciclos. En el ciclo uno se expresa como duda en uno de los grupos, en el ciclo dos es más evidente en la discusión de los dos grupos y en el ciclo tres se evidencia en el debate generado en la discusión de toda la clase con la profesora acerca del cuadrilátero plegado y se verifica en lo expresado por los estudiantes en la entrevista con el investigador.

A 1.4.4 Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En).

Los aspectos de este enfoque previstos en la THA y que son nuestro principal interés en todo el diseño parecen ir incrementando su presencia ciclo a ciclo. En el ciclo uno es incipiente la evidencia de la verificación de necesidad intelectual pues se expresa en uno de los grupos y no tiene desarrollo, en el ciclo dos es más evidente en la discusión de los dos grupos y en el ciclo tres se constata en la discusión de toda la clase con la profesora y en la entrevista con el investigador. Respecto a la justificación epistemológica, la evidencia de su presencia es menos notable pues, aunque la argumentación productiva es evidente en los tres ciclos no hay manera de determinar si los estudiantes experimentan satisfacción con su resultado en los tres ciclos.

ANEXO 2

TAREA 2

A2. ANÁLISIS DE LA TAREA 2

La tarea dos se aplicó en los ciclos uno dos y tres. Tuvo un cambio en el enunciado entre el ciclo uno y el dos, pero, sobre la misma base del enunciado. Para el ciclo tres cambió totalmente el enunciado.

A 2.1 TAREA 2, CICLO 1

A 2.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

Determinar varios planos en una configuración geométrica dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Dados cuatro puntos no coplanares ¿Qué condiciones entre ellos, dan lugar al máximo número de planos que pueden determinarse? Justifique.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibieron hojas de trabajo individuales en las que debían consignar su respuesta individual. Posteriormente debían discutir en grupo lo que consignaron en las hojas individuales.

Intervenciones previstas

No estaban previstas intervenciones por parte de la profesora o el investigador, exceptuando aquellas que atendiesen a responder preguntas puntuales formuladas por los estudiantes en los grupos. Cómo ya se mencionó, en este ciclo no hay una acción intencionada de la profesora.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Esperamos que los estudiantes hagan uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos de esta configuración, pues lo dado son cuatro puntos no coplanares, no están relacionados entre sí de ninguna otra manera.

Enfoque en la mediación (Em). No se prevé trabajo de generación de signos con el uso de artefactos específicos para representar la situación, así como tampoco intervención de la profesora en este Ciclo uno del experimento. Así que no se hace seguimiento a este enfoque en esta tarea.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que se presenten puntos de vista diferentes en la interacción en los grupos de trabajo, sobre la coplanariedad de los puntos y sí está condición implica o no que cada tres sean no colineales. La discusión de los puntos de vista diferentes y la duda expresada por los estudiantes al respecto serán la expresión de la producción de incertidumbre en el desarrollo de la presente tarea.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor los puntos de vista diferentes debe llevar a los estudiantes a garantizar teóricamente cada una de las soluciones que se puede inferir de cada perspectiva. Si afirman qué los puntos pueden estar alineados, deben considerar que el enunciado establece la condición de no coplanares lo que excluye la posibilidad de estar alineados. Si consideran que los puntos son no colineales tres a tres deben reconocer que esta condición se puede inferir de la no coplanariedad dada de los cuatro puntos. Estas acciones representan una evidencia de presencia de necesidad intelectual. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva, y en la confianza que expresen con el resultado obtenido a partir de los elementos teóricos que soportan la respuesta correcta que cuatro puntos no coplanares determinan exactamente cuatro planos.

A 2.1.2 Interacciones analizadas.

Se presenta a continuación el análisis de las interacciones en cada uno de los dos grupos registrados en el Ciclo 1, el grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2).

Tarea 2, ciclo 1, grupo 1. T2C1G1: Transcripción		Análisis
1 Alejandro:	Pues una condición… es que uno no sea coplanar y que los otros sean no colineales.	Ei: Para él la condición dada de no coplanariedad de los cuatro puntos no implica la no colinealidad de cada tres
2 Antonia:	Pero ahí dice: Dados cuatro puntos no coplanares ¿Qué condiciones entre ellos dan lugar al máximo número de planos?	Ei: Parecen controvertir el punto de vista de su compañero, pero no establecen claramente cuál es el argumento que controvierten o el que exhiben por su parte.
3 Alejandro:	¡Por eso! Los otros tres puntos siempre son colineales… ¡No son colineales!	
4 Dilza:	Pero ahí dice…	
5 Antonia:	Pero ahí dice, máximo número de planos.	
6 Alejandro:	Por eso porque si fueran colineales solo existiría un plano. Que es un punto y una recta. En cambio, cuando no son colineales puedo hacer todas las combinatorias	Ec: Evoca dos elementos no previstos en la THA respecto al contenido: el Teorema recta-punto-plano y la combinatoria.
[…]		
11 Antonia:	Están diciendo qué los cuatro puntos no son coplanares.	Ed: Insinúa que la no coplanariedad implica la no colinealidad, pero no lo dice explícitamente.
12 Alejandro:	Por eso… ¡Me extraña! Yo digo lo siguiente, si yo tengo un punto no coplanar, no pertenece al plano. Pero por ejemplo son colineales, hay un plano que los contiene, un punto y una recta que no pertenece a él, hay un solo plano y es único. En cambio, si yo digo que no son colineales, con éste, éste y éste puedo (señala con el lápiz tríos de puntos la representación que tiene en su hoja) armar un plano y con éste, éste y éste puedo armar otro plano. [Dilza asiente].	Ed: Ha estado controvirtiendo el punto de vista que basta con declarar que no son coplanares, ofreciendo lo que para él es un contraejemplo para sostener la necesidad de poner la condición adicional de no ser colineales tres a tres.

En el segundo de los grupos la interacción se produjo como sigue:

Tarea 2, ciclo 1, grupo 2. T2C1G2: Transcripción		Análisis
1 William:	Por eso cada cuatro puntos y cuántos se determinan...cuántos planos se determinan.	Ec: La manera en la cual enuncian la determinación de los planos evidencia el uso del Postulado puntos-plano.
2 Cristóbal:	Cada tres un [inaudible].	
3 William:	Por eso, cada cuatro puntos no son colineales. Bueno (inaudible). Entonces, con los primeros tres: uno, con los	Ei: Esa primera discusión plantea una duda no prevista (que sean el mismo plano). Sin

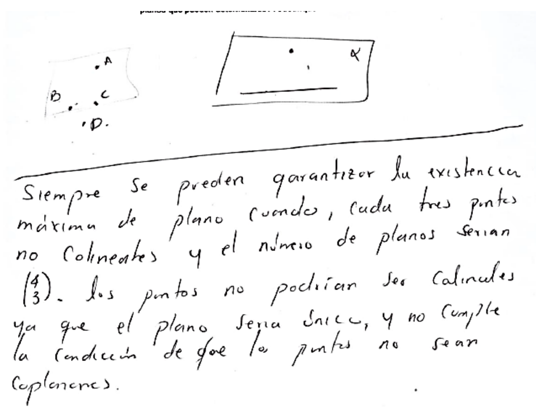
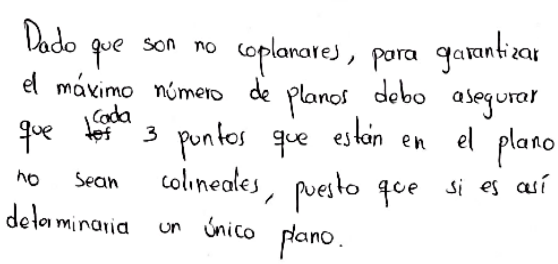
	otro tres: otro, con los otros tres: otro.	embargo, se resuelve muy rápidamente con el argumento planteado por William y que complementa Brandon.
4 Brandon:	Cuatro.	
5 William:	Cuatro planos. [Lee el enunciado para redactar la respuesta que van a escribir].	
6 Cristóbal:	¡Cuándo no son el mismo! [Inaudible].	
7 William:	No pues… O bueno si, porque si no son distintos, porque si es solo un punto pues estaría en infinitos planos.	
8 Brandon:	Cuatro puntos no coplanares…	
9 Cristóbal:	Si, claro [Asiente)].	
10 Brandon:	… eso quiere decir que son diferentes.	
[…]		
12 William:	Cuando son puntos no colineales, porque el hecho de que no sean coplanares no significa... ¿O sí? 	Ei: Acá se hace más explícita la duda, en lo que plantea William acompañado de su expresión. En ese momento no está seguro si por ser los cuatro puntos no coplanares son colineales cada tres.
13 Cristóbal:	(Inaudible)	
14 William:	No, porqué si tres son colineales y éste no entonces [pone el lápiz por encima de la mesa]…  …pero ahí es donde está el teorema: que cada cuatro puntos que son no coplanares, tres de ellos son no colineales, entonces ahí me lo garantiza de una vez. (Brandon y Cristóbal asienten). Entonces como los cuatro puntos son no colineales…	En: William hace una intervención que puede caracterizarse como de argumentación productiva pues resuelve la duda evocando un teorema que han estudiado y sus compañeros asienten acompañándolo en el razonamiento lo que expresa que ha sido satisfactorio para todos.
15 Cristóbal:	No coplanares.	
16 William:	Ah bueno sí.	

Durante un tiempo cada uno escribe la respuesta a la pregunta formulada en su hoja de trabajo

20 William:	Claro porque si estos dos están acá [señala la hoja] y éste está acá (pone el lápiz por encima de la hoja) ese era el temor… sí este punto no está en el plano entonces cada terna que se forme son no colineales [Sus compañeros asienten].	En: De nuevo hace un razonamiento que intenta apelar a la formulación contrarrecíproca del teorema para adquirir mayor convicción sobre su respuesta. Ei: Su razonamiento recurre al Teorema recta-punto-plano para argumentar que si están alineados tres de los puntos entonces habría un solo plano.

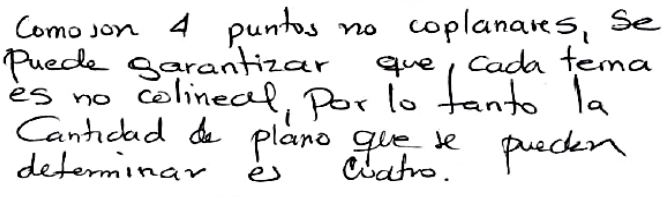
Si fueran colineales, este punto [se refiere al que representa su lápiz por encima de la hoja] tendría que estar en el plano.

A 2.1.3 Hojas de trabajo.

G1: Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Alejandro:  Siempre se pueden garantizar la existencia máxima de plano cuando, cada tres puntos no colineales y el número de planos serian $\binom{4}{3}$. los puntos no podrían ser colineales ya que el plano sería único, y no cumple la condición de que los puntos no sean coplanares.	Ec: Evidencia el uso del Postulado puntos plano y hace explicito su uso de la combinatoria. Ei: Considera el argumento para refutar la posibilidad de que los puntos sean colineales. En: No se verifica una interpretación correcta de la relación entre los cuatro puntos coplanares y cada tres no colineales. Por lo tanto, no hay evidencia de producción de *necesidad intelectual* o de *justificación epistemológica*.
Hoja de trabajo de Dilza:  Dado que son no coplanares, para garantizar el máximo número de planos debo asegurar que ~~los~~ cada 3 puntos que están en el plano no sean colineales, puesto que si es así determinaria un único plano.	Ec: Evidencia el uso del Postulado puntos-plano al considerar la no colinealidad de cada tres puntos. Ei: Considera el argumento para refutar la posibilidad de que los puntos sean colineales. En: No se verifica una interpretación correcta de la relación entre los cuatro puntos coplanares y cada tres no colineales. Por lo tanto, no hay evidencia de producción de necesidad intelectual o de justificación epistemológica.

Hoja de trabajo de Antonia: Si tengo 4 puntos no colineales, con cada trío se forma un plano. Las condiciones para que el máximo número de planos que pueden determinarse, es que cada trío no sea colineal, es decir, no pertenezcan a la misma recta.	Ec: Evidencia el uso del Postulado puntos-plano al considerar la no colinealidad de cada tres puntos. Ei: Considera el argumento para refutar la posibilidad de que los puntos sean colineales. En: No se verifica una interpretación correcta de la relación entre los cuatro puntos coplanares y cada tres no colineales. Por lo tanto, no hay evidencia de producción de necesidad intelectual o de justificación epistemológica.

G2: Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de William: • Por ser los 4 puntos no coplanares, se puede garantizar que cada terna sen no colineales, por lo tanto la cantidad maxima de Planos que se pueden determinar son 4.	Ec: La alusión a cada terna no colineales permite inferir el uso del Postulado puntos-plano. Ei: Considera el argumento para refutar la posibilidad de que los puntos sean colineales. En: Plantea explícitamente la consecuencia lógica cada tres no colineales derivada de lo dado que son cuatro puntos no coplanares.
Hoja de trabajo de Brandon: Como son cuatro puntos no coplanares, cada terna que se elija es no colineal, el número de planos que se pueden determinarse cuatro planos.	Ec: La alusión a cada terna no colineales permite inferir el uso del Postulado puntos-plano. Ei: Considera el argumento para refutar la posibilidad de que los puntos sean colineales. En: Plantea explícitamente la consecuencia lógica cada tres no colineales derivada de lo dado que son cuatro puntos no coplanares.

Hoja de trabajo de Cristóbal:	Ec: La alusión a cada terna no colineales permite inferir el uso del Postulado puntos-plano.
 Como son 4 puntos no coplanares, Se Puede garantizar que, cada terna es no colineal, Por lo tanto la Cantidad de plano que se pueden determinar es Cuatro.	Ei: Considera el argumento para refutar la posibilidad de que los puntos sean colineales. En: Plantea explícitamente la consecuencia lógica cada tres no colineales derivada de lo dado que son cuatro puntos no coplanares.

A 2.1.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran el Postulado puntos-plano establecer el máximo número de planos que pueden determinarse.	Los dos grupos hacen uso del Postulado. Adicionalmente en el G1 hacen mención del Teorema recta-punto-plano como contrargumento para el caso en el cual los puntos estén alineados y mencionan la combinatoria. En el G2 mencionan el Teorema recta-punto-plano por la misma razón que lo hicieron los integrantes del G1 y para justificar su respuesta final mencionan un teorema, que ya han estudiado al parecer, que garantiza que si cuatro puntos son no coplanares son no colineales cada tres.	Nuestra previsión de los aspectos teóricos involucrados en el examen de la situación era limitada. Porque además de requerir argumentos teóricos para determinar los planos, se requieren argumentos para justificar por qué otras configuraciones de los puntos no son posibles y para proporcionar la respuesta deseada que implica justificar porque cuatro puntos no coplanares son no colineales cada tres.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado de distintos puntos de vista en la interacción en grupos respecto a las condiciones que deben cumplir los cuatro puntos y que se pueden inferir o no de la condición de no coplanariedad dada en el enunciado.	En el G1 hay evidencia de duda respecto a si la no coplanariedad implica la no colinealidad. Sin embargo, la estudiante que parece sostener el punto de vista de que sí la implica no hace explicita su posición y predomina el razonamiento de su compañero que asume que no la implica. En el G2 consideran esta misma situación y concluyen correctamente apelando a un teorema que al parecer establecieron en un curso de geometría previo que señala que si cuatro puntos no son coplanares entonces cada tres son no colineales.	Parece ser que en el G1 la posibilidad de plantear un punto de vista divergente no se desarrolló probablemente por inseguridad de las estudiantes ante la actitud tan resuelta del compañero de trabajo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo la exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre acerca de la relación entre la no coplanariead de los cuatro puntos y la no colinealidad de cada tres. Y la argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos.	En el G1 la incertidumbre no evoluciona como necesidad intelectual al no ser planteados dos puntos de vista divergentes. En el G2 se plantean la duda de sí la no coplanariedad de los cuatro puntos implica la no colinealidad de cada tres y concluyen que existe un teorema por ellos estudiado el cual garantiza esa relación de causalidad lógica que satisface su duda.	No teníamos conocimiento del estudio previo en los cursos de geometría del estudio de esta relación como un teorema: Sí cuatro puntos son no coplanares entonces cada tres son no colineales.

A 2.1.5 Cambios en el diseño de la tarea.

La situación puede ser más abierta y dar lugar a mayor debate si se omite la palabra coplanares del enunciado para que sean consideradas las distintas posibilidades de relación entre los puntos y genere una mayor riqueza en la construcción de imágenes mentales.

A 2.2 TAREA 2, CICLO 2

A 2.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje.

Meta de aprendizaje

Determinar varios planos en una configuración geométrica dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Dados cuatro puntos ¿Qué condiciones entre ellos, dan lugar al máximo número de planos que pueden determinarse? Justifique.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibieron hojas de trabajo para desarrollar en grupo en las cuales consignan sus respuestas. No tenían restricciones en el uso de herramientas pues tenían disponibles en los grupos de trabajo los computadores con Cabri 3D.

Intervenciones previstas

Durante el desarrollo del trabajo en grupo, la profesora circula por el aula interviniendo puntualmente en el trabajo de los grupos si lo considera necesario o si es requerida por los estudiantes. En la sesión de trabajo siguiente a la presente, la profesora discute con toda la clase las soluciones presentadas por ellos en las hojas de trabajo y que ella ha ordenado para tal fin. Ilustra las representaciones sugeridas en las soluciones haciendo uso de Cabri 3D.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). En este momento del curso ya ha sido introducido en el sistema teórico el Postulado del espacio, que garantiza la existencia de puntos por fuera del plano. Esperamos que hagan uso de este postulado junto con el Postulado puntos-plano para determinar las condiciones de los puntos y el número máximo de planos por el cual se indaga en el enunciado, que es cuatro. Respecto a las condiciones de los cuatro puntos, nuestra expectativa es que lleguen a afirmar que cada tres deben ser no colineales y un cuarto no coplanar con los otros tres o expresado de otra forma: qué los cuatro puntos sean no coplanares. Acerca de la situación en la cual los cuatro puntos están alineados, esperamos que discutan las razones por las cuales esa configuración no garantiza la existencia de infinitos planos con el marco de referencia disponible en el sistema teórico en este momento del curso.

Enfoque en la mediación (Em). Como dijimos en el capítulo cinco, en este ciclo 2: “la profesora toma las soluciones consignadas por los diferentes grupos en sus hojas de trabajo y las organiza para presentarlas en la discusión de toda la clase. En esta discusión esperamos que las acciones emprendidas por la profesora amplíen a toda la clase la generación de incertidumbre, si no se produjo en el trabajo de los grupos, y alienten la producción de necesidad intelectual". Uno de los elementos relevantes previstos en este enfoque para este ciclo es el uso de la herramienta redefinir de Cabri 3D. Con esta herramienta la profesora hará una representación de las soluciones reportadas por los estudiantes ilustrando las situaciones en las cuales, con las condiciones establecidas por ellos, no se genera necesariamente la configuración de planos descrita por los estudiantes en su solución.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que se presenten puntos de vista diferentes en la interacción en los grupos de trabajo que generen duda en los estudiantes. Los puntos de vista pueden hacer alusión a cuatro puntos alineados, cuatro puntos no colineales o a tres puntos determinando un plano y un punto que no pertenezca al plano. En la interacción con la profesora se espera generar sorpresa y duda en los estudiantes al cuestionar sus soluciones usando la herramienta redefinir de Cabri 3D. Así que, la previsión es que la incertidumbre se produzca en dos momentos o al menos uno de los dos, en la interacción en los grupos de trabajo y en la conversación de toda la clase con la profesora.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). La discusión alrededor los puntos de vista diferentes debe llevar a los estudiantes a garantizar teóricamente cada una de las soluciones que se puede inferir de cada perspectiva. Si afirman qué los puntos alineados determinan infinitos planos deben soportar esto en el sistema teórico. Si plantean que tres puntos en un plano y un cuarto punto fuera del plano deben recurrir a garantías teórica para esta solución, como el Postulado del espacio y el Postulado tres puntos-plano. Estas acciones representan una evidencia de presencia de necesidad intelectual. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva, y en las expresiones verbales de ellos que sean evidencia de lo confiable que les resulta la solución.

A 2.2.3 Interacciones analizadas.

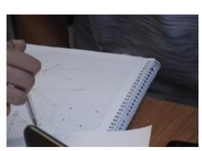
En el desarrollo de esta tarea se registraron tres tipos de interacción. El primero la interacción en dos de los grupos, el segundo la interacción de toda la clase con la profesora y el tercero una entrevista hecha por el investigador a toda la clase con la técnica *complentary accounts* mencionada en la metodología.

A continuación, la interacción en el primero de los grupos.

Tarea 2, ciclo 2, grupo 1. T2C2G1: Transcripción		Análisis
5 Carlos:	Usted dice que hay ahí como un tetraedro [esto lo plantea a partir de lo que propuso Juan].	Ei: Se verifica lo previsto en la THA pues surgen distintos puntos de vista respecto a la disposición de los cuatro puntos.
6 Juan:	Como un tetraedro.	
7 Carlos:	Si es un tetraedro, los máximos planos que puede sacar son cuatro ¿Y si los coloca colineales?	Ec: Aunque no se hace explícito en este fragmento han determinado cada uno de los cuatro planos usando tríos de puntos, es decir el Postulado puntos plano.
8 Juan:	Es que esa es, si los cuatro no son colineales, si los cuatro puntos no son colineales…	
9 Carlos:	Genera cuatro planos. Mire [dibujando en la hoja], usted tiene los cuatro puntos, tiene un tetraedro, por cada cara de ese [representa con el movimiento de las manos en el aire las caras] hay un plano, hay cuatro planos.	
10 Juan:	Pero siempre y cuando los puntos no sean colineales.	
11 Carlos:	Eso lo estamos suponiendo.	
12 Juan:	Con los cuatro colineales, no hay plano.	
13 Carlos:	Hay infinitos planos.	
14 Juan:	Ah sí claro.	
15 Carlos:	Porque vea [gira una hoja para representar lo que está diciendo].  Entonces son infinitos.	En: Una vez han surgido dos posiciones diferentes respecto al resultado de los cuatro puntos alineados Carlos amplia la exposición de sus argumentos para ser más persuasivo usando incluso un modelo físico para representar lo que está argumentando.
16 Juan:	Dados cuatro puntos [escribiendo], sí los cuatro puntos no son colineales entonces ¿Cuántos planos tenemos?	
17 Carlos:	Cuatro. Tenemos tres puntos y estos pertenecen a un plano alfa [representando sobre una hoja] y cojo un punto por allá que no está en un plano, pero como tengo tres puntos, estos otros tres puntos me generan un plano beta, pero estos tres puntos me generan un plano gama y estos tres un plano fi, entonces son cuatro. [Acá toma el computador, al parecer para representar lo que ha dicho], estos son los tres puntos de mi plano.	
18 Juan:	Pero suponiendo que hay uno por fuera ¿cierto? ¿Es un tetraedro cierto? Para que haya distintos planos los cuatro	

	tienen que estar en distintos semiplanos. Son colineales, pero no coplanares.	
19 Carlos:	No, si son colineales son coplanares porqué pertenecen a una misma recta.	
20 Juan:	Pero entonces cómo hacemos para que el plano haga una rotación.	En: El cuestionamiento de Juan remite al uso de la teoría pues se plantean como garantizar teóricamente la rotación que están representando. La indagación orienta es a lo que garantiza teóricamente que se pueden determinar los infinitos planos.
21 Carlos:	Ese es el lío, eso estoy echando cabeza.	
[…]		
39 Carlos:	Tiene que rotarlo sobre la recta (…) tenemos esos cuatro puntos, esos cuatro puntos me generan una recta. La recta es coplanar. ¿Pero a cuál plano?	En: El cuestionamiento que ha hecho Juan se expresa de manera más explícita en la afirmación de Jimmy, pues la garantía teórica para determinar esos infinitos planos es poder afirmar que existe un punto fuera de esa recta para determinar un plano y un punto fuera de ese plano para determinar un segundo plano.
40 Jimmy:	Es que para que haya más de un plano debe haber un punto que no esté contenido en el plano.	
[…]		
71 Juan:	Cuatro puntos colineales generan un plano no más	En: Carlos establece que no tienen las condiciones teóricas para garantizar que si los cuatro puntos son no colineales existe más de un plano que contiene a la recta.
72 Carlos:	Generan infinitos, es que mire genera infinitos planos, pero al mismo tiempo usted no está hablando de uno en específico.	
73 Juan:	Porqué estamos viendo como a un plano.	
74 Carlos:	No, no lo estamos viendo ni siquiera como un plano. Lo estamos viendo una recta, pero ¿La recta es coplanar? ¡Si! pero… ¿A cuál plano?... a un plano alfa, ah listo al plano alfa, pero no sé cuál es alfa.	
75 Jimmy:	Puede ser así, puede ser así [hace con la palma de la mano distintas inclinaciones para representar los planos].	

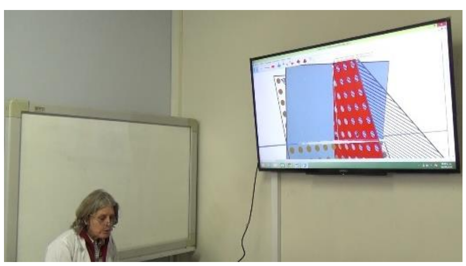
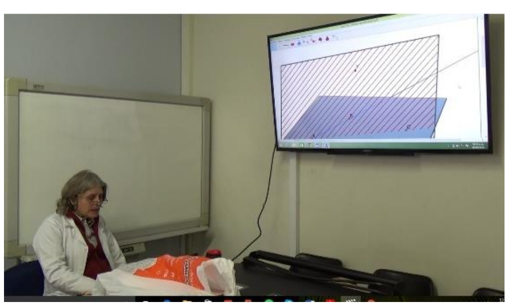
La interacción en el segundo de los grupos se produjo como sigue.

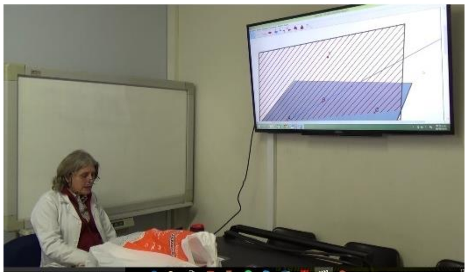
Tarea 2, ciclo 2, grupo 2. T2C2G2: Transcripción		Análisis
1 Paola:	Dados cuatro puntos ¿Qué condición entre ellos?	Ec: Es evidente que hacen uso del Postulado puntos-plano por la manera en la cual determinan los planos mencionando tres puntos no colineales.
2 Eric:	Si tenemos los cuatro, sabemos que cada tres son no colineales ¿Cierto? Estos tres dan uno, estos tres dan otro [señala la hoja en la que tienen una representación]. 	
3 Paola:	¿Pero si el punto está acá? [Señala en la hoja, dibujando un punto colineal con otros dos].	Ei: No hay evidencia de producción de incertidumbre pues, si bien Paola se plantea la posibilidad de que sean colineales no se genera a partir de esta consideración la duda
4 Eric:	No importa.	
5 Paola:	Tenemos estos tres no colineales y estos tres no	

	colineales [recorre con el lapicero los puntos en la representación]. 	prevista en la THA al responderse ella misma que "no da un plano" (8) y posteriormente hay consenso alrededor de la primera propuesta que afirma como condición que los puntos no sean colineales Em: Usan una representación plana acorde a lo que están planteando como solución.
6 Eric:	[Relee el enunciado] Si porque si nos dicen entre ellos… Al máximo, entonces primera… [señala algo en la hoja, pero no dice más].	
7 Lina:	Este es un plano y este es otro plano [al parecer está señalando en la hoja los tríos de puntos que han encerrado en un diagrama].	
8 Paola:	[Niega con la cabeza] Pero es que no da un plano cuando son colineales.	
9 Lina:	Ah sí, tendríamos un plano [señala nuevamente sobre la hoja].	Ei: Como se mencionó en la THA consideraron que la no colinealidad implica la no coplanariedad.
10 Paola:	Si, todo esto [indicando sobre la hoja].	
11 Lina:	Tres puntos no colineales dan un plano.	
12 Paola:	La condición es que no sean colineales.	
13 Eric:	¡Qué cada tres no sean colineales!	
14 Paola:	Qué tres puntos no sean colineales para generar el máximo [Eric asiente].	
15 Lina:	¿Y lo escribimos? [Le pasan la hoja sus compañeros].	

En la siguiente clase a partir de las producciones de los estudiantes la profesora desarrolló la siguiente discusión con toda la clase.

Tarea 2, ciclo 2, profesora. T2C2P: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Este fue el taller que dio el profesor Armando [está leyendo en la pantalla]. Dados cuatro puntos ¿Qué condiciones permiten determinar el máximo número de planos? Por favor recuerden que quiere decir determinar, determinar es que yo pueda realmente asegurar que ahí hay un plano, que hay condiciones que me lo permiten asegurar. Ya habíamos hablado de que hay muchas maneras de determinar un plano ¿Cierto? Bien, entonces y justifique [continúa leyendo] entonces algunos de ustedes me dijeron en el taller "Que no sean colineales tres a tres los puntos" entonces vamos a mirar este archivo [despliega un archivo en Cabri 3D] aquí hay cuatro puntos ¿los ven? ¿los alcanzan a ver?	Em: La profesora tomó dos de las conclusiones de los estudiantes. La primera que corresponde a lo planteado por el GT2 que afirma que la condición es que "no sean colineales tres a tres". Los estudiantes suponen que de esta manera se obtienen cuatro planos ella demuestra con una representación simple (no dinámica) en Cabri 3D en la cual se cumple que no son colineales tres a tres y queda determinado un solo plano. Luego toma la segunda de las conclusiones que se corresponde con lo planteado por el GT1 que afirma "qué un punto no sea coplanar con los otro tres mientras que los tres puntos coplanares determinan un plano". Parte de la misma representación que usó para el caso anterior y

	 (…) Bueno ahí hay cuatro puntos que cumplen la condición que decía ese grupo, tres a tres no son colineales ¿Sí o no? ¿De acuerdo? Pero ¿Cuántos planos tengo? Uno ¿Será ese el número máximo? ¿Quién sabe? Entonces vamos a mirar más respuestas, “que no sean colineales tres a tres” esas son las condiciones que dizque ayudan a determinar el máximo número, pero ahí hay uno solo y cumple la condición que dieron. “Qué un punto no sea coplanar con los otro tres mientras que los tres puntos coplanares determinan un plano” [Leyendo] entonces estoy en esta situación, me vengo para acá [despliega nuevamente el archivo en Cabri 3D] ahí no tengo la condición que me están pidiendo. Tengo tres puntos que me podrían determinar el plano y voy a, a ver si me acuerdo, voy a sacarlo, voy a sacar uno de esos puntos, entonces cómo lo voy a sacar, entonces voy a hacer un punto y con el shift ¿Se acuerdan? lo voy a sacar y se supone que quedó fuera del plano [va haciendo esto con el programa a medida que habla] y voy a sacar a uno de estos puntos de mi plano, voy a sacar al punto C, lo voy a redefinir, si porque la condición decía que estuviera por fuera, lo voy a redefinir al punto C a este nuevo punto en el espacio [obtiene una nueva configuración].  Y ahí ¿Qué sucede?	hace uso de la herramienta *redefinir* de Cabri 3D para redefinir uno de los puntos que pertenece al plano para que no pertenezca a éste, se determinan entonces cuatro planos y se percibe una reacción de sorpresa en algunos de los estudiantes que atienden su explicación.
[…]		
9 Profesora:	(…) Y en la última dice “Los cuatro puntos deben ser colineales para que haya infinitos planos que los contienen” Entonces me voy a cerrar éste para abrir el otro, aquí vengo estoy en éste. 	Em: La profesora toma otra de las afirmaciones de las producciones de los estudiantes. En este caso una que se corresponde con algo que surgió en la discusión del GT1, que afirma que “Sí los cuatro puntos están alineados hay infinitos planos”. Hace uso nuevamente de la herramienta *redefinir* de Cabri 3D para redefinir ahora un punto que no pertenece al plano y no está alineado con los otros tres para hacer que quede alineado con estos puntos e ilustrar lo que sucede con los planos que están representados en el computador y esto produce una recta, los planos desaparecen. Nuevamente se perciben algunas reacciones de sorpresa por parte de los estudiantes que atienden la explicación.

	Y me dicen, dicen que, los cuatro puntos deben ser colineales para que haya infinitos planos que los contienen, entonces voy a volver, este punto lo voy a redefinir otra vez, este punto se va a volver colineal y este también ¿Cierto?  [Ha señalado X sobre la representación] pero si lo hago ¿Qué va a pasar? Va a quedar solo una recta ¿De acuerdo? Hagámoslo pues, voy a poner otro punto aquí en la recta, debo estar segura de que quede en la recta, que me diga esta recta y voy a redefinir a este punto [X] para que sea éste  No hay planos, no hay manera de determinar planos, entonces ¿Qué fue lo que pasó? Y estas personas se imaginaron [Ha vuelto a la representación inicial en el programa] que había otro punto y que ese otro punto nos iba a dar infinitos planos, porqué estaría moviendo este punto en el espacio y ese punto me iba a determinar más planos ¿Sí?

A continuación, la interacción de la clase con el investigador, que se produjo en una sesión de trabajo posterior a la de la interacción con la profesora y en la cual se mostraron fragmentos de vídeo de ésta para apoyar la formulación de las preguntas.

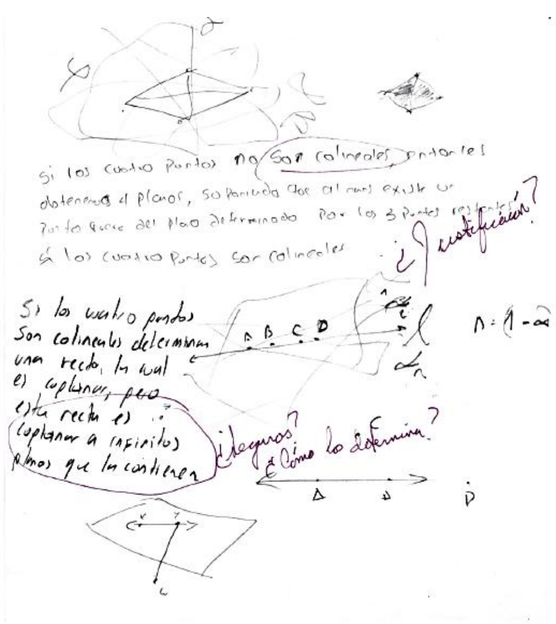
Tarea 2, ciclo 2, investigador. T2C2I: Transcripción		Análisis
Investigador:	Esa era una de las respuestas. Y en la otra, un grupo escribió que “Un punto no sea coplanar con los otros tres mientras que los otros tres determinan un plano” y la profesora les hizo esta representación, la profesora hizo esto, ella tenía en Cabri representado eso [reproduce el vídeo el momento que usó el redefinir] ¿Si recuerdan esas dos partes de la clase? Concretamente les quiero preguntar si esa actividad que realizó la profesora generó	Em y Ei: En esta parte es manifiesto el interés por indagar si la actividad desarrollada por la profesora cumplió su función de generador de incertidumbre.

	en ustedes alguna sorpresa o algún cambio respecto a lo que tenían pensado en el enunciado. Pues así en general [Luego de una pausa en la cual ninguno tomó la palabra] como la sensación que les generó eso o no les generó.	
[…]		
Carlos:	Lo que pasa es que bueno, en la clase anterior alcanzamos con los computadores, por lo menos el grupo de nosotros a hacer las representaciones. Una cosa es hacerla en la hoja que sería el plano y otra cosa es hacerla en el equipo. Entonces, digamos la primera, que los cuatro no sean colineales, entonces en la mente de uno ya está como por supuesto que ya no son coplanares, pero no es cierto. Entonces digamos que, como lo que yo veo ahí es que tener esa visualización de pasar del plano al espacio si requiere como un grado más y que esas herramientas le sirven a uno para ver eso que digamos, lo que uno dice, uno lo tiene en la mente que es así, pero le faltan detalles para tener bien fundamentado lo que está diciendo.	Em: Reconoce el papel desempeñado por el uso que hace de Cabri 3D la profesora para ampliar su repertorio de imágenes respecto a la geometría del espacio.
[…]		
Investigador:	Si ustedes no tienen respuesta, ahora les voy a mostrar la cámara que los registra a ustedes, entonces les voy a preguntar a algunos de ellos. César nos dio una respuesta, gracias. Entonces ahora de acuerdo con lo que yo miré que ocurrió con la cámara, yo tengo esa cámara mirándolos a ustedes y otra a la profe, entonces ahora voy a preguntar a algunos de ustedes. Ahí también van a ver lo que atienden ustedes en clase.	
[…]		
María:	Fue cuando la primera gráfica que hizo la profe, entonces cuando ella redefinió un punto y ahí fue como que los dos planos fueron el mismo [une las palmas de las manos para representar lo que está diciendo].  Entonces yo: ¡uy que pasó aquí! [simula gesto de sorpresa], entonces fue como ese, como esa visualización, cuando al redefinir el punto se juntaron los dos planos [Une las palmas para representar lo que vio y está comentando].	Em: Reconoce que experimentó sorpresa ante la situación ilustrada por la profesora con el uso de Cabri 3D. Aunque no amplía la información acerca de si esta sorpresa le motivó a indagarse por las conclusiones que tenía acerca de la tarea.
Maite:	Bueno, en mi caso me sorprendió que por ejemplo en plana uno tenía entendido que tres puntos colineales determinaban infinitos puntos, digo, infinitos planos. Pero ya cuando uno pasa a graficar, uno encuentra que eso no es así, porqué están es contenidos en una recta, pero no en infinitos planos	Ei: En este caso si señala puntualmente el conocimiento que se cuestionó con la actividad presentada por la profesora.
Profesora:	Todavía no se sabía que están en infinitos planos.	

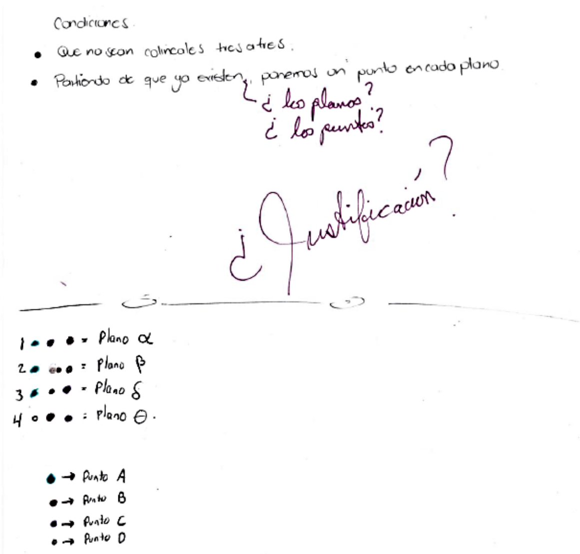
[…]

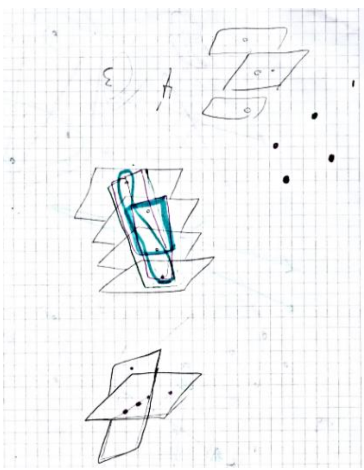
María:	Mi cara toda expresiva, no yo creo que fue lo mismo, fue como lo que nos proporciona el programa, o sea, la facilidad de mirar, o sea, los diferentes planos que se formaron, fue eso, como la impresión de la imagen.	Em: Alude nuevamente a su reacción de sorpresa y a los aspectos perceptuales de la situación.

A 2.2.3 Hojas de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Carlos, Juan y Jimmy 	Ec: Escriben como primera solución la condición que los cuatro puntos no sean colineales, pese a haber enunciado en la discusión la condición de uno no coplanar con otros tres. Como segunda solución enuncian la colinealidad de los cuatro puntos hablando de infinitos planos, pese a no haber llegado a concluir en la discusión como garantizar esto. Em: No hay evidencia de este enfoque. Dado que la intervención de la profesora fue posterior a la producción de estas hojas de trabajo. Ei: Consignar las dos soluciones evidencia que no llegaron a una solución que les resultase concluyente y la duda expresada en la interacción, persistió. En: Aunque los enunciados tienen estructura condicional, no hay evidencia en ellos de búsqueda teórica.

Hoja de trabajo de Eric, Paola y Lina





Ec: El listado de tríos de puntos evidencia el uso del Postulado puntos-plano.

Em: No hay evidencia de este enfoque. Dado que la intervención de la profesora fue posterior a la producción de estas hojas de trabajo.

Ei: No hay evidencia de producción de incertidumbre en lo consignado acá.

En: No hay evidencia de búsqueda teórica en lo consignado acá.

A 2.2.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran el Postulado del espacio, el Postulado puntos-plano y que hicieran la consideración de las posibles configuraciones de los cuatro puntos.	En el G1 y el G2 hay evidencia del uso del Postulado puntos-plano. No hay evidencia del uso del Postulado del espacio en ninguno de los dos grupos. En el GT1 consideran lo que ocurriría sí los cuatro puntos estuviesen alineados, si no lo están y si uno no pertenece al plano determinado por los otros tres. En el G2 mencionan la posibilidad de que estén alineados, pero no la discuten. En las hojas de trabajo de los dos grupos mencionan la no colinealidad de los cuatro puntos, pero no mencionan la no coplanariedad.	Puede haber una debilidad en el enunciado ya que al dejar a la consideración de los estudiantes las diferentes configuraciones puede ser esta la causa de que esa consideración no se presente siempre.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que la acción de la profesora con el uso de Cabri 3D generase en los estudiantes sorpresa y les hiciera indagarse por las soluciones que plantearon a la tarea.	En el momento de la interacción de toda la clase con la profesora existieron evidentes reacciones de sorpresa entre los estudiantes. En el momento de la interacción con el investigador una de las estudiantes reconoció haberse sorprendido con el resultado, más en su respuesta no expresa que esto haya motivado una indagación conceptual en ella. Otros dos estudiantes expresaron en la conversación-entrevista con el investigador algún nivel de cuestionamiento en sus concepciones previas a partir de lo hecho por la profesora.	En el momento de la interacción de toda la clase con la profesora existieron evidentes reacciones de sorpresa entre los estudiantes. En el momento de la interacción con el investigador una de las estudiantes reconoció haberse sorprendido con el resultado, más en su respuesta no expresa que esto haya motivado una indagación conceptual en ella. Otros dos estudiantes expresaron en la conversación-entrevista con el investigador algún nivel de cuestionamiento en sus concepciones previas a partir de lo hecho por la profesora.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la incertidumbre surgiese motivada por puntos de vista diferentes dentro de los grupos acerca de la configuración de los cuatro puntos y a partir de la interacción con la actividad preparada por la profesora para el	En el G1 surgieron puntos de vista diferentes acerca de la configuración de los cuatro puntos y esta duda generó una discusión acerca de cómo garantizar los planos que quedaban determinados. En el G2 se insinúa un punto de vista diferente pero no se desarrolla un debate, predomina un punto de vista. Como se mencionó en el apartado anterior, existieron reacciones de sorpresa a lo hecho por la profesora y algunos de los estudiantes expresaron en la interacción con el	En el momento de la interacción de toda la clase con la profesora existieron evidentes reacciones de sorpresa entre los estudiantes. En el momento de la interacción con el investigador una de las estudiantes reconoció haberse sorprendido con el resultado, más en su respuesta no expresa que esto haya motivado una indagación conceptual en ella. Otros dos estudiantes expresaron en la conversación-entrevista con el investigador algún nivel de

momento de interacción con toda la clase.	investigador que la acción de la profesora motivó el cuestionamiento de sus concepciones.	cuestionamiento en sus concepciones previas a partir de lo hecho por la profesora.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que a partir del planteamiento de diferentes puntos de vista acerca de la configuración de los cuatro puntos, discutiesen las garantías teóricas o la ausencia de éstas para cada configuración. Asimismo, se esperaba que la argumentación aportada les resultase satisfactoria como solución.	En el G1 mencionan la necesidad de tener elementos teóricos para garantizar la existencia de más de un plano cuando los puntos están alineados, pero no llegan a una conclusión al respecto de tal manera que no hay expresión de *justificación epistemológica*. En el G2 no hay evidencia de producción de *necesidad intelectual.* En la interacción con el investigador, los estudiantes que expresaron haberse cuestionado sus concepciones no aportaron más información acerca de si ese cuestionamiento motivó una búsqueda teórica.	

A 2.2.5 Cambios en el diseño de la tarea.

Decidimos incorporar desde el principio de la tarea la construcción y exploración con Cabri 3D para involucrar más a los estudiantes en la actividad mediada.

A 2.3 TAREA 2, CICLO 3

A 2.3.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

Determinar varios planos en una configuración geométrica dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Dado el ΔABC sean D y F puntos tal que F pertenece a la recta AB y D pertenece a la recta AC, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que pertenece a la recta DI y un punto G tal que pertenece a la recta FH.

d) Nombre tipos de figuras, definidas en nuestro sistema teórico, que quedan determinadas con algunos de esos puntos. Dé dos ejemplos de cada tipo si es posible. Justifique su respuesta.

e) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta.

f) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con el plano determinado por A, B y C?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibieron hojas de trabajo para desarrollar en grupo en las cuales consignan sus respuestas. Debían representar la configuración descrita en Cabri 3D.

Intervenciones previstas

Durante el desarrollo del trabajo en grupo, la profesora circula por el aula interviniendo puntualmente en el trabajo de los grupos si lo considera necesario o si es requerida por los estudiantes. En la sesión de trabajo siguiente a la presente, la profesora discute con toda la clase las soluciones presentadas por ellos en las hojas de trabajo y que ella ha ordenado para tal fin. Ilustra las representaciones sugeridas en las soluciones haciendo uso de Cabri 3D.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con la primera pregunta se quiere indagar por el uso de la definición de cuadrilátero. En el contexto del curso de Geometría del Espacio los estudiantes deben discernir que la verificación del cumplimiento de la definición implica que los cuatro puntos deben estar en el mismo plano. A las respuestas a esta pregunta no les hacemos seguimiento en el análisis pues el interés principal en esta tarea es la determinación de más de un plano en el espacio.

Con la segunda pregunta se espera que los estudiantes usen los elementos teóricos estudiados para determinar planos: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano y Teorema rectas-plano. Adicionalmente, para justificar que los planos son diferentes deben hacer uso del Postulado de la llaneza del plano.

La intención de la tercera pregunta es introducir el Postulado de intersección de planos y el Teorema respectivo. Los estudiantes deben argumentar por qué el plano determinado por los triángulos que no comparten algún vértice con el triángulo ABC es único y por qué se interseca con el plano base en la recta. Se espera que usen elementos teóricos como el Teorema rectas-plano y aspectos generales de la teoría de conjuntos para justificar la intersección.

Enfoque en la mediación (Em). Cabri 3D es esencial para producir una representación dinámica de la situación. En lápiz y papel la representación es compleja de producir y no aporta la información que se requiere para el desarrollo de la tarea. Cabri 3D cumple su papel en la producción de la representación, pero no está prevista una acción decisiva de los arrastres u otras herramientas del entorno. Es en la interacción entre los estudiantes donde se espera generar incertidumbre entre los estudiantes, acerca de elementos como: ¿Cómo justificar que son distintos los planos? ¿Cómo justificar que la intersección entre los planos es una recta?

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que a partir de lo solicitado en los enunciados de la tarea se genere la duda a partir de la discusión de las preguntas b) y c). Al abordar la respuesta a la pregunta b) es sencillo verificar visualmente en Cabri 3D la posibilidad de determinar tres planos diferentes. Teóricamente hay que justificar por qué son diferentes y allí deben hacer los estudiantes una búsqueda de los elementos en el sistema teórico de referencia que permitan garantizar este hecho. En el desarrollo de la pregunta c) es fácil comprobar visualmente que los triángulos están en un solo plano por estar los puntos sobre rectas que se intersecan. La exigencia se presenta en garantizarlo teóricamente, así como argumentar que los dos planos se intersecan en la recta DF. Esperamos que el debate en torno a estos aspectos genere incertidumbre en los estudiantes y motive su búsqueda teórica.

En la figura 6.3 se presenta una representación de la situación y uno de los triángulos que no comparte vértice con el triángulo ABC, en este caso el FHI. Los triángulos que no comparten vértice con el triángulo ABC son los determinados por los puntos D, F, G, H, I.

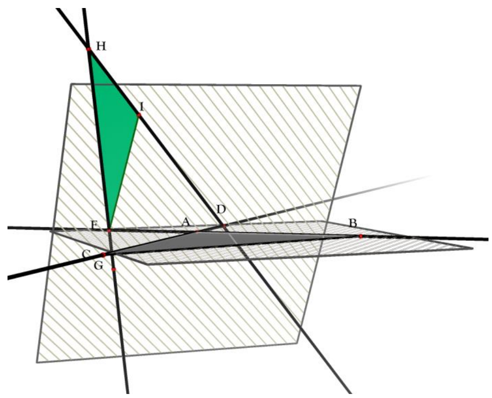


Figura 6.3 Una representación de la situación descrita

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Como se mencionó en el enfoque en la generación de incertidumbre, esperamos que los estudiantes se propongan soportar teóricamente porqué los planos son diferentes, porqué están en un mismo plano los triángulos y porqué los planos se intersecan en la recta DF. Los argumentos que expresen para dar respuesta a estas preguntas serán la evidencia de la producción de necesidad intelectual. Sí estos argumentos resultan persuasivos y satisfactorios para los estudiantes se habrá producido justificación epistemológica.

A 2.3.2 Interacciones analizadas.

En el desarrollo de esta tarea se registraron dos de los grupos. A continuación, la interacción en el primero de los grupos.

Tarea 2, ciclo 3, grupo 1. T2C3G1: Transcripción		Análisis
1 Jeison:	Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial, justifique su respuesta [Leyendo]. Si yo creo que	Ec: El planteamiento de Jeison es evidencia del uso del Postulado puntos-plano al mencionar

	si ¿Cierto que sí? Porque tenemos más de tres puntos no colineales y dos que no son coplanares	tres puntos no colineales. Byron alude al Postulado del espacio.
2 Byron:	Tres puntos no colineales y un punto que no está en el plano	
[…]		
8 Byron:	Pero esos no, lo seguros son los de acá [señala rápidamente la pantalla, aparentemente los puntos que pertenecen al plano base, probablemente por ser dado que son no colineales].	Ec: Están haciendo uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos solicitados en la parte b) del enunciado.
9 Antonio:	Ah usted dice éstos [señala en la pantalla al punto I y otro punto en una recta que contiene a I (figura A3)]. 	Ei: La discusión en este grupo no se orientó en la dirección prevista en la THA. Pues, en lugar de discutir porque los planos son diferentes, discuten si se pueden determinar los tres planos.
10 Jeison:	¿Tenemos tres puntos no colineales y uno no coplanar?	
11 Antonio:	Póngale aquí, triángulo ABC	
12 Jeison:	¿Y un punto no coplanar?	
13 Antonio:	Si	
14 Jeison:	Y un punto… [escribiendo].	
15 Antonio:	Póngale I.	
16 Jeison:	Ya con eso puedo definir más de tres planos ¿Cierto?	
17 Antonio:	Puede definir tres planos	
18 Jeison:	¿Ya con eso puede definir tres planos aquí?	
19 Antonio:	Si. ¿Cómo es que dice? [Se refiere a la pregunta c)]	
[…]		
38 Antonio:	¿Qué relación hay de éste con este plano? [Han transcurrido algunos minutos en los que Byron ha estado corrigiendo lo que escribió Jeison, en ese lapso Antonio ha representado el plano mencionado con Cabri, hasta el momento hablaron del plano sin representarlo].	Ei: En la pregunta que se formula Jeison (41) surge, como se tenía previsto en la THA, la necesidad de establecer teóricamente la intersección de los planos.
39 Byron:	Oiga si… son diferentes [está mirando la hoja].	
40 Antonio:	Pero se intersecan en una recta [señala la pantalla].	
41 Jeison:	Dos planos distintos…ese es un plano y el otro es el otro plano…se intersecan… ¿Dos planos se pueden intersecar?	
42 Antonio:	Pero en este caso se intersecan, mire [hace arrastre bola de cristal].	Ei: Encuentran la relación entre los dos planos prevista en la THA. Que su intersección es la recta DF.
43 Byron:	Ole sí. ¿Por qué contestamos esto?, Si: ¿Qué relación tienen esos planos con el plano determinado por ABC? [Leyendo, le pasa la hoja a Jeison].	En: El hallazgo de la intersección no motiva la búsqueda teórica en los estudiantes de lo que han verificado empíricamente.
44 Jeison:	Termínelo, termínelo.	

45 Bayron:	Pero ¿Cómo?, los dos se intersecan
46 Jeison:	Nooo estúpido, este plano que contiene a todos los planos se interseca con los otros tres puntos, con el plano determinado por los otros tres puntos
47 Antonio:	En la recta DF, en la recta DF

En el segundo de los grupos la interacción es la siguiente.

Tarea 2, ciclo 3, grupo 2. T2C3G2: Transcripción		Análisis
39 Investigador:	Perdón una pregunta. ¿Ustedes tienen beta, fi y gama, cierto? O sea que ya tienen los tres planos distintos al inicial	Ec: Citan el Postulado de la llaneza Ei: Aunque motivadas por el investigador se hacen la pregunta acerca de porqué los planos son distintos. En: Elaboran un argumento con base en elementos teóricos para justificar por qué los tres planos que determinaron son distintos.
40 Carolina:	Al inicial.	
41 Investigador:	Les falta lo de justificar.	
42 María	A un plano inicial alfa [le indica a Violeta].	
43 Carolina:	Pues ahí dice: justifique su respuesta. En ese también [señala la hoja de trabajo].	
44 María	¿Por qué son distintos a alfa? [Mira la pantalla]. Ah por el triángulo ¿No?	
45 Carolina:	¿Por qué el triángulo?	
46 María:	Pues porque el triángulo está en alfa, por la llaneza las rectas están en alfa, y los puntos que…cuando trazamos las rectas, los puntos ubicados en esas rectas…por la llaneza las rectas están en alfa, los puntos ubicados en las rectas están en alfa.	
[…]		
59 Investigador:	¿Beta lo determinaron con tres puntos?	En: Desarrollan el argumento que plantearon en la anterior interacción para justificar porque los tres planos son distintos.
60 Las tres:	Sii. [Arriba ha dicho Carolina que fue con un punto y una recta].	
61 Investigador:	¿Y uno de los tres puntos pertenece a alfa?	
62 Carolina:	B y C pertenecen a alfa.	
63 Violeta:	H no.	
64 Carolina:	H no.	
65 Investigador:	H no pertenece a alfa. ¿Por qué H no pertenece a alfa?	
66 Carolina:	Porque I no pertenece a alfa y luego se traza una recta que contenga…bueno, la recta DI y en esa recta se ubica un punto, entonces el punto no estaría en el plano.	
67 Investigador:	¿No estaría en el plano?	
68 María:	Porque si estuviera en el plano, entonces la recta que	

	trazamos con H estaría en el plano, por llaneza.	
69 Violeta:	Estaría en el plano.	
70 Carolina:	¿Escribiste todo eso? [Se dirige a Violeta]	
71 Investigador:	Perdón un momento ¿Y el argumento les funciona para fi y para gamma?	
72 Carolina:	Si [revisan la representación y el enunciado en la hoja de trabajo]	
73 Violeta:	Entonces hagámoslo general. O sea, todos tienen dos en el plano.	
[…]		
126 Violeta:	Ah tienen es relación entre ellos. Si, siempre son el mismo.	Em: Hacen uso del Cabri 3D para explorar las relaciones entre los planos. Verificando una posible perpendicularidad perceptualmente, haciendo arrastres bola de cristal. No estaba previsto este uso.
127 María:	¿Pero con alfa?, Porque tienen también HGD, genera el mismo plano.	
128 Violeta:	Y si haces DFI aquí también da el mismo.	Ei: Constatan que la relación entre los dos planos es que se intersecan en la recta DF.
129 María:	¿Pero qué relación tienen con alfa? Ay no, no, no espere [toma el ratón del computador para hacer un arrastre bola de cristal].	
130 Violeta:	¿Será que son perpendiculares? Ah, ja ja ja. No hay relación como GeoGebra.	
131 María:	No parecen perpendiculares.	
132 Violeta:	No parecen.	
133 María:	Y no creo, porque si yo muevo a I.	
134 Violeta:	No porque I siempre va a esta…	
135 Investigador:	¿Para qué lo giro así María?	
136 María:	Para saber si eran los planos perpendiculares.	
137 Investigador:	¿Planos perpendiculares?	
138 Carolina:	Eso no existe.	
139 María:	No existe.	
140 Investigador:	¿Y usted cómo puede saber si son perpendiculares los planos?	
141 María:	Intuición.	
142 Investigador:	¿Si se veían?	
143 María	Si.	
144 Investigador:	Ah ya. Bueno y si les hubiera dado perpendicular en alguna posición ahí. ¿I tenía alguna característica especial o lo podían cambiar? ¿Cuál es la condición que les dieron para I?	
145 Violeta:	Sólo que estaba fuera del plano.	
146 Investigador:	O sea que, si les daba perpendicular en una posición, I podría estar en otra posición ¿Se mantendría o no se mantendría?	

147 María:	No. [hace arrastres bola de cristal en la representación]. ¿Intersecan a alfa en una recta?
148 Violeta:	Ay si, comparten la recta DF

A 2.3.3 Hojas de Trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Antonio, Byron y Jeison ¿triángulos? b) tenemos 3 puntos no colineales (ΔABC) y un punto 4 no coplanar (I) ya con eso puedo definir 3 planos. ¿cuáles? c) Todos los puntos están contenidos, en 2 rectas que se intersecan por lo cual están contenidas 3 en el mismo plano y a su vez los triángulos son todos coplanares, y este se interseca con el plano aABC en la $\overleftrightarrow{DF}$ ¿Quiénes?	Ec: Se evidencia el uso del Teorema rectas-plano en la respuesta c) y una propiedad de los triángulos (ser coplanares). Hay una formulación condicional en su respuesta b), sí se tienen tres puntos no colineales y un punto no coplanar al plano determinado por los tres puntos entonces se pueden determinar tres planos. Em: No hay evidencia para caracterizar la presencia de los elementos de este enfoque. Ei: Consignan que los planos se intersecan en la recta DF en su respuesta c). En: Como se mencionó en Ec, hay una especie de teorema para garantizar porque se pueden determinar tres planos, perdieron de vista el argumentar porque son distintos. En la respuesta a c) no hay un argumento de porque la intersección es esa recta.
Hoja de trabajo de María, Violeta y Carolina b) S_1; β plano β_{CBH}, Ψ plano . Ψ_{ADH}, γ plano γ_{FDH} C, B, A, D, F $\in \alpha$ Por el P. Llaneza, luego $\overleftrightarrow{DI} \not\subset \alpha$ 6 por el P. Llaneza, por definición de subconjuntos $H \notin \alpha$ entonces C,B,H no colineales, A,D,H no colineales y F,D,H no colineales.	Ec: Mencionan explícitamente el postulado de la llaneza Em: No hay evidencia para caracterizar la presencia de los elementos de este enfoque. Ei: Al presentar la argumentación de porque son diferentes los planos hay evidencia de la percepción de este elemento. No consignaron su respuesta a la pregunta c). En: Hay un argumento con base en elementos teóricos para garantizar que los tres planos son diferentes.

A 2.3.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran el Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano, Teorema rectas-plano y Postulado de la llaneza. Adicionalmente que se plantearan la necesidad el Postulado de intersección de planos para justificar la intersección de planos.	En el G1 aluden al Postulado puntos-plano y al Teorema rectas-plano, para determinar los planos solicitados en la parte b). En el G2 mencionan el Postulado de la Llaneza para argumentar por qué son distintos los planos en la parte b).	La pregunta b) probablemente no es clara con respecto a la intención que teníamos para la tarea, pues al preguntar “pueden” la respuesta es que si se pueden determinar planos distintos y justificar puede ser el cómo determinarlos. No se enuncia explícitamente que justifiquen porque los planos son distintos. Eso pudo dar origen a esas respuestas. Entonces no emergen en su totalidad los elementos teóricos previstos.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que la representación en Cabri 3D fuese útil para motivar la discusión de los elementos que deben justificar.	En el G1 la representación en Cabri 3D no parece cumplir un papel relevante, pues cuando se plantean lo de justificar en la parte b) no han construido aún el modelo en el software. En la parte chacen arrastre bola de cristal sobre la representación. En el G2 para la justificación de la parte b) no hay evidencia del uso de Cabri 3D, en la parte c) si hicieron arrastre bola de cristal y arrastres sobre la representación para determinar la relación entre los planos.	Se tenía una previsión de una contemplación estática de la representación, en la práctica. No hay un elemento en el diseño que induzca a hacer uso de los elementos dinámicos del programa, sin embargo, en el GT2 hicieron uso de los arrastres para generar su respuesta.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la solicitud de justificar en las partes b) y c) de las preguntas generase duda en los estudiantes.	En el G1 no se interpretó como se pretendía la pregunta de la parte b), pues no se plantearon el justificar porque los planos son diferentes, justificaron por qué existen. En la parte c) si se planteó por parte de uno de los integrantes el por qué los planos se intersecaban, pero no se le dio desarrollo a esa discusión. En el G2 discutieron por qué los planos son diferentes impulsadas inicialmente por la pregunta formulada por el investigador.	Las limitaciones en el diseño de la tarea pueden tener relación con lo señalado en el Ec y en el Em. La manera de formular las preguntas y el uso de la herramienta de exploración quizás no están suficientemente estructurados para generar incertidumbre.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que la duda generada en torno la justificación acerca del porque los tres planos son distintos (en la parte b de la pregunta) o porque comparten la recta de intersección (en la parte c) motivase la búsqueda teórica y diera lugar a argumentación productiva.	En el G1 no produjeron las justificaciones solicitadas. En el G2 justificaron el por qué los planos son diferentes, produciendo una argumentación con base en los elementos teóricos de referencia. La parte c) de la pregunta no generó argumentos teóricos.	Como se mencionó en el Ed quizás el diseño es muy débil para la generación de incertidumbre y siendo esta la chispa inicial pues es poco probable, como se verificó, que se produzcan necesidad intelectual y justificación epistemológica.

A 2.4 CONCLUSIONES DE LOS ENFOQUES EN LOS TRES CICLOS PARA LA TAREA DOS

A 2.4.1 Enfoque en el contenido (Ec).

En los tres ciclos la mención del Postulado puntos-plano se produjo. En el Ciclo uno algunos elementos teóricos que no contemplamos en la THA aparecen. Estos elementos están relacionados con la argumentación acerca de porqué de acuerdo con lo dado en el enunciado se descarta que los cuatro puntos sean colineales, el recurrir a la combinatoria o incluso la existencia de un teorema que permite inferir que si cuatro puntos son no coplanares entonces son no colineales cada tres. En el Ciclo tres no aparecieron algunos de los elementos previstos en la THA, quizás por las limitaciones en la manera de plantear las preguntas b) y c).

A 2.4.2 Enfoque en la mediación (Em).

Las acciones previstas en este enfoque parecen haber sido efectivas en el Ciclo dos particularmente en la interacción con la profesora pues, como se describió, estas acciones generaron algún nivel de incertidumbre en los estudiantes expresada como sorpresa. En el Ciclo tres puede mejorarse el papel asignado a la herramienta Cabri 3D para desarrollar exploración de condiciones además de la simple construcción de la representación.

A 2.4.3 Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei).

Lo previsto en la THA para este enfoque se verifica parcialmente en los tres ciclos. Hay evidencia de la emergencia de incertidumbre, pero en todos los casos no es posible asegurar que está directamente relacionada con la forma en la cual se diseñó la tarea, excepto en la intervención de la profesora en el Ciclo dos. Depositamos nuestra confianza en que la incertidumbre se expresase como duda producto de las diferentes opiniones que se produjesen en la exploración en grupos por parte de los estudiantes, pero esta visión constituye de alguna manera en depositar la confianza en hechos contingentes para la generación de incertidumbre. El aspecto positivo de la generación de incertidumbre en el Ciclo dos estuvo en el resultado obtenido en la mediación que hace la profesora con Cabri 3D y la herramienta *redefinir*.

A 2.4.4 Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En).

Los aspectos de este enfoque previstos en la THA y que son nuestro principal interés en todo el diseño no emergen de manera evidente en los tres ciclos. La secuencia deseada incertidumbre-necesidad intelectual-justificación epistemológica no se presentó en ninguno de los grupos en los tres ciclos. Este hecho está probablemente relacionado con lo señalado antes acerca de la generación de incertidumbre, si ésta depende de aspectos que escapan al diseño previo de la tarea, la posible evolución como necesidad intelectual también se debilita.

ANEXO 3

TAREA 3

A3 ANÁLISIS DE LA TAREA 3

El enunciado se modificó entre el ciclo uno dos, enfatizando en la anticipación, pero sobre el mismo planteamiento. Para el ciclo tres el enunciado tuvo mayores cambios.

A 3.1 TAREA 3, CICLO 1

A 3.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

Determinar un número planos en una configuración específica de puntos dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α. ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.

Instrucciones adicionales

En las instrucciones que se darán para el desarrollo de la tarea se indicará a los estudiantes qué inicialmente planteen su solución haciendo uso únicamente de lápiz y papel, Una vez resuelta de esa manera, tendrá lugar en el desarrollo de la tarea una segunda parte en la cual se les hará entrega del material concreto: palos, plastilina y un cartón para usar como plano base y se les pedirá que examinen de nuevo su solución construyendo un modelo físico de la situación con el material entregado.

Intervenciones previstas

Como en las demás tareas del Ciclo 1 acá no hay prevista una acción decisiva de la profesora en la interacción con los grupos y tampoco un momento de discusión con toda la clase.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los aspectos de contenido involucrados en el desarrollo de esta tarea ya han sido estudiados previamente por los estudiantes, como se mencionó en el Capítulo 4 al describir los participantes en el Ciclo 1. Esperamos que los estudiantes determinen la cantidad exacta de planos con la configuración de puntos dada. Pueden usar elementos del sistema teórico como: el Teorema recta-punto-plano, el Postulado puntos-plano y el Teorema rectas-plano. Dado que son cuatro puntos en un plano, nuestra hipótesis es que usaran como modelo para determinar los planos un cuadrilátero ABCD que puede establecerse con los cuatro puntos coplanares (figuras 6.5 y 6.6) y por lo tanto es probable que el elemento teórico más usado sea el Teorema recta-punto-plano. Al tomar como referencia las rectas que contienen pares de puntos, bien sea de lados o diagonales del mencionado cuadrilátero, y el punto E.

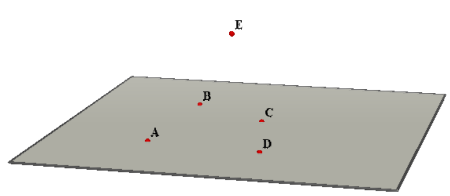


Figura 6.5. Una posible representación de la configuración descrita en el enunciado

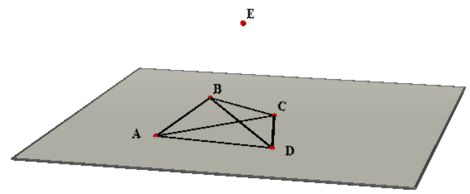


Figura 6.6. Una posible representación del cuadrilátero mencionado y sus diagonales

Enfoque en la mediación (Em). El plano es un término no definido en el modelo de la Geometría que se sigue los cursos de geometría de la Licenciatura, así que no existe una definición de referencia para verificar las condiciones teóricas de su existencia. Éstas proceden del Postulado puntos-plano y de los teoremas que se han mencionado a lo largo de estas tres tareas para determinar planos. El modelo físico de la plastilina cumpliendo el papel de los puntos y los palos el de las rectas proporciona un esquema de representación, el cual puede evocar en los estudiantes contenido geométrico como el Postulado puntos-plano y los Teoremas recta-punto- plano y rectas-plano. Asimismo, el modelo proporciona a los estudiantes más información de la que pueden establecer al considerar la situación con lápiz y papel únicamente. Para quienes no hayan establecido correctamente el número de planos, el uso del modelo puede ampliar su visión de los planos que pueden determinarse (figura 6.7) contribuyendo a generar incertidumbre en los estudiantes si la solución obtenida con el modelo riñe con la que obtuvieron previamente sin su uso. Nuestra expectativa es que el modelo físico sirva de apoyo en la construcción de imágenes mentales que permiten visualizar más de un plano en el espacio.

Se espera que en la interacción en los grupos los estudiantes hagan explícita su solución individual acerca de cuántos planos “ven” en la configuración dada. Para el Ciclo 1 no se tenía previsto desarrollar una discusión colectiva (de toda la clase) y por esta misma razón tampoco hay una previsión del papel de profesor para explotar el potencial semiótico del material empleado.

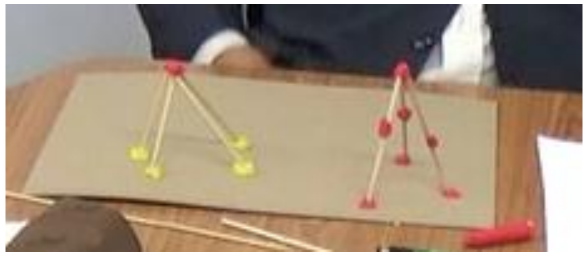


Figura 6.7. Un ejemplo de representación usando el modelo físico de palos, plastilina y cartón.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Consideramos que existen dos vías para que la incertidumbre emerja en esta situación. La primera, es que algunos estudiantes al determinar los planos a partir del cuadrilátero que mencionamos antes y representamos en la figura 6.6, pasen por alto los planos determinados por las diagonales y se genere allí una discusión respecto al número de planos en la interacción en el grupo cuando hacen uso del modelo físico. La segunda, es que la declaración de "ocho planos" que contiene el enunciado puede generar duda en aquellos estudiantes que realmente desean encontrar los ocho planos y que este elemento de lugar a debate en la interacción en el grupo.

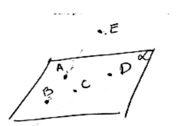
Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Al generarse incertidumbre acerca del número exacto de planos que queda determinado, nuestra previsión es que la necesidad intelectual se exprese en el conjunto de argumentos que exhiban los estudiantes para sostener el punto de vista que tengan acerca del número de planos. Esta argumentación productiva junto con la satisfacción expresada respecto a la respuesta acordada por el grupo será evidencia de la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica.

A 3.1.2 Interacciones analizadas.

Se presenta a continuación el análisis de las interacciones en cada uno de los grupos de trabajo.

Tarea 3, ciclo 1, grupo 1. T3C1G1: Transcripción		Análisis
2 Alejandro:	Eso es cinco combinado tres, ja ja ja.	Ec: El enfoque en el contenido abordado por este grupo es la combinatoria. Es definido por la intervención de Alejandro y respaldado por Dilza. El argumento planteado por Alejandro es hacer la cuenta que resulta de aplicar la formula combinatoria, calcular el coeficiente binomial $\binom{5}{3}$ da como resultado 10.
3 Dilza:	Sí, cinco combinado tres.	
4 Alejandro:	Pues sí, tengo cinco y voy a hacer grupitos de tres. [Hace los cálculos] ¡Hay diez! ¡Es falso! [el enunciado] ¡Qué pena Antonia… demuéstreme que sabe!	

En ese momento han establecido un resultado como grupo para responder a la pregunta del enunciado. Para ellos son diez planos los que se determinan en esa configuración. Lo que sigue corresponde al final de la primera parte de la discusión, cuando consideraron la pregunta sin usar aún el material concreto.

Tarea 3, ciclo 1, grupo 1. T3C1G1: Transcripción		Análisis
15 Antonia:	Usted está cogiendo tres punticos [señala sobre el dibujo (figura 4) de Alejandro los puntos que ha representado él] y mira a ver qué pasa.  **Figura 4. Dibujo de Alejandro**	Ec: Aluden al contenido de la geometría. Asociamos la mención de Antonia de coger tres puntos al Postulado puntos-plano La alusión de Alejandro a una recta y un punto la asociamos al Teorema recta-punto-plano. Cada uno está considerando una manera distinta de determinar un plano.
16 Alejandro:	No, no, no. Una recta y un punto que no pertenece a esa recta me dan un plano.	

A continuación, el grupo empieza a discutir la situación con base en el modelo que hicieron con el material concreto (palos y plastilina).

Tarea 3, ciclo 1, grupo 1. T3C1G1: Transcripción		Análisis
39 Alejandro:	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. ¿Qué estoy haciendo yo acá? No, sólo seis. Pensándolo bien… [En ese momento se lleva la mano a la cabeza]. 	Ei: Vemos una manifestación de duda cuando se plantea la pregunta y Alejandro se lleva la mano a la cabeza. Es una expresión clara de incertidumbre. Es más visible cuando Antonia vacila al tratar de responder a la pregunta y Alejandro produce un nuevo resultado que contrasta con el obtenido en la primera exploración de la situación. Em: El contraste de su solución previa a la solución obtenida usando el modelo físico ha generado la duda.

40 Investigador:	¿Ya tienen los diez?	
41 Antonia:	Mnn, mnn	
42 Investigador:	¿Son más de diez o menos de diez?	
43 Alejandro:	No, hicimos mal el conteo. Para mí que ya son seis.	

El haber modificado su resultado inicial los lleva a buscar una justificación para lo que ocurrió.

Tarea 3, ciclo 1, grupo 1. T3C1G1: Transcripción		Análisis
58 Alejandro:	Contando con este plano serían siete [señala el plano base representado por el cartón en el modelo]. Es que ¿Saben qué es lo que pasa ahí? era cuatro combinado dos y más éste adicional [refiriéndose al plano base]. Porqué es que éste [señala en el modelo el punto que está fuera del plano base] siempre está fijo, entonces de los cuatro hay que hacer grupitos de a dos, o sea dos con éste, dos con éste. 	En: Cuando iniciaron la resolución de la situación, para Alejandro, su marco de referencia fue la combinatoria así que regresa ahí para explicarse porque su primer resultado no funcionó. Al decir cuatro combinado dos parece referirse a los cuatro puntos dados en el plano α y que de estos hay que tomar dos y determinar un plano con el punto que está fuera del plano. Ese coeficiente binomial $\binom{4}{2}$ da como resultado los seis planos, más el que está dado que él llama “adicional”, le dan la cuenta de siete. Es una expresión de necesidad intelectual pues la incertidumbre que se ha producido ha generado esa explicación con base en elementos teóricos. Em: El modelo físico fue de utilidad para poner a prueba su primera solución y encontrar una nueva.
59 Antonia:	¿Y cuatro combinado dos cuánto da?	En: Alejandro (64) se explica nuevamente porqué falló su cálculo inicial “esto lo contamos tres veces más”. Reitera su nueva explicación teórica, exhibiendo un argumento para resolver la situación, es decir una argumentación productiva y hace manifiesta su satisfacción con la nueva explicación al decir “están todos” y riendo. Los elementos anteriormente señalados los consideramos expresiones de justificación epistemológica. Em: Como el contraste con el modelo físico fue el que generó incertidumbre, Alejandro (64) expresa su interpretación acerca del porqué el modelo estaba de último.
60 Alejandro:	Seis y con este siete.	
61 Antonia:	¿Pero por qué si…?	
63 Dilza:	Pero acá hay uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis… del que parte todo [señala el cartón sobre el modelo].	
64 Alejandro:	Es que estábamos haciendo mal porqué éste lo contamos como tres veces más [señala al plano base representado en el modelo por el cartón], es cuatro combinado dos, más éste. Es sólo grupitos de a dos porque éste siempre está fijo [agarra al punto que está por fuera del plano base]. Están todos. Ja ja, ¡Por eso los modelos estaban de últimas!	

A continuación, el análisis de la interacción en el grupo de trabajo dos (GT2)

Tarea 3, ciclo 1, grupo 2. T3C1G2: Transcripción		Análisis
1 William:	[Lee el enunciado]. Tengo un punto acá [pone el lápiz en el aire por encima de la hoja, para representar el punto que no pertenece al plano] entonces cada terna no colineales [recorre con la otra mano la hoja	Ec: Aplica el Postulado puntos-plano para determinar cada plano con tres puntos. Ei: Expresa duda al preguntarle a sus

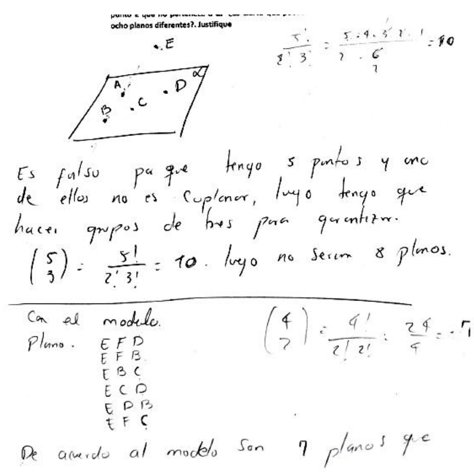
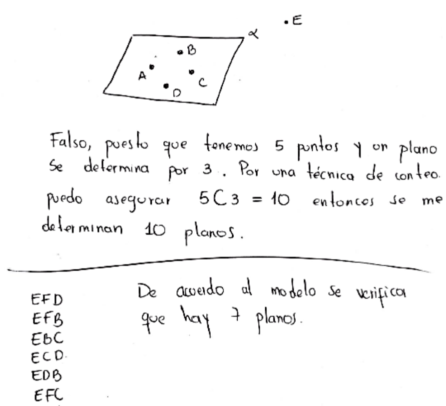
	de trabajo que hace de plano y hace un conteo con dos puntos de la hoja y la punta del lápiz que sostiene en el aire por encima de la hoja] con estos tres se arma uno, con estos tres se arman dos, pues se arman tres [dirigiéndose a sus compañeros]. Ocho ¿Cuáles son los ocho? 	compañeros cuáles son los ocho planos Em: No esperábamos que hicieran uso de modelos físicos en este punto, construye uno propio con la hoja y la punta del lápiz para representar la situación.

Una vez han hecho uso del modelo físico construido con los palos y la plastilina, discuten nuevamente su solución.

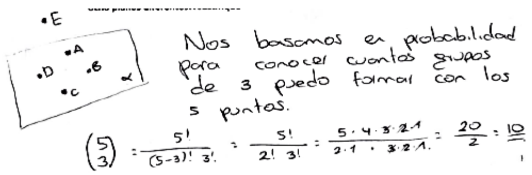
Tarea 3, ciclo 1, grupo 2. T3C1G2: Transcripción		Análisis
25 William:	Pues yo había contado ocho, pero es que había contado éste. Mire [señala el ABCD]. Volvamos a hacerlo entonces. ¿Cuántos se determinan acá? [cuentan ahora usando las manos como planos].  Cinco, este de acá, de la mitad seis. ¿Y cuál siete?	Ec: Al parecer continúan usando el Postulado puntos-plano, cada vez que ponen la mano simulando un plano, ésta se apoya en los tres trozos de plastilina que representan los puntos. Ei: Contrastan sus resultados previos sin usar el modelo con los que obtienen usando el modelo. Aún no tienen certeza del resultado. Em: El modelo físico desempeña un papel central en la exploración.
26 Cristóbal:	Este de acá [le señala la que sería la diagonal BD del posible cuadrilátero ABCD].	Ei: Distintos puntos de vista son indicio de duda que puede dar lugar a incertidumbre.
[…]		
33 Cristóbal:	Porque no tuvimos en cuenta éste [señala el plano base].	Ei: Distintos puntos de vista son indicio de duda que puede dar lugar a incertidumbre.
34 William:	Yo si lo había anotado. Mire: ¡El ABCD!	Ei: Se había previsto en el diseño que incurrieran en la omisión del conteo de los planos determinados por las "posibles diagonales"
35 Cristóbal:	Nooo.	
36 William:	Si, yo anoté éste. Estaba dado el ABCD, pues yo si lo había anotado, vea [Toma la hoja suya y la compara con la de Cristóbal] Ese es el que me falta [El plano determinado por A, D y E].	

A 3.1.3 Hojas de trabajo.

Como se mencionó en la metodología, al finalizar la discusión en los grupos, hicieron entrega de hojas de trabajo individuales. A continuación, mostramos y analizamos las de los integrantes de estos grupos de trabajo.

G1: Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Alejandro: 	Ec: Es visible su estrategia de recurrir a las fórmulas combinatorias para resolver la situación. Em: Hace mención del modelo en la segunda solución que presenta. Ei: Consigna las dos soluciones, la que obtuvieron antes del uso del modelo físico y la que obtuvieron después. En ambas hacen uso de la formula combinatoria. En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.
Hoja de trabajo de Dilza: 	Ec: Es visible su estrategia de recurrir a las fórmulas combinatorias para resolver la situación. Em: Hace mención del modelo en la segunda solución que presenta. Ei: Consigna las dos soluciones, la que obtuvieron antes del uso del modelo físico y la que obtuvieron después. En ambas hacen uso de la formula combinatoria. En: No es evidente acá como se produjeron la *necesidad* intelectual y la justificación epistemológica.

Hoja de trabajo de Antonia:



Ec: Es visible su estrategia de recurrir a las fórmulas combinatorias para resolver la situación.

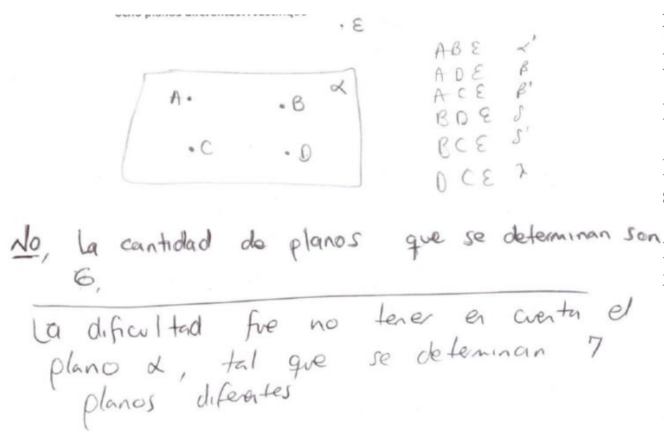
Em: No hace alusión alguna al modelo.

Ed: No hay evidencia de un cambio en su solución inicial.

En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.

G2: Hoja de trabajo	Análisis

Hoja de trabajo de William:



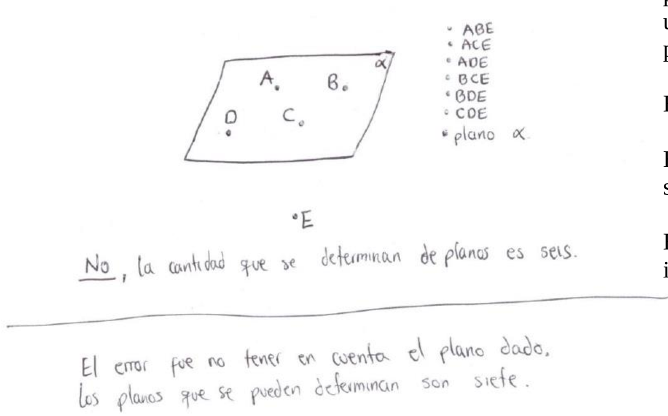
Ec: Los listados de tríos de letras que representan los puntos de la configuración, permiten afirmar que hicieron uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos.

Em: No hay alusión al modelo.

Ei: Lo señalado en la parte final ilustra el cambio en la solución inicial obtenida.

En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.

Hoja de trabajo de Brandon:



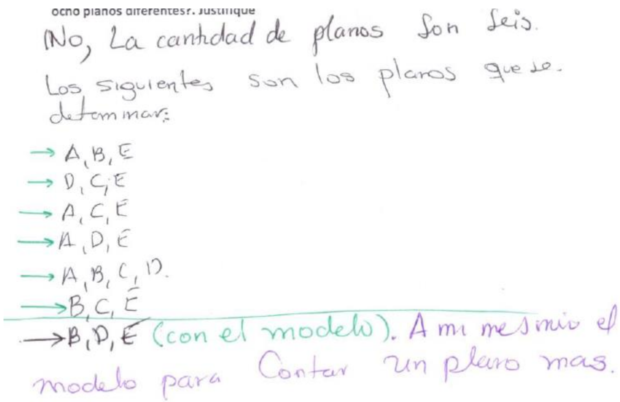
Ec: Los listados de tríos de letras que representan los puntos de la configuración, permiten afirmar que hicieron uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos.

Em: No hay alusión al modelo.

Ei: Lo señalado en la parte final ilustra el cambio en la solución inicial obtenida.

En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.

Hoja de trabajo de Cristóbal:



Ec: Los listados de tríos de letras que representan los puntos de la configuración, permiten afirmar que hicieron uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos.

Em: Alude explícitamente al modelo y su papel en el cambio de solución.

Ei: Lo señalado en la parte final ilustra el cambio en la solución inicial obtenida.

En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica

A 3.1.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran elementos de la geometría como Postulado puntos-plano. Teorema recta-punto-plano. Teorema rectas-plano. Privilegiando el Teorema recta-punto-plano.	En el G1 hay alusión al Teorema recta-punto-plano, al Postulado puntos-plano y uso de técnicas de conteo como las fórmulas combinatorias. En el G2 hay alusión al Postulado puntos-plano.	En esta población en particular no parece haber una relación directa entre el modelo físico y el conocimiento geométrico evocado. No en la manera en la cual esperábamos que usarán principalmente el Teorema rectas-plano porque según nuestra previsión el modelo lo insinuaba. Estos estudiantes poseen un bagaje de formación matemática más amplia que la población de los Ciclos dos y tres, por esa razón aparecen fórmulas combinatorias. Al ser una situación de conteo y tratándose de estudiantes que han recibido un curso de probabilidad, era previsible que se presentase el uso de técnicas de conteo, aspecto que no consideramos.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto lo siguiente con respecto al uso del modelo físico y la interacción social al abordar la situación • El uso del modelo físico amplía la información disponible para los estudiantes respecto a lo hecho con lápiz y papel. • El uso del modelo contribuye a generar incertidumbre. • El uso del modelo evoca en el estudiante Postulados y teoremas	En los G1 y G2 el uso del modelo amplió la información disponible respecto a lo que hicieron previamente a su uso. En ambos grupos la interacción permitió hacer ostensiva las soluciones individuales a la situación. En el G1 es visible un papel del uso del modelo en la generación de incertidumbre. No es así en el G2.	Quizás la previsión de la acción del modelo físico actuando para ampliar la información, respecto a la solución previa con lápiz y papel, no sea tan relevante dado que está establecido como un hecho verificado en la visualización en 3D (Parzysz, 1988). No hay evidencia concluyente del papel del material concreto en la generación de incertidumbre. Al presentarse ésta en uno solo de los grupos.

para determinar un plano.		
La interacción en los grupos de trabajo hace evidente la solución individual a la tarea		

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	THA	THA
Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado de: El uso del modelo físico que podría producir resultados distintos a los obtenidos previamente y esto podría generar duda. La declaración en el enunciado que existen ocho planos podría motivar la búsqueda del octavo plano generando duda en los estudiantes.	Cómo se señaló en el apartado anterior el uso del modelo físico generó duda respecto a los resultados obtenidos sin el uso de éste en el G1. En el G2 hay expresión de duda respecto a los resultados obtenidos sin el uso del modelo, pero esta se zanja muy rápidamente interpretada por ellos como un error cometido en la primera consideración. En ninguno de los dos grupos hay evidencia de la relevancia de la declaración de los ocho planos en el enunciado para la generación incertidumbre	Es probable que lo que ocurrió en el G1, aplicar erróneamente las fórmulas combinatorias, sea un sesgo muy particular de los integrantes de ese grupo y por esa razón allí se produce el contraste tan marcado con el trabajo con el modelo físico. Pues ellos confían tanto en las fórmulas que no exploran siquiera una representación de la situación geométrica.

Enfoque producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo: La exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre que hubiese tenido lugar respecto a la cantidad de planos que se determinan. La argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos	En el G1 hay evidencia de búsqueda de argumentos teóricos para resolver la duda que se ha generado, así como es observable la argumentación productiva y la satisfacción con la solución obtenida. En el G2 no hay evidencia de búsqueda de argumentos teóricos para resolver la situación de duda.	Es probable que lo que haya generado la incertidumbre y posterior necesidad intelectual en el G1 haya sido un sesgo particular en la interpretación por parte de estos estudiantes. Porque no se desarrolló de la misma manera con el G2. Para aportar información concluyente acerca de los supuestos puestos en práctica con este enunciado es recomendable ponerlo a prueba como está planteado en el siguiente Ciclo.

A 3.1.5 Cambios en el diseño de la tarea.

El examen de la situación en el segundo de los grupos registrados permite ver que desde el inicio los estudiantes pueden hacer un modelo físico de la situación aún sin darles el material. Por ejemplo, con sus manos. En el grupo uno el contraste entre el resultado obtenido en principio y el que obtienen al usar el material, parece haber sido un elemento importante en la generación de incertidumbre, necesidad intelectual y justificación epistemológica, Entonces un cambio en la formulación de la pregunta fue el pedir una anticipación de la respuesta sin hacer representación alguna, mediante una consideración mental de la situación, sin apoyo de dibujos o modelos físicos.

A 3.2 TAREA 3, CICLO 2

A 3.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje.

Meta de aprendizaje

Determinar un número planos en una configuración específica de puntos dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Sean cuatro puntos A, B, C y D en un plano α, ningún trío de ellos colineales y un punto E que no pertenece a α.

a) Sin hacer una representación, cada integrante del grupo escriba su anticipación del número de planos que quedan determinados.

b) ¿Es cierto que pueden determinarse exactamente ocho planos diferentes? Justifique.

Instrucciones adicionales

Las instrucciones iniciales que se darán para el desarrollo de la tarea indican que para atender a lo señalado en la parte A, son no hacer modelo alguno con las manos y considerar la situación simplemente a nivel mental. Para estudiar la situación posteriormente dispondrán de palos, plastilina y un cartón, así como del software Cabri 3D. Se les pedirá escribir en su hoja de trabajo la anticipación, el resultado después de usar el modelo físico y/o Cabri 3D, así como redactar un párrafo acerca de sí su solución ha cambiado después del uso de estas herramientas y responder cuál de estas contribuyó a ese cambio si se produjo.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrollará únicamente en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactuarán con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los aspectos de contenido involucrados en el desarrollo de esta tarea ya han sido estudiados previamente. Son elementos del sistema teórico que permiten determinar un plano: el Postulado puntos-plano, el Teorema recta-punto-plano y el Teorema rectas-plano. Los estudiantes podrán determinar la cantidad exacta de planos que se determinan con la configuración de puntos dada haciendo uso de alguno de esos elementos del sistema teórico.

En el Ciclo 1 teníamos la hipótesis de que, dado que son cuatro puntos en un plano, el modelo para hacer el conteo de los planos es el cuadrilátero con sus diagonales que puede determinarse con los cuatro puntos. Se esperaba que hicieran el conteo de planos de esa manera y por eso se consideró que harían uso del Teorema recta-punto-plano de manera predominante. No ocurrió de la manera que lo teníamos previsto en el Ciclo 1, los estudiantes usaron el determinar los planos usando ternas de puntos no colineales. A partir de ese resultado, nuestra hipótesis para este experimento respecto al enfoque en el contenido es que los estudiantes privilegiarán el uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos y resolver la tarea.

Enfoque en la mediación (Em). Respecto a la mediación en este ciclo a diferencia de lo hecho en el Ciclo 1 se tiene previsto el uso de Cabri 3D además de los materiales para la construcción del modelo físico: palos, plastilina y cartón.

Cabri 3D en su herramienta “plano” tiene, entre sus opciones, tres maneras de ser construido. Una vez se activa la herramienta el plano puede aparecer al pinchar con el puntero sobre tres puntos, una recta y un punto o dos rectas que se intersecan. Estas tres maneras pueden ser asociadas sin dificultad a los elementos correspondientes en el sistema teórico de referencia en el curso: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano y Teorema rectas-plano.

Para quienes no hayan establecido correctamente el número de planos, el uso del modelo y/o de Cabri 3D puede ampliar su visión de los planos que pueden determinarse contribuyendo a generar incertidumbre en los estudiantes si la solución obtenida con el modelo riñe con la que obtuvieron previamente sin su uso. Nuestra expectativa es que el modelo físico y el software sirvan de apoyo en la construcción de imágenes mentales que permitan visualizar más de un plano en el espacio evocando los elementos teóricos de referencia en el sistema axiomático. En este caso Cabri 3D no generará la introducción de nuevos elementos teóricos en el sistema axiomático en construcción en el curso, pero si hará ostensible el elemento teórico privilegiado por los estudiantes para determinar los planos, que anticipamos será el Postulado puntos-plano.

Se espera que en la interacción en los grupos los estudiantes hagan explicita su solución individual acerca de cuántos planos “ven” en la configuración dada. Y en el uso de Cabri 3D y/o el modelo físico producen una solución que difiere de la anticipación obtenida individualmente, esta diferencia contribuye a la generación de incertidumbre. Para esta tarea no se tiene previsto desarrollar una discusión de toda la clase y por esta misma razón tampoco hay una previsión del papel de profesor para explotar el potencial semiótico del material empleado.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Consideramos que existen dos vías para que la incertidumbre emerja en esta situación. Por la primera vía, se espera que emerja producto del contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la discusión en grupos. La anticipación individual la deben hacer sin hacer uso de lápiz y papel o cualquier modelo físico con las manos. En la consideración de la situación en grupos pueden hacer uso de lápiz y papel, material concreto (palos, plastilina y cartones) para hacer un modelo físico y/o usar Cabri 3D. Probablemente, al hacer la anticipación individual el número de planos que determinen sea menor que siete.

Por la segunda vía esperamos que, en la discusión en grupos la frase en la pregunta b) del enunciado que habla de ocho planos induzca a revisar su anticipación individual y el resultado que han obtenido en el trabajo en grupos usando el modelo físico y/o el software. Se espera que la incertidumbre se manifieste como duda en esta parte del desarrollo de la tarea y se evidencie en lo planteado por los estudiantes particularmente en la interacción en los grupos de trabajo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se espera que la incertidumbre movilice la necesidad intelectual para hacer una revisión de sus resultados con base en los elementos teóricos estudiados. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva, y en la confianza que expresen con el resultado obtenido a partir de los elementos teóricos que soportan la respuesta correcta que el número de planos es exactamente siete.

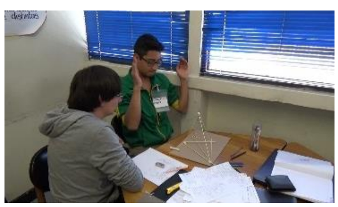
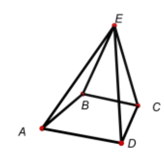
A 3.2.2 Interacciones analizadas.

En el caso de esta tarea fueron tres grupos: El grupo de trabajo uno (GT1) y el grupo de trabajo dos (GT2) y el grupo de trabajo tres (GT3). Se presenta a continuación el análisis de las interacciones en cada uno de los grupos.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 1. T3C2G1: Transcripción		Análisis
2 Carlos:	No, porque para mí el alfa es el séptimo. [Han armado el modelo con el cartón los palos y la plastilina, cuentan sobre éste] …cinco, seis, séptimo con ese ¿Y el octavo?	Ei: Se plantea una pregunta acerca del octavo plano que constituye la primera expresión de incertidumbre.
[…]		
5 Investigador:	Hicieron ya el modelo ¿Cuántos planos son?	Ei: Las preguntas planteadas por el investigador

6 Carlos:	Yo sigo con siete	hacen evidentes dos puntos de vista distintos respecto a la solución de la tarea.
7 Investigador:	¿Y qué dice Jimmy?	
8 Jimmy:	Seis, pues sin contar… no conté el original	
[…]		
10 Carlos:	Tenemos esto [han terminado de armar su modelo] entonces en este momento vamos a recontar los planos [indica con la palma de la mano cada plano determinado] uno, dos, tres cuatro, cinco [Jimmy le indica con el lapicero uno más, entonces toma hojas para que le sirvan de indicadores de planos y reinicia el conteo]. Uno ¿Cierto? El sexto y el séptimo ¿Y el octavo?	Em: Habiendo considerado la situación con el modelo físico, la duda persiste y se plantea como la pregunta acerca del octavo plano. Lo que permite considerar que la incertidumbre se ha producido.

La pregunta que se ha planteado Carlos acerca de los ocho planos motiva en él la búsqueda de una explicación acerca de la mención de esos ocho planos en el enunciado de la tarea. Es lo que menciona en el siguiente fragmento.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 1. T3C2G1: Transcripción		Análisis
16 Carlos:	¿Y el octavo? Es que todo se resume a cuantos triángulos distintos se pueden formar. Bueno, a partir de esta recta ¿Cuántos planos hay? [Señala una de las aristas en el modelo]. Uno, dos y tres planos ¿Cierto? Ahora a partir de ésta [señala otra arista], cuatro y cinco. A partir de ésta, seis y a partir de ésta, siete, ah no ¿cierto? Porque el séptimo es el de abajo ¿Dónde están los ocho planos? Listo son siete [da un aplauso].  Éste es como convertir dos triángulos [señala dos caras de su modelo], éste está aparte hecho de dos pirámides [señala uno de los palos de la base puestos a manera de diagonal] ¿Cierto? Cada una de esas tiene cuatro planos cada uno ¿Cierto? O sea que sumando cuatro y cuatro son ocho, pero están compartiendo un plano.	En: La incertidumbre da paso a la necesidad intelectual, pues buscan una justificación a la mención de los ocho planos. Esa búsqueda la orientaron indagando en las causas que podrían generar en alguien el error de afirmar que son ocho planos. Logran formular una solución para ellos plausible del porque se mencionan los ocho planos al suponer un modo de contar los planos en el cual un plano es contado dos veces. Pues mencionan pirámides que comparten un plano. Se podría interpretar como las pirámides ABCE y ADCE que comparten el plano ACE (ver figura A1).  **Figura A1. Representación del modelo con puntos nominados.** Ec: Entre los aspectos de contenido previstos en la THA no estaba contemplado el uso del Teorema rectas-plano y en este grupo parece ser el recurso utilizado pues hablan específicamente de los triángulos que se forman y hacen el conteo señalando las aristas en el modelo y no ternas de puntos. Em: Respecto al uso de artefactos habíamos

		anticipado que el modelo físico podría sugerir el uso del Teorema recta-punto-plano por ser los palos modelos de rectas, acá parecen usar el Teorema rectas- plano.
[…]		
20 Carlos:	Antes tenían ocho, menos dos que comparten, más uno que creo, son siete	En: La segunda intervención de Carlos en la línea 16 cuando dice “Listo son siete” y la argumentación con la que continúa es la expresión que él ha experimentado la justificación epistemológica al usar el Teorema rectas-plano y genera un modelo para el conteo de los planos que le resulta consistente con su resultado que son siete los planos.

En el segundo grupo si hacen explicita en la conversación la anticipación solicitada en la primera instrucción de la tarea.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 2. T3C2G2: Transcripción		Análisis
12 Sergio:	Yo diría cuatro planos.	Ei: En el trabajo de este grupo hay evidencia del reporte de la anticipación de cada uno de los estudiantes a diferencia del trabajo del primer grupo. Al verbalizar cada uno su anticipación, esta declaración se convierte en el primer elemento que induce a la discusión pues cada uno presenta un resultado distinto.
13 John:	Son seis, porque piensen en las…sí vamos a pensar en rectas, rectas-punto para un plano ¿no? Ahora piensen en las diagonales del cuadrilátero que nos imaginamos.	
14 Jair:	Ay si, son cuatro puntos, un cuadrilátero son cuatro rectas y las diagonales van seis rectas.	
15 John:	Yo dije seis ¿Ustedes dijeron cuántos? Usted dijo cuatro ¿O cuántos creen?	Ec: En el desarrollo de esta primera parte de la discusión con base en la anticipación aparecen uno de los elementos de contenido que mencionamos en la THA: El Teorema recta-punto-plano que hace explícito en su argumentación John y la cual Juan acepta y sigue.
16 Jair:	Si, de hecho, también dije cuatro al comienzo.	

Una vez formuladas las anticipaciones en el grupo discuten la solución a la situación planteada. En distintos momentos los estudiantes expresan duda respecto a la posibilidad de determinar ocho planos.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 2. T3C2G2: Transcripción		Análisis
32 Jair:	Porque dos se intersecan en un punto, van siete ¿Y el ocho cuál es?	Ei: Cómo se había previsto en la THA la parte de la pregunta que habla de ocho planos generó incertidumbre en los estudiantes de este grupo la cual se manifiesta como duda, guía toda la discusión y aparece reiteradamente a lo largo de ésta, planteada por cada uno de los integrantes del grupo.
[…]		
60 Jair:	Noo, pille… si los vamos a determinar por recta y punto, plano. Van seis rectas o sea seis planos, por ese punto. Rectas, todas las rectas, las cuatro están tan, tan, tan [traza rectas en el aire con las manos], punto. Ahí van seis planos ¿Y los otros dos de dónde salen?	Es de anotar que la perspectiva de cada estudiante es distinta respecto a esta duda. John es proclive a creer que no son ocho planos. Jair oscila en su punto de vista pues considera en
[…]		
109 John:	¿Por qué hablan de ocho?	

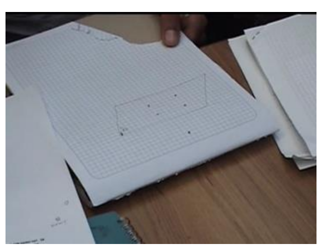
[…] 183 Sergio:	Pero, pero si es ocho ¿De dónde saldría el otro?	ocasiones que pueden ser ocho o más y en otros momentos considera que no pueden ser ocho. Sergio mantiene su creencia que son ocho o más los planos que se pueden determinar por esa razón su línea de dialogo es la 183 casi al final de la transcripción de la discusión

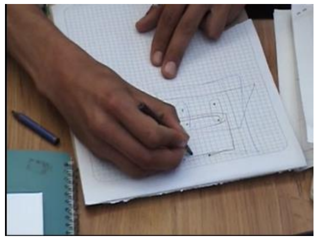
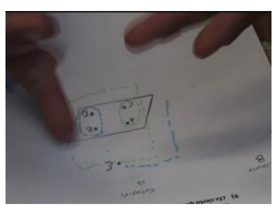
Esta duda que se ha generado en torno a los ocho planos moviliza la búsqueda de una explicación, en la cual plantean sus argumentos en la discusión.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 2. T3C2G2: Transcripción		Análisis
145 Jair:	Bueno, a la final aquí en esta representación [se refiere a la representación con el modelo físico en torno a la cual han discutido] ¿A cuántos llegamos? A siete. 	Em: Asocia la representación con la solución
Juan y John han tomado un computador cada uno y están haciendo las representaciones de la situación. La representación de John ha quedado registrada en el vídeo, trazas rectas antes de determinar los planos. 		
146 Sergio:	¿Cómo va a hacer los planos? [dirigiéndose a Jair que trabaja en el computador].	Ec e Em: John que desde el principio planteó la idea de usar el Teorema recta-punto-plano para determinar los planos, trabaja con esta idea para reproducir la representación de la situación que hizo en papel y lápiz con Cabri 3D. Juan y Sergio plantean sus argumentos teniendo como base el modelo físico elaborado con material concreto y verifican lo que hicieron con Cabri 3D. En: La incertidumbre genera necesidad intelectual pues para salir del estado de duda hacen una exploración detallada de la situación en Cabri 3d a la vez que exponen argumentos teóricos como el que exhibe Jair cuando afirma que hay seis rectas y el plano que las contiene, que puede interpretarse como cada recta determina un plano con el punto que no pertenece al plano base de acuerdo con el Teorema recta-punto-plano.
147 Jair:	O sea, cada recta y este punto, póngalo de frente para ver cada plano, ahora esta recta y este punto, esta recta y este punto.	
148 Sergio:	¿Qué recta falta?	
149 Jair:	Ésta.	
150 Sergio:	Uno, dos, tres, cuatro, cinco y el rojo seis.	
151 Jair:	Si pilla por cada recta un plano.	
152 Sergio:	Falta la diagonal, falta la diagonal.	
153 Jair:	Primo, hay siete.	
154 John:	Si hay siete [ha hecho la construcción de los planos en Cabri 3D y ha hecho arrastres bola de cristal, luego dirige su atención al computador en el que trabajando Jair y Sergio]. ¿De dónde sacaron que había un octavo?	

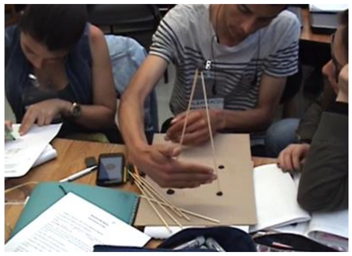
		
155 Jair:	Hay seis rectas en ese plano, el plano que las contiene, son siete. Ah pille que todos esos planos, contienen ese punto. ¿Sí o no? Entonces un plano que pasa por todas estas.	
[…]		
198 Jair:	Sigue siendo la misma recta. O sea, no interfiere porqué (…) Las formas de determinarlo son: tres puntos, plano por el Postulado del plano. Punto, recta, plano que eso fue lo que hicimos ahorita. Por tres puntos pues nos daría el plano normal y la quinta, ella dijo otras dos formas, creo que la paralela, o sea son coplanares, ahí determinan un plano	Ec: Juan enuncia los elementos teóricos que permiten determinar un plano.

El tercer grupo comenta el resultado de la anticipación una vez ha emprendido la exploración de la situación y la discusión de cuántos planos quedan determinados.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 3. T3C2G3: Transcripción		Análisis
2 Lina:	Ocho, a mí me dan ocho	Ei: Se plantean dos puntos de vista acerca de la cantidad de planos. Lo que da lugar a duda en la consideración en el grupo de la situación. Se han producido distintas anticipaciones respecto a la solución
3 Eric:	A mí me dan siete ¿Por qué le dan ocho?	
4 Lina:	Porque no se pueden usar las manos	
5 Eric:	Pueden colocar sus respuestas y después podemos hacer las gráficas	
[…]		
12 Eric:	Ahora si podemos usar gráfica ¿Cómo pensé yo los míos?: ¡Así! [mientras representa en una hoja].  Mira, éste [traza un plano] va a determinar un plano [traza con otro color otro plano] voy a determinar éste, con esto dos…	Ei: La incertidumbre se hace más explícita por parte de Paola y Lina, cuando la primera indaga por el octavo plano y la segunda exige que cada plano sea visible con un color. Ec e Et: Eric para convencer a sus compañeras de su punto de vista hace una representación de la situación en la cual puede entreverse que usa el Postulado puntos-plano, pues toma pares de puntos en el plano base junto con el punto que no pertenece a éste para determinar los siete planos de los cuales ha hablado. Su acción es evidencia de argumentación productiva y que acude a una vía intelectual para resolver la

	 Uno, dos, tres, cuatro, voy a determinar otro con estos dos, son cinco. Voy a determinar otro con estos dos son seis y este de acá siete, no veo más [para cada plano que contó encerró en un grafo dos puntos].	incertidumbre.
13 Paola:	[Revisa lo que hizo Eric] ¿Y el de acá qué? Ese es el ocho	
14 Eric:	No, ese lo hice, ese también lo hice	
15 Lina:	A ver, hazlo un plano por cada color	
16 Eric:	[Haciendo un nuevo dibujo] Bueno, empecemos con el base, el que contiene los cuatro puntos ¿Habrá necesidad de nombrarlos?	
[…]		
19 Paola:	¿No sería el mismo que éste? [recorre con su dedo los puntos E, C y A como trazando un triángulo que los encierra sobre lo que está dibujando Eric].	En: La incertidumbre ha movilizado una argumentación productiva en torno a cuál es la cantidad de planos que se determinan.
20 Eric:	Si, por eso te dije que el dibujo me queda feo, por eso no lo quería hacer directamente ahí	Ec e En: Para Paola lo más relevante para salir del estado de incertidumbre parece ser la representación gráfica y por esa razón corrige a Eric en su manera de dibujar. Para Eric en cambio, lo relevante parece ser el tomar parejas de puntos del plano base que determinan un plano con el tercer punto fuera de éste y así se lo comunica a Paola en la línea 24. Para salir del estado de duda a él le basta ver encerrados en su dibujo con un color distinto cada par de puntos, lo que hemos interpretado como una aplicación del Postulado puntos-plano.
21 Paola:	Esta parte aquí no iría	
22 Eric	No, pues ya que tenemos colores, usemos colores [Traza con azul un plano punteado que contiene a E y encierra los puntos B y D] 	
23 Paola:	Pero no que llegaba hasta allá [encierra con sus dedos hasta donde están B y D].	
24 Eric:	Bueno pues yo los estoy representado, todo se ve ahí como si estuviera en el mismo plano, pero la cuestión es que yo los quiero representar con colores, si me entiendes, mira yo hago esa representación así. Y el tercero lo van a determinar estos dos de acá [encierra en un diagrama a A y a B], pero yo no me voy a poner a dibujarlo, listo. Y el cuarto con estos dos [encierra en un diagrama a C y a D]. El cinco con estos dos [encierra en un diagrama a C y a B]. Y el sexto se me acabaron los colores, me falta este de acá [encierra en un diagrama a A y a D].	
[…]		

47 Eric: Pero yo lo iba era a clavar, para hacer el puntico D. [Ríe] Si ves, mira, tenemos uno que es este de acá, dos que es este de acá y tres que es este de acá. [Indica con los dedos y las palmas de las manos sobre el modelo].



48 Paola: Seis, siete ¿Y el ocho?

49 Eric: No, tú lo estás viendo

50 Paola: Espera

51 Eric: Tomemos las caras del tetraedro. Éste es el primero, éste el segundo, éste el tercero y éste el cuarto, las caras del tetraedro [ha indicado con la palma de su mano cada plano sobre el modelo].

52 Paola: Cinco, seis [indica con la palma los planos]

53 Eric: Ahora las diagonales…cinco que sería éste y seis que sería este [indicando nuevamente sobre el modelo], y yo cuento siete, contando este plano [señala el cartón que hace de plano base] ¿Dónde hay ocho? [con expresión de duda se lleva la mano a la barbilla].

54 Paola: Es que yo creo que tú contaste [inaudible].

55 Eric: ¿Cuántas parejas de dos se pueden hacer con los diferentes puntos? Una, dos, tres, cuatro [señala los puntos sobre el modelo] cinco, seis [hace tres veces el conteo obteniendo el mismo resultado]

56 Lina: Acá sale otro ¿Cómo te parece que sí? No te parece que si yo tomo este aquí y estos dos [señala algo sobre la hoja dirigiéndose a Eric] éste es otro plano diferente.

57 Eric: Pero, ese yo lo hice y conté siete.

58 Lina: Hasta aquí son siete y si tomo éste otro son ocho.

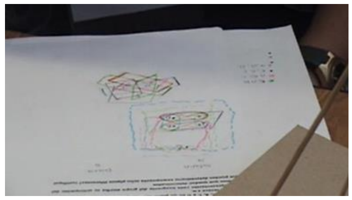
59 Eric: Intenta escribir los planos que estás determinando, yo escribo los que yo determiné y verás que son siete.

60 Lina: Estos son los que yo determiné, son ocho [le muestra

Em: Hacen uso del modelo físico, pero éste no parece ser decisivo en la consideración de la situación.

Ed: Paola y Lina persisten en su duda acerca de los ocho planos e incluso Eric se plantea la pregunta acerca del octavo. Es esta incertidumbre la que sigue movilizando el examen de la situación.

En: Eric le sugiere a Lina como estrategia hacer la lista de los planos que quedan determinados usando las letras que designan cada uno de los puntos, aludiendo al uso del Postulado puntos-plano, para resolver la duda en la cual se encuentran.

	sobre la hoja].	
61 Eric:	Pero escríbelos [Escriben y van diciendo los tríos de letras de puntos que determinan planos] para que los determines con los puntos.  Hay algo fijo, todos tienen a E, menos el plano de los cuatro puntos o sea el tuyo rosado.	

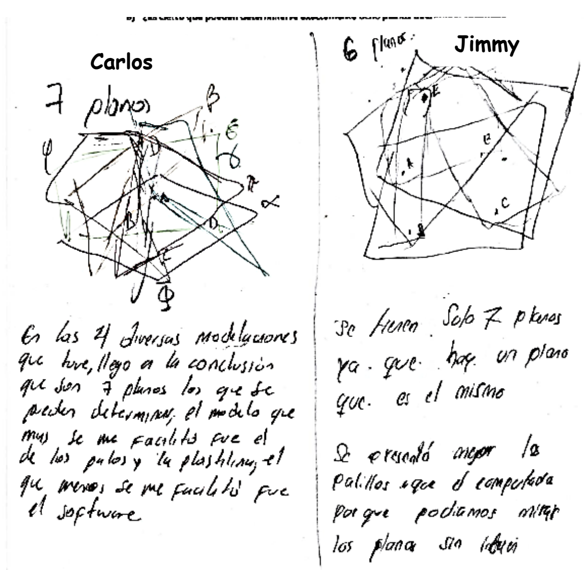
El fragmento que sigue es posterior a una representación que hicieron en Cabri 3D en la cual determinaron los planos representando cada uno con un color y estilo de superficie distinto.

Tarea 3, ciclo 2, grupo 3. T3C2G3: Transcripción		Análisis
124 Eric:	Pero ¿Ustedes si se convencieron o no?	En: Eric expresa su satisfacción con la respuesta de los siete planos e interroga a sus compañeras acerca de si la respuesta les resulta también satisfactoria. Reitera la justificación que ha empleado sobre la determinación de los planos con dos puntos del plano base y el punto externo. Lo que expresan sus compañeras no trasluce una convicción con base en elementos teóricos en Paola y en Lina definitivamente no hay acuerdo con la propuesta de Eric. La intervención de Eric puede interpretarse como manifestación de justificación epistemológica. No así la de sus compañeras.
125 Paola:	¿Pero por qué no pusieron seis?	
126 Eric:	Porque son siete.	
127 Paola:	Ja ja ja. Yo conté mal porqué conté dos veces el mismo plano. Pero no, siendo así, son siete.	
128 Eric:	Todos están determinados por éste [Señala en la pantalla el punto E] todos, menos el que está de base ¿no? O sea, estos tres no podrían formar otro diferente, ahí tenemos cuatro [señala los puntos en el cartón que hace de plano base en el modelo].  Serían el mismo plano. Si cada dos determinan un, digo cada tres determinan un plano diferente, entonces sería coger el punto de afuera y mezclarlo con una parejita [señala en el modelo y luego en la hoja en la que tiene la lista de tríos de puntos] donde la pareja no se repita.	

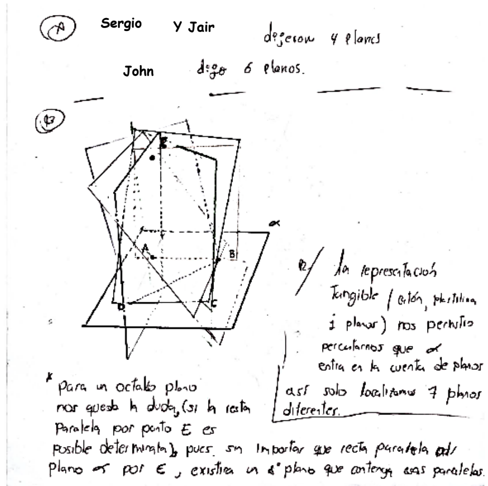
	 Con eso nos sacamos un cinco ¿Qué dices Lina, te convenció o no te convenció? ¿Me crees o no me crees?
129 Lina:	Yo si te creo, estoy tratando de buscar el octavo plano. ¿Cómo es la pregunta? ¿Qué si es cierto…? [Ha tomado la hoja de trabajo para escribir las conclusiones].

A 3.2.3 Hojas de trabajo.

A continuación, mostramos y analizamos las de los integrantes de estos grupos de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Carlos y Jimmy: 	Ec: No hay evidencia del elemento teórico de referencia empleado para determinar los planos. Em: Le conceden mayor valor al papel que jugó el modelo físico respecto a Cabri 3D para resolver la situación. Ei: En lo que escribe Jimmy en la última línea cuando dice "`podíamos mirar los planos sin incluir" deja entrever que el modelo físico le fue útil para modificar su punto de vista. En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.

Hoja de trabajo de Sergio, John y Jair:



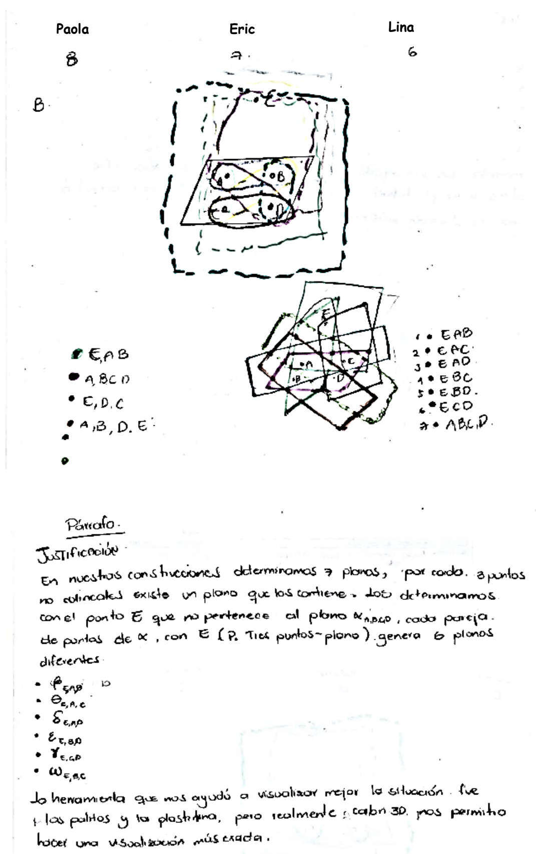
Ec: No hay evidencia del elemento teórico de referencia empleado para determinar los planos.

Em: Afirman que el modelo físico le proporcionó certeza respecto a la cantidad de planos.

Ei: Consignan en la hoja de trabajo la duda que persistió en uno de los integrantes del grupo acerca de la determinación de ocho planos. Así como las anticipaciones distintas de los integrantes del grupo

En: No es evidente acá como se pueden haber producido la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.

Hoja de trabajo de Paola, Lina y Eric:



Ec: Los listados de tríos de letras que representan los puntos de la configuración permiten afirmar que hicieron uso del Postulado puntos-plano para determinar los planos. En la redacción del párrafo final así lo explicitan.

Em: Afirman que el modelo les facilitó la visualización y a Cabri le atribuyen exactitud probablemente porque les proporcionó certeza acerca de su solución.

Ei: Cada una de las anticipaciones de los integrantes del grupo fue distinta según lo consignado al inicio de la hoja de trabajo.

En: No es evidente acá como se produjeron la necesidad intelectual y la justificación epistemológica.

A 3.2.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran mayoritariamente el Postulado puntos-plano.	En el G1 el elemento teórico empleado parece ser el Teorema rectas-plano. En el G2 el elemento predominante para determinar los planos fue el Teorema recta-punto-plano y así lo enuncian en varias ocasiones. En el G3 el elemento predominante para determinar los planos fue el Postulado puntos-plano	A diferencia de lo ocurrido en el Ciclo uno, mencionaron acá los estudiantes más elementos teóricos de la geometría para determinar un plano probablemente esto atiende a que los cursos de geometría están más recientes en su memoria que los de los estudiantes del Ciclo uno.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto lo siguiente con respecto al uso del modelo físico y la interacción social al abordar la situación • El uso del modelo y de Cabri 3D al contrastarlo con sus resultados previos contribuye a generar incertidumbre. • El uso del modelo evoca en el estudiante Postulados y teoremas para determinar un plano. La interacción en los grupos de trabajo hace evidente la solución individual a la tarea.	No hay evidencia del papel desempeñado por el modelo físico o Cabri 3D en la generación de *incertidumbre* en la interacción de los tres grupos. Aunque en las hojas de trabajo afirman que el modelo les ayudó a ver los planos. Como se mencionó en el apartado anterior en cada uno de los tres grupos hubo mención de distintos elementos teóricos de la geometría para determinar un plano. Pero, no hay evidencia acerca del vínculo entre el elemento teórico mencionado y el uso del modelo físico o de Cabri 3D. En los tres grupos la interacción hizo evidente la solución que adoptó cada uno de los integrantes para la tarea propuesta.	Es marcado el contraste entre el papel decisivo desempeñado por el material didáctico en el Ciclo uno y la aparente irrelevancia en este Ciclo dos para la generación de incertidumbre. Al haberse modificado la población y no la tarea sustancialmente la interpretación razonable cabría orientarla allí. Los estudiantes del Ciclo uno hacía un tiempo habían visto los cursos de geometría y por lo tanto hicieron un abordaje más desprevenido de la situación. A diferencia de los estudiantes del Ciclo uno, los estudiantes del Ciclo dos hicieron el abordaje de la situación en un curso de geometría y por tanto no orientaron su indagación tanto por los modelos físicos de exploración sino por lo que interpretaron se esperaba por parte de la profesora hiciesen ellos en términos de búsqueda teórica.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado de: El contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la exploración de la situación en grupos usando el modelo físico o Cabri 3D. La declaración en el enunciado que	En G2 y G3 hay evidencia de anticipaciones individuales distintas y el papel desempeñado por éstas en el desarrollo de la discusión con distintos puntos de visa. En los tres grupos de trabajo es evidente que la afirmación de los	En este Ciclo dos el enunciado con su afirmación de la existencia de los ocho planos fue un motor importante de generación de incertidumbre y del desarrollo de argumentación productiva.

existen ocho planos podría motivar la búsqueda del octavo plano generando duda en los estudiantes.	ocho planos en el enunciado generó duda y motivo el desarrollo de discusiones en torno a este punto.	

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo: • La exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre que hubiese tenido lugar. La argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos.	Hay evidencia de necesidad intelectual en los tres grupos pues al menos uno de los integrantes en cada uno de estos desarrolló una argumentación que refleja una búsqueda en el campo teórico de referencia para soportar por qué son siete planos. Asimismo, en G1 y G3 hay expresión de justificación epistemológica por parte de uno de los integrantes pues plantean una argumentación productiva orientada a resolver la tarea planteada y expresan satisfacción con la solución obtenida.	En este Ciclo dos la incertidumbre estuvo principalmente motivada por la afirmación acerca de los ocho planos en el enunciado de la pregunta y esta se desarrolló como necesidad intelectual de acuerdo con lo concebido en el diseño, pues los estudiantes buscaron solucionar la situación y soportar su solución en los elementos teóricos de referencia en el curso.

A 3.2.5 Cambios en el diseño de la tarea.

Varios estudiantes pudieron anticipar que son seis planos porque perdían de vista el plano base, con esos resultados la tarea puede dar la sensación de ser algo simple. Para hacer un poco menos simple la tarea, y continuar en el propósito de promover la visualización de planos en el espacio, se solicitó la determinación de planos aumentando de a uno cada vez los puntos en el plano base.

La acción de la anticipación para generar incertidumbre no se pudo verificar con mucha precisión en el Ciclo dos, queda la sensación de que no interviene de forma muy decisiva. Los resultados del Ciclo uno, particularmente en el grupo uno en donde el contraste entre su resultado previo y el que obtienen al usar el modelo físico origina duda, nos sugieren persistir en probar el papel de la anticipación en la generación de incertidumbre, por esa razón se hizo mayor énfasis en la instrucción de no usar las manos y menos aún lápiz y papel sino anticipar con base en la consideración mental de la situación.

A 3.3 TAREA 3, CICLO 3

A 3.3.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

Determinar un número planos en una configuración específica de puntos dada en 3D, haciendo uso de elementos del sistema teórico de referencia.

Tarea

Enunciado

Complete tabla, para cada una de las configuraciones de puntos dadas en la primera columna, de acuerdo con las siguientes instrucciones:

En la columna Anticipación, escriba su respuesta sólo considerando la situación mentalmente.

En la columna Con dibujo, escriba su respuesta, si se ha modificado, y haga la representación gráfica correspondiente.

En la columna Con modelo, escriba su respuesta, si se ha modificado, luego de representar la situación con un modelo físico para verificar la respuesta dada en la columna Con dibujo.

En la columna Con Cabri, y sólo si lo considera necesario, escriba su respuesta luego de representar la situación en el software.

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B y C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				

Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?				

a) Redacte un párrafo describiendo cómo se fueron modificando sus resultados, si es el caso. Intente justificar por qué ocurrieron los cambios.

b) Sean n puntos A, B, C … cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración? ¿Qué elementos del sistema teórico permiten soportar esta generalización?

Instrucciones adicionales

Las instrucciones iniciales que se darán para el desarrollo de la tarea indican que para atender a lo señalado en la parte referida a la anticipación deben los estudiantes considerar la situación simplemente a nivel mental sin hacer uso de las manos. En este ciclo reciben hoja de trabajo individual para registrar todo el desarrollo. Para estudiar la situación posteriormente dispondrán de lápiz y papel, palos, plastilina y un cartón, así como del software Cabri 3D. Se les pedirá escribir en cada una de las columnas su resultado atendiendo a la herramienta utilizada para abordar la situación.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrollará únicamente en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactuarán con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los aspectos de contenido involucrados en el desarrollo de esta tarea ya han sido estudiados previamente. Son elementos del sistema teórico que permiten determinar un plano: el Postulado puntos-plano, el

Teorema recta-punto-plano y el Teorema rectas-plano. Los estudiantes podrán determinar la cantidad exacta de planos que se determinan con la configuración de puntos dada haciendo uso de alguno de esos elementos del sistema teórico.

En el Ciclo 1 se observó que los estudiantes privilegiaron el uso del Postulado puntos-plano. En el Ciclo 2 se observó que usaron el Postulado puntos-plano, el Teorema rectas-plano y el Teorema recta-punto-plano. En la presente tarea el enunciado se modifica sustancialmente respecto a los ciclos 1 y 2, dado que se les solicita a los estudiantes hacer la determinación de planos aumentando el número de puntos coplanares, se espera que el modelo para esta determinación de planos sea el polígono en el plano base con sus diagonales. Así que probablemente el elemento teórico más usado será el Teorema recta-punto-plano, seguido del Postulado puntos-plano y eventualmente puede aparecer el Teorema rectas-plano.

Enfoque en la mediación (Em). En el desarrollo de esta tarea se emplearán tres artefactos: lápiz y papel, modelo físico que se construye con palos y plastilina y Cabri 3D. Nos interesa particularmente examinar el papel de los dos últimos en el desarrollo de la tarea. Asimismo, hay dos momentos demarcados en el desarrollo de la tarea: la anticipación individual y la interacción en grupos donde se estudia la situación representándola con los artefactos mencionados.

Respecto al modelo físico y su potencial semiótico consideramos que el representar la “” (figura 6.8) del poliedro que se forma al unir los puntos dados con los palos, sugerirá la idea de usar el Teorema recta-punto-plano. Es nuestra hipótesis porque el tener los palos creemos que indicará la representación de segmentos de recta y que la determinación y conteo de planos vendría insinuada directamente por el mencionado teorema. Por otro lado, el contraste de resultados distintos de la anticipación motiva a discutir la situación hasta alcanzar un consenso satisfactorio para los integrantes de cada grupo de trabajo.

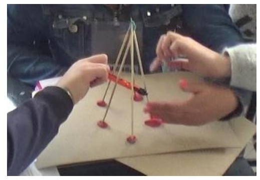


Figura 6.8. Representación de la situación para 5 puntos en el plano base.

Acerca de Cabri 3D, de acuerdo con las instrucciones impartidas verbalmente, los estudiantes lo usarán después de hacer la exploración con lápiz y papel y con el modelo físico. Por tanto, el papel del entorno es en esta tarea más de verificación que de construcción conceptual. En Cabri 3D hay tres maneras de determinar un plano: por tres puntos, con un punto y una recta y con dos rectas que se intersecan que se pueden asociar a los tres elementos teóricos mencionados antes: Postulado puntos-plano, Teorema recta-punto-plano y Teorema rectas-plano. El uso de Cabri 3D no generará la introducción de nuevos elementos teóricos en el sistema axiomático en construcción en el curso. Tampoco tiene un papel decisivo para potenciar la incertidumbre, pero sí hará ostensible el elemento teórico privilegiado por los estudiantes para determinar los planos.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). En este ciclo se espera que la incertidumbre emerja producto del contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la discusión en grupos. La anticipación individual se hará sin uso de lápiz y papel o cualquier modelo físico con las manos. En el estudio de la situación en grupos pueden hacer uso de lápiz y papel, material concreto (palos, plastilina y cartones) para hacer modelo físico y Cabri 3D.

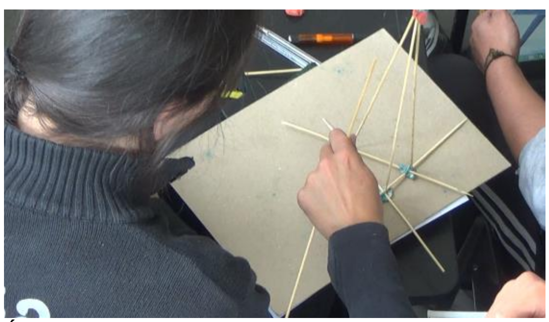
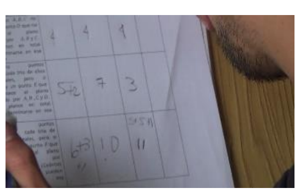
Esperamos que, al hacer la anticipación individual, en cada caso, el número de planos que determinen sea diferente que el número exacto de planos que se pueden determinar con esa configuración de puntos, particularmente a medida que se aumenta el número de puntos en el plano base. Este resultado deberá generar duda en los estudiantes respecto a la inconsistencia en éstos, esta duda será evidente en la interacción en los grupos de trabajo. De esta manera esperamos que la incertidumbre se genere en este ciclo.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se espera que la incertidumbre se manifieste como duda o como sorpresa al contrastar los resultados de la anticipación individual con los obtenidos en grupo con el uso del modelo físico, como ya se mencionó en el apartado anterior. Esta incertidumbre generada movilizará la necesidad intelectual para hacer una revisión de sus resultados con base en los elementos teóricos estudiados. Lo previsto es que estos elementos teóricos permitan establecer un método confiable para obtener los resultados con independencia de los posibles errores de conteo. Adicionalmente, esperamos que la necesidad intelectual producida conduzca a los estudiantes a generalizar como determinar el número de planos para los casos en los cuales el conteo directo no es posible. La justificación epistemológica será visible en la exposición de argumentos planteados con la intención de resolver la situación, es decir con la manifestación de argumentación productiva, y en la confianza que expresen con el resultado obtenido a partir de los elementos teóricos que soportan la respuesta correcta que el número de planos es exactamente siete.

A 3.3.2 Interacciones analizadas.

Se registraron dos grupos de trabajo: El grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2). Se presenta a continuación el análisis de las interacciones en cada uno de los grupos.

Tarea 3, ciclo 3, grupo 1. T3C3G1: Transcripción		Análisis
1 Antonio:	[…] Claro, entonces yo cogí y los conté así, vea  Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve [Va juntando pares de dedos con el pulgar de manera alternada y ordenada, luego sin el pulgar junta otros tres dedos alternándolos] y el plano [Hace una señal	Ei: La anticipación que se hace explicita es la de Antonio. En la que usa un modelo combinatorio, al tomar los cinco dedos y hacer tríos está haciendo el conteo organizado cuyo resultado también se obtiene con la expresión $\binom{5}{3}$. Pero el pierde de vista uno de los tríos y por eso le da como resultado nueve y lo completa con el plano base. En ese momento parece ser para él la solución a la cantidad de planos determinados cuando hay cinco puntos en el plano base.

	con la mano para referirse al plano base]: diez.	Ec: El conteo de tríos por parte de Antonio sugiere el uso del Postulado puntos-plano además de su modelo combinatorio.
Antonio y Bayron construyen el modelo con los palos y plastilina con cuatro puntos en el plano base, Antonio lo contempla un momento y dice		
6 Antonio:	¡Ah!...¡Vea, vea! ¿Cuántos teníamos allá? [señala con un palo en el modelo como sería con solamente tres puntos en la base, haciendo referencia a la cantidad de planos determinados en el modelo con solamente tres puntos en el plano base].	Ei: La expresión que utiliza Antonio manifiesta que se encontraba en una situación de duda de la cual ha salido y quiere comunicar a su compañero la estrategia que empleó para resolverla.
7 Bayron:	Cuatro	
8 Antonio:	Venga le explico, uno, dos, tres… [señala con un palo sobre el modelo a manera de segmento que une dos puntos donde uno de los puntos es el nuevo punto que han agregado] ¿Si me entendió?	
9 Bayron:	[Niega con la cabeza]	Ei: La negación de Bayron parece expresar que se encuentra en un estado de duda, aunque en el momento no es claro respecto a qué. Más adelante se observa que la dificultad es cuando son 5 puntos en el plano base.
10 Antonio:	O sea…ahí hay cuatro [quitando uno de los palos para volver al modelo con solamente tres puntos en la base], al agregar éste se van a agregar, se van a agregar: éste y éste [señala con un palo sobre el modelo a manera de segmento que une dos puntos donde uno de los puntos es el nuevo punto que han agregado]. 	En y Ec: La estrategia de Antonio sugiere que ha adoptado un modelo geométrico para resolver la situación [abandonando su inicial modelo combinatorio] en donde usa el Teorema recta-punto-plano, pues lo relevante para hablar de los planos son los segmentos que se determinan cada vez que se agrega un punto al plano base. Lo que se confirma en la línea 16. Em: Al parecer el modelo ha sido relevante para que la estrategia empleada sea ahora orientada hacia el sistema teórico de geometría más que la combinatoria como lo fue inicialmente.
11 Bayron:	Éste ¿Cuál otro y cuál otro? [Señala sobre el modelo].	
12 Antonio:	[Hace el conteo ahora deslizando el palo más suavemente para ilustrar los uno a uno los tres segmentos nuevos que para él determinan nuevos planos].	
[…]		
16 Antonio:	Es que, por cada segmento, los planos que contienen cada segmento [le señala los segmentos que hay en el tercer dibujo]. 	
[…]		

27 Antonio:	Perro véase el b) [se dirige a Bayron] véase bien el b) y le digo como se hace. ¿Se acuerda cuando hicimos la recurrencia? Ahí la tenemos perro: el número de lados del polígono, más el número de diagonales del polígono, más uno que es el plano de abajo.	En: Antonio plantea la regla para una generalización para n puntos en el plano.

A continuación, la interacción que se produjo en el segundo de los grupos. Las estudiantes han representado en el modelo físico la situación para tres puntos en el plano base y han llegado a la conclusión que se determinan cuatro planos.

Tarea 3, ciclo 3, grupo 2. T3C3G2: Transcripción		Análisis
16 Investigador:	¿En el primero coincidieron la anticipación con lo que vieron ahí?	Ei: La anticipación que produjeron sin el uso de modelo físico o dibujos no se corresponde con lo que obtienen al usar el modelo, como se había previsto en la THA.
17 Carolina:	No	
18 Investigador:	¿No? ¿Ustedes habían dicho cuántos planos?	
19 Violeta y Carolina:	Tres	
Hacen posteriormente en el modelo la verificación de cuántos planos se determinan con cuatro puntos en el plano base		
22 Carolina:	Uno, dos, tres, cuatro… [desliza el lápiz sobre las caras de la pirámide que representa el modelo].  …y cinco (señala con el lápiz el cartón que representa el plano base).	Em: Aun usando el modelo físico el conteo de los planos que se determinan no es correcto. Ec: La manera de contar los planos sugiere que usan como fundamento de su estrategia el Teorema recta punto-plano, pues el lápiz puede asumirse como la representación de la recta que determina un plano con el punto exterior al plano base. Sin embargo, esto no lo explicitan en ningún momento.
23 María:	Y cinco [asiente].	
24 Carolina:	¿Por qué?	
25 Violeta:	Cinco [hace el conteo usando la palma de la mano para representar los planos] ¡Uy estamos bien! Yo también puse cinco. [Ella y María han escrito en la hoja 5, Carolina ha escrito 7].	
26 María:	Yo quiero saber por qué pusieron diez en el último [ríe mientras lo dice].	Ei: Es la primera manifestación de incertidumbre como duda. El origen de ésta es lo que cada una ha escrito en su anticipación en la hoja de trabajo que no es coincidente para ninguna de las tres. Carolina ha escrito 11, María 6 y Violeta 10.
27 Investigador:	¿Ahí están seguras de que son cinco?	
28 María:	[Hace el conteo] Espérate	Ei: Es la segunda manifestación de

¿Y éste? [Señala la “diagonal”]

incertidumbre en este caso expresada como sorpresa, verificable en las expresiones que usa Violeta en la línea 30 y en la risa de las tres estudiantes. Esta reacción es inducida por la solicitud del investigador de revisar sus resultados.

29 Carolina: Seis…siete [está contando mientras María recorre con el lápiz las “diagonales”]

[Ríen sorprendidas y Carolina celebra porque siete es lo que ella ha escrito como anticipación].

Em: Acá un uso apropiado del modelo físico permite revisar un resultado incorrecto.

En: La incertidumbre que se ha producido, no genera necesidad intelectual. Pues no hay evidencia de una indagación por parte de los estudiantes en el cuerpo de conocimiento de referencia.

30 Violeta: ¿Siete? ¡Ay sí! [verifica ella haciendo su conteo]

¡Ay genial!

Han hecho la representación para 5 puntos en el plano base, hacen el conteo y obtienen como resultado 10 planos.

63 Investigador: Déjenme ver…perdón, las voy a molestar, déjenme ver el modelo que hicieron para cinco. En todos yo vi que ustedes contaron este también ¿No? [Señala el plano base] que es importante también.

64 Violeta: Si

Hacen nuevamente el conteo y concluyen que son diez planos otra vez.

66 Investigador: Después de éste [señala un punto sobre el modelo], íbamos cinco [hace un gesto circular sobre el modelo indicando las “caras”]. Estamos haciendo un conteo de diagonales ¿Ya las contaron todas?

Ei: Nuevamente motivadas por el investigador revisan sus resultados. Obtienen un resultado distinto y genera en las estudiantes sorpresa, evidente en su reacción cuando ríen y que Violeta verbaliza.

67 María: Otra vez [Han puesto palos para indicar las “diagonales”]

68 Violeta: ¡Si dan once! (ríe)

En: La incertidumbre no genera necesidad intelectual.

A 3.3.3 Hojas de trabajo.

G1: Hojas de trabajo

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	4	 4	4	4
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	~~6~~ 7	 7	7	7
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	~~8~~ 9	 10	11	11

Análisis

Ec: Dice en primer lugar que para el conteo usó dos puntos del plano y el punto que no pertenece a éste. En segundo lugar, dice que notó que el número de planos está relacionado con el número de los segmentos. Estas afirmaciones pueden interpretarse como uso del Postulado puntos-plano inicial y posteriormente del Teorema recta-punto-plano.

Em: Se observa que aparecen resultados distintos entre anticipación, dibujo y modelo para la tercera fila (con cinco puntos). Donde el resultado con el modelo es el correcto.

Ei: En la solución para cinco puntos en el plano está clara la diferencia con el uso del modelo y sin éste. Las enmendaduras en la anticipación, para los tres casos, no permiten saber si fueron producto de reconsideración en el momento de anticipar o si fueron posteriores.

En: Expresa una generalización para *n* planos en la cual explica que se usa una formula combinatoria.

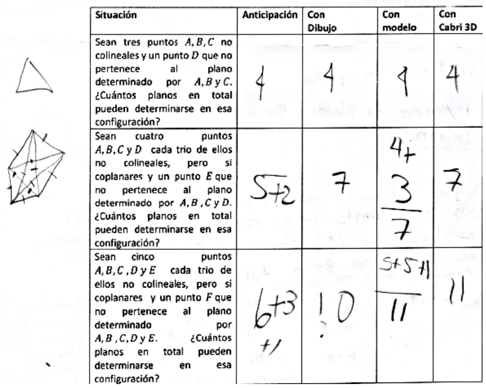
Hoja de trabajo de Byron:

a)

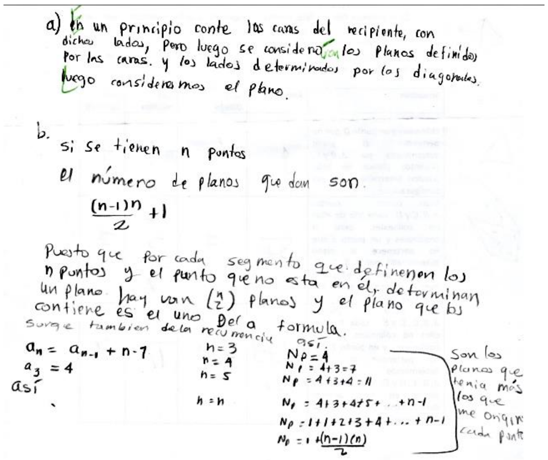
Haciendo un conteo, para el primer caso fue claro que por cada dos puntos del plano y el no coplanar podía formar un plano, luego serían 4 planos. Usé el mismo método para el segundo y noté que el número resultante estaba relacionado con el número de segmentos que se pueden formar con los puntos. Pero incluso sabiendo esto tuve dificultad para hacer el conteo pues olvidaba contar el plano inicial, luego concluí que el número de planos es el número de segmentos que se pueden formar con los puntos mas 1 que es el plano inicial.

b) Para hallar la fórmula de los planos es posible usar la formula de la combinatoria pues con n puntos por cada 2 puntos de ellos formo un segmento, luego sería una combinatoria de n elemento agrupados de a dos mas el plano inicial es decir $1+\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}+1 = \frac{(n-1)n+2}{2}$

Hoja de trabajo de Antonio:



Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	4	4	4	4
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	5+2	7	4+ 3 / 7	7
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	6+3 +1	10 ?	5+5+1 / 11	11



a) En un principio conte las caras del recipiente, con dichos lados, Pero luego se consideraron los Planos definidos por las caras. y los lados determinados por los diagonales. luego consideramos el plano.

b. si se tienen n puntos el número de planos que dan son.

$$\frac{(n-1)n}{2}+1$$

Puesto que por cada segmento que definenen los n puntos y el punto que no esta en él, determinan un plano hay van $\binom{n}{2}$ planos y el plano que los contiene es el uno Del a formula.

Surge tambien de la recurrencia así.

$a_n = a_{n-1} + n-1$

$a_3 = 4$

así

$n=3$	$N_p = 4$
$n=4$	$N_p = 4+3=7$
$n=5$	$N_p = 4+3+4=11$
$n=n$	$N_p = 4+3+4+5+\ldots+n-1$
	$N_p = 1+1+2+3+4+\ldots+n-1$
	$N_p = 1+\frac{(n-1)(n)}{2}$

Son los planos que tenia más los que me origin cada punto

Ec: Dice en primer lugar que para el conteo usó "las caras del recipiente" y en segundo lugar que consideró además las diagonales. Estas afirmaciones pueden interpretarse como uso del Teorema recta-punto-plano pues está determinando los planos con base en los segmentos.

Em: Para la segunda y tercera filas aparecen resultados distintos entre anticipación, dibujo y modelo. Donde el resultado con el modelo es el correcto.

Ei: En la solución para cinco puntos en el plano está clara la diferencia con el uso del modelo y sin éste. Las sumas agregadas en la anticipación no permiten saber si fueron producto de reconsideración en el momento de anticipar o si fueron posteriores.

En: Expresa una generalización para *n* planos en la cual explica que se usa una formula combinatoria y la recurrencia que le permitió establecerla.

Hoja de trabajo de Jeison:

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, D y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	4	4 	4	
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	12	7 	7	
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	36	10 	11	

Lo la embarre por que conte varias veces los mismos planos.

a) cuando lo hice mentalmente conte el mismo plano varias veces, despues con el dibujo y la notacion descarte el que se repetia.

b) no entendi ó no encontre regularidad

Ec: No hay información que permita establecer en que se basó para resolver la situación.

Em: Para la segunda y tercera filas aparecen resultados distintos entre anticipación, dibujo y modelo. Donde el resultado con el modelo es el correcto.

Ei: El contraste de resultados es evidente entre cada uno de los momentos en que abordó la solución.

En: Expresa que no pudo establecer la regularidad.

G2: Hojas de trabajo

Hoja de trabajo de Carolina:

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Tres		Cuatro	
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Siete		Siete	
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Once		~~Diez~~ Once	

a) Se observan modificaciones ya que inicialmente sin ver o hacer un dibujo o modelo es difícil tener claro cuales son los 3 puntos no colineales que determinan un plano nuevo, esa fue la principal falla en el primer punto principalmente.

Análisis

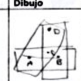
Ec: La alusión a los “tres puntos no colineales que determinan un plano nuevo” permite inferir que usa el Postulado puntos-plano.

Em: En las tres columnas el resultado es el mismo para la primera fila, para las otras dos omitió el resultado “con dibujo”. En este registro no hay evidencia del papel de la mediación en el cambio de la solución.

Ed: La alusión al “dibujo o modelo” da indicios del papel desempeñado por los artefactos en la exploración de la situación.

Et: No hay evidencia de búsqueda teórica o generalización en lo que consigna por escrito.

Hoja de trabajo de Carolina:

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Tres		Cuatro	
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Siete		Siete	
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Once		~~Diez~~ Once	

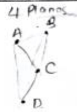
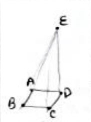
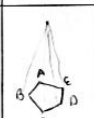
a) Se observan modificaciones ya que inicialmente sin ver o hacer un dibujo o modelo es difícil tener claro cuales son los 3 puntos no colineales que determinan un plano nuevo, esa fue la principal falla en el primer punto principalmente.

Ec: La alusión a los "tres puntos no colineales que determinan un plano nuevo" permite inferir que usa el Postulado puntos-plano.

Em: En las tres columnas el resultado es el mismo para la primera fila, para las otras dos omitió el resultado "con dibujo". En este registro no hay evidencia del papel de la mediación en el cambio de la solución.

Ed: La alusión al "dibujo o modelo" da indicios del papel desempeñado por los artefactos en la exploración de la situación.

Et: No hay evidencia de búsqueda teórica o generalización en lo que consigna por escrito.

Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	3 planos	4 planos 	4 planos	
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	5 planos	 5 planos	7 planos	
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	6 planos	 6 planos	10 planos 11 planos	

Individual:

a) El resultado se modificó cuando se hace una exploración física con el modelo.

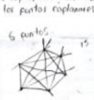
El cambio se justifica ya que yo había pensado que eran sólidos y por ello se contó solo las superficies que limitaban los segmentos formados por los puntos coplanares. ??

b) Grupal:

4	3 → 4
5	4 → 7
6	5 → 11
7	6 → 16
8	7 → 22

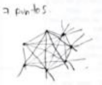
3, 4, 5, 6

6 puntos



15

7 puntos



22

\# Planos = a.

\# Todos los puntos = n

\# Puntos coplanares = k

~~(n-1)+k = a~~

* El elemento que permite hacer la generalización P 2 puntos - recta y T recta y punto - plano

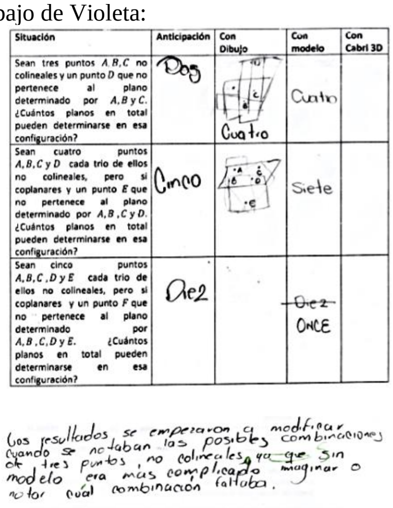
Ec: Menciona "superficies limitadas por segmentos coplanares" es razonable suponer que hizo uso del Teorema recta-punto-plano para determinar los planos.

Em: Dice que el resultado cambió cuando hizo una exploración con el modelo. En las tres columnas los resultados para cuatro y cinco puntos cambian con el uso de los artefactos.

Ei: Su interpretación del cambio señala en primer lugar al uso del modelo físico que cambió su visión de la representación que se había hecho de la situación como un sólido.

En: Queda registrado el intento de generalización mediante la recurrencia, pero no tiene éxito.

Hoja de trabajo de Violeta:



Situación	Anticipación	Con Dibujo	Con modelo	Con Cabri 3D
Sean tres puntos A, B, C no colineales y un punto D que no pertenece al plano determinado por A, B y C. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Dos	Cuatro	Cuatro	
Sean cuatro puntos A, B, C y D cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto E que no pertenece al plano determinado por A, B, C y D. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Cinco		Siete	
Sean cinco puntos A, B, C, D y E cada trio de ellos no colineales, pero si coplanares y un punto F que no pertenece al plano determinado por A, B, C, D y E. ¿Cuántos planos en total pueden determinarse en esa configuración?	Diez		~~Diez~~ ONCE	

Los resultados se empezaron a modificar cuando se notaban las posibles combinaciones de tres puntos, no colineales, ya que sin modelo era más complicado imaginar o notar cuál combinación faltaba.

Ec: La alusión a los “tres puntos no colineales que determinan un plano nuevo” permite inferir que usa el Postulado puntos-plano.

Em: Dice que el resultado cambió cuando hizo una exploración con el modelo. En las tres columnas los resultados para cuatro y cinco puntos cambian con el uso de los artefactos.

Ei: Su interpretación del cambio señala al uso del modelo físico que modificó su visión al permitir ver mejor la “combinación” de puntos para determinar un plano.

En: No hay evidencia de búsqueda teórica o generalización en lo que consigna por escrito.

A 3.3.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):

THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que usaran principalmente el Teorema recta-punto -plano y en menor medida el Postulado puntos-plano.	En el G1 surge en primer lugar como elemento de referencia la combinatoria, posteriormente hacen uso del Postulado puntos-plano y al emplear el modelo físico si aluden al Teorema recta-punto-plano. En el G2 aparece la referencia al Teorema recta-punto-plano cuando hacen uso del modelo.	La THA puede mejorarse considerando los diferentes momentos que tiene el estudio de la situación por parte de los estudiantes. En primera instancia antes de usar el modelo físico es razonable que hagan uso de la combinatoria y del Postulado puntos-plano que es el recurso más conocido y usual para determinar planos.

Enfoque en la mediación (Em):

THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto lo siguiente con respecto al uso del modelo físico y la interacción social al abordar la situación • El uso del modelo y de Cabri 3D al contrastarlo con los resultados previos obtenidos individualmente contribuye a generar	En el G1 se verifica el uso del Teorema recta-punto-plano una vez están haciendo uso del modelo físico. Así como el contraste entre los resultados obtenidos individualmente en su anticipación y los obtenidos con el modelo, particularmente al considerar cinco puntos en el plano base. En el G2 se verifica el contraste entre los resultados obtenidos individualmente en su	El contraste entre los resultados obtenidos al anticipar individualmente y hacer la exploración en grupo con el uso del modelo físico es más evidente en este Ciclo con respecto al Ciclo dos y su papel en la generación de

incertidumbre. • El uso del modelo evoca en el estudiante el uso del Teorema recta-punto-plano.	anticipación y los obtenidos en el modelo. Aunque en este grupo la intervención del investigador influyó bastante para hacer evidente ese contraste a las estudiantes	incertidumbre. Sin embargo, al no ocurrir en los dos grupos este contraste -pues la intervención del investigador en el segundo grupo fue importante- la evidencia no es concluyente para afirmar que la tarea por si sola funciona en la dirección deseada

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la incertidumbre se generará como resultado del contraste entre la anticipación individual y el resultado obtenido en la exploración en grupos de la situación usando el modelo físico.	Como se mencionó en el apartado anterior el contraste se produjo en los dos grupos. En el primero se desarrolló naturalmente y en el segundo motivado por la intervención del investigador. En el G1 es visible como la duda se genera al hacer uso del modelo físico y comprobar para el caso de cinco puntos en el plano base que su anticipación no correspondía con lo que observan. En el G2 con posterioridad a las preguntas formuladas por el investigador, son visibles la duda y la sorpresa al constatar que los resultados anticipados no corresponden a lo que ilustra el modelo.	

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la necesidad intelectual y justificación epistemológica se expresaran cómo: • La exposición de argumentos teóricos para resolver la incertidumbre que hubiese tenido lugar. La argumentación productiva exhibida para resolver la situación de duda y la satisfacción expresada con los argumentos expuestos.	Hay evidencia de necesidad intelectual y de justificación epistemológica en el G1 pues examinan lo hecho y obtienen una generalización dos de los integrantes del grupo. En el G2 no hay evidencia de necesidad intelectual pues el encontrar que los resultados no se corresponden (entre la anticipación y lo obtenido posteriormente) no impulsa una búsqueda teórica	A diferencia del Ciclo dos en donde fue más evidente en los grupos la presencia de necesidad intelectual acá no ocurre lo mismo. Probablemente por un excesivo énfasis en los aspectos operativos y de conteo en la tarea, se pierde la perspectiva de su dimensión conceptual.

A 3.4 CONCLUSIONES DE LOS ENFOQUES EN LOS TRES CICLOS PARA LA TAREA 3

A 3.4.1 Enfoque en el contenido.

Teníamos unos supuestos respecto al contenido que podría ser evocado con el desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes. Respecto a los cuales una vez contrastadas la THA y TRA podemos decir:

- El contenido a evocar no es estrictamente geométrico como lo consideramos inicialmente. Pues, al preguntar por “cuántos planos” los estudiantes con frecuencia van a recurrir a técnicas de conteo, acordes a su nivel de conocimiento de estas.
- La situación planteada en la tarea no conduce a una manera predominante de determinar un plano. Son varios los elementos teóricos que permiten determinar un plano. En consecuencia, son diversas las maneras de hacerlo por parte de los estudiantes.
- Se verificó en los tres ciclos que el contenido geométrico que se tiene previsto sea evocado, efectivamente lo es. En medio de muchos otros elementos del conocimiento matemático de los estudiantes como ya se mencionó.

A 3.4.2 Enfoque en la mediación.

Trabajamos en los tres ciclos con el supuesto de que el uso de determinado artefacto, en este caso el modelo físico con palos y plastilina evocaba un contenido geométrico específico. Como se mencionó en la sección anterior, los elementos teóricos evocados para determinar un plano fueron diversos, no un elemento teórico específico como teníamos previsto.

La hipótesis que pusimos en juego acerca del papel del contraste entre el resultado obtenido en la anticipación y el obtenido con el uso del modelo físico, en la cual considerábamos que este contraste podría ser generador de incertidumbre parece tener tendencia a confirmarse. Sin embargo, la evidencia en esta tarea no es concluyente al respecto.

La hipótesis mencionada anteriormente tiene otro aspecto del contraste y es entre el resultado individual de la anticipación y el obtenido con posterioridad cuando hay interacción en los grupos. Consideramos que este contraste podría también motivar la emergencia de incertidumbre, y al igual que en el caso anterior la tendencia parece ser a confirmar ésta. Sin embargo, en este caso la evidencia tampoco es concluyente.

A 3.4.3 Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei).

En la sección anterior se mencionaron ya dos de los elementos previstos para la generación de incertidumbre. El otro elemento que se puso en juego en esta tarea fue el enunciado, parece haber funcionado la mención de los "ocho planos" particularmente en el Ciclo dos donde éste parece haber contribuido significativamente a la generación de incertidumbre. Así como parece no haber funcionado tan bien el cambio en el enunciado de la tarea para el Ciclo tres, pues en éste la evidencia no es tan favorable respecto a la generación de incertidumbre.

A 3.4.4 Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En).

El tránsito de la incertidumbre a la necesidad intelectual y de ésta a la justificación epistemológica se presentó de manera más amplia en el Ciclo dos, en donde el enunciado de la tarea parece tener un papel más protagónico en la generación de incertidumbre.

ANEXO 4

TAREA 4

A 4 ANÁLISIS DE LA TAREA 4

Las tareas cuatro cinco y seis hacen parte del segundo bloque temático del curso de Geometría del Espacio. En este bloque se estudian las relaciones de perpendicularidad recta-plano a partir de la definición de esta relación y los teoremas de existencia y unicidad de esta. Parte de este estudio son la definición de plano mediador y el que denominamos teorema de las "tres perpendiculares", así como la construcción por parte de los estudiantes de imágenes mentales de las relaciones de perpendicularidad en el espacio y su capacidad para "ver" las construcciones auxiliares requeridas para las demostraciones. La tarea cuatro se aplicó en los ciclos dos y tres. El enunciado se modificó de un ciclo al otro.

A 4.1 TAREA 4, CICLO 2

A 4.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje.

Meta de aprendizaje

Establecer teóricamente las condiciones para que exista una relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.

Tarea

Enunciado

Determinen la respuesta a las siguientes preguntas. Si las pueden justificar, háganlo

d) Un plano α y una recta m se intersecan ¿Qué es la intersección?

e) Sean *m*, *n* y *l* rectas tales que *m* es paralela a *l* y *l* es perpendicular a *m* ¿Es *l* perpendicular a *n*?

f) La recta AB está contenida en el plano α, la recta CD está contenida en el plano β. α y β son planos diferentes, las rectas AB y CD son paralelas ¿Es vacía la intersección de los planos α y β?

Instrucciones adicionales

Los estudiantes abordan la situación en primer lugar de manera individual. Posteriormente, discuten en grupo sus soluciones y para ello cuentan con materiales para hacer un modelo físico de la situación y Cabri 3D.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrollará inicialmente en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactuarán con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. Los estudiantes reportan su trabajo en una hoja por grupo y a partir de estas la profesora organiza la discusión en la siguiente sesión de clase.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con la pregunta a) esperamos que los estudiantes construyan imágenes mentales de la intersección de un plano y una recta, esta intersección puede ser un punto o la recta misma (Figura 6.9). Con la pregunta b) esperamos que los estudiantes usen la definición de rectas paralelas, la cual implica que son coplanares. A su vez, esperamos que construyan imágenes mentales de las tres rectas mencionadas, puede ocurrir que las tres estén en el mismo plano o que la perpendicular no esté contenida en el plano. A partir de esta representación se espera introducir la definición de rectas alabeadas (Figura 6.10). Con la pregunta c) esperamos que usen los estudiantes la definición de planos paralelos. Construyendo imágenes mentales para la solución en la cual los planos son paralelos y el caso en el cual se cumple la condición dada en el enunciado sin que los planos sean paralelos (Figura 6.11).

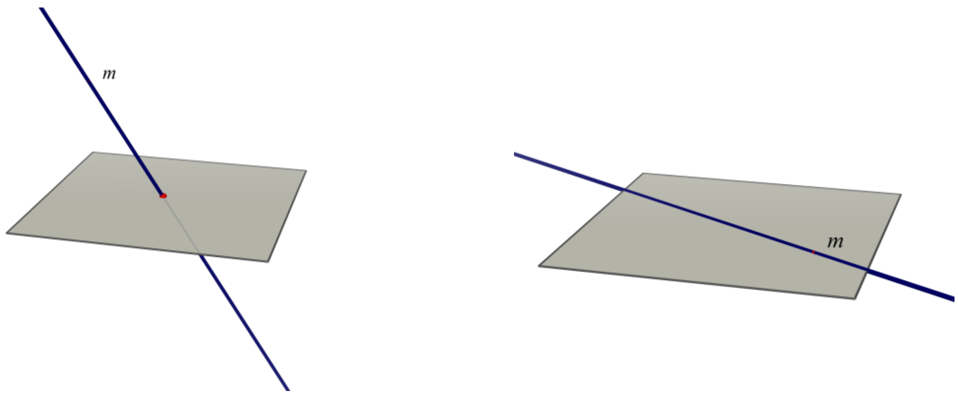


Figura 6.9. Dos posibles representaciones para la respuesta a la pregunta (a)

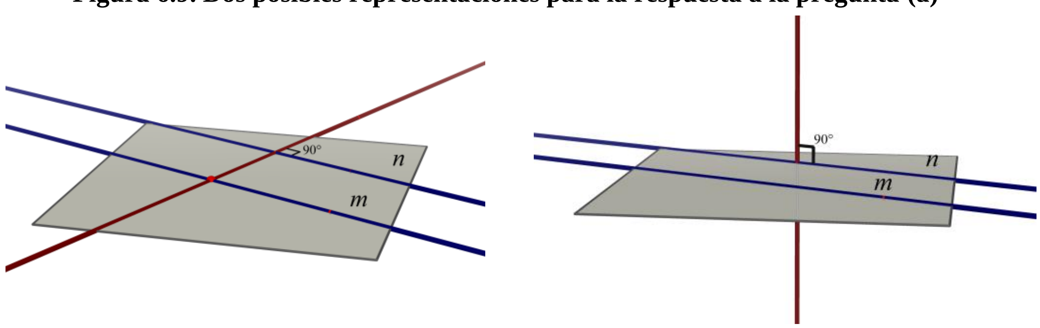


Figura 6.10. Dos posibles representaciones para la respuesta a la pregunta (b)

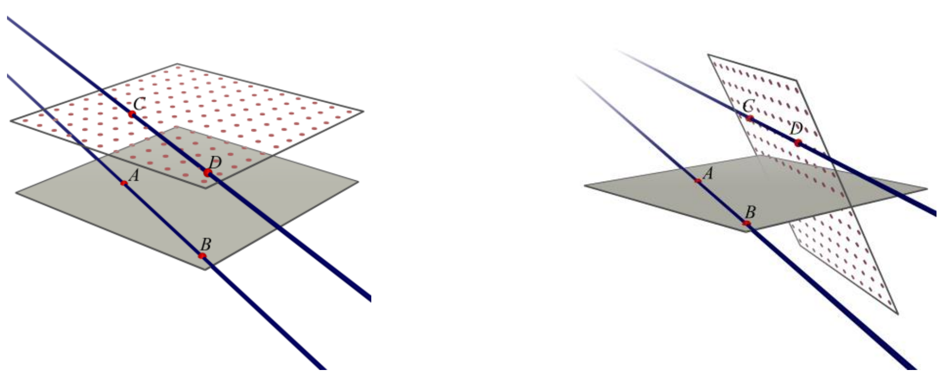


Figura 6.11. Dos posibles representaciones para la respuesta a la pregunta c)

Enfoque en la mediación (Em). Esperamos que en el momento de la interacción en los grupos al trabajar con el material concreto y/o con Cabri 3D, aquellos estudiantes que construyeron imágenes mentales de las soluciones para uno solo de los casos amplíen su visión a más de una solución como se ilustra en las figuras 6.9, 6.10 y 6.11. Por otro lado, el momento en el cual la profesora discutirá las soluciones con la clase lo consideramos muy relevante. En ese momento, la profesora tomará las soluciones aportadas por los estudiantes y planteará cuestionamientos a estas representando las mismas con Cabri 3D.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Esperamos que la incertidumbre se exprese como duda producto de las opiniones diferentes que planteen los estudiantes respecto a las posibles soluciones a las preguntas. Por otra parte, cuando la profesora desarrolle la discusión con la clase esperamos que la incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa ante las alternativas planteadas por la profesora, ilustradas con Cabri 3D, que pueden no haber sido consideradas por algunos estudiantes en sus soluciones.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Esperamos que al producirse la incertidumbre genere esta necesidad intelectual para fundamentar la solución a cada una de las preguntas. Esa necesidad intelectual se expresará como los argumentos teóricos que sustenten por qué pueden ser uno o dos puntos la intersección en la respuesta a la pregunta a), por qué la perpendicular puede estar o no contenida en el mismo plano de las paralelas en la solución a la pregunta b) y por qué los planos pueden o no ser paralelos al responder a la pregunta c). La argumentación productiva exhibida en la interacción en los grupos, así como la conformidad expresada con las soluciones logradas serán evidencia de justificación epistemológica.

A 4.1.2 Interacciones analizadas.

Como se mencionó en el capítulo de Metodología para las tareas del bloque dos se recogió información en los ciclos dos y tres. Para la tarea que estamos reportando en el ciclo dos se registraron dos grupos de trabajo: El grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2) y la interacción de la profesora con toda la clase. Se presenta a continuación el análisis de la interacción del grupo uno, pues en el grupo dos la calidad del audio captado no permitió la transcripción de la interacción y posteriormente se presenta el análisis de la interacción de la profesora con la clase.

Tarea 4, ciclo 2, grupo 1. T4C2G1: Transcripción		Análisis
2 Juan:	Habíamos dicho que la intersección puede ser, o la recta o un punto. La intersección pueden ser dos cosas. Dos casos, se pueden justificar ambos casos.	Ei: No parece experimentar duda alguna acerca de la solución, considera los dos casos previstos en la THA.
3 Carlos:	Es mejor definir la intersección [empieza a escribir en su cuaderno].	Ei: Plantea una duda acerca del camino para abordar la solución. No considerar la configuración geométrica sino precisar cómo se entiende la intersección.
4 Juan:	O sea, podemos justificar los dos casos.	Ei: Persiste en su interpretación inicial: “los dos casos”
5 Carlos:	La recta *m*, intersecada con alfa es igual a [va escribiendo en una hoja] los *x* tales que *x* pertenezcan a *m* y *x* pertenezcan a alfa.	Ec: Establece su definición de la intersección para el caso que se está discutiendo. Ei: Ha expresado que lo relevante es definir la intersección y actúa en consecuencia con esto. En: Evoca un elemento teórico de referencia para resolver la situación, aunque no es claro que este se produzca como resultado de la incertidumbre.
[…]		
7 Carlos:	¿Será que si se puede dar el caso de la recta en el plano y eso si se puede tomar como una intersección?	Ei: Expresa duda acerca de la propuesta de Juan.
8 Juan:	Pues claro, porque la recta está contenida…la recta tiene puntos en el plano	Ei: Exhibe el que considera un argumento para responder a la pregunta de Carlos.
9 Jimmy	¿Pero está contenida?	Ei: Plantea un cuestionamiento al argumento de Juan.
10 Juan:	La recta siempre está contenida por la llaneza.	En y Ec: Evoca un argumento del sistema teórico para justificar porque la recta está contenida, aunque sin justificar con rigor que se cumple el antecedente del Postulado.
11 Carlos:	Pero no en ese plano, en otro. Voy a colocar, cómo la recta no está contenida en alfa.	Ei: Son evidentes las dos concepciones acerca de cómo abordar la solución. Carlos considera que debe hacerse un enfoque que podría caracterizarse como general, respecto a la intersección de los dos objetos y Juan adopta un enfoque que podría considerase “concreto” en el cual lo relevante es la representación geométrica de lo que se está discutiendo.
12 Juan:	¿Eso se sabe? Cómo tenemos los dos casos. O que esté o que no esté, si no está entonces usted puede decir, entonces la intersección es un punto.	
13 Carlos:	Bueno, si se intersecan la intersección es distinto de vacío.	
14 Juan:	Ya tiene que centrarse en A [señalando sobre la hoja en la cual César escribe]. Entonces usted tiene dos posibilidades por definición. Usted puede definir intersección, pero vaya al grano, la intersección puede ser	

	la recta o un punto.	
15 Carlos:	Si lo puede justificar…	
16 Juan:	Ya tenemos que dado una recta está contenida en un plano por un teorema.	
17 Carlos:	Pues fácil, eso es una intersección ¿Cierto? Eso es un conjunto de puntos, no es vacío ¿Qué pasa si la intersección es un punto?	En: Carlos le presenta el plan completo de la justificación como él la ve a Juan, incorporando lo que Juan ha dicho desde el principio.
18 Juan:	Un punto, que la recta está por fuera.	
19 Carlos:	¿Si hay dos puntos?	
20 Juan:	Si hay dos puntos es porqué la recta está en el plano	
21 Carlos:	Esa es la idea ¿No? Si la intersección es un punto, no puede haber más, entonces hay un punto fuera del plano, porque no está en el plano, por esos dos puntos hay una recta, esa recta no está en el plano.	
22 Juan:	Es que yo creo que usted está dando mucha vuelta, porqué ya tiene la recta y con que tenga *m* ya tiene por lo menos dos puntos.	Ei: Juan expresa su incomodidad con el método de Carlos pues le parece que incluye elementos innecesarios.
23 Carlos:	¿Y esos puntos dónde están?	Ei: Amplía la explicación de su razonamiento para justificar a Juan.
24 Juan:	No se sabe, porque puede que estén ambos en el plano…	
25 Carlos:	Por eso es que uso la definición de intersección, porque como no es vacío puede haber un punto.	
26 Juan:	Pues sí, pero los dos puntos ¿Pueden estar en el espacio?	
27 Carlos:	No, porqué tienen que haber uno.	
28 Juan:	Ese punto mínimo está en un plano, ese punto intersecando, si le hacemos así (hace como si fuese a enterrar el lápiz en la mesa) ese punto está acá, con la recta.	
29 Carlos:	Es sólo un punto.	
30 Juan:	Es sólo un punto.	
31 Carlos:	Los otros no están en el plano, en ese caso ¿Cierto?	
32 Juan:	Y el otro caso es que toda la rec…	
33 Carlos:	Qué haya dos puntos, que haya dos puntos en la intersección ¿Qué pasa?	
34 Juan:	Pues que, si la intersección son dos puntos pues entonces la recta está en el plano.	
35 Carlos:	Eso [asiente] ya vengo [se retira de la mesa de trabajo].	

A continuación, la discusión en el grupo para la parte b) de la pregunta.

Tarea 4, ciclo 2, grupo 1. T4C2G1: Transcripción		Análisis
77 Juan:	Tenemos que estas dos rectas son paralelas [está trabajando en el modelo al parecer en la parte b del punto].	Em: En el modelo plasman desde el principio las dos posibilidades que pueden presentarse en la solución.

		Ei: No hay evidencia de duda en la resolución de la situación.
78 Carlos:	Eso, el segundo tenemos las rectas *m*, *n y l*, le falta una recta, ah no, tal que *m* es paralela con *n* [Está leyendo el enunciado y señalando en el modelo] y *l* es perpendicular con *m*, ese sería el caso.	
79 Juan:	Pero entonces necesitaría sacar esta recta y pegarla acá [saca la recta que está sola en un cartón].	
80 Carlos:	No, no, no ahí la tiene bien, ahí la tiene bien. Ah bueno, si péguela acá. *m* es paralela con *n* y l es perpendicular con *m* ¿Es *l* perpendicular a *m*? No se sabe.	
81 Juan:	Puede que sea así o tracemos la otra recta, que corte a estas dos ¿no? [Representa la situación con el material].	

Hasta ahí fue el desarrollo de este grupo, pues el tiempo de la clase finalizó.

A continuación, la interacción de toda la clase con la profesora. Después de discutir con los estudiantes las soluciones a las preguntas a), b) y c) en las cuales los estudiantes han trabajado durante la discusión con Cabri 3D la profesora les plantea una nueva construcción.

Tarea 4, ciclo 2, profesora. T4C2P: Transcripción		Análisis
12 Profesora:	(…) En el segundo plano hicieron la representación de la recta perpendicular a la recta m. Ese segundo plano ¿Dónde nace? ¿Cómo nace? ¿Qué voy a decir aquí?	Ec: La profesora está orientando la construcción en Cabri 3D de lo enunciando en la parte b) de la pregunta relacionando cada paso de la construcción con su respectiva justificación soportada en los elementos del sistema teórico de referencia.
13 Estudiantes:	Postulado del espacio.	
14 Profesora:	Postulado del espacio, voy a decir P punto, P no en alfa, postulado espacio uno ¿Cierto? ¿Y después que voy a decir? Sea, porque es que cuando yo genero algo digo sea beta y…	
15 Estudiantes:	Recta m	
16 Profesora:	m, quiero que *m* esté ahí ¿Cierto? Por teorema punto y recta, ah bueno y ¿Cómo sé yo que P no está en n? Eso ya lo hemos hablado ¿No? P tendría que estar en el plano. Y entonces después ¿Qué hice?	
17 Estudiantes:	La recta	
18 Profesora:	l recta, P en l, imagino que usaron el mismo punto, l perpendicular ¿A quién? A m, l en, esto lo tienen que decir, l en beta. Ahora quiero, esto es por teorema existencia	Em: La profesora orienta la construcción que deben hacer en Cabri 3D para explorar la nueva situación propuesta.

perpendicular, punto externo. Y ahora tengo que añadir un apellido en el plano, es un teorema nuestro para el plano, para el plano y es ese teorema del plano que estoy usando porque estoy parada en un plano.

Ahora quiero que todos ustedes oculten a el plano beta, lo oculten. Eh, ocultar está en, con el clic derecho o control m, si ya habíamos visto eso. Oculten el plano beta, o sea el que generé ¿Quedó la recta? Bien, así me lo representaron en la hoja, pero no tenían ninguna justificación para decirme que esa estaba ahí, esa recta, no tiene ningún sentido para mí teóricamente, a menos que ustedes me hayan dicho: esta recta nació en este plano por este teorema ¿De acuerdo? Bien, está esa recta, esa recta la generamos ¿Perpendicular a quién? ¿Y es perpendicular al plano? ¿Se vé perpendicular al plano? Es perpendicular a una recta de ese plano ¿Cierto? [Se refiere a la situación representada en la figura A9].

19 Estudiantes: Si

20 Profesora: Ahí se ve claramente ¿Cierto? Pero no lo es, al plano. Porque si movemos el plano, muévanlo todos, se dan cuenta que, si pensamos en el plano, esa recta está como inclinada ¿Sí? ¿De acuerdo? Ahora quiero que hagan un ejercicio un poco distinto, sin borrar ese archivo, o sea abrir un archivo nuevo, con el plano, no me desaparezcan el plano y hagan una recta que no está contenida en el plano pero que lo interseca

21 Lina: Una recta que no esté contenida en el plano…

22 Profesora: Pero que interseque al plano. Que lo interseque, una recta sin ninguna otra condición excepto que lo interseque, ya sabemos que es en exactamente un punto ¿Cierto? Bien y mi pregunta ¿Será que hay en ese plano una recta perpendicular a su recta? Llamémosla m la que construyeron ¿Hay en el plano una recta perpendicular a m? ¿Existe? Van a tener que medir ángulos, entonces cómo se mide un ángulo, allá donde dice centímetro, ahí aparece ángulo, ustedes van a medir un ángulo ¿Sí? Necesitan tres puntos para poder identificar el ángulo, mi pregunta ¿Hay alguna recta en el plano alfa perpendicular a esa recta m que ustedes construyeron?

23 Estudiante: Solamente si…

24 Profesora: No, yo no sé, miren a ver, estúdienlo, estúdienlo con Cabri, si quieren la plastilina, no sé. Si quieren la plastilina, pues la traemos

25 Estudiante: ¿Una perpendicular?

26 Profesora: Sí, una recta en el plano perpendicular a esa que, si existe, no que me la construyan. Otra cosa es que yo diga que me la construyan. Como voy a decir que me la construyan si no sé si existe, entonces primero tenemos que mirar a ver si existe ¿Habrá o no habrá? Miren a ver cómo hacen para contestar mi pregunta. Tienen que identificar el ángulo, porque yo estoy midiendo perpendicularidad de una recta con otra recta ¿Existe o no? ¿Ya encontraste? pasa para allá a ver [le señala la pantalla para que ilustre a toda la clase su construcción], por ejemplo, lo que él está haciendo está mal [hace referencia al estudiante que en ese momento está proyectando en la pantalla su construcción] porque él no tiene representado un

ángulo, porque para un ángulo ¿Qué necesito? Dos rayos ¿Dónde están? Entonces otra vez, vuelve y juega, porque si tenían esa representación está mal.

27 Investigador: ¿Usted dice que lo tiene? [Se dirige a Eric].

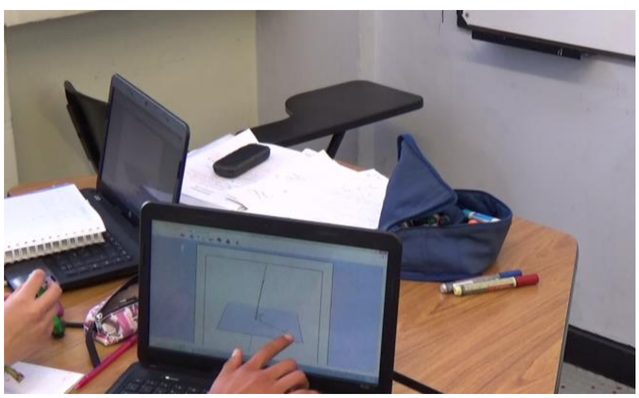
28 Eric: Pues ya lo terminé.

29 Investigador: Muestre, gire la bola de cristal.

30 Eric: [Muestra la representación siguiente]

31 Investigador: Ah bien ¿Cómo la encontró?

32 Eric: Pues yo lo que hice fue ley del arrastre, tenía el plano, tenía esta recta [señala la recta contenida en el plano].



33 Investigador: ¿Y lo arrastró hasta que le dio noventa?

34 Eric: Y lo arrastre hasta que me dio noventa.

35 Investigador: ¿Cuál arrastró? ¿La que está en el plano o la que está por fuera?

Em: La profesora aclara una restricción en la exploración que tiene la situación. La recta *l* está dada, entonces sobre ella no se pueden hacer arrastres.

36 Eric: No, la que está fuera de él.

37 Investigador: La que está fuera del plano.

38 Profesora: No, esa que está por fuera del plano no me la puede arrastrar, porque esa estaba dada.

39 Eric: Ah sí, sí, sí.

40 Profesora: No me la pueden cambiar, yo les dije construýanme una recta, no me la pueden cambiar. Y estoy preguntando por la existencia en el plano para esa recta. No me cambien las condiciones. Entonces, vamos a repasar, qué tuvieron que haber hecho. En esta nueva construcción dije: Dado m recta, m no contenida en un plano alfa. Datos, m recta, alfa plano [va escribiendo en el tablero] m intersección alfa igual X, un solo punto, si la intersección es un solo punto ¿Qué sucede? No está en el plano, eso es lo dado y ustedes no pueden modificar lo dado ¿Y la pregunta era ¿Existe recta l, l en alfa tal que l perpendicular a m? ¿Entonces cuál es la construcción? Construcción y justificación [dos columnas en el tablero] ¿Qué construyo primero? El plano alfa estaba dado ¿No? Bueno alfa plano, dos un punto P que no está en alfa, ah la recta m, tres m en alfa, m recta, acá P punto, aquí usé el postulado espacio uno, aquí usé, esto está dado y aquí esto está dado, hay una recta en ese plano ¿Sí? No, esto no está dado, ustedes me están confundiendo, está dada es P y hay una recta m, no l. m recta, P en m, m intersección alfa X [en la escritura X es igual a…]. Y ahí estoy usando ¿Qué?

41 Jimmy: Está dado

42 Profesora: Si, pero estoy haciendo la construcción, si está dado, está dado esa recta, la quiero, pero ¿Por qué la puedo hacer? ¿Por qué puedo decir si existe?

Ec: La profesora hace énfasis ahora en los soportes teóricos de lo que están construyendo.

43 Janeth: Por un punto que pertenece a alfa, se genera la recta.

44 Profesora: Yo busco un punto cualquiera en el plano: X y hago la recta PX, postulado puntos recta, pero bueno, lo que estoy pidiendo es posible teóricamente ¿No? Eso es importante, no les puedo pedir que hagan algo que teóricamente no es posible. Bien, tenemos la situación y pregunto que si existe esta recta l [señala la pregunta que ha escrito en el tablero]. Entonces ¿Qué voy a hacer ahora? En la construcción ¿Qué voy a hacer para poder responder esta pregunta?

45 Eric: Un punto en el plano, el punto que sea diferente…

46 Profesora: El punto ¿Qué? ¿Qué punto seguro necesito que esté ahí? X ¿Cierto? Porque quiero perpendicularidad con m, se tienen que intersecar y l tiene que estar en el plano y lo único que tienen en común l, m y el plano es el punto X. Entonces yo tengo que hacer l recta, X en l, l en el plano ¿Qué estoy usando ahí? Para justificarlo.

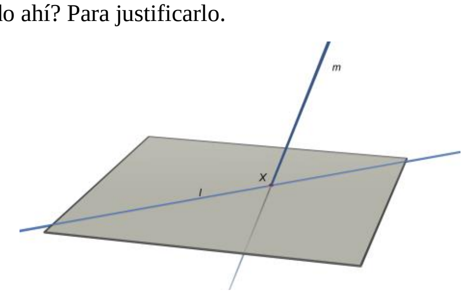


Figura A2

47 Sergio: Infinitas rectas.

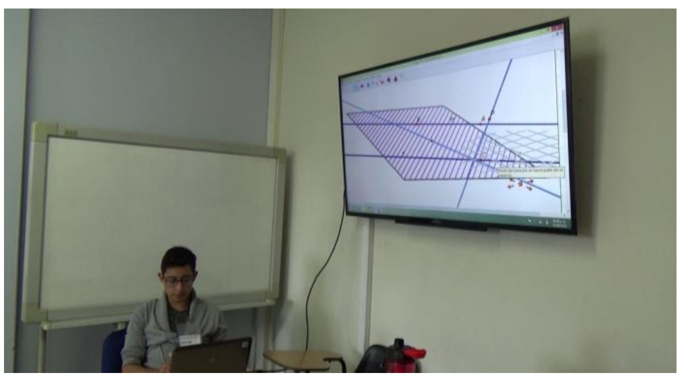
48 Profesora: Teorema punto infinitas rectas en el plano, el teorema que

tienen desde el semestre pasado ¿Bien? Bueno y lo siguiente que hago es mido el ángulo, ah no pues bueno, tomo un punto T en l, T punto, T es en alfa porqué l está en alfa. Y ahí estoy usando el teorema recta infinitos puntos y ahora digo, medida del ángulo TXP ¿Y qué pasó con esa medida? ¿Lo puedo medir? Si es un ángulo en nuestro sentido de lo que es un ángulo, sí. Entonces no me pueden usar cosas que no obedezcan a nuestra teoría. Si voy a medir un ángulo es un ángulo en nuestro sentido, dos rayos ¿Bien? Y no dio noventa ¿Cierto? Espero que no ¿Les dio noventa? No ¿Cierto? Pero ¿Qué podemos hacer?

49 Sergio: Mover la recta.

50 Profesora: Arrastrar, arrastramos y en algún momento ¿Si nos da noventa o no? Esa es la pregunta. Bien, entonces esa recta que yo construí no tenía ninguna propiedad especial, ahora sé que en ese plano si hay una recta, si hay una recta que es perpendicular, pero si yo miro esa recta original con respecto al plano no se ve perpendicular al plano, la imagen que yo tengo ¿Cierto?

Entonces volvamos a nuestro primer archivo donde yo les dije bórrenme el plano beta [Figura A10]. Y construyamos otra recta que contenga a ese punto de intersección ¿C se llama ahí? Construyamos otra recta por ese punto [un estudiante lo está haciendo en la pantalla para toda la clase].

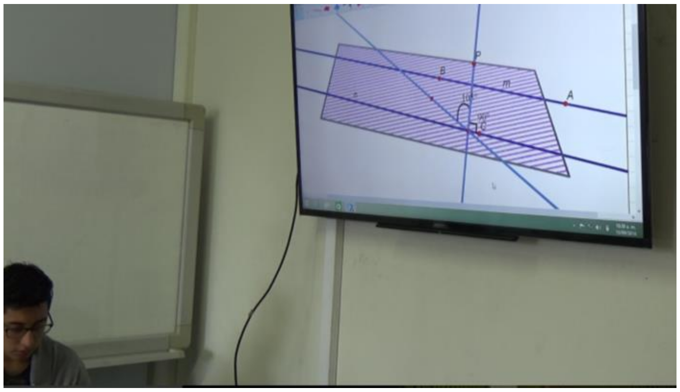


En un plano, bien. Y vamos a medir ese ángulo, el ángulo de la recta nueva que introduje. Es una recta cualquiera pero que contenga a este punto de intersección y quiero medir el ángulo que determinan esas dos rectas, la ¿Cómo se llamaba? m la de afuera, l se llamaba la recta. La recta m y la nueva recta n que puse yo ahí y quiero que midan el ángulo, identificando los tres puntos. Bueno, ese ángulo no es recto ¿Cierto? No les dio recto ¿Ya tenemos un ángulo ahí recto? En esa construcción que hicimos ¿Hay un ángulo recto ahí? ¿En esta construcción? Esta fue la construcción, sino que yo oculté el plano beta.

51 John: Si hay un ángulo recto profe

52 Profesora: ¿Sí? Búsquenlo a ver, mídanlo

Em: La profesora da las instrucciones para la siguiente construcción y la exploración de ésta.



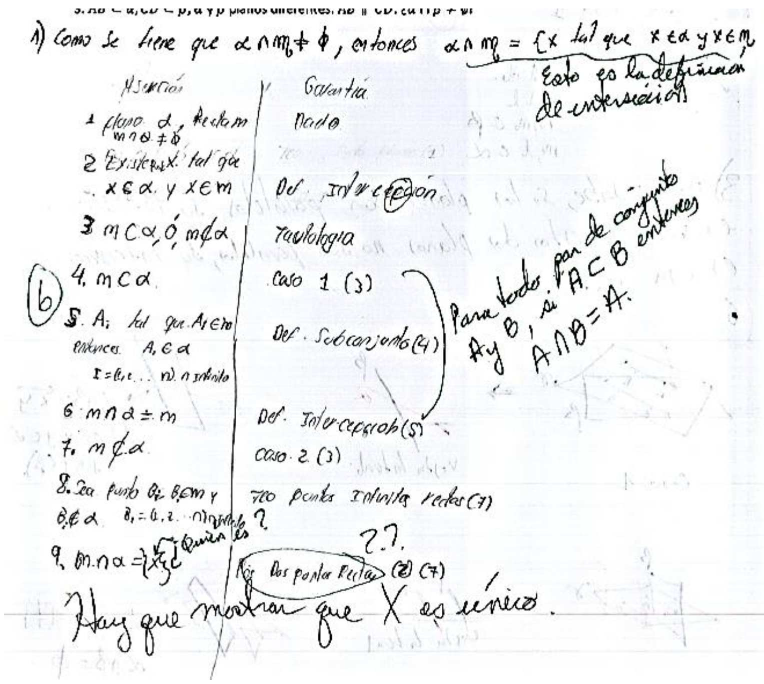
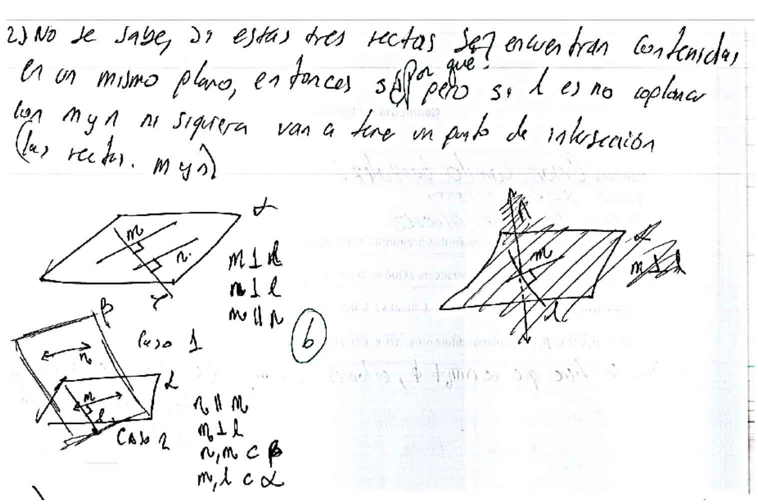
	Ah [En respuesta a la medida que ha hecho del ángulo recto el estudiante que trabaja con la pantalla] todos tienen un ángulo recto ¿Cierto? Porque nosotros generamos a esa recta l, n se llama el tuyo, se debería haber llamado m. En el plano esa beta que yo les dije bórrenlo, bórrenlo. Ahora quiero que miren si pueden volver al otro ángulo también recto, sin cambiar, no quiero cambiar la recta original, no si, es la recta original la que quiero cambiar, no cambiar esa, esa recta está fija, las del plano están fijas, fijas, fijas las dos del plano. Entonces lo único que puedo cambiar es esa recta original, que nació perpendicular a una recta no más, ella es la problemática, digámoslo, ella es la independiente, las otras dos son dependientes, están en el plano. Una en el plano alfa, la otra estaba en el plano beta ¿Cómo hago para modificar esa recta?	
53 Laura:	¡Ay qué chévere! [reacciona así cuando Edwin le señala la pantalla del computador].	Ei: Se evidencia una reacción de sorpresa por parte de los estudiantes de acuerdo con cómo se había previsto en la THA.
54 Profesora:	¿Qué pasó? ¿Qué es chévere?	
55 John:	¿Profe por qué pasa esto?	
56 Profesora:	¿Qué?	Los estudiantes hacen explicito el evento que les resultó sorpresivo.
57 John:	Qué al yo ponerle ángulo recto a uno no más…	
58 Jair:	…los otros son rectos	
59 Profesora:	Ah, la una es una construcción robusta y la otra la logro con el arrastre ¿y qué pasó? ¿Qué pasó con esa recta que yo tenía antes?	En: La profesora hace la conexión del evento de la exploración que le resultó sorpresivo con el elemento teórico que se quiere introducir: El teorema fundamental de la perpendicularidad recta-plano.
60 Estudiante:	Que es perpendicular a dos rectas.	
61 Profesora:	A dos rectas ¿Cierto? Y ahora ¿Cómo se ve la relación entre esa recta y el plano?	
62 Estudiante:	Queda perpendicular al plano.	
63 Profesora:	Se ve ¿Cierto? Parece que si ¿No? Entonces ¿Cuál es la relación? Yo tenía una recta, una recta que, si forma un ángulo recto con alguna de estas, pero no se veía con el plano, con esta recta, este lápiz está formando un ángulo recto ¿Cierto? Pero este lápiz no es perpendicular a mi mano, no por qué, porque con esta otra recta, con ésta, no hay un ángulo recto.	

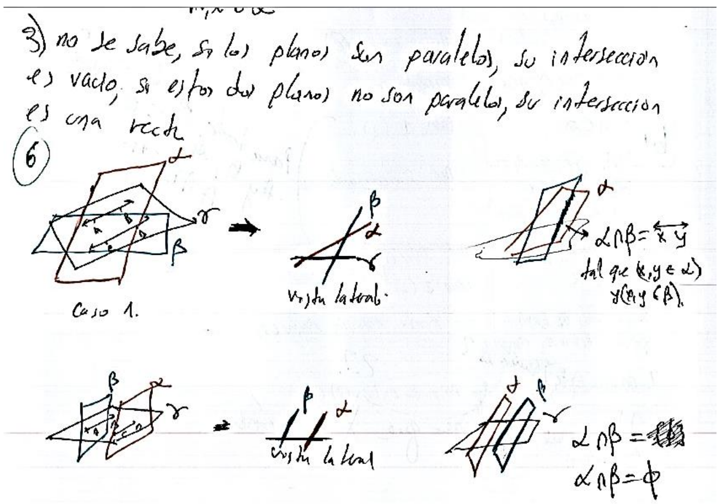
Pero si yo enderezo esta recta para que también sea recto este ángulo, sin perder la perpendicularidad aquí, si yo cambio esa posición y ahora es perpendicular a esta recta y a esta recta ¿Qué pasó? Parece que es perpendicular al plano. Entonces la gran pregunta es ¿Qué queremos decir con una recta ser perpendicular al plano? Esa es lo que queremos responder, entonces la definición: Una recta m es perpendicular a un plano alfa, es perpendicular a un plano alfa, si m es perpendicular a toda recta del plano alfa que contiene al punto de intersección de m y alfa. (…) La definición me dice, que, para ser perpendicular al plano, debe ser perpendicular a todas las rectas que están en ese plano, si yo escojo cualquier recta en ese plano debe ser perpendicular a ella, esa es la definición ¿Pero ¿qué descubrimos nosotros ahora? Con lo que acabamos de hacer ¿Cómo volví esta recta perpendicular al plano? [vuelve al modelo con el lápiz y su mano].

64 Sergio: Moviendo.

65 Profesora: Arrastré y ¿Qué condición cumplió esta recta? Que fuera perpendicular a dos rectas. Parecería que, si se cumple eso, lo es a todas las rectas, parece. Entonces parece que puedo mejorar las condiciones para saber si una recta es perpendicular o no a un plano. No basta que sea perpendicular a una, eso ya vimos que no, pero tan pronto empecé a enderezar esto así para que este ángulo también fuera recto, ja milagrosamente quedó en la posición que a mí me interesa.

A 4.1.3 Hojas de trabajo.

G1: Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Carlos, Juan y Jimmy:  1) Como se tiene que $\alpha \cap m \neq \phi$, entonces $\alpha \cap m = \{x$ tal que $x \in \alpha$ y $x \in m\}$ Esto es la definición de intersección Asersión / Garantía 1 plano α, Recta m, $m \cap \alpha \neq \phi$ / Dado 2 Existe x tal que $x \in \alpha$ y $x \in m$ / Def. Intersección 3 $m \subset \alpha$, ó $m \not\subset \alpha$ / Tautología b 4. $m \subset \alpha$ / Caso 1 (3) 5. A_i tal que $A_i \in m$ entonces $A_i \in \alpha$, $i = 1, 2, \ldots n$, n infinito / Def. Subconjunto (4) 6 $m \cap \alpha = m$ / Def. Intersección (5) 7. $m \not\subset \alpha$ / Caso 2 (3) 8. Sea punto B_i $B_i \in m$ y $B_i \notin \alpha$, $B_i = 1, 2, \ldots n$ infinito ? / Teo Punto Infinito rectas (7) 9. $m \cap \alpha = \{X\}$ ¿Quién es? / ?? Teo Dos puntos Recta (2) (7) Para todo par de conjuntos A y B, si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$. Hay que mostrar que X es único.	Ec: Hacen uso de nociones generales como intersección de conjuntos y contenencia y de un teorema particular: Teorema recta infinitos puntos. Em: No hay evidencia de este enfoque Ei: No hay evidencia de este enfoque En: No hay evidencia de este enfoque
 2) No se sabe, si estas tres rectas se encuentran contenidas en un mismo plano, entonces s ¿por qué? pero si l es no coplanar con m y n ni siquiera van a tener un punto de intersección (las rectas m y n) $m \perp l$ $n \perp l$ $m \parallel n$ Caso 1 b Caso 2 $n \parallel m$ $m \perp l$ $n, m \subset \beta$ $m, l \subset \alpha$	Ec: Consideran las condiciones de las tres rectas para las dos situaciones posibles. Em: Representan las dos situaciones posibles. Ei: No hay evidencia de este enfoque En: No hay evidencia de este enfoque

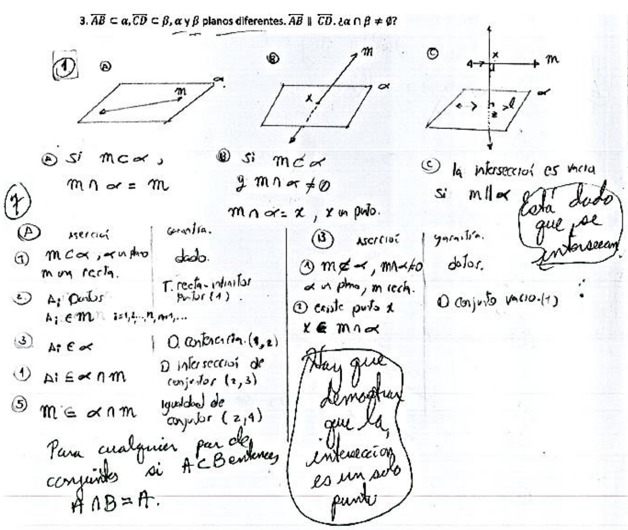


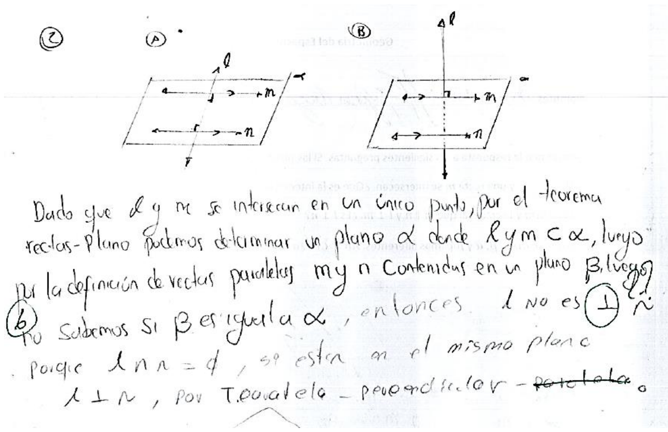
Ec: Consideran las condiciones de los planos para las dos situaciones posibles.

Em: No hay evidencia de este enfoque

Ei: No hay evidencia de este enfoque

En: No hay evidencia de este enfoque

G2: Hoja de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de John, Jair y Sergio 	Ec: Hacen uso de nociones generales como intersección de conjuntos y contenencia y de un teorema particular: Teorema recta infinitos puntos. Em: Representan lo que consideran las tres situaciones posibles para la recta y el plano. Ei: No hay evidencia de este enfoque En: No hay evidencia de este enfoque

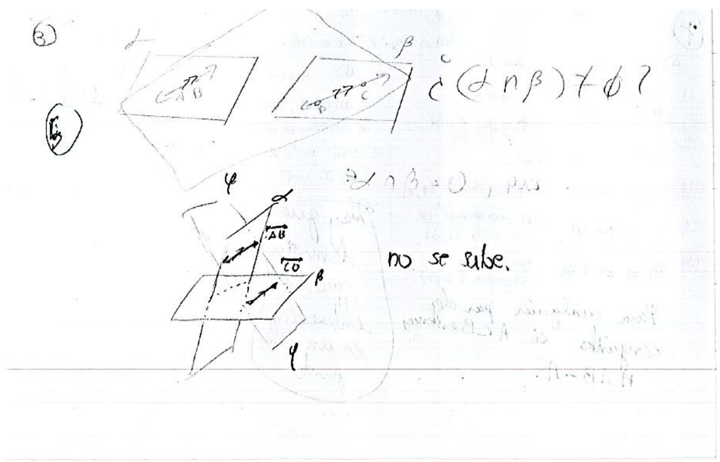


Ec: Evocan un teorema para justificar la intersección de las rectas, la definición de rectas paralelas para justificar el que sean coplanares y examinan los dos casos: cuando la perpendicular está en el mismo plano y cuando no lo está.

Em: Representan las dos situaciones posibles.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.



Ec: Mencionan la intersección de los planos.

Em:. Representan las dos situaciones posibles.

Ei: No hay evidencia de este enfoque.

En: No hay evidencia de este enfoque.

A 4.1.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que en la solución a la tarea los estudiantes consideraran más de una representación posible para responder cada uno de los puntos a, b y c y que al discutir la actividad propuesta por la profesora se mencionara la definición de perpendicularidad recta plano y a su vez surgiese en la discusión la	En la interacción del G1, así como en las hojas de trabajo de los dos grupos se evidencia el uso de las diferentes representaciones para la respuesta a las tres preguntas formuladas en la hoja de trabajo. Al discutir la pregunta planteada por la profesora, la alusión a la definición de perpendicular recta-plano y al teorema fundamental de la	Los elementos de contenido previstos y los que aparecen en el desarrollo de la tarea parecen estar asociados con la evocación de aspectos de la teoría relativamente simples. El que puede ser el contenido más relevante “Teorema fundamental de la perpendicularidad” no fue iniciativa de los estudiantes lo que constituye

necesidad de plantear el Teorema fundamental de la perpendicularidad.	perpendicularidad se hace por parte de la profesora. En la escritura y discusión de la justificación de los tres puntos planteados en la hoja de trabajo por parte de los estudiantes, mencionan elementos de contenido no previstos en la THA como definición de intersección, definición de subconjunto, Teorema recta-infinitos puntos, definición de rectas paralelas.	un aspecto a mejorar en futuras aplicaciones.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Esperábamos que los estudiantes que no anticiparan las dos representaciones posibles para responder a las preguntas de la hoja de trabajo tuviesen un apoyo en el material concreto para visualizar esas representaciones. En la segunda parte se esperaba que el uso de la función arrastre de Cabri 3D les permitiese visualizar dos rectas en el plano perpendiculares a una recta fuera del plano que interseca a estas dos.	No hay evidencia en la interacción del G1 de la necesidad del material concreto para concebir las dos posibles representaciones. Desde el principio de los dos primeros puntos (que alcanzaron a discutir) concibieron estas representaciones sin necesidad de usar el material concreto. En el segundo punto es visible el papel de Cabri 3D para representar dos rectas perpendiculares en el plano a una recta que interseca a las dos rectas y no pertenece al plano.	La pregunta planteada en la hoja de trabajo no parece requerir mayor esfuerzo por parte de los estudiantes para construir imágenes mentales de las soluciones deseadas. En el segundo punto Cabri 3D en la tarea concebida parece cumplir un papel relevante para ilustrar una representación difícilmente concebible con otro recurso diferente.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que en la discusión de la solución a las preguntas a, b y c existiesen diferentes puntos de vista que dieran lugar a duda. El otro momento en el cual esperábamos se produjese *incertidumbre* es en la segunda parte cuando la profesora propusiese la construcción de la dos perpendiculares. Allí esperábamos reacciones de duda y sorpresa.	En la interacción registrada del G1 los diferentes puntos de vista no surgen respecto a una u otra solución sino a la manera de plantear la justificación. En la segunda parte se evidencian reacciones de sorpresa y duda ante el resultado de las dos perpendiculares en el plano a la recta dada.	La situación no parece tener la complejidad requerida, en esta población, para generar debate respecto a diversos caminos para su solución. La segunda parte de la tarea genera la reacción esperada por parte de los estudiantes, pues al parecer es para ellos sorpresivo el hecho de encontrar dos perpendiculares en el plano a una recta dada.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que en los estudiantes se motivara la necesidad intelectua*l* producto de los resultados no previstos obtenidos en la parte a, b y c de la hoja de trabajo y en el desarrollo de la situación	En la discusión de las preguntas formuladas en la hoja de trabajo no se evidenció incertidumbre y los elementos teóricos que evocan son los relacionados con la manera de justificar una u otra opción.	La situación puede ser rediseñada para que la segunda parte en la cual la evidencia de generación de incertidumbre es más palpable sea abordada de una manera más directa por parte de los estudiantes.

propuesta por la profesora en la segunda parte. Esta búsqueda de soporte teórico se esperaba que se expresara como argumentación productiva y junto con la satisfacción manifestada por los estudiantes respecto a sus argumentos nos dieran evidencia de la producción de justificación epistemológica.	En la segunda parte la introducción del Teorema fundamental de la perpendicularidad la hace la profesora.	

A 4.1.5 Cambios en el diseño de la tarea.

Como mencionamos en la comparación de la THA con la TRA, las preguntas consignadas en la hoja de trabajo no generaron en los estudiantes la incertidumbre esperada. A diferencia de estas preguntas, la situación que planteó la profesora si generó en los estudiantes duda y sorpresa de manera perceptible así que para una siguiente aplicación de la tarea es aconsejable centrarse en ese punto como posible pregunta en la hoja de trabajo.

A 4.2 TAREA 4, CICLO 3

A 4.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje THA.

Meta de aprendizaje

Establecer teóricamente las condiciones para que exista una relación de perpendicularidad entre una recta y un plano.

Tarea

Enunciado

Dados *m* recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿Existe la recta *l*, *l* contenida en α, tal que *l* es perpendicular a *m*?

Instrucciones adicionales

Se entregaron hojas de trabajo individuales para abordar la solución a la pregunta, luego se le solicitó reunirse en grupos poniendo a su disposición el material (palos, plastilina y cartón) y Cabri 3D para hacer una representación de la situación.

Entonces, se les entregó una hoja de trabajo con el mismo enunciado para hacer el reporte resultado del trabajo en grupo.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrollará en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactuarán con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. La profesora dirigirá una interacción con la clase al finalizar el momento del trabajo en grupos.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Los estudiantes no han estudiado aún la definición de recta perpendicular a un plano. Se espera con esta tarea introducir esta definición, el Teorema fundamental de la perpendicularidad y los teoremas de existencia de perpendicularidad recta-plano.

Enfoque en la mediación (Em). Esperamos que los estudiantes hagan uso de las herramientas de Cabri 3D arrastre y medida de ángulo cuando tengan representadas una recta en el plano y una recta cualquiera que la interseca (Figura 6.12). Este uso debe estar orientado por parte de ellos a conseguir que la medida del ángulo sea 90, nuestra previsión es que este hecho les proporcionará evidencia empírica de la existencia de al menos una recta en un plano, perpendicular a una recta dada que interseca al plano.

En la interacción en los grupos nuestra previsión es que se presenten diferentes puntos de vista respecto a la existencia o no de esa recta perpendicular. En la interacción de la profesora con la clase se prevé potenciar las reacciones de duda para aquellos que no haya aceptado la existencia de duda para aquellos que no hayan aceptado la existencia de esa perpendicularidad.

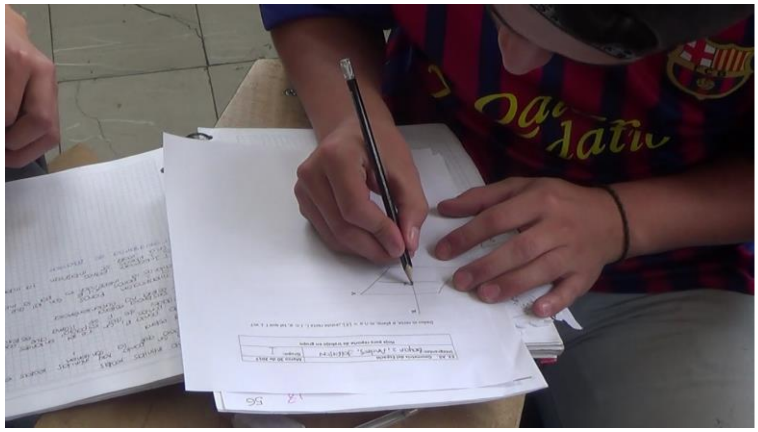
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se espera que la incertidumbre se genere en los estudiantes al encontrar una recta (*l* en el enunciado y en la figura 6.12) que es perpendicular a la recta dada (*m* en el enunciado y en la figura 6.12) sin que esta recta dada sea perpendicular al plano. Se prevé que esta incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa respecto a este hallazgo y motive el estudio de las condiciones que deben cumplir las rectas para ser perpendiculares.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Esperamos que la generación de incertidumbre motive la búsqueda de las condiciones que deben cumplir las dos rectas para ser perpendiculares. Esto debe llevar a los estudiantes a examinar la relación de perpendicularidad recta-plano, establecer condiciones teóricas entre los dos objetos para que se de esa relación y buscar cómo garantizarla. Nuestra previsión es que el proceso se expresara como argumentación productiva en torno a esos aspectos y que los estudiantes manifiesten su satisfacción con los argumentos expuestos para evidenciar que se ha producido justificación epistemológica.

A 4.2.2 Interacciones analizadas.

En el caso de esta tarea se registraron dos grupos: El grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2), la interacción de la profesora con toda la clase y la interacción del investigador con toda la clase.

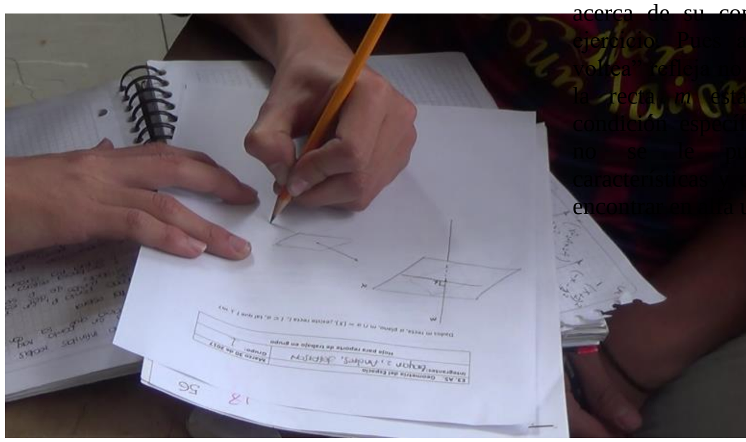
Tarea 4, ciclo 3, grupo 1. T4C3G1: Transcripción		Análisis
1 Jeison:	Bueno ¿Entonces ustedes que dijeron?, Yo dije que sí.	Ei: Aunque no se solicitó, cada uno hace explícito lo que anticipan respecto a la situación. Ahí se vislumbran dos soluciones distintas.
2 Antonio:	Que si, que puede ser una o… infinitas.	
3 Byron:	Ah ¿Tocaba responder si o no?, Yo más o menos dije que no.	
[…]		
7 Jeison:	Esta es la recta *m*, yo pienso que la recta *m* intersecada con el plano es un único punto. ¿Existe una recta perpendicular? ¿Existe una recta *l* tal que *l* está contenida en alfa? [leyendo]. Entonces una recta *l* en alfa tal que:	Ei: Su descripción no explica porque la perpendicular está en alfa y con lo que comenta al final de su intervención da a entender que interpretó que la recta *m* dada y la perpendicular obtenida deben estar en un solo plano.



Esto sea recto ¿Si o no? [hace la marca de ángulo recto], O sea que sea perpendicular. Yo creo que sí, existe un plano por intersección de rectas. Si dos rectas distintas se intersecan en un único punto son coplanares. O sea, existe un plano que contiene a esas dos rectas y ahí las dos van a estar y se van a intersecar o sea la recta si es perpendicular y pues ésta está en ese plano [señala la recta *l*] pues yo diría que sí.

8 Antonio: Yo lo había pensado así: [representa una recta que no es perpendicular al plano]

Ei: Por esta intervención de Jeison puede reforzarse la opinión mencionada antes acerca de su comprensión limitada del ejercicio. Pues al expresar él que "se voltea" refleja no haber comprendido que la recta *m* está dada, no tiene una condición específica pero una vez dada no se le pueden modificar sus características y que lo que se trata es de encontrar en alfa una perpendicular a esta.



Tenía esta recta, ahí pareciera que no.

9 Jeison: ¿Que no qué?

10 Antonio: Que no habría recta perpendicular.

11 Jeison: Pues se voltea ¿No? Gira un poco la hoja.

12 Antonio: Espere. Por esta recta, hay un segundo plano que tiene infinitas rectas perpendiculares [Dibuja el plano perpendicular a la recta *m* por el punto de intersección de ésta con alfa y le hace la marca de ángulo recto].

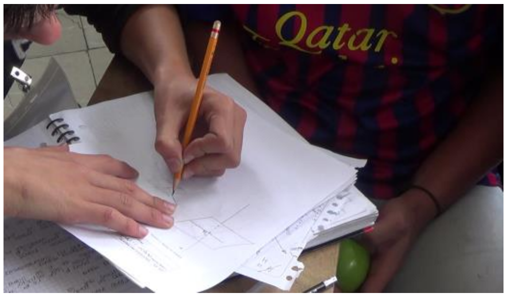
Ei: Antonio ofrece la solución deseada

Et: La solución planteada por Antonio apela al teorema que resuelve la situación, pero sin haber experimentado incertidumbre a la manera que se concibió en el diseño y sin el uso de Cabri 3D.

13 Jeison: A ver, existe la perpendicular en alfa a ésta [señala *m*] y existe un plano que contiene ambas rectas. Sii, dele clic ahí donde dice perpendicular [se dirige a Bayron que construye

Em: Le solicita a Bayron hacer la construcción para "ver" lo que Antonio está describiendo.

	en el computador mientras ellos dos han estado discutiendo sobre la representación en la hoja de trabajo] perpendicular a esa recta por ese punto.	Ei: El argumento de Antonio no parece ser suficientemente persuasivo para Jeison y por eso quiere visualizar lo que describe con el Cabri 3D.
[…]		
17 Antonio:	Hágalo, hágalo. Es que ese es el plano que yo quiero [Se dirige a Byron que está haciendo en Cabri 3D la construcción].	Em: Antonio orienta la construcción en Cabri 3D que él ha descrito.
18 Jeison:	Ahora acá en intersección, trace la intersección entre este plano y este plano [señala la pantalla, ahora los tres están concentrados en el computador]  Y luego oculta el plano y traza la recta	Em: Ahora parece ser muy relevante para los tres visualizar la solución ofrecida por Antonio.
[…]		
25 Byron:	No, no se sabe. Ésta podría ser así [pone el dedo indicando que *m* no necesariamente es perpendicular]. 	Ei: Para Byron no es claro que exista la perpendicular que ha descrito Antonio en su solución.
26 Jeison:	No yo la construí así. Perpendicular por punto interno.	Ei: Jeison aparentemente habla de su solución, donde las dos rectas son perpendiculares, pero no considero que quedara contenida en alfa.
27 Byron:	Ya, pille [ha estado pensando con la mirada en la hoja de trabajo, mientras la profesora explica cómo construir recta perpendicular a recta con Cabri 3D. Jeison no le atiende]. Antonio, pero si uno no sabe que esto se interseca en un ángulo recto. ¿Podría ser así? [traza sobre la representación de John en la cual *m* es perpendicular al plano, una posibilidad para *m* en la cual no lo es].	Ei: Byron habla de la posición de *m*, pero ni él ni Jeison parecen haber captado la relevancia de la solución planteada por Antonio.
28 Antonio:	Yo pensé en esta construcción acá. Todas las rectas que estén sobre este plano beta [retiñe el plano perpendicular a *m*], van a ser perpendiculares a esta recta.	En: Antonio está apoyando su solución en la definición de recta perpendicular a plano pues en ese plano están todas las que requiere y una especial que está contenida en la intersección del plano y de alfa.



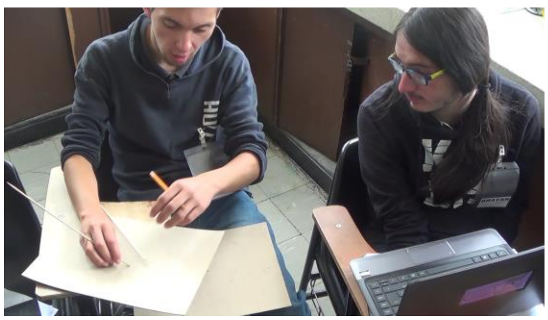
29 Jeison:	¿Tooodas?	Ei: Duda de la generalidad de la solución de Antonio
30 Antonio:	Si todas.	Ei: Byron duda y Antonio le exhibe sus argumentos los cuáles aparentemente le resultan persuasivos.
31 Byron:	No, solo las que la intersecan. Porque las demás no.	
32 Antonio.	Ponga un punto cualquiera en este plano. [Le señala el computador], Ahora otra vez esta recta.	
33 Byron:	Ah, todas las que contengan el punto. Ah sí, claro.	
34 Antonio.	Exacto, pero esos planos se intersecan en esta recta. Si pilla, esta recta como está en este plano es perpendicular a ésta.	Ei: En esta interacción parece ser que Byron se convence del argumento de Antonio acerca de la manera de determinar una recta perpendicular a *m* en el plano.
35 Byron:	No, esa no es perpendicular.	
36 Antonio:	¡Que si hombre!	
37 Byron:	¿Va a medir el ángulo? ¿Qué está buscando? Pero es que el plano inicial alfa, sería éste ¿No?	Em: Al parecer Cabri 3D cumple un importante papel para persuadir a Byron del punto de vista de Antonio.
38 Antonio:	Sii, pero vea que esa recta está en alfa	

	Y es una recta que está en alfa [Brayan asiente] y es perpendicular. Y de hecho todas las rectas que estén sobre ese plano quedan perpendiculares. Puede que haya una, pero puede que haya infinitas, porque si están en el plano… [vuelve Brayan a asentir].	
39 Byron:	Toca es como girarla para que parezca así [hace con la palma de la mano un gesto] y así.	

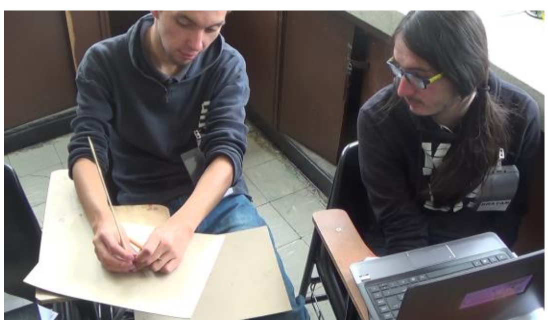
O sea, yo lo estaba viendo así

[…]

42 Antonio: Yo lo tenía así



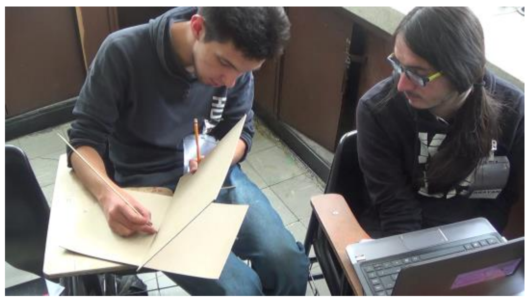
Bueno, puede que esté así.



Y que todas éstas [pone un palito en el plano base] perpendiculares vea. Pero puede que esté así.

Em: Antonio amplía su argumento haciendo ahora uso del material concreto y a su vez describe lo que visualizó como solución para proponer el plano perpendicular a la recta por el punto de intersección.

Y entonces yo no la veía. Pero después dije: Uy ¡quieto nene! ahí cae éste que es perpendicular.



Entonces vi que aquí había todas éstas [mueve un palito sobre el nuevo plano que ha agregado]. Entonces dije ahí mire, quitemos esto y hay una perpendicular…sale. Entonces hay una o hay infinitas. Pero yo no lo veía ahí, dije si, si hay una.

43 Byron: Yo sólo veía éste.

44 Antonio: ¿Sólo lo veía así? [pone la recta perpendicular al plano]. Le faltó fue en su mente coger y decir faa [gira la recta que está en el plano base sobre éste e intersecando a la que es perpendicular al plano]. A mí también me pasó lo mismo.

[…]

67 Jeison: Ya, ya, ya. Es que no había leído bien el enunciado, guevón. Espere analizo el dibujito otra vez. Entonces, tengo acá que esto es una *X*, entonces ahora por existencia de la perpendicular…ah dada una recta ¿Cómo es? Dada una recta y un punto que pertenece a ella puede ser por un punto externo o por un punto interno. Bueno, tengo el punto, por la existencia, postulado de la existencia, hago una recta, entonces trazo una perpendicular por *X*.

Ei: Hace explícito lo que se había intuido desde el inicio, que su comprensión de lo solicitado en la tarea no era correcta.

[…]

84 Byron: No se miren: Intuimos que existe un plano perpendicular a la recta *m*, luego como los planos se intersecan en una recta…

En: Byron se ha convencido del punto de vista de Antonio y le están dando forma al reporte para responder la pregunta.

85 Antonio: Que contenga a *X*.

86 Bayron: ¿Cómo así?

87 Antonio: Que contenga al punto *X*.

88 Byron: Un plano perpendicular ¿Cómo así?

89 Antonio: La recta *l* perpendicular y este punto *X*.

90 Byron: Ah, perpendicular por el punto *X* [escribe].

91 Jeison: Noo, simplemente lo contiene.

92 Antonio: Si alfa es ese plano, hay infinitos, hay infinitas rectas ¿Pero ¿cómo demostrar eso?

93 Byron: Ya dijo que no era de demostrar.

94 Antonio: Ah bueno. Podemos sacar rectas perpendiculares a una recta dada.

95 Jeison: Esta recta está acá [trabaja con el modelo], ustedes dicen que existe una recta, ¿Algo así?

Ei: Parece no haber comprendido aun cabalmente la solución propuesta por Antonio.

El plano debe ser perpendicular a esa recta.

96 Antonio: A esa recta [le señala en el modelo]. El plano perpendicular a esa recta es este [modifica el modelo que hizo John].

Ei: Antonio le explica nuevamente la solución que concibió para la pregunta planteada.

Em: El modelo físico parece cumplir un papel relevante en la explicación que Antonio hace de su solución.

97 Jeison: Exacto. La intersección entre dos planos es una recta.

98 Antonio: Es una recta.

99 Jeison: Y pues esa recta contiene al punto *X*.

100 Antonio. Ajá.

101 Byron: Lo que decimos es que este plano existe [señala el segundo plano del modelo] perpendicular por *X* entonces que al menos existe esta recta perpendicular

Ei: Byron se ha apropiado del punto de vista de Antonio y modificó su concepción inicial en la cual la recta no

	 que es la intersección entre alfa y este plano que es perpendicular.	existía. En: Byron hace la precisión "intuimos" respecto al tono en el cual van a reportar la solución, dado que no está demostrado que existe el plano.
102 Jeison:	Entonces estamos partiendo de que existe el plano perpendicular.	
103 Byron:	Intuimos.	
104 Jeison:	Si.	
105 Byron:	Intuimos que existe el plano [lee lo que ha escrito] perpendicular a la recta *m* que contiene a *X* alfa…	En: Al discutir la manera en la cual van a reportar la solución se expresa la comprensión que han establecido de la generalidad de la solución si la recta fuese perpendicular al plano. Se expresa un alto grado de convicción con la respuesta en Byron y Antonio.
106 Jeison:	No, alfa no puede ser porque alfa es este [señala el plano base del modelo].	
107 Byron:	Por eso, pero es que alfa podría ser [gira el modelo de John] puede que sea o puede que no. Si fuera tendríamos infinitas rectas perpendiculares. 	
108 Jeison:	¿Si fuera, tendríamos infinitas rectas perpendiculares?	
109 Byron:	Si mire [le indica en el modelo], todas las del plano perpendicular. Todas las que pasan por *X*.	
110 Jeison:	Si fuera el mismo, serían infinitas [examina el modelo]. Ya pásela así [se dirige a Bayron, entregan la hoja de trabajo].	

A continuación, la interacción en el segundo de los grupos de trabajo.

Tarea 4, ciclo 3, grupo 2. T4C3G2: Transcripción		Análisis
2 María:	Eh sí. ¿Qué respondieron ustedes?	Ei: Coinciden en la anticipación dos de las estudiantes que adelantan que "no se sabe" aunque no precisan si en el sentido que puede o no ocurrir o que lo ignoran, por el contexto parece este último caso.
3 Carolina:	Pueda que si, pueda que no.	
4 Violeta:	Que sí.	
5 María:	También puse que no sabía.	

Han estado explorando en Cabri 3D posibles soluciones a la situación, sin tener en cuenta que la recta *l* debe estar contenida en alfa

80 María: Présteme esta cosita [Le pide a Karen el material físico]. Esta es la recta *m*.

Si yo trazo. ¿Ahí qué es?

Ei: Establecen que cuando la recta es perpendicular al plano se obtiene en el plano una perpendicular.

Em: El modelo físico cumple un papel importante en ilustrar la idea que quieren representar. La cual parece previa a la representación.

81 Violeta: Perpendiculares.

[…]

89 Investigador: En esta configuración cuál sería *m*. [se refiere al modelo que María ha construido].

90 María: Éste

91 Investigador: ¿Y *l* ésta?,¿Y es la única configuración posible?

92 María: Todas las infinitas rectas, mueve el palito que está en el plano base.

Ec: Las estudiantes están ilustrando la Definición de perpendicularidad recta-plano, aunque sin mencionarla. Que es la que sustenta su representación.

93 Investigador: Si, para *l* hay infinitas rectas. ¿Y es la única configuración posible para *m*?

94 María: Si.

Ei: El investigador está tratando de introducir un elemento de duda ante el

95 Investigador: ¿Sí?,¿Ustedes están seguras?,¿Están de acuerdo? En esta representación.

aparente consenso que en el grupo ha conseguido la solución propuesta por María.

96 María: [Mueve el palo que representa *l* y ya no es perpendicular al plano].

97 Investigador: Ah

98 Violeta: Porque si uno la mueve un poquito más ya se…

99 Investigador: Si uno lo mueve un poquito más ¿Qué pasa? Así, supongamos

¿No existe la perpendicular?

100 María: No. O si existe, pero pues no está en el plano alfa.

101 Investigador: Si, la pregunta es: ¿En el plano alfa existe la perpendicular a esta *m* o no?

Ei: Las estudiantes no aceptan dudar de su solución y emplean como argumento que si la recta *m* no es perpendicular al plano entonces *l* no está contenida en el plano haciendo una especie de contrarrecíproca de la proposición que han establecido: “Si m es perpendicular al plano entonces existe l perpendicular a m en el plano”

102 María: No.

103 Violeta: No.

104 Investigador: ¿Están seguras?

105 María: Más o menos.

106 Investigador: Esta es *m* ¿No cierto? [Señala en el modelo físico].

107 María: Si

108 Investigador: No hay ninguna perpendicular a *m* en este plano

109 Carolina: Yo digo que no [María niega con la cabeza].

110 Violeta: Pero acá lo acabamos de ver. Yo me guio por lo que vi acá [Señala el computador] y ya pertenecería a otro plano [se refiere a lo que tiene María en el modelo].

Ei: En la THA se previó que la evidencia empírica proporcionada por Cabri 3D les daría a los estudiantes la seguridad o la

intuición segura de la existencia de al menos una perpendicular en el plano alfa. Acá ocurre algo diametralmente opuesto, la exploración en Cabri 3D y con el modelo físico les da la seguridad de la existencia de esa perpendicular en alfa sólo en el caso en el cual la recta *m* es perpendicular al plano alfa.

111 Carolina: Ya pertenece a otro plano.

112 Investigador: No, el problema es en alfa.

113 María: No, no.

114 Carolina: En alfa no.

115 Investigador: No la hay

116 María: ¡No!

121 Violeta: O sea, es cuando ésta es perpendicular al plano [María asiente].

122 Carolina: Porque como dijimos ahorita si se le inclina un poco ya no. La perpendicular o sea *l* no pertenece al plano.

123 Violeta: O sea, creemos el plano perpendicular a ésta.

124 Carolina: ¿El plano perpendicular?

125 María: ¿El plano?

126 Violeta: La recta perpendicular al plano, al base.

Ei: Ante la certeza con respecto a su solución el investigador trata de generar duda invitándolas a usar la herramienta de medida de ángulo del programa para ver si modifican su conclusión.

127 Investigador: Ahora la morada si les quedó en alfa [Se refiere a la construcción en Cabri 3D que ha estado haciendo Carolina].

128 Carolina: Si.

129 Investigador: Pero yo no veo esa como muy… esa yo no la veo en la posición de ésta acá [en el modelo la recta es perpendicular al plano, en Cabri no lo es y sin embargo *m* en Cabri se ve perpendicular a *l*]. Hágale el arrastre bola de cristal.

130 Carolina: Si.

Yo no la veo perpendicular, la veo como así [Señala el

Em: Dado que tienen una convicción previa no parecen considerar necesario verificar con medidas hasta que el investigador lo plantea.

modelo en donde la recta *m* está inclinada].

Y veo que si existe perpendicular ¿Ya midieron el ángulo?

131 Carolina: No, ya lo mido.

136 Investigador: Les dio 90 ¿No cierto?

Ei: Ante la evidencia empírica exhiben un contrargumento “no es robusta” para mantener su punto de vista.

137 María: No es robusta.

138 Investigador: Pero ahí a la *m* yo la veo como así.

¿Ustedes si la ven así? [Pone la recta perpendicular en el modelo], Yo la veo así [Modifica la posición de ésta para que no se vea perpendicular].

146 María: ¿Cómo es posible que…?

Ei: Es el único momento en el cual María parece dudar de su conclusión, pero lo solventa solicitando una construcción robusta en Cabri 3D.

Haz la construcción robusta, a ver si pasa lo mismo. Porque de pronto ahí da 90 y dé con decimales.

147 Carolina: ¿Le pongo ahí decimales?

Em: Dado que no conciben como hacer la construcción robusta usan la herramienta que permite aumentar el número de decimales para convencerse de que la

148 Violeta: Seis [se refiere a la cantidad de decimales, les da distinto de 90 entonces las tres asienten].

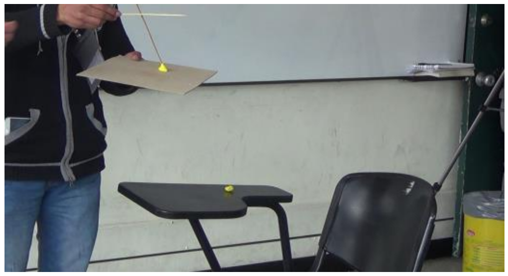
149 María:	Toca hacer la construcción robusta a ver si da.	perpendicular a *m* no existe en el plano si *m* no es perpendicular al plano base.
150 Investigador:	¿Y cómo es robusta?	
151 María:	Pues ya creando el ángulo de 90.	
171 Investigador:	Miren la hoja un momentico, lean el enunciado de la hoja. [lee el enunciado]Ustedes que dicen ¿Existe o no existe? No dice justifique.	Ei: Se reafirman en su conclusión pese a los intentos del investigador por genera duda respecto a ésta.
172 Violeta:	Existe en el caso de que la recta que la recta *m* sea perpendicular al plano.	
173 Investigador:	¿Solamente en ese caso?	
174 Violeta:	Solamente en ese caso.	

A continuación, la interacción de la profesora con toda la clase durante esa misma sesión:

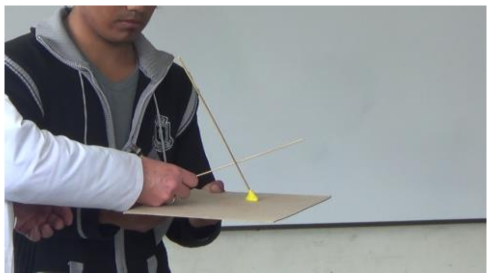
Tarea 4, ciclo 3, profesora. T4C3P: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Alfonso, pasa y muestra lo que tú hiciste con el material, por favor. Acá enfrente de la clase. Cómo fue el proceso que él se imaginó para contestarme, la respuesta de él es que sí. ¿Cierto? Entonces pongamos atención.	Em: La profesora invita a Alfonso a hacer uso del modelo físico para representar su solución en la cual ilustra que existe al menos una recta perpendicular en el plano.
2 Alfonso:	Pues tengo el modelo de lo que es lo dado.  Luego con el otro palito trato de hacer como una perpendicular y empiezo a buscar [gira el segundo palo sobre el que está fijado al cartón], entonces la idea es que caiga en el plano ¿Sí? Y empecé…más o menos eso así.  Y siempre perpendicular a ésta.	

3 Profesora:

Muestrales, muestrales. Creo que tienes que mover el modelo.

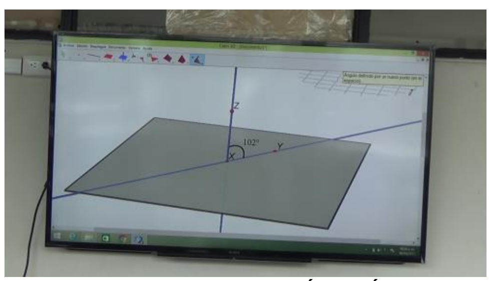


O sea, él dijo que cogió este palo y lo fue poniendo perpendicular. Él lo que me dijo es: Y lo hice rodar hacia abajo.



Pero si lo prueba aquí hacia abajo, aquí hay un ángulo recto ¿Cierto? [señala el ángulo entre los palos] pues no le va a dar en el plano. Entonces por eso él lo fue girando alrededor de esta recta. Hasta que encontró el momento en que sí. Lo fue girando. Primero hizo la perpendicular entre las dos y lo fue bajando al plano y se dio cuenta: ¡Aquí no me va a quedar en el plano! Bueno, gracias.

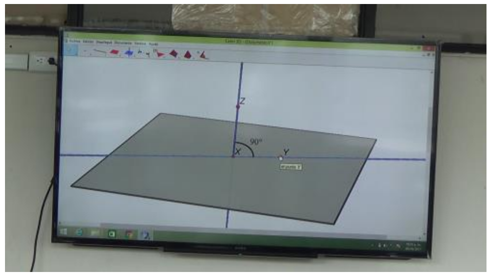
Eso que hace Alfonso con el material, es lo que yo hago…claro yo no les estoy pidiendo que me lo construyan ni que me lo justifiquen sino si existe o no. Ahí yo tengo una recta en el plano.



Yo la empecé teniendo en el plano. Él no, Él la hizo girar en el espacio hasta que se dio cuenta que si la baja va a quedar en el plano. Yo comencé con una en el plano, medí el ángulo, ahí no me va a dar noventa. ¿Será que, si voy moviendo este punto, esta recta…? [señala el punto Y]. Hay infinitas rectas en el plano que contienen a ese punto. Ya ¡La encontré!

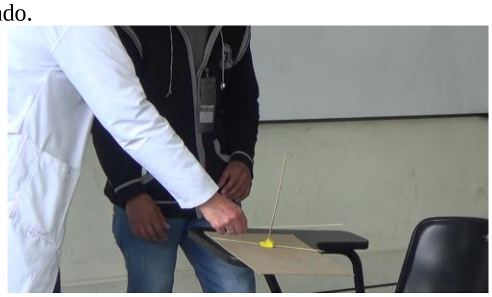
Em: El modelo de Alfonso le agrega dinamismo, que no tiene originalmente el material, para lograr representar la solución a la pregunta planteada llevando la perpendicular al plano.

Em: La profesora asocia la construcción de Alfonso con la exploración que ella hace de la solución en Cabri 3D mediante el arrastre.

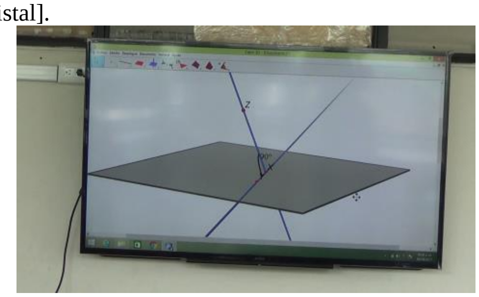


Ei: La profesora ilustra la existencia de al menos una recta perpendicular a la recta dada en el plano y plantea el problema clave al respecto: "cómo construirla".

De las infinitas rectas que contiene ese punto hay una que si forma ese ángulo, que fue lo que él hizo con el palo aquí y lo fue volteando, lo fue volteando hasta que el palo al irlo bajando.



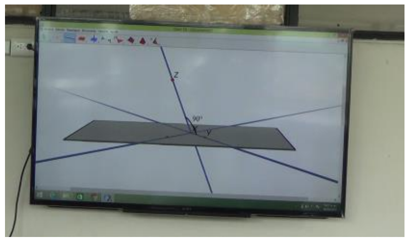
Puede llegar a quedar en el plano. Luego si existe. ¿Pero cuál es el problema? Bueno, no sabemos cómo construirla. Él me hablaba de un plano, sí porque el comenzó con dos rectas perpendiculares y lo que hacía era bajarla, pero tenía que encontrar el plano que le funcionara.
Ahí logré yo que me diera el ángulo de 90 [hace arrastre bola de cristal].



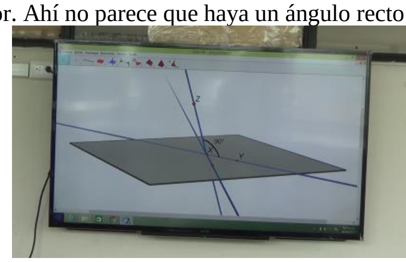
Pero miren la relación de la recta con el plano, es cualquier recta. Si hay una recta perpendicular a ella en el plano. Pero la recta con respecto al plano chuequísima. Entonces se pregunta uno y cómo, a pesar de que es perpendicular a una recta de ese plano, no es lo que nosotros nos imaginamos,

Ei: Destaca la profesora que la recta es cualquiera respecto al plano y que la representación no es tiene la imagen de lo que convencionalmente se hubiese pensado como perpendicular.

una recta perpendicular al plano. No lo es, es perpendicular a una recta del plano.
Entonces ¿Qué pasa aquí?, si quisiera que fuera de alguna manera perpendicular al plano tendría que enderezarla un poco ¿Cierto? Pero al enderezarla un poco, voy a hacer otra recta aquí, aquí que pase por X y un punto del plano.



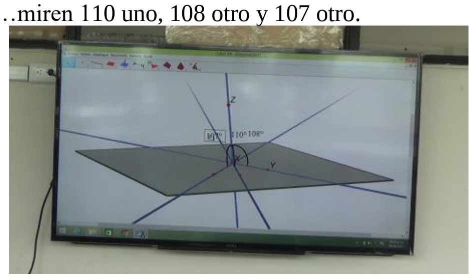
Si miro esa recta con respecto a mi recta *m*, pues *m* con respecto a mi recta si está como chuequísisima ¿No? [hace arrastre bola de cristal] O sea ella si está perpendicular respecto a esa recta, pero con la nueva recta…a ver si aquí lo veo mejor. Ahí no parece que haya un ángulo recto ¿Cierto?



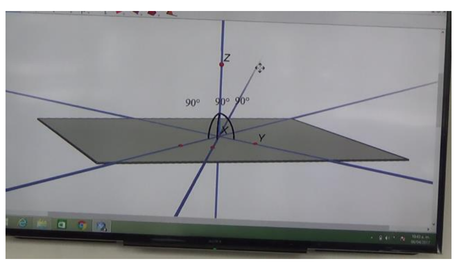
Em: A partir de la representación obtenida, la profesora introduce la exploración para estudiar la perpendicularidad recta-plano.

Ec: Establece la profesora la definición de perpendicularidad recta-plano.

Entonces lo que se pregunta uno es ¿Cómo logro yo que esa recta se enderece?,¿Y qué quiere decir esa relación entre mi recta y el plano? Lo primero que necesitamos decir es ¿Qué es lo que yo quiero?, si esa recta se endereza, si yo logro enderezarla para que sea perpendicular al plano. Entonces mi pregunta es ¿Qué relación…?, voy a medir varios ángulos. Voy a medir este ángulo que ya tengo medido, voy a medir este otro en la otra recta, el punto X, ahí salió 107, y ésta. Este otro, el punto X y este otro punto. Ahí tengo tres medidas, voy a ver si las puedo despegar de ahí. Y todas dicen…miren 110 uno, 108 otro y 107 otro.



Y voy a tratar de enderezar a mi recta, voy a tratar de enderezarla, entonces voy a mover este punto [arrastra Z]. Ahí no parece que la esté enderezando mucho. Ahora para este lado. Aquí logre un ángulo de 90 pero con una sola recta. Entonces la pregunta es ¿Será que para que quede con el plano como yo quiero…?, Que yo necesite enderezarla…Entonces aquí está un ángulo de 90 ¿Cierto?, el que él construyó [trabaja con el material]. Será que si yo hago que forme un ángulo de 90 con esta también.

	 Sin perder este ángulo de 90, o sea si puedo hacer este movimiento de no perder este ángulo de 90 pero que me quede aquí también un ángulo de 90. Si lo hago, así como lo estamos imaginando. Esa es la gran pregunta ¿Si hago que todos los ángulos sean de 90 me queda la relación que yo espero entre la recta y el plano? Entonces esa va a ser nuestra definición de perpendicular recta a plano. Una recta es perpendicular al plano si forma un ángulo de 90 con todas las rectas. No sé si hay lo logre con el arrastre. Armando quieres ensayar mientras que escribo la definición. Definición [escribe en el tablero]: una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas, que bien, a todas las rectas del plano que contienen al punto de intersección de la recta y el plano. ¿Qué es lo primero que estoy asumiendo cuando escribo esta definición de perpendicular recta plano?	
4 Juan:	Que la recta se interseca con el plano	
5 Profesora:	¡Que la recta no está en el plano!, Y obviamente la interseca. Entonces lo primero que se ve aquí, que no lo digo directamente, es que esa relación solamente puede existir entre una recta que no está en ese plano pero que si lo interseca en un punto. Y tiene que ser, gracias, Jimmy [se dirige al computador y Jimmy ha logrado mediante arrastre la ilustración deseada de las situación] perpendicular a todas las rectas. Y ahí si hacemos esto y vemos que la recta está como nos la imaginamos [hace arrastre bola de cristal].  Con respecto al plano. Es decir, no basta con que sea perpendicular a una recta de ese plano, necesitamos que sea perpendicular a todas las rectas de ese plano para que esto pase.	Em: La definición es ilustrada con apoyo del Cabri 3D.
6 Alfonso:	¿Esa recta existe?	En: La pregunta de Alfonso plantea la necesidad de justificar la existencia de la perpendicular que es lo que sigue en el contenido del curso, el Teorema fundamental de la perpendicularidad.
7 Profesora:	Ahora ese es el problema. Existe porque la estamos viendo ahí, pero ¿Cómo demuestro que realmente existe?, ¿Cómo puedo hacer eso? Ese es un problema que tenemos y que ahorita no vamos a abordar. Antes de abordar ese problema necesito que en grupo miren éste [entrega una hoja de trabajo]. Porque llegar a demostrar que existe no va a ser tan	

	sencillo como lo imaginamos, vamos a necesitar muchísimas cosas más. Entonces vamos a ir preparando el camino para demostrar que esa recta que Cabri nos muestra, realmente existe.	

A continuación, la entrevista que llevó a cabo el investigador con la clase:

Tarea 4, ciclo 3, investigador. T4C3I: Transcripción		Análisis
Investigador:	Esta fue la actividad que desarrollaron el jueves ¿No?, ¿La recuerdan?	
Juan:	Si, si, si	
Profesora:	Antes de salir a vacaciones.	
Investigador:	[Proyecta en el vídeo el fragmento de la clase en el cual la profesora habla con toda la clase de la situación] Este fue el resultado que ilustró Alfonso con el material y la profe con Cabri. La pregunta es: ¿Cuántos de ustedes llegaron a la conclusión de que si existía esa perpendicular?, Independiente de la posición de la recta. No sólo cuando está en esta posición.  Sino en cualquier posición. ¿Cuántos de ustedes llegaron a la conclusión de que si existía esa perpendicular? [tres estudiantes alzan la mano].	Ei: El investigador indaga para establecer quienes encontraron evidencia experimental, en Cabri 3D o en el modelo físico, de la existencia de la perpendicular solicitada. Dos de las respuestas evidencian que no llegaron a establecer esa evidencia empírica pese a que intuían que la recta si existía.
Paula:	¿Decirlo o demostrarlo?	
Profesora:	No, no, no	
Investigador:	Decir que si existía. Demostrarlo, la profe les aclaró ese día que no pedía demostración, sino ¿Si existe una perpendicular? Yo pongo una recta en cualquier posición.  Y en este plano, que es mi libreta, sí existe una perpendicular,	

	¿Cuántos de ustedes llegaron a la conclusión de que si era así? [Jeison y Antonio alzan la mano]. Ustedes llegaron a la conclusión de que sí, porque ustedes están filmados, yo sé. Los demás ¿Quiénes llegaron a la conclusión de que si existe?	
Laura:	Pues una conclusión así digamos como que definitivamente… dijimos intuitivamente si tiene que ser, pero no pudimos…	
Dayro:	No pudimos mostrarlo	
Investigador:	No la encontraron.	
Profesora:	No la encontraron.	Ei: La respuesta que ofrece Lina introduce un elemento nuevo: No lograron hacer la construcción robusta, aunque en su intervención no deja claro si al menos lograron una representación por arrastre. Podría inferirse que no fue así, pero no lo afirma.
Laura:	Hicimos en Cabri, nos enredamos un poco, tratamos de construir qué perpendicular a qué. Pero si intuíamos…si decíamos: tiene que poderse así independientemente de la inclinación.	
Profesora:	Leticia ¿Qué iba a decir?	
Leticia:	Pues lo que decía Laura. Sabíamos que existía, pero no la pudimos encontrar porque para mí se me hizo muy difícil trazar una perpendicular exactamente por el punto X o sea podría trazarla por otro punto.	
Profesora:	No había forma de hacerla robustamente.	
Leticia:	Por el punto X no	
Profesora:	Robustamente, no	
Investigador:	Bayron iba a hablar aquí profe, ¿Qué iba a decir Bayron?	Ei: Byron plantea allí una solución para un caso particular: cuando la recta es perpendicular al plano.
Bayron:	Es que yo dije que sí, pero esa recta fuera perpendicular al plano.	
Profesora:	Si, eso lo dijeron.	
Investigador:	Ese es el caso [presenta el lapicero perpendicular al plano que es la libreta].  Pero la pregunta mía es si en cualquier caso [cambia el ángulo que forma el lapicero con la libreta variando la inclinación].	
Esteban:	Cabri tiene ahí una opción que es plano perpendicular, si se hace el plano perpendicular a esa recta y la intersección entre esos dos planos, daba la recta.	En: Esteban ofrece la solución correcta con base en la construcción de un plano perpendicular, aunque la intención de la tarea no era encontrar esa solución.
Profesora:	Te estás adelantando a lo que iba a hablar.	
Investigador:	Ahora les cambió la pregunta, si a ustedes también las tengo registradas, ya la pregunta va para ustedes. Sólo la que va así.	Ei: El investigador indaga si la representación constituyó un argumento

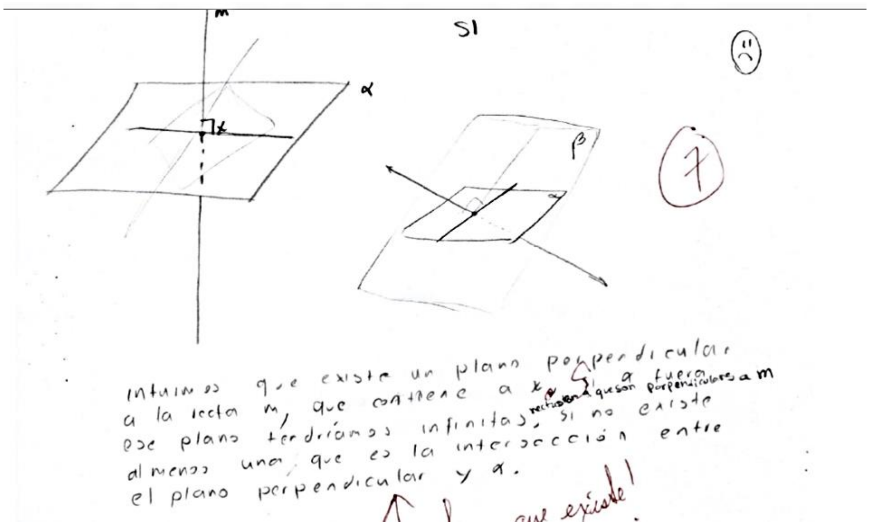
	 Ahora les reformulo la pregunta, una vez ilustró Alfonso con el material y una vez ilustró la profe. ¿Quedaron ustedes convencidos de que existía la recta?	suficiente para aquellos que dudaban de la existencia de la perpendicular. Varios de los estudiantes afirman que para ellos esa evidencia fue suficiente.
Varios:	Si [asienten].	
Investigador:	¿Por qué quedaron convencidos? Señora…	
Laura:	Cuando se hizo esa representación en Cabri yo dije eso no es un ángulo recto porque no está marcando el símbolo [se refiere a la marca de ángulo que aparece que es curva y no con segmentos en ángulo recto]. Entonces en un principio yo dije ay, pero…dice noventa, pero…	Ei: Laura expresa que mantuvo cierto margen de duda.
Investigador:	O sea, siguieron como con su duda	
Laura:	Si, seguimos ahí con que cómo que no hizo la representación robusta, porque no estaba dando exactamente 90, pero pues si sabíamos de alguna forma que…	
Investigador:	Pero no le expresaron esa inquietud a la profesora. Bueno, continuo. [proyecta el trabajo en grupo de María, Carolina y Violeta].  Aquí está trabajando el grupo de María, Carolina y Violeta y tiene la representación de una recta cualquiera y María le pide que mida el ángulo a Carolina que era la que estaba trabajando…lamentablemente no filmé la pantalla, pero ellas tenían dos ángulos que estaban midiendo: uno con un punto y otro con la recta que tenían. Y el que tenían con la recta Violeta dice da 90, porque Carolina había dicho: da 95 el otro, el que estaban midiendo con el punto, entonces el que tenían con la recta Violeta dice: da 90. [Continua la proyección del vídeo] Y María pone en duda ese resultado ¿Cierto? La profesora les había enseñado ese día a poner a prueba los resultados numéricos con la herramienta dígitos ¿No? Y eso es lo que pone ahí María en práctica, pero a la profesora nadie le pidió que hiciera eso, María si le pidió Carolina que hiciera eso. ¿Por qué razón?	Ei: El investigador amplía las razones por las cuales formuló la pregunta anterior a todo el grupo. En el grupo observado, para las estudiantes no fue suficiente la evidencia empírica y orientaron sus acciones a poner a prueba esa evidencia con notable resistencia a aceptarla.

Lina:	Yo iba a decir lo mismo que decía Laura, puede aproximarlo, pero exactamente no se ve un ángulo de 90 grados, es una aproximación, entonces… y yo tampoco lo había visto de esa manera. La profesora dijo que agregar… ella lo utilizó por ejemplo cuando hicimos el cuadrilátero plegado con cuatro ángulos rectos, porque alguien había dicho que si, que si podía tener los cuatro ángulos rectos. Cuando ella utiliza esa herramienta uno verifica que es una aproximación pero que realmente eso no es un ángulo de noventa grados.	Ei: Acepta que la evidencia empírica aportada por Cabri 3D no es concluyente respecto al hecho que se quiere establecer.
Investigador:	Si. Exactamente eso fue lo que hicieron ellas, la construcción que hizo la profe en el tablero fue la que hizo Carolina. Pero María a Carolina si no le creyó y le dijo que usará esa herramienta. Le estoy preguntando a toda la clase: ¿Por qué a la profesora le aceptaron la evidencia que ella presentó?, ¿Sólo por lo que es la profe?	Ei: El investigador indaga si el criterio para salir de la duda respecto a la situación atiende a un criterio de autoridad respecto a la profesora.
Laura:	No, pues como que uno sabe que va a algo más… no se queda ahí, sino que va… no sé yo a veces me quedo expectante a qué va a decir luego. Como bueno ahí está así, pero vamos a ver si le cambia… al hacerlo más robusto ya da exactamente 90.	La respuesta de Laura de alguna manera lo confirma pues al decir que, aunque la evidencia no es concluyente era evidente para ella que la profesora se traía algo con esta situación.
Antonio:	Yo me quedo con la duda, de porque en la representación se ve curva si habíamos dicho que para el recto es el cuadrito, la representación. Entonces, pasó con la tarea del cuadrilátero plegado que yo no me convencía porque en la representación se veía curva, pero hasta que Adriana me explicó, o sea, casi me golpea, me explicó que si se puede. Aunque en la práctica no se vea claro, si se puede evidenciar por esas… o sea el programa se puede equivocar por unas décimas, pero en la teoría puede existir el objeto que estamos buscando.	En: Expresa que tenía la duda, pero la manera de resolverla es apelar a la teoría de referencia.
Investigador:	La pregunta, ahora que ustedes lo han dicho y es muy importante. Dijo Laura que ella quería ver con qué seguía la profe y dijo Antonio que es que confía en que en la teoría si se puede. ¿A quién le queda la responsabilidad de mostrar que en la teoría si se puede? O sea, ustedes estaban esperando que la profe les muestre ¿O pensaron en alguna idea para que si se pudiera? Porque María dijo aquí: “Haz la construcción robusta”. Pero la construcción robusta, no la tenían. Pero ¿Le quedó a alguno la inquietud de cuál sería la construcción robusta o eso? Pero no escucho a Esteban ni escucho al grupo de Antonio. A ustedes no, ya les digo	Ei: El investigador indaga si alguno experimento necesidad intelectual al aventurar alguna idea para probar la existencia de la perpendicular.
Mario:	Pues es que digamos yo le creí a la profe porque como por el postulado rayo reales el rayo determina al ángulo entonces puede coger cualquier punto, por eso el decimal no es lo mismo que noventa. Como es en los reales. No seguí pensando en eso, sino que le creí.	Ei: Acepta que la evidencia empírica para él fue suficiente.
Investigador:	No le entiendo.	
Mario:	Como el teorema, el postulado creo que es, rayo-reales que para cada rayo se le asigna un real, entonces el decimal que la profe mostró ahí es diferente de noventa, pues ya era como obvio que no, no era noventa sino ochenta y nueve punto nueve.	
Profesora:	Ah tú crees que no da noventa nunca.	
Mario:	O sea, ese ángulo de esa vez: no.	
Profesora:	Ah ese.	

Paula:	Nosotros como propuesta…o sea queríamos como la construcción robusta, como decir acá están las rectas que, si cumplen eso, que se ha demostrado. Es que hasta que no lo demostremos no estamos seguros de que eso va a pasar, puede ser una casualidad que dé. Bueno eso empezamos a hacer muchos, muchos planos. Entonces mirábamos que de pronto con este plano, este plano. Por ahí creamos como cinco planos y al final dijimos, no o sea no. No lo podemos demostrar para que tenga consistencia.	En: Intuyeron que existía un soporte teórico para la situación, pero reconocen que no fueron capaces de encontrarlo.
Investigador:	Pero ustedes si creen que existía y si estaban buscándolo	
Paula:	Si, nosotros si sabíamos que existía. Por lo mismo que Jimmy creó las rectas, pero queríamos darle más consistencia, logrando demostrarlo.	
Investigador:	Lina.	En: Desarrolla un poco más la idea que tenían respecto al soporte teórico de la situación, en la cual alcanzaron a concebir que la recta debía ser intersección de dos planos.
Lina:	Nosotros hicimos la representación con el modelo, la estábamos haciendo Leticia y yo y Jimmy lo estaba en Cabri con Paula. Entonces Leticia y yo lo estábamos buscando y dijimos: bueno la intersección de esas dos rectas tenía que ser ese punto X, nosotros estábamos era buscando un plano que la intersección de este plano [tiene una hoja en su mano] y del plano que contiene a la intersección de esas dos rectas, o sea que esta recta fuera la intersección de esos dos planos. Pero nosotros buscábamos, o sea … no hallábamos la manera de como demostrar esa intersección.	
Investigador:	¿Juan qué iba a decir?	
Juan:	Pues yo digamos, cuando me dieron la hoja de trabajo individual pues yo traté de escribir una demostración ¿Sí?, Pues me quedó mal, después ya vi que me quedó mal. Pues lo que yo dije es: yo tengo la recta voy a crear por esa recta una perpendicular y yo sé que hay un punto en el espacio que va a pertenecer a la perpendicular. ¿Si me hago entender?, Yo con eso dije, ya con eso puedo decir que existe por el teorema de la perpendicular, yo traté de dar esa demostración.	
Investigador:	Ahorita ya para terminar, porque si no me llevo todo el tiempo de la clase, le voy a preguntar nuevamente a María. ¿Por qué usted le aplicó ese criterio tan estricto a Carolina y no se lo aplicó a la profesora?	Ei: El investigador insiste en establecer las razones que llevaron a este grupo en particular a dudar de la evidencia empírica.
María:	Es que yo había tenido en la cabeza qué si hay una recta perpendicular, esa recta debe ser perpendicular al plano. Es posible que, no sé, de pronto al ver la representación de la profe me haya sacado de la duda. No sabría cómo justificarle eso.	
Investigador:	Pero porqué… la pregunta es ¿Por qué la representación de la profe la saca de la duda si es exactamente la misma de Carolina?	
Laura:	Pero es que la de Carolina fue después de la de la profe porque ahí dice con decimales como dijo la profe [se refiere a lo que dice María en el vídeo].	

Investigador:	No, yo los organicé así para presentarles el vídeo hoy pero después Alfonso les mostró aquí la cosa con los palitos y la profe les mostró esto en el tablero. Bueno yo con esta información tengo. Muchas gracias.

A 4.2.3 Hojas de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Antonio, Byron y Jeison.  	perpendicularidad recta-plano. Em: Representa los dos casos, si la recta es perpendicular al plano y si no lo es. Para los cuales hay una consideración por parte de ellos. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: Insinúan la existencia de un plano perpendicular a la recta, lo que supone la definición de perpendicularidad y el Teorema fundamental de la perpendicularidad

Hoja de trabajo de María, Carolina y Violeta.

Dados m recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿existe recta l, $l \subset \alpha$, tal que $l \perp m$?

Se usa el modelo y el Computador

En el modelo, se intuye que la recta m es perpendicular al plano α., es decir cualquier recta $\overleftrightarrow{XA_i} \perp m$

7

En el computador se hace la construcción blanda del problema. Se traza una recta $\overleftrightarrow{XA}$ con $A \in \alpha$ y $P \in m$ ($P \notin \alpha$. Se mide el ángulo $\angle PXA$. Se mueve P hasta que $m\angle PXA \cong 90$. Pero se observa que con un punto $B \in \alpha$. ($B \neq A$) es $m\angle PXB \neq 90$. por ello se hace la construcción robusta para afirmar la conjetura anterior.

Construcción robusta, con la herramienta perpendicular al plano se observa que esta recta generada es perpendicular a cualquier recta por X. $\overleftrightarrow{XA_i} \subset \alpha$. ($A_i \in \alpha$)

Entonces m es perpendicular a cualquier recta que pase por X, y que la rec

Ec: Mencionan la perpendicularidad recta-plano.

Em: Hacen alusión directa al uso del modelo y de Cabri 3D.

Ei: Describen la exploración en Cabri 3D y cómo establecieron que el ángulo no era recto. Mencionan lo que denominan construcción robusta que consiste en hacer la recta perpendicular al plano.

En: La solución que conciben es la de la recta que tiene una relación de perpendicularidad con el plano.

A 4.2.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que emerja la necesidad de definir la relación de perpendicularidad entre recta y plano y el teorema para garantizar su existencia	En el G1 y el G2 mencionan la relación de perpendicularidad entre la recta y el plano, aunque no hay una alusión directa al hecho de que aún no está definida en el sistema teórico. No hay un cuestionamiento directo a cómo garantizar la existencia de esta perpendicular salvo el uso del término “intuimos” en el caso del G1 para referirse a la posibilidad de que exista. En la interacción con la profesora una vez ella introduce la definición de perpendicularidad entre recta y plano, uno de los estudiantes si formula directamente la pregunta por su existencia.	Respecto a este enfoque la tarea parece funcionar. Pues el contenido deseado emerge de una manera que podría denominarse “natural” en la discusión de los estudiantes

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se espera que el arrastre junto con la medida de ángulo proporcione evidencia empírica que resulte persuasiva para los estudiantes respecto a la existencia de una recta perpendicular en el plano dada una recta cualquiera que interseca al plano.	En el G1 uno de los estudiantes resolvió previamente la situación aparentemente sin el uso de Cabri 3D y luego usaron éste como herramienta de verificación de la solución. Y el modelo físico lo usó este estudiante como herramienta de comunicación y persuasión de su solución a sus compañeros de grupo. En el G2 la obtención de la solución mediante arrastre no les resultó convincente y buscaron los medios de encontrar el punto falible de ésta y finalmente lo hicieron pidiendo más dígitos a la medida del ángulo arrojada por el software. La solución ilustrada por la profesora mediante el arrastre al parecer no les resultó persuasiva a todos los estudiantes, como lo expresaron en la entrevista con el investigador y al parecer el elemento que más peso en su aceptación fue la confianza en la profesora y el hábito establecido en la clase de formular algo inicialmente en términos hipotéticos que después se soporta teóricamente. En la entrevista con el investigador también expresaron varios estudiantes no haber encontrado la recta perpendicular mediante el arrastre	El supuesto con el que planteamos la tarea acerca de la facilidad de la construcción y el lograr que la medida sea 90 parece no corresponder con la realidad. Probablemente se requiera una construcción parcialmente avanzada o con algunos elementos de guía establecidos en el archivo en Cabri 3D para lograr que obtengan una recta cualquiera que interseque al plano y determine un ángulo recto con una recta del plano.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se espera que el arrastre junto con Se tenía previsto que el hallazgo de una recta perpendicular a la recta dada generase en los estudiantes duda y/o sorpresa motivando su búsqueda de explicación a esto	En el G1 hay evidencia de duda, ésta no es producto del hallazgo de la perpendicular en la exploración. La duda se expresa por las diferentes opiniones entre los integrantes del grupo respecto a la existencia de la perpendicularidad que uno de los integrantes estableció sin explorar en Cabri 3D. En el G2 establecen mediante la exploración en Cabri 3D que la perpendicular existe, pero no	Nuestro supuesto en la THA acerca de la facilidad para lograr la representación en Cabri 3D de una perpendicular en el plano a una recta cualquiera que interseque el plano, parece estar distante de la realidad. Pues varios de los estudiantes reconocen no haber logrado la mencionada representación

	aceptan esta evidencia. En la discusión de la profesora con toda la clase y posteriormente en la entrevista con el investigador algunos estudiantes reconocen que no lograron obtener la representación de una perpendicular en el plano con Cabri 3D y que ante la representación lograda por la profesora tenían aún una reserva de duda	

Enfoque producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que, una vez experimentada la incertidumbre por parte de los estudiantes tras el hallazgo de una recta perpendicular en el plano, se generase por parte de ellos una búsqueda de argumentos teóricos respecto a la existencia de esa perpendicular y una vez expuestos estos argumentos se esperaba que expresasen su satisfacción con los mismos.	En la discusión que desarrollan en el G1 hay evidencia de exhibición de argumentos teóricos respecto a la existencia de la perpendicular. Reafirman esta evidencia en la hoja de trabajo en la cual consideran los dos casos para la recta, cuando es perpendicular al plano y cuando no lo es. Asimismo, se evidencia que los argumentos son satisfactorios cuando uno de los integrantes del grupo ha cambiado su opinión y defiende ahora el punto de vista de la existencia de la perpendicular. En el G2 exhiben un único argumento: la perpendicular existe en el plano cuando la recta es perpendicular al plano. Pero este es el punto de vista que han tenido desde el principio y no se modificó producto de la exploración. En la interacción con la profesora uno de los estudiantes se pregunta por la justificación de la existencia de esa recta perpendicular al plano una vez que la profesora ha establecido la definición.	No hay evidencia concluyente que permita afirmar que lo anticipado en la THA para este enfoque se verifica en el desarrollo de la tarea

A 4.2.5 Cambios en el diseño de la tarea.

El elemento más relevante en el diseño de esta tarea es el hallazgo por parte de los estudiantes de una recta perpendicular a la recta dada y que esta perpendicular esté contenida en el plano. No logramos que este hallazgo fuera hecho por la mayoría de los estudiantes, así que una nueva versión de la tarea debe incorporar una mayor orientación en la exploración que hagan en Cabri 3D para que este hallazgo se produzca.

A 4.3 CONCLUSIONES DE LOS ENFOQUES EN LOS DOS CICLOS PARA LA TAREA 4

A 4.3.1 Enfoque en el contenido (Ec).

De acuerdo con las THA de las dos aplicaciones de la tarea se tenía previsto introducir la definición de perpendicularidad recta-plano y el Teorema fundamental de la perpendicularidad y que estos emergiesen en la discusión de la solución a la tarea. En los dos ciclos se verifica que la relación perpendicularidad recta-plano emerge y por lo tanto la introducción de su definición resulta adecuada en el momento de discutir las soluciones. Menos natural es la emergencia de la necesidad del Teorema fundamental de la perpendicularidad, solamente registramos un momento de iniciativa de los estudiantes al respecto y es cuando en la interacción con la profesora en el ciclo dos uno de los estudiantes pregunta si esa perpendicular existe.

A 4.3.2 Enfoque en la mediación (Em).

En el desarrollo del ciclo dos los estudiantes no parecieron requerir en mayor medida de los recursos de mediación previstos y en el ciclo dos la exploración con Cabri 3D no cumplió el papel previsto en la THA. En ninguno de los dos ciclos se verificó lo anticipado respecto a la mediación.

A 4.3.3 Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei).

La generación de incertidumbre se alcanzó de la manera prevista únicamente en la segunda parte de la tarea en el ciclo dos, cuando la profesora introduce la discusión de la existencia de la perpendicular. En la primera parte de la tarea en el ciclo dos y en el desarrollo de la tarea en el ciclo tres la incertidumbre no se verificó de la manera prevista en la THA. Esto está relacionado con lo mencionado en el Em, pues como se señaló en la sección de “Cambios en el diseño de la tarea” consideramos que la exploración debe ser reorientada pues la tarea tiene potencial para la generación de incertidumbre si la exploración es fructífera.

A 4.3.4 Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En).

Consecuentemente con la debilidad en la generación de incertidumbre, la evidencia de necesidad intelectual y justificación epistemológica es muy poca. Los argumentos teóricos aparecen con alguna fuerza en el ciclo 2, G1 y en los dos ciclos en la discusión con la profesora. Pero, el rediseño de la situación como ya se mencionó debe dirigirse a ser exitoso en este enfoque.

ANEXO 5

TAREA 5

A5 ANÁLISIS DE LA TAREA 5

A 5.1 TAREA 5, CICLO 2

La tarea cinco se aplicó en los ciclos 2 y 3. El enunciado fue el mismo en ambos ciclos.

A 5.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje, THA.

Meta de aprendizaje

Introducir experimentalmente, con el uso de Cabri 3D, las condiciones geométricas para que se cumpla el Teorema interestancia-equidistancia en el espacio.

Tarea

Enunciado

Un estudiante asegura que dados el segmento PQ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la recta BC , es mediatriz de segmento PQ. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. Indique su acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones dadas. Justifique su respuesta.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibirán la hoja de trabajo junto con el material, (palos, plastilina y cartón) para la representación del modelo físico, y los computadores con Cabri 3D. Después de esta primera exploración se les solicitará explorar un archivo previamente construido en Cabri 3D. En el archivo se les pedirá redefinir el punto C (Figura 6.18) fuera del plano base y una vez el punto esté libre fuera del plano se les requerirá hacer arrastres hasta que las medidas cumplan que QC = PC.

Figura 6.18. Ilustración del archivo que se les pedirá explorar a los estudiantes, con C en el plano base y C fuera del plano base. En ambos casos se debe cumplir que QB = PB y QC = PC.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrollará primero en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactuarán con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. Posteriormente, la profesora dirigirá una interacción con la clase al finalizar el momento del trabajo en grupos a partir de los resultados consignados por ellos en las hojas de trabajo. En un punto de esa discusión la profesora les pedirá explorar el archivo en Cabri 3D previamente preparado. La intención de esa exploración es ilustrar el caso en el cual la equidistancia se cumple sin necesidad de que se intersequen el segmento PQ y la recta BC.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Con esta tarea se espera introducir el Teorema interestancia-equidistancia en el espacio. Para ello los estudiantes deben evocar la Definición de mediatriz, así como el Teorema de la mediatriz pues deben usar las condiciones “puntos en el plano” de la Definición y “recta perpendicular” del Teorema. La primera condición implica que los cuatro puntos son coplanares y la segunda que la recta y el segmento se intersecan. Esperamos que contrasten estos elementos con lo dado en el enunciado de la tarea, en el cual la única condición que exige es la equidistancia de los puntos, la coplanariedad de los cuatro no es requerida.

Enfoque en la mediación (Em). Una vez la profesora les solicite a los estudiantes la exploración del archivo en Cabri 3D, esperamos que el uso combinado de las herramientas de Cabri 3D redefinir y arrastre junto con la medida de las longitudes les permitirá a los estudiantes encontrar una representación en la cual se cumpla que QB = PB y QC = PC sin que la recta BC sea mediatriz del segmento PQ (Figura 6.15). Nuestra previsión es que este hallazgo resulte sorpresivo para los estudiantes.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se espera que la incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa al discutir en grupos la solución del ejercicio. Es probable que alguno de los miembros del grupo plantee la posibilidad de considerar los cuatro puntos B, C, P y Q como no coplanares frente a otros que los consideren siempre coplanares. Por otro lado, habrá grupos en los cuales pueda que no hagan esta consideración en su interacción. Entonces, al desarrollar la discusión de la clase con la profesora y hacer la exploración del archivo preparado en Cabri 3D se prevé que la incertidumbre se exprese como duda y/o sorpresa al verificar casos en los cuales B y C equidistan de los extremos del segmento PQ sin que los cuatro puntos sean coplanares.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Una vez los estudiantes hacen el hallazgo de que la equidistancia QB = PB y QC = PC puede cumplirse sin necesidad de que los cuatro puntos B, C, P y Q estén en el mismo plano, esperamos que esto impulse la búsqueda teórica en ellos. Hay dos elementos relevantes en la pretendida búsqueda. El primero, constatar que dos puntos B y C pueden equidistar de los extremos de un segmento sin pertenecer a la mediatriz, lo que representa una ruptura con lo que convencionalmente han estudiado sobre la equidistancia en el plano. Y allí emerge el segundo elemento, planteado en el enunciado: sí B y C equidistan de los extremos ¿Cualquier punto que esté entre B y C equidistará también de los extremos del segmento? Ese elemento constituye la tesis del Teorema equidistancia-interestancia. Puede generar búsqueda teórica porque cuando B, C, P y Q están en el mismo plano, la recta BC es la mediatriz, S está sobre la mediatriz y la pregunta se resuelve de esta manera en un paso. Cuando no son coplanares es necesario argumentar por qué dado QB = PB y QC = PC se cumple que QS = PS y QS = PS.

La expresión por parte de los estudiantes de que los argumentos exhibidos sustentan satisfactoriamente el mencionado teorema junto con la exposición de estos será expresión de justificación epistemológica y argumentación productiva.

A 5.1.2 Interacciones analizadas.

Como se mencionó en el capítulo de Metodología para las tareas del bloque dos se recogió información en los ciclos dos y tres. Para la tarea que estamos reportando en el ciclo dos se registraron dos grupos de trabajo: El grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2) y la interacción de la profesora con toda la clase. Se presentan a continuación esas interacciones.

En primer lugar, la interacción del grupo uno.

Tarea 5, ciclo 2, grupo 1. T5C2G1: Transcripción		Análisis
1 Juan:	[Lee el enunciado].	Ec: En su interpretación de la situación usan la propiedad “equidistar” de la definición de mediatriz.
2 Carlos:	O sea que la recta PQ es la mediatriz de ese segmento, del segmento BC.	
3 Juan:	La recta BC es mediatriz del segmento PQ.	Ei: Han interpretado la situación de la manera convencional, sin suponer que pueden estar los cuatro puntos en más de un plano.
[…]		
12 Carlos:	Ah, ahí sí, es que no había entendido. Además, afirma que cualquier punto *S* entre B y C equidista de P y Q. (Leyendo) Si, si porque de todas formas B y C ya pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.	
[…]		
14 Carlos:	Con lo que nos dan ahí, el segmento BC pertenece a la recta BC, entonces equidista, entonces todos los puntos que estén ahí van a equidistar de P y Q.	

[…]		
16 Carlos:	¿Esto es en el plano o en el espacio?	Ei: Carlos introduce la duda prevista en la THA en la discusión. Si los cuatro puntos son o no coplanares y adelanta una solución distinta a la que habían formulado previamente.
17 Juan:	Esta recta…	
18 Carlos:	Pero… ¿Esto es en el plano o en el espacio?	
19 Juan:	La recta…	
20 Carlos:	Entonces, no se sabe.	
[…]		
26 Juan:	Pueda que B y C no estén en el plano. B y C pueden estar en distintos planos.	Ei: Juan acepta sin rebatir el punto de vista de Carlos acerca de los puntos en más de un plano.
27 Carlos:	Yo tengo un segmento y tengo dos puntos B y C y siempre van a equidistar [representa con sus manos la situación].  Y siempre van a equidistar de los extremos o sea que siempre van a hacer esto [separa las manos en el aire como estirando una cuerda], siempre van a hacer esto, ahí me genera la mediatriz.	
[…]		
32 Carlos:	Es que nosotros nos estamos imaginando B, el punto medio y C [representa con las manos]. B punto medio y C. Nosotros nos estamos imaginando esto así [pone los dos pulgares juntos sobre la mesa como formando un solo segmento] y está así [levanta uno de los pulgares, sin separarlo del otro]. Ahí están equidistando y no está utilizando la mediatriz.	Em: Utiliza un modelo físico que arma con sus manos para representar un ejemplo de la situación como él la concibe para que los dos puntos B y C equidisten de P y Q y aun así la recta BC no sea mediatriz. Ec: Usa la condición de coplanariedad que contiene la Definición de mediatriz
33 Jimmy:	O sea, en diferentes planos.	
34 Carlos:	Nosotros nos estamos imaginando esto así [junta lápiz y borrador sobre la mesa].  La cuestión es que estos dos puntos equidistan [señala los extremos] y si yo hago esto [levanta un extremo del borrador], ahí siguen equidistando.	Ei: No es claro si la pregunta de Juan se produce porque se equivocó de palabra y quería expresar que, si siguen siendo coplanares, pensaba en la colinealidad de B, C y el punto de intersección de la recta BC y el segmento PQ o simplemente pensó en la colinealidad B y C en cuyo caso la respuesta es la que proporcionó Carlos.
35 Jimmy:	B y C	

36 Carlos: B y C

37 Juan: ¿Pero siguen siendo colineales? ¿O no siguen siendo colineales?

38 Carlos: Dos puntos siempre van a ser colineales, van a ser colineales. Los tres, no.

39 Juan: (…) o sea, P y Q

40 Jimmy: P y Q siempre van a estar en este plano [pone el celular sobre la mesa como indicando el plano base en Cabri].

Em: Jimmy elabora su propio modelo físico para establecer si ha comprendido el punto de vista de Carlos respecto a la posibilidad de que la recta BC no esté en el plano en el cual está el segmento PQ.

Ei: Es probable que la idea de Juan es que al tratarse de una recta sea de todas formas la mediatriz y por esa razón su insistencia en el fragmento anterior en mencionar la colinealidad.

41 Carlos: Pero es que yo ya no estoy pensando en el plano.

42 Jimmy: Que el punto B esté acá y el punto C esté acá [pone el borrador sobre su celular perpendicular a la mesa el extremo superior lo señala como B y el lápiz a continuación del celular, el extremo del lápiz lo señala como C].

43 Juan: Esto sería como un tipo de recta, porqué éste con éste [señala el extremo del borrador].

44 Carlos: Es un plano volteado, es coger esta hoja y hacerle así [toma la hoja y dobla uno de los extremos] estos dos puntos siempre van a equidistar de acá y nosotros estamos cogiendo este caso, cuando están así [deja la hoja nuevamente plana] y yo le digo ¿Y si están así? Pero ahí ya no está la mediatriz. B y C ya no pertenecen a la mediatriz. Eso es lo que estoy diciendo.

Em: Carlos hace un nuevo modelo para ilustrar su idea de una recta BC que no está en el plano del segmento PQ y en la cual B y C equidistan de P y Q.

45 Juan: Entonces ¿Cómo justificamos?

46 Carlos: Si es coplanar, sí.

47 Juan: Usted está diciendo que esta recta [señala en la pantalla] no necesariamente está en el plano.

48 Carlos: Si, exactamente es eso. Y ni siquiera, porque si BC no está en el plano... es que cojamos ésta y saquémosla de acá [pone pulgar y meñique sobre la mesa y los levanta de ésta] ah, pero es que acá está diciendo es que con seguridad es mediatriz. Esto lo podemos decir, BC, sea como sea es la mediatriz.

Ei: En este punto la discusión da un giro pues Carlos interpreta que lo que afirma el estudiante en el enunciado “con seguridad” no es una suposición del estudiante sino una condición dada y concluye que entonces si es coplanar porque es mediatriz. La afirmación de Juan deja ver que para él siempre ha sido condición suficiente el que equidisten para ser mediatriz.

49 Juan: Pues si equidistan es la mediatriz.

50 Carlos: Pero es que ahí dice, con seguridad la recta es mediatriz.

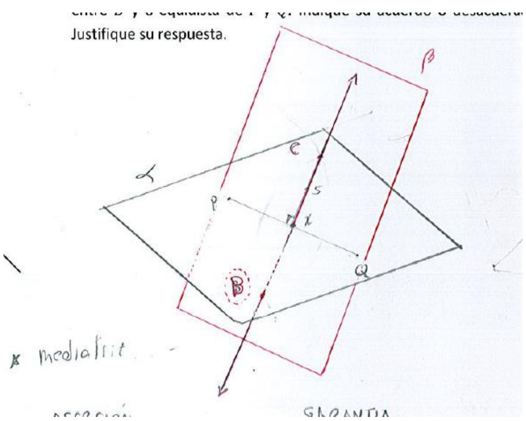
51 Jimmy: [Inaudible].

52 Carlos: Ah, pero entonces, si es coplanar. Un estudiante asegura que dados el segmento PQ y los puntos B y C tales que equidistan de los extremos del segmento … [leyendo el

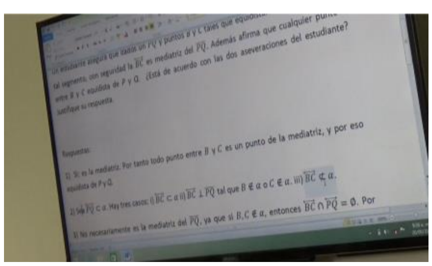
	enunciado].	
53 Juan:	Pero entonces ese punto, debe ser que también va a equidistar.	Ei: Abordan la otra pregunta formulada en el enunciado “cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q” pero modifica Carlos su punto de vista inicial, que considera B, C¸ P y Q no coplanares, adopta ahora el punto de vista que se trata de la mediatriz y en ese caso la solución es trivial por la definición de mediatriz S equidista pues pertenece a la mediatriz.
54 Carlos:	También.	
55 Juan:	Pues ese está entre B y C, pero puede que ese, esté acá [levanta un dedo por encima de la otra mano con la que indica índice y meñique como si fuesen los extremos del segmento].	
56 Carlos:	No, porqué para haya interestancia tienen que ser colineales.	
57 Juan:	¿Sí?	
58 Carlos:	Si claro.	
59 Juan:	Pues si ese está entre B y C, ese está en la mediatriz.	
60 Carlos:	Está en la mediatriz, entonces sí.	
61 Juan:	¿En el plano o en el espacio? [Se refiere a lo que está escribiendo en la hoja Jimmy]	Ei: Juan indaga porque aún no ha comprendido el giro que ha dado la solución que van a ofrecer y Carlos confirma que considera los cuatro puntos en el plano.
62 Carlos:	No, eso es en el plano.	

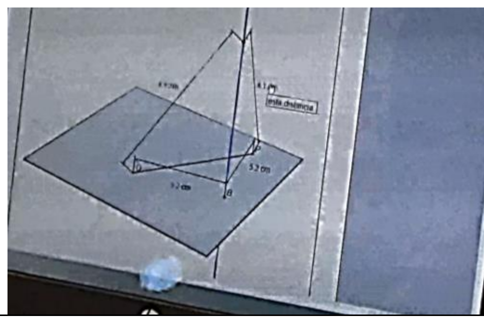
A continuación, la interacción del grupo de trabajo dos.

Tarea 5, ciclo 2, grupo 2. T5C2G2: Transcripción		Análisis
7 Jair:	No, equidista significa que los dos tienen la misma distancia a los segmen… a los extremos. [Analiza el dibujo]. No, porque A equidista de P y Q, pero A y B no equidistan los dos.	Ei: Antes de abordar la discusión prevista en la THA invierten un tiempo en la comprensión del enunciado. Particularmente la expresión “equidistan de los extremos”.
8 John:	¿Cómo así que no?	
9 Jair:	Porque cuando le dicen B y C tales que equidistan, significa que los dos equidistan.	
10 John:	Profe, B y C equidistan ¿Es de la misma forma?	
11 Profesora:	¿Qué?	
12 Jair:	Lo que quiere decir es que tanto B como C…	
13 Profesora:	Equidistan de los extremos.	
14 John:	¿Tienen la misma distancia?	
15 Profesora:	La misma distancia, quiere decir.	
16 Jair:	Dice, con seguridad la recta BC es la mediatriz del segmento [leyendo y siguiendo con el dedo el trazo de la recta sobre la hoja]. Ah marica, pero bueno, eso es en el plano. Qué tal que no estén en el plano.	Ei: Jair plantea la posibilidad prevista en la THA que los cuatro puntos no sean coplanares.
[…]		
17 Jair:	¿Hay posibilidades que no estén en el plano y ambos puntos equidisten de P y Q?	Ei: Reitera Jair el planteamiento de la posibilidad de lograr que los puntos B y C equidisten de los extremos del segmento P y Q sin estar en el mismo plano.
18 Sergio:	[inaudible].	
19 Jair:	¿Cómo? Hable ahora o calle para siempre.	

20 John:	[Inaudible].	Em: Se han planteado la posibilidad de que no sean coplanares, pero no han hecho una representación que lo ilustre.
22 Jair:	Es que lo que pasa es eso, que no sean coplanares ¿Se puede también que esos dos puntos equidisten de los extremos? Entonces usted va a decir que el segmento está en un plano y la recta está en otro.	
[…]		
26 Jair:	Entonces si es mediatriz. Qué tal que la única definición es que existen los puntos que equidistan.	Ec: Jair se plantea la posibilidad de que la única condición para definir mediatriz sea la equidistancia.
27 John:	[Muestra la representación finalizada en la que ha estado trabajando]. 	Em: John hace una representación de lo que considera un ejemplo de la propuesta de Jair de tener los cuatro puntos no coplanares.
28 Sergio:	[Inaudible].	Ei: Jair hace evidente que la representación que ofrece John no ilustra los cuatro puntos no coplanares, pues si bien no están en el plano base que ellos denominan Alfa, si están los cuatro puntos en otro plano que designan como Beta.
29 Jair:	Si, por eso, es la recta CB [la señala en el dibujo], dice la recta CB ¿Si, cierto? Sale del plano, el segmento PQ está en el otro plano, en el plano alfa, este punto [señala la intersección] también está en este plano, pero el segmento no está en el plano.	
30 John:	[Asiente] yo hice esto, que con estos tres puntos [señala en el dibujo] que con esos tres puntos PQC, generé el plano [inaudible lo que sigue].	Ei: Al parecer el no lograr una representación de lo que supusieron existía, desisten de la posibilidad de que los cuatro puntos sean no coplanares.
31 Jair:	Entonces ¿Por qué P y Q también están en beta?	
32 John:	Usted puede tomar el segmento y un punto cualquiera [mira detenidamente la representación]. Bueno, no. Tenemos la recta [inaudible] todo es coplanar.	
[…]		
41 Jair:	Pues sí, si quedan en el mismo plano todos, pues ya.	Ei: Deciden que los puntos están en un mismo plano y concluyen que la recta BC si es mediatriz del segmento PQ.
42 John:	Profe ¿Qué escribimos?	
43 Profesora:	¿Qué escriben? Su justificación. Justificar.	
44 Jair:	Si es la mediatriz ¿Demostrar que si es la mediatriz? Con lo que nosotros vimos.	
45 Profesora:	Lo que hayan encontrado y la justificación correspondiente.	
46 Jair:	Si, es la mediatriz y el punto si equidista siempre [dirigiéndose a sus compañeros, la profesora se ha retirado].	

A continuación, la interacción de la profesora con toda la clase y los momentos en los cuales en los grupos de trabajo exploran el archivo preparado para esta clase. En principio la introducción de la profesora.

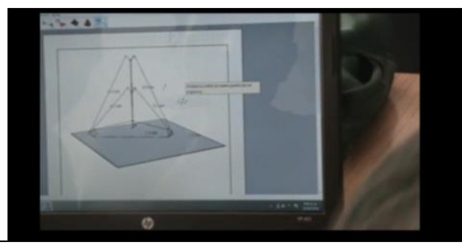
Tarea 5, ciclo 2, profesora T5C2Pa: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Entonces vamos a mirar el taller que hicimos en la última clase, que hablaba sobre una situación particular y voy a mirar las respuestas de ustedes, algunas de las respuestas de ustedes a ese taller. Este era el problema (abre el archivo en la pantalla y lo lee): Un estudiante asegura que dados $\overline{PQ}$ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad $\overleftrightarrow{BC}$, es mediatriz de $\overline{PQ}$. Además, afirma que cualquier punto *S* entre B y C equidista de P y Q. Indique su acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones dadas. Justifique su respuesta. Bueno no me justificaron la respuesta muchos, unos contestaron: Si es la mediatriz, aquí faltó un punto y coma, si estoy de acuerdo, punto y coma, dice: es la mediatriz, por tanto, todo punto entre B y C es un punto de la mediatriz y por eso equidista de P y Q. Entonces dicen estas personas que teníamos un segmento PQ (se dirige al tablero y traza el segmento), dos puntos que equidistan de los extremos y dicen: ésta es la mediatriz ¿Sí? Y si es la mediatriz, todo punto entre P y Q, entre B y C perdón, equidista de P y Q ¿Por qué? ¿Por qué puedo decir que todo punto entre B y C equidista de P y Q? ¿Cuál es la justificación?	Em: La profesora presenta el panorama de soluciones que los estudiantes han consignado en las hojas de trabajo. Estas soluciones contemplan los casos en los cuales la recta BC no está en alfa. A partir de ese panorama les pide explorar el archivo en Cabri 3D en el cual van a explorar el caso en el cual BC no está en alfa y los puntos B y C equidistan de P y Q. Ec: Para discutir la solución a la parte en la cual se pide considerar si S equidista cuando B y C son coplanares con P y Q la profesora les pide evocar los elementos teóricos que soportan ese hecho y en conjunto con la clase concluyen que la definición y el Teorema de la mediatriz. Ei: La invitación a explorar el archivo preparado en Cabri 3D busca generar en los estudiantes incertidumbre. Particularmente en aquellos que no contemplaron la solución con una recta BC que no interseca al segmento PQ y sin embargo los puntos B y C equidistan de P y Q.
2 Estudiante:	¿Definición?	
9 Jair:	Por la definición de mediatriz ¿Sí? Bien. Y por el teorema también porque recuerden que la definición sólo me habla de puntos que equidistan, pero el teorema me dice, esos puntos se agrupan todos en una recta y puedo hablar de entre, la interestancia que es importante. Otros dicen [Lee en la pantalla]: sea PQ un subconjunto de un plano alfa, hay tres casos, la recta BC también lo es, la recta BC es perpendicular tal que B no pertenece a alfa o C no pertenece a alfa y la recta BC no lo es  Entonces estos pensaron en posibles panoramas de la situación y otros dicen que no necesariamente es la mediatriz. Vamos a ir al computador a donde decía Carmen [les	

indica un archivo en Cabri] ahí está representada la situación, quiero que estudien esa representación y me digan si cambia su opinión con respecto a lo que me escribieron. Y si cambia su opinión quiero que aquí en esta hoja me escriban ¿Qué cambió? [devuelve las hojas de trabajo entregadas por los estudiantes en la sesión anterior] Entonces en la parte de atrás quiero que me escriban si cambió o no. ¿Ya a todos les di su hojita? ¿Cierto? Entonces quiero que estudien ese archivo y miren a ver si cambia su opinión, la que ustedes me escribieron, si cambia su opinión al respecto de lo que me dijeron ahí ¿Y cómo cambia? La idea es que en mi archivo usen ¿Se ve la situación representada, cierto? Y un punto, el punto C redefínanlo con ese punto, como decía un grupo ahí, que posiblemente pasaban cosas, que los puntos no estuvieran todos en el mismo plano. Redefinan a C como el punto que tengo ahí ¿Se acuerdan de que eso lo usamos una vez? [Al redefinir los estudiantes obtendrán la representación:] 	

En la exploración del archivo por parte de los estudiantes del grupo uno, al parecer no encontraron la manera de que los puntos equidisten.

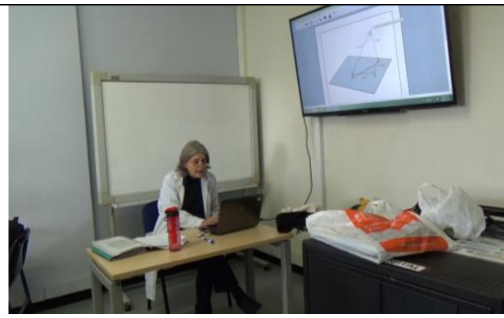
Tarea 5, ciclo 2, grupo 1. T5C2G1e: Transcripción		Análisis
1 Investigador:	Ustedes redefinieron a C como el punto que estaba fuera del plano.	Em: El archivo contenía un punto fuera del plano sin ninguna característica especial, pues la equidistancia debían lograrla por arrastre y en este grupo no tienen éxito en esta acción.
2 Carlos:	Si profe.	
3 Investigador:	¿Y?	
4 Jimmy:	Pero no equidista.	Ei: No se produce la incertidumbre esperada pues no consiguieron una representación en la cual los puntos equidisten pese a no ser coplanares.
5 Investigador:	Sí, no equidista. Pero lo que la profe les dijo es que cumpla la condición ¿No?	
6 Carlos:	Eso es lo que estamos tratando de hacer, pero hay un pedazo en que no deja.	
7 Investigador:	¿Hay un pedazo en el que no deja?	
8 Juan:	Entonces nos toca es buscar un plano en el que pueda estar C que equidiste.	

Los estudiantes del grupo dos si encontraron la equidistancia.

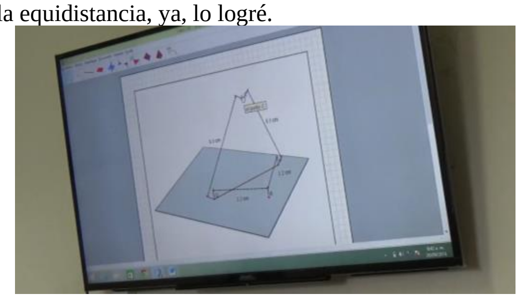
Tarea 5, ciclo 2, grupo 2. T5C2G1e: Transcripción		Análisis
1 John:	Tiene que quedar en el punto superior, el que está fuera del plano.	Em: Interpretan lo que deben hacer con el archivo que se les ha entregado.
2 Sergio:	Es que dice que sea un punto entre.	
3 Jair:	¿Si cumple?	
4 John:	No 5,8 y 5,9.	
5 Jair:	Pero es que eso decían en la definición de mediatriz, pero pensando de que la recta BC fuera mediatriz, pero ahí cada una está en un plano distinto, entonces esa recta no está, mejor dicho, esa no es la mediatriz del segmento PQ, porque ni siquiera está contenida en el mismo plano, entonces ese punto no cumpliría esa propiedad, tocaría hacerlo con el arrastre.	Ec: Hace uso de la definición de mediatriz para contrastarla con la representación que tienen en el archivo en Cabri 3D. Em: Al hacer uso de la definición está interpretando que la solución que buscan es una representación blanda lograda mediante arrastre.
6 John:	Ah este es el segmento BC ¿Lo hago? Esto es una recta, ay si una recta, que pena.	Ei: En este momento encuentran el punto en el cual los puntos B y C equidistan de P y Q sin estar contenidos los cuatro en un mismo plano ese hallazgo genera una reacción de sorpresa en Jair que era lo que se tenía previsto en la THA para este momento del desarrollo de la tarea.
7 Sergio:	Ahora trace desde ese punto la distancia entre P y Q.	
8 Jair:	Punto B a P. ¡Ay marica! ¡Pero ahí sí, guevón!.	
9 John:	Uhmn [tienen en ese momento la siguiente imagen en la pantalla] 	

La profesora después de la exploración por parte de los grupos retomó la discusión con toda la clase.

Tarea 5, ciclo 2, profesora. T5C2Pb: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Entonces lo que estamos mirando es lo siguiente, unos estudiantes dijeron, si, si es la mediatriz y miraron la situación. Y otros estudiantes dicen, hay tres casos. Entonces lo que yo les he representado es uno de esos tres casos que proponen los estudiantes del segundo grupo, que dicen, hay casos, hay casos que la recta BC está en alfa. Eso es lo que seguramente pensaron los del primer grupo ¿Cierto? Y hay casos en que no está, la recta BC en alfa. Entonces lo que hice fue presentarles una representación donde vamos a tratar, donde vamos a tratar que la recta BC no esté (está trabajando con Cabri en la pantalla para toda la clase). Pues para hacer eso voy a redefinir, el punto C lo voy a sacar del plano.	Em: La profesora representa para toda la clase la situación que les solicitó examinaran en los grupos. El caso en el cual la recta BC no interseca al segmento PQ y B equidista de P y Q y C equidista de P y Q. Está mostrando la representación de la situación con la cual se espera genera incertidumbre entre los estudiantes. Ei: En lo previsto en la THA se espera en este punto generar en los estudiantes incertidumbre particularmente en la verificación y justificación de porque cualquier S entre B y C también equidista de P y Q.



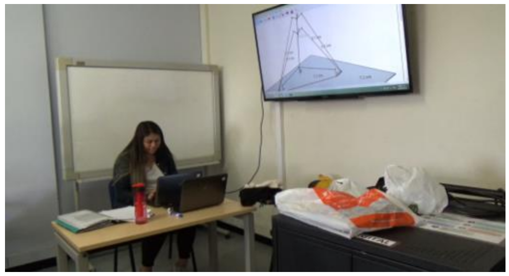
En este punto, no me dio igual, tengo que ver, si, ya lo saqué. Ahora me falta la segunda condición, la que me piden que se cumpla ¿Se cumple o no se cumple la equidistancia? ¿Es posible o no es posible? Entonces ahí es donde yo tengo que mover, para ver si logro encontrar una posición de ese punto donde si se cumple la equidistancia, ya, lo logré.



Entonces lo que propone el segundo grupo tiene sentido, entonces la pregunta era, el estudiante asegura que es la mediatriz, bien, en este momento ¿La recta BC es la mediatriz?

2 Estudiantes:	No.	Ec: Hacen uso de las condiciones de la definición de mediatriz para justificar porque en este caso, de la representación ofrecida por la profesora, la recta BC no es mediatriz.
3 Profesora:	No ¿Por qué no?	
4 Estudiantes:	[Hablan varios al tiempo, se alcanza a escuchar la palabra “intersecan”].	
5 Profesora:	No está en el plano, ni siquiera está en el plano. Ahora unos dicen que ¿Qué? ¿Qué dijiste?	
6 Giselle:	Que PQ y la recta CB no se intersecan.	
7 Profesora:	Ella dice que estas rectas (traza la recta BC en la construcción) el segmento PQ y la recta BC, que pasa por C y por B, dice Giselle que esas rectas no se intersecan ¿Será cierto que no se intersecan? ¿Ya miraron a ver si se intersecaban?	
8 Estudiantes:	[hablan varios al tiempo, no se entiende].	
9 John:	¿Quedan en un mismo plano? Hay que hacerle la rotación (hace arrastre bola de cristal), ahí parece que sí, todavía yo pienso que de pronto sí, pero aquí…	

	¿Maite? ¿Se intersecan?	
10 Maite:	No	
11 Profesora:	¿No? Es que si yo no muevo la bola de cristal yo no me doy cuenta qué está pasando, si yo la miro acá, yo me sospecho que sí. Ahora que pasará si yo le digo, búsqueme el punto de intersección de esta recta con este segmento, no me quiere reconocer el segmento. De pronto no me lo está reconociendo porque sabe que no, de pronto me está diciendo usted está loca mire, de qué me está hablando. Entonces ahí es importante que yo pueda mover el plano y decir ¿Será que le estoy pidiendo algo imposible? No se intersecan y para ser mediatriz ¿Qué pasa? ¿Por qué la intersección es importante?	
12 Profesora:	[hablan varios al tiempo se alcanza a entender solamente: Punto medio]	
13 Profesora:	Claro, tendría que contener el punto medio del segmento y no está contenido el punto medio ¿Sí? Entonces, una cosa es la situación en el plano y otra cosa es la situación cuando los cuatro puntos no están en el mismo plano. Es en estas cosas que tienen que empezar a pensar, yo hablé de cuatro puntos, yo no dije nada de quienes estaban en dónde. Entonces ustedes tienen que hacer como hizo el segundo grupo, que llegó y dijo: hay casos, hay casos. Bien, la situación ahora es, reconociendo que este es un posible caso ¿Cómo demuestro lo que quieren? Ya le contestamos al estudiante: ¡No es mediatriz! Pero viene la segunda parte: él asegura que todo punto que está entre B y C también equidista. Me toca tomar un punto entre B y C, verificar si, si equidista para tratar de demostrarlo ¿Alguien ya lo hizo, ya verificó sí, ¿sí? Me pasas tu computador a ver.	Em: La profesora discute con toda la clase la manera en la cual responder a las preguntas planteadas en la tarea. Hace énfasis en la consideración de casos. Y dirige su atención a la propiedad de S equidistando.
14 Jorge:	Ese punto B no tienen una condición especial y si ya dicen B, Q y P no colineales. Podría B ser colineal con Q y P.	
15 Profesora:	Sí, hay que estudiar todas las posibilidades, pero yo creo que ésta es la peor de todas, si ésta es la peor de todas, o sea, yo tengo que estudiar todas las posibilidades, tienes razón, puede que B esté entre P y Q y sea el punto medio, entonces vamos a ver S, vamos a mirar acá (conecta a la pantalla el computador de Tatiana), si es cierto que, al tomar un punto entre B y C, también se mantiene la equidistancia.	En: La profesora platea a la clase la tarea de demostrar que S también equidista.



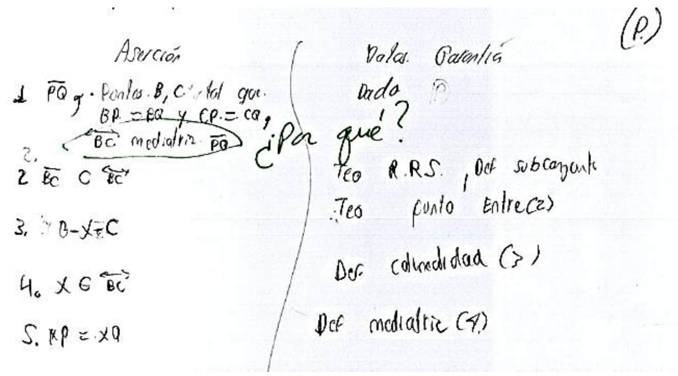
Bueno tú lo llamaste T, pero es S, pero no importa, tomó un punto y le dio ¿Y si lo arrastras se sigue manteniendo? ¿Sí? ¿Por qué? ¿Por qué cuando no está en el plano si se da esa propiedad? No es la mediatriz, la mediatriz si me garantiza esas propiedades. Entonces ya no puedo usar mediatriz para demostrar que eso que estamos evidenciando se da ¿Cómo lo hago? Pero ahí ya está la prueba de que sí. Gracias [conectan nuevamente el computador de la profesora a la pantalla].

Entonces ¿Cómo hago para demostrarlo? Vamos a redefinir a C para que sea nuevamente un punto del plano. Nosotros estamos acostumbrados a trabajar en el plano ¿Cierto? Entonces seguramente nos va a tocar mirar ¿Cómo trabajaría yo la situación si C está en el plano? ¿Cómo la trabajaría? Sin usar… ¿Cómo haría yo para demostrar eso, si C si está en el plano y no uso mediatriz? Porque es que ya vimos que cuando me salgo del plano deja de ser mediatriz de alguien. Entonces si no se me ocurre como hacer una demostración porque, uy estoy en el plano, en el espacio, me devuelvo al plano y me pregunto ¿Hay otra forma de demostrar eso, sin usar mediatriz? ¿O no? Y después la pregunta va a ser ¿Y esa forma me servirá cuando estoy en el espacio? Entonces examínenla aquí y traten de mejorar la aserción que hace este estudiante ¿Cuál es? Que para cualquier punto entre B y C también se cumple la equidistancia.

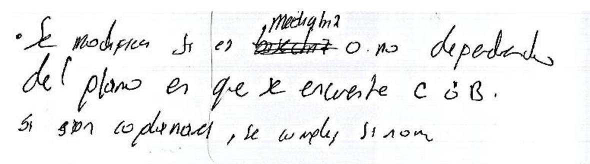
A 5.1.3 Hojas de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis

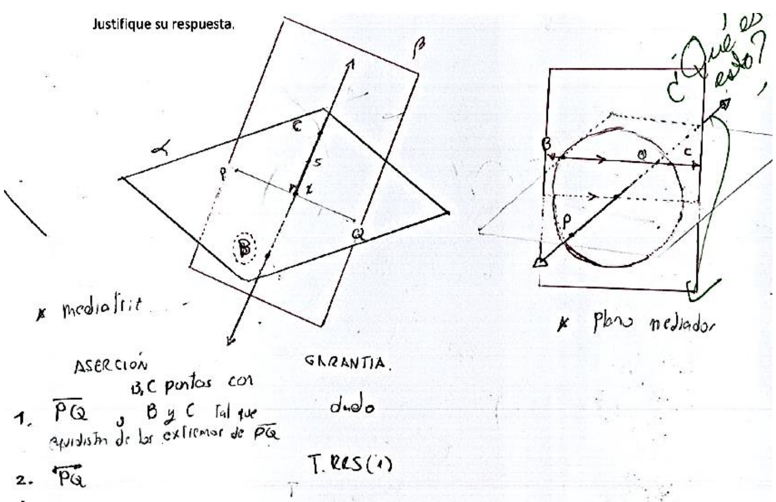
Hoja de trabajo de Carlos, Juan y Jimmy antes de la exploración en Cabri 3D.



Hoja de trabajo de Carlos, Juan y Jimmy después de la exploración en Cabri 3D.



Hoja de trabajo de Jair, John y Sergio, antes de la exploración en Cabri 3D.

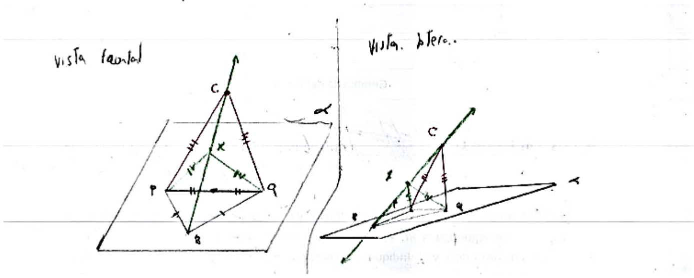


Ec: Presentaron una demostración del hecho de que un punto entre B y C equidiste de P y Q si B y C equidistan, tomando como dado que la recta BC sea la mediatriz del segmento PQ.

Em: Expresan haber cambiado su punto de vista una vez hicieron la exploración del archivo en Cabri 3D.

Ei: Anuncian en lo escrito, después de la exploración del archivo en Cabri 3D, que modificaron su punto de vista dependiendo del plano en que se encuentre C o B (con respecto al plano de P y Q se supone).

En: No hay evidencia de este enfoque.

Hoja de trabajo de Jair, John y Sergio, después de la exploración en Cabri 3D. No necesariamente es mediatriz, pues los casos que otro grupo propusieron muestran que existe una recta ℓ con $B, C \in \ell$ y B, C equidistan de P y Q, ℓ no necesariamente contiene el punto medio de $\overline{PQ}$ pero cualquier punto x tal que $x \in \ell$ también será equidistante de P y Q  	En: No hay evidencia de este enfoque.

A 5.1.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Enfoque en el contenido (Ec): Se tenía previsto que los estudiantes usaran la definición y el teorema de la mediatriz.	En el G1 mencionan la definición de mediatriz y la contrastan con los ejemplos que conciben para que cumpla la propiedad de equidistar. En el G2 mencionan la definición de mediatriz la contrastan con las representaciones que hacen de la situación e incluso mencionan que es probable que la única condición de la definición sea la de equidistar.	Los elementos de contenido previstos y los que aparecen en el desarrollo de la tarea parecen estar asociados con la evocación de aspectos de la teoría relativamente simples. El que puede ser el contenido más relevante “Teorema fundamental de la perpendicularidad” no fue iniciativa de los estudiantes lo que constituye un aspecto a mejorar en futuras aplicaciones.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que la exploración del archivo en Cabri 3D generase en los estudiantes duda o sorpresa y los indujese a revisar su solución a la	En el G1 durante la interacción de la exploración expresan no haber encontrado el punto en el cual B y C equidistan de P y Q, sin embargo,	La definición de mediatriz es una definición con la cual se encuentran familiarizados los estudiantes pese a lo cual pierden de vista algunas de

tarea.	en la hoja de trabajo expresan haber cambiado de opinión respecto a su solución inicial.	sus condiciones al ponerla en práctica para juzgar una situación como la ofrecida en esta tarea. En este caso la condición de coplanariedad de los puntos de la mediatriz y los puntos del segmento que se deriva de la intersección de la mediatriz y el segmento. Las limitaciones para obtener representaciones en geometría 3D son evidentes acá al no lograr una representación que plasme su concepción de los puntos equidistando sin ser coplanares. Esto al parecer les restó seguridad en su respuesta inicial y coincidencialmente ambos grupos cambian su respuesta y admiten que la recta si es mediatriz
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
Se tenía previsto que en la discusión inicial en los grupos la incertidumbre se expresara como duda al plantear la posibilidad de que los puntos no fuesen coplanares. Y posteriormente al explorar el archivo en Cabri 3D se esperaba que esa incertidumbre fuese más evidente	En las interacciones iniciales de los dos grupos de trabajo G1 y G2 plantean la posibilidad de que los cuatro puntos no sean coplanares. Pero en ambos grupos desechan esa posibilidad. En el G1 por una interpretación que hacen de la expresión “con seguridad” del enunciado asumen que por fuerza la recta es la mediatriz. En el G2 al no lograr una representación gráfica de los cuatro puntos no coplanares asumen que siempre son coplanares y por tanto es la mediatriz. Al explorar el archivo en Cabri 3D en el G2 se evidencia una reacción de sorpresa al obtener la equidistancia sin que los cuatro puntos sean coplanares	

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que la necesidad intelectual se expresase como la necesidad de recurrir a elementos teóricos como los mencionados en el Ec y como la necesidad de justificar la equidistancia de cualquier punto entre B y C. La justificación epistemológica esperábamos se manifestase en la argumentación y satisfacción con la respuesta establecida	Hay evidencia del uso de la definición de mediatriz en la interacción de los dos grupos de trabajo. Pero no la hay de la necesidad de justificar el Teorema interestancia-equidistancia procedente del trabajo de los grupos de estudiantes, ésta es planteada por la profesora en el momento de la discusión con toda la clase posterior a la exploración del archivo en Cabri 3D	Este parece ser el punto más débil del diseño de la tarea, pues si bien se consiguió que los estudiantes experimentaran incertidumbre con la exploración del archivo en Cabri 3D no se desarrolló ésta como necesidad intelectual en los estudiantes.

A 5.1.5 Cambios en el diseño de la tarea.

Para reforzar la generación de incertidumbre, En la misma sesión de clase en la cual se introduce la tarea se les asignó la exploración del archivo en Cabri 3D, que ofrece una representación de los puntos no coplanares y con B y C equidistando de P y Q. De esta manera en el ciclo tres el trabajo de exploración de la situación no se hizo en dos sesiones sino en una sola. No hubo cambios en la THA prevista.

A 5.2 TAREA 5, CICLO 3

A 5.2.1 Interacciones analizadas.

Para la tarea que estamos reportando en el ciclo dos se registraron dos grupos de trabajo: El grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2) y la interacción de la profesora con toda la clase. Se presentan a continuación esas interacciones.

En primer lugar, la interacción del grupo uno.

Tarea 5, ciclo 3, grupo 1. T5C3G1: Transcripción		Análisis
1 Antonio:	[Lee el enunciado en voz alta. Jeison y Bayron atienden]	Ei: Aparecen los dos puntos de vista previstos en la THA. El de Jeison que considera la situación solamente en el plano y por tanto la solución es trivial para él y el de Antonio que plantea la posibilidad de considerarla en más de un plano, lo que genera esa reacción "sorpresiva" en Jeison.
2 Jeison:	(…) Si, breve, eso lo sabemos. Qué cualquier punto entre B y C [lee]. O sea, las posibilidades son que B y C estén en distintos semiplanos, entonces cualquier punto acá…escojamos arbitrariamente éste. Qué cualquier punto entre B y C equidista de P y Q. Esto equidista porque va a ser punto medio. Y esto equidista porque pertenece a la mediatriz. ¿Está de acuerdo con las dos aseveraciones del estudiante? Justifique su respuesta [lee]. ¡Si!, breve ¿No?, ¿Usted qué dice que?	
3 Antonio:	¿Y no puede que estén en el espacio?	
4 Jeison:	¡Ay el espacio!	
5 Antonio:	Y no estarían en la mediatriz.	Ec: Jeison está tomando como referencia una interpretación que tiene él de la definición de mediatriz y sus compañeros le hacen caer en cuenta que la propuesta de Antonio implica que la intersección entre la recta BC y el segmento PQ no se produce.
6 Jeison:	La mediatriz es la recta perpendicular…	
7 Antonio:	Por este segmento [dibuja], pero mirando que esté acá y acá. Pues ahí no está en la mediatriz.	
8 Jeison:	Por definición de mediatriz tenemos es la recta perpendicular al plano…	Ei: Al parecer Jeison no ha logrado construir una imagen mental de la propuesta de Antonio.
9 Byron:	Por el punto medio, ahí ni siquiera se intersecan.	
10 Jeison:	O sea ¿Esos dos puntos no están en el plano?	Ei: En este fragmento se confirma que Jeison aún no ha aceptado la propuesta de los dos puntos equidistando sin estar los cuatro en el plano y persiste en su visión de la recta BC como mediatriz del segmento PQ.
11 Antonio:	Uno, uno. Este…	
13 Byron:	Uno, estos dos de acá, pero este de acá no.	
14 Antonio:	C no está en el plano, B no está en el plano.	
15 Jeison:	No se sabe, tendríamos que redefinir mediatriz ¿No?	
16 Byron:	Noo.	
17 Jeison:	Pues si…	
18 Byron:	Está bien si lo hace en el plano, pero lo otro no.	
[…]		
23 Antonio:	¿El punto S si equidistará de éstos?	Ei: Abordan la segunda parte del enunciado, que todo punto S entre B y C también equidista de P y Q. Propone entonces Byron su
24 Byron:	Pues yo creo que sí.	

25 Antonio:	Profe nos quitó el material, ahora si lo necesitamos [se refiere al investigador, que minutos antes se ha llevado el material físico].	representación acerca de cómo concibe que B y C equidisten de P y Q sin estar en el mismo plano los cuatro puntos.
24 Byron:	Es que puede estar como por acá [Describe una circunferencia alrededor del lapicero que ha puesto en el aire]. 	Em: La representación de Byron apela a una circunferencia en la cual el segmento PQ es aparentemente perpendicular, en el punto medio del segmento, al plano de la circunferencia por el centro de ésta. Ei: Para Jeison la representación de Byron no es del todo aceptable como solución de la tarea pues al parecer el cuestionamiento que hace Jeison es que el modelo de circunferencia de Byron da una equidistancia al punto centro de la circunferencia y no necesariamente a los extremos del segmento. La equidistancia que propone Byron se cumple siempre y cuando el segmento PQ sea perpendicular al plano que contiene la circunferencia por el centro de ésta, pero esa información es implícita pues Byron no la plantea.
25 Jeison:	¡Ah circunferencia!	
26 Byron:	Si, como en una circunferencia. Pero una circunferencia que está así así vea.  Todos estos puntos equidistan, todos estos puntos equidistan.	
27 Jeison:	Si	
28 Byron:	Y los que están acá no.	
29 Jeison:	De un punto fijo.	
[…]		
40 Byron:	Yo puedo coger cualquiera porque todos equidistan, entonces yo cojo estos dos [señala puntos sobre la circunferencia]. 	Ei: Antonio acepta la propuesta de representación de Byron acerca de los dos puntos equidistando sin estar en el plano. Em: Construyen con las manos su propio modelo por no disponer del material para el modelo físico y dado que el computador no encendió.
41 Antonio:	Y equidistan de… [toma el lapicero]	

42 Byron:	Los dos equidistan del segmento.	
43 Antonio:	De este y del de abajo, breve.	
[…]		
49 Profesora:	¿Ya abrieron el archivo?	Em: No es posible hacer uso del archivo que se tenía previsto para la segunda parte de la exploración de la situación así que no se puede ejecutar ésta con este grupo.
50 Jeison:	¿Cuál archivo profe?	
51 Profesora:	Acabo de decirles que abran el archivo que les hice. Pueden contestar lo que tienen hasta este momento, antes de abrir mi archivo. [Les señala la hoja de trabajo].	Ei: Hacen una última salvedad antes de escribir su respuesta. Esta salvedad tiene que ver con considerar si la situación hipotética la está considerando el estudiante, mencionado en el enunciado, en el plano o en el espacio.
57 Bayron:	Si estuviera trabajando en el plano es correcto el razonamiento.	
58 Jeison:	Entonces la profesora nos dice que tengamos en cuenta que estamos trabajando en el contexto del espacio.	
59 Bayron:	Pero no sabemos si el estudiante está trabajando en el contexto del espacio. [El computador no funcionó para la exploración del archivo].	

A continuación, la interacción registrada en el grupo dos.

Tarea 5, ciclo 3, grupo 2. T5C3G2: Transcripción		Análisis
5 Carolina:	Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q [lee en la hoja]. ¿Está de acuerdo en la aserción del estudiante?	Ei: Inician la discusión de la solución de la tarea en la cual María expresa en la línea 7 una reserva respecto a la parte que afirma que es mediatriz, pero no desarrolla las razones de su posible duda.
6 Violeta:	O sea, hay como un punto acá y un punto acá [señala en la hoja de trabajo]	
7 María:	A mí no me suena esto [subraya en la hoja la frase en donde dice BC es mediatriz de PQ].	Ec: Evocan la definición de mediatriz para abordar la solución de la situación.
8 Violeta:	¿Cuál es la definición de mediatriz?	
9 María:	Pues que equidista de los puntos. Pero es que acá dice: los puntos que equidistan de los ex… la definición es…	
10 Violeta:	Que tienen la misma medida.	
11 María:	Que equidista de los extremos del segmento. Pues de aquí [señala en la hoja de trabajo	
12 Violeta:	Equidista de éste también, al tiempo [señala en la hoja de trabajo].	Ei: Concluyen que la recta si es mediatriz y que por tanto el punto S al pertenecer a la mediatriz también equidista.
13 Carolina:	B y C tales que equidistan de los extremos del segmento [lee mientras María borra algo de la hoja de trabajo]… con seguridad la recta BC es mediatriz del segmento PQ, además afirma que cualquier punto S entre BC equidista de P y Q. Eso es verdad [María asiente]. ¿Está de acuerdo con la aserción del estudiante? Justifique su respuesta.	Ec: Usan la definición de mediatriz para soportar la solución a la cual han llegado.
	Yo digo que hagamos así, que B y C equidistan de P y Q, entonces si uno traza la recta entonces es la mediatriz, por la definición de mediatriz. Pero si tomo cualquier punto en la mediatriz… va a equidistar.	

	[María le pasa la hoja]	
14 Violeta:	Que, si S pertenece al segmento BC, entonces S pertenece a la recta [le dice a Carolina que está escribiendo] y como la recta es la mediatriz.	
15 María:	Por definición de mediatriz.	
16 Violeta:	¿Será que eso es tan obvio? [Se queda pensativa]. O que también tiene trampita.	
		

En ese momento la profesora se dirige a toda la clase para sugerirles que abran el archivo en Cabri 3D que se ha preparado para el estudio de la situación. María ha abierto el archivo y empiezan a estudiarlo.

17 Violeta:	Eso es mentira.	Ei: La expresión de Violeta en la línea 17 parece aludir a su conclusión previa acerca de que la recta BC es la mediatriz del segmento PQ. Aunque no es claro porque se plantea este cuestionamiento, ya que como se observa unas líneas más adelante ellas no acataron la instrucción de *redefinir* en el archivo dado.
18 Carolina:	¿Qué es mentira?	
19 Violeta:	Que es la mediatriz. Ahí éste debe ser [señala en la pantalla algo, es probable que se trate del punto sobre el cual hay que redefinir B o C].	
		
20 Investigador:	¿Ya comprobaron si equidista?	Em: La propuesta de Carolina es usar la mediatriz que genera el programa para examinar si coincide con la recta BC.
21 María:	Pues según las medidas que están ahí, sí. Pero no sabemos.	
22 Violeta:	A menos que se cree esta recta para ver si es la mediatriz.	
23 María:	¿Cuál recta?	
24 Carolina:	Crea la mediatriz. Es que no veo [mueve la pantalla del computador]	
25 Violeta:	Ah no, yo creo que sí. A menos que…	Ei: Al no haber seguido la instrucción de *redefinir* uno de los puntos B o C no experimentaron una duda soportada en la representación y "concluyen" algo que ya habían dicho: la recta BC es mediatriz del segmento PQ.
26 Carolina:	O crea la recta BC. Luego mide la distancia… el punto de intersección. Y efectivamente [tienen representado todo en un plano].	
27 María:	La mediatriz es una recta perpendicular.	
28 Violeta:	Mídele el ángulo entonces	

En ese momento la profesora empieza a dirigirse a toda la clase.

Em: No hicieron uso del archivo y las

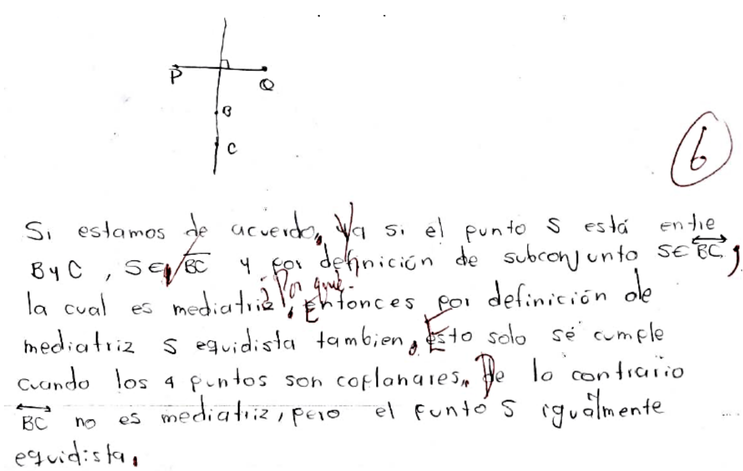
29 Carolina:	Si, pero si es mediatriz.	herramientas de Cabri 3D como se había previsto en la THA.
30 María:	Si es mediatriz	
31 Violeta:	Ay, ella redefinió a C [Se refiere a lo que la profesora hace en el tablero].	Em: Confirman que su exploración no siguió el camino sugerido.

A continuación, la interacción de la profesora con toda la clase.

Tarea 5, ciclo 3, Profesora. T5C3P: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Bueno. ¿Mi archivo les sirvió para confirmar lo que pensaron? A algunos si ¿No cierto? Pero ustedes, muchos de ustedes. Ya vi algunos grupos. Asumieron una cosa.  ¿Qué asumieron? Que los cuatro puntos están representados en el plano como los tengo yo ahí. ¿Qué pasa si redefino al punto C para que se salga? ¿Se cumple? No está, será que lo puedo mover. Ahí no se está cumpliendo, abajo sí, pero aquí no. ¡Lo logré!  ¿Y ahí ya lo que dijo el estudiante que pasa? [Varios niegan con la cabeza]. No es mediatriz.	Em: La profesora usa la herramienta *redefinir* para ilustrar a los estudiantes el caso en el cual B y C equidistan de P y Q y no están los cuatro puntos en el mismo plano. Ei: La profesora plantea la discusión, con la representación proporcionada, acerca de si la recta BC es mediatriz del segmento PQ.
2 Alfonso:	Ahh, ¿No es mediatriz?	Ec: Uno de los estudiantes proporciona la respuesta a la pregunta de la profesora, tomando como referencia la definición de mediatriz.
3 Profesora:	¿Por qué no es mediatriz?	
4 Alfonso:	Porque no está en el plano.	
5 Profesora:	Recuerden que estamos en otro contexto y que la exploración hay que hacerla pensando en ese contexto del espacio. ¿Se cumple?: ¡Si! Se cumple que los puntos son equidistantes, sí. Pero no es mediatriz. Ahora falta contestar la otra pregunta que él dice. Que si cualquier punto entre B y C… toca que escojan un punto entre B y C [ilustra en el computador].	
6 Juan:	Profe usted está considerando el caso en que B y C están en distintos semiplanos de la recta determinada por P y Q.	

7 Alfonso:	Pero es que ni siquiera está en el plano.	
8 Juan:	Ah no, pero ¿Qué pasa si estuvieran en el mismo plano?	
9 Profesora:	Hay que escoger un punto en esta recta y toca medir la distancia del punto X ¿A quién?: A Q, al punto Q y de X ¿Si lo hice bien? Al punto P. Me toca mover el plano. Pero ustedes lo deben poder hacer ahí. De pronto cometí un error. Bien, empiezo de nuevo. De X a Q y de X a P, pero para eso voy a mover un poco el plano, ¿Dio igual? Y ¿Si corro a X? Por acá, si lo muevo  ¿Sigue dando igual? ¿Por qué? Sabrán esta noche cuando les mande la tarea.	Ei: La profesora hace la exploración para ilustrar que cualquier X entre B y C también equidista de P y Q, así BC no sea la mediatriz del segmento PQ y les deja indicado que deben justificar esta situación.

A 5.2.2. Hojas de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de María, Carolina y Violeta. 	Ec: Hacen uso de la definición de mediatriz para justificar su respuesta. Em: Es probable que la frase que inicia "De lo contrario…" sea producto de la ilustración que hizo la profesora de la solución en Cabri 3D, dado que en su registro de interacción en este grupo no se percataron de la posibilidad de que los cuatro puntos no fuesen colineales. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: No hay evidencia de este enfoque.

A 5.2.3 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

THA	TRA	Análisis
Enfoque en el contenido (Ec): Se tenía previsto que los estudiantes usaran la definición y el Teorema de la mediatriz.	En el G1 menciona uno de los estudiantes la definición de mediatriz en el momento en el cual otro ha propuesto considerar la situación en más de un plano y le hacen caer en cuenta que no aplica. En el G2 usan la definición de mediatriz para soportar su solución que se restringe al plano y encuentran consistencia en ésta. En la interacción con la profesora contrastan el caso en el cual los cuatro puntos no son coplanares con la definición de mediatriz para determinar porque no lo es en este caso.	El uso de la definición de mediatriz en el contexto de esta actividad es bastante previsible que se presente particularmente en su condición de coplanariedad.
Enfoque en la mediación (Em): Se esperaba que la exploración del archivo en Cabri 3D generase en los estudiantes duda o sorpresa y los indujese a revisar su solución a la tarea.	En el G1 no hicieron la exploración del archivo porque el computador no funcionó. En el G2 no hicieron la acción de *redefinir.* En la interacción con la profesora ella presentó a toda la clase la situación en el plano y la redefinición de uno de los puntos del plano a partir de esa acción.	Esto fue un error del diseño pues debíamos prever el uso correcto del archivo y su exploración como estaba previsto.
Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei): Se tenía previsto que en la discusión inicial en los grupos la incertidumbre se expresara como duda al plantear la posibilidad de que los puntos no fuesen coplanares. Y posteriormente al explorar el archivo en Cabri 3D se esperaba que esa incertidumbre fuese más evidente.	En el G1 plantean la situación en más de un plano, se genera debate al interior del grupo y consiguen una representación para un caso muy particular, con una circunferencia que contiene a los puntos B y C y el segmento PQ perpendicular al plano que contiene la circunferencia por el centro de ésta. En el G2 expresan duda acerca de la solución en el plano, pero al parecer está motivada por lo que en apariencia les parece muy fácil de la situación puesto que no se plantean poner puntos fuera del plano base. En ninguno de los dos grupos la exploración se llevó a cabo como se tenía prevista.	Está relacionado con lo señalado en el Em pues si la *K* no emerge en la discusión inicial, la exploración del archivo tenía el papel de potenciarla, algo que no ocurrió.
Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En): Se tenía previsto que la necesidad intelectual se expresase como la necesidad de recurrir a elementos teóricos como los mencionados en el Ec y esencialmente como la necesidad de justificar la equidistancia de cualquier punto entre B y C. La justificación epistemológica	Como se mencionó en el Ec recurren a la definición de mediatriz. Pero al no desarrollarse la incertidumbre como se tenía prevista, no hay evidencia de experimentación de necesidad intelectual y menos aún de justificación epistemológica.	

esperábamos se manifestase en la argumentación y satisfacción con la respuesta establecida.

A 5.3 CONCLUSIONES DE LOS ENFOQUES EN LOS DOS CICLOS PARA LA TAREA CINCO

A 5.3.1 Enfoque en el contenido (Ec).

De acuerdo con lo previsto en la THA en la discusión en los grupos se esperaba que hicieran uso de la definición de mediatriz, del Teorema de la mediatriz y que la tarea sirviese para introducir el Teorema interestancia-equidistancia. El uso de la definición de mediatriz se verifica con facilidad en los dos ciclos y es digamos el menos relevante en términos de contenido. La introducción del Teorema interestancia-equidistancia se cumple en los dos ciclos, producto de la acción de la profesora más que como expresión de una necesidad por parte de los estudiantes.

A 5.3.2 Enfoque en la mediación (Em).

Lo previsto en la THA respecto al papel de Cabri 3D no se verificó, solamente en uno de los grupos en el ciclo uno hizo la exploración que se esperaba. Fue quizás el mayor fallo en el diseño de esta tarea. La mediación prevista para ser desarrollada por la profesora se cumplió y en buena medida suplió lo no realizado por los grupos en la exploración.

A 5.3.3 Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei).

La previsión en la THA que en la discusión en los grupos se produjese la consideración fuera del plano para la situación planteada se presentó en uno de los dos grupos en cada uno de los ciclos. Pero, como se señaló en el Em lo previsto respecto a la generación de incertidumbre con la exploración del archivo preparado en Cabri 3D, no funcionó pues diferentes factores impidieron que se desarrollará plenamente esa exploración.

A 5.3.4 Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En).

Dado que el diseño falló en la generación de incertidumbre en los dos ciclos, no se evidenció en ninguno de los dos la producción de necesidad intelectual.

ANEXO 6

TAREA 6

A6 ANÁLISIS DE LA TAREA 6

La tarea seis se aplicó en los ciclos dos y tres. El enunciado se modificó de un ciclo al otro.

A 6.1 TAREA 6, CICLO 2

A 6.1.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

Meta de aprendizaje

Esbozar los elementos teóricos esenciales para demostrar la perpendicularidad de dos rectas en un plano distinto al plano dado a partir de la perpendicularidad entre dos rectas en un plano dado y entre una recta ese plano.

Tarea

Enunciado

Dados un plano α y un segmento AB contenido en α. Sean las rectas *m* y *n* tales que *m* está contenida en α, A es un punto de *m* y *m* es perpendicular a AB, *n* es perpendicular a α por B.

a) ¿Son alabeadas *m* y *n*? Justifique su respuesta.

b) ¿Existe un punto C de n tal que el segmento CA es perpendicular a γ, siendo γ un plano que contiene a *m*? Justifique su respuesta.

Instrucciones adicionales

Los estudiantes recibieron la hoja de trabajo con el enunciado de la tarea, el material (palos, plastilina y cartón) para representación del modelo físico y los computadores con Cabri 3D. El diseño de esta tarea implica que su exploración necesariamente sea desarrollada con Cabri 3D.

Aunque en el enunciado se formulan dos preguntas acá nos concentramos en la pregunta b) que es la que consideramos relevante para el análisis por ser la pregunta con la cual se esperaba generar incertidumbre.

Intervenciones previstas

El trabajo se desarrollará primero en su etapa de discusión en grupos, en esta etapa la profesora y el investigador interactuarán con los grupos de trabajo mientras estos desarrollan su exploración. Posteriormente, la profesora dirigirá una interacción con la clase al finalizar el momento del trabajo en grupos a partir de los resultados consignados por ellos en las hojas de trabajo.

Hipótesis acerca del aprendizaje

Enfoque en el contenido (Ec). Como la meta de esta tarea es que los estudiantes esbocen las ideas teóricas que permiten demostrar que la recta *m* y la recta AC son perpendiculares (figura 6.20). Nuestra previsión es que los estudiantes supondrán la necesidad del Teorema perpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano, que aún no ha sido introducido en el sistema teórico de referencia. Adicionalmente, consideramos que serán mencionados en el marco del estudio de la situación elementos del sistema teórico de referencia como: Definición de recta perpendicular a plano, Definición de rectas perpendiculares y el Teorema fundamental de la perpendicularidad.

Enfoque en la mediación (Em). El desarrollo de esta tarea se hace esencialmente con Cabri 3D. De acuerdo con lo que se solicita sea estudiado esperamos que las herramientas de Cabri 3D que cumplirán un papel relevante son el arrastre (el punto C sobre la recta *n*) y la medida de ángulo (en especial el ángulo determinado por las rectas *m* y AC). Una relación que esperamos sea captada por los estudiantes es que al obtener la representación en Cabri 3D de un plano perpendicular (γ en el enunciado) a la recta CA, la recta *m* queda siempre contenida en ese plano perpendicular (figura 6.17). Esperamos que los estudiantes midan el ángulo determinado por las rectas *m* y AC y que perciban que al arrastrar el punto C sobre la recta *n* el ángulo es recto y así se mantiene. Estos hallazgos se harán evidente en la interacción en los grupos.

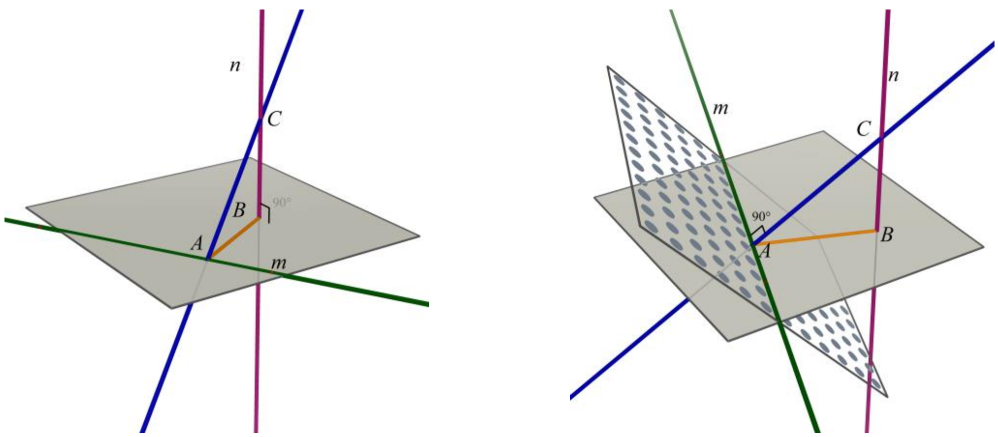


Figura 6.20. A la izquierda las condiciones dadas en el enunciado de la tarea. A la derecha con el plano γ perpendicular a la recta AC.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei). Se tiene previsto que en la interacción en los grupos los estudiantes se percaten que existe una relación de perpendicularidad entre las rectas *m* y AC y que esta relación no está dada en las condiciones de la construcción, sino que es resultado de estas. Esperamos que este hallazgo resulte sorpresivo para los estudiantes generando en ellos incertidumbre que movilice su interés por buscar la justificación de esa relación de perpendicularidad.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En). Se tiene previsto que la incertidumbre generada por el hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas *m* y AC motive la búsqueda de un soporte teórico de tal perpendicularidad. Desde nuestra perspectiva la argumentación productiva expresada alrededor de ese soporte teórico deberá llevar a los estudiantes a proponer una construcción auxiliar que en este caso será una recta *l* paralela a *n* por el punto A y por tanto perpendicular al plano. La anterior construcción es la requerida para usar el Teorema perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano en esta justificación. Esperamos que este planteamiento proporcionará una explicación satisfactoria de la perpendicularidad hallada que sea expresión de justificación epistemológica.

A 6.1.2 Interacciones analizadas.

Como se mencionó en el capítulo de Metodología para las tareas del bloque dos se recogió información en los ciclos dos y tres. Para la tarea que estamos reportando en el ciclo dos se registraron tres grupos de trabajo: El grupo de trabajo uno (G1), el grupo de trabajo dos (G2) y el grupo de trabajo tres (G3), la interacción de la profesora con toda la clase y una conversación del investigador con toda la clase. Se presentan a continuación esas interacciones.

En primer lugar, la interacción del grupo uno.

Tarea 6, ciclo 2, grupo 1. T6C2G1: Transcripción		Análisis
En esta ocasión Carlos trabajó con María y Maite porque Jimmy y Juan no asistieron. Luego de discutir la solución a la parte a) hacen la construcción para la parte b) para obtener un plano perpendicular a la recta AC siguen un plan propuesto por Carlos: Construir el plano que contiene a *m* y a la recta AC, una recta (*l*) perpendicular a ese plano por A y el plano determinado por esa perpendicular y m. Ese plano les da perpendicular a la recta AC, pero no se han percatado que esto sucede gracias a que la recta AC siempre es perpendicular a la recta m, lo cual no está dado en las condiciones del enunciado.		
100 Carlos:	Listo, listo es de 90 [el ángulo entre el plano determinado por *l* y *m* y la recta AC]. Entonces si una recta es perpendicular a dos rectas del plano es perpendicular al plano, eso es por el teorema fundamental.	Ec: Carlos plantea acá el Teorema Fundamental de la Perpendicularidad para justificar porque el plano es perpendicular a la recta. Aunque da por sentada la perpendicularidad de la recta AC y la recta m.
101 Investigador:	¿Pero ustedes si se dan cuenta el orden en el que hicieron las cosas? Ustedes hicieron el plano perpendicular o sea que ese igual me va a dar perpendicular.	
102 Carlos:	Si.	Ei: El investigador formula la pregunta para que centren su atención a la perpendicularidad de las rectas AC y m que resulta de la construcción y no se dio desde un principio
103 Investigador:	Pero *m* estaba dada ¿No?	
104 Carlos:	Si [María asiente y Maite examina la construcción].	

	 Y *m* es perpendicular a…No, pero *m* no es perpendicular a AC.	
105 Investigador:	¿*m* no es perpendicular a AC? [Carlos niega con la cabeza] ¿No lo es?	Ei: En este momento hay una auténtica expresión de sorpresa por parte de Carlos cuando expresa “ve tan raro”, pues hasta el momento no habían caído en cuenta que la construcción no implica la perpendicularidad de las rectas AC y m.
106 María:	Ahí, si [Observando la pantalla] 	
107 Carlos:	Ah bueno, ahí en ese sí, pero cuando lo creamos no, pero si se da, ve tan raro. Si, si porque nosotros hicimos al segmento AB… 	
108 María:	Si porque nosotros hicimos cualquier recta.	Ei: La reacción de Maite de sorpresa se expresa con la desconfianza respecto al resultado y por esa razón rehace la construcción en Cabri 3D para constatar que las rectas AC y m son perpendiculares.
109 Investigador:	¿Qué hace Maite la vuelve a hacer? [Maite y María trabajan en el computador, Carlos en la hoja].	
110 Maite:	Si, a ver si no queda perpend… [ríen] 	

[…]		
116 Maite:	Miremos la hoja. ¿Existe un punto C de *n* tal que CA perpendicular a gama [leen], siendo… ¿Ese es gamma no? [Continúa leyendo] gamma un plano que contiene a *m*?	
117 María:	Pero dice…	Ei: Responden a la pregunta formulada respecto a la condición del punto C
118 Maite:	Cualquiera.	
119 María:	Un C cualquiera	
120 Carlos:	Que pertenezca a *n*, que pertenezca a *n*, esa es la única condición	
[…]		
133 Profesora:	¿Qué están haciendo ahí? Midieron ese ángulo ¿Por qué?	Ei: En la conversación la profesora trata de dirigir la atención de Maite hacia la característica de C que garantizan que la recta m esté en ese plano perpendicular que es lo que se pregunta.
134 Maite:	Comprobando que la recta AC siempre es perpendicular a *m*.	
135 Profesora:	Siempre quiere decir ¿Qué? ¿Por qué me dices siempre? ¿Por qué usas la palabra siempre?	
136 Maite:	Bueno, para mí es que [inaudible lo que sigue].	
137 Profesora:	Ah ya, ya, ya entendí ¿Y es cierto? ¿Y eso cómo ayuda para lo que estamos preguntando?	
138 Maite:	Por ejemplo, yo puedo hacer el plano que contenga a la recta AC y a la recta *m*, cómo AC interseca a *m*, si dos rectas se intersecan determinan un plano.	
139 Profesora:	De acuerdo.	
140 Maite:	Y digamos que existe un plano que cumple las condiciones que en este momento necesitamos.	
141 Profesora:	Si ¿Cumple las condiciones?	
142 Maite:	No, no, el plano.	
143 Profesora:	Es decir, porque tú puedes hacer ese plano, pero ese es el plano que estoy buscando. Además, yo no estoy buscando un plano realmente, estoy buscando es al punto C.	
144 Maite:	Al punto C.	
145 Profesora:	Pero porque sé que eso me sirve para lo que, para decir oiga si ese plano si tiene que ver.	En: Carlos plantea lo que se requiere para demostrar que la recta m queda contenida en el plano perpendicular: la aplicación del Teorema Fundamental de la
146 Carlos:	Pues lo que yo les decía a ellas ahorita es que, por el Teorema fundamental, ya tengo una recta que es	

	perpendicular, si yo logro conseguir otra recta, ese plano que determinan sería perpendicular [La profesora asiente].	perpendicularidad y para que este se cumpla menciona "conseguir otra recta" entonces establece lo relevante a demostrar la perpendicularidad de las rectas m y AC.
147 Profesora:	Siempre y cuando puedan mostrar que esa recta si es perpendicular.	
148 Carlos:	Exactamente [los tres ríen]	
[…]		
181 Investigador:	Pero una pregunta, una pregunta antes. Usted empezó con la frase: Ya tenemos que AC es perpendicular a *m*, ya tenemos ¿Por qué?	
182 Carlos:	Por lo que, nos preguntó el profesor ahorita, entonces como *m* es perpendicular al segmento AB y AB a su vez es perpendicular a la recta AC, entonces podemos generar ahí que por esa perpendicularidad que sean mediatrices, por tener puntos medios…	
183 Investigador:	*m* les quedó perpendicular a AC, estaba dado que *m* es perpendicular a AB y que AB era perpendicular a *m*, de ahí ¿Qué se sigue?	
184 Carlos:	Entonces por el teorema que nos tocó demostrar en la tarea, el de la intersección y pues en el espacio de los triángulos, esos triángulos siempre van a ser congruentes.	En: Carlos plantea un esbozo de demostración de la perpendicularidad de la recta m y la recta AB usando mediatrices y triángulos congruentes. Diferente de la previsión que teníamos en la THA.
185 Investigador:	¿Los triángulos cuáles?	
186 Carlos:	J, A y otro punto tal que este sea el punto medio de X y J [señala sobre la pantalla].	
187 Investigador:	O sea, como que AB fuese mediatriz de un segmento en *m*.	
188 Carlos:	Exactamente.	
189 Investigador:	AB recta, mediatriz de un segmento en m.	
190 Carlos:	Si y mediatriz del segmento en *n*, entonces ahí genero los triángulos congruentes, por lo tanto, por el corolario que tengo que dos, cuando tengo dos puntos que equidisten de uno, entonces es mediatriz.	

A continuación, la interacción en el grupo dos.

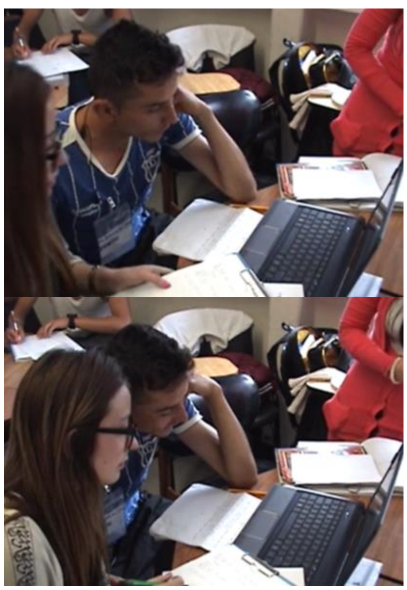
Tarea 6, ciclo 2, grupo 2. T6C2G2: Transcripción		Análisis
125 Jair:	¿Qué dice? ¿Qué dice? [pregunta a John por el enunciado de la parte b)], existe C en n, de manera que la recta AC sea perpendicular a un plano, sea este el plano que contiene a *m*.	Ei: Esta es la primera consideración de la solución a la parte b) del enunciado. Se percibe que Jair tiene una perspectiva más clara de la situación al ver que no necesariamente *m* va a quedar contenida en el plano perpendicular al segmento AC y que considera que hay alguna posición especial de C para que esto suceda pues dice "cuándo ésta es perpendicular a *m*"
126 John:	Si por teorema de existencia de la perpendicular por un punto externo.	
127 Jair:	Y ese plano contiene a *m*, esto es *m* ¿Sí o no?	
128 John:	Ajá.	

129 Sergio:	Por definición de coplanar [está trabajando en la demostración de la primera parte].	refiriéndose a la recta AC.
130 Jair:	Ah, pero ese plano todavía no se puede generar [está leyendo la segunda parte del enunciado y tratando de representar en el computador la situación].	
131 John:	Si ¿No? Ah no, mentiras	
132 Jair:	Es que esta recta, tiene que ser perpendicular a un plano que contenga a *m*. Toca determinar cuándo ésta es perpendicular a *m* [no ha representado aún el plano perpendicular] ¿En qué plano, mejor dicho, esa recta es perpendicular a *m*? [representa un plano que contiene a *m*].	
133 John:	Siendo alfa un plano que contiene *m*, o sea que existiría otro plano, hay otro plano, además, me equivoqué. Tengo que hacer otro plano, el plano verde no es necesario.	Ei: En este momento Jair expresa su sorpresa con el hallazgo de la perpendicularidad de las rectas *m* y AC.
134 Jair:	¡Pero vea! Que esto de una vez dio perpendicular.	
[…]		
214 Jair:	Si, ¿Por qué esta recta dio perpendicular a *m*? [señala *m* y AC en la pantalla]. Eso no tenemos cómo garantizar que siempre va a ser perpendicular.	
215 John:	¿No tenemos cómo garantizarlo?	En: En este punto en el cual interactúan con la profesora se plantean como justificar la perpendicularidad encontrada, por sugerencia de la profesora incluso emplean la expresión “demostrarlo”.
216 Sergio:	O sea que en pocas palabras está diciendo que ésta recta también es perpendicular a ésta [señala en la pantalla al parecer a las rectas AC y *m*]	
217 Jair:	No, no, no. Pero entonces vamos a encontrar es esto. Ya tenemos una.	
218 John:	Si, pero no tenemos cómo decir… o cómo decimos que la recta AC es perpendicular a *m*.	Ei: Jair reitera su hallazgo que le ha resultado sorpresivo cuando dice “siempre da recto”.
219 Jair:	Exacto. Si, pero es que siempre da recto.	
220 John:	Profe ¿Cómo decimos que la recta AC es perpendicular a *m*?	
221 Profesora:	¿Cómo lo dicen?, Pues diciéndolo [ríe]. ¿Cómo lo demuestran?, Ya es otra cosa.	
222 Jair:	Si cómo lo demuestran…	
223 John:	Bueno, ¿Cómo lo demostramos?	
224 Profesora:	Ahh, ahí está, ahí está.	
225 Jair:	Porque siempre da recto, si pilla.	
[…]		
247 Jair:	¿Por qué esta recta resulta ser perpendicular a ésta?... Ah bueno, bueno, podemos empezar por ahí. La otra forma de demostrar perpendicularidad es con lo de la mediatriz. Si podemos demostrar que hay un punto de esa recta que equidista ya es la mediatriz, por ende, es perpendicular.	En: Una vez se han orientado en demostrar la perpendicularidad de las rectas AC y m prueban hacerlo usando la mediatriz.
248 Sergio:	Pero ojo, sería la mediatriz de AC, o sea un punto por acá abajo porque es que ésta es la perpendicular.	

[…]		
280 Jair:	Si uno demuestra que es mediatriz ya demostró que es perpendicular.	
[…]		
296 Sergio:	Ahora, si decimos que ésta ya es perpendicular a ésta por este punto ¿Cierto?, si yo trazo, lo que yo le decía aquí, trazo un X tal que XA es igual a AB, entonces lo que supuestamente dijimos es que CA es mediatriz del segmento XB, pero eso es mentira. ¿Por qué? Porque si trazamos los triángulos, esta es la perpendicular y esta distancia puede tener el valor de…	
[…]		
338 Jair:	¿Porque cómo decimos que es perpendicular a *m*?	En: En este momento intentan otro camino para demostrar la perpendicularidad usando triángulos congruentes.
339 John:	Por triángulos ¿No?	
340 Jair:	¿Cuáles triángulos?	
341 John:	Pues el CXA…	

A continuación, la interacción del tercer grupo.

Tarea 6, ciclo 2, grupo 3. T6C2G3: Transcripción		Análisis
402 Profesora:	Exacto, se necesitaría eso, yo no estoy interesada en el plano, yo estoy interesada en saber si hay un punto aquí (señala en la pantalla) que me sirva, ahora el problema de ustedes es, si lo hay ¿Cuántos hay?	Ei: En este momento de la discusión Eric expresa sorpresa con el hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas AC y m. En: Se plantea Eric el cuestionamiento acerca de por qué son perpendiculares las rectas.
403 Eric:	Infinitos	
404 Profesora:	¿Por qué?	
405 Eric:	Porque siempre están en cualquier sitio e igual forma una perpendicular.	
405 Profesora:	Siempre eso va a ser perpendicular ¿Por qué? [se retira de la mesa de trabajo del grupo].	
406 Paula:	A ver ¿Qué hiciste?	
407 Eric:	Tengo los mismos datos, creé la recta y la recta me quedó perpendicular a…	
408 Paula:	¿Y por qué te quedó perpendicular?	
409 Eric:	No sé [se ríe].	
410 Paula:	Pero ¿Cómo creaste ese punto C?	
411 Eric:	Normal, tenía la recta y lo puse ahí, pues eso dice ahí, un punto C que pertenece a n.	
[…]		
417 Paula:	Entonces, si existe un punto C, tal que CA es perpendicular al plano Y, que contiene a *m*.	
418 Eric:	Pero porqué es perpendicular [Se dice a sí mismo y se	

	toca la barbilla retirándose y acercándose a la pantalla].	
		
419 Paula:	La recta CA es perpendicular al plano ¿Cómo se dice? Que contiene a…siendo gama un plano que contiene a *m*, porque ¿Por qué? Porque si sacamos una perpendicular por el punto A…saquemos una, siempre podemos sacar una recta perpendicular a A ¿Cierto? Como existen infinitas rectas, sacamos una a este plano ¿Cierto? Entonces ¿Cómo garantizamos que va a intersecar en C?	
420 Eric:	No entiendo por qué queda perpendicular [se lleva la mano a la cara] mágicamente quedó, pero no sé por qué [se ríe].	
		
[…]		
421 Paula:	¡Ah! Eso no nos lo dan, es a lo que nosotros tenemos que llegar.	En: Identifican lo que deben demostrar e inician el planteamiento de ideas para llegar a esa demostración.
422 Eric:	El punto nos lo dan y la recta nos la dan.	
423 Paula:	Pero no que es perpendicular.	
424 Eric:	Exactamente tengo que deducir porqué es perpendicular y por eso yo había creado el plano de una forma y no me lo valió.	

[…]		
444 Eric:	Si se acuerda que nosotros teníamos un teorema que todas las rectas perpendiculares. Tenemos un segmento cualquiera y todas las rectas perpendiculares a ese segmento por el punto medio, son mediatrices de ese segmento.	

A continuación, la interacción de la profesora con toda la clase.

Tarea 6, ciclo 2, profesora. T6C2P: Transcripción		Análisis
1 Profesora:	Hay una cosa bastante interesante de este problema y es que se les pide que determinen para qué punto C existe un plano que contenga a *m*, es muy importante, ¿Para qué punto C existe un plano que contenga a *m*? Hay una cosa bastante interesante de este problema y es que se les pide que determinen para qué punto C existe un plano que contenga a *m*, es muy importante, ¿Para qué punto C existe un plano que contenga a *m*?, Y haga que la recta CA sea perpendicular a ese plano, entonces uno tiene que decir: un minuto, si el plano va a contener a *m* ¿Qué tiene que decir uno?, Si la recta CA va ser perpendicular a ese plano y ese plano tiene que contener a *m* ¿Entonces qué tiene que ser cierto?	Em: La profesora indaga a la clase para determinar si establecieron la característica más relevante en la exploración de la tarea.
2 Varios:	Las rectas tienen que ser perpendiculares	Ei: Los estudiantes responden identificando la perpendicularidad deseada de las rectas.
3 Profesora:	Tienen que ser perpendiculares *m* y la recta CA. No puede existir un plano que contenga a *m*, tal que la recta esta sea perpendicular y no lo es a *m*, yo no les pedía y les recalqué muchísimo. Yo no les estaba pidiendo que me encontraran el plano, sino el punto, ¡El punto! Que me iba a permitir encontrar el plano que debía tener una condición muy especial: tenía que contener a *m*. Y la única manera en que ese plano podía contener a *m*, por eso preguntaba el profesor ¿Ustedes no se sorprendieron?, que cuando construyeron el plano, que no era algo que yo estaba solicitando. No se sorprendieron, no analizaron que, al construir con geometría, el plano perpendicular a la recta CA, que contuviera al punto A, *m* quedaba dentro del plano. Si me entienden la… lo que hice fue torcer un poco las cosas, para que ustedes tuvieran que analizar que lo que me está pidiendo la profesora me exige que necesariamente debo tener la perpendicularidad entre esas dos rectas, porque si no es imposible que pueda encontrar un plano. Entonces lo importante es saber por qué ¿Por qué esa recta es perpendicular a *m*? si nosotros no hicimos una construcción que uno cree, tenga que ver con esa situación, que obligue a que esto suceda y porqué sucede para todo punto C. Eso es lo que lo sorprende a uno, ¿Por qué sale gratuitamente esa perpendicularidad?, Entonces viene la demostración. Pero antes de hablar de esa demostración teníamos que haber analizado la situación y se preguntaba si las rectas eran alabeadas ¿Cierto?, las rectas *m* y *n*. Y uno de ustedes me respondieron pues sí, cuando le dimos la	En: La profesora dirige ahora la discusión al aspecto de la demostración de la perpendicularidad de las dos rectas.

	vuelta a la bola de cristal nos dimos cuenta de que, si son alabeadas, o sea que lo veíamos ¿Pero teóricamente porqué lo son?	

A continuación, la interacción del investigador con toda la clase.

Tarea 6, ciclo 2, investigador. T6C2I: Transcripción		Análisis
Investigador:	Es una pregunta que les tengo a todo el grupo y después a algunos de ustedes como la vez anterior. La clase pasada hicieron esta construcción. Hicieron esta construcción según las instrucciones de la hoja de trabajo que les dio la profesora.  La pregunta para todo el grupo inicialmente es si en esa configuración que les dio la profe inicial, ¿Encontraron algún resultado inesperado? Qué ustedes no se esperaban encontrar cuando hicieron la construcción o cuando leyeron el enunciado. En esa configuración y en el examen de la situación que les pedía la profesora que era: determinar si existía un punto C tal que CA fuera perpendicular a un plano que contuviese a m.	
Camilo:	Pues lo único raro o no raro, sino que, cualquier punto de la recta iba a formar un ángulo recto. Cualquier punto que cogiera.	Ei: Los estudiantes responden que si resultó sorpresivo el resultado de la perpendicularidad de las dos rectas.
Profesora:	¿No lo esperabas?	
Camilo:	Tal vez por la visualización, no con la recta, sino de ese triángulo que se forma ahí, sería como lo único raro.	
Investigador:	Bueno ahora les voy a mostrar de los grupos que registré, les voy a preguntar puntualmente a algunos de ustedes. [Risas].	
Profesora:	Por eso tienen que hablar los que no salieron ¡Ya!, ¿Les sorprendió o no les sorprendió algo?	
Investigador:	Ahí, Carlos como que se sorprende un poco y Maite lo que hizo fue que volvió e hizo todo [se refiere a la construcción en Cabri 3D]. El audio no me funciona bien, pero el volumen ahí no es tan relevante. Lo que pasa es que yo le pregunté a Maite que qué está haciendo y ella me dijo que volvió e hizo todo. Entonces la pregunta es para Carlos y para Maite en ese momento. ¿Por qué Carlos se quedó pensativo y porqué Maite borró y volvió a hacer todo?	

Carlos: Lo que pasa es que, efectivamente lo que nosotros hicimos al principio es…bueno yo ya sabía que intuitivamente la recta AC, más que el segmento, la recta AC era perpendicular al plano que contenía a *m*, entonces yo lo primero que les dije es: tenemos que hacer un plano porque ya sabemos que en un plano podemos generar una recta perpendicular a él ¿Si?, Digamos que ya lo asumí, entonces cuando la profesora llegó a nuestro grupo me escuchó y me dijo: ¿Seguro que ya tenemos eso?, Entonces fue cuando yo me quede ahí pensando y me dije: no lo tenemos, pero pues a eso es a lo que vamos a llegar, entonces eso era lo que yo estaba haciendo ahí en ese momento, ese era el asombro.

Investigador: ¿Y Maite porqué volvió a hacer la construcción?

Maite: Es que, bueno tenía una confusión respecto al plano que contenía a la recta *m*, entonces hubo un momento en que nos preguntaste que comprobáramos si la recta AC era perpendicular a la recta *m*, no al plano sino a la recta *m*, entonces nosotros habíamos creado otro plano, entonces tenía unas confusiones ahí y lo que hice fue volver a hacer la construcción y ya me quedó más claro.

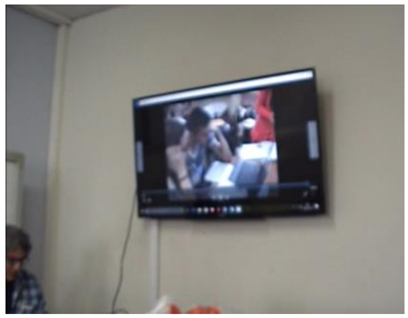
Profesora: [Dirigiéndose a Paula, porque el investigador en la pantalla ha proyectado la imagen del grupo de ella] ¿Estabas sorprendida o qué?

Paula: Si, pues es que es lo mismo de él (señala a Camilo), pero es que fue por lo del plano. Lo que pasa es que, lo que pasa es que como él fue el que hizo esa construcción (se refiere a Eric su compañero de grupo) entonces cuando nos dijo que daba noventa, nosotros le preguntamos qué porqué daba noventa, ¿Cómo hizo para que diera noventa?, entonces él dijo, puse ese punto ahí y daba noventa. Entonces como ahí hablaba sobre el plano y no sobre la recta, por eso nos sorprendió lo mismo que a…

Profesora: Camilo.

Paula: Camilo, pues que daba la perpendicular a *m*

Investigador: Si, Paula ya habló, voy a preguntarle a Eric porque él dijo…ahí están considerando la situación y es que al principio estaba sólo Eric concentrado en la construcción, ustedes estaban concentradas en la demostración y entonces ahí Eric se está riendo, no les ha confirmado a ustedes, pero en este momento, cuando él hace así, miren ahí,



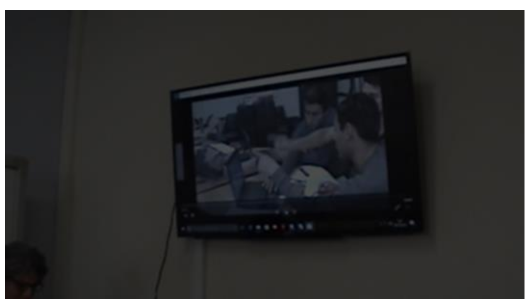
él dice “Quedó perpendicular, mágicamente quedó perpendicular pero no sé por qué” les dijo Eric ¿No cierto?

Lina: Si señor.

Investigador: ¿A qué perpendicularidad se refería?

Eric: Ah sí, a la recta *m* con el segmento CA.

Investigador: Y hay un grupo que no ha hablado, en este grupo lo que pasa es que la camarógrafa me los cogió de espaldas, pero, aquí estaban ustedes tratando de demostrar algo y Yohan se puso a considerar la situación



Ahí Jair está hablando con John y Jair ahí le dice a John que porqué quedó perpendicular, ahí él le dice: ¿Por qué queda perpendicular?, porque ustedes ya tenían el plano hecho y daban por hecho que esa perpendicularidad estaba dada cuando estaban demostrando. Yohan le pregunta a John que porqué queda perpendicular y ahí están discutiendo eso, no sé si ustedes recuerdan y me pueden decir algo.

Jair: Sí, porque la primera construcción lo que hicimos fue medir el ángulo.

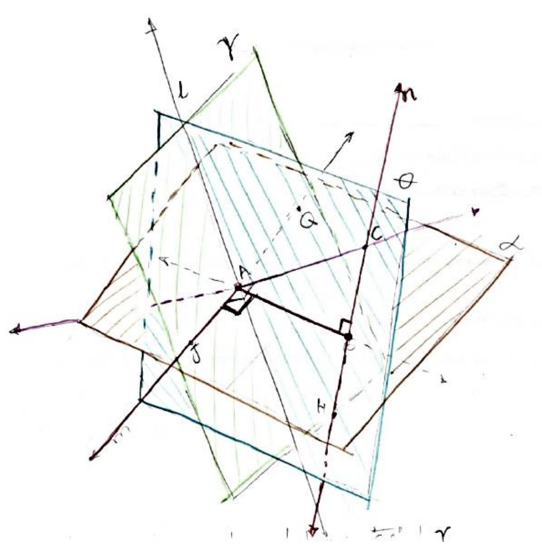
Investigador: ¿Cuál ángulo?

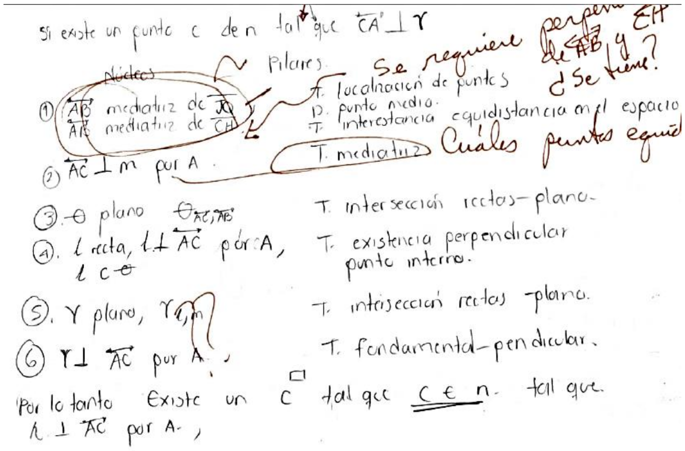
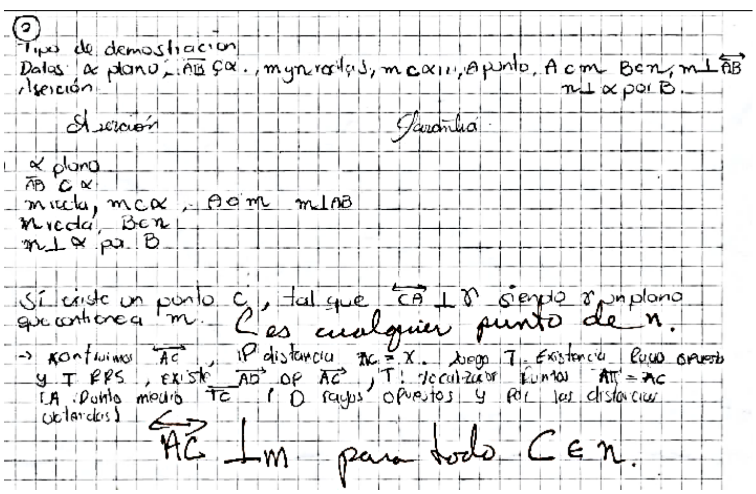
Jair: El ángulo CA y un punto en *m* y entonces daba recto y nosotros no, eso está mal y lo volvimos a hacer y otra vez daba perpendicular.

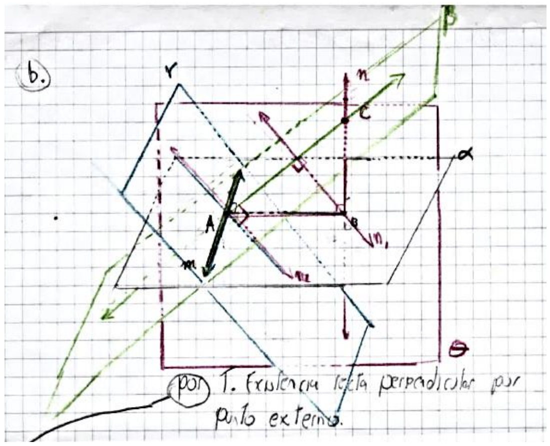
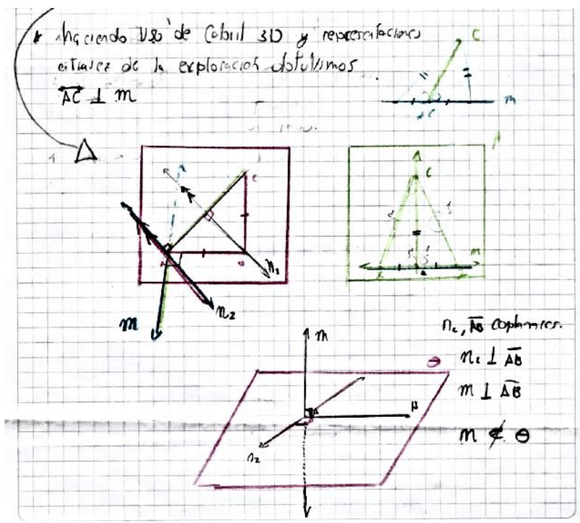
Profesora: Entonces si les sorprendieron cosas.

Jair:	Si, hicimos eso como tres veces.
Investigador:	Ah, esté ángulo ustedes lo midieron.
Jair:	Si, sí, porque queríamos empezar a arrastrar a C para que diera, pero dijimos ah no, ya dio, dio de una.
Sergio:	Queríamos hallar, así como por arrastre, ensayo y error, pero igual dio noventa, entonces dijimos ¿Por qué?
Investigador:	Ustedes creyeron que estaba mal.
Jair:	Si, nosotros dijimos, pues mucha suerte que en el primero haya dado noventa, entonces volvimos a hacerlo, pero no midiendo el ángulo sino ya encontrando el plano, entonces por eso en la segunda representación está hecho el plano.
Investigador:	Ah, hicieron el plano perpendicular.
Jair:	Si, hicimos el plano y ahí caía *m*.

A 6.1.3 Hojas de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Maite, María y Carlos. 	Ec: Mencionan varios elementos teóricos en su demostración. Parten del hecho de que esas rectas son mediatrices. Em: Hacen una representación que acompaña su demostración en la cual hacen la marca de perpendicularidad entre la recta m y la recta AC. Hacen mención en la demostración del segmento CH, en la representación no está representado el punto H.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Maite, María y Carlos.  Si existe un punto C de n tal que $\overleftrightarrow{CA} \perp \gamma$ Núcleos · Pilares · Se requiere perpendicular de $\overleftrightarrow{AB}$ y EH ¿Se tiene? ① $\overleftrightarrow{AB}$ mediatriz de $\overline{JO}$ · $\overleftrightarrow{AK}$ mediatriz de $\overline{CH}$ · T. localización de puntos · D. punto medio · T. interestancia · equidistancia en el espacio · T. mediatriz · Cuáles puntos equid ② $\overleftrightarrow{AC} \perp m$ por A ③ θ plano θ AC, AB · T. intersección rectas-plano ④ l recta, $l \perp \overleftrightarrow{AC}$ por A, $l \subset \theta$ · T. existencia perpendicular punto interno ⑤ γ plano, γ l, m · T. intersección rectas-plano ⑥ $\gamma \perp \overleftrightarrow{AC}$ por A · T. fundamental perpendicular Por lo tanto Existe un C tal que $C \in n$ tal que $n \perp \overleftrightarrow{AC}$ por A.	Ei: No es visible este enfoque acá. En: El enunciado a demostrar no corresponde con el enunciado de la tarea, pues mencionan la recta C y el enunciado menciona la recta *m*. La demostración tiene un elemento en el cual se apoya que es la recta AB como mediatriz de un segmento en la recta *m* y otra en la recta AC el cual no está justificado.
Hoja de trabajo de Eric, Paula y Lina.  ② Tipo de demostración Datos: α plano, $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$, m y n rectas, $m \subset \alpha$, A punto, $A \in m$, $B \in n$, $m \perp \overleftrightarrow{AB}$ Aserción: $n \perp \alpha$ por B. Aserción · Garantía α plano · $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ · m recta, $m \subset \alpha$, $A \in m$, $m \perp AB$ · n recta, $B \in n$ · $n \perp \alpha$ por B Sí existe un punto C, tal que $\overleftrightarrow{CA} \perp \gamma$ siendo γ un plano que contiene a m. C es cualquier punto de n. → Construimos $\overleftrightarrow{AC}$, P distancia AC = x. Luego T. Existencia ... y T. RPS, existe $\overrightarrow{AD}$ op $\overrightarrow{AC}$, T. localización puntos AT = AC. A punto medio TC. ... rayos opuestos y por las distancias (iguales) $\overleftrightarrow{AC} \perp m$ para todo $C \in n$.	Ec: Mencionan algunos elementos teóricos al parecer para tratar de usar posteriormente la definición o el teorema de la mediatriz. Em: No es visible este enfoque acá. Ei: No es visible este enfoque acá. En: Esbozan una demostración al parecer para usar mediatriz, no la desarrollan y no establecieron que lo que hay que justificar es la perpendicularidad de las rectas AC y *m*.

Hoja de trabajo de Jair, John y Sergio.	
	Ec: Mencionan el teorema de existencia de la perpendicular por un punto externo Em: Hacen una representación de la situación marcando la perpendicularidad entre las rectas *m* y AC. Y unas representaciones auxiliares al perecer relacionadas con sus ideas para la demostración. Ei: No es visible este enfoque acá. En: En la representación aparecen unas paralelas, pero no hay más información.

A 6.1.4 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que los estudiantes usaran la definición de perpendicularidad recta-plano, el Teorema Fundamental de la Perpendicularidad y que la tarea introdujese el Teorema Pperpendicular a plano- recta paralela perpendicular a plano.	En la discusión de los grupos mencionan la definición de perpendicularidad entre recta y plano, así como el Teorema Fundamental de la perpendicularidad. En ninguno de los grupos hay evidencia de la aparición de algo semejante al Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano. En los G1 y G2 que alcanzaron a plantear algunas ideas para demostrar el hallazgo de la perpendicularidad resultante, mencionaron bastante la idea de hacer de una recta mediatriz de un segmento en la otra y triángulos congruentes...	Es razonable que se presente la idea de usar mediatrices y triángulos congruentes pues ese ha sido un recurso frecuentemente utilizado para las demostraciones de perpendicularidad entre una recta y un plano en el presente curso

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Teníamos previsto que el uso de las herramientas arrastre y medida de ángulo en Cabri 3D les permitiese determinar el invariante de la perpendicularidad entre las rectas AC y *m*.	En los tres grupos de trabajo determinaron el invariante deseado, no tenemos un registro de qué tanto fueron usadas las herramientas mencionadas de Cabri 3D. Tenemos un registro de la reacción de los integrantes de los grupos al evidenciar la relación de perpendicularidad y de cómo esa fue percibida en la interacción. En el G1 hay bastante intervención de la profesora y el investigador para dirigir la atención de los estudiantes hacia esta relación. En el G2 la intervención de la profesora y el investigador no parece relevante en el resultado de captar la relación de perpendicularidad, así como en el G3.	El supuesto de la acción exploratoria autónoma por parte de los estudiantes parece tener un soporte débil. Al parecer en muchos casos es necesario intervenir en esa exploración con independencia de cómo haya sido formulado el enunciado y concebida la exploración.

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se espera que el hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas AC y *m* resulte sorpresivo e inquietante para los estudiantes siendo esta reacción la evidencia de generación de incertidumbre.	En los tres grupos de trabajo se verificó una reacción de sorpresa por al menos uno de los integrantes del grupo respecto a esa relación de perpendicularidad. En la interacción con el investigador los estudiantes confirmaron que ese resultado les resultó sorpresivo.	Este aspecto funcionó como se tenía previsto en la THA.

Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En):		
THA	TRA	Análisis
Se tenía previsto que el hallazgo de la perpendicularidad motivara la búsqueda teórica de justificación a ésta. Que se expresaran argumentos en ese sentido y que estos resultaran satisfactorios a los estudiantes.	En el G1 y en el G2 alcanzaron a discutir algunas ideas respecto a cómo justificar que las rectas son perpendiculares se orientaron a tratar de conseguir que una fuese mediatriz de un segmento en la otra, sin embargo, no finalizaron exitosamente la demostración. En el G3 no alcanzaron a considerar las ideas para justificar la perpendicularidad, pues el tiempo no les fue suficiente.	Parece verificarse lo previsto en la THA respecto a la producción de necesidad intelectual, no así respecto a la justificación epistemológica. Pues no tuvieron éxito en generar una demostración o un esquema de argumentos que les resultasen satisfactorios

A 6.1.5 Cambios en el diseño de la tarea.

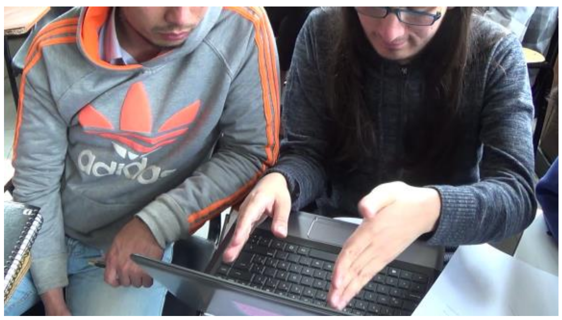
Para dar mayor cantidad de tiempo a consideración de la situación que nos interesa, y particularmente a la producción de argumentos de justificación, se omitió la parte a) en la cual se les pide sustentar porque las rectas son alabeadas. Los demás aspectos de la THA no se modificaron.

A 6.2 TAREA 6, CICLO 3

A 6.2.1 Interacciones analizadas.

Como se mencionó en el capítulo de Metodología para las tareas del bloque dos se recogió información en los ciclos dos y tres. Para la tarea que estamos reportando en el ciclo 3 se registraron dos grupos de trabajo: El grupo de trabajo uno (G1) y el grupo de trabajo dos (G2), la interacción de la profesora con toda la clase y una conversación del investigador con toda la clase. Se presentan a continuación esas interacciones.

En primer lugar, la interacción del G1.

Tarea 6, ciclo 3, grupo 1. T6C3G1: Transcripción		Análisis
25 Bayron:	Algún plano que contenga esta recta [recorre m con la palma de la mano en la pantalla].	
26 John:	Y sea perpendicular.	
27 Antonio:	Plano perpendicular a esta recta por este punto [ha tomado el ratón y está construyendo].	
[…]		
80 Byron:	Es que para cualquier plano existe un C ¿No? [Ha analizado lo que tiene en la pantalla poniendo sus manos como planos].  Sólo es trazar la perpendicular a ese plano por ese punto y se interseca acá. Mire intentemos otra cualquiera.	Ei: Han perdido de vista que el plano perpendicular debe contener a la recta m y por esa razón enuncian de esa manera que cualquier C cumple.
81 Antonio:	Para este no.	Ei: Al parecer en este momento están considerando un plano perpendicular al segmento AB por B. Y en ese punto el puto C de intersección con la recta n sería el mismo punto B, la perpendicular coincide con AB. La interpretación que ellos dieron al enunciado tuvo un giro particular.
82 Byron:	Bueno, para este también existiría B.	
83 John:	Si.	
84 Byron:	¿No?	
85 Antonio:	Que sea perpendicular a este plano.	
86 Byron:	¿Que sea perpendicular a este plano?, Ah no para ese no.	
87 John:	Si ¿No? Mire la recta ahí tiene la perpendicular.	
88 Byron:	No, porque estaría contenida en el plano. Pero ese no contiene a m [reacciona a algo que hizo en el computador Antonio]. Para este es el que no hay, señala la pantalla. Ah sí, para ese. Pero para el resto debería ¿No?	
89 Antonio:	Para el resto…pues creemos que sí.	
90 Byron:	Entonces sólo es trazar ésta [una recta perpendicular a un plano cualquiera por A], crear el punto de intersección entre la perpendicular al plano y esta recta [la recta *n*]. Entonces ahí si sería perpendicular y esa intersección sería el C, para cualquiera menos para el que está contenido.	Ei: Acá se materializa el giro de interpretación que le dieron a la situación. Hacer el plano cualquiera y trazar la perpendicular a éste por A y determinar donde interseca a n como C.

91 Antonio:	Y esa recta está contenida acá [se refiere a *m*].	Ei: El hallazgo de m contenida en el plano perpendicular no resulta sorpresivo pues de la manera como lo construyeron resulta un a consecuencia lógica y entonces no exploraron la relación de perpendicularidad entre AC y m.
92 Byron:	¿Por qué contenida? ¿Por qué? Ah porque es perpendicular a este segmento. ¿Existe un C…? [lee en la hoja]. Para todos menos para el inicial.	
93 Antonio:	Entonces digamos que para todo menos para alfa.	Ei: Describen la manera en la cual las condiciones dadas en la construcción se verificarían al hacer el plano cualquiera por A perpendicular al segmento AB.
94 John:	¿Pero no es lo que dice Bryon?, El C sería el mismo B.	
95 Byron:	No porque…	
96 John:	Porque este plano vendría a ser este mismo plano.	
97 Byron:	Si…estaría contenida, estaría contenida la recta porque estaría perpendicular, no sería perpendicular el plano sino toda la recta	
[…]		
132 Profesora:	¿Estás tratando de demostrar que qué?	
133 Byron:	Que esa perpendicular…	
134 Profesora:	Pero esa, es ¿Perpendicular a quién?	En: De acuerdo con la construcción que ellos hicieron su problema desde el punto de vista teórico no es demostrar la perpendicularidad entre las rectas AC y m como habíamos previsto en la THA, pues esta ni siquiera la percibieron. Lo que les interesa demostrar es que la recta AC interseca a la recta n.
135 Profesora:	Al plano que hallamos, a un plano cualquiera diferente a éste. Entonces estamos tratando de demostrar que la recta…	
136 Profesora:	Que la recta CA.	
137 Byron:	Que la recta CA se interseca con el punto n y ese sería el punto C.	
[…]		
163 Profesora:	Entonces ustedes están mostrando que dado cualquier plano hay un punto C no que dado un C hay un plano. Ah bueno también se puede ver así.	

A continuación, la interacción en el G2.

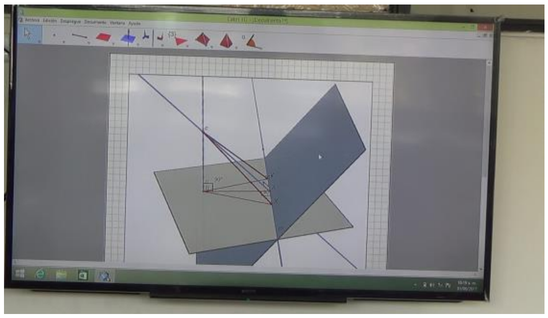
Tarea 6, ciclo 3, grupo 2. T6C3G2: Transcripción		Análisis
42 Violeta:	Sería crear otro plano perpendicular a ésta [recta AC] por A.	Ei: Han decidido hacer la construcción determinando un plano perpendicular a la recta AC por A. Para Carolina y Violeta no es relevante la cuestión de la contenencia de la recta m en ese plano perpendicular de alguna manera la dan por sentada. María si se plantea la pregunta y Carolina parece entender que es una especie de transitividad de la contenencia: si contiene un punto de la recta contiene a la recta.
43 Carolina:	También estaba pensando eso, crear un plano perpendicular a la recta CA por A.	
44 Violeta:	Por A [le da instrucciones a María que está creando el plano perpendicular que han mencionado].	
45 María:	Pero si contiene a la recta ¿No?	
46 Carolina:	Porque A pertenece a *m*.	
[…]		
50 Carolina:	Pues si creamos el plano por el punto A y A pertenece a *m*, entonces pertenece a la recta…al plano.	Ei: María hace más explícita su inquietud acerca de porque el plano contiene a la recta y ahora Carolina lanza otra explicación mencionando la intersección,
51 Violeta:	Ah sí.	

52 María:	¿Pero porque contiene a la recta?	aunque no la analiza.
53 Carolina:	Dime.	
54 Violeta:	Es como una intersección.	
55 María:	¿Por qué ese plano contiene a la recta?	
56 Carolina:	Porque es como la re… bueno.	
[…]		
67 Investigador:	¿Qué hay que mirar ahí? Si la pregunta es por C, diferentes posiciones de C para ver si se sigue cumpliendo eso.	
68 María:	¡Ay no! [mientras arrastra]. 	Em: El arrastre le permite identificar el invariante que la recta m queda contenida en el plano perpendicular con independencia de la posición de C sobre m.
69 Carolina:	No ¿Qué?	Ei: En este momento de acuerdo como se había previsto en la THA se presenta una reacción sorpresiva al hallazgo de la contenencia de la recta m en el plano perpendicular a AC.
70 María:	No, que qué brujería es esta. ¿Por qué siempre cumple?	
71 Violeta:	¿Siempre?	
72 Carolina:	¿Y uno cómo puede garantizar eso?	En: Hay una expresión de búsqueda teórica cuando se preguntan cómo garantizar la perpendicularidad que han hallado. De manera inmediata sugiere María utilizar el plano mediador.
73 María:	Y si utilizamos algo del plano mediador.	
74 Carolina:	Pero ¿Y qué tiene que ver un plano mediador?	
[…]		
112 María:	Yo digo que convirtamos ese plano en un plano mediador de algo, pero no sé de qué.	En: Están emprendiendo la demostración usando plano mediador, pero no parecen tener claro que el hecho geométrico a demostrar es la perpendicularidad de las rectas m y AC.
113 Carolina:	Del segmento	
114 María:	Segmento AB o del segmento AC y otro punto al lado.	
115 Violeta:	¿Toca que éste sea la mitad?	
116 María:	Si.	
[…]		
154 Investigador:	¿Ustedes construyeron *m* perpendicular a AC?	Em: El investigador les pregunta para orientar la búsqueda teórica al hecho de la perpendicularidad pues en la discusión de la propuesta del plano mediador han perdido de vista ese aspecto.
155 Carolina:	Si.	
156 Violeta:	Si.	
157 Investigador:	¿Sí?	
158 Carolina:	No.	
159 Investigador:	¿A AC?	
160 María:	Nooo.	

161 Carolina:	*m* perpendicular a AB.	
162 Violeta:	A AB	
163 María:	No a AC.	
164 Violeta:	O sea, lo único que toca mostrar es que esa recta es perpendicular…	En: Una vez han dirigido su atención a la demostración de la perpendicularidad, proponen ahora usar la mediatriz para tal efecto.
165 Violeta:	A un… bueno a un segmento de la recta CA donde A sea el punto medio. Transferencia de medida No espérese, espérese [le dice a Vanessa que él está señalando algo en la pantalla]. Ahí quedo la misma [está tratando de usar la herramienta transferencia de medidas].	
181 Investigador:	Si, es punto medio y con eso ¿A qué llegan? ¿Cuál es el plan?	
182 María:	Comprobar que la recta ¿Cuál era esta…m? [mira a Carolina1].	
183 Carolina:	Si.	
184 María:	m es mediatriz de ese segmento CE	

A continuación, la interacción de la profesora con toda la clase.

Tarea 6, ciclo 3, profesora. T6C3P: Transcripción		Análisis
Profesora:	Entonces ¿Cuál es en esencia…? ¿Qué es lo importante de este problema en esencia?	Em: La profesora indaga al grupo para examinar si han establecido lo esencial de la situación planteada.
Juan:	Mostrar la perpendicularidad.	
Profesora:	¿De quién?	En: Se establece el elemento a demostrar.
Juan:	De la recta y el plano.	
Santiago:	De la recta AC con la recta *m*.	
Profesora:	Eso y ¿Es perpendicular?	
Varios:	Si, siempre	
[…]		
Profesora:	Se puede… ¿Cómo se demuestra que es perpendicular? Entonces lo primero es que si la recta CA va a ser perpendicular a un plano que contiene a m tiene que ser perpendicular a… *m* ¿Cierto? Eso es lo primero, pase lo que pase tiene que ser perpendicular a m. Entonces ¿Por qué es perpendicular a *m*? Porque si dio ¿Cierto? Dio perpendicular a *m*.	En: Un estudiante de uno de los grupos que tuvo éxito en demostrar la perpendicularidad plantea la idea básica que emplearon.
Santiago:	Con una construcción auxiliar.	
Profesora:	¿Con cuál?	
Santiago:	Con triángulos congruentes.	
[…]		
Profesora:	Ah bueno, pasa. Mejor, gracias. Bueno, entonces esta es una forma [El estudiante pasa al frente con el computador	Em: La profesora invita al estudiante a presentar su justificación para toda la clase.

	con el cual ha estado trabajando su grupo].	
Santiago:	Entonces ahí tenemos X Y, como X Y está contenido en m [X y Y son puntos sobre la recta m a lado y lado del punto A y equidistantes de éste]y es perpendicular a AB, entonces los ángulos internos son rectos XAB y YAB… 	En: El estudiante plantea la manera en la cual demostraron la perpendicularidad de las rectas a AC y m. A diferencia de lo previsto en la THA no se plantearon construir la recta paralela a n por A. Construyeron triángulos congruentes y lograron demostrar la perpendicularidad deseada.
[…]		
Profesora:	Noo, sólo vas a usar los segmentos ¿No?	
Santiago:	Pues es que aquí ya después está el punto C…	
Profesora:	Si…	
Santiago:	Que puede estar en cualquiera, entonces como teníamos que BX es congruente a BY y como C está en una recta que es perpendicular al plano entonces también es perpendicular a estos dos segmentos y comparten este lado, entonces estos triángulos son congruentes. CBX con CBY y entonces ahí ya C pertenece a una de las mediatrices del segmento XY y entonces ahí ya es perpendicular.	

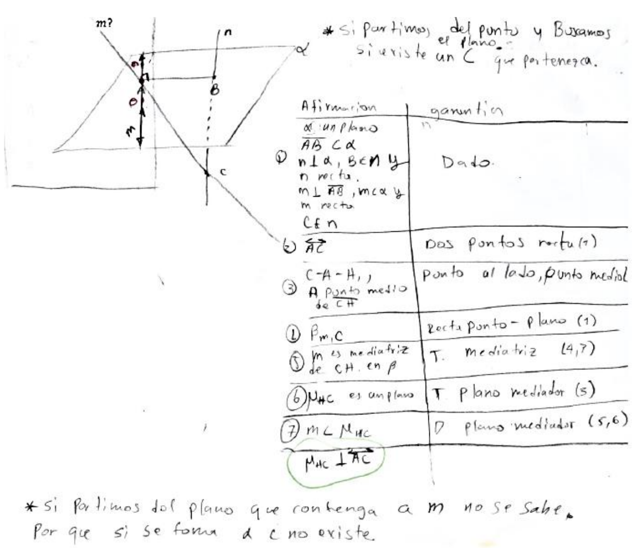
A continuación, la conversación-entrevista del investigador con la clase.

Tarea 6, ciclo 3, Investigador. T6C3I: Transcripción		Análisis
Investigador:	Este fue el último problema que hicieron. Les voy a mostrar la construcción para que se pongan en situación: era un segmento, una perpendicular al plano, una perpendicular al segmento en el plano, un punto cualquiera de la recta, la recta determinada por ese punto y el extremo del segmento y ¿Existe un punto C para el cual CA sea perpendicular a un plano que contiene a *m*? [lee la pregunta proyectada en la pantalla en la hoja de trabajo].	Ei: El Investigador quiere indagar si la producción de incertidumbre prevista en la THA y verificada en uno de los grupos de trabajo registrados se produjo en los demás estudiantes de la clase.
	La mayoría lo hicieron al revés, la exploración. Mejor dicho, al revés…de lo que está escrito, pero no es que esté mal [hace en Cabri 3D el plano perpendicular a CA por A] por lo que hicieron el plano perpendicular. La cuestión es que una vez hecho ese plano perpendicular…era para que recordaran eso. En la exploración hay una singularidad que fue lo que miramos después [pone el vídeo del grupo de Carolina, María y Violeta en la parte en la cual María pregunta ¿Pero por qué contiene a la recta?], que es ésta que señala María. El plano se hace perpendicular a la recta CA, pero no tiene ninguna relación con la recta m en apariencia. No, en	

	apariencia en la redacción del enunciado, porque si tiene esa relación…ésta [hace arrastre de C en la construcción en Cabri 3D]: el plano lo hacen perpendicular, pero conserva esta relación con la recta *m* ¿Por qué la recta queda contenida en ese plano? Ellas en la exploración en ese punto se preguntaron eso, se lo preguntó María. ¿Ustedes cuándo hicieron su exploración se preguntaron porque quedaba contenida? ¿Les pareció natural que quedara contenida? Les digo, por lo mismo, yo no tengo acceso a lo que dijo cada grupo, entonces necesito saber esa información. Ésta no fue hace un mes o mes y medio como las otras. ¿Les pareció natural que esa recta quedara ahí contenida o no?	
Adriana:	Es que nosotros hicimos el plano perpendicular a la recta CA por A entonces nosotros dijimos esa recta ya está ahí y además dijimos que esa recta, la recta CA, era perpendicular a la recta *m*. Ya lo dimos por dado, no nos pusimos a cuestionar por qué y después medimos el ángulo y nos daba 90, dijimos ya después de encontrar que hay dos rectas perpendiculares a esa o sea ya está.	Ei: Adriana expresa que a ellos el hacho no les genero inquietud al respecto, dieron por sentado que la perpendicularidad existía.
Investigador:	Pero aquí m no se construyó perpendicular a CA ¿No?	
Adriana:	No, pero nosotros lo vimos así y además como se cumple que es ángulo recto dijimos ya encontrar otra recta que sea perpendicular a esa recta ya podemos decir que la recta es perpendicular al plano.	Ei: Expresa acá que el propósito fue demostrar la perpendicularidad del plano usando el Teorema Fundamental de la Perpendicularidad. Es plausible entonces suponer que no hicieron de una vez la construcción del plano perpendicular, sino que buscaron como generarlo con rectas perpendiculares a AC.
Investigador:	Correcto. Y probaron que CA, ustedes como grupo porque yo no he visto las hojas de los grupos, ¿Probaron que CA era perpendicular a *m*? ¿Lo demostraron?	En: El investigador indaga ahora sí tuvieron éxito los demás grupos, diferentes a los registrados, en justificar la perpendicularidad de las rectas AC y m.
Profesora:	No, muy pocos lo demostraron.	
Investigador:	No, ustedes si porque ustedes pasaron [Le contesta a Santiago que levanta la mano, Adriana niega]. Le estoy preguntando porque sólo dos grupos pasaron y me da la impresión de que fueron los únicos que hicieron algo de la demostración, pero no he visto las hojas.	
Adriana:	Nosotros no.	
[…]		
Investigador:	¿Los demás se preguntaron por qué *m* les quedaba contenida ahí? ¿O no hicieron la exploración de esa manera	Ei: Ante la reiteración de la indagación del investigador uno de los estudiantes reconoce la producción de incertidumbre en su grupo.
Sebastián:	Si nos lo preguntamos, pero no lo demostramos.	
Investigador:	¿No lo demostraron? Bueno voy a continuar con el vídeo y les… [proyecta el vídeo hasta donde María expresa sorpresa]. A ellas si las sorprendió la contenencia ¿No? Las sorprendió. La cosa es: la contenencia se produce por lo que dijo Adriana, la recta es perpendicular a CA. La cuestión es: ¿Si a ustedes los motivó a buscar la explicación teórica de porque CA es perpendicular a *m*?	En: El investigador indaga nuevamente por la producción de necesidad intelectual en los grupos no registrados y que no presentaron ante la clase sus resultados.

	Ya dos grupos me dijeron lo que hicieron y otros lo presentaron que fueron ustedes y ellas. Le pregunto a los demás ¿Buscaron la explicación de porque esa perpendicularidad se producía?	
Juan:	Nosotros tratamos de ver…nosotros cuando hablamos con Darío y Adriana hablamos de si era por el teorema fundamental de la perpendicularidad, tratamos de buscar un ángulo de 90.	En: Juan reitera la explicación que ha proporcionado Adriana en su intervención.
Investigador:	¿Y lo encontraron? ¿Encontraron algo? Aparte de los dos grupos que se presentaron y los dos que ya me hablaron ¿Los otros encontraron algo para demostrar esa perpendicularidad? ¿O se enfocaron hacía esa perpendicularidad? [Se produce un silencio prolongado]. Bueno, no recuerdan	

A 6.2.2 Hojas de trabajo.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Antonio, Byron y Jeison. 	Ec: Mencionan demostración el Teorema de la mediatriz, la definición de plano mediador y el Teorema del plano mediador. Em: Hacen una representación gráfica con parte de la información que reportan en la demostración. Ei: No hay evidencia de este enfoque. En: La demostración pierde coherencia en el paso tres, pues afirman que es mediatriz la recta m del segmento HC sin haber soportado la perpendicularidad de las rectas m y AC.

Hojas de trabajo	Análisis
Hoja de trabajo de Carolina, María, y Violeta. … Si, Al hacer la construcción se toma un punto C en n, luego al crear la $\overleftrightarrow{AC}$ y el plano perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ por A, se puede notar que la recta m está contenida en ese nuevo plano. El problema que surge es demostrar que la recta m es perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$.	Ec: No hay información para hablar de este enfoque. Em: No hay información para hablar de este enfoque. Ei: Mencionan el hallazgo de la contenencia de la recta m en el plano y de su relación de perpendicularidad con AC. En: Aluden al “problema” de demostrar la perpendicularidad entre las rectas m y AC.

A 6.2.3 Comparación de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la trayectoria real de aprendizaje.

Enfoque en el contenido (Ec):		
THA	TRA	Análisis
Se esperaba que los estudiantes usaran la definición de perpendicularidad recta-plano, el Teorema Fundamental de la Perpendicularidad y que la tarea introdujese el Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano.	En la discusión de los grupos y en las hojas de trabajo de éstos mencionan la definición de mediatriz, el Teorema del plano mediador y el Teorema fundamental de la perpendicularidad. En la interacción de la profesora con toda la clase además de los anteriores mencionan el Teorema del plano mediador, la definición de plano mediador y triángulos congruentes.	Al igual que en el ciclo anterior los estudiantes se remiten a lo que ha sido más usual para demostrar la perpendicularidad: la definición y el Teorema de la mediatriz y triángulos congruentes. En ningún caso aparece por insinuación de los estudiantes el Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Teníamos previsto que el uso de las herramientas arrastre y medida de ángulo en Cabri 3D les permitiese determinar el invariante de la perpendicularidad entre las rectas AC y m.	En el caso del G1 no se verificó esta hipótesis puesto que hicieron una construcción distinta a la prevista. En el caso del G2 si se verificó, pues usaron el arrastre para comprobar la invariancia de la	El enunciado permite distintas interpretaciones respecto a la construcción en Cabri 3D sin que puedan categorizarse de incorrectas pues se atienen a lo solicitado en ese enunciado

	perpendicularidad entre las rectas AC y *m*. En la interacción con toda la clase el grupo de Adriana, Juan y Mario dejó ver que hicieron una construcción distinta a la que se tenía prevista.	

Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei):		
THA	TRA	Análisis
Se espera que el hallazgo de la perpendicularidad entre las rectas AC y m resulte sorpresivo e inquietante para los estudiantes siendo esta reacción la evidencia de generación de incertidumbre.	En el G1 no hay evidencia de sorpresa, como se mencionó hicieron una construcción distinta, primero un plano cualquiera por A que contenga a *m* y luego una recta perpendicular a éste que interseque a *m*. En el G2 si hay evidencia de reacción de sorpresa ante la perpendicularidad de las rectas AC y *m*. Asimismo en la interacción con el investigador expresaron algunos estudiantes haber experimentado una reacción sorpresiva ante ese hallazgo. Hay que decir también que en esa interacción otros expresaron no haber experimentado sorpresa.	A lo mejor lo mencionado anteriormente respecto a la construcción afectó la posibilidad de generación de incertidumbre en los estudiantes.

Enfoque en la mediación (Em):		
THA	TRA	Análisis
Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En): Se tenía previsto que el hallazgo de la perpendicularidad motivara la búsqueda teórica de justificación a ésta. Que se expresarán argumentos en ese sentido y que estos resultarán satisfactorios a los estudiantes.	En el G1 como consecuencia de su construcción se plantearon el demostrar que la recta AC si intersecaba a la recta n en un punto C. En el G2 plantearon la idea de usar la mediatriz y la congruencia, pero no tuvieron éxito con ninguna de éstas. En la interacción con la profesora Santiago presentó la demostración que lograron ellos usando triángulos congruentes y el Teorema de la mediatriz con la cual lograron probar que las rectas AC y m son perpendiculares.	Probablemente en este punto los estudiantes requieran una intervención de apoyo respecto a evocar las ideas que han usado hasta el momento para demostrar perpendicularidad en el espacio.

A 6.3 CONCLUSIONES DE LOS ENFOQUES EN LOS DOS CICLOS PARA LA TAREA 6

A 6.3.1 Enfoque en el contenido (Ec).

En la THA se tenía previsto que aparecieran algunos elementos de contenido como el Teorema fundamental de la perpendicularidad, la definición de perpendicularidad recta plano, el Teorema de la mediatriz y la definición de mediatriz los cuales fueron mencionados en los dos ciclos, consideramos que atendiendo a que son los elementos de más frecuente uso en la demostración de relaciones de perpendicularidad en este curso. El elemento de contenido previsto en la THA que no emerge en ninguno de los dos ciclos es el Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano.

A 6.3.2 Enfoque en la mediación (Em).

En la THA se tenía previsto que el arrastre les permitiese observar la invariancia de la perpendicularidad entre las rectas AC y m. En el ciclo uno se produjo la verificación de ésta por parte de los tres grupos en el ciclo dos observamos que el enunciado no orienta hacía una única construcción como lo habíamos considerado, si bien la que teníamos prevista es mayoritaria, se producen otras dentro del marco del mismo enunciado como ocurrió con el G1 en el ciclo dos y con otro de los grupos que lo expresó en la interacción con la profesora. Así que quizás sea necesario reconsiderar la formulación del enunciado.

A 6.3.3 Enfoque en la generación de incertidumbre (Ei)

La previsión en la THA que la comprobación de la relación de perpendicularidad entre las rectas generase incertidumbre en los estudiantes se verificó en muchos de estos en los dos ciclos. En los casos en los cuales no se verificó fue en aquellos que en el ciclo tres hicieron una construcción distinta a la que se esperaba. Es probable que un cambio en el enunciado que oriente la construcción contribuya a mejorar este aspecto.

A 6.3.4 Enfoque en la producción de necesidad intelectual (En).

La previsión en la THA acerca de la producción de necesidad intelectual y justificación epistemológica estaba dirigida a que los estudiantes se plantearan como manera de demostrar la necesidad de introducir un hecho geométrico: el Teorema Perpendicular a plano-recta paralela perpendicular a plano. Esto no se produjo en ninguno de los dos ciclos, así que nuestra hipótesis estaba muy distante de lo que ocurrió. Se plantearon muchas ideas alrededor de la definición y el Teorema de la mediatriz y congruencia de triángulos. Solamente en el ciclo dos presentó un grupo en la interacción con la profesora una demostración completa y satisfactoria de la perpendicularidad entre las rectas AC y m. Es probable que se requieran cambios en el diseño para potenciar en los estudiantes la posibilidad de tener éxito en la demostración.