UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

FACULTAT DE MAGISTERI

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Programa de Doctorat en Didàctiques Específiques
(Especialitat de Didàctica de les Matemàtiques)

ACERCA DE LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE PROCESOS MATEMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA USANDO LOS SÓLIDOS COMO CONTEXTO

Tesis doctoral

Presentada por:

Sergio Manuel Pérez Pozuelo

Directora:

Dra. Gregoria Guillén Soler

Tutor:

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Valencia, enero de 2021

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA **Departament de Didàctica de la Matemàtica**

Aptdo. 22.045 - 46071 Valencia, España

La Dra. Dña. Gregoria Guillén Soler, profesora del área de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y

El Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesor del área de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València,

HACEMOS CONSTAR

- Que la presente memoria, titulada *Acerca de la enseñanza/aprendizaje de procesos matemáticos en la Enseñanza Secundaria Obligatoria usando los sólidos como contexto*, ha sido realizada bajo nuestra dirección y tutela por D. Sergio Manuel Pérez Pozuelo en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor por la Universitat de València.

- Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizamos su depósito y defensa en la Universitat de València.

En Valencia, a 11 de enero de 2021.

Fdo.: Dra. Gregoria Guillén Soler

Fdo.: Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Teléfono: (34) 96 386 44 86
Fax: (34) 96 162 51 34
http://www.uv.es/didmat

A ti, papá, que te tanto te implicaste en mi formación académica y te marchaste sin avisar antes de acabar esta tesis. Allí donde estés, espero que la puedas ver. ¡Siempre estarás en mi corazón!

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a la directora de esta tesis, la doctora Gregoria Guillén Soler, por los conocimientos e ideas que me ha aportado. Gracias, Gregoria, por la disposición que has tenido en todo momento para resolver las dudas que me iban surgiendo, por estar ahí en los momentos que te necesitaba y, cómo no, por la tremenda paciencia que has tenido conmigo. Sé, que sin ti, no hubiera sido posible realizarla.

Deseo también expresar mi agradecimiento al tutor de esta tesis, Ángel Gutiérrez Rodríguez, por prestarse a ser mi tutor y atenderme en los momentos que le necesitaba.

Agradezco sinceramente a la asesora del CEFIRE de Valencia, Raquel Simó Meléndez y al asesor del CEFIRE de Torrent, Tomás Queralt Llopis, haberme dado la oportunidad de llevar a cabo los cursos para la realización de la toma de datos de esta investigación. Asimismo, al profesorado participante en los tres cursos que se llevaron a cabo en esos centros de formación, así como, al profesorado que participó en la encuesta, por su dedicación y paciencia.

Agradezco a toda mi familia el apoyo que me ha dado en todo momento, sobre todo, en los momentos que más lo necesitaba. Especialmente, agradezco a mi padre y a mi madre, el apoyo que me han dado siempre y, particularmente, en mi vida de estudiante, Siempre se implicaron en mi formación académica y me inculcaron que con constancia y esfuerzo las cosas se podían conseguir. También, a mi hermano y mi hermana por estar ahí cuando los necesitaba.

Y, cómo no, a ti, Amparo, te quiero agradecer todo el apoyo que me has prestado. Has estado en todo momento animándome, ayudándome, comprendiéndome, encargándote de Arturo… ¡Cuántos momentos has tenido que estar sola porque yo tenía que dedicarme a esta tesis! Pues bien, quiero decirte que esta tesis también es tuya, es sin lugar a duda, un esfuerzo de los dos. Y, a ese pequeño de la casa, Arturo, agradecerle que, sin llegar a comprenderlo, ha sabido entender que no le podía dedicar todo el tiempo que se merecía.

Finalmente, quiero agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado y animado a realizar esta tesis.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Diferentes autores han destacado la geometría como disciplina matemática que ofrece grandes posibilidades para estudiar los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar… utilizando diferentes situaciones de partida y experimentando con materiales adecuados (Alsina, Fotuny y Pérez, 1997; Guillén, 1991, 2004; Guillén y Puig, 2001, 2006). Se subraya que la enseñanza de la geometría permite desarrollar el razonamiento de los alumnos y que éstos avancen en la progresiva matematización a través de la práctica matemática (Guillén, 2004). También se ha destacado que es un campo interesante para realizar investigaciones (Fernández, 1994) y que tiene hoy en día una finalidad social, ocupando un lugar destacado en nuestra cultura (Pérez, 1994).

Ahora bien, el gran reto sigue siendo todavía que los nuevos enfoques que se proponen para su estudio en las investigaciones y las sugerencias que se aportan en éstas se vean reflejados en las aulas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (Pérez, 2006). Cabe pues plantearse ¿Qué geometría se enseña en la ESO? ¿Cómo se enseña? Estas cuestiones se han tomado como punto de partida para la investigación que se describe brevemente en este informe.

Esta investigación continúa estudios que se han desarrollado sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría en primaria (Figueras, Buenrostro, García, López y Sáiz, 2001; Guillén, 2006; Guillén y Figueras, 2004, 2005; Guillén, Figueras y Corberán, 2006) que han aportado información sobre la geometría que se enseña en algunas escuelas mexicanas y han determinado algunas causas que pueden explicar la situación actual de la enseñanza de la materia en México en educación primaria. Tomando como referencia estos estudios y cambiando el ámbito de trabajo, comenzamos nuestra investigación realizando un trabajo de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de Secundaria de la Comunidad Valenciana en relación con la geometría y su enseñanza para la obtención de los 12 créditos de la fase investigadora de los estudios de doctorado (Pérez, 2006). Las hipótesis que consideramos como punto de partida, adaptadas a nuestro ámbito de estudio de los trabajos señalados, que corroboramos con nuestra experimentación (Pérez, 2006; Pérez y Guillén, 2007, 2008) eran: i) los profesores no enseñan toda la geometría que hay en el currículum de la ESO; ii) hay contenidos geométricos del currículum de la ESO para el que los profesores tienen dificultades, y iii) los profesores de secundaria apenas prestan atención a la geometría del espacio. La encuesta utilizada para la obtención de datos también la elaboramos a partir de la utilizada en estos trabajos.

Dado que nuestra problemática a estudiar en Pérez (2006) era demasiado extensa al fijarnos en contenidos geométricos y de medición, decidimos continuar la investigación acotando esta problemática centrándonos en la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos relativos a la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones a partir de los sólidos. Asimismo, al considerar muy interesante obtener información sobre la problemática planteada cuestionando a los profesores mediante una encuesta y también al enfrentarles con distintos tipos de enseñanza usando diferentes recursos, decidimos desarrollar cursos como otras técnicas de obtención de datos. A diferencia de la encuesta, los cursos permiten cuatro tipos de interacción: profesor tutor-profesor participante, profesor participante-contenido, profesor participante-profesor participante, profesor participante-interfaz comunicativa, entendiendo ésta como toda la comunicación entre los profesores participantes y el profesor tutor, así como el acceso de los profesores participantes a la información relevante al curso que se realiza a través del material escrito que se aporta a los profesores participantes (McIsaac y Gunawardena, 1996, citado por Adell y Sales, 2000). Es claro que con estos tipos de interacción se favorece que los profesores expresen opiniones, conocimientos, ideas…, esto es, que aporten información sobre las problemáticas objeto de nuestro estudio; y al referirse estas a la enseñanza/aprendizaje de la geometría, resulta interesante enfrentar a los/as profesores/as participantes en el estudio con distintos tipos de enseñanza usando diferentes recursos y cuestionándoles sobre ellos.

Así pues, el trabajo que presentamos en este informe se relaciona con la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de la descripción y clasificación y el establecimiento de relaciones en geometría a partir de los sólidos en la ESO. Nos proponemos los siguientes objetivos:

Objetivo 1: Indagar acerca de las creencias y concepciones que traslucen las respuestas de los/as profesores/as de la ESO implicados en la investigación en relación con nuestra problemática de estudio.

Objetivo 2: Delimitar el conocimiento de los contenidos geométricos relativos a la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones que se refleja en las respuestas de los profesores de la ESO implicados en el estudio.

Objetivo 3: Analizar aspectos relativos a la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos implicados en la investigación que se aprecian en las respuestas de los/as profesores/as de la ESO participantes en el estudio.

Objetivo 4: Examinar el aprendizaje de los profesores participantes en el estudio sobre la problemática de la investigación que se desprende de las reflexiones que expresan sobre el curso en el que han estado implicados y de interpretar las propuestas presentadas en el curso correspondiente.

Objetivo 5: Establecer perfiles de profesores/as en relación con las concepciones de la enseñanza/aprendizaje, los conocimientos que se reflejan y la enseñanza que se imparte en las clases de la ESO de los contenidos geométricos implicados en el estudio.

El trabajo lo presentamos en este informe en cuatro capítulos:

En el capítulo 1 damos cuenta del análisis teórico que hemos realizado. A partir de esta revisión bibliográfica hemos delimitado el marco de referencia en el que se ha desarrollado el estudio, sustentamos la encuesta y cursos que hemos elaborado como instrumentos para la toma de datos, elaboramos los criterios para realizar el análisis e interpretamos los datos obtenidos. En esta revisión nos hemos centrado en trabajos de las líneas de investigación relativas a la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos a partir de los sólidos y a la formación del profesorado, complementando esta revisión con la de otros estudios que se refieren también a las problemáticas de nuestro estudio.

En el capítulo 2 hemos descrito los diferentes instrumentos de toma de datos utilizados en el estudio para obtener información sobre la enseñanza/aprendizaje en la ESO de los procesos matemáticos de descripción y clasificación a partir de los sólidos. Estos han consistido en una encuesta y tres cursos de formación de profesores diferentes. Un curso en el que el aprendizaje de profesores/as es en comunidad y en el que el profesor director actúa como gestor, otro curso de enseñanza presencial basado en la enseñanza profesor/alumno en el que el profesor director actúa como modelo, y finalmente, un curso online en el que se utiliza la Web como entorno para el aprendizaje. Asimismo, apuntamos como se realiza la toma y registro de datos, los criterios que se utilizan para el análisis de los mismos, las categorizaciones realizadas para respuestas de profesores, las características que asociamos a los perfiles de profesores que hemos delimitado y cómo se ha realizado el análisis de los datos para obtener resultados y conclusiones en relación con los diferentes objetivos del estudio.

En el capítulo 3 hemos expuesto los datos obtenidos de las transcripciones extraídas de los diferentes instrumentos de toma de datos que hemos señalado en el capítulo anterior. Estos datos los organizamos dando respuesta a cada uno de los objetivos planteados. Para ello, nos ayudamos de tablas y de parte de las plantillas que incluimos en la etapa anterior. El estudio se ha llevado a cabo con 16 profesores/as aunque, debido a los diferentes instrumentos de toma de datos utilizados, los resultados no siempre registran el total de los profesores/as que han participado en nuestro estudio.

Por último, en el capítulo 4 incluimos las conclusiones más interesantes que hemos obtenido del estudio realizado. En este capítulo damos cuenta también de las aportaciones de este trabajo, que pueden servir para mejorar la enseñanza /aprendizaje de la geometría, limitaciones del mismo y posibles líneas de investigación que le darían continuidad.

Finalizamos esta memoria con el listado de las referencias bibliográficas utilizadas y los anexos que hacen referencia a los problemas de contextos y tareas que nos han servido de soporte en nuestra investigación.

CAPÍTULO 1

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. MARCO TEÓRICO

Este capítulo incluye la revisión realizada de trabajos que constituyen los antecedentes de la investigación que presentamos en esta memoria (Guillén, Corberán, Sáiz y Figueras, 2003; Guillén y Figueras, 2004, 2005; Guillén et al., 2006; Olvera, 2013; Pérez, 2006; Pérez y Guillén, 2007, 2008) y de los estudios tomados como soporte teórico para esta investigación (Carrillo, 1998; Climent, 2002; Guillén, 1997, 2004, 2005). Desde ellos hemos conformado las características del marco teórico, fundamentado la elaboración de los instrumentos para la toma de datos y elaborado los criterios usados para el análisis de los datos obtenidos.

Los estudios los hemos agrupado en las secciones 1.1 a 1.8, distinguiendo las dos líneas de investigación que se han conjugado en este estudio (la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos relativos a los sólidos y la de formación de profesores) y las diferentes problemáticas que se tratan, que están en concordancia con los objetivos enumerados en la introducción.

La sección 1.1 centra la atención en la enumeración de las características fundamentales del marco teórico, así como en el significado de algunos términos usados. La sección 1.2 contempla diferentes estudios que destacan la importancia que tiene conocer las concepciones y creencias de los profesores sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y explican de qué forma influyen y se interrelacionan con la enseñanza (Canché, Farfán y Montiel, 2009; Carrillo, 1998; Climent, 2002; Dodera, Burroni, Lázaro y Piacentini, 2008; Flores, 1998; García, Azcárate y Moreno, 2006; Gil y Rico, 2003; Llinares, 1996; Zapata, Blanco y Contreras, 2007). Desde ellos caracterizaremos dichos términos, que son fundamentales en esta investigación.

Al encajar nuestro estudio en la línea de investigación relativa a la geometría de los sólidos, los trabajos de las secciones 1.4 a 1.6 corresponden a estudios desarrollados previamente en esta línea de investigación (Guillén, 1991, 1997, 2000, 2001, 2004, 2005). Los aspectos de los mismos que destacamos en estas secciones se explican desde las características del marco teórico que se recopilan en la sección 1.1. Así, la concepción que se tiene sobre la geometría y su enseñanza/aprendizaje y delimitar nuestro estudio a los procesos matemáticos de describir, clasificar y definir… lleva a considerar trabajos que centran la atención en el análisis de estos contenidos cuando éstos se trabajan a partir de la geometría de los sólidos (sección 1.4), o en la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de ellos (sección 1.5), incidiendo asimismo en las dificultades que afrontan algunos estudiantes en el aprendizaje de los mismos que pueden llevarles a cometer algunos errores. Y la importancia que se da al uso de contextos y diferentes enfoques para la enseñanza/aprendizaje de la geometría explica los trabajos que se incluyen en la sección 1.6. En ellos se tratan aspectos pedagógicos relativos a cómo llevar a cabo la enseñanza/aprendizaje de los contenidos delimitados a partir de situaciones y/o contextos proponiendo tareas que pueden favorecer que los estudiantes amplíen los objetos mentales que van constituyendo de objetos geométricos relativos a los sólidos y desarrollen su nivel de razonamiento. Cabe señalar que el análisis realizado de estas tareas no sólo nos ha proporcionado cuestiones clave para el desarrollo de curso, considerado como instrumento como toma de datos; también hemos extraído de ellas el listado de cuestiones que han guiado nuestro análisis de los datos obtenidos.

Situados en la línea de investigación de formación de profesores, la revisión realizada la agrupamos en tres secciones diferentes al centrar la atención en los que destacan distintos tipos de contenidos (sección 1.3), tipos de cursos (sección 1.7) y perfiles de profesores (sección 1.8). La sección 1.3 considera estudios que delimitan diferentes conocimientos y tipos de contenidos que se deben contemplar en la formación de profesores. Los que incluimos en la sección 1.7 contemplan aspectos pedagógicos que se refieren a la enseñanza de la geometría mediante diferentes tipos de cursos, con lo que con ellos fundamentaremos el diseño de los cursos que en nuestro estudio corresponden a instrumentos para la toma de datos (Adell y Sales, 2000: Bartolomé, 2002; Gallego y Martínez (2003); Moreano, Asmad, Cruz, y Cuglievan, 2008; Maldonado, 2007; Olvera, 2013; Ordoñez, 2004; Perera y Torres, 2005; Ponte, Boavida, Graça, y Abrantes, 1997). En los de la sección, 1.8 se han establecido diferentes perfiles de profesores que se pueden distinguir al considerar en qué medida se reflejan aspectos sobre la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (Carrillo, 1996, 1998; Climent, 2002; Gualdron, 2011; Fernández y Elortegui, 1996; Porlán, Rivero y Martín, 1998; Traver, Sales, Doménech y Moliner, 2005). Los aspectos establecidos por estos autores para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas y/o para diferentes áreas de las mismas los tomaremos como referentes para organizar aspectos específicos relativos a la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos.

1.1 Continuando una línea de investigación. Características fundamentales del marco teórico

Guillén (2010) subraya la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos como una línea de investigación en Educación Matemática. Resume la investigación relativa a la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, conjeturar…desde los sólidos remarcando su riqueza debido a la diversidad de familias de sólidos, las diferentes maneras de generar representaciones que se pueden utilizar como contexto y los diferentes procesos matemáticos en los que nos podemos centrar. Resultados de este trabajo se presenta en Guillén (1991, 1996, 1997, 2004, 2005) donde se lleva a cabo un análisis teórico sobre la descripción, clasificación, generalización y particularización, la caracterización de los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos y la elaboración de secuencias de actividades para el estudio de esta materia.

Esta línea de trabajo continúa con estudios posteriores en los que se ha obtenido información relacionada con la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos en los diferentes niveles educativos, dando cuenta de ello en García (2009), González (2006), Guillén y Figueras (2004, 2005), López (2009) y Pérez (2006). Nuestro trabajo se encaja especialmente en esta línea de trabajo, ampliando el estudio que se había realizado especialmente con profesores de enseñanza primaria a profesores de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Al situar nuestro estudio en la línea de investigación relativa a la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos, por un lado, heredamos las características del marco teórico usado en esta línea de investigación y, por otro, mantenemos el significado dado a términos usados desde el comienzo, que proceden de investigaciones de otros autores, y que continuamos utilizando en nuestro estudio.

El significado de los términos introducidos por Freudenthal (1983) y Vinner y Herhkowitz (Vinner, 1976; Vinner y Hershkowitz, 1983) lo aclaramos como se hace en Guillén (2010) y Guillén y Siñeriz (2014, pp. 199-200). Por un lado, aclaramos la diferencia que muestra Freudenthal entre objeto mental y concepto. Los objetos mentales son lo que se tiene en la mente de los conceptos, mientras que los conceptos son lo que se nuestra en la materia de matemáticas. Por otra parte, de Hershkowitz, (1990, pp. 81-84) adoptamos que *atributos relevantes (críticos)* son los atributos que un concepto tiene que tener para ser ejemplo del concepto y *atributos irrelevantes (no críticos)* son los que sólo poseen algunos ejemplos. Asimismo, de Hershkowitz (op. cit.) tomamos que los *ejemplos prototipo* son generalmente los ejemplos que tienen la lista de atributos "más grande", se logran primero y existen en la imagen del concepto de la mayoría de los estudiantes. Cabe mencionar que el ejemplo prototipo es la base para los juicios prototipos. Siguiendo a Hershkowitz (op. cit.) contemplamos que los no ejemplos (contraejemplos) son los que tienen algún atributo relevante pero no todos ellos. Además de Vinner y Hershkowitz (1983) obtenemos la distinción entre *ideas* que se tienen para determinadas nociones y los *conceptos*. Las *ideas* se corresponden con la definición del concepto, que se refiere a la definición verbal que se tiene para una cierta noción (si es que se tiene alguna y no siempre recoge todo lo que sabe el individuo) que no tiene por qué ser la definición matemática. Sin embargo, el concepto es el que se deriva de su definición matemática.

Las características fundamentales de nuestro marco teórico hacen referencia a creencias que se tienen sobre la geometría y/o su enseñanza a nivel escolar, al orden de aparición de los contenidos, como se organizan, el tipo razonamiento que se vehiculan y a aspectos de la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos. Se han sintetizado en diferentes trabajos (Guillén, 2010; López y Guillén, 2009). Entre ellas se destacan las siguientes:

1) Se concibe la geometría como ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y se considera que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico.

2) Su enseñanza se comienza por el espacio, por los sólidos; la geometría del plano está también presente de forma patente.

3) En la enseñanza se pretende desarrollar el razonamiento lógico (Fielker,1979). O sea, las relaciones que existen entre los contenidos geométricos del tipo clasificar, definir… Castelnuovo (1963), Freudenthal (1973) y Polya (1954) expresan cómo se plantean las definiciones, clasificaciones y pruebas.

4) Se concibe la enseñanza como actividad. Tiene como objetivo aumentar el nivel de razonamiento del estudiante; esto es, un avance en el proceso de matematización; entendiendo ésta en sentido amplio, esto es, asociada a acciones como describir, clasificar, definir, formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar.

5) La enseñanza se concibe como reinvención y no encorsetada; nos preocupa la resolución de problemas y el planteamiento de otros a partir de éstos. Entendemos el *proceso de enseñanza/aprendizaje,* como un proceso donde además de centrar la atención en el aprendizaje de contenidos matemáticos y la resolución de problemas se centra la atención en el planteamiento de los mismos.

6) Los contenidos se organizan mediante organizaciones locales y el comienzo por las tres dimensiones para ir desde ellas a menos dimensiones.

7) Entre los contenidos geométricos curriculares distinguimos conceptos, procesos de describir, clasificar, particularizar, generalizar, … y relaciones entre contenidos geométricos.

8) Se considera que se debe enseñar la geometría de los sólidos en todos los niveles y que muchos temas pueden entenderse por alumnos de diferentes niveles y a niveles diferentes. Averiguar "qué saben los estudiantes" es un objetivo prioritario.

9) Se consideran múltiples acercamientos que existen para constituir objetos mentales geométricos relativos a los sólidos. En todos ellos los contextos tienen un papel importante. Se utilizan para producir significados de los contenidos implicados (Puig y Cerdán, 1988) y para avanzar en la progresiva matematización. Las cuestiones y/o problemas se plantean en contextos cuyos fenómenos se van colocando sucesivamente en estratos que van perteneciendo a diferente nivel de abstracción; de manera que se va avanzando en la progresiva matematización. Matematizar tiene que ser entendido en un sentido muy amplio. formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar son verbos que denotan aspectos del proceso de matematización.

10) Se destacan las distintas posibilidades de diseño de un currículo de geometría que se tienen (Guillén, 2010, pp. 22-29).

Así pues, subrayamos la importancia de conocer las creencias y concepciones que tienen los profesores sobre la geometría y su enseñanza y sobre la geometría escolar. Como se hace notar en Guillén (2010, pp. 22-23) hay profesores que conciben la geometría como una materia deductiva, se centran en el uso de una terminología apropiada o en su componente estructural; esta concepción de la geometría puede llevar a la creencia de que es una parte de las matemáticas poco interesante y a la que se le ha de dedicar poco tiempo en las clases. Por otra parte, la autora señala que hay profesores que tienen la concepción de que la geometría es creativa, lógica, capaz de modelizar la realidad y llevar a cabo un simbolismo geométrico.

Sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría, Guillén (2010) señala que es una materia en la que se pueden mostrar los elementos de la geometría euclidiana en un orden intuitivo y puede aportar un conocimiento empírico de los elementos centrándose en la observación; puede ser herramienta para realizar problemas; hacer descripciones, clasificaciones, representaciones; puede desarrollar la capacidad de razonar, etc. La autora remarca que la geometría escolar se puede mostrar siguiendo, entre otras, dos vertientes. Por una parte, como una serie de hechos establecidos que se han de aprender atendiendo a los libros de texto o como un desarrollo informal de la geometría euclidiana. Por otra parte, como organizadora de las experiencias espaciales de los alumnos/as y/o como modeladora de la realidad. Los puntos 1 a 7 dan cuenta de nuestra concepción sobre la geometría escolar y su enseñanza, el orden de aparición de los contenidos que proponemos, como se organizan, el tipo razonamiento que se vehiculan…

En relación con los puntos 9 y 10, Guillén (2010) destaca la riqueza que brindan los sólidos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría para proporcionar diferentes contextos y enfoques. Destaca la actividad matemática que se puede desprender de los diferentes procedimientos que se pueden llevar a cabo para representar físicamente a los sólidos, y cómo la utilización de diferentes estrategias de construcción proporcionan situaciones para que a partir de un razonamiento inductivo y usando el conocimiento que se posee de las figuras geométricas o a partir de otro sólido se hallen las características numéricas de los sólidos, particularmente de los prismas y pirámides, relativas al número de elementos de una manera estructurada. Las relaciones que se pueden establecer entre los sólidos a partir de la generación de los sólidos juntándolos, trabajando con puzles y truncamientos o intentando convertir en rígidas algunas estructuras de sólidos sencillos, son otras situaciones de las que precisa la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de ellas. Otras situaciones que destaca para darles énfasis en la enseñanza son la reproducción en el plano de los sólidos cuando se dibujan, fotografían o se hacen sus desarrollos planos. Sugiere prestar atención a la relación que hay entre las propiedades de los sólidos y las de sus sombras cuando estas son producidas por rayos de luz que inciden sobre ellos y subraya la importancia que tiene la exploración con calidoscopios de diversos objetos o módulos de ellos yendo del 'mundo real' a las matemáticas, al estudiar la descripción de los modelos a nivel local y en términos de simetrías que comparten, para pasar después de las matemáticas al mundo real.

Además de la línea de investigación relativa a procesos matemáticos, a la que nos hemos referido en los párrafos anteriores, en nuestro trabajo hemos contemplado algunas problemáticas de la línea de investigación que Guillén (2010) asigna también a la enseñanza/aprendizaje de la geometría, relativas a la representación de los sólidos y 'el problema de visualización'. Esta autora subraya que, a pesar de esta importancia en el aprendizaje de la geometría es un hándicap en su aprendizaje. Plantea estudiar la doble relación que se establece entre el aprendizaje de contenidos geométricos y el desarrollo de las habilidades espaciales/procesos de visualización. Entre las problemáticas que propone se incluyen las que cuestionan sobre si el estudio de la geometría de los sólidos puede mejorar el desarrollo de habilidades espaciales o de si es la visualización la que constituye gran parte de la dificultad del aprendizaje de la geometría, con lo que se supone que el desarrollo de habilidades espaciales podría mejorar el aprendizaje de la geometría de los sólidos. Además, indica también como problemática de estudio si hay correspondencia entre el desarrollo de determinadas habilidades espaciales y el desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes y su manera de avanzar en la progresiva matematización, o viceversa, cuando el desarrollo de las habilidades espaciales se evalúa con instrumentos que se diseñan en el estudio y también se diseña la manera de evaluar el avance en la progresiva matematización.

También indica la cantidad de investigación que se puede llevar a cabo con la representación de los sólidos. Remarca los diferentes tipos de representaciones físicas y diferentes representaciones planas sobre las que explorar y hace notar también que se puede tratar la problemática con diferentes tipos de tareas. Subraya que el estudio puede estar enfocado para obtener información sobre las propias representaciones, el uso que se hace de ellas por parte de los estudiantes o sobre la enseñanza de las mismas y/o de contenidos curriculares. Es claro que en un mismo estudio se pueden tener varios propósitos.

Cabe aclarar que Guillén (2010) al hablar de representaciones de los sólidos distingue las representaciones físicas (objetos del entorno, modelos y armazones) y las representaciones planas y para referirse a representaciones internas habla de imágenes visuales. Los usos diferentes que pueden tener las representaciones (físicas y planas) y que esta autora enumera son:

> a) se consideran como maneras de "comunicarse" los sólidos;
> b) se usan como un contexto-situación que permite encajar las cuestiones que se plantean para describirlas, compararlas con otras representaciones (físicas y/o planas), en un intento de crear variedad de significados asociados a los conceptos que representan;
> c) se miran como representaciones del sólido que lo sustituyen; esto es, se utilizan como medio para estudiar el concepto correspondiente (éste es más abstracto). (Guillén, 2010, p. 54)

Además, indica que cuando la problemática se ve desde la resolución de problemas, las representaciones pueden considerarse para favorecer el razonamiento (éste se apoya en las representaciones) y/o para verificarlo y/o comprobarlo.

Se puede apreciar cómo en nuestro estudio se han contemplado gran parte de estos usos para los diferentes tipos de representaciones de los sólidos. Y también hemos considerado otros trabajos a los que Guillén (2010) hace referencia al considerar las representaciones como medio para realizar el trasvase de la información espacial a información plana y a la inversa. Son estudios que han delimitado dificultades que tienen los estudiantes para relacionar conceptos con diferentes representaciones de un mismo objeto geométrico y/o estas entre sí, interpretan estas dificultades, distinguen etapas que siguen los niños en el desarrollo de la comprensión del esquema de representación correspondiente y/o dan sugerencias y/o propuestas para la instrucción (Dickson, Brown y Gibson, 1984; Parzysz, 1988, 1991; Mesquita, 1998).

1.2 Sobre creencias y concepciones. Las matemáticas, la geometría, los procesos matemáticos y su enseñanza

Encontrar una definición para cada uno de estos conceptos ha sido objeto de estudio de muchos investigadores. Pero elaborar una definición para ellos no ha sido fácil, lo que ha hecho que diferentes autores destaquen aspectos diferentes y/o hablen de creencias o de sistemas de creencias. En esta sección incluimos trabajos que se han planteado la problemática de dar significado o caracterizar estos términos (apartado 1.2.1) y otros que se centran en aspectos de las creencias, concepciones, ideas que se tienen en relación con las matemáticas y su enseñanza o la geometría y su enseñanza (apartado 1.2.2). Dado que los contenidos matemáticos que consideramos en este estudio se refieren a la descripción, clasificación y definición, interesará conocer también diferentes ideas que se pueden tener sobre estos procesos matemáticos (apartado 1.2.3).

1.2.1 Buscando significado

En relación con qué son las creencias o cómo se caracterizan cabe hacer referencia al trabajo de Thompson (1992), quien siguiendo a Abelson (1979), afirma que las creencias se caracterizan por poder ser sostenidas con varios grados de convicción y no ser consensuales. Remarca no tener procedimientos para valorar su validez. En concordancia con Green (1971), apunta que las creencias se presentan en grupos formando sistemas de creencias según la forma en que se cree y no por su contenido; como Russell (1983), diferencia el contenido de la creencia de la fuerza con que se mantiene esa convicción.

Por otro lado, Pajares (1992) considera que las creencias están compuestas de tres componentes: el cognitivo que manifiesta el conocimiento, el afectivo que suscita emoción y el conductual movido por la acción) y Ponte (1994), siguiendo a este autor añade que las creencias son las verdades personales incuestionables, derivadas de la experiencia o fantasía, con un fuerte componente evaluativo y afectivo.

Asimismo, Vicente (1995) establece que las creencias son ideas u opiniones estables que poseen las personas, pero sin haber comprobado ni haberse detenido a examinar si se trata de algo fundado o sin fundamento, simplemente se limita a –creerlo– por haberlo recibido de los mayores, de sus maestros, porque –siempre se ha entendido así– o –todo el mundo lo dice– es –algo en lo que se está– y de lo que ni siquiera nos permitimos dudar. Es dar por cierto algo, tener conformidad con alguna cosa. Esta se aceptará en dependencia de la posición filosófica que adopte el individuo, de las experiencias que ha alcanzado en el intercambio social y de la formación conceptual y cultural que éste posea.

Otros autores indican a qué se atribuyen o en qué se basan, como Flores (1998) que indica que el término creencia se atribuye a una actitud y a un contenido. Por lo que respecta a la actitud se contempla en el grado probabilidad de certeza y en la predisposición a la acción, confiriéndole un carácter emotivo no explícito. En lo que concierne al contenido considera un conocimiento que no requiere formularse en términos de modelos compartidos, y que se caracteriza por no haber sido contrastado. Sin embargo, Canché, Farfán y Montiel (2009), en concordancia con Moreno y Azcárate (2003), Llinares (1991) y Pajares (1992), señalan que las creencias son formales y perdurables porque se basan en emociones, prácticas y carencia de saberes específicos del tema con el que trata.

Hay autores como Martínez (2013) que lo que remarcan es que una creencia se sostiene con otras, configurando una red que se va reajustando en la medida que los sujetos interactúan y contrastan sus visiones con la práctica.

Al centrarse en la enseñanza, autores como García, Azcárate y Moreno (2006) destacan que las creencias del profesor son un tipo de conocimiento que tiene un valor afectivo, careciendo de justificación. Comentan que están asociadas a las ideas personales, subrayando que las determinaciones que toma en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, donde influyen bastante, se basan más en las ideas afectivas y experimentadas en su trabajo como docente que en lo que propone la matemática y su didáctica. Se justifican sin rigor alguno.

Cabe señalar que la falta de definición de creencia lleva a Vila (2001) a utilizar el término «sistema de creencias». Vila (2001) a partir de Rokeach (1968), entiende como sistema de creencias como una «suma» de todas las creencias y su organización aporta «valor añadido». Asimismo, Vila (2001), teniendo en consideración a Green (1971) utiliza el término estructura del sistema de creencias como la organización que tienen las creencias de forma que el sistema de creencias experimenta cambios y reestructuraciones al comparar los individuos las evaluaciones de sus creencias con sus experiencias.

En lo que se refiere al significado que se tiene de concepción, Ponte (1994) considera que las concepciones son los marcos organizadores implícitos de conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma de afrontar las tareas. Mientras que Martínez y Gorgorió (2004) entienden por concepciones la serie de representaciones internas apeladas por un concepto, encargándose de organizar los conceptos, de naturaleza fundamentalmente cognitiva. Para Canché, Farfán y Montiel (2009) son el aspecto cognitivo, conceptual y consciente que organiza el pensamiento del individuo, que afecta y es afectado por el contexto social al que pertenece.

Si nos centramos en las concepciones de los profesores Thompson (1992) manifiesta que son una estructura que comprende creencias, significados, conceptos, proposiciones, imágenes mentales, preferencias y similares, sometidas a unas reglas. Por otra parte, otros autores también indican cómo influyen en ellos, como García, Azcárate y Moreno (2006) que señalan que son parte del conocimiento, producto del entendimiento, filtran la toma de decisiones e intervienen en los procesos de razonamiento. Cabe mencionar, que en relación con la influencia que tienen las concepciones en el comportamiento de los profesores y en el clima de la clase Zapata, Blanco y Contreras (2008), subrayan que para aprender a enseñar matemáticas se deben considerar las concepciones y conocimientos sobre cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas.

En relación con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática para Climent (2002), siguiendo a Carrillo (1996), las concepciones son el conjunto de creencias y posicionamientos que el investigador interpreta posee el individuo, a partir del análisis de sus opiniones, respuestas a preguntas sobre y su descripción de su práctica, su acción y los documentos que produce en torno a esta.

En este estudio mantenemos los significados para creencia y concepciones que ya hemos expresado en otros trabajos (Pérez y Guillén, 2007). Compartimos con Gil y Rico (2003) que las Creencias “son las verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo (Pajares, 1992). Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones (justificándolas)”. “Concepciones: los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas (Ponte, 1994). Tanto las concepciones como las creencias tienen un componente cognitivo, la distinción entre ambas reside en que las primeras son mantenidas con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar su validez, y las segundas, no (Thompson, 1992)”. Asimismo, para las concepciones en relación con las materias objeto de estudio y su enseñanza, compartimos los significados de Carrillo (1996), que ha tomado Climent (2002) y que hemos sintetizado en el párrafo anterior. En nuestro estudio hemos analizado respuestas a preguntas que se plantean en el contexto de una encuesta y de cursos taller y documentos que producen los participantes en los mismos en torno a las propuestas que se hacen en estos cursos referidas a creencias y posicionamientos relativos a la enseñanza/aprendizaje de la geometría, de los procesos matemáticos y del establecimiento de relaciones entre contenidos matemáticos.

1.2.2 Resultados sobre creencias, concepciones, en relación con la enseñanza de las matemáticas, la geometría y su enseñanza

Cabe señalar que en la sección 1.1 al señalar las características de nuestro marco teórico ya hemos indicado nuestra concepción sobre la geometría escolar y su enseñanza. Ahora bien, dado que nuestro estudio se realiza con profesores, es interesante conocer resultados que se han obtenido al respecto. Por ello, este apartado incluye estudios sobre creencias y posicionamientos referidos a la enseñanza de las matemáticas, la geometría y su enseñanza que puedan ser referentes para los posicionamientos que expresen los diferentes participantes sobre diferentes aspectos de la enseñanza de la geometría de los sólidos y su práctica.

En relación con las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, Gil y Rico (2003) presentan resultados al respecto. A partir de lo que opinan los estudiantes a profesor, estos autores concluyen que la finalidad por la que los alumnos y las alumnas reciben la enseñanza de las matemáticas es su utilidad social y su carácter formativo. Los estudiantes sostienen que el aprendizaje se produce estimulando el interés de los alumnos y, en el otro caso, el aprendizaje es resultado del ciclo explicar-trabajar-corregir-ejercitar. Asimismo, sustentan que el profesor debe buscar materiales, elaborar materiales, reflexionar sobre el proceso o innovar mediante las actividades. Cabe señalar que no detectan ninguna creencia que señale al profesor como responsable de las dificultades de esta enseñanza, sino las dificultades se atribuyen al sistema educativo; en otro, al alumno; y en un tercero, a la propia disciplina. En cuanto a la organización del conocimiento matemático detectan dos creencias, la primera se basa en un criterio cognitivo y la segunda en un criterio disciplinar. Finalmente, subrayan que el profesor percibe una necesidad de mejorar su conocimiento profesional y manifiesta una creencia sobre este punto.

Centrándonos en las creencias sobre la enseñanza de la geometría y la medición a nivel escolar cabe señalar el estudio llevado a cabo en Nayarit (México) con algunos maestros de enseñanza primaria en ejercicio, a partir de una encuesta y de un curso taller. En el estudio realizado a partir de una encuesta, Guillén, Figueras y Corberán (2004) concluyen que los maestros priorizan la medición frente a la geometría o, en todo caso, se les da la misma prioridad a ambas. El profesorado que prioriza la medición subraya que hay más situaciones en el contexto cotidiano del niño ligadas a la medida. Sin embargo, los que dan la misma importancia a ambas áreas tienen la creencia de que es muy importante la realización correcta de los dibujos de las figuras geométricas siendo la medida fundamental para conseguirlo. Asimismo, hay docentes que señalan la creencia de que en geometría es fundamental llevar a cabo las mediciones de los elementos de las figuras. A pesar de que se priorice prácticamente la medición a la geometría, los maestros participantes relacionan la geometría escolar con el entorno cotidiano, tienen en cuenta que está en el currículum de primaria y dan también importancia a que permite desarrollar procesos matemáticos.

En el estudio realizado a partir del curso-taller, Guillén y Figueras (2005) destacan que la mayoría de los docentes ven la geometría como la materia que estudia las formas: los cuerpos geométricos y las figuras planas. Además, se contempla que la geometría se enseña a partir de los contenidos que se indican en los libros de texto, los contenidos que se imparten con los recursos que se utilizan, conecta la geometría con el entorno cotidiano del alumnado, forma parte de las matemáticas escolares y describe las formas que hay en el universo. Por lo que respecta a la introducción y descripción de los conceptos geométricos se tiene la idea de que hay que introducirlos y describirlos dando una "definición" de los mismos que contenga todas las propiedades que se conocen del concepto correspondiente. Además, el estudio muestra que la enseñanza de los sólidos se hace centrando la atención en el nombre de las familias y a partir de ejemplos prototipo colocados en posición estándar. Se destaca que al profesorado le falta conectar la enseñanza de la geometría desde los objetos reales hacia la geometría contemplando también los modelos y otras representaciones de los objetos geométricos.

En este trabajo se delimitan diferentes concepciones de los docentes de enseñanza primaria participantes en el estudio. Por una parte, una concepción de la geometría que tiende a la axiomatización partiendo del plano. Por otra parte, presenta una concepción euclidiana. También encuentran otra que toma en cuenta las experiencias espaciales del niño. Finalmente, se presenta una concepción de geometría como modelización del entorno. Su elección está asociada al programa vigente que está referido a la aritmética. En este mismo trabajo se destaca que hay maestros que sienten que tienen pocos recursos para poder modificar su manera de enseñar la geometría a nivel escolar; reconocen que tienen limitaciones en relación con esta materia y sienten que les es muy difícil mejorar su formación a partir de su práctica docente porque no tienen acceso a materiales de apoyo o debido a las dificultades que presenta la materia para ellos mismos o poder hacer una trasposición de la formación que ellos reciben a sus clases de primaria.

Referido a las creencias sobre la enseñanza de la geometría y la medición con estudiantes de la ESO en nuestro estudio hemos obtenido algunos resultados previos. En Pérez y Guillén (2007, 2008), tras analizar las respuestas mediante una encuesta, se concluye que la geometría es una materia que no disgusta a los profesores pues opinan que conecta con el entorno cotidiano, con mucha utilidad práctica, que se relaciona con otras áreas del currículum y que con su estudio se desarrollan capacidades para el alumno. Ahora bien, en los cursos de la ESO, al igual que en Primaria, no se enseña toda la geometría que se propone en el currículum pues como han indicado algunos profesores encuestados se queda por impartir por falta de tiempo y además opinan que es menos importante que otras áreas de las matemáticas. Consideran que los contenidos de medición se han de priorizar frente a los relativos a los procesos matemáticos de describir, clasificar... y la enseñanza de la geometría plana se ha de anteponer a la enseñanza de la geometría sólida. Cabe destacar que la enseñanza de la geometría en la ESO se basa fundamentalmente en los libros de texto, actividades de refuerzo y ampliación, los cuadernos de ejercicios y los instrumentos de dibujo y aunque se opina que habría que mejorar la enseñanza se siente que no se tienen medios para ello. Para explicar las respuestas, los profesores que han colaborado en el estudio han hecho referencia en repetidas ocasiones a las características de la materia y a la dificultad que conlleva la enseñanza o aprendizaje de la misma.

Asimismo, en dichos estudios, en relación con la enseñanza de los contenidos geométricos y de medición, se contempla la creencia de que los contenidos que se consideran imprescindibles o importantes se han de impartir si se consideran del curso; y los que “se pueden dejar de estudiar” no se han de impartir y raramente se impartirían en la situación ideal. Además, expresan que se pueden quedar sin impartir contenidos geométricos y/o de medición curriculares, especialmente por “la falta de tiempo”. También, indican que no suelen usar diferentes representaciones físicas al enseñar geometría y que se desarrolla muy poca actividad matemática a partir de ellas. En algunos casos se especifica que no es necesario hacerlo en este nivel de la ESO y, en otros, que no se puede invertir tanto tiempo. Igualmente, se apunta que no suelen usar diferentes situaciones o contextos al enseñar geometría, ni en la introducción de conceptos ni en la resolución de problemas. Para concluir, la enseñanza de los contenidos geométricos del área y volumen se realiza a partir de métodos cuantitativos, no prestando atención a enseñanza de la geometría plana, y mucho menos a la geometría sólida desde los procesos matemáticos y/o desde el establecimiento de las relaciones.

1.2.3 Creencias sobre los procesos matemáticos de describir, clasificar y definir

Las ideas que presentamos aquí para estos procesos matemáticos las hemos tomado casi textualmente del estudio de Guillén (1997, 2004, 2005) en el que se indica cómo varían las ideas que se tienen sobre estos procesos matemáticos cuando se razona en diferentes niveles de razonamiento. Esta distinción se ve reflejada en el análisis que hacemos de las respuestas de los profesores a las cuestiones que les planteamos sobre estos procesos matemáticos, análisis que se contempla en el apartado 3.1.2 del capítulo 3.

Si nos centramos en la descripción, Guillén (1997) señala que describir en todos los niveles de razonamiento de Van Hiele son listas de propiedades o características de los conceptos, diferenciando en cada nivel el tipo de propiedades que se incluyen en la lista. En el primer nivel de Van Hiele, la descripción que se hace de los sólidos se centra en propiedades visuales o funcionales. En el caso de que se señalen propiedades geométricas, son a menudo incorrectas, poco precisas o inadecuadas. En el segundo nivel, "la figura se convierte en la portadora de sus propiedades" (Van Hiele, 1986, p. 168, citado por Guillén, 1997). Aunque es el nivel propio de la descripción en el sentido matemático, es donde se empieza a indicar propiedades matemáticas de los objetos. Todavía no se enuncian propiedades que contienen términos del tipo "como máximo", "como mínimo", "tantas medidas diferentes como", o propiedades que relacionan los elementos de un tipo con los de otro. En este nivel estos términos se entienden como "exactamente" o "que tiene que haber medidas diferentes". En el tercer nivel ya se enuncian y comprenden de forma matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas.

Por lo que respecta a la clasificación Guillén (1997) establece que en el primer nivel clasificar consiste en diferenciar, comparar o identificar los sólidos considerando las semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos. Las expresiones que habitualmente se utilizan en este nivel son “... se parece a ... ", " ... tiene la forma de ... “, “... es como ... ", etc., pudiéndose señalar también propiedades geométricas. En el segundo nivel consiste en agrupar poliedros según sus características, pero sin relacionar las propiedades entre sí. Se consideran las clasificaciones como particiones. Se puede llegar a ver como inclusivas si se ha considerado previamente la inclusión en términos de ejemplos, o la inclusión entre familias tiene una gran componente visual. En el tercer nivel se realizan clasificaciones lógicas de los sólidos (inclusivas-exclusivas) establecidas con propiedades o relaciones ya conocidas, formuladas con precisión matemática. Se pueden establecer relaciones entre las familias por el observando que determinadas familias verifican las propiedades de otra.

Para la definición en el primer nivel de razonamiento, Guillén (1997) considera que será una idea muy ingenua del concepto basada en ejemplos prototipo y pueden incluir atributos visuales o características funcionales. En el segundo nivel, definir una familia de sólidos es describirla; dando, por tanto, una lista de propiedades, que pueden caracterizar a la familia, ser insuficientes, o redundantes. En el tercer nivel las definiciones no intentan reflejar la esencia de las cosas, sino que organizan propiedades, seleccionan las mínimas, se enganchan en un sistema deductivo y se colocan en él al principio. Se pueden comprender los requisitos de una definición formal y pueden llegar a formalizarla. Sin embargo, se requiere que una persona razone en el cuarto nivel para que entienda el papel que juegan las definiciones y los axiomas en la estructura axiomática de las matemáticas. La mayoría de las definiciones que se elaboran en tercer nivel son descripciones de los objetos en las que se ha reducido la lista de propiedades a un conjunto suficiente que es "más o menos" mínimo. Las definiciones, en el modelo de Van Hiele, se conciben como el final de un largo proceso (examen de ejemplos, análisis de propiedades, clasificaciones, etc.).

En relación con la definición, cabe señalar también el trabajo de Flores (2007). Este autor indica que en toda teoría tenemos objetos de estudio, el concepto que se tiene de tales objetos y su definición. Las definiciones que plantea dicho autor de estos términos son, un objeto es aquello que se percibe con los sentidos o se piensa, y que se opone a aquello que piensa, es decir, al sujeto. Un concepto es una idea abstracta y general sobre algo y que está asociado con una representación. El concepto representa a todos los objetos de una clase dada. Por último, una definición es una afirmación que tiene como propósito dar a conocer y fijar con claridad la extensión y la comprensión de un objeto. La definición se concibe, generalmente, como un enunciado de las características y propiedades inherentes de un objeto.

1.3 Sobre la formación de profesores

Hay una gran variedad de investigaciones que se sitúan en la línea de investigación sobre formación de profesores. Las problemáticas en las que se centran también son muy diversas. En el apartado 1.3.1 incluimos aquellas en las que se delimitan diferentes tipos de contenidos como los implicados en la formación de profesores (Shulman, 1987; Bromme, 1988; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Rico, 2004; Porlán y Martín, 1994; Rico y Flores, 1997, Esteve, 2009) y diversas tareas como las que tiene que llevar el profesor para desarrollar la enseñanza (Azcárate, 1998; Bromme, 1988). Se distinguen o no fases para ello; se explicitan los conocimientos que se requieren para llevarla a cabo (Llinares, 2000; Gómez, 2001) distinguiendo si se contempla o no el lograr competencia en los alumnos a los que se enseña (Godino, 2009; Ribeiro, Monteiro y Carrillo, 2010).

El apartado 1.3.2 centra la atención en trabajos que aportan información sobre resultados de los conocimientos del profesorado acerca de determinados tipos de contenido (Mochón y Morales, 2010), relativos a la práctica docente (Lebrija, Flores y Trejos, 2010; Llinares, 2000), o los contenidos que se tratan en ella (Pinto y González, 2008). Atención especial prestamos a las investigaciones realizadas con profesores que centran la atención en la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos (Guillén, Figueras y Corberán, 2004; Guillén y Figueras, 2005).

1.3.1 Sobre los conocimientos del profesorado

Para delimitar los contenidos implicados en los cursos, diseñados en nuestro estudio para la toma de datos, hemos revisado los conocimientos que los investigadores señalan que debe de tener el profesorado para llevar a cabo su enseñanza.

Shulman (1987) señala siete conocimientos como imprescindibles para que el profesorado pueda realizar la enseñanza:

1) conocimiento del contenido;
2) conocimiento pedagógico general;
3) conocimiento del currículo;
4) conocimiento pedagógico del contenido;
5) conocimiento de los estudiantes y sus características;
6) conocimiento de los contextos educativos;
7) conocimiento de los objetivos, finalidades y valores de la educación.

Si nos centramos en el conocimiento que necesita el profesorado de matemáticas Bromme (1988), siguiendo en parte una propuesta de Shulman (1986) y dado que las matemáticas no requieren interpretación del profesor, señala que los conocimientos profesionales que debe de tener el profesor son:

- *Conocimientos de matemáticas,* que son los conceptos, términos, teoremas, reglas …que el profesorado aprende en la universidad.

- *Conocimientos curriculares,* que aparecen en los libros de textos y materiales didácticos tomados de los planes de estudio. Incluye conocimiento de otras asignaturas son necesarios para las matemáticas, así como, herramientas que se precisan en matemáticas.

- *Conocimientos sobre la clase,* haciendo que el desarrollo del curso académico, las circunstancias de la clase y los conocimientos del alumnado varíe la programación general del centro.

- *Conocimientos sobre lo que los alumnos aprenden,* siendo muy importante que el profesorado sepa lo que los alumnos han entendido y mantenido para la práctica y posterior aprendizaje de las matemáticas.

- *Metaconocimientos***,** siendo los conocimientos sobre la naturaleza de los conocimientos sobre la escuela y la asignatura, con relación a los fines y objetivos que se han de lograr. Estos conocimientos marcan la orientación en el que se valoran los conocimientos y su relación con la propia profesión. Asimismo, son la filosofía del profesor en cuanto a las matemáticas y la enseñanza, teniendo efectos en la práctica didáctica.

- *Conocimientos sobre didáctica de la asignatura,* que señalan como presentar la asignatura, la temporalización de los temas, así como los temas que se han de tratar con más profundidad. Estos conocimientos unen las informaciones psicológicopedagógicas y experiencias del propio profesor con los conocimientos matemáticos.

- *Conocimientos pedagógicos,* que serían determinados aspectos metodológicos de la clase, trabajar con alumnado que presenta una educación complicada y organizar el centro educativo. Además, tratan de normas y metas que se muestran como actitudes sobre hechos o reglas.

Por otra parte, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen los conocimientos (y competencias) que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad:

1) conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud;
2) conocer a los estudiantes como personas que piensan;
3) conocer a los estudiantes como personas que aprenden;
4) diseñar y gestionar entornos de aprendizaje;
5) desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la enseñanza para la comprensión;
6) construir relaciones que apoyen el aprendizaje;
7) reflexionar sobre la propia práctica.

Particularizando para uno de los contenidos como es el conocimiento del contenido Rico (2004) señala que el profesor de secundaria trasmite conceptos, destrezas, procedimientos y estrategias específicos. Necesita el dominio de los métodos y técnicas propios de las distintas ramas de su disciplina correspondiente. El profesor de secundaria, no sólo el de matemáticas sino el de cualquier disciplina, debe disponer de un conocimiento fundado de los contenidos cuya transmisión le corresponde.

Otros autores, como Porlán y Martín (1994), indican la naturaleza epistemológica que tienen los conocimientos profesionales. Por una parte, un *saber* de naturaleza más académica y disciplinar, que es un conocimiento consciente, abstracto y racional, que se basa en la lógica de la propia ciencia matemática. Por otra parte, un *saber-hacer,* tácito, concreto e irreflexivo, basado en la lógica del pensamiento docente cotidiano y que, en gran medida, orienta y dirige su conducta en el aula. Ambas formas de pensamiento se desarrollan en la mente de los profesores por procesos diferentes. El saber sobre las matemáticas se genera a través del estudio en un contexto académico, mientras que el saber-hacer se origina por interiorización mimética de las formas de actuación docentes observadas durante su escolarización y por la propia experiencia de trabajo en el aula (Azcárate, 1998).

Hay autores que cuestionan sobre qué puede favorecer el delimitar, formular y caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y sus fuentes de información. Rico y Flores (1997) señalan que para afrontar las diferentes situaciones escolares con las que se ha de enfrentar un profesor a lo largo de su vida es imprescindible incorporar nuevas perspectivas desde una lógica más didáctica en la que, los aspectos específicos relacionados con la educación matemática, sean el eje de la reflexión sobre la tarea profesional del profesor de Matemáticas. Asimismo, Cardeñoso y Azcárate, (1997) remarcan que este análisis, nos permitirá una más clara delimitación a la hora de formular y caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y sus fuentes de información.

Sin embargo, Esteve (2009), a diferencia de los demás autores que remarcan la importancia que debe de tener en la formación del profesorado los conocimientos de la materia, subraya que una formación inicial de profesores se debe dejar los enfoques idealizados y tratar los principales problemas que se encuentra el profesorado en el trabajo diario en la enseñanza. Se ha de evitar formar al profesor ideal enseñándole como debe ser, que hacer y que pensar. Hay que formarlo en lo que hace. Para ello, se ha de elaborar una identidad profesional en el que el elemento central consiste en comprender que la esencia del trabajo del profesor es estar al servicio del aprendizaje de los alumnos y enseñarle a actuar, a enfocar los problemas de forma positiva y a eludir las dificultades más comunes. Mostrarle como interactuar y comunicar en clase de forma que se consiga motivación y entusiasmo y como respuesta atención y respeto. Orientarle sobre cómo organizar la clase para conseguir un buen ambiente de trabajo y disciplina. Instruirle a adaptar los contenidos que se tienen que enseñar al nivel que poseen los alumnos de forma que se construya un aprendizaje significativo.

En diferentes trabajos se han hecho explícitas las tareas que tiene que desarrollar un profesor considerando o no la competencia que sus alumnos tienen que lograr con respecto a determinados contenidos matemáticos. Así, Azcárate (1998) señala que el profesor de matemáticas es el responsable de llevar a buen término las propuestas curriculares por la tanto, en primer lugar, se ha de replantear el *qué enseñar*. El profesor desde el conocimiento de sus alumnos y de su entorno inmediato ha de hacer las necesarias adaptaciones del currículum. Para ello es preciso reconsiderar los conocimientos matemáticos que han de trabajarse en las aulas de secundaria, tanto desde una perspectiva epistemológica como desde la perspectiva del que aprende, sus intereses y el medio donde se desenvuelve. En segundo lugar, hay que replantearse el cómo enseñar. El diseño metodológico debe estar dirigido a diseñar situaciones significativas que facilitan el aprendizaje de los alumnos, en las que el referente es el momento de desarrollo de los alumnos, sus intereses y el entorno en que se desenvuelve. Bromme (1988) plantea que, desde el punto de vista psicológico, el dar clase exige la realización, a ser posible paralelamente en el tiempo, de diferentes tareas parciales entre las que destacamos presentar unos contenidos, realizar observaciones de los alumnos necesarias para la evaluación y otras para ayudar a los alumnos individuales, mantener debidamente el interés y la colaboración de los alumnos. También comenta que la exposición de los contenidos de la materia exige a menudo decisiones ad hoc sobre la bondad de los ejemplos e ilustraciones alternativas, cuando resulta evidente que los alumnos no han entendido algo. Más aún, es necesario reconocer y aprovechar las posibles relaciones entre distintas partes de la asignatura. El dar clase exige así mismo juzgar cuál es el ritmo adecuado, es decir, el equilibrio entre las velocidades de aprendizaje de diferentes alumnos.

En otros estudios se indican las fases de la actividad del profesor. Llinares (2000) apunta que hace algún tiempo Jackson (1975) identificó la fase preactiva, interactiva y postactiva para señalar distintos momentos en los que se desarrollan las actividades del profesor. Señala que estas fases forman un 'bucle' en el cual la reflexión-sobre-la-acción del profesor (Schön) determina sus juicios y toma de decisiones en la fase preactiva. En su estudio se centra en las dos primeras fases identificando Llinares (2000) dos grupos de tareas.

> En la fase de planificación y organización de las matemáticas, a estudiar las tareas de profesor serían, el diseño, elección o modificación de los problemas que se proponen a los alumnos, determinar la organización del contenido y problemas durante el curso y en las lecciones particulares, determinar los problemas y cuestiones de evaluación, etc. Es decir, como señala Bronner (1997) una manifestación de las relaciones entre el profesor y el currículum establecido (definido por los documentos de la administración, los libros de texto desde las Editoriales comerciales, materiales didácticos varios, etc.).
>
> En la fase de gestión del proceso de enseñanza aprendizaje (relación entre el problema propuesto y los estudiantes en el contexto aula) siguiendo a Doyle (1986), algunas de las tareas del profesor son especificas del contenido matemático y otros son de carácter general. Ejemplos de tareas a

> desarrollar por el profesor en esta fase serian la gestión de los distintos segmentos de enseñanza que constituyen la lección de matemáticas, la presentación de la información, la gestión del trabajo en grupo, interpretar y responder a las ideas de los estudiantes, la gestión de la discusión en gran grupo, la construcción y uso de representaciones instruccionales, la introducción de material didáctico o de entornos informáticos, la gestión de la construcción del nuevo conocimiento matemático desde la interacción profesor-alumno-tarea, etc. (pp. 111-112).

Hay trabajos en los que se analiza la actividad propuesta al alumnado diferenciando varias fases (previo, en y después). Entre ellos destacamos a Gómez (2001) que, partiendo de que Simon (1995), considera al profesor como agente cognitivo y resaltando la importancia de la enseñanza de las matemáticas basada en principios constructivistas, supone que un aspecto central de la enseñanza de las matemáticas consiste en el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. El diseño, puesta en práctica y evaluación de la actividad requiere de una serie de análisis que agrupamos en cuatro categorías y que, en conjunto, Gómez (2001) denomina análisis didáctico, adaptando el término utilizado por González (1999) para la investigación en educación matemática.

- *Análisis cognitivo.* Con este análisis se busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores que los alumnos pueden llegar a cometer al realizar las tareas que componen las actividades de instrucción.

- *Análisis de contenido.* Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura anterior.

- *Análisis de instrucción.* En este análisis el profesor produce y evalúa (a la luz de los análisis anteriores) diseños de las actividades que realizarán los alumnos. Las actividades que se propongan a los alumnos deberán tener en cuenta los resultados del análisis cognitivo, el tipo de tareas que es posible realizar y los materiales y recursos disponibles para ellas. De este análisis surge el diseño de las actividades en un proceso cíclico y sistémico de interacción con los otros análisis.

- *Análisis de actuación.* Este es el análisis que el profesor hace de las actuaciones recientes de los alumnos y que le permite determinar su estado cognitivo. Cuando las actividades se llevan a la práctica, el profesor debe realizar el análisis de la actuación de los alumnos al ejecutar esas actividades.

Se ha de señalar que al realizar estos análisis el profesor pone en juego una serie de conocimientos que, en conjunto, Gómez (2001) denomina conocimiento didáctico y que está compuesto por unas herramientas teóricas y conceptuales que Rico et al. (1997) denominan organizadores del currículo.

Dado que en la enseñanza intervienen tanto el profesorado como el alumnado, hay algunos autores que lo que pretenden es lograr competencia profesional mientras que otros lo que buscan es conseguir competencias en el alumnado. Entre los primeros autores indicamos a Godino (2009) quien señala que, aunque hay un consenso general de que los profesores deben dominar los contenidos disciplinares correspondientes, no hay un acuerdo similar sobre la manera en que se debe lograr dicho dominio, ni siquiera acerca de cómo se debería concebir la disciplina. Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos…). Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. Entre los segundos autores remarcamos a Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010) señalan que los profesores deberán poseer un abanico de conocimientos, relacionados con cada uno de los contenidos específicos que tienen que enseñar, que les permitan, además de hacerlos comprensibles a sus alumnos, enseñarlos de modo que estos últimos adquieran un conocimiento relacional entre los diversos contenidos. Para ello, Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010), basándose en las componentes del conocimiento profesional de los profesores propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) y complementado con el trabajo de Park y Oliver (2008), fundamentados ambos en Shulman (1986), distinguen las siguientes componentes del conocimiento profesional.

En relación con el conocimiento del contenido matemático señalan tres componentes: el conocimiento común del contenido (ccc), el conocimiento especializado del contenido (cec) y el conocimiento propedéutico (cp).

- El *conocimiento común del contenido* (ccc) se relaciona con el conocimiento del contenido que posee cualquier individuo con formación matemática, pero encarada como herramienta y sin que sepa necesariamente explicar el porqué del origen de lo que hace. También puede denominarse *conocimiento sobre cómo hacer*.

- El *conocimiento especializado del contenido* (cec) se entiende como el conocimiento que es necesario solo para el profesor que pretende que otro entienda verdaderamente lo que hace y no que lo ejecute sólo como un conjunto de procedimientos. Este componente no es exclusivo del conocimiento relativo a los procedimientos, sino que afecta también a los conceptos. El profesor también debe conocer cómo diferentes imágenes y ejemplos del concepto pueden hacer que se adquiera una noción amplia de éste y de sus relaciones con otros conceptos. Es, por tanto, un conocimiento relacionado con el saber cómo enseñar a hacer.

- El *conocimiento propedéutico* (cp), es decir, un conocimiento de las relaciones existentes entre los distintos tópicos matemáticos y de qué manera van evolucionando los aprendizajes de un mismo tópico a lo largo de la escolaridad.

Conviene destacar que, a veces, la distinción entre el ccc y el cec es problemática cuando se analiza la práctica, ya que existen situaciones en las que se ponen de relieve de manera simultánea y en las que se asemejan mucho.

El conocimiento pedagógico del contenido también se encuentra dividido en tres componentes que se refieren al conocimiento que el profesor debe poseer del contenido que pretende abordar y de la enseñanza (cce), el conocimiento del contenido y de los alumnos (cca) y el conocimiento del contenido y del currículo (cc).

- Ball et al. (2008) definen el conocimiento combinado entre conocimiento sobre la enseñanza y sobre el contenido - conocimiento del contenido y de la enseñanza (cce) - como el conocimiento que el profesor utiliza en el aula en situaciones que pueden no ser consideradas específicamente de exploración de contenidos, pero que están relacionadas con ellos, en particular, las acciones de decidir la secuencia de las tareas, con cuál ejemplo iniciar o escoger apropiadamente las representaciones más adecuadas a cada situación. Park y Oliver (2008) incluyen el conocimiento de las estrategias específicas de enseñanza relacionadas con el contenido que se va a abordar, incluidas distintas representaciones de un mismo contenido/tópico, las tareas preparadas y las actividades desarrolladas.

- En lo que se refiere al conocimiento del contenido y de los alumnos (cca), combina un conocimiento de los alumnos con un conocimiento sobre matemáticas y se relaciona con la necesidad de los profesores de anticipar lo que piensan los alumnos, cuáles dificultades/facilidades pueden presentar, qué motivaciones, el hecho de escuchar e interpretar los comentarios, o sea, situaciones en las que existen interacciones entre la comprensión matemática y el conocimiento del pensamiento matemático de sus alumnos. En este dominio, Park y Oliver (2008) destacan el conocimiento de la comprensión de los alumnos, el conocimiento de sus posibles dificultades, concepciones erróneas, motivaciones e intereses, así como sus necesidades.

Conviene destacar una vez más que, dependiendo del foco de análisis, el tipo de interacciones que ocurren y el contexto específico, el conocimiento del contenido y de los alumnos puede ser encarado como conocimiento especializado del contenido o viceversa.

Cabe aclarar también que tras el análisis de los diferentes conocimientos del profesorado que nos han mostrado los diferentes investigadores, en este estudio seguimos la distinción que hacen Ribeiro, Monteiro y Carrillo (2010), que hemos descrito brevemente en los párrafos anteriores, en relación con el conocimiento del contenido y sobre el conocimiento pedagógico.

1.3.2 Resultados sobre los conocimientos del profesorado

Hay trabajos en los que lo que se analiza es el conocimiento que tiene el profesorado y centran la atención en cómo conseguir una enseñanza eficaz. Los resultados que hemos obtenido en nuestro estudio y que presentamos en el capítulo 3 los contrastaremos con algunos de los obtenidos por estos autores.

Cabe hacer mención al trabajo de Mochón y Morales (2010). Estos autores encontraron los siguientes problemas en los profesores que participaron en su estudio:

- Las participaciones de los profesores en los talleres revelaron que su conocimiento matemático para la enseñanza es de tipo instrumental, ya que se basa principalmente en procedimientos mecánicos y en sus propias convicciones sobre la enseñanza. Encontramos que, aun cuando tienen además un conocimiento matemático para la enseñanza de tipo conceptual, éste es muy limitado, lo cual les causa inseguridad para dar explicaciones y los lleva a recurrir sólo a técnicas repetitivas de solución y a procedimientos aprendidos de memoria.

- Observaron carencias importantes en los tres aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza. En el especializado, la falta de una variedad de estrategias de solución y la habilidad de desglosar ideas y procedimientos. En el de instrucción, representaciones e ilustraciones muy reducidas. En el de estudiantes, el desconocimiento de los posibles razonamientos y las causas probables de las dificultades.

  De las observaciones realizadas, se puede inferir que, de estos tres aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza, el conocimiento matemático especializado es central para poder desarrollar con amplitud los otros dos componentes (el conocimiento para la instrucción y el conocimiento de estudiantes). Sin las diversas habilidades que comprende este conocimiento matemático especializado, será muy difícil para el profesor conducir adecuadamente su instrucción o entender las dificultades de los estudiantes.

- Encontraron algunas tendencias comunes de los profesores, parte de las cuales son difíciles de modificar.

  - No se convierten en organizadores y propiciadores. Tienden a ser el centro de las actividades, a decir qué y cómo se hace.

  - Ven la enseñanza como actividad unidireccional. Descartan las aportaciones de los alumnos y su creatividad para ayudar a dirigir la clase.

  - Enmarcan la actividad de la clase en el libro de texto y el programa, casi como únicos recursos. No reaccionan a los indicios de falta de conocimientos previos o falta de interés de los alumnos.

  - Presentan el conocimiento matemático como algo terminado, estático y rígido, y no abren la posibilidad al alumno para recrearlo desde sus propias concepciones.

  - No rescatan los conceptos importantes. Trabajan con la resolución de problemas, pero, al final, no destacan ni concretan los puntos importantes, por lo que el conocimiento se diluye.

- Los cambios que observaron en la práctica de los profesores fueron:

  - Cuestionaron a los alumnos para obtener no solo respuestas sino argumentaciones. No obstante, esta habilidad quedó medianamente desarrollada, ya que los profesores no aprovechan sus ventajas y se notó una prisa por llegar a la respuesta.

- Formularon problemas cotidianos que motivaran la participación.
- Propusieron tareas más adecuadas y desafiantes para sus alumnos.
- Trataron de utilizar mayor número de modelos y representaciones para mostrar las ideas matemáticas.
- Manifestaron una voluntad de analizar las producciones escritas y los argumentos verbales de sus estudiantes para entender sus razonamientos e inferir sus posibles dificultades.
- Interactuaron más y de una manera más productiva con sus alumnos dentro del salón de clase.

- Finalmente, han remarcado que posiblemente, la consecuencia más importante de todo lo descrito en este artículo es que poner atención únicamente en "introducir tecnologías en las aulas" o "diseñar materiales didácticos para el uso de los profesores" tendrá un impacto muy modesto para lograr una enseñanza eficaz y un aprendizaje auténtico de los estudiantes. Hay que darse cuenta de que el elemento más determinante de la enseñanza es el propio profesor y, sólo fortaleciendo sus conocimientos, se podrá llegar a un proceso de aprendizaje y enseñanza de calidad.

Si nos fijamos en las líneas de investigación y los resultados obtenidos cabe hacer referencia a Pinto y González (2008). Estos autores manifiestan la importancia del estudio del conocimiento didáctico o pedagógico del contenido (CDC) y hacen un estudio de sus tres componentes. Muestran que el estudio del conocimiento del contenido matemático del profesor es una línea de investigación que se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores; así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento. En el conocimiento de la didáctica específica se centra en el conocimiento del profesor sobre diferentes representaciones instruccionales vinculadas a un tópico concreto, el modo como las interpreta y utiliza en el aula, poniendo también en juego el conocimiento y uso de los otros componentes del CDC. El conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido que desea enseñar, implica conocer el origen y evolución del proceso cognitivo del estudiante (según edad, grado, experiencia y escolaridad), las motivaciones (intrínsecas y extrínsecas), las expectativas e intereses, las maneras de aprender, las preconcepciones, concepciones y dificultades relativas al aprendizaje de las matemáticas en general y del tópico específico matemático en particular.

Hay también estudios que subrayan el porqué de las prácticas tradicionales y las dificultades al cambio. Entre ellos destacamos a Lebrija, Flores y Trejos (2010) que subrayan que los tiempos limitados en el aula y la presión por cubrir el programa influyen en la adopción de prácticas docentes tradicionales y dificultan el cambio hacia una visión más centrada en el análisis, discusión y reflexión de las matemáticas.

Otras investigaciones se centran en cómo se puede intentar comprender la práctica profesional en el aula. Llinares (2000) indica que cuando intentamos comprender la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula un objetivo es identificar características de su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje e identificar aspectos de dicha gestión que puedan tener relevancia teórica debido a su capacidad explicativa. Con ello podremos describir y e intentar comprender la realidad del profesor en la enseñanza de las matemáticas (el papel del profesor en el diseño, organización y guía del proceso de enseñanza-aprendizaje). Desde el punto de vista cognitivo (psicológico) el análisis tiene como foco las creencias y conocimiento del profesor e intenta dar cuenta de la forma de conocer del profesor y de los procesos interpretativos a través de los cuales dota de significado a las situaciones en las que se encuentra y que le permiten dirigir su acción Por otra parte, desde el punto de vista sociocultural y en particular desde perspectivas interaccionistas, el aula se ve como una microcultura en la que los significados se generan a través de las actividades compartidas entre el profesor y los estudiantes en interacción ante una tarea matemática.

Al igual que Llinares (2000) en nuestro estudio concebimos que "Ser profesor de matemáticas" debería ser entendido desde la perspectiva de participar en una práctica social: enseñar matemáticas. La práctica profesional del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor.

1.4 Los contenidos geométricos

Antes de precisar los contenidos geométricos que se tratan en este estudio cabe aclarar la organización que hacemos de los mismos. Siguiendo la línea de investigación relativa a la geometría de los sólidos, consideramos conceptos, procesos matemáticos (describir, clasificar, definir…) y establecimiento de relaciones (véase, por ejemplo, Guillén y Figueras, 2004, 2005). También se abordan las destrezas y habilidades relativas a la representación de sólidos y a su comunicación. Esta agrupación se ve reflejada en los diferentes apartados que distinguimos en esta sección. En el apartado 1.4.1 nos fijamos en los diferentes tipos de descripción y en los tipos de análisis que realizamos. Se da cuenta de los sólidos y familias de sólidos implicados, los elementos de los sólidos y las propiedades que se consideran en la descripción. Lo relativo a las clasificaciones se trata en el apartado 1.4.2. El apartado 1.4.3 informa sobre aquellas relaciones de inscripción y dualidad que se tratan en este trabajo con mayor o menor profundidad. Por último, en el apartado 1.4.4 se da cuenta de lo relativo al estudio que hacemos de la representación y la comunicación de los sólidos.

Cabe adelantar que todos estos contenidos los retomamos en la sección 1.5 al fijarnos en la actividad que se puede despegar a partir de ellos y las diferentes maneras de comunicar y/o representar los sólidos se vuelven a retomar en la sección 1.6, usándolos en este caso como contextos o situaciones para estudiar los procesos matemáticos y las relaciones.

1.4.1 La descripción de los sólidos. El trabajo de Guillén (1991, 1997, 2004, 2010)

En Guillén (2004) y haciendo referencia a (Guillén, 1997) se indica que la palabra describir puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos. Se subraya que, al describir los sólidos, podemos poner el énfasis en su simetría, armonía, regularidad, belleza o en otras descripciones analíticas, constructivas que dicen algo sobre cómo está hecho un poliedro —tiene 8 caras, 12 aristas, etc.— o sobre cómo están dispuestos localmente sus elementos (por ejemplo, tiene 8 vértices de orden 4: sus caras cuadradas están bordeadas de triángulos y sus caras triangulares están bordeadas de cuadrados). En un trabajo anterior hace notar que se pueden considerar “distintos niveles de análisis: de los elementos y de la estructura. En la estructura, el análisis puede ser local —como, por ejemplo, nos fijamos en el orden de los vértices o en las caras que bordean a una cara dada— o global, que dice algo respecto de la estructura total —como por ejemplo, nos fijamos en las simetrías que organizan el todo del poliedro y dicen algo sobre cómo está dispuesto todo él, así como lo bello, armonioso y equilibrado que queda” (Guillén, 1991, p. 59).

Este apartado trata de los diferentes tipos de análisis delimitados por esta autora (puntual, local y global) referido tanto a sólidos concretos como a familias de sólidos, que corresponden a familias finitas o infinitas. En el subapartado 1.4.1.1 comenzamos indicando las familias de sólidos y subfamilias implicadas en nuestro estudio, así como las propiedades de estas que contemplamos en la descripción de las mismas. En el subapartado 1.4.1.2 nos centramos en el análisis global de los poliedros regulares y establecemos relaciones entre diferentes elementos implicados en esta descripción global.

1.4.1.1 Las familias de sólidos implicados en el estudio. Propiedades

En concordancia con Guillén (1991, 1997, 2010) y el análisis de libros de texto usuales de secundaria, los sólidos que vamos a tratar en esta investigación corresponden a determinadas familias de poliedros: los prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides y los poliedros regulares, y a otras familias que no lo son: cilindros, conos y esferas.

Dado que para describir los sólidos tenemos que conocer sus elementos, en la figura 1.1 mostramos los que vamos a considerar en la descripción de estas familias de sólidos junto con la definición/es que vamos a contemplar para ellos.

- *Cara:* cada uno de las superficies que forma el sólido.
- *Arista:* donde se juntan dos caras.
- *Vértice:* donde concurren tres o más polígonos. En el caso del cono donde concurren las generatrices.
- *Ángulos de las caras (aC):* los ángulos que tienen los polígonos de sus caras.
- *Ángulos diedros (ad):* los ángulos que forman dos caras al juntarse (que pueden estar más o menos "abiertas").
- *Ángulos poliedros (ap):* el ángulo que forman las diversas caras que tienen común un vértice del poliedro.

  Determinar la medida del ángulo poliedro es difícil porque hay que medir "un trozo" de espacio, y es por esto por lo que no vamos a seguir trabajando con ellos. Pero que vamos a fijarnos en el ángulo de su superficie, en el ángulo suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en un vértice, ángulo que vamos a llamar, *ángulo de los vértices* (*a*V).

- *Ángulos de los vértices (aV):* el ángulo de su superficie, el ángulo suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en un vértice.
- *Diagonales de las caras (dC):* las diagonales que tienen las caras.
- *Diagonales del espacio(dE):* los segmentos que unen vértices del poliedro, que no pertenecen a una misma cara.
- *Plano diagonal de un poliedro:* todo plano que pasa por tres vértices del poliedro no situados en la misma cara
- *Plano de simetría de un poliedro:* es un espejo que un trozo del poliedro lo refleja exactamente en el otro trozo.
- *Eje de rotación de un poliedro:* Es una recta que si gira el poliedro alrededor de ésta antes de dar la vuelta completa el poliedro presenta el mismo aspecto que en la posición inicial.

Figura 1.1. Elementos de los poliedros (Guillén, 1997)

Las propiedades para los sólidos, los poliedros y para estas familias de poliedros que tomamos como referente, así como las aclaraciones que se hacen sobre ellas, se han tomado de Guillén (1997); éstas se incluyen en las tablas 1.1 y 1.2.

La tabla 1.1 muestra las de los sólidos y de familias de sólidos muy utilizadas en la enseñanza.

Propiedades de los sólidos • Tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto. • Se limita perfectamente un espacio. El borde del sólido es la superficie. **Propiedades del cilindro del cono y la esfera** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • El cilindro tiene 3 caras, 2 que son círculos y otra que es una cara curva. Tiene 2 aristas curvas, con forma de circunferencia, y no tiene vértices. • El cono tiene 2 caras (una curva y otra circular) que se juntan y forman una arista curva, con forma de circunferencia. Sólo tiene un vértice y éste sólo lo forma una cara, que es curva. • La esfera tiene una cara, que es curva. **Propiedades de los poliedros** • Es un sólido. Tiene las propiedades de los sólidos. • Todas las aristas son rectas. • En los vértices se juntan por lo menos 3 caras. • Como mínimo tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas	**Propiedades de los antiprismas** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Tienen dos caras, que llamamos bases del antiprisma, que se juntan con triángulos. Los triángulos que juntan las bases son las caras laterales del antiprisma. • Las bases son iguales y paralelas y están giradas una respecto a la otra. Un vértice de una base se corresponde con un lado de la otra base. Si desplazamos una de las bases mediante el vector que une los centros de las bases, los vértices de una base se corresponden con lados de la otra base. • Todos los vértices son de orden 4. En todos los vértices concurren tres triángulos y la base. En todos los vértices concurren dos aristas laterales y dos aristas de la base. • Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces el antiprisma tiene 2n+2 caras, 2n vértices y 4n aristas.	**Propiedades de las pirámides** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Tiene una cara, que llamamos base, se junta a un punto por medio de triángulos. Este punto es el ápice. Los triángulos son las caras laterales de la pirámide. • Tienen vértices de dos tipos, excepto la pirámide triangular. Los vértices de la base son de orden 3 y el orden del ápice coincide con el número de lados del polígono de la base. En todos los vértices de la base concurren dos triángulos y la base. En el ápice concurren todos los triángulos de la pirámide y nunca la base. En todos los vértices de la base concurren una arista lateral y dos aristas de la base. En el ápice sólo concurren aristas laterales. En la pirámide triangular en todos los vértices se juntan 3 triángulos y cualquier cara sirve como base. • Si el polígono de la base tiene n lados, entonces la pirámide tiene n+1 caras, n + 1 vértices y 2n aristas.	**Propiedades de las bipirámides o de los sólidos cóncavos** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Las bipirámides cóncavas son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Las bipirámides cóncavas son bipirámides. Tienen las propiedades de las bipirámides. • Tienen por lo menos un ángulo diedro que es mayor que 180°. • Tienen por lo menos una cara que si la prolongamos divide al sólido en más de un trozo y corta por lo menos a otra cara, a algunas aristas o a vértices. • Tienen por lo menos una cara en la que no se pueden apoyar.

	• Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces el antiprisma tiene 8n ángulos de las caras, 4n ángulos diedros (los mismos que aristas) y 2n ángulos de los vértices (los mismos que vértices). • Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces el prisma tiene n(n-3) diagonales de las caras (las CL no tienen diagonales) y n(n-2) diagonales del espacio.	• Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces la pirámide tiene 4n ángulos de las caras, 2n ángulos diedros (los mismos que aristas) y n+1 ángulos de los vértices (los mismos que vértices). • Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces la pirámide tiene n(n-3)/2 diagonales de las caras (las CL no tienen diagonales) y no tiene diagonales del espacio.	

Tabla 1.1. Propiedades de las familias de sólidos (Guillén, 1997)

La tabla 1.2 incluye las propiedades de los prismas y de las de subfamilias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides que se establecen al clasificar estas familias de poliedros con diferentes criterios, considerando también la descripción de esas clases como un problema asociado a la clasificación.

Propiedades de los prismas	**Propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos**	**Propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras iguales**	**Propiedades de los prismas cuadrangulares**
• Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Tienen dos caras, que llamamos bases del prisma, que se juntan con paralelogramos. Los paralelogramos que juntan las bases son las caras laterales del prisma. • Las bases son iguales y paralelas y una están trasladadas. Cada vértice de una base se corresponde con un vértice de la otra base. Si desplazamos una de las bases mediante el vector que une los centros de las bases, los vértices coinciden. • Las aristas laterales son paralelas y tienen la misma longitud. • Todos los vértices son de orden 3. En todos los vértices concurren 3 caras o 3 aristas. En todos los vértices concurren dos caras laterales y una base. En todos los vértices concurren una arista lateral y dos aristas de una base. • Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces el prisma tiene n+2 caras, 2n vértices y 3n aristas. • Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces el prisma tiene 6n ángulos de las caras, 3n ángulos diedros (los mismos que aristas) y 2n ángulos de los vértices (los mismos que vértices). • Si el polígono de las bases tiene n lados, entonces el prisma tiene n(n-1) diagonales de las caras y	• Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides respectivamente. • Las diagonales de las caras del sólido caen siempre en la superficie del sólido. • Las diagonales del sólido caen siempre en el interior del sólido. • Los ángulos de las bases (y también los ángulos de las caras) son todos ellos menores que 180°. • Los ángulos diedros son menores que 180°. • Los ángulos de los vértices son menores que 360°. • Al prolongar cualquier lado del polígono de la base, la base queda toda ella a un lado y no corta a ningún otro lado de ella. • Al prolongar cualquier cara del prisma, éste queda todo él a un lado y no corta a ninguna otra cara del prisma. • Se puede apoyar en cualquiera de sus caras. **Propiedades de los prismas, antiprismas o pirámides cóncavos** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.	• Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides respectivamente. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos, respectivamente. • Los prismas de caras iguales son prismas cuadrangulares, luego cumplen las propiedades de esta familia. Los antiprismas y pirámides de caras iguales son triangulares, luego cumplen las propiedades de la familia triangular correspondiente. • Todas las caras son iguales. • En los prismas, antiprismas de caras iguales las caras son paralelas dos a dos. • Como mucho hay tres medidas para las aristas. En los prismas de caras iguales todas las aristas son iguales. En los antiprismas y pirámides como mucho hay dos medidas para las aristas. • Como mucho hay tres medidas para los ángulos de las caras. En los prismas, antiprismas y pirámides como mucho hay dos	• Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas. • Tienen 6 caras, 12 aristas y 8 vértices. • Tienen 24 ángulos de las caras, 12 ángulos diedros y 8 ángulos de los vértices. • Tienen 12 diagonales de las caras y 4 diagonales del espacio. **Propiedades de los prismas de bases trapecios (clasificación Inclusiva)** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas. • Son prismas cuadrangulares. Tienen las propiedades de los prismas cuadrangulares. • Son convexos. Tienen las propiedades de los prismas convexos. • Las bases son trapecios: al menos tienen un par de lados paralelos. • Tienen al menos un par de caras laterales paralelas. **Propiedades de los paralelepípedos (clasificación Inclusiva)** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.

n(n-3) diagonales del espacio.

Propiedades de los prismas rectos

- Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos.
- Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.
- Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas.
- Las caras laterales son rectángulos.
- El prisma recto se produce si un polígono se mueve perpendicularmente a su propio plano.
- Las caras laterales son perpendiculares a las bases.
- Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.
- Las aristas laterales tienen la misma longitud que la altura del prisma. La longitud de la altura coincide con la del segmento que une los centros de gravedad de las bases, si éstos yacen en el interior del polígono.
- La altura dibujada desde un punto de la base cae en el interior del sólido o en la superficie. La altura, dibujada desde el centro de la una base, cae en el centro de la otra base y dibujada desde un vértice cae en otro vértice.
- Los ángulos diedros de las caras laterales y la base ($\propto$dCL-B) son de 90°.
- Los ángulos diedros de las caras laterales ($\propto$dCL-CL) coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de sus bases.
- Los ángulos de los vértices miden 180°+ $\propto$ donde $\propto$ es el ángulo correspondiente de la base.
- El número de medidas distintas para las diagonales del espacio coincide con el de medidas distintas para las diagonales de la base.

Propiedades de los prismas oblicuos (clasificación excluyente)

- Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos.
- Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.
- Son prismas, antiprismas o pirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas o pirámides respectivamente.
- Tienen al menos una diagonal en la base que no queda completamente en el interior de ésta.
- Los prismas y antiprismas cóncavos tienen al menos una diagonal del espacio que no queda completamente en el interior del sólido (las pirámides no tienen diagonales del espacio).
- Las bases tienen al menos un ángulo mayor que 180°.
- Tienen por lo menos un ángulo diedro $\propto$dCL-CL, que es mayor que 180°.
- Las bases tienen por lo menos un lado que si lo prolongamos divide a la base en más de un trozo y corta por lo menos a un lado o vértice de ésta.
- Tienen por lo menos una cara lateral que si la prolongamos divide al prisma en más de un trozo y corta por lo menos a otra cara, a algunas aristas o a vértices.
- Tienen por lo menos una cara lateral en la que no se pueden apoyar.

Propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides de bases regulares

- Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos.
- Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides respectivamente.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos, respectivamente.
- Las bases, o la base, son polígonos regulares.
- Los prismas de bases regulares tienen como mucho dos medidas diferentes para las aristas.

Propiedades de los prismas o antiprismas de caras laterales regulares

- Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos.

medidas para los ángulos de las caras.

- En los prismas de caras iguales las diagonales de las caras como mucho tienen dos medidas diferentes. Los antiprismas, pirámides y bipirámides de caras iguales no tienen diagonales de las caras.
- En los prismas de caras iguales las diagonales de las caras se cortan perpendicularmente.
- Hay infinitos ejemplos de bipirámides de caras iguales, pero sólo hay dos tipos de ejemplos para los prismas, antiprismas y pirámides. Uno de ellos está formado por caras regulares (cuadrados o triángulos equiláteros) y el otro por rombos o triángulos isósceles, genéricos (con ángulos de dos medidas).

Propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras regulares

- Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos.
- Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides respectivamente.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos, respectivamente.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de bases, o base, regulares. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de bases, o base, regulares.
- Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos de bases, o base, regulares. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos de bases, o base, regulares.
- Los prismas y antiprismas de caras regulares tienen las propiedades de los prismas o antiprismas de caras

- Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas.
- Son prismas cuadrangulares. Tienen las propiedades de los prismas cuadrangulares.
- Son convexos. Tienen las propiedades de los prismas convexos.
- Son prismas de bases trapecios. Tienen las propiedades de los prismas con bases trapecios.
- Todas las caras son paralelogramos.
- Tiene caras paralelas e iguales dos a dos. Las caras opuestas son iguales y paralelas.
- Tiene como mucho tres medidas diferentes para las caras.
- Tiene como mucho tres medidas diferentes para las aristas.
- Tiene como mucho seis medidas diferentes para los ángulos de las caras.
- Las diagonales de las caras se cortan en su punto medio.
- Las diagonales de las caras tienen como mucho seis medidas diferentes.

Propiedades de los Ortoedros (clasificación Inclusiva)

- Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos.
- Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros.
- Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas.
- Son prismas cuadrangulares. Tienen las propiedades de los prismas cuadrangulares.
- Son convexos. Tienen las propiedades de los prismas convexos.
- Son prismas de bases trapecios. Tienen las propiedades de los prismas con bases trapecios.
- Son prismas de bases trapecios isósceles. Tienen las propiedades de los prismas con bases trapecios isósceles.
- Son paralelepípedos. Tienen las propiedades de los paralelepípedos.
- Las caras son rectángulos.
- Cada cara tiene 4 caras perpendiculares a ella.
- Los ángulos de las caras y los ángulos diedros miden 90°.
- Los ángulos de los vértices miden 270°.

• Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas. • El prisma oblicuo se produce si un polígono se mueve paralelamente a su propio plano siguiendo una dirección que no es perpendicular al plano. • Tienen por lo menos una cara lateral que no es perpendicular a las bases. • Tienen por lo menos una arista lateral que no es perpendicular a las bases. • La longitud de la altura del prisma es menor que la de las aristas laterales. La longitud de la altura es menor que la del segmento que une los centros de las bases. • La altura, dibujada desde el centro de una base, no cae en el centro de la otra base. • Tienen por lo menos un ángulo diedro de las caras laterales y la base (∝dCL-B) que no es de 90°. • Tienen por lo menos un ángulo diedro de las caras laterales (∝dCL-CL) que no coincide con el ángulo correspondiente del polígono de sus bases. **Propiedades de los antiprismas rectos, de las pirámides rectas y de las bipirámides rectas** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los antiprismas, pirámides o bipirámides, respectivamente. • En los antiprismas rectos la altura dibujada desde el centro de una base cae en el centro de la otra base. La longitud de la altura coincide con la del segmento que une los centros de las bases. • En las pirámides rectas la altura dibujada desde el ápice cae en el centro de la base. La longitud de la altura coincide con la del segmento que une el ápice y el centro de la base. • En las bipirámides rectas la altura dibujada desde uno de los ápices pasa por el	• Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas o antiprismas. Tienen las propiedades de los prismas o antiprismas respectivamente. • Son prismas o antiprismas rectos. Tienen las propiedades de los prismas o antiprismas rectos. • Las caras laterales son cuadrados o triángulos equiláteros. • Como mucho hay dos medidas para las caras. • Tienen las aristas iguales. • En los prismas de caras laterales regulares las diagonales de las caras laterales son iguales y se cortan perpendicularmente. **Propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos de bases regulares** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides respectivamente. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos, respectivamente. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de bases, o base, regulares. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de bases, o base, regulares. • Las CL son iguales. • Hay dos medidas como mucho para las caras. • Los vértices son iguales: el polígono vertical es el mismo en todos ellos. • En los prismas y las bipirámides rectas de bases regulares hay dos medidas como mucho para los ángulos de las caras. • En los antiprismas y pirámides rectas de bases regulares hay tres medidas como mucho para los ángulos de las caras.	laterales regulares. Las pirámides y bipirámides de caras regulares, familias que coinciden con las de caras regulares correspondientes, también cumplen que las aristas son iguales. • Tienen todas las caras regulares. • Hay infinitos prismas y antiprismas de caras regulares, uno por cada polígono regular, pero sólo hay tres pirámides y tres bipirámides de caras regulares: la triangular, la cuadrada y la pentagonal. **Propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, regulares: El cubo, octaedro o tetraedro** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides respectivamente. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, convexos, respectivamente. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de bases, o base, regulares. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de bases, o base, regulares. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos de bases, o base, regulares. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, rectos de bases, o base, regulares. • Los prismas y antiprismas de caras regulares tienen las propiedades de los prismas o antiprismas de caras laterales regulares. Las pirámides y bipirámides de caras regulares, familias que coinciden con las de caras regulares correspondientes, también cumplen que las aristas son iguales.	• Las diagonales de las caras tienen como máximo 3 medidas distintas. • Las diagonales del espacio son iguales. **Propiedades de los Romboedros (prismas de caras iguales) (clasificación Inclusiva)** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas. • Son prismas cuadrangulares. Tienen las propiedades de los prismas cuadrangulares. • Son convexos. Tienen las propiedades de los prismas convexos. • Son prismas de bases cometas. Tienen las propiedades de los prismas con bases cometas. • Son paralelepípedos. Tienen las propiedades de los paralelepípedos. • Las caras son rombos iguales. • Las aristas son iguales. • Los ángulos de las caras como mucho tienen 2 medidas diferentes. • Las diagonales de las caras como mucho tienen 2 medidas diferentes. • Las diagonales de las caras se cortan perpendicularmente. • Sólo hay dos tipos de ejemplos. Uno de ellos está formado por caras regulares (cuadrados) y el otro por rombos genéricos. **Propiedades del Cubo (clasificación Inclusiva)** • Son sólidos. Tienen las propiedades de los sólidos. • Son poliedros. Tienen las propiedades de los poliedros. • Son prismas. Tienen las propiedades de los prismas. • Son prismas cuadrangulares. Tienen las propiedades de los prismas cuadrangulares. • Son convexos. Tienen las propiedades de los prismas convexos. • Son prismas de bases trapecios. Tienen las propiedades de los prismas con bases trapecios. • Son prismas de bases trapecios isósceles. Tienen las propiedades de los prismas con bases trapecios isósceles.

centro de la base y cae en el otro ápice. La longitud de la altura coincide con la del segmento ***que une dos ápices.***	• Hay dos medidas como mucho para los ángulos diedros. • En los prismas rectos de bases regulares, las diagonales de las caras laterales son iguales. • Para los prismas, antiprismas y pirámides rectas de bases regulares, el número de medidas diferentes que tienen las diagonales del espacio como mucho es el de medidas diferentes que tienen las diagonales de las caras.	• Los prismas y bipirámide regulares son cuadrangulares y los antiprismas y pirámides regulares son triangulares, luego verifican las propiedades de la familia correspondiente. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras iguales. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras iguales. • Son prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras regulares. Tienen las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, de caras regulares. • Tienen los ángulos de las caras iguales. • Tienen los ángulos diedros iguales. • Las diagonales de las caras son iguales. El tetraedro y el octaedro no tienen diagonales de las caras. • Las diagonales del espacio son iguales. El tetraedro no tiene diagonales del espacio. • Hay un sólo tipo de ejemplo en cada una de estas familias: el cubo, el octaedro, el tetraedro y el octaedro, respectivamente.	• Son prismas de bases cometas. Tienen las propiedades de los prismas con bases cometas. • Son paralelepípedos. Tienen las propiedades de los paralelepípedos. • Son ortoedros. Tienen las propiedades de los ortoedros. • Son romboedros. Tienen las propiedades de los romboedros. • Todas las caras son cuadrados. • Todas las caras son regulares. • Todas las diagonales de las caras son iguales. • Sólo hay un tipo de ejemplo.

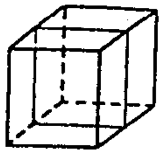
Tabla 1.2. Propiedades de los prismas y de subfamilias de prismas, antiprismas… (Guillén, 1997)

Puede notarse que las propiedades que enumeramos para describir familias y subfamilias de sólidos, son métricas y afines y se refieren a las caras, vértices, aristas, diferentes tipos de ángulos (ángulos de las caras, $\propto$C, ángulos diedros, $\propto$d, y ángulos de los vértices, $\propto$V) y diferentes tipos de diagonales (diagonales de las caras, dC, y diagonales del espacio, dE). Remarcamos que las listas de propiedades que enumeramos para cada familia, no son máximas ni mínimas; no se ha pretendido dar una visión completa de ellas, ni dar listas de propiedades de todas las subfamilias tratadas; solo se hace para aquellas para las que su lista de propiedades la utilizamos como base para desarrollar nuestro estudio.

Puede notarse también que las figuras y tablas incluyen conceptos, propiedades o relaciones asociados a un análisis local o global de algunas familias de sólidos que pueden tener cierta dificultad. En la figura 1.2 mostramos algunas relativas a las caras o a los vértices y anotamos también la definición que tomamos para *Orden de un vértice*, *Poliedro simétrico respecto de un plano* y para *Orden de un eje de rotación.*

- *Orden de un vértice:* número de caras que se juntan en él.
- *Caras iguales:* si al superponerlas coinciden.
- *Caras del mismo tipo:* si pertenecen a una misma familia.
  Si los polígonos son iguales serán de la misma familia (del mismo tipo) pero si son del mismo tipo pueden ser iguales o no.

- *Vértices del mismo orden:* vértices en los que se juntan el mismo número de polígonos, o de aristas, (que pueden ser 2, 3, 4...) pero que esto no significa que los vértices sean iguales.
- *Vértices iguales.* vértices en los que tienen que concurrir los mismos polígonos, en el mismo orden y además tienen que estar dispuestos de la misma manera.
- *Poliedro simétrico respecto de un plano:* si se transforma en sí mismo por reflexión en ese plano.



- *Orden de un eje de rotación:* número de veces que es necesario girar una figura alrededor de su eje para que recupere su posición inicial.

Figura 1.2. Elementos, propiedades, relaciones de determinadas familias de sólidos asociados a un análisis local y global de las mismas (Guillén, 1997)

1.4.1.2 Los poliedros regulares convexos. Planos de simetría y ejes de rotación de los poliedros regulares convexos. Relación entre ellos

Guillén (1991) propone que se investigue cuáles son los poliedros regulares mediante la construcción de ellos y que se concluya que no pueden haber más. Partiendo de la condición que señala la autora que han de cumplir los poliedros regulares, tienen las caras iguales y regulares y los vértices iguales, la autora indica que se cojan triángulos equiláteros por ser el polígono regular con menor número de lados y a partir de ellos se aumente el número de lados del polígono regular. El razonamiento que sigue es el siguiente: En cada vértice se pueden juntar tres triángulos equiláteros obteniéndose el tetraedro, cuatro triángulos construyéndose el octaedro y cinco triángulos realizándose el icosaedro. No se puede juntar seis triángulos equiláteros en un vértice, se quedaría plano (suma de los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice tiene que ser menor que 360º) y se ponen más triángulos equiláteros sería un poliedro cóncavo. Se propone seguir con el siguiente polígono regular, el cuadrado, juntando tres cuadrados en cada vértice, consiguiéndose un cubo. Igual que con los triángulos equiláteros, no se puede juntar cuatro cuadrados en un vértice, se quedaría plano y poner más cuadrados daría un poliedro convexo. Si se continúa con los pentágonos regulares, la autora señala que si se juntan tres pentágonos regulares en un vértice se obtiene el dodecaedro. Se remarca que no se pueden poner más de tres pentágono en un vértice porque daría un poliedro cóncavo. Finalmente, se apunta que no se pueden poner más de dos polígonos regulares que tengan más de cinco lados porque no se formaría esquina en el poliedro. La autora concluye que hay cinco poliedros regulares convexos.

Asimismo, Guillén (1991) prueba que solo hay cinco poliedros regulares convexos con otro tipo de demostración. Se sigue el siguiente razonamiento: Si *n* es el número de lados del polígono, desde un vértice se pueden trazar (n–3) diagonales y obtenemos (n–2) triángulos.

Se multiplica pues el número de triángulos (n –2) por 180° y se divide entre el número de lados (n). La fórmula general queda:

Ángulo interior de un polígono regular = $\frac{(n-2)\cdot 180^{o}}{n}$ (n = nº de lados del polígono)

Para los poliedros regulares la suma de los ángulos de los m polígonos regulares de n lados en un vértice no debe ser mayor de 360º.

$$\frac{m\cdot(n-2)\cdot 180^{o}}{n} < 360^{o}$$

(*m* polígonos regulares de *n* lados)

Inecuación equivalente a (m–2) · (n–2) < 4 que da como soluciones geométricas para:

- m=3, n=3 (tetraedro), n=4 (cubo), n=5 (dodecaedro),
- m=4, n=3 (octaedro),
- m=5, n=3 (icosaedro).

Asimismo, Guillén (1997) subraya que los poliedros regulares tienen diferentes formas de poder verse, por ejemplo, el tetraedro como una pirámide; el octaedro, como una bipirámide o un antiprisma; el icosaedro, como una composición de un antiprisma pentagonal de caras regulares y dos pirámides pentagonales de caras regulares o un encaje de dos casquetes cuyos desarrollos corresponden a desarrollos de bipirámides pentagonales; el cubo como una pulsera que se cierra con dos polígonos o como dos picos de 3 cuadrados que encajan; el dodecaedro como pentágono bordeado de pentágonos y pentágono bordeado de pentágonos o como dos cintas de 5 pentágonos cada una cerradas por dos polígonos.

En relación con los planos de simetría, Guillén (1991) muestra cómo se pueden determinar todos los planos de simetría de un poliedro, cómo se puede describir la "posición" de estos planos respecto al poliedro y cómo uno puede convencerse de que los ha encontrado todos y cómo éstos ayudan a describir este poliedro. Basándonos en el trabajo de esta autora, vamos a encontrar los planos de simetría del cubo.

Imaginemos un cubo y lo cortamos por un plano paralelo a un par de caras opuestas que pasa por los puntos medios de aristas, una de las partes que se obtiene es la imagen que devolvería el espejo de la otra. Habrá tres de estos planos.

Si se cambia del cubo a los planos y se usa la idea de simetría, se podría razonar como sigue: los planos pasarán por dos caras del cubo; como el cubo tiene 6 caras, entonces habrá 3 de estos planos (figura 1.3).

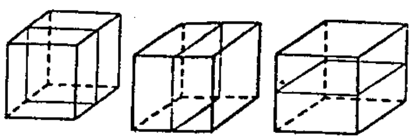


Figura 1.3. Planos de simetría (Guillén, 1991, p. 64)

Descripción del cubo a partir de esto 3 planos:

- Sus caras, vértices y aristas están dispuestos de manera que, si se apoya sobre cualquiera de sus caras:
  - Lo que hay arriba está abajo, dispuesto de la misma manera.
  - Lo que hay delante está detrás.
  - Lo que hay a la izquierda está a la derecha.
- Todos los vértices del cubo pueden generarse a partir de uno de ellos:
  - El vértice elegido se refleja en los tres planos de simetría, planos perpendiculares dos a dos.
  - También se reflejan las imágenes que se van obteniendo, se generan así todos los vértices del cubo a partir de uno de ellos.

Cuando prolongamos estos tres planos de simetría del cubo Intersectan con la esfera circunscrita al cubo, obteniendo lo que llamaremos *círculos máximos.*

Si uno se fija en una cara (arriba), tenemos otros dos planos de simetría: Uno por cada diagonal del cuadrado. Estos planos pasan por diagonales de caras opuestas. Las caras que quedan delante y detrás surgen otros dos planos, y de las caras que quedan a la izquierda y a la derecha otros dos (figura 1.4).

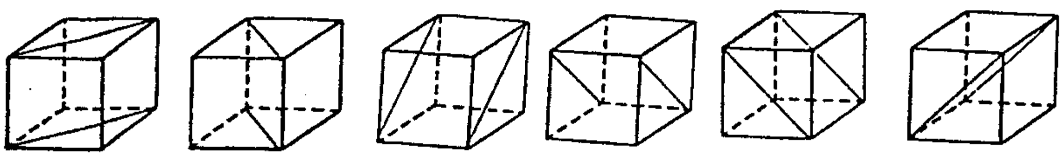


Figura 1.4. Planos de simetría (Guillén, 1991, p. 64)

Determinación de estos planos a partir de su descripción:

- Los planos pasan por diagonales de caras opuestas. Dado que el cubo tiene 3 caras opuestas y que por cada par de caras se tiene 2 pares de diagonales, en total se tiene 6 pares de diagonales y, por tanto, 6 planos de simetría de este tipo.
- Los planos pasan por un par de aristas opuestas (dos aristas son opuestas cuando el plano que forman pasa por el centro del poliedro). Como el cubo tiene 6 pares de aristas opuestas, se tendrá 6 de estos planos.

En relación con lo que se mantiene y que cambia cuando se pasa del plano al espacio

- Los ejes de simetría del polígono se convierten en planos de simetría del prisma correspondiente. 4 planos de simetría del cubo, que corresponden a los ejes de simetría del cuadrado (figura 1.5).

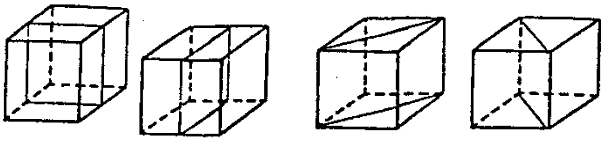


Figura 1.5. Planos de simetría (Guillén, 1991, p. 64)

- Cuando se pasa del polígono al prisma recto aparece un nuevo plano de simetría, paralelo a las dos bases del prisma obtenido (figura 1.6).

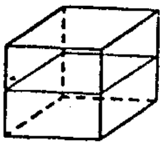


Figura 1.6. Planos de simetría (Guillén, 1991, p. 64)

- Al pasar del cuadrado al cubo aparecen 4 nuevos planos, uno por cada lado del cuadrado. (De los prismas que se pueden obtener a partir del cuadrado sólo se cumple el cubo) (figura 1.7).

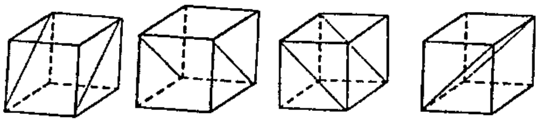


Figura 1.7. Planos de simetría (Guillén, 1991, p. 64)

De forma similar se puede proceder a hallar los planos de simetría de los demás poliedros regulares convexos y que damos cuenta de los resultados en la tabla 1.3.

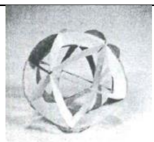
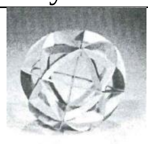
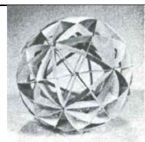
<table>
<tr><td colspan="7">PLANOS DE SIMETRÍA DE LOS POLIEDROS PLATÓNICOS</td></tr>
<tr><td colspan="7">Posición relativa en el espacio</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tetraedro</td><td colspan="3">Cubo y octaedro</td><td colspan="2">Dodecaedro e icosaedro</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="7">Descripción de los planos de simetría en función del poliedro y número de planos</td></tr>
<tr><td>Poliedro</td><td>Que pasan por una arista y el punto medio de otra</td><td>Que son paralelos a pares de caras</td><td>Que son perpendiculares al segmento que une pares de vértices</td><td>Que pasan por pares de aristas opuestas</td><td>Que pasan por puntos medios de pares de aristas opuestas</td><td>Que pasan por pares de aristas opuestas y cortan por el punto medio a otro par de aristas opuestas</td></tr>
<tr><td>Tetraedro</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cubo</td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Octaedro</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>Dodecaedro</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>Icosaedro</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
</table>

Tabla 1.3. Planos de simetría de los poliedros regulares (Guillén, 1991, p. 69)

Guillén (1991) aprovecha el procedimiento de búsqueda de los planos de simetría de los poliedros platónicos para hallar los ejes de rotación, su orden. su número y su posición relativa en el espacio. En Guillén (1991) se puede consultar la actividad matemática que conlleva hallar los ejes de rotación y su orden de la que aquí solo vamos a mostrar en la tabla 1.4 los resultados obtenidos.

<table>
<tr><th colspan="5">EJES DE ROTACIÓN Y ORDEN DE LOS EJES</th></tr>
<tr><td colspan="5">En las rectas donde se cortan dos planos de simetría hay un eje de rotación. El orden de rotación de estos ejes es igual al número de planos que se cortan en ese eje.</td></tr>
<tr><th>Poliedro</th><th>Ejes orden 2</th><th>Ejes orden 3</th><th>Ejes orden 4</th><th>Ejes orden 5</th></tr>
<tr><td>Tetraedro</td><td>3 perpendiculares a secciones cuadradas</td><td>4 perpendiculares a secciones triángulos equiláteros</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Cubo</td><td>6
↓
Perpendiculares a planos de simetría</td><td>4
↓
Perpendiculares a secciones hexagonales</td><td>3
↓
Perpendiculares a planos de simetría</td><td></td></tr>
<tr><td>Octaedro</td><td>↑
6</td><td>↑
4</td><td>↑
3</td><td></td></tr>
<tr><td>Dodecaedro</td><td>15
↓
Perpendiculares a planos de simetría</td><td>10
↓
Perpendiculares a secciones hexagonales regulares o dodecaedro</td><td></td><td>6
↓
Perpendiculares a sección decágono regular</td></tr>
<tr><td>Icosaedro</td><td>↑
15</td><td>↑
10</td><td>-</td><td>↑
6</td></tr>
</table>

Tabla 1.4. Ejes de rotación y orden de los ejes de rotación de los poliedros regulares (Guillén, 1991, p. 76)

1.4.2 El proceso matemático de la clasificación. El trabajo de Guillén (1991, 1997, 2005)

En Guillén (1991, 1997) se destaca la actividad de clasificar como una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y en particular una actividad fundamental en las matemáticas. En un trabajo posterior, siguiendo a De Villiers (1994), la autora señala que un análisis del contenido matemático de la clasificación puede llevar a distinguir la clasificación a priori y la clasificación a posteriori (Guillén, 2005).

Por lo que respecta a la clasificación a posteriori la autora señala:

- La clasificación de los elementos de una familia se considera después de que se conocen durante algún tiempo determinadas figuras geométricas y sus propiedades.

- La función más importante es organizar conceptos.

Mientras que para la clasificación a priori subraya:

- Se entiende que los procesos de generalización y especialización se utilizan deliberadamente para producir nuevos conceptos que se colocan inmediatamente en relaciones jerárquicas o en partición con los otros conceptos existentes.

- La función más importante es descubrir/crear conceptos nuevos. Comenzamos con el concepto más especial, y con la generalización establecemos como conceptos nuevos otras clases.

Un análisis del contenido de la clasificación puede llevar también a otros tipos de clasificación. El listado puede ser bastante largo; por ejemplo, si se consulta Guillén (1991, pp. 23-40), donde se organiza el mundo de los poliedros, se encuentran las siguientes:

- Clasificaciones ingenuas, basada en observaciones ingenuas, por ejemplo, basadas en criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de los elementos de los poliedros. Dentro de este grupo se consideran clasificaciones dicotómicas y clasificaciones en las que las particiones se solapan. En este último caso se distingue si están implicados dos o tres criterios para clasificar. Así, por ejemplo, como mostramos en el diagrama de la figura 1.8, al considerar los tres criterios: regularidad de caras, X, igualdad de caras, Y, e igualdad de los vértices, Z, se establecen ocho familias y una de ellas, representada en el diagrama por XYZ, es la de los poliedros regulares platónicos.

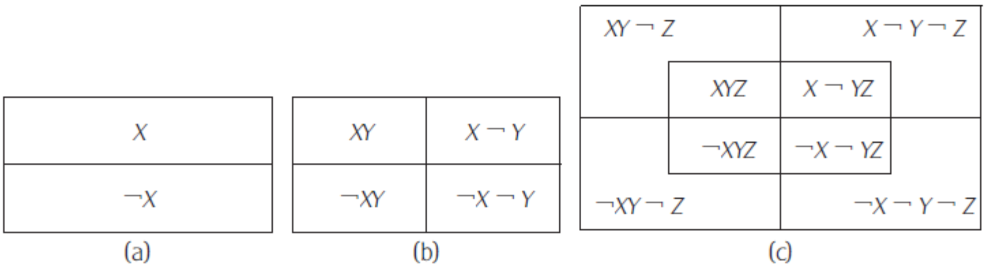


Figura 1.8. Clasificaciones ingenuas (Guillén, 2005, p. 123)

- Clasificar basados en observaciones/percepciones que se hacen sobre los objetos de características que tienen un fuerte componente visual, lo que lleva a que se expresan con terminología visual. Las clasificaciones establecidas son particiones, por ejemplo, se clasifica con los criterios:
    - Tener o no de inclinación.
    - Tener o no bases:
        - Bases regulares o irregulares.
        - Según el polígono de la base.

En nuestra investigación consideramos los tipos de clasificación a las que nos hemos referido en los párrafos anteriores. Vamos a exponer sus características fundamentales, hechas explícitas en Guillén (2005, pp. 129-139).

a) Clasificaciones particiones

Es una clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos que son disjuntos unos con otros. Se tiene una relación de equivalencia y las clases corresponden a las clases de equivalencia.

Las condiciones que se imponen a las clasificaciones particiones son:

- Una vez determinado el universo y el criterio de clasificación, cada ejemplo del universo debe pertenecer a una y sólo a una clase. Las subfamilias establecidas deben ser disjuntas.

- Las distintas subfamilias establecidas en el universo objeto de clasificación deben de dar cuenta de la totalidad de este.

Los tipos de clasificaciones particiones pueden ser clasificaciones establecidas con un criterio (y podemos variar el criterio considerado) o clasificaciones establecidas con varios criterios.

Un ejemplo de clasificación partición se tiene, por ejemplo, cuando en el mundo de los prismas, se establecen los prismas rectos y los prismas oblicuos, figura 1.9.

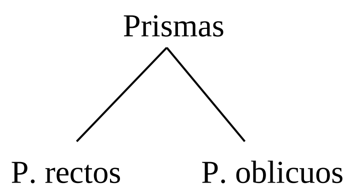


Figura 1.9. Clasificación partición de los prismas (Guillén, 2005, p.130)

Aunque en las clasificaciones donde se superponen las particiones, las clases resultantes, representadas por las casillas en el modelo, son disjuntas, también se pueden considerar las clases que corresponden a uno solo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre unas y otras. Pero en estas clasificaciones, las inclusiones no son lo que se considera como aspecto más importante.

También se puede centrar la atención en el nombre que se da a las subfamilias establecidas. El problema de la clasificación-nombre se aborda poniendo nombres intuitivos: a una subclase que también cumpla una característica se le da el nombre de la clase aumentado con "algo" que unas veces hace referencia a la característica y otras veces no. Cabe comentar también que, cuando un universo se clasifica con varios criterios, como se superponen las particiones, a un mismo elemento de una clase establecida con varios criterios se le pueden dar varios nombres diferentes, que provienen de cada una de las clasificaciones establecidas a partir de cada uno de los diferentes criterios.

b) Clasificaciones jerárquicas o inclusivas

Es una clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Se puede ver que este tipo de clasificación, donde las clases están incluidas unas en otras, proviene de las relaciones de orden. Estas relaciones establecen una jerarquía entre los elementos del conjunto.

Se pueden representar mediante un modelo que es una red (también en árbol). Las clasificaciones inclusivas más naturales son en las que a las clases resultantes les damos el nombre genérico y uno o varios adjetivos. Las familias establecidas pueden tener varios nombres: correspondientes a los de todas las familias que las contienen, figura 1.10.

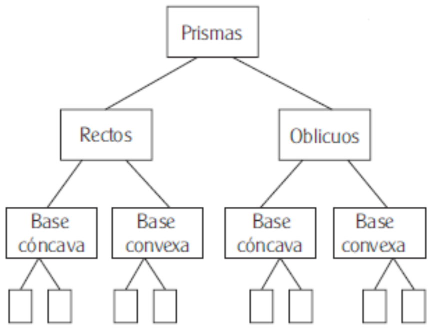


Figura 1.10. Clasificación jerárquica de los prismas (Guillén, 2005, p.133)

c) Clasificaciones con criterios de construcción

Cuando se utiliza material manipulable, también se puede clasificar. Los criterios que se pueden usar son condiciones que se imponen para construir; restricciones respecto al material que se puede utilizar o respecto de cómo juntar las caras alrededor de cada vértice del poliedro. Siguiendo las condiciones impuestas, se construyen los elementos de familias. Por ejemplo, cuando la norma que se impone para la construcción (criterio utilizado para clasificar) es que se utilicen polígonos regulares, se obtendrán poliedros de caras regulares: poliedros platónicos, deltaedros, etc.

La diferencia de esta forma de clasificar con las clasificaciones basadas en observaciones es que en estas últimas en cierto modo se tiene en mente todo el universo, los poliedros que pertenecen a una clase y los que no. Se hacen clasificaciones dicotómicas, esto es, se divide el universo y no nos preocupa si cada una de las partes tiene elementos o no. Sin embargo, cuando se construyen poliedros con unas condiciones impuestas, en realidad no se está clasificando, no se tiene el universo presente en su totalidad; el universo que se tiene en la cabeza se va ampliando a medida que se van construyendo más poliedros y, al finalizar, los poliedros en los que se piensa son exclusivamente los que se han construido. El modelo que lo representa se muestra en la figura 1.11

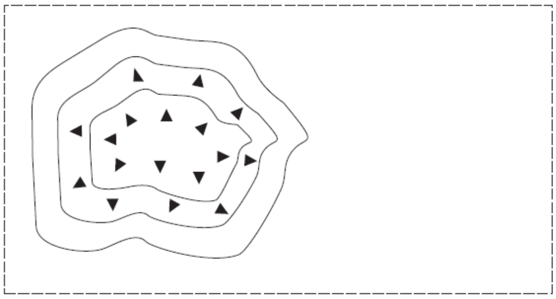


Figura 1.11. Clasificaciones con criterios de construcción (Guillén, 2005, p. 135)

Las clasificaciones basadas en criterios de construcción inciden en la determinación de los elementos de las clases; sólo después, si se quiere, se ve si las clases construidas están interconectadas o no. Sin embargo, como ya se ha dicho, en las clasificaciones basadas en observaciones, lo fundamental es el establecimiento de las clases, el que sean particiones o particiones superpuestas, o la relación de inclusión entre ellas.

d) Clasificaciones por analogía

En esta clasificación en las que se relaciona el plano y el espacio, es decir, una vez establecida una clasificación en el plano y delimitadas las analogías entre los elementos análogos del plano y del espacio, se tiene la clasificación en el espacio. Cuando se clasifica de esta manera, se subraya que algunos problemas resueltos en el plano se pueden aplicar para resolver los correspondientes en el espacio.

Los aspectos fundamentales de esta clasificación son el establecimiento de elementos análogos del plano y del espacio y la verificación de si se mantiene en el espacio una clasificación análoga a la del plano.

Hay que tener en cuenta que la analogía no siempre proporciona conjeturas correctas. Por ejemplo, cuando nos planteamos el problema de determinar todos los poliedros regulares, no podemos generalizar el resultado del problema análogo en el plano; mientras que hay infinitos polígonos regulares, sólo hay 5 poliedros regulares convexos. Ahora bien, la analogía sí funciona en la clasificación de algunos prismas cuadrangulares. La clasificación de los cuadriláteros podemos aprovecharla para la clasificación de algunos prismas cuadrangulares, especialmente los rectos. En la figura 1.12 mostramos diagramas de estas clasificaciones.

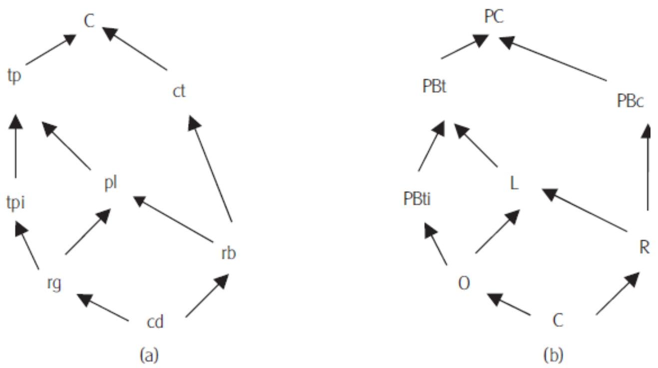


Figura 1.12. Clasificaciones de los prismas por analogía (Guillén, 2005, p. 136)

Se señala lo importante que puede ser establecer los elementos análogos entre el plano y el espacio y verificar si comparten relaciones que son pertinentes para el problema. También se puede centrar la atención en los nombres que aparecen en los diagramas de la figura 1.12. Puesto que unos corresponden a elementos del plano y otros a elementos del espacio, puede aparecer una nueva dificultad.

e) Clasificaciones con criterios cuantitativos

Guillén (1991) señala que en esta clasificación se refleja una idea de cantidad. Por ejemplo, cuando el universo de los poliedros se clasifica con el atributo «tener 2n vértices. 3n aristas y n + 2 caras, siendo n un numero natural» se separan los prismas de los poliedros que no lo son.

Esta clasificación conlleva bastante dificultad porque:

- proviene de una observaci6n no tan ingenua. pues está basada en el análisis: «el número de caras de un prisma depende de ...»

- hay una generalizaci6n: «en un prisma. cuando el polígono de la base tiene n lados el número de caras es n + 2, su número de aristas es 3n, su número de vértices es 2m>: es decir. se sustituye un caso concreto. polígono de 5, 6.... lados por una variable

- hay varias relaciones simbolizadas con las dificultades que conllevan ambas cosas.

1.4.3 Establecimiento de relaciones. El trabajo de Guillén (1991)

En este trabajo también consideramos relaciones entre elementos del plano y del espacio y relaciones entre distintos sólidos. Presentamos relaciones entre las secciones que se obtienen al cortar un sólido de determinada manera y el sólido de partida y describimos aspectos que enfatizamos en los cursos relativos a las relaciones de inscripción y dualidad entre los poliedros regulares. Puede notarse que lo descrito en este apartado se ha tomado del trabajo de Guillén (1991) casi textualmente.

En relación con las relaciones relativas a cortar y descomponer un poliedro, al igual que en Guillén (1991), nos hemos centrado primero en obtener secciones en el cubo, por ser tan familiar, cuando se realizan cortes perpendiculares a los diferentes ejes de rotación. También hemos considerado la descomposición del cubo en 3 y en 6 pirámides iguales.

Si consideramos las características de los poliedros regulares, cabe resaltar las relaciones de igualdad que existen entre las características numéricas de los diferentes elementos, relaciones que se muestran visualmente en la tabla 1.5.

	C	V	A	O. de V.	Nº lados C.
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

Tabla 1.5. Características numéricas de los poliedros regulares. Relaciones

Si nos fijamos en las simetrías de los poliedros regulares, destacamos los modelos de las simetrías de los distintos poliedros regulares; en ellos se pueden encontrar planos de simetría y ejes de rotación con la misma disposición en el espacio. Guillén (1991, pp. 89-99) aclara que de las posibles inscripciones entre los poliedros platónicos le interesan aquellas en las que los poliedros están colocados de manera que las simetrías comunes coincidan y destaca que los pares de poliedros platónicos que pueden introducirse uno en otro de esta manera, se pueden establecer de manera sistemática razonando de la siguiente manera: Como el cubo y el octaedro tienen las mismas simetrías, se podrán inscribir en los mismos poliedros, y también podrán inscribirse en ellos los mismos poliedros. Lo mismo ocurre con el dodecaedro e icosaedro. Además, teniendo en cuenta que el conjunto de las simetrías del tetraedro es un subgrupo del conjunto de las simetrías del cubo y que hay simetrías comunes al cubo y dodecaedro, tetraedro y dodecaedro, se concluye que los siguientes pares de poliedros pueden introducirse uno en otro porque tienen simetrías comunes:

- El octaedro en el cubo y viceversa. El dodecaedro en el icosaedro y viceversa.
- El tetraedro en el cubo y en el octaedro.
- El tetraedro en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro en el tetraedro.
- El cubo en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El octaedro en el dodecaedro y en el icosaedro.
- El dodecaedro y el icosaedro en el cubo y en el octaedro. (Guillén, 1991, p. 90)

Una vez delimitados los pares de poliedros que pueden colocarse haciendo coincidir las simetrías comunes, Guillén (1991) describe estos modelos que corresponden a un poliedro inscrito en otro, descripción que conlleva gran actividad para los estudiantes. Se centra en los que se obtienen considerando un tamaño adecuado de los poliedros que forman el modelo para que el poliedro que queda en el interior toque al que queda en el exterior y no sobresalga y en aquellos en los que las aristas de ambos se cortan perpendicularmente. Cabe subrayarse que, dado que los pares de poliedros de los diferentes modelos comparten todas las simetrías, el modelo resultante también las mantiene.

En el primer caso, como se puede contemplar en la tabla 1.5:

- Los vértices del poliedro inscrito están en los centros de las caras del otro poliedro.

- Por cada vértice del poliedro inscrito aparece una cara del poliedro circunscrito- poliedro que queda en el exterior-, perpendicular al eje de rotación que pasa por ese vértice.

- Cada vértice del poliedro circunscrito se corresponde con una cara del poliedro inicial, perpendicular al eje de rotación que pasa por ese vértice.

- Por cada arista del poliedro inscrito aparece una arista en el sólido circunscrito. Estas se cruzan perpendicularmente y el eje de rotación que pasa por los puntos medios de las aristas del poliedro inscrito lo es también del circunscrito, y a su vez pasa por los puntos medias de las aristas de este.

- El número de lados de las caras de un sólido coincide con el orden de los vértices del otro sólido.

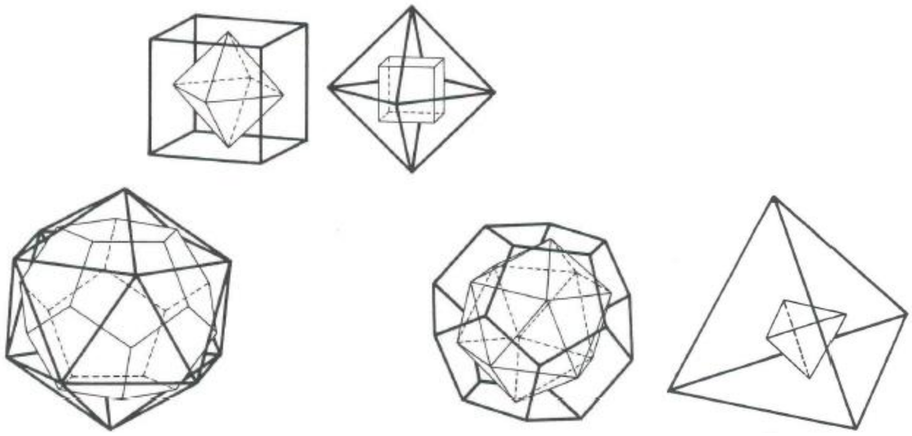


Figura 1.13. Interrelaciones de los poliedros platónicos (Guillén, 1991, pp. 91 y 98)

Los poliedros que están interrelacionados de esta manera se les llama duales o recíprocos.

De esta idea de poliedros duales se deduce que en estos poliedros se intercambiará el número de caras y de vértices y el número de aristas coincidirá. Además, los vértices se corresponderán con los centros de las caras y su orden será igual al número de lados del polígono de las caras.

Los poliedros regulares convexos se pueden agrupar como sigue: el cubo y el octaedro son duales: el dodecaedro y el icosaedro son duales.

El tetraedro es el dual de sí mismo. Como se muestra en la figura 1.13 los dos tetraedros también se pueden colocar de manera que se mantengan sus simetrías: que cada vértice se corresponda con una cara perpendicular al eje de rotación que pasa por ese vértice: que las aristas se crucen perpendicularmente. En el tetraedro el número de caras y de vértices se intercambia y el orden de sus vértices coincide con el número de lados del polígono de sus caras.

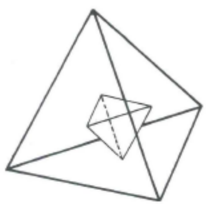


Figura 1.18. Tetraedro dual de sí mismo (Guillén, 1991, p. 98)

Además, cumplen las siguientes relaciones:

a) $$\frac{N^{o}\, lados C \bullet C}{2} = A = \frac{Orden V \bullet V}{2}$$

b) La fórmula de Euler:

$$C + V = A + 2$$

1.4.4 Las representaciones en Geometría

Las representaciones en Geometría han sido, por sí solas, un núcleo central de interés. Las representaciones gráficas, planas o espaciales, tienen una larga tradición y prestigio, habiéndose de distinguir las representaciones al servicio del propio razonamiento geométrico de las representaciones que gracias a la Geometría posibilitan hacer mapas, planos y diseños (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987). Las representaciones visuales permiten comprender los conceptos muchísimo más eficazmente que determinadas frases verbales o descripciones sintéticas (Alsina et al., 1987; Gutiérrez y Jaime, 1996).

Alsina et al. (1987) señala la importancia de la representación gráfica siendo una manera de comunicación, un lenguaje para expresar y construir los conocimientos geométricos. Aquí señalaremos las representaciones gráficas más significativas (1.4.4.1) y nos centraremos en las diferentes representaciones que podemos tener de un poliedro (1.4.4.2).

1.4.4.1 La representación grafica

Alsina et al. (1987) señalan la importancia de la representación gráfica siendo una manera de comunicación, un lenguaje para expresar y construir los conocimientos geométricos. La expresión gráfica se realiza por medio de esquemas, figuras y dibujos mucho más sencillos y directos que los símbolos de la escritura. Es una herramienta muy útil en la resolución de problemas. Algunas veces la representación gráfica de los datos de un problema puede sugerirnos las estrategias para encontrar su solución. En Geometría, no sólo es importante para expresar formas, sino que lo es para comprender razonamientos. Estos autores añaden que básicamente hay dos clases de representación gráfica: la representación de objetos reales o concretos y la representación de ideas abstractas. A continuación, se comentará brevemente las representaciones gráficas más significativas señaladas por Alsina el al. (1987) en cuanto a sus aplicaciones.

a) La representación gráfica plana

Hay dos posibilidades. La primera consiste en hacer una reproducción exacta de la figura inicial por medio de un cambio de escala. Esta exige como dificultad perceptiva el hacer un pequeño razonamiento de proporcionalidad. La segunda consiste en la reproducción perspectiva, que implica el reconocer una figura desde diferentes puntos de vista y, por tanto, la dificultad perceptual reside en tener desarrollada la habilidad de la constancia perceptiva.

Hay tres tipos de representaciones abstractas: el dibujo técnico exacto, el dibujo topográfico aproximado y los grafos topológicos. El primer caso consiste en hacer una copia perfecta de la figura; su única dificultad se deriva de tener un desarrollo de la habilidad de coordinación visual-motora en el manejo de los instrumentos geométricos clásicos (regla-compás, etc.) o modernos (pantalla interactiva de ordenadores).

En cuanto al segundo caso, consiste en dibujar e interpretar planos de ciudades, mapas de carreteras, etc.; las dificultades estriban en establecer o fijar posiciones y orientaciones en el espacio.

El tercer tipo, que es el que exige más abstracción, es el de reconocer relaciones topológicas de incidencia, conectividad y continuidad, etc., en redes tanto de comunicación (por ejemplo, planos de metro de una ciudad) como de funcionamiento (diagrama de circuitos integrados).

b) La representación gráfica del espacio

Entre las representaciones más significativas por su utilidad práctica y formativa citaremos:

b.1) Las proyecciones ortogonales

Consiste en un grupo de dibujos que corresponden a cada una de las caras de un objeto cuando es observado perpendicularmente enfrente de cada cara (figura 1.19).

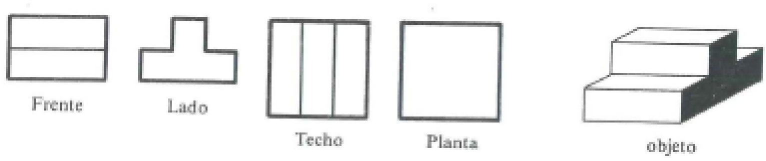


Figura 1.19. Proyecciones ortogonales (Alsina el al., 1987, p. 67)

b.2) Los dibujos isométricos

Se reproducen tres caras adyacentes del objeto de manera que los ángulos del punto de vista sean de 120° (figura 1.20).

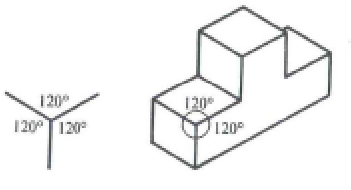


Figura 1.20. Dibujos isométricos (Alsina el al., 1987, p. 67)

b.3) Los dibujos en perspectiva

Se da la «verdadera» imagen del objeto (figura 1.21).

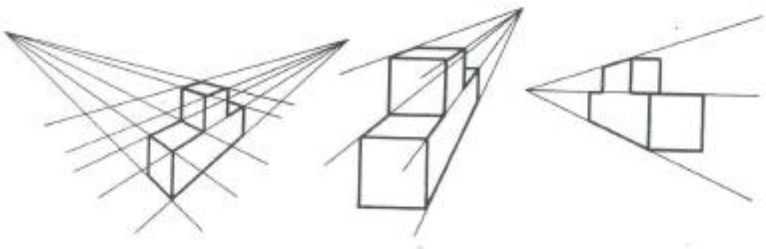


Figura 1.21. Dibujos en perspectiva (Alsina el al., 1987, p. 67)

b.4) Cortes de nivel topográfico

Se dan diferentes cortes, planos a alturas determinadas (figura 1.22).

Además de estas representaciones convencionales es muy pedagógico proponer otras representaciones personales.

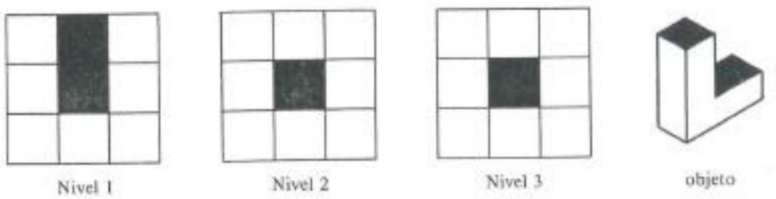


Figura 1.22. Cortes de nivel topográfico (Alsina el al., 1987, p. 67)

1.4.4.2 Representaciones de un poliedro

Entre las representaciones planas de los sólidos que vamos a considerar, además de su dibujo en perspectiva, van a ser sus desarrollos y diagramas de Schlegel. En el subapartado 1.6.6.2 indicamos la actividad matemática que puede desarrollar a partir de los desarrollos de un poliedro, tomando éstos como situación-contexto. También trabajamos en los cursos, los diagramas de Schlegel. Desde el trabajo de Guillén (1991, pp. 186-188) les aclaramos que diagrama de Schlegel es una representación del poliedro que consiste en mirar e1 esqueleto de un poliedro, situando el punto de mira muy próximo al centro de una de las caras y proyectar sobre un plano el conjunto de aristas, apareciendo un polígono más grande -que es la cara por la que se mira- que contiene al resto de las caras (figura 1.23).

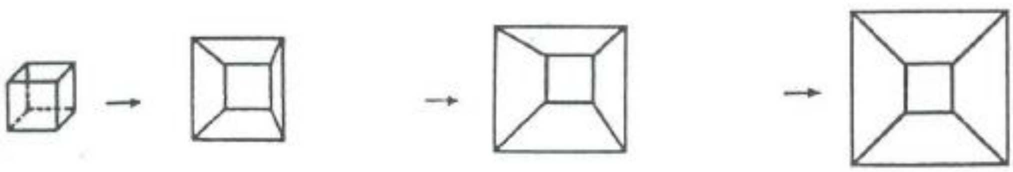


Figura 1.23. Diagrama de Schlegel del cubo (Guillén, 1991, p.186)

Las acciones permitidas en esta transformación son: estirar o encoger; girar hacia dentro o hacia fuera; pero no está permitido romper, pegar o cruzar.

En este estudio se contempla el conocimiento y uso que se hace en la enseñanza/aprendizaje de estas representaciones simbólicas.

1.5 Poniendo el punto de mira en los estudiantes

Cabe remarcar que las características que tiene el trabajo al considerar profesores como ámbito de estudio conlleva que, por un lado, examinemos trabajos que se refieren al aprendizaje de contenidos geométricos por los propios profesores y, por otro, al análisis que estos profesores realizan sobre la actividad matemática que puede desarrollar en sus clases a partir de estos contenidos y a las observaciones y reflexiones que realizan sobre el aprendizaje de los mismos, trabajos que describimos brevemente en esta sección.

Considerando que describir, clasificar, definir…; se puede usar, como contenido matemático y como actividad, al considerar las acciones que realizan los estudiantes al estudiar estos procesos matemáticos como componentes de la práctica escolar, en el apartado 1.5.1 damos cuenta brevemente la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de los procesos matemáticos y relaciones analizadas brevemente en la sección anterior. Para el diseño de los cursos nos hemos fijado especialmente en la actividad destacada en este resumen.

En nuestro estudio hemos incidido asimismo en dificultades y errores que afrontan algunos profesores en el aprendizaje de algunos contenidos geométricos que les ha llevado a cometer algunos errores. Estudios que reseñamos en el apartado 1.5.2 aportan información al respecto y los del apartado 1.5.3 dan cuenta del comportamiento de algunos estudiantes que han participado en estudios de investigación. Desde ellos hemos elaborado parte del listado de cuestiones que han guiado nuestro análisis y de las que damos cuenta en la sección 2.2 del capítulo 2 y los resultados que presentamos en el capítulo 3 también los contrastamos con los obtenidos en estas investigaciones.

1.5.1 Las acciones de analizar, describir, clasificar como componentes de la práctica matemática

Para un análisis detallado de la actividad matemática relacionada con los contenidos geométricos tratados en este estudio, que hemos descrito en la sección 1.4. remitimos a Guillén (2004), donde se realiza un análisis de la actividad matemática asociada a la descripción, a Guillén (2005) que incluye la referida a la clasificación y a Guillén (2001, 2010) para el estudio de relaciones. Así, por ejemplo, en relación con la clasificación Guillén (2005) propone:

- Considerar como criterios de clasificación diferentes características.
- Variar el mundo que es objeto de clasificación.
- Reflexionar sobre lo que puede considerarse o no como criterio de clasificación para un universo dado.

- Establecer diferentes tipos de clasificación donde se aborden diferentes problemas para los que posiblemente los estudiantes enfrenten dificultades que los lleven a cometer determinados errores.

- Tratar otros problemas ligados a la clasificación:

    - Diferentes diagramas que las representan.

    - Las relaciones entre familias.

    - Las diferentes maneras de expresarlas.

    - Situaciones diferentes porque cambia la relación que existe entre las familias o porque cambia la manera como se presentan las relaciones.

    - Propiedades de las subfamilias establecidas.

- Abordar problemas conectados con la clasificación que no son propios de ella. Por ejemplo, el nombre que se da a las subfamilias que se establecen.

- Tratar problemas que relacionan el proceso de clasificar con otros procesos:

    - El tipo de clasificación establecida y la descripción/definición de familias

    - La descripción/definición de familias y el tipo de clasificación que se establece.

    - El tipo de clasificación establecida y la demostración de propiedades.

Y según Guillén (1991), cuando se corta un poliedro, se puede centrar la atención en las diversas secciones, en los perímetros de los cortes y en la relación que se puede establecer entre el plano y el espacio. A partir de un cubo y haciendo cortes en un vértice, se pueden plantear las siguientes preguntas:

- ¿Dónde habría que situarse y con qué ángulo para obtener triángulos equiláteros? Si se continúa, ¿qué sucede?
  Llegado al triángulo equilátero mayor y se continúa cortando con planos paralelos ¿En que se transforman las secciones?
  Los hexágonos irregulares ¿Llega un momento en que el hexágono es regular? ¿Y luego?
  ¿Qué les pasa a los triángulos? ¿Y a los hexágonos? ¿Aumentan o disminuyen?
  ¿Cuál es la secuencia de polígonos producida?
  ¿Qué otros tipos de triángulos se pueden obtener como sección de corte?
  ¿Es posible obtener triángulos rectángulos? ¿Cómo hay que dar el corte? ¿Por qué?

- Si se corta un cubo con la secuencia que se indica en la figura 1.24, ¿se podrá obtener un cuadrado? ¿Qué ocurre con los perímetros de los rectángulos que se van obteniendo?

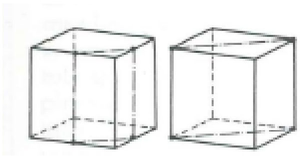


Figura 1.24. Cortes en un cubo (Guillén, 1991, p. 82)

- En un cubo mediante cortes paralelos, ¿es posible obtener secciones que produzcan la secuencia de polígonos: triangulo- cuadrilátero- triangulo? ¿Cómo ha de ser el corte inicial? ¿Aparecen también hexágonos en esa secuencia? Véase la figura 1.25.

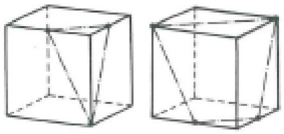


Figura 1.25. Cortes en un cubo (Guillén, 1991, p. 82)

Si en lo que nos fijamos es en la descomposición de poliedros, según Guillén (1991), se pueden trabajar relaciones entre los sólidos y figuras planas cuando se plantean cuestiones como las siguientes:

- ¿En cuántas pirámides iguales se puede descomponer el cubo y cómo?

- Si a cada una de las caras del cubo se añade una de estas pirámides ¿Qué sólido se obtiene?
  ¿Qué propiedad tiene el sólido formado en relación con el espacio?

- ¿Qué sucede si se añaden a las caras de un poliedro regular las pirámides que tienen el ápice en el centro del poliedro y por base una cara?

Referido a las relaciones de inscripción y dualidad entre los poliedros platónicos, esta autora propone desarrollar la actividad matemática sin dar la definición, sino estudiando la relaciones e interrelaciones entre los poliedros regulares convexos con ejemplos.

1.5.2 ¿Cómo se aprenden contenidos geométricos? Dificultades y errores

Los trabajos de este apartado los organizamos según el énfasis que ponen en diferentes aspectos. El subapartado 1.5.2.1 se centra en cómo se construyen los conceptos geométricos o se amplían las imágenes mentales de los estudiantes según algunos autores; considerando que las caras de los sólidos son figuras planas, retomamos estudios que se han fijado en ejemplos prototípicos de algunos polígonos. El subapartado 1.5.2.2 permite delimitar tipología de errores y desde las distinciones que hacen otros investigadores precisaremos aquellos tipos que sí se presentan en las respuestas de los profesores que participan en nuestro estudio. El subapartado 1.5.2.3 el énfasis lo pone en dificultades que se han enumerado como que pueden presentarse al estudiar los contenidos geométricos tratados en nuestros cursos, que llevan a que se puedan tener algunas ideas erróneas que se delimitan, y el subapartado 1.5.2.4 se fija en trabajos que puedan ser referentes especiales para el análisis cualitativo y cuantitativo que realizamos de las respuestas de los profesores que participaron en el estudio.

1.5.2.1 Las imágenes conceptuales de los estudiantes sobre conceptos geométricos. Los prototipos geométricos

Hershkowitz (1990), citado por Gutiérrez y Jaime (1996), describe tres tipos de comportamiento de los estudiantes identificados por el modelo de Vinner, dependiendo de la calidad de las imágenes conceptuales de un estudiante.

En primer lugar, los estudiantes con las imágenes conceptuales más pobres, formadas por unos pocos ejemplos prototípicos y propiedades de tipo visual, basan sus juicios en la apariencia visual de esos prototipos, comparándolos con las figuras sobre las que deben trabajar y rechazando como ejemplos aquellas figuras que no *coinciden con los prototipos* de su imagen del concepto.

Otro tipo de estudiantes son aquéllos cuyas imágenes mentales siguen teniendo unos pocos ejemplos prototípicos pero que también incluyen propiedades matemáticas de las figuras. Estos estudiantes centran sus juicios en las propiedades de esos ejemplos, que intentan aplicar a las figuras con las que deben trabajar, rechazando como ejemplos las figuras que no verifican dichas propiedades.

El tercer tipo de comportamiento descrito por el modelo de Vinner corresponde a los estudiantes que han sido capaces de construir imágenes conceptuales completas, es decir, conteniendo una amplia variedad de ejemplos y todas las propiedades importantes de los mismos. Los ejemplos concretos tienen ahora un papel complementario para dar ideas, verificar conjeturas, etc. que después se corroboran o formalizan al usar las propiedades matemáticas. Estos estudiantes realizan juicios correctos basados en el análisis y la utilización de las propiedades críticas de los conceptos.

Diferentes estudios han señalado que cuando se necesita lograr que los/las educandos/as confeccionen un concepto en geometría se recurre a ejemplos gráficos, visuales, que intentan incorporar una visión más o menos completa de las características del mismo (Alsina et al., 1987; Rey, 2004; Moriena y Scaglia, 2003). Anteriormente Vinner (1991) los había definido como atributos relevantes porque conllevan unas propiedades que lo hacen ser lo que es y lo distinguen de los demás. Rey (2004), siguiendo a Hershkowitz (1990, 2002), a los ejemplos que se recurre en general por cumplir la mayor parte de propiedades del objeto geométrico en cuestión les llama prototipos. Sin embargo, se señala que estos prototipos conllevan un riesgo consigo y es el de la identificación única y establecimiento de los mismos como los únicos ejemplos válidos del objeto en cuestión. De igual modo, Moriena y Scaglia (2003) subrayan que los libros de texto utilizan normalmente representaciones gráficas que poseen ciertas características visuales, relacionadas principalmente con la posición, que son irrelevantes para el concepto, pero que influyen en la apreciación del alumnado, llamándoles representación gráfica estereotipada.

En la tabla 1.6, se muestran algunos ejemplos tomados de Rey (2004, pp. 4-5). Estas representaciones pueden traer consecuencias en la elaboración de los conceptos correspondientes porque pueden que estén portándose más que como un ejemplo o caso particular no generalizable, como “la definición misma” del objeto.

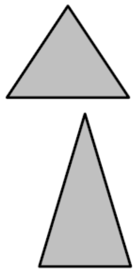
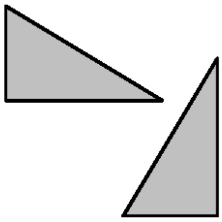
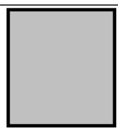
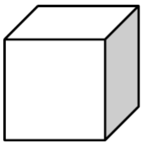
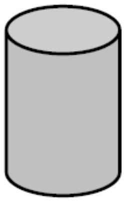
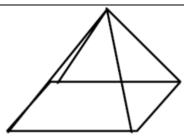
Objeto geométrico	Ejemplo	Características
Triángulo		Como prototipos aparecen siempre triángulos equiláteros o isósceles. En muchos casos los triángulos siempre tienen uno de sus lados ubicados en forma horizontal (a modo de base) y en el caso de los isósceles siempre ubicados de esa manera y además, con una relación lado mayor-lado menor que identifique adecuadamente la diferencia entre los lados.
Triángulo rectángulo		En este caso los prototipos son siempre triángulos con uno de sus lados como base (siempre uno de sus catetos, es decir, el ángulo recto ubicado en posición horizontal-vertical) y siempre además los catetos de distinta medida.
Cuadrado		El prototipo del cuadrado desde ya, utiliza siempre un lado como base.
Cubo		Para el cubo se utiliza siempre este prototipo en el cual se encuentra en posición “de apoyo” sobre una superficie inexistente.
Cilindro		El cilindro se encuentra en la gran mayoría de los casos ubicado en posición vertical con una de las superficies circulares como base, y además con una relación “alto-ancho” lo suficientemente amplia para mostrar un “cilindro estilizado”.
Pirámide		Las pirámides son siempre rectas y con una de sus caras como base, y de medidas también “estilizadas”.

Tabla 1.6. Prototipos geométricos (Rey, 2004, pp. 4-5)

A continuación, exponemos la tabla 1.7 propuesta por Rey (2004, pp. 5-6) en la que se muestran algunos de los mismos ejemplos con representaciones que no son las clásicas (prototipos) ya que no muestran a simple vista algunas de esas características tan importantes que se desean incorporar como parte de la definición del objeto de que se esté tratando.

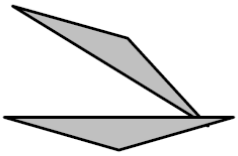
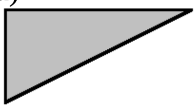
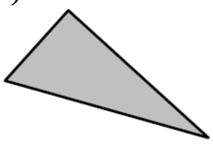
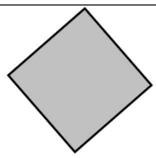
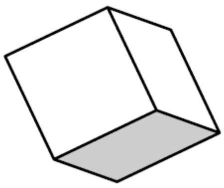
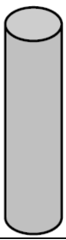
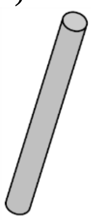
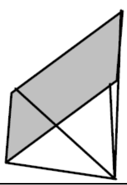
Objeto geométrico	Ejemplo	Características
Triángulo	a)  b) y c) 	Los tres ejemplos aquí montados son triángulos isósceles, pero: el caso a) es demasiado "achatado" para ser buen ejemplo. Los casos b) y c) no están en una posición "natural" y, además, la relación lado igual-lado desigual no está tan clara.
Triángulo rectángulo	a)  b) 	El caso a) no está en posición "natural" mientras que el caso b) ni siquiera muestra claramente el ángulo recto en posición horizontal-vertical.
Cuadrado		Este cuadrado se reconocerá como rombo y no como cuadrado.
Cubo		Probablemente no se reconocerá como cubo.
Cilindro	a)  b)  c) 	El caso a) se reconocerá como moneda y el b) y c) como "tubos" o "caños", pero no como cilindros. Además de la relación ancho-largo, el cilindro c) no se encuentra en la posición "natural".
Pirámide		No se reconocerá como pirámide debido a la posición en la cual se encuentra representada.

Tabla 1.7. Figuras no prototipos geométricos (Rey, 2004, pp. 5-6)

Si bien Rey (2004) apunta que los prototipos tienen una gran cantidad de ventajas ya que muestran la mayor cantidad posible de propiedades del objeto en cuestión, también remarca las desventajas que pueden conllevar. Como ejemplo comenta que los/as estudiantes para identificar si un triángulo rectángulo debe de actuar un cateo como base y verse claramente el ángulo recto. Moriena y Scaglia (2003) remarcan que el alumnado tiene que aplicar sus conocimientos conceptuales de las formas geométricas sobre dibujos no estereotipados de ellas. Estas autoras señalan la influencia que tiene las representaciones gráficas al mostrar propiedades espaciales (forma, posición y magnitud).

Asimismo, Blanco y Crespo (2007) y Rey (2004) matizan que es muy importante tener en cuenta que los ejemplos presentados son las representaciones del objeto. Subrayan que los objetos geométricos son entes abstractos y factibles de comprender a partir de sus definiciones y, sus representaciones, son la concretización de un objeto que no lo es y por lo tanto no cumple con las características totales del mismo. Sin embargo, hay que señalar que se llegaría a un conflicto si al alumnado se le dijera que la figura 1.26 no se trata de un triángulo rectángulo sino sólo una representación de uno.

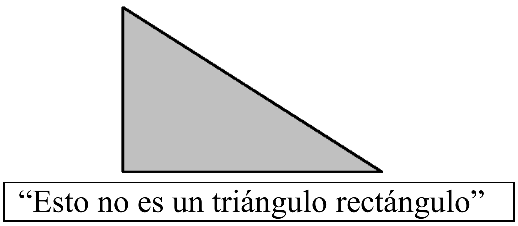


Figura 1.26. Representación de un triángulo rectángulo (Rey, 2004, p. 8)

Rey (2004) apunta que esta diferencia entre concepto mismo y sus representaciones es trabajada y desarrollada profundamente a partir del denominado doble status de los objetos geométricos por diferentes investigadores (Douady, 1986, 1998; Mesquita, 1992; Laborde, 1996; Parzysz, 2002).

1.5.2.2 Tipología de errores en el aprendizaje de las matemáticas

Hay una diversidad de trabajos que han enumerado diferentes tipos de errores que se producen en el aprendizaje de las matemáticas; en este apartado vamos a enumerar los que han precisado algunos investigadores y que han sido citados por Franchi y Hernández (2004, pp. 66-67).

Brousseau (2001) concluye que los profesores suelen clasificar al error como:

- Error a nivel práctico cuando es debido a un error de cálculo.
- Error en la tarea cuando es producido por un descuido del alumno o alumna.
- Error de técnica cuando no es correcta ejecución de un modo operativo conocido.
- Error de tecnología cuando se cuestiona la elección de la técnica.
- Error de nivel teórico cuando se atribuyen a los conocimientos teóricos que sirven de base a la tecnología y a las técnicas asociadas. (Franchi y Hernández, 2004, p. 66)

Socas (1997) considera que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas son debidas a una serie de errores que clasifica en:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo, es decir, en un conocimiento que adecuado para un contexto determinado y que el alumnado lo aplica en un contexto inadecuado.

- Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido, especificando:
    - Errores que tienen su origen en la aritmética.
    - Errores de procedimiento, debido a que se usan fórmulas o reglas de procedimiento no adecuadas.
    - Errores debidos a no utilizar correctamente el lenguaje matemático.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas mostrando bloqueo, fracaso, inseguridad …

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky y Inbar (1987) los clasifican en:

- Errores debidos a datos mal utilizados, donde los datos proporcionados en el problema no se usan correctamente.
- Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje, donde no hay concordancia entre el lenguaje utilizado y su traducción matemática.
- Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente, mostrándose en deducciones incorrectas.
- Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados, aplicando los teoremas o definiciones incorrectamente.
- Errores debidos a la falta de verificación en la solución, donde la solución obtenida no es correcta pese a haber realizado correctamente el procedimiento.
- Errores técnicos, siendo estos de cálculo o de procedimiento.

Radatz (1979) parte del procesamiento de la información y delimita:

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje, siendo un hándicap el aprendizaje de los conceptos, vocabulario y símbolos en matemáticas.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, no siendo capaz el alumnado de llevar a cabo una representación espacial de una figura geométrica.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, mostrándose procedimientos erróneos, desconocimiento de conceptos, etc.
- Errores debido a rigidez del pensamiento, aplicando determinados conocimientos en situaciones inapropiadas para ellos.

- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, desarrollando algoritmos, estrategias de resolución o reglas de forma incorrecta.

Astolfi (1999) los establece para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Errores por la comprensión de las instrucciones de trabajo, que son como consecuencia de la dificultad que tienen en la compresión de las tareas o actividades propuestas.

- Errores como consecuencia de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas, que son debidos a diferentes costumbres que se tiene a la hora de resolver las tareas propuestas.

- Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos, debidos a la aplicación de conceptos que anteriormente le han sido válidos, pero que no lo son ahora.

- Errores vinculados con las operaciones intelectuales implicadas, donde el alumnado realiza operaciones que no domina.

- Errores debidos a los procesos adoptados, cuando el alumnado utiliza un método diferente del modélico que se ha explicado en clase lo que hace que cometa incorrecciones.

- Errores ocasionados por la sobrecarga cognitiva que pueda llevar la actividad, donde la limitación de memoria hace que no pueda llevar a cabo el ejercicio de una forma rápida y correcta.

- Errores que tienen su origen en otra disciplina, haciendo que le desconocimiento de los conceptos y contenidos de otras disciplinas influyan en la resolución de la tarea propuesta.

- Errores debidos a la complejidad del contenido, donde el alumnado muestra dificultades en el manejo y aplicación de los contenidos que se han enseñado en clase.

Cabe aclarar que tipos de errores que han listado los autores señalados en los párrafos anteriores los hemos adaptado a nuestra área específica de la geometría y los tomamos como referente para las agrupaciones que hacemos para los que se muestran en las respuestas de los participantes en nuestra experimentación. Así, por ejemplo, nos fijamos en los que Movshovitz et al. (1987) precisan como errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje, errores debidos a inferencias no válidas lógicamente, errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados. Entre los que distingue Radatz (1979) consideramos los que nombra como errores debidos a la dificultad del lenguaje y los errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

1.5.2.3 Dificultades en el aprendizaje de contenidos geométricos. Ideas erróneas de los estudiantes sobre los sólidos

Guillén (2000) subraya la dificultad que presenta para los estudiantes utilizar correctamente el vocabulario geométrico cuando enuncian propiedades o relaciones, especialmente cuando hay implicados conceptos conectados. Esta autora aconseja prestar atención a las ideas y a las propiedades erróneas que tienen los estudiantes y trabajar para que los estudiantes vayan desarrollando su lenguaje geométrico. Considera que, en el estudio de los sólidos, «hay un orden jerárquico en el logro de ejemplos de conceptos» y que los dibujos de objetos geométricos, las propias representaciones físicas de los sólidos y la familiaridad con los objetos influyen en tareas de identificación. Se refiere también a los distractores visuales. Guillén (2000) explica que:

> Las dificultades y errores derivados de las propias representaciones físicas de los sólidos surgen como consecuencia de que los modelos físicos con los que se trabaja en tareas de identificación de formas son objetos del entorno (por ejemplo, botes, cucuruchos, etc.) o representaciones materiales de los sólidos. En el contexto de clase, el estudiante tiene que considerar los modelos físicos, dentro de una interpretación geométrica, pero cuando no se tienen suficientes conocimientos teóricos geométricos, los modelos de los sólidos o de sus elementos se interpretan a partir de una lectura perceptiva. (pp. 48-49)

Por lo que se refiere a las ideas erróneas sobre los sólidos, esta autora señala:

> Destacamos también las ideas erróneas en las que el nombre que se ha dado a parte de los elementos de los sólidos funciona como distractor (el nombre de *bases* y de *caras laterales*) y las que centran la atención en parte de la figura cuando se debería tener en cuenta toda ella; estas ideas, en muchos casos, pueden llevar asociado un problema de lenguaje. (Guillén, 2000, p. 49)

Y en este mismo trabajo delimita desde donde se pueden explicar las propiedades e ideas erróneas:

> a) El procedimiento utilizado para enunciarlas (extensión de una propiedad a otro contexto o situación); b) el tipo de conceptos implicados en ellas (en las propiedades intervienen relaciones entre familias que se tienen que enunciar o las propiedades incluyen términos similares a como máximo para reflejar el tipo de clasificación que se establece); c) el contenido del concepto (hay diferentes conceptos implicados en la propiedad). Llegar a expresar correctamente este tipo de propiedades conlleva gran dificultad. Resulta bastante difícil que los estudiantes lleguen a utilizar correctamente el vocabulario geométrico para enunciar estas propiedades y relaciones. (Guillén, 2000, p. 49)

En relación con el aprendizaje de los elementos de los sólidos, en este mismo trabajo se subraya dificultades que se presentan para los estudiantes por el nombre que tienen estos elementos (caras, vértices y aristas, diferentes tipos de ángulos y de diagonales) o parte de ellos (bases, caras laterales, orden de un vértice, ...), que les lleva a utilizarlos de manera imprecisa. Cuando se expresan propiedades de familias de sólidos Guillén (2000, pp. 44-50) propone tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Hay elementos del espacio que tienen su análogo en el plano. Por ejemplo, lado en el plano pasa a arista en el espacio y también puede considerarse análogo a cara.

- Hay elementos que se utilizan en el lenguaje corriente con un significado diferente, por lo que hay que romper con la idea que se puede tener de ellos.

En el lenguaje cotidiano se tiene una idea de base como cara de apoyo y esta idea se fomenta con los dibujos que se muestran en la mayoría de los libros de primaria: la mayoría de los ejemplos de prisma se presentan apoyados en las bases. Sin embargo, en un contexto geométrico, las bases de una familia son las que cumplen determinadas propiedades, dependiendo de la familia que se considere. Por ejemplo, para los prismas, las bases son "las dos caras iguales y paralelas que se juntan con paralelogramos".

- Cabe señalar que mientras que el nombre de *caras laterales* es una expresión compuesta que incluye el término *caras*, el de *bases* es un nombre simple que no incluye este término.

- Cuando se indican propiedades relativas a las caras, (o a las aristas), o se tienen que interpretar palabras como "caras" o "aristas", se consideran sólo las caras (o las aristas) laterales. Es decir, el término "cara" o "arista" se interpreta en la respuesta como "cara lateral" o "arista lateral" y no se tiene en cuenta las bases caras o que tienen aristas. del ejemplo considerado.

- Es necesario nombrar los elementos ángulos y diagonales con nombres de la forma "... de…" pues por una parte hay que saber si se habla de ángulos o de diagonales, y por otra hay que dejar claro que estos conceptos están referidos a un polígono o a un sólido.

- Cuando se hace referencia a los diferentes tipos de ángulos y diagonales o propiedades relativas a ellos en las familias de los prismas, antiprismas y pirámides hay que tener en cuenta las caras laterales y las bases y la forma de enunciar las propiedades. Por ejemplo, cuando se enuncia la propiedad de los prismas rectos: "los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de la base".

- Cuando se habla de ángulos o de diagonales referidos a un sólido, o de propiedades de éste relativas a ángulos o a diagonales, hay que especificar a qué ángulos o diagonales nos referimos, porque en los sólidos hay ángulos y diagonales de varios tipos.

En relación con las dificultades que se pueden tener al describir cuando se es capaz de enunciar propiedades relativas a todos los elementos de los sólidos, esta autora también centra la atención en las propiedades que contienen términos de tipo “como máximo”, “como mínimo”, “tantas medidas diferentes como”, o en propiedades que relacionan los elementos de un tipo con los de otro y subraya las grandes dificultades que conllevan. Asimismo, subraya la gran dificultad que conlleva enunciar de golpe grupos de propiedades, como propiedades de una familia que contiene a la que se describe, enunciar propiedades comunes a varias familias, o propiedades de una familia que no las cumplan otras.

1.5.2.4 La identificación de formas geométricas en imágenes. Uso de términos geométricos. Análisis cualitativo y cuantitativo de respuestas de estudiantes

El trabajo de Muñoz y Oller (2013) es especialmente relevante como referente para el análisis cuantitativo y cualitativo que realizamos de las respuestas de los profesores. Estos autores llevan a cabo un estudio en el permita analizar la identificación formas geométricas en imágenes de objetos reales por parte de estudiantes de magisterio en cuatro fotografías. El análisis de las respuestas de los estudiantes lo centran en realizar un análisis cuantitativo y cualitativo.

Por lo que se refiere al análisis cuantitativo analizan los términos que más se han utilizados por parte del alumnado. A partir de ellos, estudian que identifican más si las figuras planas o del espacio, así como el número de términos correctos diferenciando los de la geometría plana de la del espacio. También observan el número de respuestas distintas por estudiantes para contemplar cuánto ven.

En cuanto al análisis cualitativo analizan los términos señalados por el alumnado que no se esperaba aun siendo correcto, analizando las razones de tener un porcentaje elevado. De igual forma, examinan las respuestas incorrectas y clasifican los errores atendiendo al uso de la terminología y en concordancia con Guillén (2010) los causados por trabajar con una representación plana del objeto.

En nuestro caso, también se han utilizado fotografías de objetos del entorno en algunas preguntas para que los docentes los identificaran con figuras geométricas del espacio y los describieran geométricamente. A partir de las respuestas a las cuestiones planteadas se ha llevado a cabo un estudio cuantitativo de si la definición señalada coincide con la idea mostrada de la figura geométrica presentada, los elementos señalados y las propiedades indicadas. Asimismo, se ha realizado en dicho apartado un análisis cualitativo sobre la terminología utilizada por el profesorado.

1.6 La enseñanza de contenidos geométricos

En las secciones 1.4 y 1.5 hemos centrado la atención en los contenidos y en los estudiantes. En esta sección nos fijamos en la enseñanza de estos contenidos, distinguiendo apartados según que los trabajos aporten sugerencias para la instrucción en geometría (apartados 1.6.1), centren la atención en contextos y situaciones que se pueden usar como soporte para desarrollar actividad geométrica (apartado 1.6.2) o incluyan tareas utilizadas para desarrollar nuestros cursos (apartado 1.6.3). Cabe aclarar que en los trabajos se indican además preguntas que planteamos a los profesores para obtener información sobre el desarrollo de los contenidos en sus clases, así como preguntas que han guiado el análisis que hemos realizado de la información aportada con las respuestas de los participantes en nuestro estudio.

1.6.1 Sugerencias para la enseñanza de contenidos geométricos

El cómo llevar a cabo la enseñanza de la geometría ha sido la preocupación de diversos investigadores. Alsina et al. (1987) señalan:

a) El estudio de la Geometría debe estar relacionado con el mundo real. Los alumnos deben tener oportunidad de explorar distintas relaciones espaciales de su entorno, así como buscar, aplicar y transferir relaciones geométricas para analizar los fenómenos naturales, científicos, técnicos, sociales y artísticos.

b) El currículo de Geometría tiene que estar desarrollado según los modelos de conocimiento y aprendizaje de los alumnos. En este sentido la instrucción en Geometría debe favorecer la interacción entre la actividad espacial y la representación mental del espacio.
c) La presentación de la Geometría debe seguir el proceso del desarrollo intelectual, es decir, debe ser gradual y progresiva, empezando con una introducción informal mediante situaciones cotidianas que gradualmente se irán precisando y formalizando. Esta iniciación informal debe permitir el descubrimiento activo, el razonamiento inductivo, la construcción de inferencias y conjeturas, el desarrollo de la percepción visual y la imaginación espacial, etc. (p. 99)

Estos autores acentúan que para conseguir una adecuada instrucción de la Geometría se deben asegurar la formación de conceptos y el desarrollo de las habilidades y procesos en los alumnos conjuntamente. Indican que el alumnado juega un papel primordialmente activo en la formación de conceptos. Remarcan que el alumno construye sus propios conocimientos, en contraposición a la concepción del alumno como receptor de conocimientos ya construidos. Esto supone que el profesor se convierte en un promotor de conocimientos más que en un transmisor.

En relación con la geometría de los sólidos, para la enseñanza de la descripción, Guillén (1997, p. 152) considera que, en los primeros niveles, los estudiantes necesitan representaciones físicas de los sólidos y que las actividades que se deben proponer han de estar inmersas en procedimientos de construir o generar estas representaciones. Una parte del trabajo inicial, especialmente si se trabaja con niños pequeños, debe mostrar las diferentes representaciones materiales de los sólidos (modelos macizos, modelos huecos y armazones) y aprovechar cada una de ellas para trabajar el tipo de propiedades de los sólidos que remarcan.

Si nos centramos en la enseñanza de los conceptos, diferentes autores hacen hincapié en el uso de los ejemplos a la hora de enseñar los conceptos. Guillén (2000) comenta que:

> En el diseño de tareas de introducción de conceptos, debemos preocuparnos de presentar diferentes ejemplos de cada uno de los conceptos tratados o de que aparezcan en el contexto de la actividad (en tareas de construcción o de generar modelos); que se observen construidos con diferentes materiales, en distintos contextos y en diferentes tiempos. Se pretende que la mayoría de los estudiantes lleguen a estar libres de las posiciones prototipo y de las ideas erróneas que puedan surgir y generalicen su objeto mental de una determinada familia de sólidos o de sus elementos; esto es, se pretende que los estudiantes incluyan en el objeto mental correspondiente todos los ejemplos de la familia de sólidos, en diferentes posiciones, junto con propiedades de la familia y relaciones de sus elementos o con ejemplos de otras familias. Vale la pena subrayar el papel primordial que tienen los errores de los estudiantes en la selección que se haga de los ejemplos y no ejemplos que se propongan a los estudiantes.
> Hay que aclarar también que las primeras ideas sobre las familias de sólidos se basan en un mundo de ejemplos y tienen que irse precisando como consecuencia de ejemplos que van surgiendo en el contexto de la actividad. Conviene destacar el papel de las tareas que permiten a los estudiantes experimentar, reflexionar y comprender que las ideas de los conceptos se van precisando cuando se encuentran ejemplos que obligan a ello. (pp. 49-50)

En concordancia con Guillén (2000), para la descripción, Rey (2004) propone introducir una variedad de ejemplos en una variedad de orientaciones, una definición verbal o instrucciones sobre cómo realizar ciertas operaciones (mentales o físicas), si bien informa de que este análisis no garantiza una identificación y delimita los denominados distractores de orientación, debidos a asumir a los prototipos como ejemplos fijos y preferibles respecto a otros, y de configuración, debidos a casos que no son los tomados como modelos o prototipos. Además, Rey (2004) propone añadir los distractores de perspectiva en la que los prototipos agregan información no relevante y se quita otra. Al igual que Blanco y Crespo (2007), concluye que, en la construcción del concepto, para evitar la aparición de obstáculos indeseables, se debe de llevar a cabo a partir de la definición desde la matemática, una gran cantidad de ejemplos y efectuar descripciones verbales de los objetos, destacando este autor que se han de realizar orientaciones en la construcción de las características de dicho objeto.

Otros investigadores como Gutiérrez y Jaime (1996) también subrayan que la manera de mejorar la calidad de las imágenes conceptuales es ofrecer a los estudiantes mayor variedad de ejemplos, tratar de detectar los defectos de sus imágenes del concepto y hacer especial incidencia en los ejemplos directamente relacionados con esos errores. En este trabajo además se expone cómo se realiza la enseñanza de la geometría en las clases de primaria y secundaria. Gutiérrez y Jaime (1996) señalan que cuando los profesores y libros de texto españoles presentan por primera vez a los estudiantes un concepto nuevo de geometría elemental, suelen recurrir a uno de estos dos métodos de enseñanza: i) Enunciar una definición matemática de dicho concepto (más o menos formal, según el curso) y, a continuación, plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de algunas figuras concretas, o ii) presentar ejemplos de figuras que representan ese concepto, haciendo una descripción de sus características matemáticas (y, a veces, físicas), a continuación, enunciar una definición matemática del concepto y, por último, plantear ejercicios de memorización de la definición y de reconocimiento de otras figuras concretas. Estos autores remarcan que, en ambos casos de enseñanza, los profesores suelen poner más énfasis en las definiciones que en los ejemplos, sin darse cuenta de que son los últimos los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo.

Al centramos en la introducción de los conceptos, destacamos también la importancia que dan los investigadores al conocimiento del alumno. Alsina et al. (1987, pp. 100-101) remarcan que es necesario estudiar las ideas curriculares fundamentales de cada nivel, incluso de todo el currículo. Habrá que adecuar la entrada al tema al nivel cognitivo del alumno. Comentan que una estrategia deseable es partir de lo que el alumno sabe sobre el concepto y a través de distintos materiales y preguntas hacer posible que estos conceptos iniciales se plasmen en acciones y lenguaje. A partir de ahí se trabajará el concepto en diferentes situaciones (numéricas, geométricas, etc.), situando al alumno frente a problemas que obliguen a replantear posibles soluciones parciales, para pasar finalmente a la aplicación del concepto a distintas situaciones. Una vez están asimilados los conceptos básicos, se podría a partir de aquí relacionar todo lo que se ha hecho con los otros conceptos y así utilizarlos como consolidación y aplicación.

En cuanto a la organización del grupo clase Alsina et al. (1987, p. 101) apuntan que el profesor impulsará de investigación, presentando organizando y guiando el trabajo, pero nunca siendo el protagonista del saber, interviniendo más bien como componente del centro de control. El trabajo de los alumnos tendrá que ser en grupo en la experimentación, así como en la comunicación y explicación de los conceptos y resultados obtenidos.

Según Alsina et al. (1987) la dinámica de clase debe de tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. Una introducción al tema, para situar al alumno.
2. Dar a conocer los objetivos, para enmarcar las acciones a realizar.

3. Una presentación de las investigaciones a realizar, adecuadamente graduadas por niveles de comprensión, en las que se induce a manipular, construir, observar, explicar y expresar conjeturas y descubrir distintas relaciones sobre el concepto a tratar.
4. Una discusión y contraste en gran grupo, para así enriquecer y comunicar los distintos descubrimientos realizados. En este momento el profesor actúa de moderador de cara a establecer conclusiones.
   Realización y resolución de ejercicios de utilización y consolidación y de problemas de extensión y ampliación. (p. 101)

Asimismo, Fielker (1987a, 1987b) propone una enseñanza centrada en el alumnado remarcando que sean los/las alumnos/as los que exploren las matemáticas. Centrándose en la clasificación, al proponer la enseñanza de la clasificación de los triángulos y de los cuadriláteros (Fielker, 1987a), que es donde hace más hincapié, y la de los hexágonos (Fielker, 1987b), intenta librar al maestro de las tradiciones euclidianas. Plantea que los alumnos alteren las variables, examinen las consecuencias, recreen las definiciones, hagan elecciones y se entretengan con las clasificaciones. Apunta una actitud especial respecto de la enseñanza, según la cual la Geometría es algo que hacen los/las alumnos/as, en lugar de aprenderla del maestro o *del* libro de texto; transmite la creencia de que los procesos matemáticos son, por lo menos, tan importantes como los resultados; que esta actitud la pueden poner en práctica los alumnos libremente, y con la clasificación se puede examinar también toda la gama de capacidades matemáticas de los alumnos.

Vamos a detallar brevemente la actividad que Fielker (1987a) propone para la enseñanza de la clasificación de los triángulos y cuadriláteros. Para la primera, hace notar que con ella no hay mucho que hacer, los/las alumnos/as tendrían que explorar las posibilidades y llegar a la conclusión de que las dos únicas variables a tener en cuenta para clasificarlos son las relaciones entre los lados y el tamaño del ángulo. En lo que respecta a los cuadriláteros, propone que se puede llevar a cabo la clasificación de los cuadriláteros cruzando los siguientes criterios dos a dos (tabla 1.8):

- Pares de lados paralelos: 0, 1, 2.
- Pares de lados iguales: 0, 1, 2.
- Cantidad de ángulos rectos: 0, 1, 2.

		Pares de paralelos		
		0	1	2
Pares de iguales	0			
	1			
	2			

Tabla 1.8 Clasificación de los cuadriláteros atendiendo a pares de lados paralelos e iguales. Fielker (1987a, p. 11)

Los alumnos/as tendrían que escribir los nombres y descubrir los teoremas que, aunque pueden demostrarse utilizando la geometría euclidiana, son nuevos para ellos. También plantea que se haga una clasificación atendiendo a las simetrías y que se estudien los cuadriláteros en tres dimensiones y en una dimensión.

Lo que este autor considera más importante es que son los alumnos/as quienes hacen la clasificación, en lugar de aprender: simplemente una clasificación que nosotros hemos preparado para ellos. Así, aprenden algo sobre el proceso de clasificar y tomar decisiones alternativas, enfrentándose con las consecuencias de la elección hecha e introduciendo alteraciones cuando es necesario. Haciendo esto, aprenden también algo sobre las propiedades, pero de un modo más significativo. Cabe resaltar también que Fielker destaca la importancia de trabajar la clasificación con piezas de mecano, geotiras o geoplanos. Asimismo, propone trabajar de esta manera los polígonos en general.

La clasificación de los hexágonos la aprovecha Fielker (1987b) para subrayar que aprender matemáticas incluye aprender a hacer matemáticas, crear y resolver problemas, inventar nuestras propias matemáticas y, además, aprender las matemáticas de otras personas. Expone la actividad matemática que se puede llevar a cabo con la clasificación de los hexágonos, subrayando que lo que diferencia esta clasificación de la clasificación de los triángulos y cuadriláteros es que empezamos con muy pocas ideas preconcebidas de ellos.

Esta actividad se desarrolla dibujando los hexágonos en tramas y siguiendo las siguientes propuestas:

- Clasificarlos al azar.

- Estudiar en los hexágonos equiangulares las relaciones que hay entre las longitudes de los lados y los grados de libertad. Fielker declara que con esta propuesta surgirán algunas hipótesis acerca de las relaciones entre las longitudes, hipótesis que quedan por formular con precisión, poner a prueba, verificar, generalizar y demostrar. Descubrirán teoremas.

- Clasificarlos según su simetría.

- Clasificarlos según el número de ángulos rectos, la concavidad.

- Clasificar los hexágonos cruzados.

- Clasificar los que teselan, es decir forman mosaico.

- Clasificar los hexágonos de acuerdo a qué lados son paralelos.

Para los que consideran que esta clasificación de los hexágonos es una pérdida de tiempo porque los hexágonos no están en los programas, es decir, lejos de toda actividad matemática que sus alumnos pueden intentar, Fielker les propone pensar en lo que este trabajo con hexágonos podría ayudar a los estudiantes en su conocimiento de los cuadriláteros; para aclararlo, como ejemplo, propone plantear a los estudiantes la cuestión ¿Podríamos decir que el hexágono regular corresponde a1 cuadrado?

Mora (1995), siguiendo a Fielker (1987a) también propone trabajar la clasificación de figuras planas a partir de la construcción de figuras con varillas de mecano. Con la construcción de triángulos con estas varillas plantea que los/las alumnos/as den contestación a las siguientes preguntas ¿Cuántas clases distintas de triángulos podemos construir con tres varillas unidas por los vértices? ¿Qué significa clases distintas? ¿Qué criterios se eligen para clasificar? ¿Qué propiedad fundamental podemos extraer de los triángulos? ¿Qué aplicaciones prácticas puede tener? Señala que de forma similar se puede trabajar la clasificación de los cuadriláteros. Subraya también lo importante que es el juego en la enseñanza de las matemáticas y que la retroalimentación provenga de los compañeros y de uno mismo. Además, señala que el profesor/a ha de ser el que diseña las actividades de aprendizaje, anima, dirige los trabajos de los estudiantes, y modera y coordina los debates.

En relación la clasificación en el mundo de los sólidos, Guillén (2005) delimita tres enfoques para introducirla en la enseñanza:

> a) Organizando un mundo conocido, separándolo en clases disjuntas; enfoque que introducirá en la clasificación partición.
> b) Organizando y estructurando un mundo conocido; enfoque que llevará a las clasificaciones jerárquicas.
> c) Construyendo ejemplos, siguiendo normas de construcción o buscando los objetos que se parecen a otros, cumplen sus propiedades o verifican su definición; enfoque que conducirá a otra manera de abordar la clasificación en matemáticas y de la que también vamos a hablar. (p. 125)

Para finalizar este apartado, vamos a considerar el proceso de definir. Cabe destacar el trabajo de Flores (2007) quien concluye que las definiciones se suelen mostrar al alumnado dándoles un enunciado que tendrán que aprender y aplicar. Para la matemática escolar, este autor distingue dos maneras de definir los conceptos:

> Definición descriptiva: consiste en una serie de características propias del objeto o del concepto. Estas características sirven como definición y las otras propiedades se derivan lógicamente como teoremas. Se puede dar al inicio como introducción del concepto a los estudiantes o después de que éste haya trabajado un cierto tiempo con él.
> Definición constructiva: se va formando a medida que el estudiante trabaja con un cierto concepto y tiene necesidad de comunicar sus hallazgos a otros compañeros o al profesor. La definición se apoya en la definición espontánea que el estudiante posee y a esta se le quitan o agregan propiedades y características a medida que el concepto va madurando en el estudiante. Se puede decir que el nuevo concepto se define por nacimiento y sus propiedades pueden descubrirse o deducirse. (Flores, 2007, pp.9-10)

1.6.2 Situaciones y contextos para la enseñanza/aprendizaje de la geometría

El estudio de los procesos matemáticos y el establecimiento de relaciones se puede llevar a cabo desde diferentes situaciones.

Centrándonos en la descripción de las formas geométricas y en particular de sólidos o familias de sólidos, Guillén (2004) hace notar que se puede presentar un objeto en particular para que se indiquen todas las propiedades de una figura en concreto o para que se indiquen propiedades que cumplan diferentes poliedros que pueden ser ejemplos de una familia finita o una familia infinita. Asimismo, se puede trabajar la descripción teniendo en cuenta diferentes familias y de esa forma a partir de propiedades comunes determinar las propiedades comunes, las propiedades de una familia que otra no verifica o exponer conjuntos de propiedades de diversas familias.

La autora también subraya que en la descripción o análisis de las figuras se puede variar la representación física con la que se muestra el objeto geométrico que se tiene que describir/analizar. Entre las que señala destacamos que se puede mostrar un objeto físico que se encuentre en el entorno, en un contexto topográfico, en el arte, en la arquitectura, etc. Además, pueden surgir en clase a partir de apilar sólidos, truncando algún sólido, explorando con espejos o sombras o simplemente señalando el nombre.

En Guillén (2004) esta autora sintetiza los contextos en los que se puede situar el objeto geométrico que se tiene que describir/analizar y en los que se pueden plantear cuestiones en las que están implicadas familias de sólidos y propiedades:

- En procesos de construcción de formas.
- En tareas de identificación.
- En contexto de puzles (mundo de los juegos).
- En problemas prácticos convertir en rígidas en algunas formas; truncar algunas formas para obtener las deseadas…
- En problema que relacionan la geometría con la aritmética y la medida. (p. 123)

Y en un contexto matematizado, Guillén (2004) apunta otras situaciones:

- Se presentan propiedades y lo que se cuestiona si son o no atributos críticos de una familia de sólidos.
- Se considerarán varias familias de sólidos y una o varias propiedades. Para cada una de las familias de prismas y para cada propiedad, se ha de razonar si ésta es o no atributo crítico de la familia considerada.
- Se dan las propiedades y son las familias de sólidos las que tienen que determinarse. (p.123)

Asimismo, Alsina, Burgués y Fortuny (1988) destacan la importancia que tiene la percepción visual en el conocimiento geométrico fundamental, apuntando cuatro tipos de situaciones básicas. Por una parte, señalan que observando nuestro entorno natural, artístico y tecnológico se pueden descubrir y estudiar las formas geométricas (Geometría del entorno). Por otra parte, analizando la reflexión de la luz en superficies reflectantes, como el agua, el metal o el espejo, se observan unas visiones de figuras con enorme contenido geométrico (Geometría de los reflejos). Asimismo, estudiando las sombras que se producen al interponer objetos en un haz luminoso nos llevan a conceptos de afinidad, semejanza y proyectividad (Geometría de las sombras). Por último, analizando las pompas de jabón apuntan que se pueden estudiar relaciones en las formas geométricas y aplicarlas a otras áreas (Geometría efímera de las pompas de jabón).

En este apartado vamos a retomar estudios que se centran en diferentes procedimientos para construir o generar sólidos (subapartado 1.6.2.1); usados como contextos o situaciones para estudiar cómo se utilizan las destrezas (construir, modificar, transformar) para trabajar los procesos matemáticos, permiten generar actividad geométrica, y los modelos que se obtienen, como resultado, se pueden seguir utilizando como soporte material para hacer observaciones y sacar conclusiones (Guillén, 1997). Por otro lado, considerando que los sólidos son objetos en tres dimensiones y que se puede obtener información de los sólidos a partir de diferentes representaciones bidimensionales de ellos, y a la inversa, en el subapartado 1.6.2.2 retomamos las diferentes maneras de comunicar y/o representar los sólidos, pero ahora considerándolas como contexto para desarrollar actividad matemática al relacionar el plano con el espacio y viceversa. Por último, en el subapartado 1.6.2.3 consideraremos los enunciados de problemas como el contexto para estudiar los contenidos geométricos tratados en este estudio.

1.6.2.1 Diferentes procedimientos para construir o generar sólidos y la enseñanza de procesos matemáticos

La descripción de los sólidos se lleva a cabo a partir de las propiedades geométricas en los que la realización, construcción, medición y representación de los sólidos juegan un papel fundamental para ello (Guillén, 1997). Según esta autora, la construcción de modelos u armazones de sólidos o la generación de sólidos con otros procedimientos ofrece una situación para que los estudiantes asimilen en los sólidos las características visuales y las relativas al tipo de caras, su número, así como el de aristas y vértices, y su disposición en el espacio. También puede facilitar que se indiquen parecidos y diferencias entre los ejemplos de una familia y las relaciones (siempre establecidas visualmente) que hay entre unas familias y otras. Además, separar un modelo por niveles o en casquetes, observar las caras que bordean a una cara dada y las que se juntan en un vértice facilita que se puedan construir ejemplos de una familia de sólidos dada o diferentes desarrollos de algunos sólidos (Guillén, 2004, p. 119).

Entre las diferentes maneras que Guillén (1997) señala para construir o generar sólidos tenemos:

a) Construcción de modelos a partir de los materiales comercializados formados por polígonos.

Uno de estos materiales, que llamamos *troquelados,* se compone de hojas de cartón con polígonos troquelados unidos mediante gomas. El otro es el *Polydron* o *Creator,* que consiste en polígonos de plástico de colores, cuyos lados se engarzan unos con otros. Desde el punto de vista de las matemáticas, la mayor virtud de estos materiales es que permiten centrar la atenci6n en dos elementos: las caras y las aristas que son básicos en el análisis de los poliedros y que conducen a una idea particular de poliedro.

b) Construcción de armazones a partir de materiales comercializados formados por varillas y mecanismos de engarce.

Para construir poliedros tenemos varillas que se unirán con diferentes mecanismos de engarce y permiten ver a los poliedros constituidos por su armazón de aristas. Cabe señalar que, si bien podemos usar otros materiales no comercializados para las varillas como las pajitas de refresco, varillas de madera, alambre, etc., tendremos más dificultad para encontrar mecanismos de engarce

c) Generar sólidos a partir del experimento que muestra Castelnuovo (1979, citado en Guillén, 1997).

Este experimento permite, utilizando una "unidad base" formada por dos polígonos que se juntan con gomitas, generar prismas, antiprismas y pirámides rectas u oblicuas, o diferentes tipos de prismas, antiprismas y pirámides de distintas alturas. Posibilita focalizar la atención en las acciones permitidas y en lo que se mantiene y cambia cuando se realiza la transformación (figura 1.26).

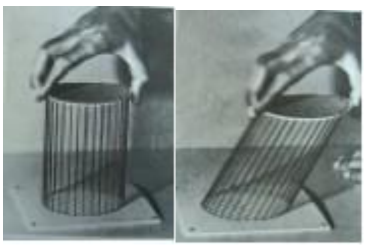


Figura 1.26. Experimento de Castelnovo (Guillén, 1997, p. 119)

d) Generar formas apilando polígonos o modelos.

Apilando polígonos iguales se pueden generar prismas rectos y podíamos decir que, con cierta irregularidad par las caras laterales, oblicuos. Asimismo, el apilar modelos puede proporcionar poliedros, de la misma familia u otra, o no según los modelos que se apilen, la manera de hacerlo y evidentemente eliminando las caras que se juntan al apilarse.

e) Generar sólidos mediante puzles.

Consiste en obtener poliedros nuevos a partir de poliedros ya construidos o descomponer un poliedro en otros, los cuales al juntarse reproducen el poliedro de partida.

f) Generar sólidos por truncamiento.

El truncamiento consiste en transformar unos poliedros en otros, partiendo de poliedros construidos de plastilina, corcho, etc., y cortándoles las esquinas.

g) Construcción de modelos a partir del desarrollo.

El desarrollo de un poliedro es una representaci6n plana del mismo. Lo caracteriza, lo representa y permite construir el modelo. Es una forma de representación que Freudenthal (1983, p. 244, citado en Guillén, 1997) llama *compository*, por estar formada por una combinaci6n de partes, combinaci6n que puede hacerse de varias maneras, y todas ellas dan como resultado desarrollos del poliedro correspondiente.

En esta investigación nos fijamos en los conocimientos que se tienen sobre el uso de estos procedimientos de construcción en la enseñanza/aprendizaje de la geometría y cuestionamos a los profesores participantes sobre la importancia que puede tener el uso de los mismos en sus clases.

1.6.2.2 Representación de un poliedro y la enseñanza de procesos matemáticos

La representación plana de los sólidos es considerada por Guillén (1991) fundamental para caracterizarlos y poder construirlos, pero lo que esta autora destaca especialmente es la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de ellos, especialmente a partir de los desarrollos planos y de los diagramas de Schlegel.

Por lo que se refiere a los desarrollos planos que representan un poliedro, Guillén (1991) enumera habilidades que se requieren al trabajar a partir de ellos en la enseñanza:

- Visión espacial.
- Destreza en dibujo lineal para dibujar perfectamente el desarrollo.
- Habilidad manual para la construcción del modelo a partir del desarrollo.

- Resolver ciertos problemas de intendencia o escala, como por ejemplo, que materiales utilizar o que tamaño elegir para los polígonos de los desarrollos, para que los modelos obtenidos sean más consistentes, o para que resulte más cómoda la tarea.

Y centra la atención en dos tipos de tareas que suponen que se vaya del modelo a la representación o de la representación al modelo.

En el primer caso, después de indicar que la forma de obtener un desarrollo de un poliedro es cortando o desenganchando las caras del poliedro por el suficiente número de aristas de manera que quede en una sola pieza y completamente extendido en el plano, hace notar que es una actividad en la que se pasa del espacio al plano, teniendo en cuenta sus propiedades o características. Para dibujar perfectamente el desarrollo se necesita destreza en dibujo lineal.

La autora señala también diferentes formas en que se pueden interpretar los desarrollos planos:

a) Formados por franjas figuras planas. Por ejemplo: “el icosaedro está formado por una cinta de 10 triángulos, cerrada por 5 triángulos en la parte superior e inferior. Estos triángulos están unidos a los de la cinta” (figura 1.27).

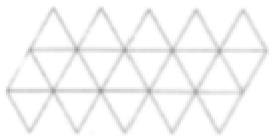


Figura 1.27. Desarrollo plano del icosaedro (Guillén, 1991, p.180)

b) Descompuesto en “partes”. Se obtienen los desarrollos de cada parte y luego se juntan. Por ejemplo: “el icosaedro está formado por una tira de 10 triángulos, cerrada por dos pirámides de base pentagonal” (figura 1.28).

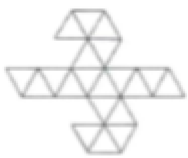


Figura 1.28. Desarrollo plano del icosaedro (Guillén, 1991, p.181)

Cuando se determina un desarrollo de los poliedros por este método de análisis y síntesis, la dificultad, en la mayoría de los casos, está en la unión de estos desarrollos.

c) A partir del desarrollo de uno de los trozos y añadir los polígonos que corresponderían al otro. Procediendo así, a veces se simplifica la tarea considerablemente. Por ejemplo, un desarrollo del cuboctaedro, que se ha obtenido por este procedimiento es el que se muestra en la figura (1.29).

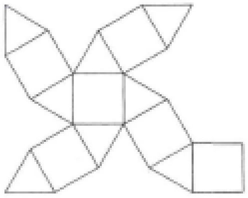


Figura 1.29. Desarrollo plano del cuboctaedro (Guillén, 1991, p.182)

Además, al fijarse en una problemática práctica, introduce otro tipo de tarea que conlleva gran actividad; ésta se refiere a ¿cuántas pestañas o lengüetas hay que añadir a los diferentes desarrollos?, ¿dónde colocar las pestañas en un desarrollo plano para que se pueda construir el poliedro juntando las caras? ¿Todos los desarrollos de un poliedro requieren el mismo número de pestañas?

En cuanto al pasar de la representación al modelo, la autora considera este tipo de tarea esencial para aplicar las propiedades de los poliedros al tener que señalar aquellos que podrían o no ser representación del modelo indicado.

En relación con los diagramas de Schlegel, aquí sólo vamos a referirnos a algunas características tomadas de Guillén (1991) que se sintetizaron asimismo en el trabajo que entregamos a los profesores en los cursos: “Los diagramas de Schlegel permiten ver a la vez todas las caras, vértices y aristas del sólido, así como el número de caras que concurren en cada vértice. Pueden verse como un polígono - la cara por la que se observa el esqueleto del poliedro correspondiente - descompuesto en n-1 regiones, siendo n el número de caras del poliedro. Además, permiten la descripción de un poliedro como red y como matriz de incidencia” (Guillén, 1991, p. 186).

En el mismo trabajo se habla de las descripciones simbólicas y verbales. Se apunta que en este tipo de descripción se utilizan reglas y propiedades que caracterizan al poliedro. Por ejemplo, como los poliedros regulares convexos tienen todas las caras iguales y regulares y todos los vértices del mismo orden, se pueden caracterizar por medio del símbolo de Schläfi (p,q). La p indica que sus caras son polígonos de p lados y la q el número de caras que concurren en cada vértice (Guillén, 1991, p. 189).

1.6.2.3 La resolución de problemas y la enseñanza de procesos matemáticos

Alsina et al. (1987) subrayan que la resolución de problemas desempeña un papel fundamental en la adquisición de los conceptos y relaciones geométricas. Por una parte, desde un punto de vista epistemológico, la génesis de un concepto geométrico se puede manifestar como instrumento de solución de diversas situaciones problemáticas. Por otra parte, remarca que, desde un punto de vista constructivista, la construcción de los conocimientos geométricos se logra, en gran medida, gracias a la interacción entre el sujeto y los objetos (ya sean concretos o abstractos). Esta interacción aparece en forma privilegiada cuando el individuo es situado delante de un problema. Durante la resolución de un problema se hacen funcionar los conocimientos anteriores poniéndolos a prueba y eventualmente modificándolos.

Una cuestión importante para la enseñanza de la Geometría que comentan Alsina et al. (1987) es saber por una parte seleccionar el tipo de problema en función de los conceptos que se quieran enseñar, y por otra parte secuenciarla de acuerdo con el nivel progresivo de aprendizaje de los alumnos.

Además, Alsina et al. (1987) apuntan que hay que definir eficientemente las variables de presentación de cada problema para así permitir desarrollar la estrategia más deseable con los fines propuestos. Un mismo problema presentado de diferentes maneras permite desarrollar estrategias diferentes.

Para el desarrollo de habilidades y procesos en los alumnos Alsina et al. (1987) anotan la resolución de problemas indicando que deberá procederse a una lectura atenta de su enunciado, intentando aclarar el significado de los términos incluidos y, en su caso, esclarecer en términos coloquiales la situación planteada. Después se procederá a la traducción a los lenguajes geométricos (gráficos, algebraicos, etc.). Hay que distinguir datos de incógnitas, constantes y variables, símbolos usados y a utilizar, establecer las relaciones conocidas y las que hay que dar, etc.

Al proceder a la resolución, señalan Alsina et al. (1987) que diversas estrategias son posibles: empezar por esquemas gráficos o usar materiales (cubos, reglas, balanzas .. .) para simular el enunciado dado, relacionar el problema con otros ya resueltos o resultados conocidos anteriormente a su planteo, particularizar a casos más sencillos que puedan orientar hacia el caso general, dividir el problema en subapartados, plantear una posible resolución y volver al principio, aplicar la reducción al absurdo, etc.

Pero una vez resuelto el problema queda una labor importante que a menudo se obvia: verificar si la solución hallada es correcta, discutir el sentido de la solución, revisar el método seguido y ver si admite algún planteamiento alternativo, etc.

Siguiendo a Alsina et al. (1987), los problemas que planteamos en los cursos presencial y online de nuestro estudio los hemos seleccionado en función de los contenidos que queríamos tratar. Asimismo, se han buscado problemas de contexto con el fin de estudiar las estrategias aplicadas por cada uno de los docentes participantes. Por último, queremos analizar cómo se finaliza el problema y si se discute el sentido que se le da a la solución. De ellos damos cuenta en el anexo 1.

1.6.3 La enseñanza de los contenidos geométricos mediante tareas. Las propuestas de Guillén (1997)

Guillén (1997) propone una serie de tareas para que los estudiantes amplíen los objetos mentales que constituyen para los objetos geométricos relativos a los sólidos y desarrollen su nivel de razonamiento. Algunas se plantearon en el curso en comunidad como soporte para que los/as profesores/as participantes informaran sobre cómo llevan a cabo la enseñanza de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones en sus clases. Otras se plantearon en el curso presencial para poder determinar conocimientos que tienen los/as profesores/as de los contenidos geométricos implicados en ellas, así como sobre las dificultades que enfrentan en su resolución.

En los subapartados 1.6.3.1 y 1.6.3.2 se presentan los comentarios sobre las tareas utilizadas en los cursos en comunidad y presencial extraídos de los que se presentan en Guillén (1997). Y es en los anexos 2 y 3 donde están recopiladas las tareas tal y como se plantearon en estos cursos.

Cabe aclararse que las tareas del curso en comunidad las hemos numerado de manera diferente a como se presentan en el trabajo de Guillén. Las relativas a la descripción y el establecimiento de relaciones las hemos nombrado como T-1d, T-2d, T-3d… Las de clasificación y el establecimiento de relaciones como tarea T-1cl, T-2cl… Puede notarse que en la enumeración que hacemos para ellas también queda reflejado las tareas de Guillén correspondientes. Esta autora las numera como T-1, T-2…, y en nuestro listado, para cada una apuntamos entre paréntesis la de Guillén a la que se refiere.

1.6.3.1 Sobre las tareas propuestas en el curso en comunidad. Comentarios

Los comentarios sobre las tareas que se detallan en el anexo 2 los hemos agrupado según que correspondan a tareas relativas a la descripción (1.6.3.1.1) o a la clasificación (1.6.3.1.2). Cabe señalarse que el establecimiento de relaciones lo hemos incluido en estos dos subapartados.

1.6.3.1.1 Tareas sobre la enseñanza de la descripción y el establecimiento de relaciones

- Tarea T-0d: Introducción al estudio (Guillén 1997, pp. 148-150 (T-1, T-2. T-3), pp. 156-161 (T1-1, T-2, T-3, T-4, T-5))

  Con esta tarea se pretende, por un lado, que el profesorado adquiera información sobre el conocimiento de las formas geométricas que tiene el alumnado. Por otro lado, informar a los estudiantes sobre la enseñanza que se va a llevar a cabo de las formas geométricas. Para ello se tratan objetos reales, ejemplos y no ejemplos de familias de sólidos y técnicas de construcción, descomposición, modelado, apilamiento y truncamiento.

- Tarea T-1d: Descripción de los poliedros a partir de construcciones (Guillén 1997, pp.211-212 (T-1))

  En esta tarea se propone la construcción a partir de materiales comercializados para describir los poliedros. Permite revisar si los estudiantes pueden hacer un análisis primario de los sólidos a nivel local. Centra la atención en los elementos de los sólidos, en las caras que bordean a una dada (una posible forma de empezar a construir sólidos), en las caras que se juntan en un vértice (otra posible forma de empezar a construir sólidos), o en las caras que se juntan en una arista.

- Tarea T-2d: La utilización de modelos y ejemplos para la descripción (Guillén 1997, pp.212-213 (T-3))

  Esta tarea plantea actividades de identificación de ejemplos y no ejemplos de algunas familias de sólidos cuando se presentan modelos o armazones de ellos en diferentes posiciones. Además, proporcionan información sobre cómo identifican los estudiantes los modelos o armazones presentados, la influencia que tienen los atributos no críticos dominantes en la identificación de las determinadas clases de sólidos, los factores con fuerte poder visual que actúan como distractores en tareas de identificación de ejemplos y no ejemplos, las familias de poliedros que los estudiantes evocan espontáneamente, etc.

- Tarea T-3d: Asociar figuras a familias (Guillén 1997, p. 213 (T-4))

  En esta tarea se pide a los alumnos que hagan corresponder cada figura numerada con las abreviaturas de la familia o familias a que pertenece. Las actividades tratan de que los alumnos identifiquen algunos sólidos y familias de sólidos a partir de dibujos para determinar si los estudiantes reconocen los objetos cuando se presenta un dibujo de ellos. Con ellas se trata el problema de la visualización espacial íntimamente relacionado con el estudio de los sólidos.

- Tarea T-4d: Indicar familias y enumerar propiedades (Guillén 1997, p. 213 (T-5))

  Esta tarea centra la atención en diferenciar los sólidos que son poliedros de los que no lo son. Las actividades permiten averiguar los atributos críticos del concepto de poliedro, cilindro, cono o esfera que se hacen explícitos. También informan sobre si los estudiantes asocian características de familias de sólidos a las familias de sólidos que se establecen en ellos (los poliedros, el cilindro el cono y la esfera) y las ideas que tienen sobre los conceptos de cara, vértice y arista.

- Tarea T-5d: Construcciones y secciones de poliedros (Guillén 1997, pp.214 (T-6))

  Esta tarea pretende averiguar las ideas que los estudiantes tienen de poliedro y de determinadas familias de poliedros y que se expresen parecidos y diferencias entre los cilindros y los prismas, los conos y las pirámides y la esfera y el cubo. Además, conduce a que se plasmen ideas basadas en la construcción de los modelos. También intenta determinar las ideas y relaciones que los estudiantes tienen de poliedro y de determinadas familias de poliedros basadas en el modelado, serrado, apilamiento, etc. de los modelos.

- Tarea T-6d: Elementos, paralelismo y perpendicularidad en los sólidos (Guillén 1997, p. 212 (T-2))

  Esta tarea permite revisar las ideas que tienen los estudiantes de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo; se puede determinar si para ellos el paralelismo y perpendicularidad entre caras (y aristas) se mantiene cuando se mueve la figura o cuando la relación es entre más de dos elementos.

- Tarea T-7d: Elementos figuras planas y poliedros (Guillén 1997, pp.214-216 (T-7))

  En esta tarea se refiere a conceptos relacionados: los ángulos y diagonales de los polígonos y de los sólidos. Pretende determinar las ideas que se tienen sobre ángulo y diagonal de un polígono o cómo se aplican las ideas que damos de estos conceptos en tareas de identificación y medida. Intenta averiguar si se emplean atributos de más, que se asocian al concepto dado; esto es, si en el objeto mental de diagonal de un polígono se incluye el que la diagonal queda dentro del polígono, atributo que no se menciona en la idea que damos de este concepto. También intenta determinar las ideas que se tienen sobre caras iguales (congruentes) y sobre vértices iguales.

- Tarea T-8d: Descripción de sólidos y poliedros. Propiedades (ahondando en la descripción y clasificación) (Guillén 1997, pp.234 (T-1))

  Esta tarea se refiere a la descripción de sólido y poliedro. Trata de que los estudiantes descubran las propiedades de poliedro a partir de examinar las caras que se juntan en una arista o las que se juntan alrededor de un vértice. Asimismo, centra la atención en investigar que propiedades de los poliedros verifican todos los sólidos y cuales sólo las verifican los poliedros.

- Tarea T-9d: Analogía, diferencias, propiedades comunes entre poliedros. (análisis local de familias de sólidos) (Guillén 1997, pp.234-236 (T-2))

  Esta tarea trata sobre las caras que bordean a una cara dada, las caras o aristas que se juntan en un vértice, y las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que existen entre los elementos de un determinado tipo (caras, vértices y aristas), o entre parte de éstos (caras laterales y bases, o aristas laterales y aristas de las bases). Se introducen ideas sobre caras vecinas y sobre orden de un vértice y tratan de que los estudiantes descubran propiedades de las familias de sólidos consideradas relativas a estos conceptos. Aunque en esta tarea Guillén (1997) propone que se lleve a cabo con prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, se va a estudiar con los poliedros que los profesores señalan que ellos explican en clase (poliedros regulares, prismas y pirámides).

- Tarea T-10d: Número de caras, vértices, aristas, nº de ángulos diedros, nº ángulos de los vértices, nº de ángulos de las caras, nº de diagonales de las caras y nº de diagonales del espacio poliedro n-agonal. (Descripción de prismas, antiprismas, y…) (Guillén 1997, pp.237-241 (T-5, T-6, T-7, T-8))

  En esta tarea informa sobre las ideas que se forman los estudiantes sobre las caras, los vértices, las aristas, los ángulos de las caras, los ángulos diedros, los ángulos de los vértices, las diagonales de las caras y las diagonales del espacio y sobre la medida de ellos, y que tienen que ver con la descripción de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.

  Asimismo, permiten, además de que se elaboren listas de propiedades para estas familias de sólidos, que se centre la atención en lo que se puede extender de la familia de los prismas a las otras familias de sólidos (antiprismas, pirámides y bipirámides), en lo que los estudiantes extienden y en cómo lo hacen.

  Por otra parte, puede utilizarse para evaluar cómo adaptan los estudiantes los procedimientos utilizados en los prismas para conjeturar y demostrar las fórmulas que dan el número de elementos de un determinado tipo (caras, vértices, aristas, ángulos de las caras, ángulos diedros, ángulos de los vértices, diagonales de las caras y diagonales del espacio) para resolver estos mismos problemas en la familia dada.

1.6.3.1.2 Tareas sobre clasificación y establecimientos de relaciones

- Tarea T-1cl: Clasificaciones con criterios visuales (Guillén 1997, pp.242-245 (T-10, T-11, T.12))

  En esta tarea se propone hacer particiones en el mundo de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides en rectos u oblicuos y en cóncavos o convexos.

  Se empieza pidiendo que se precise lo que se entiende por cada una de estas subfamilias para remarcar que este tipo de clasificación es una partición llamada dicotomía. También centra la atención en otro elemento fundamental de los de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, la altura. Asimismo, está enfocada a que los estudiantes descubran las propiedades de los prismas rectos en función de las caras laterales, ángulos de las caras y ángulos diedros. Además, pretende que se lleguen a descubrir las propiedades de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides convexos relativas a los diferentes tipos de ángulos y de diagonales.

- Tarea T-2cl: Clasificaciones con criterios relativos a las bases. (Guillén 1997, p. 245 (T-13))

  Plantea clasificaciones de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides establecidas con criterios relativos a la base o bases, como, clasificar en función de si tienen bases o no, o criterios que centran la atención en la base (en el número de lados, la igualdad de los lados o de los ángulos, o en la regularidad de este polígono).

- Tarea T-3cl: La clasificación con criterios que centran la atención en la regularidad, la igualdad de todas las caras, la regularidad solo de la(s) base(s) o la regularidad solo de las caras laterales. (Guillén 1997, pp. 245-246 (T-14, T-15))

  Plantea fijarse en la regularidad, o en la igualdad, de todas las caras para establecer las familias de los prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides, de caras regulares o de caras iguales respectivamente. Se pide que con material comercializado se construyan ejemplos de las diferentes subfamilias establecidas para que se incorporen en los objetos mentales correspondientes y se establezcan sus propiedades.

  Asimismo, con esta tarea propone que con material comercializado se construyan varios ejemplos diferentes de las familias de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides de base(s) regular(es) y de base(s) irregular(es) y varios ejemplos de caras laterales regulares de prismas, antiprismas y pirámides y se establezcan sus propiedades.

- Tarea T-4cl: Clasificaciones en las que las particiones se solapan (Guillén 1997, pp. 246-247(T-16))

Plantea que se obtengan las características de las clasificaciones particiones que se hacen con prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides considerando varios criterios conjuntamente, como, por ejemplo, el de la regularidad de las caras, la igualdad de las caras, la igualdad de los vértices, y los modelos que pueden representarlos(as).

- Tarea T-5cl: Clasificaciones de prismas rectos de bases regulares, de caras laterales regulares, de caras regulares, de caras iguales (Guillén 1997, p. 247 (T-17))

  Plantea con esta tarea que se muestren ejemplos y se descubran las propiedades de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides rectos(as) de base(s) regular(es), de caras laterales regulares, de caras regulares y de caras iguales.

- Tarea T-6cl: Clasificaciones particiones disjuntas pero superpuestas con menos criterios (Guillén 1997, p. 248 (T-18))

  Plantea que, en las clasificaciones, si superponen las particiones, las clases resultantes son disjuntas, pero también se pueden considerar las clases que corresponden a uno sólo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre unas y otras. Muestra con un ejemplo que al considerar 3 criterios conjuntamente, las 8 familias disjuntas que se establecen se pueden representar mediante un diagrama de árbol que refleja las relaciones de inclusión que existen entre las diferentes familias que hay en los tramos de cada rama.

- Tarea T-7cl: Clasificaciones inclusivas (Guillén 1997, pp. 249-252 (T-19, T-20))

  Sugiere trabajar las características de las clasificaciones inclusivas y los modelos (diagramas con forma de red) que pueden representarlas. A partir de los prismas establece relaciones de inclusión en diferentes niveles atendiendo a diferentes criterios. Asimismo, trata de que los alumnos realicen actividades de inclusión para antiprismas, pirámides y bipirámides. También permite mostrar cómo se puede aplicar la analogía entre la geometría plana y la sólida para explicar las relaciones de inclusión o no inclusión que hay entre pares de familias de prismas cuadrangulares. Es importante señalar que en los diagramas que representan estas clasificaciones sólo se incluyen las familias que verifican alguna, varias o todas las propiedades que utilizamos como criterios de clasificación; que no se reflejan en ellos las familias complementarias.

- Tarea T-8cl: Enumeración de ejemplos y descripción de subfamilias (Guillén 1997, pp. 252-253 (T-21, T-22))

  Trata de pedir la lista de propiedades de una familia (prisma cuadrangular) a partir de ejemplos de ella (prismas cuadrangulares) con sus propiedades y además dan sugerencias para evitar errores que cometen los estudiantes al describir subfamilias de sólidos o que se amplíe la lista de propiedades que se enumeran para ellas.

1.6.3.2 Sobre las tareas propuestas en el curso presencial. Comentarios

En este subapartado se incluyen los comentarios sobre las tareas que se detallan en el anexo 3 que, como hemos indicado en la introducción de este apartado, se plantearon en el curso presencial para su resolución.

Con G1 se trata de estudiar los diferentes elementos de los poliedros (las caras, las aristas, los vértices, los diferentes tipos de ángulos (aC, ad y aV) y los diferentes tipos de diagonales (dC y dE)) y obtener las propiedades de los poliedros tratados. Este estudio consiste en señalar los tipos de caras y que figuras geométricas planas forman esas caras: como son las aristas; señalar las relaciones de igualdad, paralelismo, o perpendicularidad entre los elementos; indicar el número de elementos de cada tipo; si se puede decir algo sobre la medida de ellos, o sobre alguno de ellos.

Con las tareas G2 y G3 se pretende que los estudiantes muestren los conocimientos que poseen acerca de las propiedades de las familias presentadas a partir de asociar las propiedades correctamente con las familias de figuras geométricas que las cumplen.

Con la tarea G4 Guillén (1997) trabaja que los estudiantes asocien determinadas propiedades a las familias de poliedros que la cumplen, o tienen que averiguar si familias dadas (las que se han delimitado al considerar las propiedades anteriores) verifican o no una propiedad (la que se considera en cada momento).

1.7 La enseñanza de la geometría mediante diferentes tipos de cursos

En esta sección se va a mostrar diferentes formas de llevar a cabo la enseñanza de los contenidos geométricos. Se van a diferenciar, por una parte, la enseñanza que se lleva a cabo en un aula determinada y en la que el profesor está presente en dicha aula en el proceso de enseñanza/aprendizaje (enseñanza presencial, apartado 1.7.1). Por otra parte, la enseñanza en al que el alumnado no recibe la enseñanza en un aula y en la que el profesor y el alumnado se encuentran en espacios físicos y posiblemente momentos diferentes (enseñanza online, apartado 1.7.2).

En lo que se refiere al conocimiento geométrico de los docentes, en nuestro estudio desarrollamos cursos en los que impartimos estos tipos de enseñanza. Todos ellos permiten identificar el conocimiento geométrico de los participantes, establecer las necesidades específicas de ellos y diseñar actividades para ampliar los objetos mentales de los estudiantes en relación con los objetos geométricos relativos a los sólidos, aportándoles elementos para solucionar nuevas situaciones de descripción o clasificación. Cursos con estos tipos de enseñanza también permiten la incorporación de la construcción para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la geometría de los sólidos. Además de proporcionar a los participantes los procedimientos de construcción/generación de sólidos, en la propia construcción de los sólidos se puede enfatizar la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de esta construcción.

Cabe aclarar que, en los dos tipos de enseñanza, siguiendo a Ponte et al. (1997), vamos a diferenciar tarea de actividad. Las tareas matemáticas son los problemas, investigaciones, ejercicios, proyectos, construcciones, etc., propuestas normalmente por el profesor y proporcionan un punto de partida para el desenvolvimiento de su actividad matemática. Las tareas tienen que provocar el interés al alumnado.

La actividad es lo que hace el alumnado en un contexto dado, y que puede llevar a cabo la realización de diversas acciones. Por su parte, la tarea constituye el objetivo de cada una de las acciones en las que la actividad se desenvuelve y es fundamentalmente exterior al alumno (aunque pueda ser decidida por él). Las tareas tienen que ser interpretadas por el alumnado, y pueden dar origen a actividades diferentes o ninguna actividad. Aunque la tarea puede estar dirigida apuntar hacia determinados conceptos matemáticos, hay que señalar que no se encuentran en la tarea, sino en nuestra interpretación. Se ha de mencionar que la tarea que se proponga en clase ha de pensarse en el alumnado a la que va dirigida.

Una tarea conlleva siempre una situación dada de aprendizaje y apunta a un determinado contenido matemático. La situación de aprendizaje constituye el referente de significado de la vida cotidiana o del dominio de la matemática a la que la tarea se refiere, con relación a la cultura del alumno. El contenido matemático se refiere a los aspectos matemáticos implicados (hechos, conceptos, procedimientos, ideas) del currículo correspondiente. Una misma situación de aprendizaje y un mismo contenido pueden originar diferentes tipos de actividades según la tarea propuesta, el modo en que se ha presentado a los alumnos, la forma de organizar el trabajo y el ambiente de aprendizaje.

1.7.1 La enseñanza presencial

La dinámica del proceso de enseñanza/aprendizaje en el aula de matemáticas en Secundaria en la que están presentes el profesor y el alumnado ha sido estudiada por Ponte et al. (1997). En este apartado se van a estudiar los aspectos fundamentales que señalan dichos autores.

Si nos centramos en lo que depende la clase de matemáticas, Ponte et al. (1997) subrayan que de las tareas matemáticas propuestas por el profesor; de los alumnos y sus concepciones, actitudes, conocimientos y experiencia con las matemáticas; del contexto escolar y social, como. la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad; y, por último, del propio profesor, de su conocimiento y competencia profesional.

Entre los aspectos que en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas son fundamentales dichos autores señalan la actividad que desarrolla el alumnado y la reflexión que hace sobre ella; la comunicación matemática; el proceso de negociación de significados matemáticos; las diferentes formas de trabajo de los alumnos, y los elementos que componen los ambientes de aprendizaje. Dado que la actividad que desarrolla el alumnado ya ha sido comentada al principio de este apartado continuamos con el estudio de estos aspectos que hacen dichos autores.

Analizando ahora la interacción que proponen dichos autores en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas observamos que los alumnos han de interactuar entre sí y con el profesor. Dichos autores destacan en la interactuación la comunicación y la negociación de significados. Entienden por comunicación la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando una mezcla de lenguaje cotidiano y de lenguaje matemático. Conciben por negociación de significados el modo en que el alumnado y el profesor/a presentan unos a otros su forma de ver los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático señalado en el currículo.

En lo que se refiere a la comunicación, estos autores señalan que se analiza habitualmente por medio de estudios del discurso de los participantes, entendiendo por discurso el modo en que los participantes atribuyen significados en situaciones concretas y contextualizadas. Supone tanto la forma en que se presentan las ideas como lo que se relaciona implícitamente con ellas, por lo tanto, el discurso puede ser oral, escrito o gestual y se da siempre en todas las situaciones de enseñanza/aprendizaje. En las clases de matemáticas los interlocutores son el profesor y los alumnos y el discurso, normalmente, es controlado por el profesor. Tanto la comunicación oral como escrita tienen un papel fundamental en la clase de matemáticas. Con la comunicación oral el alumnado puede exponer sus ideas y compararlas con las del resto del alumnado y por tanto, aprender matemáticas. Con la comunicación escrita se pueden indicar los cálculos necesarios para resolver ejercicios o problemas, anotando informes o ensayos, justificando y explicando sus razonamientos.

Desarrollar el discurso en clase de matemáticas es una parte importante del papel del profesorado. Él puede hacer preguntas y proponer tareas que faciliten, promuevan o desafíen el pensamiento de cada alumno. Cuestionando el profesorado al alumnado puede detectar dificultades en el nivel de comprensión de los conceptos y de los procesos matemáticos, les ayuda a pensar, los motiva para participar y para saber si están atendiendo al trabajo de clase.

En cuanto a la negociación de significados, observamos que estos autores conciben la negociación como una interacción entro dos o más concurrentes, con puntos de partida e intereses muchas veces diferentes, que puede dar algo los unos a los otros beneficiándose todos. Basándose en esa definición señalan que la negociación de significados matemáticos en clase implica para que cada uno de los participantes, profesor y alumnos, haya aprendizaje, desempeñando para ello la discusión sobre diferentes temas y la reflexión sobre tareas previamente realizadas por los alumnos un papel fundamental. El profesor debe animar a que a los alumnos hablen y participen y a su vez, los alumnos han de tener confianza en su participación y comprender las reglas para que se pueda llevar a cabo este proceso, como, por ejemplo, preguntar cuando no se entienda algo o no juzgar una idea por la persona que la señala.

Por lo que respecta al ambiente de aprendizaje dichos autores subrayan que depende de las tareas propuestas del tipo de comunicación y negociación de significados, el ambiente de aprendizaje, de la cultura de la clase, y el modo en que trabaja el alumnado. Vamos a centrarnos en como indican estos autores que influyen estos dos últimos factores en el ambiente de aprendizaje. En relación con la cultura de la clase, la caracterización del ambiente de aprendizaje tiene dos componentes importantes: lo que está permitido y lo que se espera del profesorado y alumnado. Es decir, hay una determinada cultura que regula las normas de comportamiento y de interacción y establece las expectativas de los participantes. Además, el ambiente de aprendizaje está condicionado por las características físicas del aula, el uso de materiales, organización del tiempo y el contexto en que se desarrolle la enseñanza/aprendizaje. Por lo que respecta al modo de trabajo del alumnado en la clase, las formas básicas de trabajo que se comentan en Ponte et al. (1997) son en gran grupo o toda la clase, en pequeño grupo, por parejas o individualmente. El trabajo en gran grupo o toda la clase es fundamental para la negociación de los significados matemáticos, realizar discusiones con el alumnado o presentación de conceptos y tareas. Trabajar en pequeños grupos permite a los alumnos/as exponer sus ideas, abrirse a sus compañeros, hacer preguntas, discutir estrategias y soluciones, argumentar y criticar otros argumentos. El trabajo por parejas proporciona la posibilidad de que se establezca una interacción significativa entre los alumnos/as y debatan sobre resolución de la tarea propuesta. Por último, el trabajo individual es esencial para que el alumno/a pueda asumir su independencia y su responsabilidad personal que el profesor/a pueda conversar con cada alumno/a. Cabe señalar que la utilización de un modo de trabajo u otro depende del profesorado, alumnado y las tareas planteadas.

Dentro de este tipo de enseñanza vamos a distinguir otros dos: la enseñanza tradicional (subapartado 1.7.1.1) y la enseñanza en comunidad (subapartado 1.7.1.2). En la primera los contenidos matemáticos los introduce y explica el profesor, siendo el alumnado receptor de estos contenidos y en la segunda es el profesor el que se encarga de organizar, coordinar y dinamizar la enseñanza/aprendizaje, teniendo en todo momento el alumnado una participación activa en dicho proceso.

1.7.1.1 La enseñanza tradicional

La enseñanza tradicional en las matemáticas se caracteriza según Moreano et al. (2008) por una transmisión de hechos, contenidos y procedimientos por parte del profesorado al alumnado quienes reciben y almacenan la información sin discusión ni crítica. Además, consiste en una serie de reglas y procedimientos, ejercicios rutinarios, uso de palabras clave y la falta de un contexto significativo para su aprendizaje.

Bartolomé (2002) apunta como características de la enseñanza presencial:

- El grupo. El/La alumno/a se encuentra en un grupo que impulsa en ciertos momentos a que el/la alumno/a trabaje y se sienta que forma parte de un grupo. Cabe señalar que la enseñanza clásica a distancia también percibió la importancia del grupo y el actual e-learning lo trata de emular mediante la importancia dada al trabajo colaborativo.

- El ritmo. El ritmo proporcionado por la asistencia a clase es otro factor a destacar.

- El profesor. El alumnado accede físicamente al profesor y no mediante un ordenador.

- La relación. Se da un desarrollo de habilidades sociales y la capacidad de relacionarse con otras personas.

- El contacto físico. Se establecen contactos entre los estudiantes y con el profesor que serán esenciales para su futuro desarrollo personal y profesional.

Reigeluth (1999), citado por Batesteza y Patetta (2003), apunta que las aulas tradicionales han sido consideradas el ámbito decisivo para adquirir el conocimiento donde los instructores juegan el rol de fuente y transmisores de información y conocimiento y los estudiantes juegan el rol de receptores pasivos de este conocimiento. Se enfatiza la adquisición del conocimiento independientemente del contexto en que este va a ser usado. Los instructores son también responsables de evaluar la adquisición del conocimiento y el proceso de aprendizaje. Esta situación instruccional define un modelo centrado en el instructor en quien reside la iniciativa, el control y la responsabilidad.

Wiesenberg (1999), como se citó en Batesteza y Patetta (2003) como características de los cursos presenciales tradicionales señala: (a) hablar y escuchar en el aula tradicional (b) todos avanzando a la misma velocidad (c) concurrencia conjunta a un mismo lugar en el mismo instante, (d) interacciones sociales vistas como inapropiadas (e) control del proceso de aprendizaje por parte del instructor y (f) utilización de tecnologías avanzadas como un lujo.

1.7.1.2 La enseñanza en comunidad

La educación en un sistema democrático, según Maldonado (2007), debe aportar elementos formativos y que haya una buena interacción humana. Esto conduce a que se pase de potenciar una enseñanza que se base en el esfuerzo individual exclusivamente, por una enseñanza que valore a las personas como seres sociales y valorar el esfuerzo colectivo. Debe implantarse el carácter social del aprender, cambiando del modelo en el que el profesorado enseña y el alumnado aprende de forma exclusiva al modelo en el que el aprendizaje es un proceso social. Este último modelo se construye en la interacción con el profesor, con los compañeros, con el contexto y con el significado que se le asigna a lo que se aprende. Por lo tanto y en concordancia con Maldonado (2007) y Lerman (2006) se debería fomentar un aprendizaje constructivista.

Si analizamos el constructivismo, Ordóñez (2004) subraya que el constructivismo es un conjunto de concepciones sobre el aprendizaje, que provienen de dos teorías básicas del desarrollo cognoscitivo (Piaget, 1970; Vygotsky, 1978). Piaget (1970) sostiene que el conocimiento se obtiene la experiencia que se posee de su entorno y de la interacción con el ambiente. Anotó las bases de que el aprendizaje lo construye cada persona asimilando y adaptando la información que obtiene su sistema cognoscitivo y no a partir de la transmisión de la información el docente al estudiante. Vygotsky (1978) se centra sobre la base social del aprendizaje en las personas. Subraya que el aprendizaje es condición para el desarrollo cognoscitivo y que requiere la asistencia de otros que ya han construidos desarrollos más avanzados. Así se pueden solucionar dificultades más complejas que haciéndolo uno de forma individual.

El trabajo y aprendizaje en grupo, como señalan Collazos y Mendoza (2006), ha sido utilizado a lo largo de la historia, pero últimamente se está potenciando e investigando. Dentro del trabajo en grupo, principalmente se encuentran el aprendiz cooperativo y colaborativo que atendiendo a Panitz (1997), citado por Collazos y Mendoza (2006), en el aprendizaje cooperativo es el profesor quien diseña y controla las interacciones y resultados que se adquieren mientras que en el colaborativo son los alumnos quienes diseñan las interacciones y controlan las decisiones que conducen a su aprendizaje.

Si nos centramos en el aprendizaje colaborativo Bernaza y Lee (2005) comentan que es un proceso de construcción social en el que la interacción entre los componentes del grupo hace que las personas aprendan más que de forma individual. El resultado de un trabajo hecho en un grupo colaborativo es superior a la suma de los trabajos individuales de cada miembro de dicho grupo. El aprendizaje colaborativo exige formar grupos preferiblemente heterogéneos, encuadrar los estudiantes el desarrollo del proceso, diagnosticar el estado previo, orientar el trabajo individual previo y el trabajo grupal, presentar el resultado que se ha obtenido como grupo y evaluarlo. El aprendizaje colaborativo se fundamenta en: la interdependencia positiva donde cada miembro se considera responsable de su aprendizaje y de los demás, la responsabilidad individual de la parte de la tarea que le corresponde, el desarrollo de habilidades de trabajo en grupo (negociar, dialogar, etc.), los grupos heterogéneos de trabajo en todos los aspectos (conocimientos, habilidades, etc.), la igualdad de oportunidades para acceder a materiales y recursos y la alta motivación por el aprendizaje.

En cuanto a las pautas a seguir para que se produzca aprendizaje colaborativo Calzadilla (2002) señala que se ha de llevar a cabo un estudio de las capacidades, deficiencias y posibilidades de los miembros del equipo; establecer metas conjuntas, que incorporen las metas individuales; elaborar un plan de acción, con responsabilidades específicas y encuentros para la evaluación del proceso; examinar el progreso del equipo, tanto individualmente como en grupo; cuidar la socioafectivad con los miembros del grupo y realizar discusiones progresivas en torno al producto final.

Entre los beneficios para los estudiantes del aprendizaje colaborativo, Roberts (2005) citado por Guitert y Pérez-Mateo (2013) señala los académicos construyendo conocimientos, desarrollando el pensamiento y mejorando los resultados en clase; los sociales, originando un ambiente positivo para el aprendizaje y desarrollo social entre los estudiantes; los psicológicos, desarrollando actitudes positivas hacia los profesores y posiblemente la autoestima de los estudiantes.

Si nos centramos en el trabajo colaborativo en educción matemática y siguiendo a Olivera (2013) observamos que se ha usado la idea de Wenger (1998) de "comunidades de práctica" para estudiar la forma en que los docentes aprenden y se desarrollan profesionalmente. Por lo tanto, una comunidad de práctica se puede entender como el conjunto de personas que tiene una misión en común. Las personas participantes de la comunidad interaccionarán, trabajarán y aprenderán juntas para obtener un significado común. Además, tendrán una identidad común caracterizada por sus formas de actuación, herramientas, etc.

Llinares y Krainer (2006), de acuerdo con Wenger (1998), definen comunidad de práctica en la educación matemática como una empresa conjunta de miembros o de sentido compartido de propósitos en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Desde esta perspectiva, el aprendizaje se concibe como cambios en la participación en actividades socialmente organizadas, y en los usos individuales del conocimiento como un aspecto de su participación en las prácticas sociales (Lave y Wenger, 1991). el trabajo colaborativo en comunidades de profesores que actúan de manera autónoma.

Centrándonos en el trabajo colaborativo en comunidades de profesores que actúan de manera autónoma, Olivera (2013) señala que constituye un espacio de análisis y reflexión sobre los propios conocimientos de la materia, así como del conocimiento didáctico que puede favorecer el desarrollo profesional docente, con especial énfasis, en el aprendizaje de la materia de estudio.

En relación con la evaluación de la probable evolución de los conocimientos geométricos de los docentes por su participación en la comunidad y su efecto en la enseñanza, se observa que en el trabajo colaborativo entre pares lo que se prioriza es la toma de acuerdos. Dado que todos los profesores participantes tienen en un principio los mismos conocimientos de la materia y su enseñanza se deben aportar argumentos para convencer a los otros. Los contenidos que se van a tratar son propuestos por acuerdo de los participantes o por dificultades que tienen. Asimismo, en una participación conjunta para la satisfacción de una tarea común se implican distintos acercamientos propiciando la reflexión sobre las diferentes estrategias que satisfagan las propias necesidades. Además, los procedimientos que se emplean en la resolución de las tareas y su análisis proporcionan recursos didácticos para el aprendizaje de sus estudiantes.

1.7.2 La enseñanza online

La educación a distancia ha sido destacada por diversos autores (Gallego y Martínez, 2003; Holmberg, 1989; Keegan, 1988) como un proceso de enseñanza/aprendizaje que evita los problemas de desplazamiento y tiempo en el proceso de formación de las personas.

Entre los constructos teóricos que se manejan en la formación a distancia Adell y Sales (2000) destacan los siguientes:

a) Distancia transaccional, término introducido por Moore y Kearsley (1996) señalando que es la distancia física que conduce a una falta de comunicación entre instructores y estudiantes. Sin embargo, Adell y Sales (2000), subrayan que en un curso online puede haber más contacto y diálogo entre profesor y alumno que en una clase presencial masificada en la que el alumnado se dedica a tomar apuntes y a hacer exámenes.

b) Interacción señalándose cuatro tipos de interacción: estudiante-profesor; estudiante-contenido; estudiante-estudiante y estudiante-interfase comunicativa.

c) Control, refiriéndose a dónde reside el control de las actividades. Los estudiantes que contemplan el aprendizaje como fruto de su propia actividad y sienten un dominio de los ordenadores y las nuevas formas de comunicación conciben que controlan la situación.

d) Contexto social, afectando este a la motivación, a las actitudes y a las conductas de los participantes. Se subraya que la educación a distancia suele ser una comunicación escrita que puede ser buena para mantener el anonimato, pero inhibir la participación de las personas con dificultades en la escritura. Se aconseja hacer una presentación del grupo o a incluir fotografías de los participantes.

En relación con la enseñanza a distancia, tenemos la enseñanza online , también, denominada virtual virtual (Gallego y Martínez, 2003), o e-learning (Bartolomé, 2002; Rubio, 2003). Esta enseñanza es definida por la Fundación para el Desarrollo de la Función Social de las Comunicaciones (FUNDESCO) como: “Un sistema de impartición de formación a distancia, apoyado en las TIC que combina distintos elementos pedagógicos: Instrucción clásica (presencial o autoestudio), las prácticas, los contactos en tiempo real (presenciales, videoconferencias o chats) y los contactos diferidos (tutores, foros de debate, correo electrónico)” (Marcelo, 2002, citado por Gallego y Martínez, 2003).

Centrándonos en la enseñanza online, método de enseñanza a distancia mayoritariamente utilizado ahora, se contempla, además de las características propias de la enseñanza a distancia, la posibilidad de interacción entre el profesor y el alumnado (Perera y Torres, 2005; Levinson, 1989, Gallego y Martínez, 2003). Bartolomé (2002) apunta como características de la enseñanza a distancia que los/las alumnos/as han de tener grandes habilidades lectoras y escritora; los/las alumnos/as han de organizarse su propio tiempo, la metodología del curso, etc.; los alumnos/as han de imponerse su orden y disciplina y los/las alumnos/as pueden ser más individualistas y no tener que mantener relaciones sociales.

Si analizamos la comunicación en los cursos online, como señala Banzato (2002), suele ser por escrito. Sin embargo, Alvárez (2010) añade que en los cursos online hay también conversaciones sincrónicas (chats) y asincrónicas (foros), combinando los procedimientos propios de la escritura con los de la oralidad (Constantino, 2007, citado por Álvarez, 2010) y con los derivados de los códigos visuales. Batesteza y Patetta (2003) subrayan que las componentes comunicacionales de la Web proveen la posibilidad de desarrollar un diálogo asincrónico facilitando el aprendizaje en cualquier momento.

Por lo que respecta a la función del profesor en la enseñanza a distancia, según Anderson y Dron (2011) el papel del profesor ha pasado por tres etapas a lo largo del tiempo. En la primera etapa, el profesor es el generador de contenidos y centro de la enseñanza. En la segunda etapa, el profesor es el líder y ayudante del alumno para su aprendizaje de contenidos. En la tercera etapa, el alumno es el creador de contenidos y el profesor su asistente crítico.

Si nos centramos en el rol del profesor en la enseñanza online, se contempla que debe de afrontar diversas funciones. Adell y Salas (2000) indican que debe diseñar el currículum, elaborar los contenidos, facilitar y tutorizar el aprendizaje, evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, así como el proceso formativo y su actuación y proporcionar la ayuda técnica al alumnado. Asimismo, Adell y Sales (2000) indican que el formador ha de ayudar a los/as participantes a ser autosuficientes y contribuir a la construcción colectiva de conocimientos, apuntando hacia el trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo. Mason (1991) y Llorente (2006) destacan que el profesor ha de tener un papel organizativo y coordinativo del curso, así como un papel social, interactuando y fomentando la participación. Además, Mason (1991) indica el papel intelectual, haciendo preguntas y respondiendo cuestiones al alumnado y Llorente (2006) el papel técnico para que el alumnado pueda utilizar todos los recursos del entorno virtual. García y Pineda (2011) delimita dos roles el de profesor-asesor, promoviendo el aprendizaje significativo, diseñando contenidos y materiales didácticos, y el de profesor-tutor, orientando y ayudando al alumno en su progreso académico. Como indican García y Pineda (2011) hay un consenso en relación con las funciones de la docencia en entornos virtuales, pero no un perfil docente único que dé cuenta de las tareas o labores que desempeña el profesor en los entornos virtuales.

Sin embargo, como indican McCormack y Jones (1998), citados por Perera y Torres (2005), la enseñanza online puede tener algunos problemas e inconvenientes para los docentes como ausencia de expresiones físicas suponiendo un suplemento o incluso el cambio de contenido de la conversación; falta de experiencia en los medios a utilizar por lo docentes; poca confianza, lentitud y dificultad en el uso de la tecnología; incomodidad de la lectura online; no disponer de acceso a Internet; con la comunicación asincrónica los participantes no pueden estar seguros si otros participantes han recibido sus contribuciones e igualmente es difícil seguir la pista del progreso de una conversación; aumento de la interacción y más cargas de tareas; carga de tareas si se mueven de alumnos pasivos a participantes activos y los problemas en la moderación.

1.8 La práctica docente. Perfiles profesores

La enseñanza trata de construir un aprendizaje significativo de forma que el alumnado sepa lo que aprende, su valor, su utilidad y su relación con lo ha aprendido. La forma de clasificar, ordenar y hacer que aprendan el conocimiento es una tarea importante y va a diferenciar unos de otros (Woods, Jeffrey, Troman y Boyle, 1997) y conducirá a diferentes perfiles de profesores. Para establecer perfiles de profesores de geometría es interesante conocer tendencias diferentes que se han establecido en las que se relacionan las concepciones que se tienen sobre la ciencia, su enseñanza y aprendizaje (Smith y Neale,1989), se delimitan modelos didácticos que muestran diferentes formas de entender los procesos de enseñanza-aprendizaje en la ciencias (Porlán, 1993), se formulan niveles en relación con la manera de concebir el aprendizaje en el contexto escolar así como dimensiones de una teoría sobre el conocimiento escolar (Porlán, Rivero y Martín, 1998). Consideramos además el trabajo de Traver el al. (2005), quienes siguiendo a Doménech (1999c) caracterizan cuatro teorías psicopedagógicas básicas del profesorado y el de Fernández y Elortegui (1996) por los modelos didácticos que proponen detallando cada uno de los aspectos del “cómo enseñar”. Estos trabajos vamos a comentarlos en el apartado 1.8.1. En él describimos brevemente tendencias, modelos didácticos, niveles y dimensiones que se han establecido contemplando aspectos generales de la enseñanza, particularizando a la enseñanza de las ciencias o llevando el estudio a un contexto escolar.

En nuestro estudio pretendemos delimitar características de los profesores de geometría que han colaborado en nuestra investigación y organizarlas tomando como referente las características establecidas por Climent (2002) y Carrillo (1996) para los perfiles de profesores de enseñanza Primaria y Secundaria (profesorado de BUP o reforma y licenciados en Matemáticas o Física) respectivamente. Nos fijamos también en el estudio de Gualdron (2011), quien al centrarse en la enseñanza de la semejanza caracteriza tres tipos de profesores interpretados como representantes de posiciones ideológicas y de prácticas pedagógicas diferentes. En el apartado 1.8.2 describimos las caracterizaciones que hacen estos autores para los perfiles de profesores que han establecido.

Cabe aclarar que los trabajos que incluimos en esta sección no solo fundamentan teóricamente nuestro trabajo referido a la elaboración de perfiles de profesores de geometría. Como puede constatarse en el apartado 2.3.3 del capítulo 2 y la sección 3.5 del capítulo 3, algunas preguntas que planteamos en nuestros cursos para obtener información al respecto nos las han sugerido estos trabajos y en el análisis realizado de las respuestas dadas a estas cuestiones se constata la influencia de los mismos.

1.8.1 Fundamentos teóricos para la elaboración de perfiles de profesores de geometría

En este apartado vamos a describir brevemente aportaciones de Porlán, Rivero y Martín (1998), de Traver, Sales, Domenech y Moliner (2005) y de Fernández y Elortegui (1996).

1.8.1.1 El trabajo de Porlán, Rivero y Martín (1998)

Estos autores nos presentan un estudio acerca de las concepciones de los profesores sobre la ciencia, la enseñanza y el aprendizaje.

Citando el trabajo realizado por Smith y Neale (1991) con profesores de ciencias de primaria precisan cuatro tendencias diferentes en las que sí se relacionan las concepciones sobre la ciencia, su enseñanza y aprendizaje:

> a) Tendencia basada en el descubrimiento: la ciencia se entiende como un proceso de indagación y la enseñanza como facilitadora del descubrimiento de los alumnos.
> b) Tendencia basada en los procesos: la ciencia se elabora gracias al método científico y la enseñanza debe propiciar que los alumnos lo aprendan.
> c) Tendencia basada en el dominio del contenido: la ciencia es un conjunto de datos, conceptos y teorías y la enseñanza debe presentarlo adecuadamente a los alumnos.
> d) Tendencia basada en el cambio conceptual: la ciencia es una forma de conocimiento que se construye y evoluciona dentro de una ecología conceptual y la enseñanza debe facilitar la evolución de las ideas de los alumnos. (Smith y Neale, 1998, citado por Porlán et al., 1998, p. 275)

Se apoyan también en el trabajo de Gallagher (1993), en el que las observaciones de clase y las discusiones con profesores acerca de sus puntos de vista sobre la enseñanza, le permitió matizar algunas de las tendencias ya descritas y proponer seis puntos de vista acerca de la enseñanza de las ciencias:

> a) *La enseñanza como transmisión de información* que es recogida por el que aprende. Para ello es suficiente que el profesor conozca el contenido que va a enseñar. Por eso, la profesión de profesor se considera un trabajo simple.
> b) *La enseñanza como contenido organizado;* implica que el profesor realiza una actividad compleja de adaptación del contenido para que pueda ser «digerido» por los alumnos.
> c) *La enseñanza como conjunto de actividades manipulativas* seleccionadas por el profesor para que los alumnos puedan descubrir el significado de los conceptos.
> d) *La enseñanza como un ciclo de aprendizaje* que comienza por la exploración, la invención de una explicación para las observaciones realizadas y la aplicación de lo aprendido a otras situaciones.
> e) *La enseñanza como cambio conceptual* que también requiere que los profesores sigan un ciclo. Comienza con la identificación de las ideas de los alumnos; continúa con la prestación de ayuda para que comprendan las ideas científicas, ya que éstas son diferentes, pero también mejores que las iniciales; y acaba con el reemplazamiento de unas por otras.
> f) El *aprendizaje como construcción* y la *enseñanza como guía*. La cuestión central en este enfoque es que los profesores deben usar estrategias diversas para ayudar a los alumnos a dar sentido a las ideas que queremos que comprendan, a hacer conexiones entre ellas y a explicar su conocimiento. (Gallagher, 1993, citado por Porlán et al., 1998, pp. 275-276)

También hacen referencia a un trabajo anterior de uno de estos autores (Porlán, 1993*)* en el que se presenta una progresión del conocimiento profesional sobre el conocimiento escolar y valores de las diferentes categorías estudiadas, imagen de la ciencia, modelo didáctico personal, teoría subjetiva del aprendizaje y enfoque curricular (contenidos, metodología y evaluación).

Modelos didácticos que muestran diferentes formas de entender los procesos de enseñanza-aprendizaje en las ciencias se sintetizan en la tabla 1.8 y se describen brevemente a continuación.

TRADICIONAL El enfoque tradicional representa una concepción acientífica de los procesos de enseñanza-aprendizaje, según la cual, en el mejor de los casos, basta con que el profesor tenga una buena preparación en los contenidos de la materia y unas ciertas cualidades humanas acordes con la actividad de enseñar para que el sistema funcione. Cuando el sistema fracasa, o bien se debe a que el profesor no reúne los requisitos mencionados, o bien a que los alumnos son deficientes estudiantes tienen sus capacidades intelectuales mermadas. En este enfoque didáctico, el eje fundamental sobre el que gravita la organización y el desarrollo de las tareas de clase es el eje temático de los contenidos, de ahí la denominación que a veces recibe de pedagogía por contenidos.
TECNOLÓGICO Frente al acientifismo del enfoque tradicional, el enfoque técnico se caracteriza por concebir la enseñanza desde la perspectiva de una racionalidad práctica de tipo instrumental. Según ésta, la ciencia, al representar el verdadero conocimiento, puede prescribir normas y procedimientos técnicos rigurosos que garanticen una práctica eficaz. La didáctica se concibe como una actividad científico-técnica encargada de investigar y normativizar la práctica de la enseñanza. Es el enfoque técnico o por objetivos. ESPONTANEÍSTA El enfoque espontaneísta pone el énfasis en situar al alumno como el centro del currículo para que pueda expresarse, participar y aprender en un clima espontáneo y natural, donde sus intereses actúen como un importante elemento organizador.
ALTERNATIVO (COMPLEJO E INVESTIGATIVO) La razón de asignarle un apelativo tan ambiguo viene motivada por el hecho de que no disponemos aún de un referente teórico consolidado que nos permita unificar en un solo concepto-síntesis sus rasgos más característicos. Nos referimos, por ejemplo, a las dimensiones relativizadoras, complejas e investigativas que se sitúan entre las concepciones crítica e interpretativa de la teoría de la enseñanza.

Tabla 1.8. Niveles de formulación sobre el modelo didáctico personal (Porlán et al., 1998, p. 280)

a) Modelo *tradicional*, se centra en la transmisión verbal de contenidos disciplinares.

Centrado o dependiente de los contenidos y del profesor, es decir, consideración cotidiana de lo que es enseñar.

b) Modelo *tecnológico*, el que se adopta una posición experimentalista en el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje. La enseñanza se concibe como una actividad técnica que, en la medida en que asuma métodos más científicos, mejorará su calidad.

Este modelo intenta resolver los problemas que plantean el racionalismo y el enciclopedismo del modelo tradicional, trasladando el empirismo científico al terreno didáctico:

- Tendencia tecnológica: procesos excesivamente cerrados y rígidos (mayor rigor).

- Tendencia espontaneísta: *descubrimiento inductivo y autónomo* de los alumnos (mayor participación).

c) Modelo didáctico de tipo *complejo e investigativo* También se detectaron conjuntos de declaraciones que reflejan una *concepción alternativa del proceso* *de enseñanza-aprendizaje*, al resaltar su carácter complejo, la participación de los alumnos y el papel investigador del profesor.

Haciendo referencia a otro trabajo previo (Porlán, 1989) destacan tres modelos en relación con la imagen de la ciencia: racionalismo, empirismo y relativismo (tabla 1.9).

RACIONALISMO El modelo racionalista responde a un punto de vista que considera que el conocimiento es un producto de la mente humana, generado a través del rigor lógico y de la razón. Para el racionalismo, el conocimiento no está en la realidad ni se obtiene por un proceso de observación de la misma, ya que los sentidos humanos inevitablemente deforman los hechos y, por tanto, tergiversan la realidad impidiendo el auténtico conocimiento. Esta posición intelectual se corresponde con una forma de absolutismo no empirista. (Porlán, 1989, p. 313)
EMPIRISMO RADICAL Basada en la creencia de que la observación de la realidad permite obtener por inducción el conocimiento objetivo y verdadero que, como tal, es un reflejo de la realidad (objetivismo, absolutismo y realismo). (Porlán, 1989, p. 315) EMPIRISMO MODERADO Cercana a un inductivismo matizado o a un cierto falsacionismo experimentalista en el que la hipótesis y la experimentación sustituyen la mera observación como eje fundamental del proceso científico. (Porlán, 1989, pp. 314-315)
ALTERNATIVA (Relativismo moderado, constructivismo y evolucionismo) Una nueva imagen de la ciencia como actividad condicionada social e históricamente, llevada a cabo por científicos (individualmente subjetivos pero colectivamente críticos y selectivos), poseedores de diferentes estrategias metodológicas que abarcan procesos de creación intelectual, validación empírica y selección crítica, a través de las cuales se construye un conocimiento temporal y relativo, que cambia y se desarrolla permanentemente. (Porlán, 1989, p. 65)

Tabla 1.9. Niveles de formulación sobre la imagen de la ciencia (Porlán et al., 1998, p. 278)

Y aprecian los siguientes niveles de formulación en relación con la manera de concebir el aprendizaje en el contexto escolar (Tabla 1.10).

APROPIACIÓN FORMAL Conjunto de creencias bastante generalizadas que conciben el hecho de aprender como un acto de apropiación cognitiva, mediante el cual, el sujeto que aprende, toma del exterior, ya sea de otra persona de un texto escrito o de la propia realidad, unos determinados significados. Presupone que la comunicación de significados es un proceso neutro y objetivo donde los mensajes no sufren alteraciones ni deformaciones en el proceso que va desde el sujeto que emite al sujeto que recibe. Presupone también que de cada concepto, proceso o dato, que es conveniente enseñar y aprender, sólo existe un único significado correcto. El que va a aprender algo lo hace porque, o no posee dicho significado, o el que posee es incorrecto. Esta idea sobre el aprendizaje ha sido representada por las metáforas del vaso vacío o de la mente en blanco. (Porlán, 1989, p. 337)

ASIMILACIÓN En este punto de vista, lo relevante no es capturar un significado como si fuera un paquete de información que alojáramos en una determinada estantería de nuestra memoria para ser usado cuando se considere necesario. Lo relevante es asimilarlo, hacerlo significativamente propio, comprenderlo en profundidad, incorporarlo a una estructura cognitiva de carácter relacional. Supone una actitud más activa del sujeto. Para asimilar hay que querer hacerlo, hay que estar interesado desde uno mismo y predispuesto. Pero asimilar supone también estar en posesión de los significados previos y colaterales que permitan realizar con éxito las operaciones de ensamblaje del nuevo significado. (Porlán, 1989, pp. 339-340)
CONSTRUCCIÓN La construcción de conocimientos es un proceso en que el individuo y el grupo no sólo desarrollan gradual y progresivamente su particular estructura de significados, sino que, precisamente por ser un proceso en el que el sujeto elabora los significados, y no simplemente los toma o asimila, también construyen singularmente el camino específico de su evolución. No hay, según esto, estructuras rígidas y únicas de desarrollo prefijado, ni metas finales obligadas en el proceso; hay caminos personales y grupales, influidos socialmente, que constituyen desarrollos cognitivos semiautónomos, sin referentes absolutos y terminales que necesariamente se tengan que alcanzar. Porlán, 1989, p. 342)

Tabla 1.10. Niveles de formulación sobre el aprendizaje (Porlán et al., 1998, p. 282)

Apoyándose en estos niveles Porlán, Rivero y Martín (1998) muestran el siguiente nivel de formulación en las diferentes categorías curriculares (Tabla 1.11).

SUBCATEGORÍAS (Aspectos estudiados)	ENFOQUE CURRICULAR (Niveles de formulación)		
	Enfoque tradicional.	Tendencia tecnológica. ---------------------------- Tendencia espontaneísta.	Enfoque alternativo (constructivista e investigativo).
CONTENIDOS – Nivel de formulación. – Amplitud y diversidad. – Organización.	El contenido del conocimiento escolar como adaptación del conocimiento disciplinar.	El contenido del conocimiento escolar como adaptación del conocimiento disciplinar. ---------------------------- El contenido del conocimiento escolar como adaptación contextual del conocimiento cotidiano.	El contenido del conocimiento escolar como reelaboración e integración de conocimientos que proceden de diversas fuentes.
METODOLOGÍA – Papel didáctico de las concepciones de los alumnos. – Caracterización de las actividades. – Interacción profesor-alumnos.	Basada en la transmisión verbal de conocimientos por parte del profesor mientras los alumnos atienden o realizan actividades de comprobación de lo explicado.	Basada en la versión fuerte (inductivista) del empirismo. Los objetivos como hilo conductor de las actividades. ---------------------------- Basada en la versión débil del empirismo. Los intereses de los alumnos como hilo conductor de las actividades.	La investigación de problemas de interés potencial es lo que da sentido a las actividades, siendo las ideas de los alumnos un referente continuo del proceso.
EVALUACIÓN – Finalidad. – Contenido. – Instrumentos.	La evaluación como calificación para comprobar que los alumnos se han apropiado de los conceptos explicados.	La evaluación como medida del grado de consecución de los objetivos. ---------------------------- La evaluación como participación en la dinámica de la clase.	La evaluación como investigación para ajustar la enseñanza y el aprendizaje (es decir, la hipótesis de conocimiento escolar deseable y la evolución real de las concepciones de los alumnos).

Tabla 1.11. Niveles de formulación en las diferentes categorías curriculares (Porlán et al., 1998, p. 283)

Asimismo, se apoyan en el trabajo previo de Porlán (1989), quien establece las dimensiones de una teoría sobre el conocimiento escolar que se registran en la tabla 1.12.

PRODUCTO FORMAL Una dinámica institucional muy directiva, evaluadora y sancionadora que basa casi exclusivamente su actividad en un discurso verbal del profesor es un reflejo de una cierta identificación del conocimiento con su formulación literal, como un producto acabado del que interesa fundamentalmente su envoltura. (Porlán, 1989, p. 368)
PROCESO TÉCNICO Una dinámica basada en la programación detallada y secuenciada de actividades empíricas por el profesor expresa quizás una reducción del conocimiento a la eficacia de un proceso técnico. (Porlán, 1989, p. 369) PROCESO ESPONTÁNEO Una situación escolar donde el profesor tienda regularmente a apoyar las actividades observacionales y manipulativas que interesan a sus alumnos, sin establecer con ellos un intercambio dirigido y estable de construcción conceptual, es probable que implique una simplificación de los procesos relacionados con el desarrollo de los conocimientos, al reducirlos casi exclusivamente al interés espontáneo del sujeto que conoce. (Porlán, 1989, p. 369)
PROCESO COMPLEJO Una visión complejizadora del conocimiento escolar no puede considerar el conocimiento previo del alumno como algo incorrecto y el conocimiento disciplinar reflejado en los contenidos como algo absolutamente cierto. Una visión de este tipo ha de considerar ambos como diferentes variantes conceptuales, cuya validez será relativa a los problemas que son relevantes para el alumno, para el profesor o, por ejemplo, para el científico. La validez de un conocimiento es adaptativa a un medio ecosociológico determinado y a los problemas ambientales característicos del mismo. Construir el conocimiento no significa construirlo espontáneamente o autoritariamente, sino interactivamente a través de la comunicación y negociación democrática. (Porlán, 1989, p. 379)

Tabla 1.12. Niveles de formulación en la teoría sobre el conocimiento escolar (Porlán et al., 1998, p. 285)

Estos autores expresan que cada una de las tendencias detectadas puede contemplarse como una hipotética progresión en el *conocimiento profesional sobre el conocimiento escolar*, que integra los diferentes niveles de formulación que han ido proponiendo a lo largo del trabajo. La tabla 1.13 sintetiza esta hipótesis de progresión de este conocimiento. Aclaran que no tiene por qué darse una coherencia entre todas las dimensiones propuestas.

Epistemología escolar	**Imagen de la ciencia**	**Modelo didáctico personal**	**Teoría subjetiva del aprendizaje**	**Enfoque curricular**		
				Contenidos	**Metodología**	**Evaluación**
Conocimiento escolar como producto formal	Racionalismo	Tradicional	Apropiación formal de significados	Reproducción y simplificación disciplinar	Transmisión verbal del profesor	Calificación (exámenes)
Conocimiento escolar como proceso técnico	Empirismo	Tecnológico	Asimilación de significados	Adaptación Disciplinar	Secuencia cerrada de actividades Secuencia	Medida del grado de consecución de los objetivos

Conocimiento escolar como proceso espontáneo		Espontaneísta		Adaptación contextual	orientada por los intereses de los alumnos	Participación en la dinámica de la clase
Conocimiento escolar como proceso complejo	Relativismo moderado	Alternativo, constructivista e investigativo	Construcción de significados	Reelaboración e integración de conocimientos diversos	Investigación escolar de problemas significativos	Investigación de la hipótesis curricular

Tabla 1.13. Hipótesis de progresión del conocimiento profesional sobre el conocimiento escolar y valores de las diferentes categorías estudiadas. (Porlán et al., 1998, p. 286)

1.8.1.2 El trabajo de Traver, Sales, Domenech y Moliner (2005)

Estos autores agrupan los marcos explicativos sobre la educación que manejan los docentes en dos grandes teorías explicativas del hecho educativo. Por una parte, los modelos transmisivos y por otra parte, las teorías constructivas de la enseñanza y el aprendizaje. Los modelos transmisivos son los que se han usado tradicionalmente y se basan en que el peso de la educación en la enseñanza/aprendizaje recae en el docente, el aprendizaje depende de la enseñanza, se pretende que haya una acumulación de conocimientos y se valora sus productos. Las teorías constructivas de la enseñanza y el aprendizaje corresponden a las últimas líneas de investigación en psicología y pedagogía, donde el peso de la educación está en el aprendizaje por parte del alumnado, siendo el conocimiento consecuencia de la interacción sujeto y objeto y valorándose los procesos de construcción de los aprendizajes.

Lo que destacamos del trabajo de Traver, Sales, Domenech y Moliner (2005) se recopila en la tabla 1.14. Siguiendo a Doménech (1999c) caracterizan estos dos marcos teóricos en cuatro teorías psicopedagógicas básicas en función de que el peso del análisis recaiga preferentemente en la enseñanza o el aprendizaje, el proceso o el producto.

<table>
<tr><th colspan="2">TEORÍAS PSICOPEDAGÓGICAS DEL PROFESORADO</th></tr>
<tr>
<td>ENSEÑANZA CENTRADA EN EL PROFESOR
(Enfoque tradicional)

El profesor es el que posee el saber y nada de lo que diga se puede cuestionar.
La educación es esencialmente logocéntrica, dirigida por el profesor y fuertemente centrada en su autoridad (moral o física).
El papel del profesor es de transmisor del conocimiento.
El alumno juega un papel pasivo-receptivo.
Se valora la cantidad de contenidos asimilados, no la calidad.
La metodología es fundamentalmente expositiva.
Evaluación reproductiva.

Escuela: un lugar para el saber.
Profesor: experto en contenido o transmisor.</td>
<td>ENSEÑANZA CENTRADA EN EL ALUMNO
(Enfoque cognitivo)

La situación educativa se organiza tomando como centro al estudiante.
El profesor no dirige la instrucción, sino que su papel se limita a guiar y orientar el proceso de E/A.
Pretende desarrollar habilidades de aprendizaje y de pensamiento en los estudiantes.
El alumno es un constructor activo de su propio conocimiento.
El profesor crea situaciones de aprendizaje y plantea conflictos cognitivos para favorecer esa construcción.
El profesor trata de favorecer la motivación intrínseca del estudiante. Es decir, la motivación no proviene de fuera sino de dentro.
La evaluación se centra en el proceso.

Escuela: un lugar para pensar
Profesor: enseñante</td>
</tr>
</table>

ENSEÑANZA CENTRADA EN EL PROCESO (Enfoque humanista) (Psicoterapia)	ENSEÑANZA CENTRADA EN EL PRODUCTO (Enfoque conductista)
• Los seres humanos tienen un deseo natural de aprender (debido a su curiosidad). • Importancia del desarrollo de destrezas socioafectivas y sociales (sentido crítico, reflexión). • El alumno decide su propia marcha, y marca su propio ritmo (contratos de aprendizaje), lo que fomenta la responsabilidad, autonomía e independencia. • El diseño instruccional es muy flexible por lo que rechazan la rigidez de los objetivos operativos. Critican la rigidez de la escuela en general. • El verdadero aprendizaje ocurre cuando se involucra tanto al intelecto como a las emociones. • Importancia del aprendizaje cooperativo, diálogo y las interacciones. • Se valora mucho más el aspecto afectivo que los resultados. • La evaluación es procesual. Escuela: un lugar para aprender a vivir y convivir. Profesor: un educador.	• La situación educativa debe entenderse como un proceso de tipo técnico. • Se concede mucha importancia a la planificación y a la concreción de los objetivos. • El proceso es rígido porque está supeditado a la consecución de los objetivos, formulados de forma operativa. • El profesor proporciona mucha práctica a los alumnos. • La enseñanza debe ser individualizada. • La evaluación está dirigida a valorar el grado de cumplimiento de los objetivos. Escuela: un lugar para saber y saber hacer. Profesor: técnico.

Tabla 1.14 Caracterización de los cuatro tipos de creencias sobre la enseñanza/aprendizaje propuestos (Traver, Sales, Doménech y Moliner, 2005)

Tras su estudio, basándonos en las intercorrelaciones obtenidas entre los modelos de enseñanza/aprendizaje, estos autores señalan que, por un lado, hay una tendencia bipolar manifestada por lado entre los modelos centrados en el profesor y en el producto, relacionándose significativamente con tareas instructivas de carácter expositivo y una gestión del aula autocrática. Esta relación correspondería a la perspectiva docente denominada transmisiva. Por otro lado, hay una tendencia bipolar manifestada, entre los modelos centrados en el alumno y en el proceso, relacionándose con tareas instructivas de carácter interactivo del tipo abiertas-orientadas y con una gestión del aula negociada. Correspondería a una perspectiva docente constructiva.

Sin embargo, dicho estudio indica que existe una falta de correspondencia entre lo que los profesores "dicen que piensan" y lo que "dicen que hacen". Los profesores presentan unas creencias predominantemente orientadas hacia el enfoque centrado en el alumno-proceso, pero manifiestan que llevan a cabo una enseñanza fundamentalmente expositiva y que las actividades que proponen a sus alumnos son básicamente cerradas-obligatorias y de trabajo dirigido. Con respecto a las tareas de gestión manifiestan que la que más utilizan es de tipo explícito y negociado, poniendo de manifiesto que su gestión predominante en el aula es explícita. Pero este tipo de tareas de gestión no va acompañada de ninguna creencia que las sustente. Todo ello indica que los profesores en sus acciones docentes están más cercanos al enfoque profesor-producto, contrariamente a lo manifestado en sus creencias.

En el trabajo se plantea el aula como un lugar de puesta en común y diálogo en el que se va construyendo el conocimiento a partir de las experiencias sobre la realidad y de la mediación de los otros, adultos e iguales. También la necesidad de definir un nuevo perfil docente, de un profesorado reflexivo y crítico que parte de su práctica para confirmar o modificar sus teorías, sin por ello despreciar los conocimientos que la teoría y la técnica le pueden aportar.

1.8.1.3 El trabajo de Fernández y Elortegui (1996)

La tabla 1.15 muestra los diferentes modelos didácticos que distinguen estos autores y cada uno de los aspectos que incluyen en ellos relativos a cómo "cómo enseñar".

	Modelo transmisor	Modelo tecnológico	Modelo artesano	Modelo descubridor	Modelo constructor
Objetivos	Impuestos por un escalón superior o por técnicos con diseño curricular.	Muy determinados y detallados en varios rangos por expertos.	Implícitos y limitados por el contexto. No son controladores del quehacer.	Marcados por los intereses de los alumnos.	Basados en las ideas previas de los alumnos. Resultan de un contrato discutido con los alumnos y tienen como fin los procesos, habilidades, actitudes y conocimien-tos.
Programación	Basada en contenidos como objetivos cognitivos, reseñados en programas según la distribución 1ógica dela asignatura.	Basada en objetivos específicos y terminales dirigidos a adquirir conocimientos y capacidades según la 1ógica y pautas de la disciplina.	Basada en prácticas rutinaria del docente, sin explicitación de objetivos reales. Gobernada por los métodos del docente y por los contenidos de la asignatura. Disciplinar tendente a interdisciplinar.	Basada en pequeñas investigaciones de larga duración. Escasa atención a los contenidos y a la materia disciplinar.	Basada en una planificación negociable, utiliza una planificación curricular abierta como hipótesis De trabajo en construcción y contrastación permanente. Interdiscipli-nar tendente a integrada.
Metodología	Magistral, expositiva indemostrati-va.	Magistral, expositiva indemostrati-va, socrática.	Activa, socrática y magistral. Gobernada por los métodos del docente.	Investigación por libre con método de proyectos centros de interés con marcado carácter empirista e inductista.	Resolución de problemas por investigación. Activa por descubrimiento guiado. Prioridad a los procesos; se atiende más al c6mo que al por qué.

Organización	Un solo grupo de estudiantes.	Un solo grupo de estudiantes.	Un grupo-clase; ocasionalmen-te en pequeños grupos.	Individual o en pequeño grupo.	Grupos variables y pequeños formados de común acuerdo.
Comunica-ción	Exposición verbal y escrita. Clases magistrales del profesor.	Variada (verbal, audio-visual, prensa escrita pero dirigida por el profesor, medios de comunicación, etc.). Predomina la lección magistral.	Predominante mente interactiva y espontánea.	Prioritaria la comunicación entre alumnos.	Dirigida por el profesor, pero modificada por la interacción con los alumnos. La relación entre alumnos tiene un papel importante.
Medios utilizados	Pizarra, video.	Pizarra, video. Fichas, ordenador, material específico de la disciplina, pizarra, video.	Flexibilidad y variedad, materiales de diverso origen adaptados a la línea de trabajo establecida.	Material adaptado a trabajo de investigación.	Lugares con material flexible y de elección abierta.
Documentaci-ón	Libro de texto y apuntes.	Fichas o guías muy programadas para profesores y alumnos. Texto o apuntes adaptados.	Libros, apuntes, manuales y documentos diversificados aportados por el profesor y el alumno. Cuaderno del alumno como elemento de trabajo.	Dotación documental genérica con libre acceso a ella de todos los alumnos.	Biblioteca de aula/varios libros. Cuaderno o archivo personal del Texto o apuntes adaptados. alumno.
Actividades/ experiencias	Ejercicios de aplicación de teoría, resolución de ciertos "tipos". Se suele carecer de parte experimental. Experiencias de apoyo al discurso, ilustración y con carácter de aprendizaje técnico.	Resoluci6n de ejercicios en aplicaci6n de la teoría. Prácticas de laboratorio comprobatorias de algunas de las situaciones de la teoría. Prácticas estructuradas en guiones descriptivos pormenoriza-dos.	Planteamiento de ejercicios y de problemas con resolución. Experiencias intercaladas a la explicación del profesor, dirigidas por él y con cierto enfoque empirista.	Actividades que sitúan al alumno en situación rehacer los descubrimientos de la ciencia y reconstruir el conocimiento, bajo la ayuda y ánimo (pero sin guía) del profesor.	Planteamiento de problemas abiertos, incluso sin solución. Actividades y experiencias encargadas y guiadas por el profesor, relacionadas con el tema de trabajo. Los alumnos eligen el diseño o lo hacen ellos mismos.

Tabla 1.15. Los distintos planteamientos que tienen los diferentes modelos didácticos sobre cada aspecto del "cómo enseñar" (Fernández y Elortegui, 1996, p. 340)

1.8.2 Descripción de las tendencias didácticas

Carrillo (1996) en su búsqueda por encontrar un referente teórico para establecer las tendencias didácticas de los profesores de su estudio analizó a diversos autores (Kuhs y Ball, 1986; Voigt, 1989; Underhill,1988; Hewson y Hewson, 1989; Jurdak, 1991; Ernest, 1989; Thompson, 1991). Sin embargo, fue Porlán (1989, 1992), quien ejerció mayor influencia en esta parte de su trabajo. Adoptó los nombres de las tendencias (tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa), así como algunas categorías e indicadores. El resto, categorías, gran parte de los indicadores y la descripción de las tendencias y los indicadores, fue elaborado por él apoyándose en otros autores como Tabachnik y Zeichner (1984), Marrero (1993), Masjuan (1995). Posteriormente Climent (2002) consideró las clasificaciones de diversos autores respecto de las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Sin embargo, tomó como referencia las tendencias presentadas por Carrillo (1998). A continuación, se presentan las características fundamentales de las cuatro tendencias diferenciadas en ese trabajo (Carrillo, 1998, pp. 64-67).

Tradicional

La tendencia tradicional se caracteriza por el uso de la exposición magistral como técnica habitual y uso del libro de texto como único material curricular. El profesor sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades. La asignatura está orientada básicamente a la adquisición de conceptos, otorgándole una finalidad exclusivamente informativa, es decir, se pone en conocimiento de los alumnos un cierto "panorama matemático" que se espera que aprendan; presupone que dicho aprendizaje se realiza, utilizando la memoria como único recurso, por superposición de unidades de información. El alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el profesor se los presente, manteniendo éste como dinamizador ideal del aprendizaje la estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación.

Se considera al alumno como el único responsable de los resultados del aprendizaje, en función del grado de sumisión. Hay una sobrevaloración implícita de los apuntes. El alumno se esfuerza, por ello, en recoger en sus papeles todo aquello que el profesor le transmite verbalmente mediante dictado, por su caracterización como especialista en contenidos.

Tecnológica

En esta tendencia, el profesor no expone los contenidos en su fase final, sino que simula su proceso de construcción, apoyado habitualmente en medios técnicos, y sigue una programación cerrada, con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina. Interesan tanto los conceptos como los procesos lógicos que los sustentan, por su eventual reproductibilidad y se otorga a la asignatura, además de una finalidad informativa, un carácter práctico que permita su aplicación en otros ámbitos de la matemática, otras disciplinas o en la técnica. Presupone que el aprendizaje se realiza utilizando la memoria, organizándose internamente según la lógica estructural de la disciplina, por lo que, para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que proviene del exterior, siendo el dinamizador ideal del aprendizaje la lógica de construcción de la propia matemática.

Se considera al alumno como el principal responsable de los resultados del aprendizaje, siempre que el contexto elegido por el profesor sea adecuado. Al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, el alumno imita el estilo cognitivo del profesor, pues reproduce el proceso lógico mostrado por éste cuando transmite los contenidos de aprendizaje, por procesos tecnológicos mediante exposición, debido a su caracterización como técnico del contenido y del diseño didáctico.

Espontaneísta

La tendencia espontaneísta se caracteriza por una propuesta por parte del profesor de actividades de manipulación de modelos, a través de las cuales se espera que se produzca, eventualmente, un conocimiento no organizado. La programación es un documento vivo que, por basarse en los intereses que, en cada momento, manifiestan los alumnos y en la negociación con ellos, no dispone de una organización inicial. No interesan tanto los conceptos como los procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia el trabajo escolar. La asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y la vida), así como para la adquisición de valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos. El profesor piensa que se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno, produciéndose dicho aprendizaje (cuyo dinamizador ideal son los intereses de los alumnos), de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.

Por su marcado carácter humanista y especialista en dinámica de grupos, el profesor induce al alumno a participar en las actividades que promueve, que constituyen la clave de la motivación de éste, y éste pasa de una a otra, participando intensamente en cada una de ellas.

Investigativa

La tendencia investigativa se caracteriza por la organización, por el profesor, del proceso que llevará al alumno a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de su investigación. El profesor dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. Interesan tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general, siendo éstos (materia y trabajo escolar) los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas. Existe una trama que vincula y organiza el conocimiento por la que el profesor se mueve dependiendo de los intereses, nivel..., de los alumnos, siendo la finalidad última de la asignatura dotar al alumno de unos instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo. Los objetos de aprendizaje, además de poseer significado, tienen también la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter móvil a través de una malla conceptual. El profesor piensa que el aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por él, manteniendo como dinamizador ideal del aprendizaje el equilibrio entre los intereses y estructura mental de los alumnos y los de la matemática.

Para que se dé aprendizaje es necesario que el alumno otorgue significado a lo que aprende, siendo consciente de su propio proceso de aprendizaje, para lo cual su actividad está organizada (interna o externamente) hacia la búsqueda de respuestas a determinados interrogantes. El profesor, experimentador interactivo del contenido y de los métodos, provoca la curiosidad de aquél conduciendo la investigación hacia la consecución de aprendizajes.

En definitiva, la tendencia investigativa tiene como principio didáctico caracterizador la investigación, integrando las aportaciones de la psicología constructivista y una concepción compleja de la realidad educativa (Grupo Investigación en la Escuela, 1991).

Gualdron (2011) caracteriza tres tipos de profesores interpretados como representantes de posiciones ideológicas y de prácticas pedagógicas diferentes, no considerándose ni "absolutos" ni excluyentes: el conformista, el reflexivo y el interrogativo que se describen a continuación (tabla 1.16).

Conformista el conocimiento se percibe al margen de valores, se pide que sea suficiente (a un nivel simple) desde el canon dado. Sólo quiere aprender lo necesario para enseñar.
Reflexivo Considera la relación de las matemáticas con la vida diaria, es alguien que cree que debe ser mediador entre sus alumnos y el conocimiento en el contexto social de los conocimientos y en la escuela. Es consciente del papel de puerta social jugado por las matemáticas. Sabe que existen varias maneras de enseñar las matemáticas, quiere identificar las óptimas maneras de enseñar y las estrategias, pero en las estructuras educacionales dadas. No se cuestiona las estructuras de poder, la reestructuración social ni los propósitos morales de la educación.
Interrogativo Caracterizado por la conciencia de la construcción social del conocimiento científico, no lo consideran autónomo. Se preocupan por la posición autoritaria del maestro, cuestionan las prácticas pedagógicas y son investigadores.

Tabla 1.16 tipos de profesores interpretados como representantes de posiciones ideológicas y de prácticas pedagógicas diferentes (Gualdron, 2011, p. 79)

Los descriptores utilizados por Gualdron (2011) para cada tipo de profesor han sido adaptados de Miller y Baker (2001) en relación a tres importantes aspectos en el desarrollo profesional del profesor (relaciones con el conocimiento matemático, aspectos estratégicos, pedagógicos y relaciones de poder, y actitudes, emociones, valores y apreciaciones).

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

Este capítulo da cuenta de la metodología del trabajo que hemos desarrollado que está en concordancia con el marco teórico y la revisión bibliográfica presentada en el capítulo 1.

En las secciones 2.1 y 2.2 describimos los diferentes instrumentos de toma de datos utilizados en el estudio para obtener información sobre la enseñanza/aprendizaje en la ESO de los procesos matemáticos de descripción y clasificación a partir de los sólidos. La sección 2.1 informa de la elaboración y descripción de la encuesta usada y la sección 2.2 describe los tres cursos diferentes que se llevaron a cabo para la obtención de datos provenientes de respuestas de profesores/as o comentarios a cuestiones que se les plantearon en el desarrollo del curso correspondiente.

En las secciones 2.3 y 2.4 contemplamos el análisis realizado de los datos obtenidos. En 2.3 se presenta como se realiza la toma y registro de datos, se da cuenta de los criterios que se utilizan para el análisis de los mismos, de categorizaciones realizadas para respuestas de profesores/as, así como de las características que asociamos a los perfiles de profesores/as que hemos delimitado. Finalmente, la sección 2.4 se centra en cómo se ha realizado el análisis de los datos para obtener resultados y conclusiones en relación con los diferentes objetivos del estudio.

2.1 La elaboración y descripción de la encuesta. Ámbito de estudio

En Pérez y Guillén (2007, 2008) hemos descrito brevemente la encuesta utilizada en nuestro estudio dando breves pinceladas sobre su proceso de elaboración e indicando además el profesorado que participó en el estudio. A continuación, para describirla (apartado 2.1.1) y para indicar el ámbito de estudio (apartado 2.1.2) reproducimos casi textualmente lo indicado en este trabajo.

2.1.1 Sobre la encuesta

La primera organización, comprensión y análisis de las concepciones y creencias del profesor/a de secundaria sobre la enseñanza de la geometría se llevó a cabo a partir de una encuesta que se describe con detalle en otro trabajo (Pérez, 2006) y que se ha presentado en dos comunicaciones (Pérez y Guillén, 2007, 2008). A continuación, se describe brevemente dicha encuesta.

A partir de la encuesta descrita en Guillén y Figueras (2004) y considerando además datos procedentes del análisis teórico que se llevó a cabo, se elaboró una versión experimental adaptada para poder obtener información sobre la enseñanza de la geometría en la ESO, encuesta I. Los datos experimentales obtenidos en el estudio exploratorio I sirvieron para reelaborar dicha encuesta obteniendo así la “Encuesta II”. Cabe señalar que las modificaciones, que fueron mínimas, sirvieron para mejorar las cuestiones relativas a contenidos geométricos al reformular los enunciados de algunas cuestiones, cambiar el orden de las mismas, etc.

La encuesta II tenía cuatro secciones. La primera sección designada "Acerca de la geometría: creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones" contiene nueve preguntas, distribuidas en cuatro grupos, a partir de las que se puede obtener información sobre creencias, concepciones, tomas de postura, actitudes, conocimientos… en relación con la geometría y su enseñanza. El primer grupo consta de cuatro preguntas (ítems 1 al 4) que están relacionadas con el/la profesor/a y la geometría. el segundo grupo y dado que con respecto a la enseñanza de una materia está implicado también el alumno, consta de tres preguntas (ítems 5 al 7) en las que consideraremos al alumno en relación con la geometría desde el punto de vista del profesor/a. En el tercer grupo (ítem 8), consideramos al profesor/a en relación con sus compañeros de trabajo y la geometría. El cuarto grupo (ítem 9) se cuestiona por dónde se empieza a enseñar geometría y por dónde comenzaría a enseñar geometría en primaria.

En la segunda sección "Sobre la enseñanza de la geometría en la ESO" (ítems 10 al 15) pretendemos obtener información sobre la enseñanza de la geometría en la ESO, en relación con otros bloques temáticos del currículum de la ESO o considerando diferentes áreas de la geometría, o en relación con las razones que se aportan sobre por qué enseñar o no la geometría del currículum. Considerando los contenidos matemáticos que se presentan en el currículum de la ESO diseñamos los ítems 10 y 11 con lo que nos interesa saber la importancia que tiene el bloque de geometría con respecto a los demás bloques de matemáticas y obtener información sobre los contenidos geométricos que priorizan en la enseñanza los/as profesores/as y en que cursos lo hacen. También nos interesa conocer lo que expresan los/as profesores/as sobre si realmente enseñan toda la geometría que se propone en el currículum y si no es así, las razones que aportan para explicar su respuesta (ítems 12 y 13). En el ítem 14 se pregunta por las razones que se consideran más importantes por las que se enseña geometría. El ítem 15, centrándonos en aquellos apartados que vamos a tratar con más profundidad en nuestro test, peguntamos al profesorado si prioriza los contenidos relativos a los procesos matemáticos o el relativo a medición.

Las preguntas de la tercera sección (ítems 16 al 19), denominada "El profesor y el currículum de geometría" pretendían que los/as profesores/as de secundaria aportaran información sobre qué contenidos geométricos enseñan en sus clases y qué procedimientos utilizan, qué contenidos geométricos consideran más o menos importantes de los que imparten en sus clases, y qué contenidos seleccionan como los que tiene que conocer el alumno para si no se conocen se considere que se tiene bajo rendimiento en geometría en el curso correspondiente.

Los contenidos geométricos del currículum de la ESO seleccionados, siguiendo a Guillén y Figueras (2004), los hemos reagrupado en cuatro bloques. En el bloque I todo lo relacionado con el reconocimiento y la descripción de las formas de 3, 2 y 1 dimensión ya que lo primero que tenemos que saber son los elementos básicos de la geometría del espacio y del plano que los/as profesores/as dicen que enseñan. En el bloque II incluimos la clasificación de las formas geométricas porque pensamos que una vez que conozcamos las formas geométricas habrá que clasificarlas y la descripción precede a la clasificación. Para entender las formas geométricas habrá que construirlos/as, dibujarlos/as, etc., por lo que el bloque III se refiere a la representación. El bloque IV hace referencia a perímetros, áreas y volúmenes. En todos los bloques los apartados han seguido el orden tres, dos y una dimensión en relación con nuestro marco de referencia.

El ítem 16 se ha planteado como se muestra en las figuras 2.1 y 2.2. Para cada uno de los contenidos geométricos del currículum de la ESO seleccionados y que hemos agrupados en los Bloques I a IV, se plantean 3 tipos de preguntas que se introducen con la cuestión 16 que se muestra en la figura 2.1.

16. Cada una de las preguntas de este bloque del cuestionario se refiere a un contenido geométrico del currículum de secundaria. Para cada contenido se hacen tres tipos de cuestionamientos, a saber:

a) Si lo ha impartido en el año escolar que acaba de terminar. En las opciones para las respuestas este aspecto se denomina “Situación actual”.
b) Cómo considera el contenido: Imprescindible, importante, se puede dejar de estudiar, nada importante. En las opciones para la respuesta este aspecto aparece como “Lo considero”.
c) Si lo impartiría suponiendo que tiene una situación ideal en el aula en la cual tiene tiempo suficiente para dar todos los contenidos del curso. En las opciones para las respuestas este aspecto se llama “Situación ideal”.

Notas:
Para los cuestionamientos a) y c) puede precisar sus respuestas al elegir una o varias de las opciones que se presentan.
Para los contenidos que implican varias familias o elementos, si solo ha impartido lo relativo a algunas/os, subraye aquellas/os que ha tratado en clase.

Figura 2.1. Introducción de la cuestión 16

Al referirnos a cada contenido, la cuestión se replantea como muestra la figura 2.2 para el contenido 1 del bloque II.

Las modificaciones de este apartado con respecto a la versión que se describe en Guillén et al. (2003) se refieren a los contenidos geométricos implicados en las preguntas.

Los ítems 17 y 18 se han diseñado para obtener más información respecto de los contenidos que hemos incluido en los bloques I, II y IV.

El ítem 17, distribuido en 16 cuestiones, trata sobre los contenidos geométricos de los bloques I y II. Las cuestiones han sido distribuidas del siguiente modo: las siete primeras tratan sobre la descripción de los sólidos (los poliedros y los cuerpos de revolución) y de las figuras planas (los cuadriláteros y los polígonos regulares). Las cinco siguientes se refieren a relaciones: entre los diferentes poliedros, entre los cuerpos de revolución, entre los poliedros y los cuerpos de revolución, entre los elementos del plano y del espacio o entre los elementos del plano. Las tres siguientes centran la atención en la clasificación; empezando por la clasificación en el mundo de los sólidos, después en el plano y por último se pregunta sobre los problemas relacionados con la clasificación. La última pregunta de este ítem se refiere al uso que se puede hacer de las situaciones o los patrones geométricos como modelo de fenómenos al explicar la geometría. En la figura 2.3 se pueden ver ejemplos de preguntas del este ítem.

II.1 Clasificar los sólidos.

a) Situación actual:

Lo he impartido ☐
Marque con una cruz en qué curso/s lo ha impartido
1º ☐ 2º ☐ 3º ☐ 4º ☐

No lo he impartido ☐
Marque con una cruz por qué no lo ha impartido:
No es de mi agrado: ☐
No he tenido tiempo: ☐
No está en los libros de texto: ☐
No tengo dominio del tema: ☐
Lo considero difícil para el alumno: ☐

Otras razones. Indique cuales:
……………………………………
……………………………………
……………………………………

b) Lo considero:

Imprescindible	Importante	Se puede dejar de estudiar	Nada importante
☐	☐	☐	☐

c) Situación ideal:

Lo impartiría: ☐
Marque con una cruz en que curso/s y por qué lo impartiría:
1º ☐ 2º ☐ 3º ☐ 4º ☐
Porque está en el programa: ☐
Desarrolla capacidades del alumno: ☐
Se necesita para otros contenidos: ☐
Porque le gusta a los alumnos: ☐
Porque tengo dominio del tema: ☐
Pero no es de mi agrado: ☐
Pero no está en los libros de texto: ☐
Pero necesito formación: ☐

Otros comentarios. Indique cuales:
………………………………………
………………………………………
………………………………………

No lo impartiría: ☐
Marque con una cruz por qué no lo impartiría:
No es de mi agrado: ☐
Lo considero un contenido para bachillerato: ☐
No está en los libros de texto: ☐
No tengo dominio del tema: ☐
No tenemos el material: ☐
No contamos con apoyos para formarnos: ☐

Otros comentarios. Indique cuales:
……………………………………....
……………………………………….
……………………………………..

Figura 2.2. Preguntas para cada uno de los contenidos de cada bloque del ítem 16

17.6- ¿Qué propiedades ha tenido en cuenta de los cuadriláteros?
17.7- ¿Qué ha descrito de los polígonos regulares?
17.8- ¿Qué relaciones ha establecido entre diferentes poliedros, por ejemplo, entre el cubo y la pirámide?

Figura 2.3. Extracto de algunas de las preguntas planteadas en el ítem17

El ítem 18, distribuido en 11 cuestiones, trata sobre los contenidos del bloque IV referentes a medición. Las seis primeras preguntas tienen relación con el cálculo de volúmenes: la primera se refiere a cómo introduce el volumen; la segunda y tercera cuestión al estudio cualitativo del volumen, mediante comparación y aprovechando regularidades o por estimación respectivamente; la cuarta, antes de empezar la medición cuantitativamente de los volúmenes, se refiere a las unidades de medida empleadas en volúmenes, áreas y perímetros; la quinta hace referencia a cómo se calcula el volumen de los sólidos; y la sexta hace referencia a la aplicación de fórmulas para el cálculo de volúmenes y superficies. Las cuatro preguntas siguientes tratan sobre relaciones: la primera se refiere al perímetro y el área de una figura plana y a la superficie y el volumen de un sólido; la segunda, al perímetro y el área de una figura y otras características de las figuras planas; la tercera a la superficie y el volumen de un sólido y otras características de los sólidos; y la cuarta a las diferentes unidades de medida y el perímetro, área, volumen de la figura plana o sólido correspondiente. La última cuestión de este ítem contempla la posibilidad de que los/as profesores/as especifiquen problemas en los que se usan conocimientos adquiridos previamente con el estudio del volumen. En la figura 2.4 se pueden ver ejemplos de preguntas del este ítem.

18.1-Si usted ha trabajado en sus clases el volumen aclare cómo ha introducido el estudio del volumen de algunos cuerpos.
18.2-Indique algunas situaciones que usted utiliza para desarrollar los temas correspondientes al estudio del volumen por comparación.
18.3-Si usted calcula volúmenes aprovechando regularidades o por estimación, aclare cómo lo hace.

Figura 2.4. Extracto de algunas de las preguntas planteadas en el ítem18

Al igual que en Guillén et. al. (2003), esta sección contiene el ítem 19 que incluye tres cuestiones en las que se contemplan los contenidos que considera más importantes, los que se consideran menos importantes y los contenidos seleccionados como que se han de haber superado como conocimientos previos para el curso que se imparte.

La cuarta sección “El profesor en clase” (ítems 20 al 22) pretenden que los/as profesores/as de secundaria aportaran información sobre su labor docente, es decir, cómo introducen el estudio de la geometría (ítem 20), los materiales que utilizan para impartir sus clases (ítem 21) y las dificultades y errores en geometría de los alumnos de secundaria que han observado en el desarrollo de su tarea (ítem 22).

La encuesta finalizaba animando a los profesores y profesoras participantes a que señalaran las aclaraciones u observaciones que convinieran pertinentes sobre la encuesta.

2.1.2 Profesores/as participantes en este estudio

Como se señala en Pérez y Guillén (2007, 2008), la encuesta la respondieron 19 profesores/as de diferentes centros de la Comunidad Valenciana. Los datos los obtuvimos, por un lado, de lo que habían registrado por escrito los/as 19 profesores/as que respondieron las encuestas junto con los comentarios que escribieron al final (o en hojas aparte) donde expresaron su opinión sobre ella una vez realizada y algunas sugerencias para mejorarla. Por otro, se hizo alguna entrevista personal para aclarar algunas respuestas que teníamos dificultad para registrarlas por la brevedad con que se habían expresado por escrito o porque considerábamos interesante tener más explicaciones sobre ellas.

Para el presente estudio seleccionamos las encuestas de 4 de los/as 19 profesores/as que participaron en nuestro estudio. En esta selección se tuvo en cuenta que en ellas se indicara que se había impartido geometría en los 4 cursos de la ESO y que contuvieran respuestas al mayor número de cuestiones completas.

2.2 Cursos como instrumentos para la toma de datos

En este apartado se describen los tres cursos llevados a cabo en nuestro estudio como instrumentos para la toma de datos. Nos referimos a ellos como "Curso presencial basado en el aprendizaje de profesores/as en comunidad", en el que el investigador-profesor actúa fundamentalmente como gestor (CC), "Curso presencial basado en la enseñanza profesor/alumno", en el que el investigador-profesor actúa fundamentalmente como modelo (CP), y "Curso online" en el que la Web se ha tomado como entorno para el aprendizaje (CO).

El contenido matemático que se trabajó en todos ellos con profesores/as de enseñanza secundaria está relacionado con la geometría de los sólidos y, como consecuencia, con la geometría plana. Prestamos atención a las problemáticas de nuestro estudio referidas a la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos en la ESO a través de los procesos matemáticos (descripción, clasificación…). Considerando los tipos de curso que se imparten, así como la duración de los mismos, en cada uno se incide especialmente en una problemática u otra, como se ve en el apartado 2.2.3, en la tabla 2.1, al relacionar estas con los tipos de tareas que se plantean y el curso en el que se tratan. En esta misma tabla puede notarse también que usamos diferentes recursos (el currículo, libros de texto, artículos de investigación…) como contexto para encajar las tareas y cuestiones que se proponen. Estos cambian de un curso a otro, pero mirando estos en su conjunto puede notarse que en el estudio nos acercamos a la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos desde los recursos-materiales que se consideran fundamentales en la formación del profesorado.

Los cursos se llevaron a cabo en el CEFIRE de Torrente de la provincia de Valencia (CP) y en el CEFIRE de Valencia (CC, CO). Al convocarlos para que los/as profesores/as se inscribieran en ellos de manera voluntaria se indicaban dos propósitos del curso correspondiente: que se aportara y compartiera la experiencia y conocimiento que se tiene en relación con la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos, y que se estudiaran, analizaran y/o aplicaran propuestas de los investigadores para la enseñanza/aprendizaje de esta materia. Se asignó como profesor responsable al que denominamos profesor director, experto en la materia, quien actuó como gestor y colaborador externo en todos los cursos, así como de modelo de actuación en el curso CP para considerar esta actuación objeto de análisis. Cabe señalar que este profesor director constituyó en todo momento apoyo directo a los/as profesores/as participantes intentando facilitar recursos para ampliar su formación en la geometría de los sólidos, y especialmente en lo relativo a la descripción y clasificación, así como paliar dificultades con las que se podían enfrentar por la complejidad del contenido y/o referidas a la enseñanza de esta materia.

En el apartado 2.2.1 damos cuenta del ámbito y contexto para la investigación. Para la descripción de los cursos, en el apartado 2.2.2 indicamos aspectos importantes de cada uno de ellos. Siguiendo a McIsaac y Gunawardena (1996, citado por Adell y Sales, 2000), trabajo que describimos brevemente en la sección 1.7 del capítulo 1, indicamos los tipos de interrelación que ha habido en ellos entre los/as profesores/as participantes y el profesor director, así como el acceso de los/as profesores/as participantes a la información relevante al curso. Es en el apartado 2.2.3 donde detallamos los tipos de tareas y cuestiones que se trataron/impartieron en el curso correspondiente. Finalizamos esta sección con el apartado 2.2.4 que muestra las cuestiones que configuraron cada tarea y las sesiones en las que se llevaron a cabo.

2.2.1 Contexto para la experimentación y ámbito de estudio

Los cursos presenciales CC y CP se desarrollaron en 7 sesiones entre enero y mayo de 2010 y 10 sesiones entre septiembre y noviembre de 2010 respectivamente. En ambos cursos cada sesión tenía una duración de 3 horas de duración y estas se complementaron con otras 10 h de experimentación en el aula.

En el CC participaron 4 profesores/as; se inscribieron en el curso voluntariamente motivados por el aprendizaje de la geometría desde distintos puntos de vista: la descripción, la clasificación, la relación entre los distintos contenidos y/o áreas de la geometría, la representación, la medición y la resolución de problemas. En el CP se inscribieron 13 profesores/as, si bien, para el estudio se seleccionaron 4 de ellos, aleatoriamente entre aquellos que asistieron a todas las sesiones y respondieron la mayoría de las cuestiones que se plantearon para obtener información sobre la enseñanza y contenidos de la geometría.

El curso online (CO) se desarrolló entre marzo y mayo de 2011, con una duración aproximada de 30 horas. Realizado en la modalidad de a distancia, el curso se diseñó y realizó online a excepción de la primera sesión que fue presencial en el mismo CEFIRE de Valencia. El curso estaba orientado a profesores/as principalmente de Matemáticas que no podían asistir a un curso presencial y querían formarse en geometría, especialmente la de los sólidos. Se estableció que los participantes podrían enviar las respuestas a las preguntas planteadas durante los sietes días posteriores al planteamiento de las cuestiones. Cabe señalar que, si alguno se retrasaba en contestar a las preguntas de alguna sesión, podía enviarla en el periodo de las 7 semanas que duró el curso. Fue realizado por 11 profesores/as. Entre ellos también seleccionamos aleatoriamente 4 de ellos entre los que mostraron mayor colaboración para responder las cuestiones planteadas.

En los cursos presenciales CC y CP las clases disponían de un ordenador, un retroproyector, una pantalla y una pizarra para tiza. Como recursos-materiales para desarrollar las sesiones en los cursos se usaron programas informáticos, en los que se pueden ver claramente las formas geométricas como el Poly Pro, materiales manipulativos como el polydron, el currículum y libros de texto de la ESO, investigaciones en didáctica de la geometría, encuestas y otros trabajos desarrollados en esta disciplina. De ellos daremos cuenta en el apartado 2.2.3 al describir las tareas y cuestiones.

2.2.2 El funcionamiento de los cursos. El rol del profesor director y otras interrelaciones

En los subapartados 2.2.2.1, 2.2.2.2 y 2.2.2.3 indicamos los propósitos de los diferentes cursos e interrelaciones llevadas a cabo en los mismos, distinguiendo según los cursos. Cabe aclararse también que, como destaca Adell y Sales (2000) para cursos a distancia, previo a su realización, el profesor director se formó en los contenidos de los cursos, materiales y recursos pertinentes para la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos. Asimismo, se instruyó en el medio en el que se desarrolló la comunicación didáctica en los mismos (por ejemplo, en el ordenador) y, de igual forma, investigó sobre las diferentes formas en que se puede llevar a cabo la enseñanza: La enseñanza en comunidad, a distancia… Diseñó el plan de trabajo para los diferentes cursos e hizo frente a las distintas dificultades que iban surgiendo en el desarrollo de los mismos.

2.2.2.1 La comunidad de profesores/as de secundaria

Hemos de resaltar que con la idea de "comunidades de práctica" mantenida por Wenger (1998), véase el subapartado 1.7.1.2 del capítulo 1, al insertarse en un trabajo de tipo colaborativo, antes que enseñar la materia, lo que se pretende como primer propósito es conocer el conocimiento previo que tienen de ella el profesorado participante. Con un trabajo de este tipo también se intenta estudiar cómo las interacciones entre los/as profesores/as con sus pares mejoran sus conocimientos sobre la materia. Además, hay que tener en cuenta que, como señala Wenger (op. cit.), el trabajo en las comunidades de práctica posee su propio lenguaje, herramientas, gestos, rutinas de actuación, historias compartidas y conceptos producidos y adoptados por la comunidad a través del tiempo.
Con el curso que hemos desarrollado se intentaba especialmente que se interactuase entre los docentes para que se debatiese, evaluase y reflexionase sobre los contenidos escolares relacionados con la geometría de los sólidos y sobre su enseñanza y aprendizaje para de esta manera obtener información relativa a las problemáticas de nuestro estudio. Con el trabajo colaborativo que se proponía se esperaba que los/as profesores/as comentasen y debatiesen sus experiencias. Se intentaba que, a partir de las experiencias de los demás, reajustasen sus estrategias y, además, mejorasen el conocimiento del contenido de la asignatura y su enseñanza.

Se ha de señalar que en este curso el profesor director era uno más del grupo, aunque en su mayor parte era el conductor del curso debido a su mayor experiencia en el conocimiento de la materia tratada. Por ello, al principio de cada sesión hacía una breve introducción teórica de lo que se iba a tratar y entregaba a los/as profesores/as participantes en un cuadernillo los recursos-material soporte para desarrollar la actividad de clase. Este contenía artículos de educación matemática, capítulos de libros que trataban sobre los contenidos geométricos, sobre los diferentes enfoques que proponen los expertos para su enseñanza, problemas de geometría... Seguidamente se les pedía que leyeran, resolvieran, respondiesen, debatiesen… las tareas que se proponían en el material entregado. Finalmente se hacía una puesta en común con el profesor director para analizar los aspectos más reseñables.

En este curso se dedicó una sesión para reflexionar sobre la geometría y su enseñanza en la ESO. Se trabajó a partir de Guillén (1997, 2004, 2010) y Alsina et al. (1987, 1988), mostrada en la sección 1.6 del capítulo 1. La figura 2.5 incluye un extracto con parte de la conversación que tuvo lugar en el seminario entre los/as profesores/as participantes cuando se discutía sobre cómo realizaban en sus clases la introducción de esta materia y se cuestionaba sobre si se trataban o no algunos contenidos específicos.

PD: ¿Cómo introducimos nosotros la geometría?
PC1: Yo normalmente empiezo con los dibujos de las figuras geométricas planas que están en el libro de texto y a partir de ellas le hago que contesten las preguntas que hay en el libro de texto. A veces yo les añado más preguntas.
PC3: Yo suelo empezar haciéndoles preguntas de las fotografías de las figuras planas que aparecen en el libro de texto.
PD: ¿Y vosotros?
PC4: Les muestro a los alumnos un cuadrado, un rectángulo, etc., y ellos lo han de definir, señalar propiedades, decir a que familia pertenece…. También les muestro fotografías, por ejemplo, de casas u objetos que tienen triángulos, cuadrados etc. Y a partir de ellas les hago lo mismo.
PC2: Yo suelo realiza lo primero la introducción que aparece en el libro de Matemáticas. Normalmente hay dibujos y fotografía de figuras planas y les hago que los alumnos los identifiquen.
PD: ¿Todos los temas de geometría los empezamos así?
PC1: Normalmente yo les empiezo definiendo las figuras y luego después que las encuentren.
PD: Vosotros también lo hacéis igual o encontramos figuras al principio y luego las definen ellos.
PC2: Depende, por ejemplo, cuando hace mejor tiempo, alguna vez salimos al patio para que ellos puedan identificar diferentes figuras geométricas que puedan encontrar en las verjas, ventanas, campo…pero sin decirles nosotros antes las figuras sino las que conocen ellos.
PC3: Claro, porque normalmente ellos las conocen antes, pero si no las conocen primero las definimos.
PC4; Sí, yo también suelo definirlas primera. En la introducción suelo trabajar figuras que ya conocen.
PD: Mirando el material que se os ha entregado de Alsina, ¿Hacéis lo que se señala de la geometría de los reflejos?
PC3: Yo no. Solo lo he visto en un curso que me dieron en el CEFIRE.
PC2: Lo de corte está bien, es curioso, sorprende, para un taller sí, pero para la clase matemáticas no. Pero no lo hacemos.
PC4: Para nada lo hago
PC1: No
PD: Pero ¿aprenderían más geometría trabajando los espejos?
PC2: Más que nada les parecería curioso, les llamaría la atención.
PD: ¿Tenemos material?
PC2: Nosotros sí que tenemos espejos, las editoriales te lo mandan, regalan.
PC3: Yo no he visto espejos.
PC1: Creo que no.
PC4: Yo no lo sé. Este tema es no lo sueles dar, normalmente te lo saltas. Yo no sé en qué curso está esto, pero la noción de esto, aunque no lo tengan yo creo que no pasa nada. Yo por ejemplo semejanza me lo he saltado, meto más caña en trigonometría para el bachillerato.
PC2: Es que se supone que semejanza ya conocen. Trigonometría no saben nada
PC3: Se supone, como todo.
PC4: Yo también doy más trigonometría que semejanza ya que se necesita luego la trigonometría para todo.

Figura 2.5. Extracto sobre la introducción a la geometría y sobre contenidos geométricos tratados

La actividad matemática asociada a la descripción se llevó a cabo en 2 sesiones y la referente a la clasificación se le dedicó 1 sesión y media. Estas se trabajaron especialmente a partir de los trabajos de Guillén (1997) y de Fielker (1987a, 1987b). Dado que en este curso se centró especialmente la atención en la geometría de los sólidos, al trabajar la clasificación desde los prismas y las pirámides y centrar la atención en sus bases se trabajó la clasificación de diferentes tipos de polígonos, con lo que se analizó la clasificación propuesta por Fielker (1987a) y de la que se da cuenta en el apartado 1.6.1 del capítulo 1. La figura 2.6 muestra un extracto del debate del profesorado participante sobre la clasificación de los cuadriláteros y triángulos presentada por Fielker (1987a).

PD: ¿Y qué pensáis de lo que se propone en este artículo de Fielker relativo a las clasificaciones de los triángulos, una basada en igualdad de lados y otra basada en la magnitud del ángulo mayor?
PC2: Sí, esta está bien...
PC1: Esta está mejor que la de los cuadriláteros.
PC4: Se suele hacer así según los lados y ángulos.
PC3: Sí.
PD: Entonces ¿Vosotros clasificáis así los triángulos?
PC2: Sí.
PC1: Claro, es la forma en que siempre se han clasificado.
PD: Veamos ahora variables que se pueden tener en cuenta a la hora de clasificar cuadriláteros. En la página 11 clasificamos según pares de lados paralelos y pares de lados iguales.
PC4: Pero claro en este recuadrito, separas dividendo que un cuadrado no es un rectángulo.
PD: ¿Este tipo de clasificación es la que hacemos nosotros?
PC4: A mí esta me gusta más que la del principio, pero yo sí que hago hincapié que un cuadrado es un rectángulo y un rombo y en cambio en este tipo de clasificación no existe esta posibilidad.
PC2: No, demasiado general.
PC3: No, los alumnos se confundirían con las figuras.
PC1: No, estoy habituada a dar nombres más concretos.
PD: Otro tipo de clasificación podría ser según las simetrías y los ejes de simetría.
PC1: ¡Uf!, no.
PC2: No, sería complicada.
PC3: Para nada.
PC4: Se podría, pero no, es complicada para ellos.
PD: Ahora clasifiquemos según pares de lados paralelos y ángulos rectos.
PC1: Se podrí hacer.
PC4: Pero aquí el cuadrado y el rectángulo tendrían la misma clasificación.
PC3: Claro.
PC4: Entonces les podríamos nombrar por los dos, pues a mí no me gusta.
PC3: A mí tampoco.
PC4: Ponerle el mismo nombre al cuadrado y al rectángulo no me gusta.
PC3: ¿Entonces cómo le llamas "cuadrirectángulo"?
PC2: ¿Ponerle el mismo nombre?
PC4: Y pondría paralelogramo.
PC3: Los paralelogramos son cuadrados, rectángulos.
PC4: Pues, ya está.
PC3: ¿Cómo le llamas a una figura que puede ser cuadrado y rectángulo?
PC4: Paralelogramo.
PC2. Pero, aunque los ángulos no sean rectos pueden ser paralelogramos.
PC3: Todos son paralelogramos.
PC4: Sí los ángulos no son rectos no pueden ser paralelogramos.
PC2: ¿Cómo qué no?
PC4: A claro tenéis razón, es que hoy estoy espeso.
PC3: Esta no nos gusta.
PD: Añade el dato pares de lados iguales.

Figura 2.6. Extracto del debate sobre la clasificación de los triángulos y cuadriláteros. Trabajando desde Fielker (1987a)

Asimismo, la figura 2.7 muestra parte del debate en el que el profesorado participante expresa su opinión sobre la clasificación propuesta por dicho autor para los hexágonos.

PD: ¿Qué opinas de la forma que propone el artículo a la hora de clasificar los hexágonos?
PC4: Nunca la habíamos visto.
PC1: No.
PC3: Lo de las tramas sí, pero lo de clasificar los hexágonos en una trama no.
PC2: Para mí es totalmente nueva esta clasificación.
PD: De entrada, ¿Clasificamos los hexágonos en clase?
TODOS/AS: No.
PD: ¿Qué ventajas e inconvenientes encontráis en la forma de clasificar como propone el artículo los hexágonos o pensáis que se pierde el tiempo en clase?
PC4: No es perder el tiempo, es dedicar el tiempo a algo que luego no lo ves y no se lo vas a dedicar a otras cosas, pero nunca es perder el tiempo. Yo creo que si miramos todo lo que queda por detrás por hacer no voy a dedicar 2 o 3 sesiones a que manipulen, qué quizás aprenden ¡ojo! En un principio yo opino que solo aprenderán que hay más tipos de hexágonos.
PC3; Son curiosidades. Esto puede ir a un taller de Matemáticas.
PC2: Yo también opino que podría ir a un taller.
PC1: Sinceramente, es una clasificación que no se lleva a cabo.
PD: Pero ¿Tú quieres que aprendan otras cosas?
PC4: Lo que está en el temario y sino no avanzas.
PC3: Además ¿Qué se ve más un cuadrado o un hexágono? Pues un cuadrado, por tanto, le dedicas más tiempo. O al círculo.
PC4: Sí, pero a ti te da igual la clasificación del hexágono, rectángulo.
PC2: Por ejemplo, de los triángulos lo vemos todos, clasificación, teoremas de triángulos.
PC3: Pero ¿qué se ve más en la vida un triángulo o un hexágono en la vida? ¿o un hexágono de estos?
PC2: Incluso hay hexágonos de aquí que ellos no pensarían directamente que son hexágonos.
PC1: Ellos piensan con el hexágono que aparece aquí (señala el regular), con los demás no.
PC3: Pero ¿por qué los demás no se enseñan? Porque son anormales.
PC1: Ellos solo tienen una imagen del hexágono, el 1º (el regular).

Figura 2.7. Extracto del debate sobre la clasificación de los hexágonos de Fielker (1987b)

Siguiendo con la clasificación, pero ahora partiendo del trabajo de Guillén (2005), expuesto en el apartado 1.4.2 del capítulo 1, la figura 2.8 muestra un extracto de la discusión, que, dirigida por el profesor director, desarrolló la comunidad de profesores/as.

PD: En este trabajo de Guillén del 2005 habla de clasificación “a priori” y “a posteriori” ¿Cuál crees que es más interesante? ¿Por qué? ¿Cuál realizas tú?
PC4: Yo depende del caso
PC3: La posteriori
PC2: Sí, la posteriori. La priori es de la que estamos hablando en la que ellos son los que descubren las cosas y en la posteriori tú les das la figura y su definición y a partir de ahí que ellos clasifiquen.
PD: Pero habéis pensado en la otra.
PC2: Siempre piensas en ir motivando y que ellos vayan descubriendo las cosas y se vayan emocionando.
PC3: Pero se lleva a cabo la posteriori.
PC2: La priori podía ser más curiosa y depende de los casos se podría llevar a cabo.
PD: ¿Aprenderían más los alumnos con la a priori?
PC2: Yo creo que sí.
PC1: Sí
PD: Pero ¿seguiremos haciendo la posteriori?
PC3: Es que el sistema esta así y estamos acostumbrados así.
PC2: Sí, es lo decía yo antes.
PC3: Es que el problema es que si alguien quisiera enseñar a posteriori le faltaría tiempo en clase para enseñar las matemáticas de ese curso.

Figura 2.8. Extracto sobre la discusión acerca de las clasificaciones planteadas por Guillén (2005)

Se dedicó también una sesión y media a la representación de sólidos y el establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos. Se trataron los trabajos mostrados en el subapartado 1.6.2.2 del capítulo 1 y de los que mostramos parte de los debates llevados a cabo en el aula en las figuras 2.9. 2.10 y 2.11.

PD: Analicemos lo que señala Guillén en los subapartados “del modelo a la representación” y de “de la representación al modelo”. Eso que es os parece ¿es cómo lo hacemos en clase?
PC2: Yo en matemáticas sí que he hecho lo de los hexaminós, yo les saco los diferentes hexaminós que había y ellos tienen que ver con cuales pueden formar la figura.
PC1: yo les doy directamente la figura para que ellos la monten.
PC3: Les damos el desarrollo plano y ellos lo montan.
PD: ¿Y a la inversa?
PC1: No
PC3: No
PD: ¿Y cómo intentamos en clase que se desarrolle actividad matemática cuando se dispone de una fotografía de un sólido y se pide que se dibuje uno de sus desarrollos planos?
PC1: No solemos hacer, que monten.
PC1: Los que hay aquí son complicados de montar.
PD: En la página 181 explica cómo están formados los desarrollos planos ¿eso lo hacéis?
PC1: Estos de aquí son difíciles de montar. No lo hacemos
PC3: No
PD: Y lo de la 183 ver ¿cuáles son o no desarrollos planos antes de formarlos?
PC4: Diferentes desarrollos de una figura para formar no se hace.
PC2: Yo lo he hecho con el cubo y tenían algunos bastantes problemas de verlo e imaginarlo.
PC3: Si tú le das hexaminós y que monten figuras e igual no te montan nada. Ellos primero tienen que haber visto la figura.
PC2: No solo para el cubo, no les vas a preguntar si pueden montar un icosaedro.
PD: Pero ¿les preguntáis las razones de por qué se puede o no montar?
PC2: No, eso no se trabaja.
PC1: Habría que darles uno que sepan montar y que sea fácil.

Figura 2.9. Extracto del análisis de la representación y descripción de los sólidos. Trabajando desde Guillén (1991, pp. 173-191)

La figura 2.9 refleja que es el trabajo de Guillén (1991, pp. 173-191) el que usó el profesor director como soporte para cuestionar a los/as profesores/as participantes sobre la actividad que ellos desarrollan en sus clases referida a los desarrollos de los sólidos. Asimismo, es a partir del trabajo de Rey (2004) desde el que se investigaba sobre si los/as profesores/as llevan a cabo las representaciones señaladas por el autor cuestionando sobre el tipo de representaciones que los/as profesores/as colaboradores/as usan en sus clases para determinados conceptos geométricos y sobre si usan o no variedad de ejemplos para ello (véase la figura 2.10).

PD: Este artículo representa algunos ejemplos de representaciones clásicas y otros que no son las clásicas y que no se suelen mencionar en las clases, ¿pensáis realmente eso se lleva a cabo así en clase?
PC1: Lo de siempre.
PC2: Los clásicos.
PC4: Yo no hago estos dibujos, cuando normalmente dibujo un triángulo suelo hacer lados desiguales y el ángulo recto arriba, aunque no digo que es rectángulo. Yo normalmente cuando dibujo un triángulo hago los lados desiguales. Cuando dibujo un triángulo cualquiera hago los lados desiguales.
PC3: Yo cuando dibujo un triángulo suelo hacer el rectángulo.
PC1: Yo el de lados iguales.
PC2: Yo más o menos este, el equilátero.
PD: Pero bueno, no solemos hacer los de la página 5.

PC3: No.
PC2: No.
PD: ¿Y cuándo dicen un triángulo rectángulo?
PC1: El de abajo a la izquierda, uno de sus lados como base (siempre uno de los catetos y el ángulo recto en la posición horizontal-vertical).
PC3: El primero.
PC2: Sí el primero.
PD: Entonces nada de poner la hipotenusa como base.
PC2: No.
PD: ¿Y con el cuadrado? Hacemos el que hay ahí y no el parecido al rombo.
PC2: Sí este.
PC3: Sí.
PD: ¿Y el cubo?
PC1: El que aparece.
PC4. Yo lo hago en perspectiva, con líneas discontinuas.
PC2: Y yo también.

Figura 2.10. Extracto sobre el estudio de Rey (2004) acerca de los prototipos geométricos

El establecimiento de relaciones se abordó a partir de un cuestionario y de los trabajos señalados en los apartados 1.4.1 a 1.4.3 del capítulo 1. Estos trabajos se utilizaron especialmente para cuestionar sobre si el profesorado participante abordaba en sus clases determinados tipos de relaciones y/o de contenidos geométricos. La figura 2.11 muestra parte del debate que tuvo lugar en relación con el trabajo de Guillén (1991, pp. 62-69).

PD: El trabajo de Guillén sobre los poliedros regulares convexos en el que se trabaja la descripción de la regularidad y las interrelaciones, en las páginas 62-69 explica los planos de simetría de los poliedros regulares y también las relaciones y conexiones que ligan unos poliedros con otros, como, por ejemplo: el cubo y el octaedro, el dodecaedro e icosaedro.
Bueno para empezar ¿Se estudian en clase los planos de simetría?
PC1: No.
PD: Pues aquí tenemos los planos de simetría del cubo y del octaedro y las relaciones que pueden tener.
PC4: Empezamos fuertes.
PC3: No, si yo me he quedado en la primera frase.
PC4: Pues mira esto “Los planos de simetría del cubo u octaedro descomponen la superficie de la esfera circunscrita en una red de 48 triángulos esféricos iguales”.
PD: Es que hay que mirar atrás.
PC3: Pero lo qué ha hecho que ha sido, coger circunferencias, coger los mismos planos, ponerlos en la misma posición e ir cortándolos.
PC2: Claro ir cortando.
PC3: Sí, pero son esferas, son círculos.
PD: Se explica cómo los obtienen. Bien, volvamos a las relaciones, una relación entre el cubo y el octaedro es que tienen el mismo número de planos de simetría.
PC3: Para mí eso me vale.
PD: Pero, ¿es fácil o difícil de ver?
PC3: Yo creo que difícil.
PD: ¿Para aplicarla en clase?
PC1: Es de contar.
PD: ¿Os habías parado a pensar esa relación?
PC3: Yo no la había visto nunca.
PC1: Yo tampoco.
PD: Primero ¿paramos a pensar relaciones?
PC1: No.
PC3: Podemos ver a lo mejor planos de simetría, pero no se te ocurre relacionarlos.
PC1: En la ESO esto no se da.
PD: Pero ¿se suelen explicar los planos de simetría en clase?
PC4: Yo nunca lo he dado.

PC2: Yo no. Tampoco llevo mucho tiempo dando geometría.
PC4: Quizás profesores más experimentados lo den.
PC2: Sí.

Figura 2.11. Extracto sobre relaciones entre sólidos y/o sus elementos. Trabajando desde Guillén (1991, pp. 62-69)

La séptima sesión se dedicó a analizar determinados problemas y tareas que se pueden usar como contexto para la enseñanza de los contenidos geométricos. Los problemas y tareas utilizadas fueron seleccionadas de investigaciones en didáctica de la matemática e informes PISA. Se trató de estudiar la opinión por parte del profesorado participante de estos problemas y tareas en relación con los contenidos geométricos que se podían trabajar y su posible utilización en la enseñanza de la geometría. En el anexo 1, la figura A1.5 muestra uno de los problemas propuestos, extraído de De Prada, Alvalde y Martínez (1990, pp. 59-60). Al centrar la atención en las bases de los prismas, este problema se utilizó como contexto para reflexionar sobre: i) el conocimiento que se tiene sobre la descripción de los cuadriláteros, su clasificación y las propiedades básicas de cada uno de sus tipos; ii) la identificación de un cuadrilátero a partir de algunas de sus propiedades; iii) la construcción de un cuadrilátero a partir de algunos de sus elementos y las relaciones entre estos; iv) cómo calcular algún elemento desconocido (ángulo, lado, diagonal…) de un cierto tipo de cuadrilátero, a partir de otros elementos suyos; v) las características de los polígonos regulares, sus elementos, sus relaciones básicas y sobre cálculos y construcciones basados en ellas; vi) los elementos de la circunferencia y sus relaciones. Con este problema se pretendía también reflexionar sobre: i) la capacidad de crítica ante errores geométricos en la construcción o representación; ii) la tenacidad e interés en la búsqueda de soluciones en los problemas geométricos y en la búsqueda de procedimientos y estrategias "diferentes" en la resolución de problemas; iii) la flexibilidad para aceptar "soluciones" a los problemas geométricos más convincentes que las propias y para enfrentarse a problemas geométricos desde distintos puntos de vista.

Los problemas presentados a la comunidad de profesores/as participantes como recurso soporte para encajar cuestiones relativas a contenidos geométricos y a su enseñanza se analizaron mediante una puesta en común entre el profesorado participante. La figura 2.12 muestra parte de la discusión llevada a cabo con el problema referente a la colmena por la comunidad de profesores/as.

PD: Vamos problema el de la colmena ¿Qué opináis?
PC2: Es gracioso.
PC4: Está muy bien.
PC3: Original.
PC1: Diferente.
PC3: Pero el problema es porque desperdicia espacio con el cuadrado, pues que lo junte.
PC4: No, no.
PD: Se puede juntar, pero tú quieres que ocupe la mayor superficie con el menor perímetro ¿Se lleva a clase este tipo de problemas?
PC2: No, pero esta gracioso.
PC1; Nunca lo había visto.
PC4: Es novedoso para mí.
PC3: No
PD: ¿Qué objetivos creéis que plantea este problema?
PC2: Depende del nivel, pero si lo pusiéramos en primero pues que fueran jugando con las diferentes figuras poligonales que ellos conocen.
PC3: Ver que figuras completan el plano.

PC1: Trabajar áreas.
PC4: Calcular áreas y perímetros.
PD: Por ejemplo, a partir de este problema ¿qué podemos trabajar en clase? Por ejemplo, lo podríamos plantear como que queremos embaldosar el suelo y ver que figuras podemos utilizar.
PC3: Pero tú me estás diciendo que es mejor poner hexágonos que cuadrados.
PD: ¿Tú qué piensas?
PC2: Yo creo que aquí hay una pequeña trampa, que lo hexágonos aquí se cortan y que en los cuadrados la separación es más grande…aquí deja muchas separaciones que no sé por qué.
PC3: La separación es más grande en los cuadrados.
PD: Tu imagínate que están juntos ¿Crees que caben más cuadrados que hexágonos?
PC2: Es que este rectángulo es mucho más grande.
PC3: Hombre, es casi la mitad.
PC2: Claro.
PD: A ver, el círculo lo descartamos ¿no?
PC3: Sí.
PC2: Sí.
PC4: Sí, se desperdicia mucho espacio.
PC1: Sí.
PC4: A ver el hexágono es el que ocupa mayor superficie.
PC3: Dependerá de lo que midan lados.
PC4: El hexágono es el que ocupa mayor superficie con menor perímetro.
PC3: ¿Mayor superficie? Será menor.
PC4: Mayor superficie con menor perímetro.
PC3: A vale porque es más grande.
PC4: Y que completa el plano, digo yo.
PC1: Pero el cuadrado también lo puede completar. Será el cuadrado mejor porque aquí hay rincones que no se completan.
PC2: El cuadrado porque encaja perfectamente sin dejar hueco y además, sino las baldosas las harían hexagonales.

Figura 2.12. Extracto del debate sobre el problema de la colmena

Se ha de señalar que, con las cuestiones que se planteaban encajadas en este tipo de problemas y tareas se posibilitaba que los/as profesores/as colaboradores/as expresaran ideas que tienen sobre determinados conceptos geométricos y que indicaran el mundo de ejemplos que muestran en sus clases al tratar determinados conceptos. En la figura 2.13 se muestra el análisis de una tarea en la que, a partir de un enunciado, se trata de estudiar la idea que tienen sobre un concepto y como la geometría del espacio conecta con la geometría plana.

PD: Vamos a contar cuántas diagonales tiene un prisma n-agonal ¿Qué haríais para contarlas?
PC2: Dibujar un prisma.
PD: ¿Pero qué prismas dibujaríais?
PC1: A ver, dibujar un prisma n-agonal es imposible.
PC3: Yo dibujaría para empezar un prisma sencillo, por ejemplo, uno que tuviera como base un cuadrado o un hexágono.
PD: ¿Y qué haríais?
PC2: Dibujar diagonales desde la base de abajo hasta la base de arriba y luego contarlas.
PC1: Claro, es la única forma de hacerlo.
PD: ¿Pero así sacaríais la de un prisma n-agonal?
PC3: Intentaríamos llegar a una conclusión.
PC4: Opino que estamos calculando un tipo de diagonales, las que llamamos de diagonales del espacio.
PD: Muy buena la observación.
PC1: ¿Qué más tipo de diagonales hay?
PC4: La de las caras.
PD: Efectivamente, tal y como se había planteado la pregunta habría que calcular los dos tipos de diagonales y especificar cuál es.

PC2: Yo no había caído en eso.
PC3: Ni yo.
PC2: Yo por diagonales del prisma entiendo las que van de base a base.
PC3: Yo también.
PC1: Si son las de las caras se complicaría porque hay que conocer las diagonales de los polígonos que lo forman.
PD: Sería una forma de pasar de la geometría del espacio a la plana.
PC4: Pero se supone que los alumnos ya sabrían calcularla las de los polígonos.
PC2: Si en general no lo saben.
PD: Sería, como he dicho, el momento para trabajar la geometría del plano a partir de la del espacio ¿Trabajáis las diagonales de los polígonos?
PC2: Sí que trabajamos las diagonales.
PC1: Yo trabajo el concepto de diagonal en general, normalmente en polígonos convexos.
PD: ¿Trabajáis las diagonales interiores y exteriores?
PC2: Yo con los de primero solo trabajo con polígonos convexos.
PC4: Principalmente me centro en los convexos.
PC1: No.
PC3: Normalmente muestro polígonos convexos, aunque creo que alguna vez he trabajado los cóncavos, pero no diferencio entre diagonales interiores y exteriores.
PD: Pero, ¿lo trabajaríais o solo las interiores?
PC2: Depende del curso, pero si en el libro aparecen polígonos cóncavos trabajaría ambas.
PC4: Si el libro lo contempla sí.
PC1: Si se presenta la actividad sí.
PC3: Si me aparece en un ejercicio sí que lo haría.
PD: ¿Y lo contempla el libro?
PC4: Yo creo que poco, suele trabajar los polígonos regulares. Luego estamos acostumbrados a ver eso.
PC1: No me suena.
PC2: Rara vez.
PC3: Alguna vez.

Figura 2.13. Extracto del estudio de la tarea para calcular el número de diagonales de un prisma n-agonal

Cabe mencionar, que durante el desarrollo de cada sesión el profesor director intercalaba explicaciones teóricas para aclarar los conceptos y dudas que iban surgiendo durante la sesión. Asimismo, cuando se consideraba conveniente, planteaba algunas cuestiones en el contexto de la discusión de clase que, junto con las que iban surgiendo del desarrollo de cada sesión por parte del profesorado, se tomaron en algunos casos como base para los cursos posteriores. Además, cuando era conveniente en el desarrollo de las sesiones, se utilizaban materiales manipulables. Así, por ejemplo, la figura 2.14 muestra cómo se interrelacionó en la clase al debatir sobre la utilización de los materiales que propone Guillén (1997) para la enseñanza de la Geometría de los sólidos y cuestionar sobre su uso cuando se explica esta materia en la ESO.

PD: De los materiales que se mencionan en la “unidad de enseñanza para la geometría de los sólidos” de Guillén (1997) ¿Cuáles utilizáis en clase?
PC1: El primero.
PD: ¿Los troquelados?
PC1: Sí.
PD: Pero ¿con gomitas o pegados?
PC1: Yo con gomitas no lo he visto nunca.
PC3: Yo no sé hacerlo con gomitas.
PC2: Yo lo he visto almacenado y hechos polvo.
PD: ¿Y los de pegar?
PC3: Los del desarrollo plano sí que lo hago.
PC2: Yo también.
PD: ¿Y de los demás ninguno?

PC2: El de plástico este, el polydrón.
PC3: El polydrón está bien, es el plástico duro de colores y de encajar ¿no?
PC2: Sí.
PC1: Yo no lo he visto.
PC3: Yo lo he visto pero no lo he gastado.
PC2: Yo sí y les gusta. Tú les vas dando pista, pues que en un vértice se junten 5 caras y van enganchando y ver que figuras sale sin decírselo tú, pero en una clase normal no.
PD: ¿Por qué no?
PC2: No tienes tiempo para eso, lo suelo hacer cuando tienes un día tonto como puede ser inicio de vacaciones o algo.
PC4: Yo el único que he utilizado en clase ha sido el del desarrollo plano exceptuando como he dicho ante el día de la guardia con segundo que abría cajas con los alumnos. Ahora por ejemplo los grupos de segundo que tengo este año son flojitos y quizás lleve más a la práctica esto, es decir que cada grupo construya un poliedro y no dar tanta materia.

Figura 2.14. Extracto de los comentarios sobre el uso de manipulables en la ESO

2.2.2.2 Curso presencial basado en la enseñanza profesor/alumno

En este curso CP, en el que el profesor director actuaba fundamentalmente como modelo, el profesor director mostró al profesorado participante propuestas de enseñanza y otros recursos de investigaciones en didáctica de la geometría y el profesorado participante desarrolló actividad referida a las tareas propuestas relativas a la geometría de los sólidos y a su enseñanza/aprendizaje y, de esta manera, el profesor director pudo obtener información sobre las problemáticas objeto de estudio.

Además de trabajos de investigación, también se utilizaron como recurso soporte para conducir la clase, libros de texto de la ESO. Específicamente, libros de textos de primero, segundo y tercero de ESO de Álvarez et al. (2007a, pp. 229-244), Álvarez et al. (2007b, pp. 171-190), Álvarez et al. (2008, pp. 207-240), Anzola, Bujanda, Mansilla y Vizmanos (2007, pp. 264-281), Anzola, Bujanda, Mansilla y Vizmanos (2008, pp. 240-281); Colera, García, Gaztelu y Oliviera (2007, pp. 222-245);Colera y Gaztelu (2007, pp. 230-232, p. 237), Colera y Gaztelu (2008, pp. 186-218) y Vizmanos, Anzola, Bellón y Hervás (2007, pp. 168-187).

El curso se llevó a cabo mediante la explicación de los contenidos y el planteamiento de tareas y cuestiones. Cada sesión comenzaba con una reflexión sobre los conocimientos geométricos que se tenían sobre el tópico objeto de estudio y sobre las “formas” de los/as profesores/as participantes de llevar a cabo su enseñanza en la ESO. A continuación, el profesor director explicaba, a través del ordenador, utilizando principalmente un programa de presentación (PowerPoint), un proyector y una pantalla de proyección, diferentes enfoques y propuestas de enseñanza que proponen expertos en la enseñanza de contenidos geométricos a partir de la geometría de los sólidos incidiendo también en sus aplicaciones en el entorno cotidiano. Finalmente se planteaban una serie de tareas y cuestiones en relación con los temas tratados y referidas a las problemáticas de nuestro estudio; de ellas daremos cuenta al describir las tareas planteadas en el apartado 2.2.3.

Las tareas podían corresponder a la resolución de problemas, responder cuestiones antes o después de explicaciones teóricas, realizar alguna investigación, llevar a cabo discusiones colectivas o por parejas… El profesorado tenía que describir formas geométricas, realizar clasificaciones y representaciones en geometría, definir conceptos relacionados con la geometría, resolver problemas y discutir acerca de la enseñanza de estos contenidos geométricos. El profesor director procuraba evitar dar sugerencias en la resolución de las tareas con la intención de que se proporcionase la mayor información posible por su contribución activa al responder y discutir a partir de las tareas propuestas. Con las cuestiones propuestas se pretendía motivar a participar activamente en el desarrollo del curso, recabar la opinión de lo comentado en cada una de las sesiones y conocer las ideas que se tienen sobre determinados contenidos geométricos y sobre la enseñanza correspondiente. En todo momento se intentaba que se explicase la respuesta, evitando que se redujera a una afirmación o negación.

Aunque los conceptos y el conocimiento matemático eran introducidos por el profesor director que impartía el curso, los/as profesores/as participantes tenían un papel fundamental en el desarrollo del mismo considerando sus conocimientos matemáticos y su experiencia docente en la enseñanza de la geometría en la ESO. Se dirigía el curso de manera que los/las profesores/as participantes intercambiaban y comentaban entre ellos/ellas las ideas geométricas que se tenían sobre algunos contenidos geométricos y posteriormente expresaban en el grupo sus opiniones, evaluando si los contenidos tratados eran apropiados para la enseñanza/aprendizaje de la geometría en la ESO. Así, por ejemplo, en esta comunicación entre los/las docentes participantes y el profesor director se examinaba si la enseñanza de la geometría a través de los procesos matemáticos podía inducir a una actitud investigadora en el alumnado de secundaria. De igual modo se investigaba si también podía favorecer a aumentar el razonamiento geométrico.

El uso del material informático, como por ejemplo los programas para visualizar formas geométricas, y la utilización de material manipulable para la construcción de formas geométricas se presentaron también a los/as profesores/as participantes y se cuestionó sobre si estos proporcionan situaciones ricas para favorecer el razonamiento geométrico, el aprendizaje de la geometría y para fomentar la comunicación matemática.

La descripción de los sólidos se llevó a cabo en las sesiones segunda a cuarta y parte de la quinta. En este curso, al igual que en el CC, también se usaron como recurso los trabajos de Guillén (1991, 1997, 2005) y Fielker (1987a, 1987b). Partiendo de la clasificación en el mundo de los sólidos se llegó a la clasificación de determinados tipos de polígonos, como hemos aclarado al describir el CC.

La descripción se comenzó analizando los conocimientos que tenían los/as profesores participantes sobre los sólidos. Se intentaba, antes de introducir un concepto, formularles de forma oral alguna cuestión referente a dicho concepto para que los/as profesores/as participantes señalaran la idea que tenían sobre él. La figura 2.15 muestra parte de la discusión que se llevó a cabo para examinar la idea que se tenía de los prismas.

PD: Vamos a ver que podemos decir de las familias de sólidos. Lo primero que me gustaría es que vosotros y vosotras me dijerais que podemos decir de los prismas y después yo señalaré propiedades que tienen.
PP1: Poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas entre sí, llamadas bases, y cuyas caras restantes son paralelogramos.
PP2: Son poliedros formados por 2 caras iguales llamadas bases y los polígonos que las unen son paralelogramos y se llaman caras laterales.
PP3: Son poliedros compuestos por dos caras iguales y paralelas que son las bases. Las caras laterales son paralelogramos.

PP4: Cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos, tiene dos polígonos iguales y paralelos, que se llaman bases, y varios paralelogramos que se llaman caras laterales.
PD: Ahora que habéis señalado lo que entendéis por prisma vamos a ver las propiedades de los prismas. Aquí en esta diapositiva os las voy a mostrar y vamos a compararlas con las que habéis indicado...

Figura 2.15. Extracto sobre "Idea" que se tiene de los prismas

En este curso, tras realizarse una explicación teórica por el profesor director, se plantearon tareas prácticas en relación con la descripción de los sólidos extraídas de Guillén (1997) que el profesorado participante tenía que resolver. En el anexo 3 hemos incluido las tareas planteadas.

La clasificación se analizó en parte de la quinta sesión y la sexta. Parte del debate en relación con una tarea de clasificación se incluye en la figura 2.16.

PD: ¿Cuándo clasificáis en geometría qué tarea pensáis que se hace? ¿Organizáis las cosas? ¿Hacéis grupos incluidos, separáis en grupos disjuntos? ¿Buscáis todos los objetos de una familia? ¿Buscáis los que se parecen? ¿Os fijáis en parecidos y diferencias? ¿Qué es lo que realmente hacéis?
PP2: La de separar está implícita en la clasificación, cuando clasificas estás separando.
PD: Entonces realmente ¿la que más se acopla es la de separar?
PP2: Es que una clasificación la vas a basar en varios aspectos, pero es para separar, sin querer vas a ir separando.
PD: Entonces ¿todos pensáis que separamos al clasificar?
TODOS: Señalan y gesticulan que sí.
PD: ¿Vemos parecidos y diferencias entre lo que estamos clasificando?
PP1: También un poco viciados por el libro de texto organizar, porque el libro de texto dice estos, estos y estos. Te los organizan de forma escrita y ya está.
PD: ¿Grupos incluidos?
PP4: Realmente no.
Todos: Gesticulan que no.
PD: ¿Buscar todos los objetos de una familia?
PP1: Buscar todos los objetos realmente no, hemos visto días atrás que buscar todos los poliedros que son oblicuos ni se ven y muchas veces en las figuras geométricas planas te vas a las regulares e igual las irregulares muchas veces ni se ven, con lo que ver todos los objetos de una familia ni se ven.

Figura 2.16. Extracto de comunicación oral entre el profesor director y profesores/as participantes en torno a una tarea de clasificación

El establecimiento de relaciones se abordó en la sesión 7ª. La octava sesión centró la atención en la representación de los sólidos. Estas se desarrollaron usando como recurso los trabajos de Guillén (1991, pp. 1979-184). La figura 2.17 muestra un extracto con parte del desarrollo de esta última sesión.

PD: Lo primero que vamos a trabajar hoy es la representación así que me gustaría que me dijerais lo que hacemos en clase cuando representamos las formas geométricas, es decir, ¿Qué representaciones hacemos en clase?
PP3: ¿De poliedros?
PD: En general, de cualquier forma, geométrica, pero bueno. centremos para que sea más fácil de pensar en los poliedros. Luego, ¿cómo representáis los poliedros?
PP4: Pues en la pizarra dibujamos el poliedro lo mejor posible.
PD: Algo más que realizáis en clase. Pensad que seguro que hacéis más cosas.
PP3: Con pestañas para ver como lo hacen. Construir con volumen los poliedros regulares e irregulares.
PD: ¿Les damos nosotros el desarrollo plano?

PP3: Sí, pero también se les puede dar las dimensiones para que los construyan. Yo lo he hecho de las dos maneras a partir dar un desarrollo plano que lo monten o dándoles las dimensiones que lo dibujen.
PD: Entonces hacéis la representación plana a partir de un poliedro construido o dibujado y al revés, a partir de la representación plana construís o dibujáis un poliedro, ¿eso también lo hacéis?
PP4: Principalmente hacemos la de pasar del desarrollo plano al poliedro.
PD: ¿Qué podemos decir del desarrollo de un poliedro? A ver decidme alguna idea de lo que es el desarrollo de un poliedro. Cuando nos dicen el desarrollo de un poliedro ¿En qué pensamos?
PP1: En manipular, en recortar, en llevar al plano ¿no?
PP2: En construir una figura geométrica en tres dimensiones. También pienso en descomponer la figura, para ver cómo está formada, sobre todo cuando realizo problemas de áreas de poliedros.
PD: Bien, pues aquí os señalo lo que es el desarrollo de un poliedro. Esta descripción podéis leerla en la página 173 del libro de poliedros de Guillén.

Es una representación plana del mismo.
Lo caracteriza, lo representa y permite construir el modelo.
Está formado por una combinación de partes, combinación que puede hacerse de varias maneras, y todas ellas dan como resultado desarrollos del poliedro correspondiente.

Además, en la página siguiente, 174, indica que “para dibujar perfectamente el desarrollo se necesita destreza en dibujo lineal y la construcción del modelo a partir del desarrollo requiere habilidad manual”.
Y si continuáis dentro del mismo párrafo señala que “antes de construir el modelo a partir del desarrollo se deben resolver ciertos problemas, de intendencia o escala, como por ejemplo, que materiales utilizar o que tamaño elegir para los polígonos de los desarrollos”.

Figura 2.17. Extracto de parte del desarrollo de una tarea sobre representación de poliedros. Ambiente de la clase

La novena sesión se destinó a ver cómo se realiza una unidad didáctica en geometría y a mostrarles cómo, desde la investigación en didáctica de las matemáticas, se puede abordar la medición. De esta sesión no se da cuenta en este trabajo debido a que no forma parte de nuestros objetivos.

La décima y última sesión se reservó para mostrar la resolución de problemas desde la investigación en la enseñanza de las matemáticas y para que los/as profesores/as participantes resolvieran algunos problemas; estos se incluyen en el anexo 1. Y como puede consultarse en este, para cada problema, además de pedirles la resolución del mismo se les planteaban diferentes cuestiones: i) cómo utilizaría el problema para desarrollar sus clases, ii) cómo le parecía el problema correspondiente para llevarlo al aula de secundaria y si lo llevaría a partir de entonces, iii) qué contenidos de geometría se podrían tratar con el problema correspondiente, iv) ¿qué se haría antes de llevar a cabo la resolución del problema en las clases? o ¿se tendrían que explicar los contenidos geométricos a partir del mismo? y v) qué le había llamado la atención del problema correspondiente.

Se ha subrayar que el desarrollo de las sesiones de este curso se combinó con la utilización y manejo de materiales manipulables. La figura 2.18 da una pequeña muestra de ello. Se ha de señalar, que como fue una discusión de todo el grupo se han mostrado también en este extracto las respuestas de algunos/as profesores/as participantes que no fueron seleccionados para el estudio y que los designamos como PPX, PPY, PPZ, PPG, PPI, PPH, PPJ, PPK y PPL. Algunos/as de estos/as profesores/as intervendrán en otras conversaciones que los seguiremos codificando con la misma notación.

PD: Ahora vamos a montar algunos poliedros regulares con materiales manipulables.
PPX: Sí, es más divertido.
PPY: A mí lo que me gusta es montar.
PD: Yo pienso que nos vendrán muy bien para ver las simetrías. ¿Habéis utilizado este material de varillas alguna vez?
PPI: No. Además, yo vengo al curso por saber todo esto.
PP4: Pero, ¿Eso está vigente aún o es muy antiguo?
PD: Esto aún lo venden y también con bolitas.
PP3: Sergio ¿Dónde lo venden?
PP1: En cualquier tienda de juguetes suelen vender
PD: Vamos a empezar montando un cubo. Las varillas se unen con estos nudos. Este material viene muy bien para ver simetrías.
PP1: Con estos engarces no podemos montar un cubo.
PD: Sí, busca ….
PP2: Nos hacen falta bichos estos de tres.
PP3: ¡Hui, todas las varillas no son iguales!
PPK: Yo quería hacerlo de colores y entonces es cuando me he dado cuenta.
PPL: Como mola esto.
PP2: Además es rápido.
PP3: Yo quiero enlaces de cuatro.
PPJ: Yo quiero de tres.
PD: ¿Cuál estás montando?
PP3: El cubo.
PD: Entonces, ¿te hacen falta de tres o de 4?
PP3: Es verdad, que tontería digo, me hacen falta de tres.
PPG: Esto se me va romper.
PD: También tenemos los nudos y varillas más grandes.
PPH: Las de cosas que se me ocurren hacer a mí y la mayoría no puedo porque son con cúter.
PP4: En esos niveles estamos.
PPZ: Con unas tijeras de punta redonda uno casi le seccionó el dedo a otro. Yo vengo a que me den ideas de hacer cosas sin cúter.
PD: Tranquila que aquí vamos a trabajar materiales en los que no se utiliza el cúter.
PPZ: Me ha quedado bien.
PPG: Bueno, yo lo veo un poco amorfo.
PD: Como os he dicho esto bien para ver los planos de simetría.
PP3: Para química también.
PPJ: Para dibujo mola mogollón. Vas midiendo y vas haciendo las axonometrías. Voy a hacerle una foto.
PP3: ¿Una foto de verdad?
PPG: Sí, para cuando luego vaya a la tienda decir lo que quiero.

Figura 2.18. Extracto de utilización de materiales manipulables

Asimismo, hay que informar también de que, debido a que los resultados de la encuesta, mostrados en Pérez (2006), y que los del curso CC apuntan a que los/as profesores basan su enseñanza principalmente en los libros de texto, en este curso se dedicó una sesión al análisis de libros de texto de la ESO en relación con la geometría de los sólidos. La figura 2.19 incluye respuestas de los/as profesores/as participantes PP1 y PP2 a la pregunta 4 del cuestionario.

4. ¿Qué le parece la forma de introducir el libro la geometría de los sólidos? ¿Por qué?

PP1: A mí me parece la estructura poco clara, separar muchas veces el volumen del cálculo del área y todo…
PP2: Yo creo que dan demasiada información.
PP1: Sí.
PP2: Liada.

PP1: Sí, que no está bien estructurada.
PP1: No se trabaja una figura completamente.
PP2: Quieren abarcarlo todo, que no falte nada.
PP1: A mí por ejemplo meter los planos, sacar este del volumen fuera. Por ejemplo, en el sistema métrico decimal, da las unidades de volumen, trabájalas y cuando ya llegas aquí, das los volúmenes dentro de…
PP2: Es ir complicando la figura poco a poco, pero si no has comprendido una básica.
PP1: Lo primeo que empiezas es con el principio de Cavalieri.
PP2: Claro
PP1: Que a lo mejor coges y es lo que podías dar al final para finalizar parte de volúmenes.
PP2: De que te va servir el saber tantas fórmulas.
PP1: Bueno, que le respondemos que llevamos solo cuatro.
PP2: Que le falta estructura.
PP1: Que está poco estructurada. No muestra una estructura que nos agrade.
PP2: Demasiada información, poco estructurada. De cara a nosotros, yo cuando lo veo, el libro también influye, es que no está claro. Si para nosotros no está claro imagínate para ellos. Y les falta base.
PP1: Quizás más trabajar todo un cuerpo, un cuerpo geométrico más completamente.
PP2: Menos figuras y más exhaustivamente cada una de ellas. Las típicas como el cilindro, la esfera, el cono, la pirámide … No meterse en cosas complicadas.

Figura 2.19. Extracto relativo a la introducción de la geometría en Colera et al. (2007, pp. 222-245)

Cabe destacarse que el curso CP desarrollado tomaba como referencia la dinámica del proceso de enseñanza/aprendizaje en el aula de matemáticas de enseñanza secundaria propuesto por Ponte et al. (1997) al que nos referimos en el subapartado 1.7.1 del capítulo 1. Centrándonos en las formas de interacción que delimitan estos autores, vamos a completar la descripción del desarrollo del curso señalando a continuación aspectos referidos a la comunicación, a la negociación del curso, al ambiente de aprendizaje y cultura de la clase y al modo de trabajo del profesorado participante.

Por lo que se refiere a la comunicación, destacamos de nuevo cómo el profesor director intentó en todo momento que se desarrollase la comunicación entre todos ellos. En todas las sesiones intentaba combinar las explicaciones teóricas con tareas que desarrollaran el pensamiento geométrico de los/as profesores/as participantes y que favorecieran el que se expresase las opiniones sobre los contenidos y procesos matemáticos propuestos. Asimismo, se procuró que las respuestas se explicaran de forma oral o escrita. De igual modo el profesor director dirigió la discusión de los/as profesores/as participantes intentando que todos/as participasen y mostrasen sus opiniones. La dirección de la comunicación y desarrollo del curso hizo que el profesor director decidiera sobre las explicaciones teóricas, tareas propuestas, material a utilizar, etc. En la figura 2.20 se puede ver un extracto de ello. Se ha de señalar, que como ya se ha indicado anteriormente en la figura 2.18, como ha sido una discusión de todo el grupo se han mostrado también en este extracto las respuestas de algunos/as profesores/as participantes que no fueron seleccionados para el estudio, pero que han participado en este debate y que los designamos como PPX, PPY y PPZ.

PD: La primera tarea que os planteo hoy es que escribáis en una hoja los sólidos que os vienen a la cabeza y que en un minuto me digáis aquellos que habéis escrito.
PP2: El cono, la esfera, cilindro, prismas, cubos.
PPZ: El hiperboloide, catenoide, elipsoide.
PP1: En un principio regulares e irregulares, dentro de los sólidos regulares tenemos rectos y oblicuos.
PP4: Una barra de hierro, una mesa, la sal.
PD: Pero la gente ¿cuáles suele nombrar siempre?
PPX: Cubo, pirámide, cilindro.

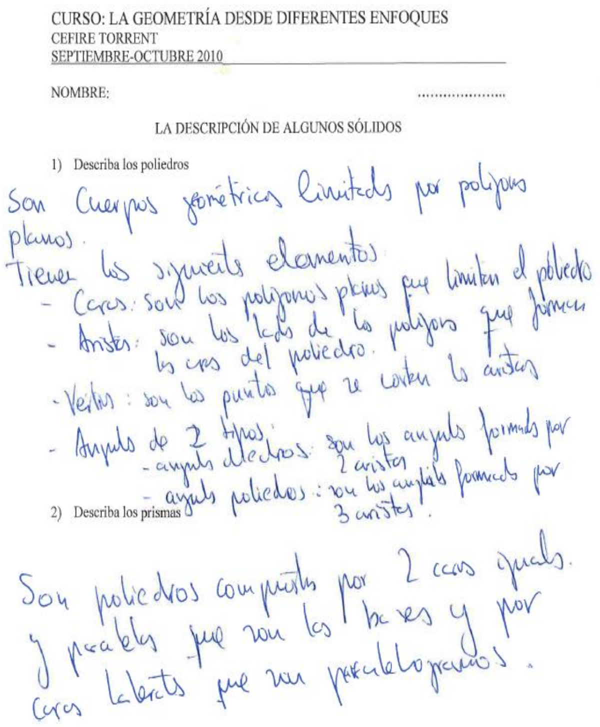
PP2: Esfera.
PD: Bien, para saber si lo que hemos respondido es o no correcto ¿Qué podemos hacer ahora?
PP2: Habremos de definir qué es un sólido o qué propiedades cumplen los sólidos.
PP4: Un estado de acción de la materia.
PP7: Que culto
PP1: Cuerpo geométrico de 3 dimensiones.
PPY: Superficie que encierra un volumen formado por caras.
PP4: Que tienen forma y volumen constante.
PD: Aquí os muestro en esta diapositiva algunas características que tiene un sólido:
Tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto.
Limitan perfectamente un espacio.
El borde del sólido es la superficie.
PD: ¿Cómo organizarías los sólidos desde las matemáticas?
PP1: Por sus formas y propiedades.
PP4: En regulares e irregulares.
PP3: Por número de caras.

Figura 2.20. Extracto de comunicación oral y escrita entre el profesor director y profesores/as participantes

Durante todo el curso se procuró que la comunicación fuera natural, sencilla y fluida, buscando la mayor participación posible de profesores/as en cada una de las intervenciones. Se intentó que las intervenciones y contestaciones fueran objetivas ya que de ellas dependía el desarrollo y resultados de nuestra investigación.

La comunicación oral fue primordial. El profesor director explicó oralmente contenidos relativos a los conceptos geométricos y procesos matemáticos que se trataron en el curso. También utilizó este tipo de comunicación para plantear la mayoría de las preguntas al profesorado participante. Asimismo, la mayor parte de las respuestas del profesorado participante fueron oralmente debido a que formaban parte de un dialogo o porque para el profesorado era más cómodo contestar de esta forma que por escrito. Además, como en muchas tareas los/as profesores/as participantes tenían que intercambiar entre ellos sus ideas, la comunicación oral era fundamental. Otro ejemplo de comunicación oral entre el profesor director y el profesorado participante se muestra en la figura 2.17.

La comunicación escrita fue también imprescindible. Las explicaciones teóricas se apoyaron en las diapositivas escritas que, como hemos indicado, se mostraron en la pizarra digital mediante Power Point. Las anotaciones y dibujos realizados en la pizarra jugaron un papel fundamental en las explicaciones del profesor director. Además, se les entregó a los docentes participantes algunas tareas escritas en papel para que se resolvieran en clase de forma escrita u oral. La figura 2.21 muestra una de estas tareas.



CURSO: LA GEOMETRÍA DESDE DIFERENTES ENFOQUES
CEFIRE TORRENT
SEPTIEMBRE-OCTUBRE 2010

NOMBRE: ....

LA DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS SÓLIDOS

1) Describa los poliedros

Son cuerpos geométricos limitados por polígonos planos.
Tienen los siguientes elementos:
- Caras: son los polígonos planos que limitan el poliedro
- Aristas: son los lados de los polígonos que forman las caras del poliedro.
- Vértices: son los puntos que se cortan las aristas
- Ángulos de 2 tipos:
  - ángulos diedros: son los ángulos formados por 2 aristas
  - ángulos poliedros: son los ángulos formados por 3 aristas.

2) Describa los prismas

Son poliedros compuestos por 2 caras iguales y paralelas que son las bases y por caras laterales que son paralelogramos.

Figura 2.21. Extracto de comunicación escrita de uno de los/as profesores/as participantes (PP3)

Hemos de señalar que cuando se pedía que las contestaciones se dieran de forma escrita, se dificultaba que el profesorado explicara su respuesta, aunque se pidiera de manera explícita en la pregunta.

Respecto de la negociación del curso, cabe señalarse las diferencias entre las actuaciones del profesor director y profesores/as participantes con respecto a las llevadas a cabo en el proceso de enseñanza/aprendizaje de un curso de secundaria y de un curso de formación de profesores/as. Aunque, del mismo modo que en un curso normal el/la profesor/a intenta transmitir sus conocimientos al alumnado para que haya un proceso de enseñanza/aprendizaje, en este curso el profesor director pretendía presentar la enseñanza de la geometría mediante los procesos matemáticos a los/las docentes colaboradores pero, como profesor investigador, tenía también como objetivo, recabar la opinión del profesorado participante sobre diferentes problemáticas ligadas a la enseñanza/aprendizaje de la geometría mediante los procesos matemáticos. El intercambio de ideas fue fundamental en el funcionamiento. Las explicaciones del profesor director y las intervenciones y opiniones de los/as profesores/as colaboradores/as han sido los principales referentes. Se intentó satisfacer los intereses de los integrantes del curso y presentar unos contenidos y metodología de enseñanza atrayente para los ellos. Se les animó a que intervinieran y mostraran sus opiniones frecuentemente, así como que participaran y contestaran a todas las preguntas y tareas propuestas. Se les remarcó que en todo momento las respuestas e intervenciones cuando queden reflejadas serían de forma anónima y que en ningún momento se valorarían con una nota. Por otra parte, el profesorado participante tuvo que mostrar su opinión con los conocimientos recibidos en este curso, colaborar contestando objetivamente y razonadamente a todas las tareas propuestas y participar en las discusiones llevadas a cabo en los pequeños grupos y en las puestas en común con la clase. La figura 2.17 muestra un ejemplo de negociación realizada en clase en la que el profesor director señala qué va a recabar del profesorado participante sobre una familia de sólidos para luego él dar una respuesta también.

En cuanto al ambiente de aprendizaje y cultura de la clase, señalar que el curso se desarrolló en un aula del CEFIRE de Torrent. Era un aula grande con dos mesas, una grande en la que se colocaron todos los/as profesores/as participantes y el profesor coordinador y una pequeña en la que había un ordenador. El ambiente de clase era distendido; todo el profesorado se sentía cómodo para intervenir en las discusiones como muestra el extracto de la figura 2.18.

El curso no solo centró la atención en el desarrollo de contenidos geométricos. En él los/as profesores/as participantes discutieron y calificaron las propuestas que se presentaron en el curso para la enseñanza de la geometría. Para nuestro estudio resultó primordial que se creara un ambiente distendido en la clase para que estos/as profesores/as expresaran con naturalidad la idea que tenían sobre la geometría de los sólidos y sobre su enseñanza en la ESO, así como que aportaran información sobre cómo llevaban ellos a cabo la enseñanza en sus clases. Las nociones que expresaron estos/as profesores/as sobre esta materia y los contenidos geométricos que según ellos/ellas trabajaban en sus clases arrojaba cierta luz sobre la geometría que se transmite al alumnado y sobre la importancia que tiene la geometría en la enseñanza de las matemáticas en este nivel educativo.

La figura 2.22 muestra un extracto con preguntas realizadas al profesorado participante sobre la enseñanza de la geometría.

- ¿Creéis que se debe dedicar tiempo en clase para demostrar cuántos y cuáles son los poliedros regulares convexos?
- ¿Por qué pensáis que sí o que no?
- ¿Cuál de las dos formas que se han utilizado para demostrar los poliedros regulares convexos creéis que es más adecuada para los alumnos de secundaria?
- Pero ¿Pensáis que las dos formas son interesantes para llevarlas al aula en secundaria? ¿Por qué?

Figura 2.22. Extracto de preguntas realizadas al profesorado participante sobre la enseñanza de la geometría

El profesor director mantuvo un ambiente de trabajo colectivo. Reiteró la objetividad y el anonimato de las respuestas y en todo momento animó a los/as profesores/as a que participaran; sus comentarios y sugerencias marcaron el desarrollo de las diferentes sesiones.

También se favoreció la distensión del ambiente con el uso de materiales manipulativos que se hizo en algunas sesiones y con la resolución de algunas tareas de forma colectiva. Ello llevó a que el trabajo propuesto resultara más atractivo e interesante para los/as profesores/as participantes, se paliaran dificultades de visión espacial, se pudiera favorecer el aprendizaje de determinados contenidos geométricos y, posiblemente, se favoreciera el que estos/as profesores/as incitaran en el alumnado de secundaria una actitud investigadora.

Por último, haremos referencia al modo de trabajo del profesorado participante. El profesor director organizó el trabajo de tres formas diferentes según la tarea que se realizaba en el curso: trabajando de forma colectiva, en grupos de dos o tres personas y de forma individual.

El trabajo de forma colectiva se llevaba a cabo cuando el profesor director realizaba una explicación teórica o cuando introducía un tema. Asimismo, las tareas y cuestiones que se incluían en ellas se presentaban al gran grupo y es en él donde se pedía que se expresaran las respuestas. De igual modo, se utilizaba para llevar a cabo pequeños debates y para plantear preguntas que de forma individual expresaba alguno de los/las profesores/as. La figura 2.23 muestra una parte de una discusión colectiva sobre la clasificación de los cuadriláteros. Al ser una discusión de todo el grupo se han mostrado también en este extracto las respuestas de algunos/as profesores/as participantes que no fueron seleccionados para el estudio, pero que participaron en esta discusión (PPX, PPG y PPH).

PD: Vamos a clasificar los cuadriláteros en función de pares de lados paralelos y pares de lados iguales. Haremos una tabla igual que hemos hecho con los triángulos. Dejo un poco de tiempo para que lo discutáis en grupos y realizamos entre todos de la clasificación.
PPH: Pares de lados paralelos con pares de lados iguales y que tenemos que decir paralelos, no paralelos, iguales y no iguales.
PP3: Paralelogramos y no paralelogramos, te refieres a eso
PD: A ver, voy a guiaros en la realización de la tabla ¿Cuántos pares de lados paralelos podemos tener?
PP3: 2 pares.
PD: ¿Podemos tener cero…?
PP4 Uno o dos.
PD: ¿Cuántos pares de lados iguales podemos tener?
PP3: Tres tipos distintos te refieres.
PP4: Cero, uno o dos.
PD: Bueno, ahora que ya habéis discutido la tarea en el grupo, vamos a poner en común las respuestas ¿Qué nombres tenéis?
PP4: Trapecios.
PP1: Romboide.
PP2: Rombos.
PD: Bueno, vamos a ir por orden, comenzaremos por aquellos cuadriláteros que no tienen ningún par de lados paralelos y ningún par de lados iguales.
PP3: Trapezoide.
PD: De acuerdo. Ahora un par de lados paralelos y ningún par de lados iguales.
PP3: Ese puede ser el trapecio escaleno.
PP1: Trapecio rectangular.
PD: ¿No pensáis que pueden ser los trapecios? Los trapecios en general tienen un par de lados paralelos y ¿ningún par de lados iguales? Bueno… vale… Ahora estamos rellenando la tabla. Luego veremos que se pueden hacer clasificaciones de los cuadriláteros excluyentes e inclusivas. En las segundas, solo nos fijamos en la propiedad que se cumple.
LA MAYORÍA: Sí.
PD: Dos pares de lados paralelos ¿y ningún par de lados iguales?
PP2: Ahí nosotros no hemos encontrado ninguno.
PPH: Ninguno.
PD: Bien. Sigamos con ningún par de lados paralelos y un par de lados iguales.
PP3: El trapezoide.
PD: Hemos puesto el trapezoide en el de ningún par de lados paralelos y ningún par de lados iguales.
PP1: Podrían ser los trapezoides escalenos.
PP3: El trapezoide cóncavo.
PD: Pero ¿Todos los trapezoides cóncavos?
PPX: No.
PD: Entonces, ¿no puede ser? Pasemos a otro y ahora volveremos aquí. A ver un par de lados paralelos y un par de lados iguales, ¿hay alguno?
PP2: Un trapecio.

PD: Pero ¿Todos los trapecios? ¿Qué tipo de trapecio?
PPX: Trapecio isósceles.
PD: Perfecto. ¿Solo ese? ¿Hay trapecios con un par de lados vecinos iguales y un par de lados opuestos paralelos? ¿Y el trapecio isósceles no es trapecio? Luego volveremos sobre eso. Ahora estamos rellenado la tabla. Luego veremos que se pueden hacer clasificaciones de los cuadriláteros excluyentes e inclusivas. En las segundas, solo nos fijamos en la propiedad que se cumple.
Ahora dos pares de lados paralelos y un par de lados iguales.
PP2: El rectángulo.
PP1: Paralelogramos.
PD: ¿Pensáis que puede haber?
PPG: No.
PD: No hay. Luego ya nos plantearemos por qué no puede haber. Continuemos con ningún par de lados paralelos y dos pares de lados iguales.
PP2: Las flechas. Cuadrilátero cóncavo.
PD: Pero ¿Todas las flechas?
PPG: No.
PD: ¿Hay algún nombre para ellos?
PPG: Imagino.
PD: Cometas, ¿Conocíais ese nombre? (Lo dibuja en la pizarra).
PP3: ¿Ese se llama cometa?
PD: Sí. ¿Cómo le llamáis, deltoides?
LA MAYORÍA: No.
PPG: Pero es simétrico, ¿no?
PD: Sí, es simétrico respecto a la diagonal mayor. ¿Y los rombos lo son? Luego volveremos sobre eso.
Vayamos ahora a un par de lados paralelos y dos pares de lados iguales.
NO CONTESTA NADIE.
PD: Ninguno. Bien, dos pares de lados paralelos y dos pares de lados iguales.
PP2: El cuadrado.
PPX: El rombo.
PP 4: Rectángulo.
PP1: Los paralelogramos.
PD: Los paralelogramos. Ahora volvamos al caso de cero pares de lados paralelos y un par de lados iguales tendríamos las cometas oblicuas.

Figura 2.23. Extracto de tarea colectiva

El trabajo en grupos de dos o tres personas, agrupadas según sus preferencias y en función de la distribución de la clase, se mantenía durante todo el cuso. Dado que en cada grupo se colocó una grabadora de voz, se puedo tener registrado gran parte de las interacciones orales que hubo entre los/as profesores/as participantes y/o de estos con el profesor director. Se favorecía así que los/as profesores/as del pequeño grupo plantearan sus ideas, argumentos y opiniones; construyeran las formas geométricas con materiales manipulables exponiendo y discutiendo sus estrategias y pusieran en común sus conocimientos intentando extraer conclusiones acerca de cuestiones teóricas que se les plantearon.

El trabajo de forma individual lo reservamos para cuestiones sobre las ideas que se tenían sobre algunos conceptos geométricos, para aclarar aquellas dudas personales sobre lo explicado en clase y para dialogar o intercambiar opiniones con profesores/as concretos sobre los contenidos geométricos y/o enseñanza de la geometría. La figura 2.24 muestra una parte de la conversación mantenida de forma individual entre el/la profesor/a participante PP3 y el profesor director.

PP3: Sergio, mira es que te quería comentar personalmente que la forma de enseñanza que tú estás planteando lo veo un poco hipotética porque supondría no tener vacaciones para enseñar de esta manera. Yo pienso que es mucho más lento que construyan ellos el conocimiento, cuando realmente encontramos que las clasificaciones ya están hechas.
PD: Eso es lo que tú crees, las clasificaciones realmente las haces tú. Está claro que los libros ya te dan clasificaciones que tú puedes coger y enseñarlas directamente, pero yo te estoy mostrando otra forma de llevar a cabo la clasificación. Además, construyendo ellos las clasificaciones aprenden más. Por lo tanto, creo que construyendo ellos el conocimiento aprenden más.
PP3: ¿Pero explicaríamos así todos los temas? Es que yo lo veo imposible explicar todo así.
PD: Todos los que puedas.
PP3: Necesitaríamos una optativa para poder llevar la enseñanza de esta forma. ¿Cuántas clases estás necesitando tú para hacer esto?
PD: Bueno, eso ya depende de cómo tú te lo organices. Está claro que el principal problema es el tiempo.
PP3: ¿Y tú piensas que nosotros disponemos de tanto tiempo?
PD: Lo que se debería hacer es hacerles razonar desde pequeños y de esta manera verías que cuando llegaran a niveles superiores costaría mucho menos enseñar de esta forma.
PP3: Veo un poco imposible lo que planteas.
PD: Mi intención es proponer una metodología diferente y que vosotros la conozcáis y opinéis sobre ella.
PP3: Ya, pero…
PD: El próximo día, si quieres, planteamos esta cuestión al grupo.
PP3: De acuerdo.

Figura 2.24. Extracto de interrelación entre un/a profesor/a participante y el profesor director

2.2.2.3 Curso online

Este curso CO a distancia se compuso de 4 sesiones en las que propusimos diferentes tareas. A cada sesión se le asignó una duración de 2 semanas. En 3 sesiones nos centramos en la descripción, clasificación, establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos y representación de los sólidos, y en la sesión final se pidió una reflexión sobre el desarrollo del curso y la elaboración de una propuesta para la enseñanza de la geometría de los sólidos en la ESO.

En la primera sesión nos centramos especialmente en la descripción y clasificación en geometría. Se trabajó a partir de los documentos Guillén (1991, 1997, 2004, 2005) y de los que hemos dado cuenta en los apartados 1.4.1 y 1.4.2 del capítulo 1. Comenzó con una serie de preguntas relativas a estos contenidos geométricos y su enseñanza/aprendizaje en la ESO. La figura 2.25 muestra algunas cuestiones que se plantearon relativas a la descripción.

1. a) ¿Qué entiende por describir en geometría?
   b) ¿Qué tipo actividades plantea en clase relacionadas con la descripción? Ponga al menos 3 ejemplos característicos del tipo de actividades que plantea en clase relacionadas con la descripción.
2. a) ¿Qué sólidos describe en ESO cuando enseña geometría? ¿Por qué?
   b) ¿Qué figuras, que no sean sólidos, describe en ESO cuando enseña geometría? ¿Por qué?
   c) ¿Qué cree que es más interesante que los alumnos sepan describir los sólidos o las figuras planas en ESO? ¿Por qué?
3. ¿Qué tipo de representaciones utiliza en clase para describir los objetos geométricos? ¿Por qué?
4. Qué propiedades cumplen:
   a) Los trapecios.
   b) Los paralelogramos.

c) Los rectángulos.

Figura 2.25. Extracto de preguntas realizadas al profesorado participante sobre la descripción

A continuación, vía online y mediante una serie de diapositivas se describieron brevemente diferentes enfoques para la enseñanza de la descripción y clasificación a partir los sólidos y se remitió a algunas propuestas para su enseñanza elaboradas por diferentes expertos en la enseñanza de la geometría en la figura 2.26 se da una muestra de las diapositivas de las que se presentaron al profesorado participante a partir de Guillén (1991, 2005) y presentado en el apartado 1.4.2 del capítulo 1.

Clasificaciones particiones

- Clasificación partición: clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos que son disjuntos unos con otros.
- Las condiciones que se imponen a las clasificaciones particiones son:
  - Una vez determinado el universo y el criterio de clasificación, cada ejemplo del universo debe pertenecer a una y sólo a una clase. Las subfamilias establecidas deben ser disjuntas.
  - Las distintas subfamilias establecidas en el universo objeto de clasificación deben de dar cuenta de la totalidad de éste.
- Tipos de clasificaciones particiones:
  - clasificaciones establecidas con un criterio (y podemos variar el criterio considerado).
  - clasificaciones establecidas con varios criterios.

  La clasificación para un criterio es una partición llamada dicotomía y los siguientes diagramas pueden representarla.

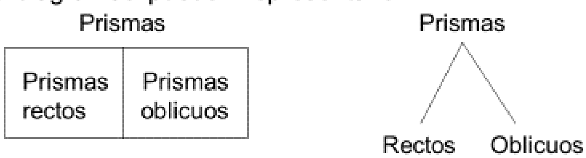


Figura 2.26. Extracto de las diapositivas teóricas sobre la clasificación mostradas a los/as profesores/as participantes

Asimismo, se llevaron a cabo una serie de cuestiones en la que los/as profesores/as participantes debían expresar su opinión en relación con los contenidos y propuestas de enseñanza que se les mostraba. En la figura 2.27 se presenta algunas cuestiones que se les realizaron a los/as profesores/as participantes tras mostrarles las diapositivas de teoría. Se ha remarcar que la numeración no coincide con la que se les mostró.

1. ¿Qué ventajas e inconvenientes cree que tienen las clasificaciones a priori? ¿Y las a posteri?
2. ¿Qué opina de las clasificaciones ingenuas? ¿Son interesantes para los alumnos de secundaria? ¿Por qué?
3. a) ¿Qué clasificaciones de las explicadas en el documento de teoría (particiones, jerárquicas, con criterios de construcción, por analogía) cree que son las más conveniente para llevarla al aula en secundaria? ¿Por qué?
   b) ¿Y cuáles son las menos convenientes para llevarlo al aula en secundaria? ¿Por qué?

Figura 2.27. Extracto de preguntas realizadas al profesorado participante sobre la clasificación tras haber tratado los contenidos teóricos

También se planteó en esta sesión alguna tarea en la que el profesorado participante aplicaba los conceptos estudiados a objetos cotidianos. En el anexo 1, la figura A1.1 muestra una serie de cuestiones sobre los poliedros aplicadas a caja.

La segunda sesión se centró en el establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos y la representación de los sólidos tomando los poliedros regulares como soporte para desarrollar la actividad. Se trabajó principalmente a partir de Guillén (1991, 1997) y que se puede contemplar en los apartados 1.4.1 y 1.4.3 del capítulo 1. Al igual que en la sesión anterior para otros contenidos, se cuestionó a los/as profesores/as participantes sobre los conocimientos que tenían sobre diferentes relaciones que existen entre los poliedros regulares y sobre las diferentes formas de representarlos en geometría, así como sobre la enseñanza que impartían en sus clases en relación con esos contenidos. Se pueden observar algunas de las cuestiones que se les plantearon a los/as profesores/as participantes sobre los poliedros regulares y sus relaciones en la figura 2.28.

1. ¿Conoce los poliedros regulares convexos? ¿Cuáles son?
2. Cuando tiene que explicar los poliedros regulares convexos en clase ¿Cómo lo hace, es decir, los nombra, les enseña una representación de ellos, demuestra cómo encontrarlos, demuestra que son un número limitado…? Explique realmente lo que hace y como lo hace.
3. ¿Cree que es importante que los alumnos de secundaria conozcan los poliedros regulares convexos? ¿Por qué?
4. ¿Qué relaciones conoce que cumplen los poliedros regulares convexos entre ellos?
5. ¿Enseña a los alumnos las relaciones anteriores? ¿Por qué?

Figura 2.28. Extracto de preguntas realizadas al profesorado participante sobre los poliedros regulares y sus relaciones

El profesor director facilitó vía online información al respecto, apoyándose en investigaciones en didáctica de la geometría de los sólidos. La figura 2.29 da cuenta de algunas de las diapositivas mostradas al profesorado participante.

1. Tabla con las características numéricas de los poliedros regulares.

	C	V	A	O. de V.	Nº lados C.
Tetraedro	4	4	6	3	3
Cubo	6	8	12	3	4
Octaedro	8	6	12	4	3
Dodecaedro	12	20	30	3	5
Icosaedro	20	12	30	5	3

2. Relaciones

1. $\frac{N^{o}\, ladosC \bullet C}{2} = A = \frac{OrdenV \bullet V}{2}$

2. $C + V = A + 2$

3. Poliedros duales: Se intercambian el número de caras y de vértices y el número de aristas coincide y además los vértices se corresponderán con los centros de las caras y su orden será igual al número de lados del polígono de las caras.

Figura 2.29. Extracto de las diapositivas teóricas sobre las características numéricas de los poliedros regulares facilitadas a los/as profesores/as participantes

Al igual que la sesión anteriormente descrita, se plantearon una serie de preguntas a los/as profesores/as participantes para que nos señalaran su opinión sobre los contenidos y la forma de enseñanza que se proponía. En la figura 2.30 se puede contemplar algunas de las preguntas que se realizaron.

4. Céntrese ahora en el documento "Relaciones de dualidad de los poliedros regulares: características numéricas".

   4.1 ¿Ve interesante que los alumnos conozcan las características numéricas de los poliedros regulares convexos: número de vértices, caras, aristas, orden de los vértices, número de lados de las caras? ¿Por qué?

   4.2 ¿Cree conveniente que los alumnos comparen ciertas características numéricas de los poliedros regulares, por ejemplo, las caras del cubo coinciden con los vértices del octaedro, las aristas del dodecaedro e icosaedro coinciden, etc.? ¿Por qué?

   4.3 ¿Conocía usted las siguientes relaciones?

   a)
$$\frac{N^{o}\, ladosC \bullet C}{2} = A = \frac{OrdenV \bullet V}{2}$$

   b)
$$C + V = A + 2$$

   ¿Es importante que los alumnos sepan las diferentes relaciones que se han mencionado? ¿Por qué?

Figura 2.30. Extracto de preguntas realizadas a los/as profesores/as participantes sobre los poliedros regulares y sus relaciones tras enseñarles los contenidos teóricos

La tercera sesión se centró en la enseñanza de los contenidos tratados en las sesiones anteriores tomando algunos problemas geométricos como contexto. Nos fijamos en la actividad de matematizar a la hora de resolver un problema; las situaciones o contextos en que se sitúan los problemas; el contenido matemático relativo a la geometría tratado durante este curso del que hay que valerse para resolver estos problemas; las representaciones que se usan para resolverlo. Se cuestionó también sobre la opinión que se tenía acerca del planteamiento de estos problemas en secundaria y sobre el planteamiento que se haría en ese caso. En el anexo 1, la figura A1.3 incluye uno de los problemas, tomado de Ponte et al. (1997) que se usó como contexto para tratar contenidos geométricos y las cuestiones que se plantearon referidas al mismo.

Como ya hemos indicado, en la última sesión se reflexionó acerca del desarrollo del curso y sobre los contenidos tratados en el mismo y se volvió de nuevo a los contenidos geométricos tratados en las sesiones anteriores proponiendo que se elaborasen propuestas de enseñanza para la ESO para alguno de los contenidos tratados en el curso.

Al igual que al describir el curso CP, vamos a completar la descripción de este curso precisando aspectos sobre las formas de interacción que han delimitado Ponte et al. (1997) y, como ya se ha señalado, se dan cuenta en el apartado 1.7.1 del capítulo 1.

La comunicación en el curso online fue en todo momento escrita ya que era la única forma de comunicación que permitía la plataforma. El profesor director dividió cada sesión en dos partes. En la primera parte se cuestionaba a los/as profesores/as los contenidos y como llevaban a cabo la enseñanza de los contenidos planteados en ella. Las preguntas que se plantearon se centraron en ideas sobre los procesos matemáticos que se iban a tratar y en la realización de descripciones, clasificaciones y representaciones de las formas del espacio. Se cuestionaba también sobre los contenidos que enseñan, tipos de tareas que trabajan en clase y sobre la forma en la que se lleva a cabo la enseñanza de los contenidos. En la segunda parte de la sesión se les mostraba a los/as profesores/as diapositivas en PDF con los conceptos y enfoques propuestos por los investigadores en Didáctica de la Matemática, que hacen referencia a la sesión en cuestión y que daban respuesta a algunas de las cuestiones que se habían planteado. Cabe señalar que algunos/as profesores/as participantes indicaron que algunas diapositivas necesitaban de una explicación oral por parte del profesor director para poder entenderse. Asimismo, se les presentaba una serie de cuestiones para que los/as profesores/as participantes, una vez leído estos documentos, mostraran su opinión en relación con los conceptos, procesos y enfoques de enseñanza presentados en las diapositivas, señalaran lo que se podría llevar a cabo o no de lo que se les ha expuesto y realizaran actividades y problemas relacionados con los contenidos de la sesión.

La negociación en este curso conllevó por una parte que el profesor director transmitiera a los/as profesores/as participantes los conocimientos y formas de enseñanza que proponen los expertos en Didáctica de la Matemática en la geometría de los sólidos. Por otra parte, que los/las docentes participantes, individualmente y de forma anónima, señalasen los contenidos que ellos enseñan, y como los enseñan. Asimismo, que indicaran la opinión de los diversos contenidos y la forma de enseñarlos que proponen los expertos en esta materia. Se insistió en que se llevara a cabo la máxima participación y colaboración y que se respetaran al máximo los plazos propuesto para cada actividad.

Al ser un curso a distancia, el ambiente de aprendizaje de cada profesor/a participante variaba. Las únicas condiciones que se les señalaron fueron disponer de un ordenador o similar y de conexión a Internet para recibir y enviar los documentos una vez contestados. El profesorado podía estar conectado a la plataforma todo el tiempo que deseara sin sufrir ningún tipo de penalización. Los documentos podían descargárselos e imprimírselos si lo consideran conveniente. Se les comunicó que tenían un tiempo límite para poder contestar los bloques de preguntas que se les plantearon, siendo este de una semana. Sin embargo, se acordó que, aunque expirase el tiempo podían subir las contestaciones fuera de plazo. Cabe señalar que el profesor director animó a los/las profesores/as participantes a lo largo del curso a que trabajaran sobre el material que se les mostró. En todo momento se les indicó que, aunque las respuestas a las cuestiones que se les hacía mostraban sus nombres y apellidos, las respuestas que se seleccionasen para formar parte de la investigación se presentarían de forma anónima.

El modo de trabajo de los/as profesores/as participantes fue principalmente de forma individual y por mediación de contestaciones escritas a las cuestiones y problemas que se les planteó. Los/as docentes participantes para contestar a las preguntas relacionadas con los conceptos teóricos podían hacer uso de manuales e Internet.

Para la descripción de este curso online, también nos vamos a apoyar en los constructos teóricos que se manejan en la formación a distancia indicados por Adell y Sales (2000), apartado 1.7.2 del capítulo 1.

El profesor director durante el curso siguió en parte lo señalado por estos autores. Se formó en los contenidos del curso, materiales y recursos pertinentes para la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos. Asimismo, se instruyó en el medio en el que se desarrolló la comunicación didáctica de este curso, el ordenador. De igual forma, investigó sobre la forma en que se lleva a cabo la enseñanza a distancia.

Por lo que respecta a la distancia transaccional al principio del curso se comunicó a los/as profesores/as que disponían de una atención individualizada que podían hacer uso de ella en cualquier momento. Aunque el profesor director respondió y resolvió todas las dudas que les fueron planteando los/as profesores/as participantes cabe señalar que tuvo lugar una distancia transaccional acentuada debido a que el curso estuvo bastante estructurado y el diálogo al final entre el profesor director y el/la profesor/a online fue baja. Se intentó reducir la distancia transaccional entre el profesor director y los/as profesores/as participantes y favorecer la interacción entre los/as propios/as profesores/as participantes, pero debido al poco tiempo que se disponía para realizar el curso y llevar a cabo las tareas propuestas se efectuaron pocas intervenciones.

En relación con la interacción en el curso presentado se llevó a cabo los cuatro tipos de interacción:

- Profesor director-profesor/a participante, donde el profesor director a lo largo del curso fue motivando y orientando a los/as profesores/as participantes a la resolución de las tareas propuestas.

- Profesor participante-contenido, donde los/as docentes participantes tuvieron a través de la plataforma acceso a los contenidos de la materia de estudio.

- Profesor participante-profesor/a participante, donde los/as profesores/as participantes intercambiaron respuestas y ayudas entre ellos/as.

- Profesor participante-interfaz comunicativa, donde toda la comunicación entre los/as docentes participantes y el profesor director, así como el acceso de los/as profesores/as participantes a la información relevante al curso se realiza a través del material escrito que se dispuso en la plataforma virtual.

Se ha de señalar que la tecnología utilizada en el curso permitió la comunicación de los/as profesores/as participantes con el profesor director, los otros/as profesores/as participantes y el acceso a los contenidos.

Respecto del control de las tareas que se plantearon cabe señalarse la información que se dio a los/las profesores/as participantes incidiendo en que las respuestas a las preguntas que se les planteaban dependían de ellos/ellas. Se les subrayó que las tareas que se plantearon en ningún momento trataban de evaluar los conocimientos que tenían sobre la materia estudiada sino de investigar los conocimientos que tenían y la forma en que llevaban a cabo la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos. Primero se pretendía que reflexionaran sobre determinados contenidos geométricos y como planteaban su enseñanza/aprendizaje. Después que señalaran la opinión sobre lo que proponen los expertos en la enseñanza de dichos contenidos. Se trató de que todo el profesorado participante se sintiera cómodo trabajando con la plataforma virtual. Se intentó que fuera sencillo responder con ordenador a las tareas propuestas.

Para finalizar el análisis de estos constructos nos fijaremos en lo que concierne al contexto social. Se ha de señalar que se trató de que el profesorado participante se sintiera socialmente presente a pesar de que la comunicación era escrita. Para ello, se intentó que los/as profesores/as pusieran una fotografía suya en un intento de acercarse un poco más a aquellos con los que se establecía la comunicación.

2.2.3 Las tareas y cuestiones propuestas en la encuesta y los cursos

Siguiendo a Ponte et al. (1997), apartado 1.7.1 del capítulo 1, entenderemos por “tarea” el trabajo que se propone al alumnado y que la mayor de las veces la propone el profesorado. Según estos autores, entre las tareas que puede proponer el profesorado tenemos preguntas teóricas o de razonamiento, ejercicios de cálculo, problemas, representaciones, construcciones, etc. Asimismo, por “actividad” entendemos aquello que interpreta y hace el alumnado de la tarea propuesta. Las tareas las propone el profesorado y han de ser interpretadas por el alumnado, lo que puede dar lugar a actividades diferentes dependiendo del alumnado y el ambiente del aula.

La tarea propiamente dicha puede apuntar hacia diversas estructuras o conceptos matemáticos, que tienen que ser interpretados por el/la profesor/a (Ponte et al., 1997, p.74). Nosotros ampliamos el concepto de tarea. Las tareas que presentamos en los cursos descritos en el apartado 2.2.3 tienen en cuenta las características de los/las profesores/as participantes, los intereses de ellos y del profesor convocante, así como la influencia que pueden tener algunas de ellas sobre los alumnos de secundaria. Planteamos algunas que requieren de conocimientos geométricos para resolverlas y también otras que requieren de conocimientos relativos a la enseñanza de estos contenidos.

Contemplar las tareas desde las problemáticas de nuestro estudio, asociadas al objetivo general estudiar la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de la descripción y clasificación de la geometría a partir de los sólidos en ESO, y centrar la atención en la actividad que puede desarrollarse a partir de ellas, lleva a distinguirlas según lo que se demanda: a) debatir sobre algunas cuestiones generales sobre la geometría de los sólidos y su enseñanza en la ESO, b) resolver diferentes situaciones de aprendizajes relativas a la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones en las que el contexto es matemático, c) responder cuestiones en relación con las tareas que previamente se han propuesto para resolverlas, d) responder cuestiones en relación con los contenidos tratados en los cursos y el desarrollo de los mismos, e) reflexionar sobre la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos a partir del curso realizado, f) analizar los aportes de diferentes investigaciones realizadas en Educación Matemática y responder cuestiones sobre estos recursos. En la tabla 2.1 precisamos los objetivos de nuestro estudio, las tareas que se plantean para cada objetivo, la actividad que se demanda cada una de las tareas propuestas y los cursos en los que se desarrolla la actividad correspondiente.

Objetivos 1 a 5 de la investigación	Tarea		Actividad	Encuesta/curso
Objetivo 1: Indagar acerca de las creencias y concepciones que traslucen las respuestas de los/as profesores/as de la ESO implicados en la investigación en relación con nuestra problemática de estudio	TCc1	Señalar las concepciones y creencias que se tiene de la geometría	Indicar las opiniones, ideas y visiones que se tienen acerca de la geometría: creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones (A1.1)	E, CC
	TCc2	Señalar las concepciones y creencias que se tiene de la descripción y la clasificación	Apuntar la idea que se tiene sobre describir y clasificar (A1.2)	CC, CP, CO
			Anotar la importancia que tiene la descripción y la clasificación y situaciones en las que se aplican (A1.3)	CC, CP, CO
Objetivo 2: Delimitar el conocimiento de los contenidos geométricos relativos a la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones que se refleja en las respuestas de los profesores de la ESO implicados en el estudio	TCg1	. Describir formas geométricas	Anotar la idea que se tiene sobre determinados conceptos relacionados con la descripción y clasificación de los sólidos (A2.1)	CC, CP, CO
			Indicar las características y propiedades de las formas del espacio propuestas a partir de su nombre (A2.2)	CC, CP, CO
			Interpretar formas geométricas a partir de diferentes representaciones de ellas y describirlas (A2.3)	CC, CP, CO
			Recopilación de propiedades. Enumerar las propiedades y hallar el número de elementos de formas n-agonales (A2.4)	CP
			Relacionar las formas geométricas con las propiedades que tienen (A2.5)	CP
			Encontrar una forma geométrica a partir de las propiedades mostradas (A2.6)	CP

			Analizar e interpretar formas geométricas mostradas en problemas geométricos de contexto (A2.7)	CC, CP, CO
	TCg2	Señalar las relaciones que hay en las formas geométricas y entre las formas geométricas	Reflexionar sobre las relaciones que se conocen entre los elementos de una forma geométrica (A2.8)	CC, CP, CO
			Reflexionar sobre las relaciones que se conocen entre las formas geométricas (A2.9)	E, CC, CP, CO
	TCg3	Clasificar las formas planas y del espacio	Apuntar la clasificación que se conoce de las formas geométricas propuestas mostradas mediante su nombre (A2.10)	E, CC, CP, CO
Objetivo 3: Analizar aspectos relativos a la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos implicados en la investigación que se aprecian en las respuestas de los/as profesores/as de la ESO participantes en el estudio	TEcg1	Señalar la forma de trabajar en clase la clasificación y la descripción	Apuntar cómo se introduce la geometría, la descripción y la clasificación de los sólidos en clase (A3.1)	CC, CP, CO
			Explicar cómo se enseña al alumnado la descripción y clasificación de las formas geométricas (A3.2)	CC, CP, CO
			Indicar las razones acerca de la manera que se tiene de enseñar la descripción y la clasificación (A3.3)	CC, CP, CO
			Marcar los objetivos que se tienen para la enseñanza de la descripción y la clasificación (A3.4)	CC, CP, CO
			Exponer los materiales que se utilizan cuando se lleva a cabo la enseñanza de las formas geométricas (A3.5)	E, CC, CP, CO

			Comentar la importancia que tiene la representación, la construcción y la relación con la enseñanza de la descripción y la clasificación (A3.6)	CC, CP, CO
			Analizar la enseñanza que se propone en los libros en relación con la descripción y la clasificación (A3.7)	CP
	TEcg2	Determinar la forma en que lleva a cabo la enseñanza/aprendizaje de los elementos de los sólidos y las formas geométricas	Concretar qué elementos de los sólidos y qué formas geométricas se presentan cuando se explica la descripción y la clasificación (A3.8)	E, CC, CP, CO
			Puntualizar la forma que se tiene de enseñar los elementos de los sólidos y las figuras geométricas al alumnado (A3.9)	CC. CP, CO
			Analizar la enseñanza de las formas geométricas mostradas mediante la resolución de problemas geométricos en contexto (A3.10)	CP, CO
			Considerar la enseñanza/aprendizaje del alumnado (A3.11)	CC, CP
			Determinar errores y dificultades que presenta el alumnado en la descripción y la clasificación (A3.12)	CO
	TRei1	Examinar la enseñanza que se propone para la descripción de las formas geométricas	Analizar las situaciones en las que está implicada la descripción de las formas geométricas (A3.13)	CC
			Examinar la descripción de los sólidos a través de familias de poliedros (A3.14)	CC, CP, CO
			Valorar las tareas que propone Guillén para	CC

			trabajar la descripción de los sólidos (A3.15)	
			Reflexionar sobre las representaciones de las formas geométricas (A3.16)	CC
			Opinar sobre la importancia que puede tener en la enseñanza la descripción que proponen los investigadores (A3.17)	CC, CP, CO
	TRei2	Analizar la enseñanza que se propone para la clasificación de las formas geométricas	Analizar las diferentes propuestas de clasificación para los sólidos (A3.18)	CC, CP, CO
			Valorar las tareas que propone Guillén para trabajar la clasificación de los sólidos (A3.19)	CC
			Examinar la clasificación propuesta de determinadas figuras planas (A3.20)	CC, CP, CO
			Señalar la importancia que puede tener en la enseñanza la clasificación que proponen los investigadores (A3.21)	CC, CP, CO
Objetivo 4: Examinar el aprendizaje de los profesores participantes en el estudio sobre la problemática de la investigación que se desprende de las reflexiones que expresan sobre el curso en el que han estado implicados y de interpretar las propuestas presentadas en el curso correspondiente	TRfc1	Opinar sobre la enseñanza/aprendizaje del curso presentado	Anotar la opinión que han tenido sobre la enseñanza/aprendizaje del curso realizado (A4.1)	CC, CP, CO
			Señalar la opinión sobre los contenidos y metodología mostrada (A4.2)	CC, CP, CO
Objetivo 5:	Tareas y actividades ya señaladas			CC, CP, CO

Establecer perfiles de profesores/as en relación con las concepciones de la enseñanza/aprendizaje, los conocimientos que se reflejan y la enseñanza que se imparte en las clases de la ESO de los contenidos geométricos implicados en el estudio		

Tabla 2.1. Objetivos, tareas y actividades de nuestro estudio

Cabe aclarar los códigos que se incluyen en la columna de las tareas. La primera componente hace referencia a que se está trabajando una tarea; se le ha designado con la letra T. Las siguientes letras especifican el objetivo al que se refiere la tarea reflejando con Cc (concepciones y creencias), Cg (contenidos geométricos de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones), Ecg (enseñanza de los contenidos geométricos de la descripción y la clasificación), Rei (recursos procedentes de la investigación) y Rfc (reflexión del curso). Para el objetivo 3 hemos asociado los códigos Ecg y Rei para distinguir si las tareas implican o no recursos que proceden de la investigación y a los que se puede acceder en la red (Rei). La última componente indica el número de la tarea dentro del objetivo correspondiente siendo 1 para la primera tarea, 2 para la segunda y así sucesivamente. En el capítulo de la revisión bibliográfica describimos también los trabajos que hemos propuesto como recursos en las tareas en las que se propone un debate, análisis y/o reflexión o que sirven como soporte para encajar las cuestiones que se plantean en las tareas correspondientes.

En relación con el código utilizado para la actividad, igualmente que se ha hecho con la tarea, la primera letra A hace mención a que se está refiriendo a una actividad. El primer número muestra el objetivo al que se refiere y el segundo el orden que ocupa la actividad dentro del objetivo.

Asimismo, las abreviaturas de la columna de la encuesta/ cursos hacen referencia a si las tareas y/o cuestiones se plantean incluidos en la encuesta (E) o en los diferentes tipos de curso usados en el estudio como instrumento para la toma de datos (CC, CP, CO).

Las tareas asociadas a la problemática 1 son el inicio de nuestro estudio con las que se indagaba mediante una serie de cuestiones sobre la idea que se tiene de la geometría, la importancia que se le daba a esta materia en las clases y sobre por dónde se empezaba su enseñanza. Asimismo, con ellas también se pretendía obtener información sobre: i) la enseñanza de la geometría en la ESO en relación con otros bloques temáticos del currículum de la ESO o considerando diferentes áreas de la geometría, o ii) las razones que se aportan sobre por qué enseñar o no la geometría del currículum. La figura 2.31 muestra un extracto de esta tarea.

TCc1

1.- ¿Qué le viene a la cabeza cuando escucha la palabra geometría? Razone la respuesta.
2.- ¿Le gusta la geometría? ¿Le resulta interesante? Explique sus respuestas.
3. ¿Cree usted que la geometría tiene relación con el entorno cotidiano? ¿Qué aplicaciones destacaría de la geometría en la vida real? Explique las respuestas.
4.- ¿Cree usted que la geometría se relaciona con las otras áreas de la Educación Secundaria Obligatoria? Si su respuesta es afirmativa, ¿qué relaciones destacaría?
5.- ¿Cree usted que a sus alumnos le gusta la geometría? Explique su respuesta.
6.- ¿Cree usted que los alumnos traen la suficiente preparación en geometría cuando entran en la ESO? ¿Y cuando llegan al curso que usted imparte? Explique sus respuestas.
7.- Indique brevemente aquellos contenidos geométricos que usted considera que se deberían haber tratado en primaria y que los considera imprescindibles para abordar con éxito la geometría en la ESO.
8.- ¿Cree usted que los alumnos traen la suficiente preparación en geometría cuando entran en la ESO? Explique su respuesta.
9.- ¿Cómo iniciaría usted el estudio de la geometría en sus clases, a partir de los sólidos o con el estudio de las figuras planas? ¿Y en la enseñanza primaria? Explique sus respuestas.

Figura 2.31. Extracto de la tarea TCc1

En la tabla 2.1 y desde la figura 2.31 puede notarse que las tareas y las actividades que se proponen en los diferentes cursos no coinciden. Esto se explica, por un lado, porque estos tienen características diferentes, como hemos subrayado en el capítulo 1 (sección 1.7) y, por otro, porque los cursos los consideramos como instrumento de toma de datos; lo que tratamos en ellos queda condicionado por la información obtenida con los otros instrumentos (cuestionario o cursos) en relación con las diferentes problemáticas objeto de estudio. Asimismo, se ha de subrayar que, como la tarea se aplicaba en diferentes cursos y podía conllevar actividades diferentes, se ha decidido en determinados momentos dividir la tarea en subtareas más específicas.

Las subtareas se han codificado de manera que quede reflejado la tarea a la que pertenece y el trabajo del que se ha tomado la subtarea correspondiente. Las iniciamos con la letra S para indicar que es una subtarea. Seguidamente y separada por un guion el código de la tarea a la que pertenece. Finalmente, y tras otro guion el trabajo del que se ha tomado, indicado por una o dos letras, y la numeración que les hemos asignado. Cuando esté tomado de un trabajo de investigación la primera letra indicará el autor/a de dicha investigación, por ejemplo, usaremos G para los trabajos de Guillén, F para los de Fielker…, L, si las subtareas se encajan en libros de texto, C si se refieren al currículo. Por ejemplo, la subtarea codificada por S-TEcg2-G1 expresa que es una subtarea de la tarea TEcg2 diseñada a partir de un trabajo de Guillén y que la designamos como 1. Cuando se pregunta de forma general sin tener ningún documento como base se ha indicado la parte final solo con un número.

Para aclarar lo anterior vamos a referirnos a continuación a algunas subtareas.

Las asociadas a la problemática 2 constituyen en muchos casos un contexto- situación matemática de partida para el estudio y el uso de algunos contenidos geométricos, como muestra la subtarea S-TCg1-G2 del anexo 3, figura A3.2. Esta subtarea conlleva la actividad matemática para el profesorado participantes de relacionar formas geométricas con las propiedades que tienen. El contenido geométrico que se requiere se refiere a conceptos geométricos, procesos matemáticos y relaciones entre conceptos geométricos.

Esta subtarea permite trabajar aspectos ligados a la descripción, clasificación y demostración. Para resolverla se requieren conocimientos sobre los prismas, sobre los elementos de los prismas, como, por ejemplo, ángulo diedro, vértice, altura, etc.; se tiene que diferenciar diagonal de las caras de diagonal del sólido, conocer determinadas propiedades de los prismas….

El cuestionario que se incluye en la tarea S-TCg2-2 de la figura 2.32, en relación con el establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos, que se entregó para el curso CO, se apoyaba para su elaboración por una parte en parte en un recurso (Guillén, 1991, pp. 80-85) y, por otra parte, en los contenidos que conocía el profesorado.

S-TCg2-2

- ¿Qué relaciones se establecen entre los diferentes poliedros, por ejemplo, entre el cubo y la pirámide?
- ¿Qué relaciones se establecen entre los diferentes cuerpos de revolución, por ejemplo, entre el cono y el cilindro?
- ¿Qué relaciones se establecen entre los elementos del plano y del espacio, por ejemplo, truncando la esquina de un cubo obtengo como sección un triángulo equilátero?
- ¿Qué relaciones se establecen entre los elementos del plano, por ejemplo, entre el triángulo equilátero y el hexágono regular?

Figura 2.32. Cuestionario de la subtarea S-TCg2-2 diseñado para el establecimiento de relaciones

Las tareas/subtareas asociadas a la problemática 3 se proponen en algunos casos a partir de un cuestionario, que en algunos casos se soporta con alguno de los trabajos usados como recurso. Por ejemplo, las subtareas S-TEcg1-G5 y S-TEcg2-1 que se muestran en las figuras 2.33 y 2.34 respectivamente muestran extractos de los cuestionarios que se entregaron al profesorado colaborador del curso CC al tratar la descripción.

S-TEcg1-G5

- El artículo de Guillén (2004, pp. 119-123) sobre la descripción plantea distintos tipos de análisis a la hora de describir ¿Los lleva a cabo en la enseñanza? Si es que sí, ¿Cómo los plantea a los alumnos?
- ¿Utiliza procedimientos de construir o generar sólidos que puedan facilitar la descripción/análisis? Si es que sí ponga ejemplos de cómo los lleva a cabo.
- ¿Presenta diferentes situaciones en las que está implicada la descripción de las formas? ¿Por qué?
- ¿Varía la representación física de un objeto cuando lo tienen que describir?

Figura 2.33. Cuestionario mostrado en la subtarea S-TEcg1-G5 a partir del recurso Guillén (2004), pp. 119-123)

La figura 2.33 se pregunta en relación con un recurso, en este caso hace referencia al estudio que se hace en Guillén (2004) de la descripción, mientras que en la figura 2.34 se pregunta considerando la experiencia que tiene el profesorado participante en la enseñanza de la geometría en la ESO.

S-TEcg2-1

- ¿Qué elementos de los poliedros considera en la enseñanza de los sólidos en clase?
- Especifique si no lo ha hecho qué tipo de ángulos y diagonales considera en la enseñanza de los sólidos en clase.
- ¿Propone a discusión en clase los términos “caras iguales”, “caras del mismo tipo”, “vértices iguales” y “vértices del mismo orden” dentro de un sólido?
- ¿En su enseñanza de la geometría en clase incluye los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides? ¿Cuáles aborda en clase?
- En clase, a la hora de tratar los poliedros, hace hincapié: ¿En el mínimo número de caras y aristas que se requieren como mínimo para formar un poliedro? ¿En las caras que bordean a una cara dada? ¿En las caras o aristas que se juntan en un vértice? ¿En las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que existen entre los elementos de un determinado tipo (caras, vértices y aristas), o entre parte de estos (caras laterales y bases, o aristas laterales y aristas de las bases)? En su enseñanza de estas familias de sólidos, ¿en qué se centra principalmente?

Figura 2.34. Cuestionario mostrado en la subtarea S-TEcg2-1 a partir de la experiencia docente

Las tareas/subtareas asociadas a la problemática 3 se proponen también después de haber planteado previamente una tarea asociada a la problemática 2 y/o se pueden incluir tareas/subtareas asociadas a ambas problemáticas en el mismo cuestionario, como se muestra en el cuestionario que planteamos en CO en relación con la clasificación (figura 2.35). En este último caso el código será el de las dos tareas o subtareas que trata, separadas por una barra inclinada, TCg3/S-TEcg1-1.

TCg3/S-TEcg1-1

- En relación con los sólidos:
  a) ¿Cómo clasifica o clasificaría los sólidos? Explique en que se basa para realizar esa clasificación.
  b) ¿Cómo clasifica o clasificaría los poliedros? Explique en que se basa para realizar esa clasificación.
  c) ¿Cómo clasifica o clasificaría los prismas? Explique en que se basa para realizar esa clasificación.

- Imagínese que tiene una semana para trabajar la clasificación en clase, es decir, 3 ó 4 horas:
  a) ¿Qué se le ocurre que podría trabajar?
  b) ¿Qué tipo de actividades propondría? Especifique al menos 5 tipos de actividades que propondría.

- Ahora imagine que tiene el problema inverso, solo tiene una clase, es decir, 1 hora:
  a) ¿Qué se le ocurre que podría trabajar?
  b) ¿Qué tipo de actividades propondría? Especifique al menos 2 tipos de actividades que propondría.

- En realidad:
  a) ¿Qué trabaja realmente en clase, es decir, cómo lleva a cabo la clasificación en clase?
  b) ¿Por qué trabaja realmente lo especificado anteriormente?

Figura 2.35. Cuestiones planteadas en la subtarea TCg3/S-TEcg1-1

En ciertos casos se tratan dos o más problemáticas en una misma subtarea, por ejemplo, cuando se plantea un problema. La subtarea S-TCg1-P2 incluida en el anexo 1, en la figura A1.2, planteada en los cursos CP y CO, da cuenta de ello al trabajar contenidos geométricos y su enseñanza.

Puede notarse que en él se incluye una situación real como contexto. Al resolver la tarea los conocimientos geométricos se aplican estos a un problema real. Plantea una situación en un contexto relacionado con los/as alumnos/as, el colegio, y está diseñada para llevarla a cabo con el alumnado de 3º ESO. Las distintas preguntas que se van haciendo conducen a la resolución de la subtarea correspondiente y a estudiar, considerando la opinión del profesorado participante, aspectos referidos a la enseñanza de los contenidos geométricos implicados en el proceso de resolución.

Así pues, puede notarse que en las cuestiones que se plantean, en cuestionarios, referidas a algún recurso y/o en relación con otras tareas, hay algunas que se refieren a contenidos geométricos y otras a su enseñanza y que estas pueden presentarse entremezcladas. Cabe señalarse también que algunas se refieren a diferentes contenidos (descripción, clasificación, …) y que hay diferentes cuestiones relativas a los contenidos y a su enseñanza. La tabla 2.2 sintetiza y registra esta información, distinguiendo en tres bloques según que se refieran a creencias, contenidos geométricos o a su enseñanza, y refleja el instrumento de datos en el que se utiliza.

<table>
<tr><th>Código</th><th colspan="2">Cuestiones que se proponen sobre</th><th>Problema P/ cuestionario C/ recurso R</th><th>Encuesta/curso</th></tr>
<tr><td>CCcG1</td><td rowspan="8">Las concepciones y creencias que tienen los/as profesores/as de</td><td>El/la profesor/a y la geometría</td><td rowspan="4">C</td><td rowspan="4">E, CC</td></tr>
<tr><td>CCcG2</td><td>El/la alumno/a y la geometría</td></tr>
<tr><td>CCcG3</td><td>El/la profesor/a en relación con sus compañeros/as de trabajo y la geometría</td></tr>
<tr><td>CCcG4</td><td>La enseñanza de la geometría</td></tr>
<tr><td>CCcG5</td><td>El significado de:
a) describir
b) clasificar</td><td>C</td><td>CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCcG6</td><td>La importancia de la descripción y la clasificación en la enseñanza</td><td>C</td><td>CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCcG7</td><td>¿La enseñanza de la descripción y la clasificación como contenido de geometría de la ESO? ¿Qué contenidos?</td><td>C</td><td>CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCcG8</td><td>Las situaciones en que se aplica:
a) la descripción de los sólidos
b) la clasificación de los sólidos</td><td>C</td><td>CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCD1</td><td rowspan="5">Los contenidos geométricos que tiene de</td><td>La definición de los elementos de los poliedros</td><td>C</td><td>E (solo nombra), CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCD2</td><td>La descripción de las formas o familias de formas geométricas</td><td>P/C/R</td><td>CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCRl1</td><td>Las relaciones entre los elementos de los poliedros</td><td>C</td><td>E, CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCRl2</td><td>Las relaciones entre las formas geométricas</td><td>C</td><td>E, CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CCCl1</td><td>La clasificación de las formas geométricas</td><td>C</td><td>E, CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CED1</td><td rowspan="3">La enseñanza en relación con:</td><td rowspan="2">La forma de introducir la enseñanza de la descripción y la clasificación de los elementos y formas geométricas</td><td rowspan="2">C</td><td rowspan="2">CC, CP, CO</td></tr>
<tr><td>CECl1</td></tr>
<tr><td>CED2</td><td></td><td>C</td><td>CC, CP, CO</td></tr>
</table>

CECl2		La forma de llevar a cabo la enseñanza de la descripción y clasificación de los elementos y formas geométricas		
CED3 CECl3		Objetivos de la enseñanza de la descripción y la clasificación	C	CC, CP, CO
CERp1		Los materiales utilizados en la enseñanza de las formas geométricas	C/R	CC, CP, CO
CERp2		Las representaciones gráficas de las formas geométricas que usa como soporte para la descripción y la clasificación	C/R	CC, CP, CO
CERp3		Las construcciones las de formas geométricas que lleva a cabo para de describir y clasificar	C/R	CC, CP, CO
CERl1		Las relaciones de los elementos geométricos y las formas geométricas que muestra cuando describe y clasifica	C/R	CC, CP, CO
CED4 CECl4		Los elementos que enseña en clase de los poliedros para describir y clasificar	C	CC, CP, CO
CED5 CECl5		Las formas geométricas que describe y clasifica en clase	C	CC, CP, CO
CED6 CECl6		Los principales ejercicios que plantea en clase referentes a la descripción y a la clasificación	C	CC, CP, CO
CED7 CECl7		El alumnado desde el punto de vista del profesorado en la enseñanza/aprendizaje de la descripción y la clasificación	C	CC, CP
CED8 CECl8		Las dificultades y errores que tiene el alumnado en la descripción y la clasificación	C	CO
CEI1		La opinión sobre los materiales que se proponen las investigaciones	R	CC, CP, CO
CEI2		La opinión sobre las representaciones que se proponen las investigaciones	R	
CEI3		Lo que proponen las investigaciones sobre los elementos y las formas geométricas que se pueden describir	R	
CEI4		La opinión sobre las clasificaciones que plantean las investigaciones	R	CC, CP, CO
CEI5		La opinión sobre la forma de llevar a cabo la descripción y la clasificación propuesta por las investigaciones	R	CC, CP, CO
CECu1		La opinión sobre la enseñanza/aprendizaje del curso presentado	C	CC, CP, CO

Tabla 2.2. Sobre las cuestiones que se han planteado

El código que les hemos asignado es una cuaterna. La primera componente se nombra como C, para reflejar que es una cuestión; en la segunda se refleja con una Cc si se señalan concepciones y creencias, C se refiere a contenidos geométricos y con una E si se dirige a la enseñanza de estos. En la tercera componente representamos con D, Cl, Rl, Rp, G, I y Cu si la cuestión versa sobre descripción, clasificación, relaciones, representación, geometría en general, investigaciones o el curso respectivamente. La cuarta componente indica una numeración como 1, 2, … hace referencia al orden en que se han presentado en las sesiones una vez fijadas las tres componentes anteriores señaladas.

Finalmente se va a presentar la tabla 2.3 con un resumen en el que se visualizan las tareas y subtareas que se han llevado a cabo en este estudio relacionándolas con el tipo de cuestiones que se plantean, la actividad que demanda, el recurso o recursos a partir del que se extraen y los cursos donde se plantean.

Tarea	Subtarea	Cuestiones	Actividad	Recurso	Encuesta/curso
TCc1	-	CCcG1, CCcG2, CCcG3, CCcG4	A1.1	Guillén y Figueras (2004, 2005)	E, CC
TCc2	-	CCcG5	A1.2	Guillén (2004, pp. 117- 124; 2005, pp. 120-128)	CC, CP, CO
		CCcG6, CCcG7	A1.3		
TCg1	S-TCg1-1	CCD1	A2.1	Guillén (1997, pp. 113-114, 170-175, 218-219)	E (nombra), CC, CP, CO
	S-TCg1-2	CCD2	A2.2	Imágenes/ fotografías	CC, CP, CO
	S-TCg1-3		A2.3		CC, CP, CO
	S-TCg1-G1		A2.4	Guillén (1997, pp. 319-320)	CP
	S-TCg1-G2 S-TCg1-G3		A2.5	Guillén (1991, p. 306)	CP
				Guillén (1991, p. 321)	
	S-TCg1-G4		A2.6	Guillén (1997, pp. 322-323)	CP
	S-TCg1-P1		A2.7	Hevia et al. (2007, p. 200).	CC (alguno), CP, CO
	S-TCg1-P2			Guillén (1997)	
	S-TCg1-P3			Ponte et al. (1997, p. x)	
	S-TCg1-P4			Romaguera (1996, p.50)	
	S-TCg1-P5			De Prada et al (1990, pp. 59-60)	
TCg2	S-TCg2-1	CCRl1	A2.8	Guillén (1991 pp. 62-77, pp. 80-86, pp. 90-101; 1997, pp. 183-187, pp. 241-242, pp. 353-355.	CC, CP, CO
	S-TCg2-2	CCRl2	A2.9		E, CC, CP, CO

				pp. 401-402; 2010, pp. 30-36)	
TCg3	-	CCCl1	A2.10	No hay recursos	E, CC, CP, CO
TEcg1	S-TEcg1-1	CED1, CECl1, CED2, CECl2, CED3, CECl3	A3.1, A3.2	Guillén (1997, pp. 148-150; 155-164, 181-187, 196-201, 209-216, 232-253, 300-307, 318-324, 341-342, 346-362, 393-404)	CC, CP, CO
			A3.3		
			A3.4		
	S-TEcg1-2	CERp1	A3.5	Guillén (1997, pp. 116-132)	E, CC, CP, CO
		CERp2	A3.6	Guillén (1997, pp. 148-150; 155-164, 181-187, 196-201, 209-216, 232-253, 300-307, 318-324, 341-342, 346-362, 393-404)	CC, CP, CO
		CERp3			CC, CP, CO
		CERl1			CC, CP, CO
	S-TEcg1-L	CED1, CECl1, CED2, CECl2, CED6, CECl6	A3.7	Álvarez et al. (2007a, pp. 229-244), Álvarez et al. (2007b, pp. 171-190), Álvarez et al. (2008, pp. 207-240), Colera y Gaztelu (2007, pp. 230-232, p. 237), Colera y Gaztelu (2008, pp. 186-218), Colera et al. (2007, pp. 222-245); Anzola et al. (2007, 264-281), Anzola et al. (2008, 240-281) y Vizmanos et al. (2007, pp. 168-187)	CP
TEcg2	S-TEcg2-1	CED4, CECl4	A3.8	No hay recursos	CC, CP, CO
		CED5, CECl5	A3.9		

	S-TEcg2-P2	CED1, CECl1 CED2, CECl2 CED3, CECl3 CED4, CECl4 CED5, CECl5	A3.10	Guillén (1997)	CC, CP, CO
	S-TEcg2-P3			Ponte et al. (1997, p. 79)	
	S-TEcg2-P4			Romaguera (1996, p.50)	
	S-TEcg2-P5			De Prada et al (1990, pp. 59-60)	
	S-TEcg2-2	CED7, CECl7	A3.11	Climent (2002, pp. 63-65)	CC, CP
	S-TEcg2-3	CED8, CECl8	A3.12	Guillén (2000)	CO
TRei1	S-TRei1-1	CEI1, CEI2, CEI3, CEI4	A3.13	Guillén (2004, 2010), Alsina et al. (1998)	CC
	S-TRei1-2		A3.14	Guillén (1991)	CC, CP, CO
	S-TRei1-3		A3.15	Guillén (1997)	CC
	S-TRei1-4		A.3.16	Guillén (1991), Rey (2004)	CC
	S-TRei1-5		A3.17	Guillén (1991, 1997, 2000, 2004)	CC, CP, CO
TRei2	S-TRei2-1	CEI5	A3.18	Guillén (2005)	CC, CP, CO
	S-TRei2-2		A3.19	Guillén (1997)	CC
	S-TRei2-3		A3.20	Fielker (1987a, 1987b)	CC, CP, CO
	S-TRei2-4		A3.21	Guillén (1997, 2005), Fielker (1987a, 1987b)	CC, CP, CO
TRfCu1		CECu1	A4.1 A4.2	Recursos presentados	CC, CP, CO

Tabla 2.3. Resumen de lo planteado en la encuesta y cursos

Para finalizar este apartado vamos a sintetizar parecidos y diferencias entre las tareas y cuestiones planteadas en las diferentes secciones de la encuesta y en los diferentes cursos impartidos. Explicamos también las razones que hemos contemplado para ello.

En relación con la parte de la encuesta sobre creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones de la geometría, así como la que hacía referencia a la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria Obligatoria, solo hemos ampliado la información aportada por el profesorado que realizó la encuesta con la del profesorado del curso en comunidad. El plantear estas cuestiones también en este curso permitía que se respondieran de forma individual en clase y después se debatieran en parejas. Asimismo, y dado que el profesor director estaba presente, se podría averiguar si el profesorado participante encontraba dudas en las preguntas formuladas.

Si nos centramos en los contenidos de geometría, ya hemos indicado al describir la encuesta que con la sección denominada “El profesor y el currículum de geometría” se pretendía que los/as profesores/as de secundaria aportaran información sobre qué contenidos geométricos enseñan en sus clases y qué procedimientos utilizan, qué contenidos geométricos consideran más o menos importantes de los que imparten en sus clases, y qué contenidos seleccionan como los que tiene que conocer el alumno para si no se conocen se considere que se tiene bajo rendimiento en geometría en el curso correspondiente. En los cursos impartidos tratamos de que los/as profesores/as aportaran también información sobre los contenidos que impartían en sus clases referentes a la descripción y a la clasificación. Por una parte, pretendíamos que de forma general señalaran la idea que tienen de la descripción y la clasificación, la importancia que asignan a la enseñanza/aprendizaje de estos procesos matemáticos, la finalidad que les asocian, las situaciones que ellos proponen para trabajarlos en sus clases, así como las aplicaciones que mencionan para el estudio de otros contenidos. Las cuestiones se plantearon para los tres cursos antes de realizar cualquier explicación.

Por otra parte, con los cursos también tratamos de ampliar información sobre las formas geométricas que se describían o clasificaban, así como sobre los elementos implicados en las descripciones que se proponían. Las preguntas de la encuesta fueron encaminadas, por ejemplo, a que indicaran qué elementos de los poliedros han tenido en cuenta para su descripción o qué familias de poliedros han descrito. Sin embargo, en los cursos, ahondamos más y preguntamos además que se expresaran ideas/definiciones sobre determinadas familias de sólidos y sobre sus elementos. Además, también les preguntamos sobre algunos elementos que algunos/as docentes no consideran, para examinar las ideas que se tienen de ellos.

Si nos centramos en la parte referente a las relaciones entre las formas geométricas, las cuestiones fueron muy similares en la encuesta y los cursos realizados. Cabe señalar que estas cuestiones en los cursos las hemos acompañado de ejemplos para facilitar la respuesta del profesorado.

Las cuestiones que en la encuesta en el ítem 16 se plantearon de una forma general, preguntando si se reconocían y describían los poliedros: prisma, paralelepípedo, ortoedro, pirámide, tronco de pirámide, poliedros regulares y poliedros duales, en los cursos las hemos ampliado para profundizar sobre el conocimiento que se tiene de estos contenidos y las propuestas que hacen en sus clases para su enseñanza/aprendizaje. Una forma de complementar las cuestiones teóricas, referentes a los contenidos y enseñanza de los procesos matemáticos, de la encuesta ha sido proponiendo en los cursos diferentes tipos de tareas/ejercicios que el profesorado participante tenía que realizar. El tipo de tareas planteadas se explica desde la forma que se tenía de trabajar en los cursos y al fijarnos en los objetivos que se tenían considerando que se iba complementando la información obtenida con los cursos ya impartidos.

En el curso en comunidad, los/as profesores/as participantes pueden debatir los problemas entre todos los participantes, con lo que al proponerles la tarea no se pretendía que se resolvieran los problemas sino obtener una idea de los contenidos que los/as profesores/as especificaban como que se podían trabajar a partir de ellos y a partir de las cuestiones (véase la figura 2.36) conocer también su opinión personal sobre la enseñanza de contenidos geométricos en el contexto de resolución de problemas. Asimismo, los comentarios de estos/as profesores/as sobre los problemas propuestos en el curso se han tenido en cuenta para seleccionar los que planteamos en los otros cursos, así como las cuestiones correspondientes. En los cursos presencial y online sí se presentaron los problemas para que los/as profesores/as los resolvieran junto con las cuestiones para que expresaran su opinión sobre cómo se consideraba la resolución de problemas como contexto soporte para encajar cuestiones relativas a contenidos geométricos (véase la figura 2.36). Cabe aclarar también que el curso presencial facilita el que previo a que el profesorado resuelva los problemas haya un pequeño debate entre el profesorado (véase la figura 2.36), mientras que en el online los problemas se resolvieron individualmente de forma escrita. Esto ha hecho que, en el curso presencial, a diferencia del curso online, se hayan podido aclarar algunas dudas surgidas en la contestación de las preguntas por parte del profesor director o entre el mismo profesorado participante, así como aclarar alguna respuesta cuando ha sido necesario.

En la figura 2.36 mostramos las preguntas que se plantearon al profesorado del curso en comunidad en la subtarea S-TCgl-P3 (figura A1.3 del anaexo1), parte del debate que se llevó a cabo en el curso presencial y las cuestiones que se plantearon para los cursos presencial y online en esta misma tarea.

Preguntas para la subtarea S-TCgl-P3 en el curso en comunidad:

- Opinión sobre el problema y si sería conveniente llevarlo al aula.
- ¿En qué parte de la geometría plantearía este problema?
- ¿Qué objetivos y contenidos se podrían tratar con este problema?

Parte del debate llevado a cabo en el curso presencial:

PD: Quiero que leáis el siguiente problema que trata sobre un embalaje ideal y me preguntéis las dudas que tengáis sobre él antes de contestar las cuestiones.
PP2: Por lo que veo se han tener en cuenta bastantes requisitos para fabricar el embalaje.
PP3: Sí, yo considero que hay demasiados.
PD: Se trata de que valoréis la forma geométrica que le darías al embalaje para que cumpla esos requisitos.
PP1: Pero, ¿hay algún requisito de los propuestos que sea más importante?
PD: No, pensad a qué le darías más importancia dentro de esos requisitos para que os acepten vuestra propuesta.
PP3: Considero que el requisito en que nos centremos como principal va a marcar la solución del embalaje, pero no sé cuál coger.
PP1: Sí, por eso voy pensar en que me voy a centrar.
PP2: A mí me cuesta decidirme por cual empezar.
PP4: A mí también.

Preguntas para la subtarea S-TCDCl-P3 en los cursos presencial y online:

- Elabore un breve informe en que presente a la fábrica de cosméticos el embalaje que considere más adecuado y el nombre que le pondría, de modo que convenza al cliente de las ventajas de la solución que propone con base a los estudios realizados y que cumpla los requisitos planteados.
- ¿Cómo les explicaría a sus alumnos los pasos a seguir para llevar a cabo el diseño del embalaje presentado cumpliendo las condiciones planteadas?
- ¿Cómo le ha parecido este problema para llevarlo al aula de secundaria? ¿Por qué?
- ¿Lo llevaría a partir de ahora al aula? ¿Por qué?
- ¿Qué contenidos de geometría cree usted que se podrían tratar con este problema? ¿Por qué?
- ¿Qué competencias se podrían trabajar con este problema? ¿Por qué?

- ¿Qué piensa que sería más conveniente explicar antes los contenidos geométricos y después llevar a cabo el problema o plantear el problema y a partir de él explicar los contenidos geométricos? ¿Por qué?
- ¿Qué preguntas le haría usted a los alumnos a partir de este problema?
- ¿Qué le ha llamado la atención de este problema?

Figura 2.36. Preguntas, debates y cuestiones llevadas a cabo en los diferentes cursos

2.3 Registro de datos y criterios para el análisis

La recogida de datos se ha realizado mediante diversos métodos. Por un lado, a partir de las respuestas y comentarios que escribieron los/as profesores/as a los que se les entregó la encuesta proponiéndoles que se respondiera en casa y que se devolviera con las respuestas lo antes posible. También, se hizo alguna entrevista personal para aclarar algunas respuestas por su brevedad o porque considerábamos interesante tener más explicaciones sobre ellas.

Por otro lado, en los cursos presenciales CC y CP, los datos los obtuvimos mediante las respuestas, orales y por escrito, del profesorado participante a las tareas propuestas. Para las contestaciones orales se dispuso de grabadoras de voz que se distribuyeron por las mesas de forma que se recogieran las conversaciones sobre las preguntas planteadas. Cabe señalar que también se recogió información a través de la observación que realizó el profesor director. Por lo que respecta a al curso CO la toma de datos se llevó a cabo a partir de las respuestas a cuestionarios que enviaron a través de la plataforma que se utilizó para realizar el curso y de algunas preguntas/aclaraciones que enviaron por correo electrónico algunos/as profesores/as participantes.

Al igual que en trabajos previos (Pérez y Guillén, 2007, 2008), los elementos básicos para el análisis de las respuestas dadas por el profesorado a las cuestiones planteadas han sido "expresiones de los docentes" que caracterizamos como Barrantes y Blanco (2004, p. 245) definen las unidades de análisis: son palabras o conjuntos de ellas procedentes de las respuestas, que constituyen un fragmento de texto de unidad variable, dependiendo de la extensión con que se hable de la cuestión o discusión planteada. Puede ser una oración o un conjunto de oraciones que no tienen por qué coincidir con las respuestas completas de los docentes. Estas expresiones las distinguíamos y/o agrupábamos a su vez en función de a qué hacían referencia.

Los criterios que hemos considerado para realizar el análisis de los datos obtenidos los vamos a presentar según el instrumento utilizado para la obtención de los mismos. Así, en el apartado 2.3.1 indicamos las categorías establecidas para el análisis de los datos que provienen de las respuestas a la encuesta. En el apartado 2.3.2 presentamos los descriptores usados como referente para el análisis de los datos que provienen de los diferentes cursos implementados en el estudio. El apartado 2.3.3 se centra en el análisis de datos extraídos de trabajos teóricos; incluye características que asignamos a diferentes perfiles de profesores/as relativas a su concepción de la geometría y su enseñanza en la ESO y a la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos tratados en los cursos.

2.3.1 El análisis de datos obtenidos a partir de una encuesta: Plantillas y categorías de respuesta

En Pérez y Guillén (2007, 2008) ya hemos dado cuenta de cómo hemos registrado y analizado los datos obtenidos a partir de la encuesta. A continuación, solo vamos a dar breves pinceladas sobre ello.

Trabajando conjuntamente los autores de estos trabajos, realizamos un primer nivel de análisis de las respuestas dadas por el profesorado a las preguntas del cuestionario, utilizando "plantillas" que para cada ítem habíamos diseñado en un estudio previo. Para las respuestas de algunos ítems elaboramos categorías de respuestas al centrar la atención en aquellos aspectos que reflejaban grupos de formas de comunicar las respuestas a la pregunta correspondiente.

Como ejemplo de categorías, subcategorías y clases de respuesta, en la figura 2.37 señalamos las que tomamos de Guillén y Figueras (2004) y utilizamos para registrar las respuestas del profesorado al ítem 16 de la encuesta, al considerar las razones que se seleccionaron para explicar por qué se impartían o no los contenidos específicos, tanto en la situación real como en una ideal en la que se dispusiera de tiempo suficiente para la enseñanza de contenidos geométricos en la ESO.

Categorías, subcategorías y clases para las respuestas al ítem 16 (Contenidos geométricos)
Categoría I – Curso.
Subcategoría I.1 – Secundaria.
Clase I.1.1 - Está en el programa.
Clase I.1.2 - No está en los libros de texto.
Subcategoría I.2 – Bachillerato.
Subcategoría I.3 – Curso en que se enseña o se debería enseñar.
Clase I.3.1 – Primer ciclo ESO.
Clase I.3.2 – Segundo ciclo ESO.
Clase I.3.3 – Primer y segundo ciclo ESO.
Subcategoría I.4 – Primaria.
Categoría II – Contenido.
Subcategoría II.1 – Imparten o no imparten o no impartirían por alguna razón.
Clase II.1.1 – Impartidos totalmente.
Clase II.1.2 – Impartidos parcialmente.
Subcategoría II.2 – Se hace referencia a lo importante que es el contenido para otros.
Clase II.2.1 – Se necesita para otros contenidos.
Clase II.2.2 – Se necesita para contenidos del bachillerato.
Subcategoría II.3 – Se hace referencia a un contenido de otra asignatura.
Subcategoría II.4 – Se hace referencia a la utilidad del contenido en la vida real.
Clase II.4.1 – Muy útil en la vida real.
Clase II.4.2 – No tiene utilidad.
Subcategoría II.5 – Se debe conocer de cursos anteriores.
Categoría III – Materiales.
Subcategoría III.1 – Se hace referencia a la disponibilidad del material para los contenidos.
Clase III.1.1 – No disponemos del material.
Clase III.1.2 – Disponemos del material.
Subcategoría III.2 – Se hace referencia a la disponibilidad de un material alternativo.
Clase III.2.1 – Utiliza otro tipo de material.
Clase III.2.2 – El dibujo.
Categoría IV – Dominio.
Subcategoría IV.1- Dominio de algún conocimiento o contenido geométrico.
Clase IV.1.1 – Falta de dominio.

Clase IV.1.2 – Tengo Dominio.
Subcategoría IV.2- Formación.
Clase IV.2.1 – Falta de formación.
Clase IV.2.2 – Apoyos para formarse.
Categoría V – Alumnos.
Subcategoría V.1 – Dificultades.
Subcategoría V.2 – Gusto.
Subcategoría V.3 – Capacidades.
Categoría VI – Tiempo.
Categoría VII – Gusto.
Subcategoría VII.1 – No es de mi agrado.
Subcategoría VII.2 – Si es de mi agrado.
Categoría VIII – Clase.
Categoría IX – Sin señalar razones.

Figura 2.37. Categorías, subcategorías y clases para las respuestas al ítem. Fuente: Guillén y Figueras (2004, pp. 224-225)

Asimismo, en la tabla 2.4 mostramos cómo se han registrado en una plantilla las respuestas dadas por uno de los/as profesores/as de la encuesta (docente PE3) para uno de los contenidos geométricos que contempla en currículo de secundaria de la ESO (contenido codificado previamente como II.1). Esto es, indicó que lo había impartido, que lo consideraba importante (por eso en la columna de la valoración hay un 2) y que lo impartiría. La subcategoría que le asignamos es la V.3 porque para el contenido II.1 ha seleccionado la opción que indica que los/as alumnos/as desarrollan capacidades.

Docente	Situación actual ÍTEM II.1				Docente	Situación ideal ÍTEM II.1			
PE3	Impartido		No Impartido		PE3	Impartiría		No impartiría	
	Todo	Parte	Sin Explicar	Razones		Categoría	Valor	Categoría	Valor
	X					V.3	2		

Tabla 2.4. Registro de las respuestas del/de la docente PE3 al contenido II.1

Cabe comentar también las “plantillas” utilizadas para registrar las respuestas al ítem 17. Por ejemplo, la plantilla correspondiente a la pregunta 17.1 “¿Qué elementos de los poliedros se consideran en su descripción?”, incluía como posibilidades que se hiciera referencia a los elementos que los componen (caras, vértices y aristas), a otro tipo de elementos análogos a los de las figuras planas (ángulos, diagonales, altura, generatriz, etc.) o a elementos que reflejaban que se hacía un análisis local (centrando la atención en parte de las caras, como por ejemplo, bases, caras que concurren en los vértices, caras que bordean una cara, etc.) o global (se tiene en cuenta el poliedro como un todo; por ejemplo, secciones que dividen a un poliedro en dos partes iguales, planos de simetría, ejes de rotación, etc.).

2.3.2 Los cursos: descriptores para el análisis de los datos

Para el análisis de los datos obtenidos mediante estos instrumentos los descriptores los elaboramos a partir de los trabajos que componen nuestro marco teórico y que hemos descrito brevemente en el capítulo 1. Para registrar las respuestas, al igual que para los datos obtenidos mediante la encuesta, confeccionamos plantillas y categorías de respuestas, que hacen referencia a las contestaciones de los/las docentes a las cuestiones planteadas, de las que vamos a informar en los subapartados 2.3.2.1 al 2.3.2.5. Los subapartados los distinguimos según el contenido tratado en los cursos al que correspondan: la descripción (DD), clasificación (DCl), establecimiento de relaciones (DRl), representaciones (DRp) y resolución de problemas (DP).

2.3.2.1 Descriptores sobre la descripción (DD). El trabajo de Guillén (1997, 2000, 2004)

Los descriptores de la descripción los presentamos en este subapartado en 5 grupos. Vamos a considerar, por un lado, los que se refieren a ideas que se tienen sobre este proceso matemático. Por otro, hay dos grupos que permiten registrar las propiedades/definiciones de los sólidos (o familias de sólidos) que se enumeran y los elementos de estos que se consideran o centran la atención en las descripciones que se hacen de determinados sólidos y familias de sólidos. Los descriptores de un cuarto grupo se han diseñado para registrar la información obtenida a partir de las respuestas a las subtareas propuestas para tratar la descripción y, por último, hay un quinto grupo de descriptores que se centran en características relativas a la enseñanza de la descripción en la ESO.

Sobre la idea/s que se tiene/n sobre la descripción

La plantilla de la tabla 2.5 la usamos para registrar información que ha aportado el profesorado participante en nuestro estudio en relación con la idea que se tiene sobre la descripción de formas geométricas. Puede notarse que las expresiones que se han recopilado al respecto hacen referencia especialmente a “lo que se hace” al describir estas formas. Se ha expresado que a la hora de describir las formas geométricas se enuncian propiedades, se indica alguna expresión matemática que está relaciona ellas, se señala ejemplos de ellas, se indica o se explica los elementos que las componen o se dibujan las formas geométricas y/o sus elementos. El código que hemos utilizado para esta plantilla ha sido D (descriptor); D (descripción); I (aspecto que se expresa relativo a la idea que se tiene sobre la descripción); 1,2,3… numeración que nosotros asignamos.

Código	Descriptor
DDI1	Enunciar propiedades
DDI2	Indicar expresiones matemáticas
DDI3	Señalar ejemplos
DDI4	Indicar/explicar elementos
DDI5	Dibujar elementos o formas
DDI6	Otros

Tabla 2.5. Registro de respuestas a ¿Qué entiendes por descripción de formas geométricas?

Sobre las propiedades y elementos de los sólidos/familias de sólidos que se enumeran

Con la plantilla de la tabla 2.6 registramos información sobre la descripción de sólidos o familias de sólidos referida a: i) si se identifica o no el sólido o familia de sólidos correspondiente indicando o no ejemplos o contraejemplos; ii) el tipo de propiedades/definiciones que se indican y elementos de los sólidos que se identifican, y iii) el uso que se hace de la terminología empleada al hacer la descripción.

Al igual que en todas las plantillas diseñadas para registrar datos relativos a la descripción, los códigos que asignamos a las posibles opciones que delimitamos comienzan por DD, inicial que usamos de abreviaturas de descriptor y de descripción. La información i), ii) e iii) indicada en el párrafo anterior la codificamos como F si hace referencia a identificación de formas geométricas, P si se refiere a propiedades; E a elementos, D a una definición y T si tiene que ver con el uso que se hace de la terminología. Estas abreviaturas se continúan con una numeración ordenada 1, 2, 3… De las diferentes opciones que se corresponden. Finalizamos el código con C o I según que la opción correspondiente responda más o menos a los tipos de ejemplos, propiedades, definiciones... que hemos tomado como referente en nuestro trabajo y que hemos indicado en la sección 1.4 del capítulo 1. Con N o S según que se detecten incorrecciones o no. Con E o F si se engloban todas las formas o se dejan fuera subfamilias. Con J, K, L si las propiedades son de la familia elegida, de una subfamilia o no son atributos críticos de la familia elegida. Con 1, 2, 3... según el elemento de los sólidos a los que se hace referencia; y con Pa o Pi, según que se consideren clasificaciones particiones o inclusivas (Véase la tabla 2.6).

Código	Descriptor		
DDP1C	Propiedades (P)	Enuncia (explica) propiedades visuales (1)	Completa (C)
DDP1I			Incompleta (I)
DDP1N			No se detectan incorrecciones (N)
DDP1S			Se detectan incorrecciones (S)
DDP2C		Enuncia (explica) propiedades geométricas que precisan de la utilización de expresiones del tipo, como mucho, como mínimos (2)	Completa (C)
DDP2I			Incompleta (I)
DDP2N			No se detectan incorrecciones (N)
DDP2S			Se detectan incorrecciones (S)
DDP3E		Indica propiedades englobadas como propiedades de familias (3)	Engloba todas las formas (E)
DDP3F			Deja fuera subfamilias (F)
DDP4J		Las propiedades son específicas (4)	De la familia elegida (J)
DDP4K			De una subfamilia (K)
DDP4L			No son atributos críticos de la familia elegida (L)
DDP5C		Aplica propiedades relativas a la medida de determinados elementos (5)	Completa (C)
DDP5I			Incompleta (I)
DDP5N			No se detectan incorrecciones (N)
DDP5S			Se detectan incorrecciones (S)
DDP6C		Enumera propiedades relativas a su altura (6)	Completa (C)
DDP6I			Incompleta (I)
DDP6N			No se detectan incorrecciones (N)
DDP6S			Se detectan incorrecciones (S)
DDP7C		Enumera propiedades relativas a los tipos de ángulos (7)	Completa (C)
DDP7I			Incompleta (I)
DDP7N			No se detectan incorrecciones (N)
DDP7S			Se detectan incorrecciones (S)
DDP8N		Enumera otras propiedades de las formas (8)	No se detectan incorrecciones (N)
DDP8S			Se detectan incorrecciones (S)
DDE11	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Cara (1)
DDE12			Arista (2)
DDE13			Vértice (3)
DDE14			Ángulos de las caras (4)
DDE15			Ángulos diedros (5)

DDE16			Ángulos poliedros (6)
DDE17			Ángulos de los vértices (7)
DDE18			Diagonales de las caras (8)
DDE19			Diagonal del espacio (9)
DDE110			Plano diagonal de un poliedro (10)
DDE111			Plano de simetría de un poliedro (11)
DDE112			Eje de rotación de un poliedro (12)
DDE113			Otros elementos (13)
DDE2C		Indica fórmulas generalizadas para "n" elementos (2)	Completa (C)
DDE2I			Incompleta (I)
DDE2N			No se detectan incorrecciones (N)
DDE2S			Se detectan incorrecciones (S)
DDE3C		Identifica la relación de paralelismo, perpendicularidad e igualdad entre elementos (3)	Completa (C)
DDE3I			Incompleta (I)
DDE3N			No se detectan incorrecciones (N)
DDE3S			Se detectan incorrecciones (S)
DDF1N	Formas geométricas (F)	Identifica formas geométricas (1)	No se detectan incorrecciones (N)
DDF1S			Se detectan incorrecciones (S)
DDF2N		Señala ejemplos de formas geométricas (2)	No se detectan incorrecciones (N)
DDF2S			Se detectan incorrecciones (S)
DDF3N		Señala contraejemplos de formas geométricas (3)	No se detectan incorrecciones (N)
DDF3S			Se detectan incorrecciones (S)
DDD1N	Definición (D)	La definición apuntada (1)	No se detectan incorrecciones (N)
DDD1S			Se detectan incorrecciones (S)
DDD2Pa		Considera en la definición clasificaciones (2)	Particiones (Pa)
DDD2In			Inclusivas (In)
DDT1N	Terminología (T)	La terminología utilizada (1)	No se detectan incorrecciones (N)
DDT1S			Se detectan incorrecciones (S)

Tabla 2.6. Sobre qué se contempla al hacer una descripción de sólidos

Las descripciones que se hacen de determinados sólidos y familias de sólidos

Se han diseñado plantillas para registrar la información obtenida sobre la descripción de familias de sólidos determinadas: Poliedros (Po), Prismas (Pr), paralelepípedos (Pa), pirámides (Pi), octaedros no necesariamente regulares (O), tetraedros no necesariamente regulares (T), esferas (E), cilindros (Ci) y conos (Co). Las tablas 2.7 a 2.15 dan muestra de estas plantillas.

Puede notarse que mantenemos las abreviaturas utilizadas en las plantillas anteriores para reflejar que son descriptores que se refieren a la descripción (DD), que se añade la abreviatura que hace referencia a la familia de sólidos correspondiente, continuando con una P o una E según que se refieran a propiedades (P) o a elementos (E). La ordenación numérica 1,2,3… indica diferentes propiedades/elementos y con la ordenación A, B, C… especificamos dentro de una propiedad/elemento/….

Código	Descriptor		
DDPoP1	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece, los sólidos (1)	
DDPoP2		Apunta que todas las aristas son rectas (2)	
DDPoP3		Señala que en los vértices se juntan por lo menos 3 caras o aristas (3)	
DDPoP4A		Enuncia propiedades que precisarían de expresiones del tipo como mínimo referente a las caras, aristas y vértices (4)	Tiene como mínimo 4 caras (A)
DDPoP4B			Tiene como mínimo 4 vértices (B)
DDPoP4C			Tiene como mínimo 6 aristas (C)
DDPoE1A	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Cara (A)

DDPoE1B			Arista (B)
DDPoE1C			Vértice (C)
DDPoE1D			Ángulos de las caras (D)
DDPoE1E			Ángulos diedros (E)
DDPoE1F			Ángulos poliedros (F)
DDPoE1G			Ángulos de los vértices (G)
DDPoE1H			Diagonales de las caras (H)
DDPoE1I			Diagonal del espacio (I)
DDPoE1J			Plano diagonal de un poliedro (J)
DDPoE1K			Plano de simetría de un poliedro (K)
DDPoE1L			Eje de rotación de un poliedro (L)
DDPoE1M			Otros elementos (M)

Tabla 2.7. La descripción de los poliedros

Código	Descriptor		
DDPrP1A	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece (1)	Sólidos (A)
DDPrP1B			Poliedros (B)
DDPrP2		Señala que todos los vértices son de orden 3 (2)	
DDPrP3A		Identifica relaciones de paralelismo (3)	Bases paralelas (A)
DDPrP3B			Aristas laterales paralelas (B)
DDPrP4A		Identifica relaciones de igualdad y correspondencia (4)	Bases iguales (A)
DDPrP4B			Aristas laterales misma longitud (B)
DDPrP4C			Vértices de bases diferentes se corresponden (C)
DDPrE1A	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Base (polígono) (A)
DDPrE1B			Cara lateral (paralelogramo) (B)
DDPrE1C			Arista lateral (C)
DDPrE1D			Arista básica (D)
DDPrE2A		Indica fórmulas generalizadas para prisma de base “n” lados (2)	n+2 caras (A)
DDPrE2B			2n vértices (B)
DDPrE2C			3n aristas (C)
DDPrE2 D			6n ángulos de las caras (D)
DDPrE2E			3n ángulos diedros (los mismos que aristas) (E)
DDPrE2F			2n ángulos de los vértices (los mismos que vértices) (F)
DDPrE2G			n(n-1) diagonales de las caras (G)
DDPrE2H			n(n-3) diagonales del espacio (H)

Tabla 2.8. La descripción de los prismas

Código	Descriptor		
DDPaP1A	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece (1)	Sólidos (A)
DDPaP1B			Poliedros (B)
DDPaP1C			Prismas (C)
DDPaP2		Apunta que todas las caras son paralelogramos (2)	
DDPaP3		Indica que las diagonales del sólido caen siempre en el interior del sólido (3)	
DDPaP4		Señala que los ángulos de las bases (y también los ángulos de las caras) son todos ellos menores que 180° (4)	
DDPaP5		Subraya que los ángulos diedros son menores que 180° (5)	
DDPaP6		Apunta que los ángulos de los vértices son menores que 360° (6)	
DDPaP7		Marca que al prolongar cualquier lado del polígono de la base, la base queda toda ella a un lado y no corta a ningún otro lado de ella (7)	
DDPaP8		Expone que al prolongar cualquier cara del prisma, este queda todo él a un lado y no corta a ninguna otra cara del prisma (8)	

DDPaP9		Anota que se puede apoyar en cualquiera de sus caras (9)	
DDPaP10A		Indica relación de paralelismo (10)	Caras paralelas dos a dos (A)
DDPaP10B			Caras opuestas paralelas (B)
DDPaP11A		Señala relación de igualdad (11)	Caras iguales dos a dos (A)
DDPaP11B			Caras opuestas iguales (B)
DDPaP12A		Enuncia propiedades que precisarían de expresiones del tipo como mucho referente a las caras, aristas y ángulos de las caras (12)	Tiene como mucho tres medidas diferentes para las caras (A)
DDPaP12B			Tiene como mucho tres medidas diferentes para las aristas (B)
DDPaP12C			Tiene como mucho seis medidas diferentes para los ángulos de las caras (C)
DDPaP13A		Apunta que las diagonales de las caras (13)	Caen siempre en la superficie del sólido (A)
DDPaP13B			Se cortan en su punto medio (B)
DDPaP13C			Tienen como mucho seis medidas diferentes (C)
DDPaE1A	Elementos (E)	Indica que tiene el siguiente número (1)	6 caras/paralelogramos (A)
DDPaE1B			8 vértices (B)
DDPaE1C			12 aristas. (C)
DDPaE1D			24 ángulos de las caras, (D)
DDPaE1E			12 ángulos diedros (los mismos que aristas) (E)
DDPaE1F			8 ángulos de los vértices (los mismos que vértices) (F)
DDPaE1G			12 diagonales de las caras (G)
DDPaE1H			4 diagonales del espacio (H)

Tabla 2.9. La descripción de los paralelepípedos

Código	Descriptor		
DDPiP1A	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece (1)	Sólidos (A)
DDPiP1B			Poliedros (B)
DDPiP2A		Apunta el orden de los vértices (2)	Orden 3 en la base (A)
DDPiP2B			Orden "n" en el ápice (B)
DDPiP3		Anota otras (por que podría indicar de pirámides convexas, …) (3)	
DDPiE1A	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Base (polígono) (A)
DDPiE1B			Cara lateral (triángulo) (B)
DDPiE1C			Arista lateral (C)
DDPiE1D			Arista básica (D)
DDPiE1E			Vértices de la base (E)
DDPiE1F			Ápice (F)
DDPiE1G			Otros (G)
DDPiE2A		Indica el número de elementos correspondiente en concordancia con las fórmulas generalizadas para una pirámide de base "n" lados (2)	n+1 caras (A)
DDPiE2B			n+1 vértices (B)
DDPiE2 C			2n aristas (C)
DDPiE2D			4n ángulos de las caras (D)
DDPiE2E			2n ángulos diedros (los mismos que aristas) (E)
DDPiE2F			n+1 ángulos de los vértices (los mismos que vértices) (F)
DDPiE2G			n(n-3) /2 diagonales de las caras (G)
DDPiE2H			No tiene diagonales del espacio (H)

Tabla 2.10. La descripción de las pirámides

Código	Descriptor		
DDTP1A	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece (1)	Sólidos (A)
DDTP1B			Poliedros (B)
DDTP1C			Poliedro regular (C)
DDTP2A		Comenta como son las caras (2)	Triángulos no todos equiláteros (A)
DDTP2B			Regulares (B)
DDTP2C			Iguales (C)
DDTP2D			No se especifican (D)
DDTP3		Subraya que el orden de los vértices es 4 (3)	
DDTE1A	Elementos (E)	Indica que tiene el siguiente número de elementos (1)	4 caras (A)
DDTE1B			4 vértices (B)
DDTE1C			6 aristas (C)
DDTE1D			12 ángulos de las caras (D)
DDTE1E			6 ángulos diedros (los mismos que aristas) (E)
DDTE1F			4 ángulos de los vértices (los mismos que vértices) (F)
DDTE1G			Otros (planos de simetría, ejes de rotación...) (G)

Tabla 2.11. La descripción de los tetraedros (no obligatoriamente regulares)

Código	Descriptor		
DDOP1A	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece (1)	Sólidos (A)
DDOP1B			Poliedros (B)
DDOP1C			Poliedro regular (C)
DDOP2A		Comenta como son las caras (2)	Triángulos no equiláteros (A)
DDOP2B			Regulares (B)
DDOP2C			Iguales (C)
DDOP2D			No se especifican (D)
DDOP3		Subraya que el orden de los vértices es 4 (3)	
DDOE1A	Elementos (E)	Indica que tiene el siguiente número de elementos (1)	8 caras (A)
DDOE1B			6 vértices (B)
DDOE1C			12 aristas (C)
DDOE1D			24 ángulos de las caras (D)
DDOE1E			12 ángulos diedros (los mismos que aristas) (E)
DDOE1F			6 ángulos de los vértices (los mismos que vértices) (F)
DDOE1G			Otros (planos de simetría, ejes de rotación...) (G)

Tabla 2.12. La descripción de los octaedros (no obligatoriamente regulares)

Código	Descriptor		
DDEP1	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece, los sólidos (1)	
DDEP2		Apunta que tiene una cara que es curva (2)	
DDEP3		Señala que todos sus puntos están situados a una distancia menor o igual al radio (3)	
DDEP4		Indica que se genera haciendo girar una superficie semicircular alrededor de su diámetro (4)	
DDEP5		Comenta que cualquier sección plana de una esfera es un círculo (5)	
DDEP6		Especifica que cualquier sección que pasa por el centro de una esfera es un círculo máximo (6)	
DDEE1A	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Cara (A)

DDEE1B			Centro (B)
DDEE1C			Radio (C)
DDEE1D			Diámetro (D)
DDEE1E			Cuerda (E)
DDEE1F			Polos (F)
DDEE1G			Otros (G)

Tabla 2.13. La descripción de las esferas

Código	Descriptor		
DDCiP1	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece, los sólidos (1)	
DDCiP2A		Indica cómo son las dos bases que tiene (2)	Cualquier región limitada por una curva cerrada simple contenida en un plano (A)
DDCiP2B			Círculos (B)
DDCiP2C			Iguales (C)
DDCiP2D			Paralelas (D)
DDCiP3A		Señala como se generan (3)	Trasladando los puntos de una región cerrada simple contenida en un plano hacia un plano paralelo (A)
DDCiP3B			Haciendo girar una superficie rectangular alrededor de uno de sus lados (B)
DDCiP3C			Cortando una superficie cilíndrica por dos planos paralelos (C)
DDCiP4		Especifica que tienen 2 aristas curvas (4)	
DDCiE1A	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Base (A)
DDCiE1B			Cara lateral (B)
DDCiE1C			Arista (C)
DDCiE1D			Generatriz (D)
DDCiE1E			Directriz (E)
DDCiE1F			Radio (F)
DDCiE1G			Altura (G)
DDCiE1H			Eje (H)
DDCiE1I			Otros (I)

Tabla 2.14. La descripción de los cilindros

Código	Descriptor		
DDCoP1	Propiedades (P)	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los sólidos (1)	
DDCoP2A		Indica cómo es la base que tienen (2)	Cualquier región limitada por una curva cerrada simple contenida en un plano (A)
DDCoP2B			Círculo (B)
DDCoP3A		Señala como se generan (3)	A partir de los segmentos que unen un punto fijo (el vértice) no situado en el plano de la base con los puntos de la curva que delimita la base (superficie latera) y la propia base (A).
DDCoP3B			Haciendo girar la generatriz alrededor de un punto fijo (el vértice) no situado en el plano de la base (B)
DDCoP3C			Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (C)
DDCoP4		Especifica que tienen una arista curva (4)	
DDCoP5		Señala que el vértice formado por una cara que es curva (5)	
DDCoE1A	Elementos (E)	Se centra/identifica (1)	Base (A)
DDCoE1B			Cara lateral (B)
DDCoE1C			Arista (C)
DDCoE1D			Generatriz (D)
DDCoE1E			Directriz (E)
DDCoE1F			Radio (F)

<table>
<tr><td>DDCoE1G</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td><td>Vértice (G)</td></tr>
<tr><td>DDCoE1H</td><td>Altura (H)</td></tr>
<tr><td>DDCoE1I</td><td>Eje (I)</td></tr>
<tr><td>DDCoE1J</td><td>Otros (J)</td></tr>
</table>

Tabla 2.15. La descripción de los conos

Las respuestas a las subtareas propuestas: sobre la descripción de determinadas familias de poliedros

La información obtenida a partir de las respuestas dadas a las tareas planteadas relativas a la descripción, descritas en el apartado 2.2.3 de este capítulo, la hemos registrado a partir de plantillas diseñadas para cada subtarea. En las tablas 2.16 y 2.17 mostramos las correspondientes a las subtareas S-TCg1-G1 y S-TCg1-P1.

<table>
<tr><th>Código</th><th colspan="3">Descriptor</th></tr>
<tr><td>DDPTc1A</td><td rowspan="12">Tipos de caras (Tc)</td><td rowspan="3">Indica como son todas las caras correctamente (1)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPTc1B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPTc1C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPTc2A</td><td rowspan="5">Indica como es/son alguna/as caras correctamente (2)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPTc2B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPTc2C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPTc2D</td><td>No se detectan errores en la respuesta (D)</td></tr>
<tr><td>DDPTc2E</td><td>Se detectan errores en la respuesta (E)</td></tr>
<tr><td>DDPTc3A</td><td rowspan="3">No indica como es ninguna cara correctamente (3)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPTc3B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPTc3C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPTc4</td><td colspan="2">No indica como son las caras (4)</td></tr>
<tr><td>DDPOv1A</td><td rowspan="12">Orden de los vértices (Ov)</td><td rowspan="3">Indica como son todos los órdenes de los vértices correctamente (1)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPOv1B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPOv1C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPOv2A</td><td rowspan="5">Indica como es/son algún/os órdenes de los vértices correctamente (2)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPOv2B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPOv2C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPOv2D</td><td>No se detectan errores en la respuesta (D)</td></tr>
<tr><td>DDPOv2E</td><td>Se detectan errores en la respuesta (E)</td></tr>
<tr><td>DDPOv3A</td><td rowspan="3">No indica como es ningún orden de los vértices correctamente (3)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPOv3B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPOv3C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPOv4</td><td colspan="2">No indica el orden de los vértices (4)</td></tr>
<tr><td>DDPPa1A</td><td rowspan="4">Relación de paralelismo (Pa)</td><td rowspan="3">Identifica todas relaciones de paralelismo correctamente (1)</td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
<tr><td>DDPPa1B</td><td>Se detectan fallos en su razonamiento (B)</td></tr>
<tr><td>DDPPa1C</td><td>No se razona (C)</td></tr>
<tr><td>DDPPa2A</td><td></td><td>No se detectan fallos en su razonamiento (A)</td></tr>
</table>

DDPPa2B		Indica como es/son alguna/as relaciones de paralelismo (2)	Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPa2C			No se razona (C)
DDPPa2D			No se detectan errores en la respuesta (D)
DDPPa2E			Se detectan errores en la respuesta (E)
DDPPa3A		No indica como es ninguna relación de paralelismo correctamente (3)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPa3B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPa3C			No se razona (C)
DDPPa4		No indica si hay o no relación de paralelismo (4)	
DDPPa5A		No tiene relación de paralelismo (5)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPa5B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPa5C			No se razona (C)
DDPPa6A		Especifica la relación de paralelismo particularizando para formas concretas (6)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPa6B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPa6C			No se razona (C)
DDPPa6D			No se detectan errores en la respuesta (D)
DDPPa6E			Se detectan errores en la respuesta (E)
DDPPp1A	Relación de perpendicularidad (Pp)	Identifica todas relaciones de perpendicularidad correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPp1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPp1C			No se razona (C)
DDPPp2A		Indica como es/son alguna/as relaciones de perpendicularidad (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPp2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPp2C			No se razona (C)
DDPPp2D			No se detectan errores en la respuesta (D)
DDPPp2E			Se detectan errores en la respuesta (E)
DDPPp3A		No indica como es ninguna relación de perpendicularidad correctamente (3)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPp3B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPp3C			No se razona (C)
DDPPp4		No indica la relación de perpendicularidad (4)	
DDPPp5A		No tiene relación de perpendicularidad (5)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPp5B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPp5C			No se razona (C)
DDPPp6A		Especifica la relación de perpendicularidad particularizando para formas concretas (6)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPPp6B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPPp6C			No se razona (C)
DDPPp6D			No se detectan errores en la respuesta (D)
DDPPp6E			Se detectan errores en la respuesta (E)
DDPNc1A	Número de caras (Nc)	Indica el número de caras correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNc1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNc1C			No se razona (C)

DDPNc2A		No indica el número de caras correctamente (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNc2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNc2C			No se razona (C)
DDPNc3		No indica el número de caras (3)	
DDPNv1A	Número de vértices (Nv)	Indica el número de vértices correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNv1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNv1C			No señala razonamiento (C)
DDPNv2A		No indica el número de vértices correctamente (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNv2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNv2C			No se razona (C)
DDPNv3		No indica el número de vértices (3)	
DDPNa1A	Número de aristas (Na)	Indica el número de aristas correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNa1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNa1C			No se razona (C)
DDPNa2A		No indica el número de aristas correctamente (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNa2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNa2C			No se razona (C)
DDPNa3		No indica el número de aristas (3)	
DDPNac1A	Número de ángulos de las caras (Nac)	Indica el número de ángulos de las caras correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNac1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNac1C			No se razona (C)
DDPNac2A		No indica el número de ángulos de las caras correctamente (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNac2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNac2C			No se razona (C)
DDPNac3		No indica el número de ángulos de las caras (3)	
DDPNad1A	Número de ángulos diedros (Nad)	Indica el número de ángulos diedros correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNad1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNad1C			No se razona (C)
DDPNad2A		No indica el número de ángulos diedros correctamente (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNad2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNad2C			No se razona (C)
DDPNad3		No indica el número de ángulos diedros (3)	
DDPNav1A	Número de ángulos de los vértices (Nav)	Indica el número de los ángulos de los vértices correctamente (1)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNav1B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)
DDPNav1C			No se razona (C)
DDPNav2A		No indica el número de los ángulos de los vértices correctamente (2)	No se detectan fallos en su razonamiento (A)
DDPNav2B			Se detectan fallos en su razonamiento (B)

DDPNav2C			No se razona (C)
DDPNav3		No indica el número de los ángulos de los vértices (3)	

Tabla 2.16. La subtarea S-TCg1-G1. En relación con propiedades de ciertos poliedros (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides)

Código	Descriptor	
DDP1IpA	Identificación de poliedro (Ip)	No se detectan errores en la respuesta y es completa (A)
DDP1IpB		No se detectan errores en la respuesta, pero es incompleta (B)
DDP1IpC		Se detectan errores en la respuesta (C)
DDP1EA	Indica los elementos (E)	No se detectan errores en la respuesta y es completa (A)
DDP1EB		No se detectan errores en la respuesta, pero es incompleta (B)
DDP1EC		Se detectan errores en la respuesta (C)
DDP1PA	Indica las propiedades (P)	No se detectan errores en la respuesta y es completa (A)
DDP1PB		No se detectan errores en la respuesta, pero es incompleta (B)
DDP1PC		Se detectan errores en la respuesta (C)
DDP1InA	Identifica los nombres del prisma (In)	No se detectan errores en la respuesta y es completa (A)
DDP1InB		No se detectan errores en la respuesta, pero es incompleta (B)
DDP1InC		Se detectan errores en la respuesta (C)

Tabla 2.17. La subtarea S-TCg1- P1

Como hemos indicado al principio de este subapartado, para considerar correcto/incorrecto, completo/incompleto un razonamiento o una respuesta (Véase la tabla 2.16) nos apoyamos en los tipos de ejemplos, propiedades, definiciones, pruebas que se consideran en los trabajos que hemos tomado como referente en nuestro estudio y de los que hemos dado cuenta en la sección 1.4 del capítulo 1.

Sobre la enseñanza de contenidos relativos a la descripción

Aspectos relativos a la enseñanza de la descripción los recopilamos en plantillas como la de la tabla 2.18. En ella puede notarse que los aspectos registrados y los códigos usados se refieren a cómo se introduce su enseñanza (I) y al papel que se considera que juega el profesorado y el alumnado en la enseñanza de la misma (En). En relación con la introducción de la descripción, distinguimos si se lleva a cabo a partir de modelos y objetos del entorno (M), llevando a cabo diferentes tareas (construcción, apilamiento…) (T), trabajando secuencia de ejemplos y contraejemplos (E), mostrando una definición verbal (D), trabajando propiedades (P) o partir de lo que se especifica en el libro de texto (L). Hemos diferenciado tres tipos de enseñanza en función del papel que se asigna al profesor/alumno en el desarrollo de la misma: se realiza por el profesorado (P); se lleva a cabo por el alumnado, pero siempre ayudado por el profesorado (AP); y se realiza simultáneamente entre el profesorado y el alumnado, aunque siempre dirigido por el profesorado (PA).

También registramos algunas razones que se aportan para explicar el porqué se lleva a cabo el tipo de enseñanza que se propone. Además de usar las categorías de respuesta que hemos incluido en el apartado 2.3.1 (véase la figura 2.37), en esta plantilla registramos razones que se refieren al conocimiento de las formas geométricas (Cf) y a la pretensión que se tiene de acercar al alumno en el estudio de la geometría como materia escolar objeto de estudio (Ag).

Código	Descriptor	
DDIM	Introducción (I)	A partir de modelos o representaciones de objetos del entorno. (M)
DDIT		Tareas de construcción, apilamiento…(T)
DDIE		Secuencia de ejemplos y no ejemplos (E)
DDID		Definición verbal (D)
DDIP		Trabajando propiedades (P)
DDIL		A partir del libro de texto: lecturas, ejercicios… (L)
DDIO		Otros (O)
DDEnP	Enseñanza (En)	Profesor/a (P)
DDEnAP		Alumnado ayudado por el profesor/a (AP)
DDEnPA		Profesor/a y alumnado ayudado por el profesor/a (PA)
DDRaCf	Razones para explicar En (Ra)	Conocimiento de las formas geométricas (Cf)
DDRaAg		Acercar al alumno en el estudio de la geometría (Ag)

Tabla 2.18. Sobre la enseñanza de la descripción

2.3.2.2 Descriptores sobre la clasificación (DCl)

Para la clasificación al igual que para descripción hemos diseñado diferentes plantillas para registrar información que se refiere a ideas que se tienen sobre este proceso matemático (véase la tabla 2.19), al conocimiento que se tiene sobre las clasificaciones de formas geométricas (véase la tabla 2.20) o nos centramos en características relativas a la enseñanza de la clasificación en las clases de la ESO (véase la tabla 2.21). Puede notarse que en todas ellas los códigos de las diferentes opciones comienzan con D (descriptor) y Cl (clasificación).

Relativo a las ideas de clasificación que se reflejan, registramos características de este proceso matemático que se hacen explícitas cuando se cuestiona sobre la clasificación de formas geométricas. Estas se refieren a determinadas formas geométricas: se establecen/constatan parecidos/diferencias entre ellas, se comparan en un intento de separarlas en clases distintas, se agrupan según ciertas características, se relacionan entre sí, se ordenan con relaciones de inclusión/exclusión/solapamiento, se identifican como ejemplos pertenecientes a determinadas familias. La tabla 2.19 da cuenta de esta plantilla. Puede notarse que, en los códigos, DCl se continúa con I (para reflejar que se expresan características de la clasificación) y con la numeración 1,2,3… que remiten a las características específicas.

Código	Descriptor
DClI1	Se establecen /constatan parecidos/diferencias
DClI2	Se comparan en un intento de separarlas en clases distintas
DClI3	Se identifican como ejemplos pertenecientes a determinadas familias
DClI4	Se agrupan según ciertas características
DClI5	Se relacionan entre sí
DClI6	Se ordenan con relaciones de inclusión/exclusión/solapamiento
DClI7	Otros

Tabla 2.19. Ideas de la clasificación

Para registrar la información obtenida sobre problemas asociados a la clasificación de las formas geométricas, para los universos objeto de clasificación que se contemplan, nos hemos fijado en los criterios que se señalan (C); tipos de clasificaciones que se realizan (T); propiedades, ejemplos, dibujos, diagramas... que se indican o construyen (S); las definiciones que se realizan de algunas clases (D). En la plantilla de la tabla 2.20 puede notarse que el código DCl (C, T, S, D) se continúa con la numeración 1,2,3…, para reflejar diferentes opciones de C, T, S, D, y se finaliza con A, B o C. Como ya hemos indicado al comentar las plantillas de descripción, en este caso en la asignación de las respuestas, para asignarles la abreviatura correspondiente, tomamos como referente los tipos de clasificaciones, características de estas, ejemplos, propiedades de clases, definiciones..., que se consideran en los trabajos que hemos tomado como referentes en nuestro estudio, que se describen brevemente en el capítulo 1.

Código	Descriptor para clasificar diferentes universos (sólidos, poliedros y no poliedros, prisma, pirámides, formas geométricas en dos dimensiones)		
DClC1A	Criterios (C)	Fuertemente visuales (recto o inclinado, cóncavos o convexos …) (1)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClC1B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClC1C			No explica la respuesta (C)
DClC2A		Cualitativos (regularidad o no regularidad de sus elementos (de las bases, de todas las caras), con la igualdad de sus elementos (todas las caras), …) (2)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClC2B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClC2C			No explica la respuesta (C)
DClC3A		Atributos que tiene (elementos, figuras…) (3)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClC3B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClC3C			No explica la respuesta (C)
DClC4A		Cuantitativo respecto algún elemento (4)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClC4B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClC4C			No explica la respuesta (C)
DClC5A		Otros (5)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClC5B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClC5C			No explica la respuesta (C)
DClT1A	Tipo de clasificaciones (T)	Particiones (1)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClT1B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClT2A		Jerárquicas (2)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClT2B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClT3A		Criterios de construcción (3)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClT3B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClT4A		Analogía (4)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClT4B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClS1A	Se establecen/ nombran/ expresan/ señalan/ construyen/ juzgan (S)	Propiedades (1)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClS1B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClS2A		Ejemplos (2)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClS2B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClS3A		Dibujos (3)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClS3B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClS4A		Diagramas (4)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClS4B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClS5A		Relaciones entre familias/propiedades (5)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClS5B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClS6A		Otros (6)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DClS6B			Se detectan errores en la respuesta (B)
DClDA	Se expresan definiciones de algunas clases (D)		No se detectan errores en la respuesta (A)
DClDB			Se detectan errores en la respuesta (B)

Tabla 2.20. Conocimiento sobre las clasificaciones que se establecen de las formas geométricas

Al igual que en la descripción, la plantilla de la tabla 2.21 se ha construido para registrar información sobre cómo se lleva a cabo la enseñanza de la clasificación. Nos hemos centrado en cómo se introduce la enseñanza de este proceso matemático, en el papel que juega el profesorado y el alumnado en la enseñanza/aprendizaje del mismo y en las razones que se expresan para explicar el porqué se lleva a cabo el tipo de enseñanza que se propone. La tabla 2.21 da muestra de ello, pero como coincide con la tabla 2.19 del subapartado 2.3.2.1 remitimos ahí su explicación.

Código	Descriptor	
DClIO	Introducción (I)	Organizar (O)
DClIG		Hacer grupos incluidos (G)
DClIS		Separar (S)
DClIN		Buscar/nombrar/identificar objetos de una familia (N)
DClIP		Buscar parecidos y/o diferencias (P)
DClIT		Otros (T)
DClEnP	Enseñanza (En)	Profesor/a (P)
DCLEnAP		alumnado ayudado por el profesor/a (AP)
DCLEnPA		profesor/a y alumnado ayudado por el profesor/a (PA)
DClRaCf	Razones para explicar En (Ra)	Conocimiento de las formas geométricas (Cf)
DClRaAg		Acercar al alumno en el estudio de la geometría (Ag)

Tabla 2.21. Sobre la enseñanza de la clasificación

2.3.2.3 Descriptores sobre el establecimiento de relaciones (DRl)

Al igual que para la descripción y la clasificación, hemos diseñado diferentes plantillas para registrar la información obtenida sobre el establecimiento de relaciones según correspondan a las ideas que se tienen sobre las relaciones correspondientes, se refieran a lo que hacen los/as profesores/as cuando se les plantean cuestiones sobre ellas o informan sobre cómo se lleva a cabo su enseñanza en las clases de la ESO. Los códigos que asignamos se explican asimismo desde las aclaraciones que hemos hecho para las plantillas de la descripción y clasificación. Las abreviaturas usadas han sido D (descriptor); Rl (relación) y asignamos a continuación abreviaturas que indicamos entre paréntesis para las opciones establecidas.

En la tabla 2.22 mostramos la que se refiere a cómo el profesorado relaciona las formas geométricas. Las opciones que hemos delimitado contemplan diferentes tipos de relaciones (igualdad, paralelismo, inscripción, dualidad, establecidas al generar formas a partir de otras mediante desplazamientos, giros, apilando sólidos, al truncarlos…) entre sólidos, entre sólidos y figuras planas ponerlo, entre elementos de los sólidos.... Para cada tipo de relación nos fijamos, por un lado, en lo que se hace al relacionar formas (H): se reconocen las características generales (Cg), se señalan ejemplos y contraejemplos (Ec), se tienen en cuenta las condiciones imprescindibles (Ci), se consideran fórmulas matemáticas (F), se especifican relaciones entre los elementos de las formas geométricas (Re), se especifican modelos que visualizan estas relaciones (M)… Por otro, en aquello en lo que se centran al relacionar formas (C): describir la manera de generar las formas (G), establecer las características fundamentales (Cf), establecer relaciones numéricas (R), describir los modelos que visualizan las relaciones (Mo)… Finalizamos señalando si se detectan o no errores en la respuesta.

Código	Descriptor para diferente tipo de relaciones (igualdad, paralelismo, inscripción, dualidad, establecidas al generar formas a partir de otras …) entre sólidos, entre sólidos y figuras planas, entre elementos de los sólidos…		
DRlHCgA	Qué se hace al relacionar formas (H)	Se reconocen características generales (Cg)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHCgA			Se detectan errores en la respuesta (B)

DRlHEcA		Se señalan ejemplos o contraejemplos (Ec)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHEcB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlHCiA		Se tienen en cuenta condiciones imprescindibles (Ci)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHCiB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlHFA		Se consideran fórmulas matemáticas (F)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHFB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlHReA		Se especifican relaciones entre los elementos de las formas geométricas (Re)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHReB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlHMA		Se especifican modelos que visualizan estas relaciones (M)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHMB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlHOA		Otros (O)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlHOB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlCGA	En qué se centra C)	Describir la manera de generar/componer las formas (G)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlCGA			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlCCfA		Establecer características fundamentales (Cf)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlCCfB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlCRA		Establecer relaciones numéricas, de cálculo o de elementos (R)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlRRB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlCMoA		Describir/señalar los modelos que visualizan las relaciones (Mo)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlCMoB			Se detectan errores en la respuesta (B)
DRlCOA		Otros (O)	No se detectan errores en la respuesta (A)
DRlCOB			Se detectan errores en la respuesta (B)

Tabla 2.22. El establecimiento de relaciones: ¿Qué relaciones? ¿Qué se hace acerca de estas relaciones?

Para registrar de manera más específica los sólidos entre los que se establecen las relaciones hemos diseñado pequeñas plantillas como la que se muestra en la tabla 2.23 para las relaciones de dualidad en los poliedros regulares convexos (Pr). Con los códigos que indicamos registramos si el/la profesora correspondiente ha expresado que el tetraedro es dual consigo mismo (Tt), el cubo con el octaedro (Co) y viceversa (Oc), el dodecaedro con el icosaedro (Di) y viceversa (Id).

Código	Descriptor
DRlPrTt	Tetraedro-tetraedro
DRlPrCo	Cubo-octaedro
DRlPrOc	Octaedro- cubo
DRlPrDi	Dodecaedro-icosaedro
DRlPrId	Icosaedro- dodecaedro

Tabla 2.23. Poliedros regulares convexos duales

De la misma manera, hemos usado pequeñas plantillas para precisar las características generales, ejemplos y contraejemplos, definiciones, fórmulas que se indican para describir las relaciones o los modelos que las visualizan. La tabla 2.24 muestra la construida para registrar si el profesorado describe un modelo de pares de poliedros regulares duales inscritos uno en otro (Pr), señalando que pueden inscribirse algunos de ellos (I); que el número de vértices de un poliedro están en los centros de las caras del otro poliedro (V); que el número de aristas de ambos poliedros duales coincide (A); que los vértices del poliedro circunscrito se corresponden con los centros de las caras del inscrito (C) y que el orden de los vértices de un poliedro coincide con el número de lados del polígono de las caras del dual (O). Apuntamos también si se señala que los poliedros regulares duales se pueden inscribir de esta manera en los dos sentidos (Is) y/o se indica que cuando el dual de una figura es la figura misma se dice que esta es autodual (D).

Código	Descriptor
DRlPrV	Vértices- nº caras
DRlPrI	Inscripción
DRlPrA	Aristas
DRlPrC	Vértices- centros caras
DRlPrO	O. vértices- nº lados caras
DRlPrIs	Inscripción en los dos sentidos
DRlPrD	Autodual

Tabla 2.24. Descripción de modelos de pares de poliedros regulares convexos duales inscritos uno en otro

2.3.2.4 Descriptores sobre las representaciones de las formas geométricas (DRp)

En relación con las representaciones de las formas geométricas nos hemos centrado especialmente en la información que se refiere a las representaciones o materiales que utilizan los/as profesores/as al resolver las tareas que les hemos propuesto y en las que se señalan como que se usan en clases de la ESO al enseñar contenidos tratados en este estudio. En las tablas 2.25 y 2.26 mostramos las plantillas que hemos diseñado para registrar esta información. En los códigos de la tabla 2.25 hemos utilizado las siguientes abreviaturas: D (descriptor); Rp (representaciones); C (construcción), Rg (Representaciones gráficas), Rv (Representaciones visuales), M (modelos manipulativos); 1,2,3… numeración ordenada de las diferentes opciones que delimitamos.

Código	Descriptor	
DRpC1	Construcción (C)	Mediante materiales comercializados formados por polígonos (1)
DRpC2		Mediante materiales comercializados formados por varillas y mecanismos de engarce (2)
DRpC3		Mediante desarrollos planos (3)
DRpC4		Mediante movimientos de polígonos (experiencia de Castelnuovo (4)
DRpC5		Apilando polígonos o modelos (5)
DRpC6		Mediante puzles (6)
DRpC7		Mediante truncamiento (7)
DRpC8		A partir del desarrollo plano (8)
DRpC9		Otros (9)
DRpRg1	Representaciones gráficas (Rg)	Plana (1)
DRpRg2		Espacio (2)
DRpRv1	Representaciones visuales (Rv)	Entorno (1)
DRpRv2		Reflejos (2)
DRpRv3		Sombras (3)
DRpRv4		Otras (4)
DRpM1	Modelos manipulativos (M)	Modelos construidos (1)

Tabla 2.25. Representaciones de las formas geométricas

Y en los de la tabla 2.26: D (descriptor); Rp (representaciones); Ma (Materiales) diferenciando la pizarra (A), el libro de texto (B), las formas geométricas construidas (C), los materiales comercializados para construir formas geométricas o materiales para construir (plastilina, palillos …) (D), los desarrollos planos para construir formas geométricas (E), los programas informáticos (F), el material de dibujo (G), las representaciones de las formas geométricas del entorno (H) y otros (I).

Código	Descriptor	
DRpMaA	Materiales (Ma)	La pizarra (A)
DRpMaB		El libro de texto (B)
DRpMaC		Las formas geométricas construidas (C)
DRpMaD		Los materiales comercializados para construir formas geométricas o materiales para construir (plastilina, palillos …) (D)
DRpMaE		Los desarrollos planos para construir formas geométricas (E)
DRpMaF		Los programas informáticos (F)
DRpMaG		El material de dibujo (G)
DRpMaH		Las representaciones de las formas geométricas del entorno (H)
DRpMaI		Otros (I)

Tabla 2.26. Materiales utilizados por profesores/as de la ESO en la enseñanza de los sólidos

También nos hemos fijado en las razones que se han aportado al indicar el uso que se hacía de las mismas y de los modelos manipulativos en su enseñanza: i) para comunicar formas geométricas, ii) como objeto de enseñanza/aprendizaje y/o iii) como contexto para trabajar y/o visualizar otros contenidos geométricos.

2.3.2.5 La resolución de problemas. Descriptores para la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones (DP)

En este estudio, los problemas los usamos como contexto para trabajar y obtener información sobre la enseñanza/ aprendizaje de contenidos geométricos relativos a la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones. Como muestra la plantilla que mostramos en la tabla 2.27 las expresiones del profesorado que registramos hacen mención a como se explican las respuestas, las ideas erróneas relacionadas con un proceso matemático, los errores técnicos que puede haber o los errores de terminología. Los códigos que hemos utilizado tienen las siguientes abreviaturas: D (descriptor); P (Resolución de problemas); E (explicación de la respuesta), Ep (ideas erróneas relacionadas con procesos matemáticos y/o relaciones), Etc (errores técnicos), Etm (errores de terminología); 1,2,3… numeración ordenada de las diferentes opciones que delimitamos.

Código	Descriptor	
DPE1	Explicación de la respuesta mediante (E)	Representaciones (1)
DPE2		Definiciones (2)
DPE3		Propiedades (3)
DPE4		Cálculos (4)
DPE5		Ejemplos y/o contraejemplos (5)
DPE6		Demostraciones (6)
DPE7		No corresponde a lo que pide (7)
DPEp1	Ideas erróneas relacionados con un proceso matemático (Ep)	Descripciones (1)
DPEp2		Clasificaciones (2)
DPEp3		Representaciones (3)

DPEp4		Relaciones (4)
DPEtc1	Errores técnicos (Etc)	Cálculos (1)
DPEtc2		Datos (2)
DPEtc3		Procedimientos (3)
DPEtm	Errores de terminología (Etm)	

Tabla 2.27. Resolución de problemas: Descriptores para contenidos geométricos

2.3.3 La elaboración y descripción de perfiles de profesores/as en relación con la enseñanza de la geometría en la ESO

En la sección 1.8 de la revisión bibliográfica realizada en el capítulo 1 se han señalado las tendencias didácticas del profesorado que se han establecido teniendo en cuenta las clasificaciones llevadas a cabo por diferentes autores en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Carrillo, 1996, 1998; Climent, 2002) o con respecto a la enseñanza de la semejanza (Gualdron, 2011). En nuestro estudio, en el que nos hemos centrado en la enseñanza de contenidos geométricos relativos a la descripción y clasificación y al establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos relativos a los sólidos, hemos partido de los perfiles de profesores/as establecidos por Carrillo (1998) Los distinguimos según su tendencia didáctica sea lo que denominamos como: Tradicional, Tecnológica, Espontaneísta o Investigativa.

Las características asignadas por estos autores a cada una de estas tendencias las hemos conjugado con características que hemos elaborado al realizar el análisis de estudios que componen nuestro marco teórico, que también hemos descrito brevemente en el capítulo 1, que dan cuenta de nuestra concepción de la geometría y su enseñanza, distinguen diferentes enfoques para la enseñanza de las matemáticas o proponen secuencias de tareas para la enseñanza de los procesos matemáticos mencionados con sugerencias para la instrucción (Kindt, 1993; Guillén, 2007; Treffers, 1987).

Para describir las características de los perfiles de profesores/as que hemos elaborado, referentes en el análisis que lleva a resultados que incluimos en el capítulo 3, en el subapartado 2.3.3.1 se indican las características generales que asignamos a cada perfil y en el subapartado 2.3.3.2 se establecen los indicadores de los perfiles donde se precisan las características en relación con la enseñanza particular de contenidos relativos a los procesos de describir y clasificar y al establecimiento de relaciones.

2.3.3.1 Características generales

Los perfiles que consideramos los denominamos según que su tendencia didáctica sea Tradicional, Tecnológica, Espontaneísta o Investigativa. A continuación, indicamos las características generales que asignamos a cada tendencia.

Tradicional

El profesorado, en la tendencia tradicional, muestra los diferentes contenidos geométricos al alumnado. Presenta las descripciones, clasificaciones, representaciones, relaciones … Centra la enseñanza de la geometría en la explicación de la teoría y tareas expuestas en el libro de texto. Le interesa la aplicación de la geometría en las matemáticas y otras disciplinas. Considera la geometría como inventario de conceptos. Le da una visión a la geometría escolar estática-restringida, sugerida por el currículum tradicional; concibiéndola como mera asignatura que se enseña a partir de parte de los contenidos que se indican en los libros de texto. Se centra en la memorización de las características de las formas y las fórmulas para resolver los problemas de medición.

En relación con la enseñanza de la geometría en ESO, establece la programación que viene dada por el libro de texto teniendo como referente el currículum. Sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades. Orienta la enseñanza de la geometría a que el alumnado aprenda los conceptos geométricos a partir de la explicación del/de la profesor/a y del libro de texto, utilizando principalmente para ello la memorización. Considera al alumno como el único responsable de los resultados del aprendizaje, en función del grado de sumisión. El/La alumno/a ha de reproducir lo señalado en el libro de texto y lo explicado por el/la profesor/a. El/La alumno/a se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el/la profesor/a se los presente. Introduce la geometría a partir de los conceptos teóricos del punto, recta y plano. La priorización de los contenidos la marca el libro de texto y el currículum.

Por lo que respecta a los contenidos geométricos, se va a centrar en aquellos están en el currículum y/o el libro de texto.

El principio didáctico es el principio de la reproducción.

Debilidad de la componente horizontal y posiblemente de la vertical: no hay fenómenos reales como fuente para producir significados de los contenidos tratados, poca atención se presta a las aplicaciones, se pone mucho énfasis en la memorización ciega de hechos numéricos y acciones, no se usan para profundizar en las operaciones del sistema formal. La debilidad o fortaleza de la componente vertical depende de la que refleje el libro de texto usado.

Una forma moderada de esta aproximación se basa en la teoría del aprendizaje jerarquizado de Gagné. Pero las formas estrictas derivan demasiado a menudo en principios de comportamiento. En la instrucción práctica, se promueve 'instrucción prescrita individualmente' que es el cultivo del cálculo formal solitario. La asignatura se ofrece a menudo fragmentada y atomizada de tal manera que los niños dominan los insignificantes objetivos de la instrucción paso por paso con sus propios medios.

Tecnológica

La tendencia tecnológica se caracteriza porque el profesorado trata de presentar al alumnado, mediante diferentes técnicas, los diferentes contenidos geométricos y establecimiento de relaciones. La enseñanza de la geometría se centra en presentar la teoría y tareas expuestas en el libro de texto ayudado de explicaciones y tareas obtenidas en otros medios de comunicación como Internet. Asimismo, se ayuda en las explicaciones de otros medios como ordenadores. Le interesa la aplicación de la geometría en las matemáticas y otras disciplinas utilizando diferentes tecnologías. Se considera la geometría como los procesos que llevan a los conceptos. Visión docente;

se concibe como los contenidos que se imparten con los recursos que se utilizan. Se mira la asignatura en un contexto escolar en relación con las otras asignaturas; se ve como parte de las matemáticas escolares y se considera importante para otras asignaturas del currículum escolar. Se centra en la construcción de las características de las formas y las fórmulas para resolver los problemas de medición.

El/La profesor/a sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades. La enseñanza de la geometría está orientada a que el alumnado entienda y asimile los conceptos geométricos a partir de la lógica construcción de la geometría, ayudándose de la memorización. Introducción de la geometría a partir del punto, recta y plano, para ir construyendo las formas geométricas.

Se considera al alumno/a como el principal responsable de los resultados del aprendizaje, siempre que el contexto elegido por el/la profesor/a sea adecuado. Al enfrentarse a cada una de sus tareas educativas, el alumno imita el estilo cognitivo del/de la profesor/a, pues reproduce el proceso lógico mostrado por este cuando transmite los contenidos de aprendizaje, por procesos tecnológicos mediante exposición, debido a su caracterización como técnico del contenido y del diseño didáctico. Para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que proviene del exterior.

El principio didáctico es el principio de la reproducción.

La componente vertical de la matemática es dominante: Operar dentro del sistema matemático es la parte principal de la actividad matemática. La componente horizontal se manifiesta solo en una dirección; no tanto en el paso del mundo real a las matemáticas para producir significados para los contenidos geométricos sino en la aplicación posterior al contexto real de lo que se aprendió dentro del sistema formal, y además solo de una manera restrictiva. Como consecuencia, los fenómenos reales no pueden funcionar como modelos que soporten el operar dentro del sistema matemático, y no lo hacen. En lugar de los fenómenos reales se usan «embodiments» y materializaciones de los conceptos matemáticos y de las estructuras o juegos estructurados para crear una base concreta de orientación. Hay, de hecho, una estructuración según niveles, aunque principalmente mediante conexiones verticales en el sentido del 'modelo de representación' de Bruner, 'enactivo, icónico, simbólico' (Treffers, 1987, p. 251).

Espontaneísta

La tendencia espontaneísta se caracteriza por un aprendizaje del alumnado de los contenidos geométricos a partir de trasladar el profesorado las diferentes situaciones reales al mundo matemático. La enseñanza de la geometría se centra en tareas expuestas a partir de situaciones de contexto. Le interesa la aplicación de la geometría en diferentes situaciones que representan la realidad. Se considera la geometría como la comprensión de los objetos del entorno. Se concibe como una ciencia del espacio físico en el que el niño vive y se mueve; se conecta la geometría con el entorno cotidiano del niño. Se centra en la aplicación y conexión que pueda tener con la vida real.

La programación es un documento vivo que, por basarse en los intereses que, en cada momento, manifiestan los alumnos y en la negociación con ellos, no dispone de una organización inicial. La enseñanza de la geometría está orientada a que el alumnado le dé un sentido real y útil al aprendizaje de los conceptos geométricos. El profesorado busca un aprendizaje que surja de contextos que tienen significado. Se pretende que el alumnado aprenda de forma espontánea cuando está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento. Introducción de la geometría a partir de las formas del espacio del entorno.

El alumnado ha de entender y asimilar los conceptos geométricos a partir de las tareas de contexto. El aprendizaje se produce, de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.

El punto de partida es la realidad.

La componente horizontal determina en su mayor parte el curso de la instrucción. El énfasis es en el entorno más que en las operaciones mentales. Se desatienden los objetivos de las matemáticas formales.

Investigativa

La tendencia investigativa se caracteriza por ser el/la alumno/a orientado por el/la profesor/a quien mediante la observación y la experimentación obtiene significados para los contenidos geométricos. La enseñanza de la geometría se centra en tareas en las que el alumnado tendrá que reflexionar, analizar, comparar, relacionar... y a partir de sus resultados obtendrá conocimiento sobre los contenidos geométricos. El profesorado se centra en tareas de descubrimiento e investigación, considerando la geometría como medio de investigación. Se centra en investigaciones situadas en diferentes contextos para que se produzcan significados para los contenidos tratados e investigaciones situadas en un contexto matematizado para que se apliquen los contenidos en diferentes contextos cotidianos. Se fija en el significado que le pueda dar el alumnado a lo que aprende y en la investigación que se haga para aprenderlo. Se transciende la mera concepción como asignatura escolar; se considera como una ciencia del saber humano.

El profesorado dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. La enseñanza de la geometría está orientada a que el alumnado considere la investigación como algo fundamental en el proceso de aprendizaje. El profesorado pretende que el aprendizaje tenga sentido en el alumnado. Quiere que el alumnado sea consciente del aprendizaje que está llevando por sí mismo. Además, pretende que los conocimientos aprendidos puedan ser aplicados en diferentes contextos. El profesorado busca con las investigaciones equilibrar los intereses del alumnado y la fortaleza de la componente vertical y horizontal de las matemáticas. La geometría se introduce a partir de investigaciones que se plantean a partir de formas del espacio o sus características situadas en contextos del entorno o en un contexto matematizado.

El alumnado ha de dar sentido a lo que aprende. Se ha de provocar la curiosidad por aprender. El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesorado. Además, para que se produzca aprendizaje este debe institucionalizarse.

Cabe destacar el lugar dominante que ocupan los problemas de contexto, como una fuente de formación de conceptos y como un área de aplicaciones. Se atribuye una gran significación al desarrollo de la modelización, esquemas, diagramas y símbolos. El punto de partida es la realidad prestando mucha más atención al desarrollo de modelos, esquemas, símbolos, etc.

El principio didáctico es el principio de reconstrucción o reinvención. Es un «proceso-reinventado»; las actividades fundamentales son construir, reflexionar, anticipar e integrar.

Otras características didácticas de este enfoque es el carácter interactivo de la enseñanza y el aprendizaje y la dimensión del aprendizaje como algo estructurado e interrelacionado.

Se presta cuidadosa atención a las dos componentes vertical y horizontal de la matematización. Necesitamos conocer las matemáticas como una organización de fenómenos, donde las matemáticas se entienden como una actividad humana atada a la realidad. “Esto quiere decir que los fenómenos de los que surgen los conceptos y estructuras matemáticas están usados implícitamente como fuente y como dominio de aplicación. Esto, según el principio de la teoría, crea para el aprendiz la posibilidad de lograr el concepto por orientación del mismo a una gran variedad de fenómenos, que beneficia la construcción del concepto matemático formal y las estructuras y su aplicación. La matematización procede paso a paso.” (Treffers, 1987, p. 251).

2.3.3.2 Descripción de los indicadores

El análisis que realizamos relativo a los perfiles de profesores/as se ha llevado a cabo a partir de indicadores que hacen referencia a las características asociadas en el subapartado anterior a cada perfil de profesor/a. Estos indicadores se han extraído contemplando, además de estas características, la información obtenida en nuestro estudio sobre la enseñanza de la geometría en secundaria realizado a través de una encuesta (Pérez, 2006; Pérez y Guillén, 2007, 2008) y de trabajos de nuestro marco de referencia sobre la geometría de los sólidos (Guillén, 1997; Guillén y Figueras, 2004, 2005). Los hemos organizado en cuatro grupos, que se corresponden con las cuatro secciones en las que dividimos la encuesta usada. En el grupo 2.3.3.2.1 indicamos los relativos a las creencias y actitudes asociados a cada perfil de profesor/a. Los de 2.3.3.2.1 conciernen a cómo el/la profesor/a lleva a cabo la enseñanza de la geometría. En 2.3.3.2.3 indicamos los relativos a los contenidos geométricos en los que se centra cada tendencia del profesorado y los que versan sobre la labor docente los indicamos en 2.3.3.2.4.

La notación que se ha empleado para cada una de las tendencias han sido las mismas que han utilizado Carrillo (1996) y Climent (2002), siendo TR (tradicional), TE (tecnológico). E (espontaneísta) e I (investigativo). Los indicadores se han numerado ordenadamente (1, 2, ...) y puede notarse también que cuando para un indicador se han delimitado diferentes opciones, en el código se ha reflejado añadiendo una, dos, ... apóstrofe/s a la opción correspondiente. Ejemplo: 6, 6’.

2.3.3.2.1 Acerca de la geometría y su aprendizaje: creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones

Nos acercamos a estas problemáticas respondiendo a cuestiones que se refieren a la geometría, descripción o clasificación y a su aprendizaje. Para las diferentes tendencias distinguimos respuestas a cuestiones sobre: i) qué se entiende por geometría, la descripción y la clasificación; ii) cuál es su contenido; iii) qué finalidad del estudio de la geometría se quiere transmitir al alumnado; iv) consideración sobre qué se debe conocer en relación con la geometría; v) visión que se tiene de esta materia; vi) con qué se puede relacionar la geometría; vii) cómo se considera que aprende el alumnado; viii) la comunicación que hace el alumnado de los contenidos, y ix) qué se considera como dinamizador del aprendizaje.

Concepción de la geometría, descripción y clasificación

1. Qué se entiende por geometría, la descripción y la clasificación

    - (TR1) El estudio de las formas y fórmulas geométricas.
    - (TE1) Una elaboración de definiciones y el estudio de las formas geométricas y de las fórmulas geométricas.
    - (E1) Una ciencia que modeliza la realidad y está orientada hacia los procedimientos y fomento de actitudes positivas hacia el trabajo escolar y como ciudadano.
    - (I1) Una ciencia que busca la adquisición de conceptos, el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia, el trabajo escolar en general y como ciudadano, siendo la materia y el trabajo escolar los que determinan el peso específico de cada una de las componentes citadas.

2. Cuál es su contenido

    - (TR2) El que lleva a conocer las formas geométricas, sus elementos y las fórmulas que dan sus medidas.
    - (TE2) El que permite mostrar procedimientos para conocer las formas geométricas. sus elementos y las fórmulas que dan sus medidas.
    - (E2) El que permite conectar con el espacio en el que el alumnado vive y se mueve; facilitando la organización de experiencias espaciales intuitivas del alumnado para así conocer las formas geométricas. sus elementos y las fórmulas que dan sus medidas.
    - (I2) El que puede proporcionar un conocimiento empírico de las formas geométricas, sus elementos y las fórmulas que dan sus medidas a partir de la investigación, la observación, la medida y el razonamiento.

3. Qué finalidad del estudio de la geometría se quiere transmitir al alumnado

   - (TR3) Un carácter de "panorama geométrico" para el estudio, con contenidos que se espera que aprendan porque la materia permite dotarles de las destrezas básicas para la vida diaria (desde un punto de vista muy restringido, casi de las aplicaciones numéricas básicas) y sirve para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática (por los conocimientos que aporta).
   - (TE3) Un carácter práctico que permita su aplicación utilitaria en la vida cotidiana y como instrumento para el estudio tanto de otras disciplinas como el estudio futuro de la propia matemática y en particular de la geometría (tanto por los conocimientos que aporta como por contribuir al desarrollo del razonamiento en el alumno).
   - (E3) Un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno (con respecto al aprendizaje y a la vida), así como para la adquisición de los valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.
   - (I3) Un carácter de razonamiento (lógico) que permita al alumno describir, organizar, interpretar, definir, probar, relacionar, simbolizar.... y comprender la realidad que le rodea, dotándolo de unos instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo.

4. Consideración sobre lo que se debe saber en relación con la geometría

   - (TR4) Conocer los conceptos geométricos.
   - (TE4) Entender los conceptos geométricos y su aplicación.
   - (E4) Conectar los conocimientos geométricos con el entorno.
   - (I4) Obtener conocimientos sobre los contenidos geométricos a partir de la observación y experimentación de las formas geométricas en diferentes contextos y también sobre sus aplicaciones.

5. Visión que se tiene de esta materia

   - (TR5) Visión escolar estática-restringida, sugerida por el currículum tradicional; se concibe como mera asignatura que se enseña a partir de parte de los contenidos que se indican en los libros de texto y/o currículum.
   - (TE5) Visión docente; se concibe como los contenidos que se imparten con los recursos que se utilizan.
     Se mira la asignatura en un contexto escolar en relación con las otras asignaturas; se ve como parte de las matemáticas escolares y/o se compara su importancia con la de otras asignaturas del currículum escolar.
   - (E5) Visión del entorno, Se concibe como una ciencia del espacio físico en el que el alumno vive y se mueve; se conecta la geometría con el entorno cotidiano del alumno.
   - (I5) Visión científica. Se transciende la mera concepción como asignatura escolar; se concibe la geometría como la descripción de las

formas que hay en el universo; se incluye como parte de las matemáticas y/o se considera como una ciencia del saber humano.
Se tiene una visión de la misma asociada a la etimología del término; así se ve la geometría como ciencia de las formas geométricas desde el punto de vista de su forma y su medida.

6. Con qué se puede relacionar la descripción/clasificación

- (TR6) La descripción no se relaciona con otras unidades matemáticas ni con otras disciplinas curriculares.
- (TE6) La descripción se relaciona con otras unidades matemáticas o disciplinas curriculares.
- (E6) La descripción se relaciona con el entorno cotidiano.
- (I6) La descripción se relaciona con otras unidades matemáticas, disciplinas curriculares y entorno.

(’)

- (TR6’) La clasificación no se relaciona con otras unidades matemáticas ni con otras disciplinas curriculares.
- (TE6’) La clasificación se relaciona con otras unidades matemáticas o disciplinas curriculares.
- (E6’) La clasificación se relaciona con el entorno cotidiano.
- (I6’) La clasificación se relaciona con otras unidades matemáticas, disciplinas curriculares y entorno.

Acerca del aprendizaje

7. Cómo se considera que aprende el alumnado

- (TR7) Se presupone que el aprendizaje se realiza, utilizando la memoria como principal recurso, por superposición de conceptos.
- (TE7) El aprendizaje es memorístico, organizándose internamente según la lógica estructural de la materia.
- (E7) Se aprende cuando el objeto de aprendizaje, que surge aleatoriamente del contexto, posee un significado para el alumno.
- (I7) Los objetos de aprendizaje no solo tienen significado, sino también la capacidad de ser aplicados en contextos diferentes de donde fueron aprendidos, adquiriendo así un carácter móvil a través de una malla conceptual.

(’)

- (TR7’) El único aprendizaje efectivo y correcto es el que proviene de un proceso deductivo (regla general-aplicación a casos particulares).
- (TE7’) Aunque el aprendizaje pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo (de hecho, es así como suele presentar el profesorado los contenidos en la simulación de su construcción), el verdadero aprendizaje ha de apoyarse en un proceso deductivo.

- (E7’) El aprendizaje se produce a partir de la participación activa del alumno en procesos inductivos.
- (I7’) El aprendizaje comienza, normalmente, por la observación de regularidades que permiten aflorar una conjetura; pero a esta ha de seguir una comprobación razonable y, en la medida de lo posible, una generalización adecuada (adecuadas tanto la generalización como la comprobación al nivel de los alumnos).

(’’)

- (TR7’’) El alumnado se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el profesorado se los presente.
- (TE7’’) Para aprender, al alumno le basta entender, asimilar el conocimiento que proviene del exterior.
- (E7’’) El aprendizaje se produce, de manera espontánea, cuando el alumno está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento.
- (I7’’) El aprendizaje se produce a través de investigaciones que han sido planificadas por el profesorado. Además, para que se produzca aprendizaje este debe institucionalizarse.

8. La comunicación que hace el alumnado de los contenidos

- (TR8) El profesorado desea que el alumnado explicite lo aprendido con la expresión usada por él. No le interesa la idea sino la mecánica. De ahí que no conceda especial importancia a que el alumno argumente sus conclusiones.
- (TE8) Es importante que el alumno explicite la comprensión de los contenidos (se trata de una verbalización para comprobar que se está produciendo el aprendizaje deseado). La expresión de lo aprendido, con las palabras del alumno, muestra el resultado del aprendizaje.
- (E8) Es importante que el alumno comunique (más que argumente de un modo más o menos justificado) sus conclusiones.
- (I8) La expresión de lo que aprende por parte del alumno es una parte importante del propio proceso de aprendizaje. Es importante, además, que el alumno argumente sus conclusiones.

9. ¿Qué se considera como dinamizador del aprendizaje?

- (TR9) La estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación, es el dinamizador ideal del aprendizaje.
- (TE9) El dinamizador ideal del aprendizaje es la lógica subyacente a los contenidos matemáticos escolares.
- (E9) El motor del aprendizaje son los intereses de los alumnos
- (I9) El dinamizador ideal del aprendizaje es el equilibrio entre los intereses y estructura mental de los alumnos y los de las componentes horizontal y vertical de las matemáticas.

2.3.3.2.2 La enseñanza de la geometría en la ESO

Para acercarnos a esta problemática, para las diferentes tendencias distinguimos respuestas a cuestiones sobre: i) punto de inicio de la enseñanza de la geometría; ii) cómo se introduce al estudio de la misma; iii) aspectos sobre la programación de los contenidos a tratar; iv) las razones por la que se considera importante la enseñanza de la geometría; v) las razones por las que no enseña toda la geometría; vi) los contenidos geométricos que se priorizan; vii) las razones que explican la importancia de los contenidos geométricos; viii) las razones por las que se enseña los contenidos geométricos; ix) los cursos en los que se considera que se han de enseñar determinados contenidos geométricos; x) la opinión que se tiene sobre lo que puede ser una buena preparación geométrica previa, y xi) las razones por las que la geometría puede o no gustar al alumnado.

10. Punto de inicio de la enseñanza de la geometría

    - (TR10) Se inicia por las figuras planas que es como aparece en los libros de texto o currículum.
    - (TE10) Se inicia por las figuras planas ya que a partir de ellas se construyen los sólidos.
    - (E10) Se inicia por las formas del espacio ya que el entorno cotidiano es en 3 dimensiones.
    - (I10) Se inicia por las formas del espacio ya que al investigar los sólidos surgen las figuras planas.

11. Cómo se introduce el estudio de la geometría

    - (TR11) Explicando el profesorado los contenidos que se van a tratar o comenzando directamente la explicación del tema.
    - (TE11) Explicando el profesorado los contenidos a tratar utilizando medios tecnológicos.
    - (E11) Relacionando la geometría con el entono mediante vídeos, fotos, salidas al exterior, etc.
    - (I11) Indagando el profesorado los conocimientos que tiene el alumnado sobre los contenidos geométricos que se van a tratan, apoyándose para ello en la construcción de formas, fotografías, etc.

12. Programación de los contenidos a tratar

    - (TR12) El profesorado sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades.
    - (TE12) Para el profesorado la programación es un documento cerrado, que elabora previamente en función de sus conocimientos (de la materia escolar, de sus alumnos, de su experiencia previa en la enseñanza de esos contenidos...).
    - (E12) La programación es un documento vivo que, por basarse en los intereses que, en cada momento, manifiestan los alumnos y en la negociación con ellos, no dispone de una organización inicial.

- (I12) El profesorado dispone de una propuesta organizativa de los elementos del programa, pero no está vinculado a un recorrido concreto. Existe una trama que vincula y organiza el conocimiento por la que el profesorado se mueve dependiendo de los intereses, nivel... del alumnado.

13. Razones por la que se considera importante la enseñanza de la geometría

- (TR13) Porque está en el currículum de educación secundaria obligatoria y/o evalúa al alumnado en geometría.
- (TE13) Tiene una aplicación práctica a otros ámbitos matemáticos, disciplinas y técnicas y/o es necesaria para la continuación en la enseñanza de las matemáticas y en particular de la geometría.
- (E13) Porque es la parte de las matemáticas que conecta con el entorno cotidiano.
- (I13) Porque contribuye a desarrollar el razonamiento lógico, inductivo y deductivo; con ella puedo trabajar procesos matemáticos como describir, clasificar, definir, probar…

14. Razones por las que no se enseña toda la geometría

- (TR14) No se tiene tiempo al no dársele prioridad en el orden de los temas en los libros de texto o currículum. Se considera que es más importante empezar por otros temas.
- (TE14) No se dispone de los medios y/o recursos para enseñar la geometría de manera organizada mediante técnicas que los alumnos puedan comprender.
- (E14) La dificultad para encontrar tareas del entorno cotidiano que se puedan usar como contexto para tratar los contenidos, así como para dirigir la enseñanza de estos implicados en estas situaciones lleva a que no se enseñen todos los contenidos geométricos.
- (I14) Se incide en la argumentación y en llevar a cabo investigaciones abiertas cuyo desarrollo implica más tiempo del que se requiere para trabajar el estudio de algunos conceptos. La selección de las tareas se hace por la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de ellas más que por los contenidos geométricos que se pueden tratar.

15. Contenidos geométricos que se priorizan

- (TR15) Aquellos que se señalan en el libro de texto y se necesitan para resolver las tareas que allí se plantean.
- (TE15) Aquellos que, centrándose en el currículum, se aplican para resolver tareas de geometría, otras partes de las matemáticas u otras disciplinas como física, tecnología, comunicación visual…
- (E15) Aquellos que se centran en las tareas de la descripción, análisis, generación, representación... vinculados con el entorno cotidiano.
- (I15) Aquellos que exploran una situación, para abordar, por un lado, los contenidos curriculares relativos a la enseñanza de conceptos y de procesos matemáticos y, por otro lado, la resolución de tareas que se

refieren a una problemática determinada centrando la atención en estrategias de resolución.

16. Razones por las que se le da importancia a los contenidos geométricos

   - (TR16/TE16) Se señalan en el libro de texto o curriculum.
   - (E16) Se requieren para organizar e interpretar el entorno del alumnado.
   - (I16) Se pueden aplicar en diferentes contextos. Además, desarrollan el razonamiento lógico (describir, clasificar, definir, probar, conjeturar…) y la argumentación.

17. Razones por las que se enseñan los contenidos geométricos

   - (TR17) están en el currículum.
   - (TE17) se aplican en ámbitos de las matemáticas y tienen carácter interdisciplinar.
   - (E17) forman al alumnado para el aprendizaje y la vida.
   - (I17) tienen un carácter investigativo y se aplican en diferentes contextos.

18. Cursos en los que se ha de enseñar la geometría

   - (TR18/TE18) En función del currículo y lo que proponga el libro de texto.
   - (TE18) En función del currículo e intereses que el profesorado vea para el alumnado por razones académicas posteriores.
   - (E18) En función del currículo e intereses que el profesorado vea del alumnado.
   - (I18) En función del currículo, intereses para el alumnado e investigación que pueda desarrollar.

19. Cuándo se considera que el alumnado lleva una preparación en geometría

   - (TR19) Conoce los contenidos propuestos en el currículo y resuelve los problemas que se plantean.
   - (TE19) Explica los contenidos geométricos adquiridos de manera organizada.
   - (E19) Relaciona los contenidos geométricos con las situaciones del entorno que se le plantean.
   - (I19) Explora, investiga, descubre relaciones y conjeturas, simboliza y aplica contenidos geométricos al resolver problemas en el ámbito geométrico escolar y fuera de él.

20. Razones por las que puede o no gustar la geometría al alumnado

   - (TR20) La memorización de las características de las formas y las fórmulas para resolver los problemas de medición.
   - (TE20) La construcción de las características de las formas y las fórmulas para resolver los problemas de medición.
   - (E20) La aplicación y conexión que puede tener con la vida real.

- (I20) La relación y aplicación que tiene en diferentes contextos cotidianos, el significado que le pueda dar el alumnado a lo que se le enseña y/o aprende y la investigación y descubrimientos que se hagan en el proceso.

(’)

- (TR20’/TE20’) Presentación de la asignatura por parte del profesorado.
- (E20’) Participación del alumnado en el descubrimiento de los contenidos de la asignatura.
- (I20’) Adquisición de los conocimientos implicando al alumnado en diversas investigaciones.

2.3.3.2.3 Los contenidos geométricos en la ESO

Los indicadores que asignamos a diferentes tendencias relativas a los contenidos geométricos de la ESO se refieren a: i) descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos; ii) las propiedades incluidas en una definición; iii) la elaboración de definiciones de familias de sólidos; iv) tipo de representaciones que se utilizan; v) relaciones entre familias; vi) relaciones entre conceptos; vii) los elementos de los sólidos; viii) los tipos de clasificación que se establecen; ix) las clasificaciones de los sólidos; x) los problemas de la clasificación, y xi) propiedades que se asocian a determinadas familias de sólidos.

21. Descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos

- (TR21) Descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos, centrándose en su aspecto físico, a partir de un ejemplo prototipo tomado de los dibujos de las formas geométricas o sobre la base de propiedades geométricas del libro de texto. Señala propiedades geométricas.
- (TE21) Descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos, centrándose en su aspecto físico, a partir de un ejemplo prototipo tomado de formas geométrica representadas mediante ordenador o construidas. Señala propiedades geométricas.
- (E21) Descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos, centrándose en su aspecto físico, a partir de ejemplos del entorno o mediante la construcción de los sólidos utilizando materiales manipulativos. Señala características visuales y funcionales de los sólidos y propiedades geométricas.
- (I21) Descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos, centrándose en su aspecto físico, a partir de diferentes ejemplos mostrados con distintas representaciones y relacionando las propiedades de estos ejemplos con las de otros sólidos y/o familias de sólidos. Señala características visuales y funcionales de los sólidos y propiedades geométricas.

22. Sobre las propiedades en las definiciones

- (TR22/TE22) Se centra la atención en que en las definiciones se incluyan las propiedades necesarias y suficientes para caracterizar las formas geométricas.
- E22) Se centra la atención en que en las definiciones para sólidos o formas planas se especifican propiedades de estos que permiten caracterizarlos; en ellas no se incluye todo el listado de propiedades que tiene el objeto geométrico correspondiente pero sí que contiene las necesarias para caracterizarlo.
- (I22) Se centra la atención en que al fijarnos en definiciones para sólidos o figuras planas se especifican propiedades de estos que los caracterizan completamente. Con el listado de propiedades que se tienen de ellos se pueden elaborar diferentes definiciones, cuestionándose y argumentando sobre si las propiedades que se delimitan son necesarias y/o suficientes para caracterizar el objeto geométrico correspondiente.

23. Forma de definir la familia de sólidos

- (TR23) Se definen o se busca la definición formal de las familias de sólidos. Las definiciones contienen todas las propiedades necesarias y suficientes para caracterizarlas. No se señalan formas equivalentes de una definición.
- (TE23)
- (E23) El alumnado elabora ideas/definiciones de las familias de sólidos como conjunción de propiedades que pueden no ser todas ellas necesarias para caracterizarlas.
- (I23) Se considera que hay un proceso de elaboración de definiciones para un sólido, familia de sólidos o figuras planas. Se quiere que el alumnado mediante ejemplos y no ejemplos llegue a establecer definiciones de estas familias y que explore desde un listado de propiedades aquellas que son necesarias y suficientes para caracterizar la familia de sólidos y/o de figuras planas correspondiente.

24. Tipos de representaciones que se utilizan especialmente

- (TR24) Prototipos dibujados por el/la profesor/a o representados en el libro de texto.
- (TE24) Modelos dibujados por el/la profesor/a, representados en el libro de texto, formas geométricas construidas o mediante programas informáticos.
- (E24) Modelos tomados del entorno o que se construyen, normalmente con diferentes materiales; se puede mostrar de diferentes tamaños, a diferentes distancias y en diferentes posiciones.
- (I24) Cualquier tipo de representación de formas geométricas tanto las que corresponden a representaciones planas como las físicas que se construyen con diferentes tipos de materiales manipulativos.

25. Relaciones entre familias

  - (TR25) Se señalan relaciones entre familias si se indican en el libro de texto.
  - (TE25) Se indican relaciones entre familias a partir de su representación.
  - (E25) El alumnado señala las relaciones entre familias apoyándose en representaciones planas o construidas con material.
  - (I25) El alumnado descubre y argumenta sobre relaciones entre sólidos, familias de sólidos y/o entre sus elementos apoyándose en representaciones planas y físicas en esta exploración.

26. Relaciones entre conceptos

  - (TR26) Indica relaciones entre conceptos si se señalan en el libro de texto.
  - (TE26) Indica relaciones entre conceptos a partir de la comparación de las formas.
  - (E26) Se indican las relaciones entre conceptos que surgen de formas del entorno.
  - (I26) Se descubren y argumenta sobre relaciones que existen entre determinados conceptos que pueden visualizarse al presentar las formas geométricas en diferentes contextos.

27. Sobre los elementos de los sólidos

  - (TR27) Si se contempla en el libro de texto, para formas especificas sencillas se indica el número de determinados elementos o la medida de ellos.
  - (TE27) Se muestra para formas especificas sencillas la forma de hallar el número de determinados elementos o la medida de ellos.
  - (E27) A partir de la construcción de las formas geométricas se pretende que se señale el número de determinados elementos o la medida de ellos.
  - (I27) Explorando en las diferentes formas en que se pueden presentar las formas geométricas se investiga, determina y argumenta sobre el número de determinados elementos o la medida de ellos.

28. Sobre los tipos de clasificación que se establecen

  - (TR28/TE28) Se establecen clasificaciones-particiones que cubren todo el universo, considerando como criterio de clasificación propiedades geométricas, utilizando uno o varios criterios de clasificación.
  - (E28) Se busca que se establezcan clasificaciones aplicando criterios de construcción y/o criterios visuales.
  - (I28) Se busca que establezcan clasificaciones-particiones que cubren todo el universo, clasificaciones aplicando criterios de construcción y clasificaciones jerárquicas, considerando como criterios de clasificación tanto criterios visuales como las basados en propiedades geométricas.

29. Clasificación de los sólidos

- (TR29/TE29) Clasifica los sólidos considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos o atributos visuales.
- (E29/I29) Quiere que se clasifiquen los sólidos considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos o atributos visuales.

30. Problemas de clasificación

- (TR30/TE30) Plantea problemas sobre clasificaciones-particiones relativos a relaciones de familias sobre formas geométricas si aparecen en el libro de texto.
- (E30) Plantea problemas sobre clasificaciones-particiones relativos a relaciones de familias con familias del entorno.
- (I30) Explora e investiga a partir de problemas sobre clasificaciones-particiones y clasificaciones-jerárquicas relativos a relaciones de familias con diversos tipos de familias.

31. Propiedades que se asocian a familias de sólidos

- (TR31/TE31) Se asocian propiedades a determinadas familias de poliedros e identifican familias de sólidos a partir de varias (o una) propiedades si se plantea en el libro de texto.
- (E31) Se asocian propiedades a determinadas familias de poliedros (y/o figuras planas) e identifican familias de sólidos (y/o figuras planas) a partir de varias (o una) propiedades remitiendo a objetos del entorno como alguna de sus representaciones visuales.
- (E31) Se asocian propiedades a determinadas familias de poliedros e identifican familias de sólidos a partir de varias (o una) propiedades usando y explorando a partir de diversos tipos de representaciones.

2.3.3.2.4 La labor docente del profesorado en la ESO

Los indicadores que asignamos a diferentes tendencias relativas a la labor docente del profesorado de la ESO se refieren a: i) el papel del profesorado en relación con los contenidos; ii) la metodología, y iii) el profesorado, el alumnado y los contenidos implicados en la enseñanza.

32. ¿Qué se hace en relación con los contenidos?

- (TR32) Transmitir los contenidos verbalmente.
- (TE32) Transmitir los contenidos usando medios tecnológicos y/o con material manipulable.
- (E32) Inducir al alumnado a participar en las tareas que se proponen para lograr el aprendizaje de los contenidos utilizando modelos o material comercializado.
- (I32) Provocar la curiosidad en el alumnado conduciendo sus investigaciones en las que están implicados los contenidos y dirigiendo la atención hacia su aprendizaje.

33. Impartición o no de los contenidos

   - (TR33) Depende de que estén o no en el currículum y/o libro de texto, impartiéndolos sin apenas modificarlos.
   - (TE33) Depende de que estén o no en el currículum y/o libro de texto, pero se modifican según el dominio o formación que se posea, la dificultad que puedan tener para el alumnado o de la utilidad que puedan tener para cursos posteriores.
   - (E33) Depende de su conexión con el entorno, del tiempo de que disponga o de si se dispone de modelos y/o material manipulable.
   - (I33) Depende de la riqueza matemática que conlleven las investigaciones que se puedan proponer en las que estén implicados los contenidos, del tiempo del que se disponga, de si se dispone de material o de las capacidades del alumnado que se desarrollen.

34. ¿Cómo se imparte la enseñanza?

   - (TR34) Explicando lo reflejado en el libro de texto.
   - (TE34) Exposición de los contenidos, pero no en su fase final, sino simulando su proceso de construcción, utilizando estrategias organizativas/expositivas (uso de ejemplos, cuestiones a los alumnos, uso de material para ejemplificar...). que procuran ser atractivas. Actúa como un técnico del contenido y del diseño didáctico.
   - (E34) El profesorado propone tareas de manipulación de modelos (propiciando, a menudo, el uso de materiales manipulativos), a través de los cuales se producirá, eventualmente, un conocimiento no organizado, analizando reacciones y respuestas a sus propuestas.
   - (I34) El profesorado tiene organizado el proceso que llevará al alumnado a la adquisición de unos conocimientos determinados, a través de las tareas e investigaciones que propone.

35. ¿Cómo actúa?

   - (TR35) Como especialista del contenido.
   - (TE35) Como técnico del contenido y del diseño didáctico.
   - (E35) Humanista y especialista en dinámica de grupos.
   - (I35) Como experimentador interactivo del contenido y de los métodos lo que le obliga a analizar los procesos en el contexto del aula.

36. Tareas que se plantean en el aula

   - (TR36) Repetición iterada de tareas tipo.
   - (TE36) Repetición de tareas que intentan reproducir los procesos lógicos y, coherentemente, el estudio de los errores por parte del alumnado.
   - (E36) Realización de tareas experimentales no reflexivas en las que se ponen en juego métodos, recursos, etc., que conectan con el entorno cotidiano.

- (I36) Realización de tareas en las que el alumnado se enfrenta habitualmente a situaciones para las que no poseen procesos de resolución dados (situaciones problemáticas, ya sean problemas o investigaciones, frecuentemente contextualizadas en problemáticas reales).

37. Material manipulativo que se utiliza

- (TR37) No se utiliza.
- (TE37) De manera aislada para reforzar, explicar o dar utilidad a la teoría.
- (E37) Sí, de forma asidua materiales variados para motivar al alumnado y facilitar su comunicación. El alumnado los ha de manipular.
- (I37) Sí, materiales variados siempre que encajen en las investigaciones que se proponen. Se usan para facilitar la comunicación de formas geométricas, como encaje para algunas exploraciones que se proponen o para facilitar que se pase de lo concreto a lo abstracto.

38. Forma en que se presentan los objetivos al alumnado

- (TR38) Los contenidos se identifican con los conceptos, enunciados como objetivos de carácter terminal. El propio tratamiento de contenidos que podrían ser procedimentales los convierte en conceptuales.
- (TE38) Se persiguen objetivos terminales y funcionales, poniéndose más énfasis en objetivos procedimentales locales.
- (E38) Los objetivos solo definen un marco genérico de actuación (carácter orientativo) y están sujetos a eventuales modificaciones en cuanto al grado de consecución (flexibles).
- (I38) Los objetivos marcan claramente las intenciones educativas, pero están sujetos a reformulaciones bien fundamentadas.

39. Presentación de ejemplos de sólidos al alumnado

- (TE39/TR39) Muestra un sólido como ejemplo o no ejemplo de determinada familia de sólidos.
- (E39) Plantea al alumnado que identifique si un sólido puede ser ejemplo o no ejemplo de determinada familia de sólidos.
- (I39) Plantea al alumnado que se identifique si un sólido puede ser ejemplo o no ejemplo de determinada familia de sólidos y que se hagan modificaciones o transformaciones en él para explorar las propiedades que se mantienen y/o cambien al realizar la transformación correspondiente.

40. Identificación de la información de un sólido

- (TR40) El profesorado identifica la información dada en un modelo sólido dibujado por el profesorado o representado en el libro de texto. Explica la respuesta en términos de propiedades.
- (TE40) El profesorado identifica la información dada en un modelo sólido apoyado de dibujos, libro de texto, representaciones mediante

ordenador o algún modelo. Explica la respuesta en términos de propiedades o aplica esta información a uno de los desarrollos.
- (E40) Busca que el alumnado identifique la información dada en un modelo sólido de su entorno o construido. Se explica la respuesta en términos de propiedades o aplica esta información a uno de los desarrollos.
- (I40) Busca que el alumnado argumente la información dada en un modelo sólido en cualquier contexto. Se explica la respuesta en términos de propiedades o aplica esta información a uno de los desarrollos.

41. Descripción de las formas

- (TR41/TE41) Descripción por parte del profesorado.
- (E41/I41) Descripción por parte del alumnado.

42. Validación de la información

- (TR42) El profesorado (y/o el libro de texto) es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, corrigiendo a los alumnos en caso de errores y aportando él mismo la información correcta.
- (TE42) El profesorado es el que valida las ideas que se movilizan en el aula, planteando interrogantes a al alumnado cuyas respuestas llevan a la "autocorrección" (en verdad es una corrección enmascarada del profesorado).
- (E42) La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo (grupo-clase o pequeños grupos de trabajo). En ocasiones se sustituye el papel de la corrección que en TR/TE juega el profesorado por los compañeros/as, pero no se potencia que el alumnado "se pare a reflexionar" sobre sus ideas ni que desarrollen estrategias de autovalidación de las mismas.
- (I42) La información que se moviliza en el aula es validada por el grupo, por el/la profesor/a o por el/la propio/a alumno/a. En cualquier caso, se potencia la reflexión del alumnado y el desarrollo de estrategias para su autocorrección, propiciándose que los/as estudiantes asuman responsabilidad a la hora de juzgar la adecuación de sus ideas.

43. Participación del alumno en la clase

- (TR43/TE43) El alumno no condiciona ni directa ni indirectamente el diseño de las tareas, programación, etc.
- (E43) El alumno condiciona indirectamente la selección y/o secuenciación de contenidos y objetivos (a través de la negociación de intereses), y en el diseño didáctico (a través de sus intervenciones en el quehacer del aula).
- (I43) El alumno condiciona directa e indirectamente el diseño didáctico.

44. Fuentes de información para el alumno

    - (TR44) Las principales fuentes de información para el alumno las constituyen el profesor y el libro de texto.
    - (TE44) El libro de texto se ve ampliado por otros materiales donde se encuentra el "conocimiento establecido" (Internet, enciclopedias, libros especializados...). Se mantiene el papel del profesor como principal fuente de información.
    - (E44/I44) La información que se moviliza en el aula puede provenir del profesor, de los alumnos, de otras personas que intervengan, de situaciones cotidianas.

45. El tipo de errores a los que se hace referencia

    - (TR45) Se especifican errores a nivel teórico, como puede ser el no saber los conceptos o fórmulas que se han de utilizar, o a nivel práctico como pueden ser errores de cálculo.
    - (TE45) Se indican errores de técnica, criticando el profesorado la ejecución de un modo operativo conocido, y errores de tecnología, criticando el profesorado la elección de la técnica.
    - (E45) Se hace referencia a errores relacionados con la manipulación, observación y visión de los objetos geométricos presentados.
    - (I45) Se incide en ideas erróneas que se manifiestan y otros errores que se refieren a relaciones, representaciones o fallos en el razonamiento.

46. Dificultades que se detectan en el alumnado en relación con el aprendizaje de contenidos geométricos

    - (TR46) Dificultad para retener en la memoria los contenidos presentados y las técnicas utilizadas para resolver los problemas.
    - (TE46) Dificultad para encontrar la técnica o tecnología apropiada.
    - (E46) Dificultades derivadas de las propias representaciones físicas de los sólidos, como consecuencia de que los modelos físicos con los que se trabaja en tareas son objetos del entorno o representaciones materiales de las formas geométricas.
    - (I46) Dificultad para identificar los contenidos geométricos implicados en el desarrollo de una tarea investigativa, para extender y/o adaptar a una nueva situación o contexto estrategias utilizadas en otro contexto o situación, para desarrollar el nivel de razonamiento, para poder comunicar las formas tridimensionales, expresar con fluidez y precisión las propiedades, clasificaciones y definiciones, así como dificultad para establecer y expresar relaciones entre los contenidos geométricos.

2.4 El análisis de los datos

Con el propósito de dar respuesta a los objetivos de nuestra investigación, hemos realizado un análisis cualitativo y cuantitativo sobre las frecuencias en las que aparecen los enunciados o las categorías que hemos establecido. El análisis de los datos se ha llevado a cabo en varias fases que han correspondido a distintos momentos en relación con la recogida de los datos y con la comprensión del proceso de estudio. Este análisis lo presentamos distinguiendo el análisis de los datos que provienen de la encuesta, que presentamos en el apartado 2.4.1 del análisis que proviene de los cursos, que mostramos en el apartado 2.4.2.

2.4.1 Análisis de los datos de la encuesta

En un primer momento, tras la recogida de los datos mostrados en las encuestas, se realizó un análisis que ha sido preliminar en este estudio. El análisis se llevó a cabo con los instrumentos apuntados en el apartado 2.3.1 de este capítulo. Analizando las respuestas que el profesorado participante señaló en las encuestas y cuyo estudio se detalla en Pérez (2006) y en sus comunicaciones Pérez y Guillén (2007, 2008), se obtuvieron resultados y dado respuesta a los objetivos señalados en dicho estudio, que ha constituido el punto de partida de esta investigación, la cual se ha ampliado con nuevos objetivos y nuevos métodos de toma de datos. Remitimos a estos trabajos en los que se detalla el análisis realizado de los datos obtenidos con este instrumento.

2.4.2 Análisis de los datos de los cursos

Para analizar los datos obtenidos en el desarrollo de los cursos CC, CP y CO, por la forma en la que se registraron los datos que describimos en la sección 2.3, previamente se tuvo que realizar una lectura y/o audición de las contestaciones y desarrollo de la clase. Se procedió a la transcripción de las partes de las sesiones pertinentes para nuestro estudio y a las anotaciones de las contestaciones que contenían los aspectos que parecieron más relevantes. Por ejemplo, en la figura 2.38 se incluye un extracto de estas transcripciones. El análisis se realizó considerando las respuestas para cada una de las tareas o subtareas dadas por los/as profesores/as a los que se les propusieron en los cursos remarcando en las transcripciones de las respuestas de los/as profesores/as las expresiones que pudieran aportar información en relación con alguno de los objetivos de nuestro estudio. Para seleccionar estas expresiones tomamos como referencia las plantillas diseñadas como referentes para el análisis y que se han descrito en el apartado 2.3.2 y los indicadores elaborados para los diferentes perfiles de profesores/as que se incluyen en el apartado 2.3.3. Así mismo también se han tenido en cuenta estas plantillas e indicadores para codificar las respuestas seleccionadas y para hacer diferentes observaciones en relación con las respuestas dadas.

Una vez codificadas las respuestas de los/las profesores/as, cuando se ha considerado necesario, se han registrado en tablas para realizar el análisis cuantitativo y se ha realizado una interpretación de las respuestas contrastándolas con estudios previos que se han realizado al respecto (véase el subapartado 2.4.2.1).

También nos hemos fijado en todas las observaciones que se reflejan en las respuestas de cada profesor/a participante en relación con los objetivos del estudio. Dado que las observaciones las realizamos considerando las respuestas del/de la profesor/a correspondiente para las tareas o subtareas que se desarrollaban en el curso, las relativas a cada profesor/a dependen de las tareas que se han tratado en el curso en el que ha participado (véase el subapartado 2.4.2.2).

Estas observaciones junto con las características/indicadores asignados a los perfiles de profesores/as que presentamos en el subapartado 2.3.3.2 se han tomado como referente para hacer observaciones concernientes al perfil y/o perfiles que refleja el/la profesor/a correspondiente (véase el subapartado 2.4.2.3).

2.4.2.1 Expresiones de respuestas de profesores/as organizadas según las tareas y subtareas de las que provienen

Para detallar cómo hemos realizado el análisis de los datos, en este subapartado, como ejemplo, mostramos el análisis realizado de datos que provienen del profesorado del curso en comunidad en relación con la descripción y la descripción de poliedros.

La figura 2.46 corresponde al extracto de la segunda sesión del curso en comunidad que hace referencia a la tarea TCrCp1, relacionada con "la descripción" y "la descripción de los poliedros".

PD: Dado que vamos a tratar en este curso, entre otros aspectos, la descripción, me gustaría que indicarais ¿Qué entendéis por describir en geometría?
PC3: Voy a empezar yo, para mí es señalar las propiedades y nombres de las figuras geométricas.
PD: ¿Y Tú?
PC2: Yo diría que es enumerar las características o propiedades de las figuras geométricas.
PD: A ver ahora tú.
PC1: Explicar, indicar y dibujar las partes o elementos de las figuras geométricas.
PD: Y finalmente, tú que dirías que es describir.
PC4: Identificar y conocer los elementos de las figuras geométricas.
PD: Vamos a centrarnos en la descripción dentro de las formas geométricas, en una familia infinita los poliedros ¿Alguien puede comenzar a describir los poliedros?
PC1: Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.
PC3: Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por caras en forma de polígonos.
PC4: Un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos planos.
PC2: Yo definiría poliedro como un cuerpo geométrico determinado por cuatro o más polígonos.
PD: A ver imagino que también definirías sus elementos ¿no?
PC4: Claro, yo diría que sus está formados por caras que son los polígonos que limitan al poliedro; aristas que son la intersección de las caras; vértices que son los puntos comunes a tres o más aristas.; diagonales que son los segmentos que unen dos vértices situados en caras distintas y ángulo diedro es el ángulo que forman como mínimo dos caras o aristas.
PC1: Efectivamente, diría que se distinguen las Caras del poliedro que son los polígonos que lo forman.; las aristas que son los lados de las caras. En cada arista se juntan dos caras; los vértices que son la intersección de tres o más aristas; el ángulo diedro es el ángulo formado en el vértice y la diagonal es la recta que une dos vértices del poliedro.
PC2: Sus elementos son las caras que son los polígonos; aristas que son los lados de los polígonos; vértices que son los vértices de los polígonos del poliedro; ángulo diedro que es el ángulo formado por la intersección de dos caras; diagonal de un poliedro es el segmento que une dos vértices no consecutivos del poliedro.
PC3: También diría que las caras que son los polígonos que limitan el poliedro; las aristas que son donde confluyen dos caras; los vértices que son los puntos comunes de las aristas; el ángulo diedro: Es el ángulo formado por dos caras que también se llama ángulo sólido y la diagonal de un poliedro es el segmento que une dos vértices no consecutivos del poliedro.
PD: Ahora vamos a describir otra forma geométrica.

Figura 2.38. Idea sobre describir y describir poliedros

Teniendo en cuenta la tabla 2.5, referida a la idea de descripción que se refleja, las respuestas de los/as profesores/as PC1 a PC4 las hemos codificado como sigue:

PC1 ha indicado que es explicar, indicar y dibujar las partes o elementos de las formas geométricas con lo que lo hemos codificado con DDI4 (indica/explica elementos) y DDI5 (dibuja elementos o formas). En cuanto a PC2 que ha señalado que es enumerar las características o propiedades de las figuras geométricas y PC3 que ha apuntado que es enumerar las características o propiedades de las figuras geométricas hemos codificado ambas respuestas con DDI1 (describir es enunciar propiedades). En relación con PC4 que ha anotado que es identificar y conocer los elementos de las figuras geométricas lo hemos codificado como DDI4 (indica/explica elementos).

Para la interpretación de los datos, nos apoyamos en trabajos de Guillén (1997) y de Alsina (1997). Lo que destacamos de estas respuestas es lo siguiente:

Se observa que las respuestas PC2 y PC3 están en concordancia con Guillén (1997) quien señala que la palabra describir en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos.

Guillén (1997) subraya además que lo que varía de un nivel a otro es el tipo de propiedades que se incluyen en la lista. En el primer nivel de Van Hiele, en la descripción se incluyen características visuales y funcionales. En el segundo nivel, se empieza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos. En el tercer nivel ya se puede enunciar y entender de manera matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas. Cabe señalarse que en los/as profesores/as PC1 a PC4 no hacen referencia a que la lista de propiedades variaría según el curso en que se diera.

Si ahora nos apoyamos en el trabajo de Alsina et al. (1997, p. 31) podemos considerar que podemos referirnos a la descripción de un objeto analizando cómo se ha construido, de que elementos dispone, los planos de simetría, como de distribuyen los elementos, qué relación hay entre los elementos, grado de simetría, conocer el objeto a partir de una descripción; asociar, identificar una figura geométrica, ver sus partes. Señalamos pues que los/as profesores/as PC1 y PC4 al describir se centran en las partes o elementos que componen las formas. Además, PC1utiliza la representación gráfica mediante dibujos como una forma de describir. Asimismo, PC3 al describir nombra las formas.

En lo que concierne a la descripción de los poliedros (tabla 2.7) hemos codificado las respuestas del profesorado del curso en comunidad como se muestra en las tablas 2.28, 2.29, 2.30 y 2.31.

Para las respuestas de PC1, véase la tabla 2.28.

Código	Razones
DDPoP1	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los sólidos al señalar que es un cuerpo geométrico
DDPoP2	Todas las aristas son rectas al señalar que las aristas son los lados de las caras, siendo estas polígonos)
DDPoP3	Comenta que los vértices son la intersección de tres o más aristas)
DDPoE1A	Da una idea de lo que son las caras
DDPoE1B	Señala que son las aristas
DDPoE1C	Señala que son los vértices
DDPoE1E	Señala que es el ángulo diedro
DDPoE1M	Señala que tiene diagonales en general sin especificar de que tipo son

Tabla 2.28. Codificación a las respuestas de PC1

Las respuestas de PC2 se registran en la tabla 2.29.

Código	Razón
DDPoP1	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los sólidos al señalar que es un cuerpo geométrico
DDPoP2	Todas las aristas son rectas al señalar que las aristas son los lados de los polígonos
DDPoP4A	Limitado por cuatro o más polígonos
DDPoE1A	Señala que son las caras
DDPoE1B	Señala que son las aristas
DDPoE1C	Señala que son los vértices
DDPoE1E	Señala que es el ángulo diedro
DDPoE1M	Señala que tiene diagonal del poliedro en general sin especificar de qué tipo son

Tabla 2.29. Codificación a las respuestas de PC2

Para las de PC3 tenemos la tabla 2.30.

Código	Razón
DDPoP1	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los sólidos al señalar que es un cuerpo geométrico
DDPoP2	Todas las aristas son rectas al apuntar que son donde confluyen dos caras
DDPoE1A	Expresa una idea de caras de un sólido
DDPoE1B	Indica lo que son las aristas
DDPoE1C	Señala lo que son los vértices
DDPoE1E	Expresa una idea de ángulo diedro
DDPoE1M	Da una idea de diagonal del poliedro, sin especificar de qué tipo

Tabla 2.30. Codificación a las respuestas de PC3.

Y para las de PC4, la tabla 2.31.

Código	Razón
DDPoP1	Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los sólidos al señalar que es un cuerpo geométrico
DDPoP2	Todas las aristas son rectas al señalar que son la intersección de las caras
DDPoP4A	Determinado por cuatro o más polígonos
DDPoE1A	Señala que son las caras
DDPoE1B	Señala que son las aristas
DDPoE1C	Señala que son los vértices
DDPoE1E	Señala que es el ángulo diedro
DDPoE1M	Señala que tiene diagonal refiriéndose a las del espacio sin indicarlo

Tabla 2.31. Codificación a las respuestas de PC4

La tabla 2.32, elaborada a partir de las tablas 2.28, 2.29, 2.30 y 2.31, registra las respuestas sobre la descripción de los poliedros del profesorado del curso en comunidad.

Docente	DDPoP						DDPoE												
	1	2	3	4			1												
				A	B	C	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
PC1	x	x	x				x	x	x		x								x
PC2	x	x		x			x	x	x		x								x
PC3	x	x					x	x	x		x								x
PC4	x	x	x	x			x	x	x		x								x

Tabla 2.32. Respuestas sobre la descripción de los poliedros en el curso en comunidad

La interpretación que hacemos de las respuestas registradas en la tabla 2.32 se apoya en los trabajos de Guillén descritos en nuestro marco teórico.

Señalamos que todo el profesorado de este curso expresa una idea de descripción de poliedros que se contempla en Guillén (1997), al indicar que es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.

Por lo que se refiere a las aristas, cuando se indica que las caras son polígonos, consideramos que se entiende que las aristas son rectas si bien no se ha hecho explícito. Solo PC1 y PC4 apuntan que en los vértices se juntan por las menos 3 caras o aristas.

Guillén (op. cit.) subraya que a la hora de describir los poliedros se ha de hacer hincapié en las expresiones que indican los elementos mínimos que forman los poliedros, indicando la autora que en los vértices se juntan por lo menos 3 caras y que los poliedros como mínimo tienen 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Cabe pues, anotarse que PC4 usa "como mínimo" cuando comenta que los poliedros han de tener como mínimo cuatro caras. Y que PC1 y PC4 utilizan las expresiones "tres o más…" al hablar de algún elemento en particular, como son las aristas que confluyen en un vértice. Se aprecia que el profesorado no suele hacer uso de estas expresiones salvo en caso muy concretos y solo algunos/as profesores/as.

De las respuestas proporcionadas concluimos que todo el profesorado en comunidad indica como elementos las caras, los vértices, las aristas, los ángulos diedros y las diagonales, sin especificar en general cuáles. Las propiedades que se han indicado son específicas de los poliedros. No se señala, en general, el número de elementos que ha de tener como mínimo.

Anotamos también que a veces se utiliza vocabulario de la geometría plana sustituyendo vocabulario de la geometría de los sólidos.

2.4.2.2 Observaciones organizadas según los objetivos del estudio

Ya hemos indicado en la introducción del apartado 2.4.2 que en las transcripciones de las respuestas remarcábamos expresiones que pudieran aportar información en relación con alguno de los objetivos de nuestro estudio, seleccionadas tomando como referencia las plantillas (véase apartado 2.3.2) e indicadores elaborados para los diferentes perfiles de profesores/as (véase apartado 2.3.3). Hemos adelantado también que el análisis de los datos se realizó considerando las respuestas del profesorado participante en el estudio para las tareas o subtareas que se desarrollaban en el curso correspondiente, con lo que las relativas a cada profesor/a dependen de las tareas que se han tratado en el curso en el que ha participado.

Como ejemplo, en las figuras 2.39 a 2.43 registramos las observaciones asociadas al profesor/a PC3 agrupadas según el objetivo 1 al 5.

La figura 2.39 registra las observaciones asociadas a PC3 en relación con el objetivo 1, sobre creencias y concepciones que tiene el profesorado de la ESO sobre la geometría y su enseñanza/aprendizaje.

El profesor y la geometría:

- La idea que señala de geometría es como la materia que estudia las formas: los cuerpos geométricos y las figuras planas. Las acciones sobre los objetos de estudio en lo que se basa es en la medida referida al cálculo de magnitudes.
- La geometría le gusta, la ve interesante y útil.
- Relaciona la geometría con los objetos de entorno y con otras áreas de la ESO.

El alumno y el profesor desde el punto de vista del profesor:

- Piensa que al alumnado no le gusta la geometría porque se ha de aprender las formas geométricas y sus fórmulas.
- El alumnado cuando llega a los cursos de secundaria conoce las figuras planas y sus fórmulas para calcular mediciones, Muestra deficiencia en las formas del espacio.
- Considera fundamental trabajar en primaria las figuras planas y sus magnitudes, así como que se presenten algunas formas del espacio y se calcule su volumen.

El profesor en relación con sus compañeros de trabajo y la geometría:

- El profesorado no le da importancia a la enseñanza de la geometría, no aparece al principio en los libros de texto y se deja para el final.

Como iniciar la enseñanza de la geometría:

- Se empieza por las figuras planas para poder entender los sólidos.

Ideas sobre la descripción y la clasificación:

- Contempla la descripción como enunciar propiedades y nombrar las formas geométricas.
- Considera la clasificación como diferenciar las formas geométricas.

La importancia que tienen los contenidos geométricos de la descripción y la clasificación en la enseñanza:

- La descripción es importante porque hace que se conozcan las formas geométricas y se puedan resolver los problemas de medición.
- La clasificación es importante porque ordena y establece relaciones entre las formas geométricas.

Finalidad de la descripción y la clasificación:

- Centra su enseñanza en los contenidos del currículum o libro de texto dependiendo de su utilidad en cursos posteriores.

Situaciones en las que se aplica la descripción y la clasificación de las formas geométricas:

- La descripción se aplica en la enseñanza en la descripción de las formas geométricas y en los temas de geometría y medida. Fuera de la enseñanza en la explicación y realización de cálculos de medición de los objetos cotidianos.
- La clasificación se aplica en la enseñanza en el bloque de geometría. Fuera de la enseñanza en la clasificación de los objetos.

Figura 2.39. Sobre creencias y concepciones que tiene PC3 sobre la geometría y su enseñanza/aprendizaje

En cuanto al objetivo 2 que versa sobre los conocimientos que se expresan sobre contenidos geométricos relativos a la descripción, clasificación y establecimientos de relaciones en ESO las observaciones que asociamos a PC3 se muestran en la figura 2.40.

Conceptos relacionados con la descripción y la clasificación:

- Los elementos de los sólidos que indica conocer son aquellos que tienen una fuerte componente visual (elementos visuales) y que son las caras, aristas y vértices. Además, los ángulos diedros y las diagonales sin especificar de qué tipo son.
- Define caras, vértices y aristas centrándose en las formas del espacio.

- Tiene la idea de ángulo diedro, pero no lo define del todo correctamente. Señala que también ángulo sólido.
- Tiene la idea de diagonal en la geometría del plano.
- Coincide el concepto de plano de simetría y eje de rotación con nuestro narco teórico.

La descripción de las formas geométricas por su nombre (poliedro):

- Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los sólidos.
- Especifica que todas las aristas son rectas.
- No señala que en los vértices se juntan por lo menos 3 caras o aristas.
- No señala que en los vértices se juntan por lo menos 3 caras o aristas.
- Se centra en caras, vértices, aristas, ángulos diedros y diagonales sin especificar cuales.

La descripción de las formas geométricas por su nombre (prismas):

- Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los poliedros.
- No especifica que todos los vértices son de orden 3.
- Solo identifica relaciones de paralelismo en las bases.
- Solo identifica relaciones de igualdad en las bases.
- Los elementos en lo que centra la descripción son las bases y las caras laterales.
- No indica fórmulas generalizadas para prisma de base "n" lados.

La descripción de las formas geométricas por su nombre (paralelepípedos):

- Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece los prismas.
- Especifica que todas las caras son paralelogramos.
- No especifica que son prismas cuadrangulares ni las propiedades de los prismas cuadrangulares.
- No especifica que son prismas convexos ni las propiedades de los prismas convexos.
- No hace referencia a ninguna relación ni de paralelismo ni de igualdad entre las caras de los paralelepípedos.
- No ha anotado ninguna expresión en relación con el mayor número diferente de medidas que pueden tener respecto de las caras, aristas y ángulos de las caras.
- No hace mención a las propiedades que se pueden observar en los paralelepípedos en relación con las diagonales de las caras.
- No se especifica el número de elementos que tienen.

La descripción de las formas geométricas mediante diferentes tipos de representaciones (pirámide):

- No especifica propiedades de las pirámides.
- Centra su definición en los elementos base, caras laterales y altura.
- No indica fórmulas generalizadas para una pirámide de base "n" lados.

La descripción de las formas geométricas mediante diferentes tipos de representaciones (octaedro):

- No especifica las propiedades a la que pertenece el octaedro.
- Centra su definición en como son las caras.
- Indica el orden de los vértices.
- Indica el número de elementos solo para las caras.

La descripción de las formas geométricas mediante diferentes tipos de representaciones (esfera):

- Especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece la esfera.
- Centra su definición en función de la distancia de sus puntos al centro.
- No señala la figura que se obtiene cuando se secciona la esfera con un plano.
- Se centra en los elementos centro, radio, diámetro y cuerda.

La descripción de las formas geométricas mediante diferentes tipos de representaciones (cilindro):

- No especifica que cumple las propiedades de la familia a la que pertenece el cilindro.
- Especifica que tiene dos bases que son círculos iguales.
- Es un cilindro de revolución.
- Se centra en los elementos base, generatriz, radio, altura, eje.

Sobre las diferentes representaciones mostradas

- Mostrar las formas geométricas con objetos reales hace que se vea su aplicación en el entorno.

Análisis de la descripción mediante problemas de contexto subtarea *S-TCg1- P1*:

- Coincide la definición de poliedro con la proporcionada cuando se le pregunta por ella.
- Señala correctamente los elementos que tienen los poliedros.
- Señala que las caras laterales no consecutivas son iguales, pero no paralelas.
- Tiene el concepto claro de prisma recto y rectangular.

Análisis de la descripción mediante problemas de contexto subtarea *S-TCg1- P5*:

- No parece centrar la atención en las formas geométricas que se presentan en la naturaleza.
- No tiene claro que la forma geométrica de base hexagonal rellene mejor el espacio que la forma geométrica de base cuadrada. Centra en el dibujo proporcionado.

Relación de igualdad en un poliedro:

- No suele establecer relaciones de igualdad entre los elementos de un poliedro.
- No coincide con nuestro marco teórico los conceptos de caras iguales, caras del mismo tipo y vértices iguales.
- Coincide con nuestro marco teórico el concepto de vértices del mismo tipo.

Relación entre poliedros:

- Se explica desde la comparación de las características de formas generales.
- Especifica una o dos características generales básicas correctas, señalando elementos que tienen en común.
- No señala ejemplos y/o contraejemplos.
- No señala fórmulas matemáticas.
- No señala relaciones de inscripción o descomposición.

Relación entre cuerpos de revolución:

- Basa la explicación a partir de formas geométricas particulares.
- Especifica una característica particular correcta, las formas geométricas concretas que se obtienen haciendo cortes paralelos a la base.
- Señala los ejemplos propuestos.
- No señala fórmulas matemáticas.

Relación entre poliedros y cuerpos de revolución:

- Basa la explicación a partir de formas geométricas particulares.
- Especifica una característica particular correcta, el poliedro que se obtiene cortando un cuerpo de revolución (truncamiento).
- Especifica una o dos características generales básicas correctas, señalando elementos que tienen en común.
- Señala los ejemplos propuestos.
- No señala fórmulas matemáticas.

Relación entre los elementos del espacio y del plano:

- Basa la explicación a partir de formas geométricas particulares.
- Especifica una característica particular correcta, la figura plana que se obtiene truncando un sólido.
- Señala los ejemplos propuestos.
- No señala fórmulas matemáticas.

Relación entre los elementos del plano:

- Basa la explicación a partir de las figuras geométricas particulares y también generaliza propiedades.
- Especifica una característica particular correcta, las figuras planas (triángulos) que se obtienen descomponiendo una figura (hexágono).
- Señala los ejemplos propuestos.

- No señala fórmulas matemáticas.

Relación entre poliedros regulares: dualidad de poliedros:

- Basa la dualidad de los poliedros regulares convexos en la inscripción unos dentro de otros.
- Conoce los poliedros regulares convexos.
- No señala relaciones los ejes de rotación y planos de simetría.

Clasificación de los sólidos:

- Clasifica los sólidos en poliedros y cuerpos redondos o de revolución.
- Clasificación partición.
- Clasificación según atributos que tiene (tipo de caras).
- Clasificación según como están formados/como se generan.
- Señala propiedades (tipo de caras) y como se genera.

Clasificación de los poliedros y los no poliedros:

- Clasifica partición para los poliedros: regulares e irregulares.
- Clasifica con criterios cualitativos, regularidad de las figuras planas que lo forman
- Clasifica los poliedros indicando ejemplos.
- Señala de las propiedades las figuras planas que lo forman.
- Los sólidos no poliedros señalando nombres.
- Los sólidos no poliedros los ve como sólidos redondos y como sólidos de revolución.

Clasificación de los prismas y las pirámides:

- Clasifica los prismas y las pirámides fijándose en el número de lados de los polígonos de las bases por analogía con una clasificación realizada en el plano de los polígonos atendiendo al número de lados (clasificación por analogía).
- Clasifica los prismas y las pirámides con un criterio basado en observaciones/percepciones que se hacen sobre ellos y que tienen un fuerte componente visual como son rectos y oblicuos (clasificación partición).
- Clasificación partición de los prismas y pirámides en los que la regularidad o no de los polígonos de las bases hace que el prisma o la pirámide sea regular o no.
- Clasifica los prismas y las pirámides indicando ejemplos.

Clasificación de las formas geométricas en dos dimensiones:

- Clasifica los polígonos en clasificaciones partición basándose en el número de lados que tiene el polígono, apoyándose en los criterios cualitativos de la regularidad o no de los lados y ángulos del polígono y centrándose en observaciones/percepciones de los ángulos que tiene una fuerte componente visual, indicando la distinción entre cóncavos y convexos. Señala algunos ejemplos.
- Clasifica los triángulos realizando clasificaciones partición. Los dos tipos de clasificaciones que ha indicado que realiza es, una centrándose en la medida o amplitud de los ángulos y, la otra, atendiendo a la longitud de los lados. Señala algunos ejemplos.
- Clasifica los cuadriláteros realizando clasificación partición por lados paralelos y ángulos diferenciando 6 tipos de figuras el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo, el rombo, el trapecio y el trapezoide.
- No suele clasificar los hexágonos, pero lo haría en regulares e irregulares (clasificación partición).

Figura 2.40. Conocimientos que se expresan sobre contenidos geométricos relativos a la descripción, clasificación y establecimientos de relaciones en ESO de PC3

La figura 2.41 registra las observaciones asociadas a PC3 relativas al objetivo 3, sobre examinar la enseñanza de los contenidos geométricos de la descripción y la clasificación de las formas geométricas del espacio del profesorado de la ESO.

Como se introduce y se enseña la descripción y la clasificación:

- Introduce junta la clasificación y la descripción.
- Empieza por la descripción y clasificación de la geometría plana.
- Introduce la descripción a partir de modelos construidos o representaciones gráficas.
- Son los alumnos/as, previa propuesta del profesorado los que suelen señalar las características geométricas que observan de las formas.
- El/La profesor/a muestra la clasificación al alumnado.
- Los objetivos que se plantea con la descripción son que los alumnos/as conozcan las características de las formas geométricas que se proponen en el currículum y que razonen.
- El objetivo que se plantea con la clasificación es organizar las formas geométricas.

Los materiales, la representación, la construcción y la relación en la enseñanza de las formas geométricas:

- Explicación mediante el libro de texto, la pizarra y formas geométricas construidas.
- Construcción de formas geométricas con materiales comercializados y desarrollos planos.
- Considera la representación (dibujo) fundamental para la visualización y enseñanza de los elementos y propiedades de las formas geométricas.
- Considera la construcción como un complemento en la enseñanza de las formas geométricas.
- Considera importante la relación entre formas geométricas para ver cómo están compuestas unas de otras.

Elementos y formas geométricas que enseña el profesorado en la descripción y la clasificación:

- Las formas geométricas que enseña son las que principalmente aparecen en los libros de texto, poliedros regulares, prismas, pirámides, cilindro, cono y esfera.
- Los elementos de los sólidos (poliedros) que enseñan son los que aparecen en los libros de texto y conoce, las caras, las aristas, los vértices y los ángulos diedros.
- La clasificación que lleva a cabo debido a que es la que aparece en los libros de texto y se utiliza para la descripción es la de los sólidos en poliedros de los cuerpos de revolución o formado por figuras curvas; poliedros atendiendo al número de bases, regularidad o no; poliedros regulares según número de caras; prismas si se fijan en número de lados de la base, polígono de la base regular o no, prismas rectos/inclinados; pirámides si se fijan en número de lados de la base, polígono de la base regular o no, pirámides rectas/inclinadas; paralelepípedos, según los polígonos que los forman; cuerpos de revolución/redondos.

La enseñanza/aprendizaje de la descripción y la clasificación en el alumnado:

- Los conocimientos previos son interesantes para repasar los contenidos que el alumnado debería de saber.
- Se aprecia que el alumno/a ha llevado a cabo un aprendizaje cuando el alumno/a realiza correctamente las actividades que se proponen y cuando el/la alumno/a conoce, transmite o sabe los contenidos geométricos.
- La forma de motivar al alumnado es realizando explicaciones sencillas en las que el alumnado comprenda fácilmente la materia.
- La capacidad del alumnado se puede aumentar trabajando la habilidad espacial.

Figura 2.41. Sobre la enseñanza de los contenidos geométricos de la descripción y la clasificación de las formas geométricas del espacio de PC3

Las observaciones asociadas a PC3 referidas al objetivo 4, sobre contemplar el aprendizaje del profesorado a través de la reflexión de los cursos que se realizan, se registran en la figura 2.42.

- Ha repasado contenidos geométricos que tenía olvidados y también ha aprendido bastantes contenidos geométricos.
- Muchos de los contenidos aprendidos no se pueden llevar a la enseñanza en la ESO.

- Considera en repetidas ocasiones que los contenidos aprendidos le valen como conocimientos para el/la profesor/a, pero no aplicables en la enseñanza por su dificultad en la ESO.
- Ha conocido diferentes tipos de materiales que se pueden enseñar en la enseñanza de la geometría, aplicables sobre todo a un taller de Matemáticas.
- Ha considerado interesante las tareas planteadas para llevar a cabo la enseñanza de la geometría.

Figura 2.42. Reflexión del curso señalada por PC3

Por lo que respecta al objetivo 5, sobre explorar el uso e interpretación que hace el profesorado de los recursos que aparecen en la red procedentes de la investigación, la figura 2.43 muestra las observaciones asociadas a PC3.

Situaciones en las que está implicada la descripción de las formas:

- Los contextos en los que está involucrada la descripción de los sólidos cuando enseñan matemáticas es en las tareas de identificación y construcción de las formas geométricas.
- No suelen llevar a cabo los contextos que señala Guillén (2004), no hay tiempo.
- No utiliza la geometría de los reflejos, de las sombras y del entorno natural, aunque sería interesante.

Las imágenes conceptuales sobre conceptos geométricos:

- Al dibujar las formas geométricas se suelen utilizar los ejemplos gráficos, visuales, que intentan incorporar una visión más o menos completa de las características del mismo, propiedades que lo hacen ser lo que es y no otra cosa). Se recurre en general a los mismos ejemplos, los más adecuados.
- Se deben variar las representaciones de los objetos, pero pueden llevar a confusión. Relaciona los desarrollos planos con formas construidas a partir de ellos.
- La construcción del concepto a partir de una gran variedad de ejemplos –prototípicos y no prototípicos interesante, pero no hay tiempo.

Sobre los desarrollos planos:

- Construye formas geométricas a partir de los desarrollos planos.
- No suelen utilizar los desarrollos planos en procesos de cómo señala Guillén (poliedros).

Sobre la transposición de las tareas de Guillén (1997) a tareas de clase en relación con la introducción al estudio y la descripción:

- Ve interesante que se le dedique unos minutos al principio del tema a introducir las familias de sólidos para que vean un poco la aplicación de lo que se va a explicar.
- No suele realizar la descripción a partir de la construcción
- No suele utilizar modelos ni ejemplos para la descripción.
- Asocia formas a familias de forma sencilla.
- No suele indicar familias ni propiedades como se señalan aquí.
- No trabajan la construcción como señala Guillén ni las secciones de los poliedros.
- Trabaja los elementos, paralelismo y perpendicularidad en los sólidos.
- Trabaja los elementos figuras planas y poliedros, pero a un nivel más bajo.
- La descripción de sólidos y poliedros y sus propiedades se lleva a cabo a un nivel menor.
- No trabaja la analogía, diferencias, propiedades comunes entre poliedros.
- Solo se determina el número de algunos elementos y no “n” agonal.

La descripción de los sólidos a través de los poliedros regulares (Guillén):

- La demostración de los poliedros regulares mediante construcción la considera más sencilla que las pruebas donde se utilizan fórmulas y cálculos matemáticos.
- Le parece interesante presentar determinadas formas geométricas de diferentes formas y en particular, a las diferentes formas de presentar los poliedros regulares, principalmente porque se relacionan las formas geométricas.

- Es interesante demostrar cuantos poliedros regulares hay, pero no hay tiempo para demostrarlo de forma práctica.
- Lo importante no es que conozcan las características numéricas de los poliedros regulares, sino que los alumnos/as puedan deducirlas y razonarlas por ellos mismos
- No cree conveniente que los alumnos comparen ciertas características numéricas de los poliedros regulares ya que no le ve utilidad después.
- Conoce algunas relaciones matemáticas de los poliedros regulares, fórmula de Euler.
- No considera necesario que se sepan los poliedros regulares que son convexos.
- Considera que se puede explicar los planos de simetría y ejes de rotación de algún poliedro regular.
- La dualidad e interrelación entre los poliedros regulares convexos interesante pero imposible de llevarlo a clase.
- Considera interesante relacionar formas geométricas, pero no tanto.
- Trucar y desplegar poliedro interesante, pero complicado para llevarlo al aula, actividad práctica para un taller.

Análisis por parte del profesorado de las clasificaciones realizadas por los/as investigadores/as:

- La clasificación jerárquica de los cuadriláteros no la ve conveniente para la enseñanza, prefiere clasificaciones particiones.
- Considera que los cuadriláteros han de pertenecer a una sola clase.
- Considera interesante que el alumnado realice la clasificación.
- Clasifica los triángulos de forma euclidiana, siempre se ha hecho así.
- No considera conveniente realizar una clasificación tan exhaustiva de los hexágonos debido a la falta de tiempo para explicar las matemáticas y que son figuras que luego no se suelen ver en comparación con otras como pueden ser los cuadriláteros o los triángulos.
- Importante hacer diferentes clasificaciones, los alumnos aprenderían a clasificar con distintas clasificaciones.
- Considera que el alumnado aprende más con la clasificación “a priori”, crea conceptos a partir de conceptos, pero el alumnado tiene problemas para crearlos. Mejor “a posteriori” porque ya conoce las formas, el problema es cuántas conoce y como.
- La clasificación ingenua, el alumnado no domina estos conceptos.
- Clasificación basada en observaciones/percepciones clasificaciones, suelen llevar a cabo son las clasificaciones basadas en observaciones/percepciones de los objetos visualmente.
- Ve conveniente hacer clasificaciones particiones, pero no jerárquicas ni por analogía. Considera la falta de tiempo un problema para hacer clasificaciones con criterios de construcción.

Sobre la transposición de las tareas de Guillén (1997) a tareas de clase en relación con la clasificación

- Clasificación con criterios visuales solo para recto y oblicuos.
- Clasificaciones con criterios relativos a las bases, solo en número de lados de la base o su regularidad.
- La clasificación con criterios que centran la atención en la regularidad e igualdad de todas las caras, no porque no conoce esos criterios.
- La clasificación con criterios que centran la atención en la regularidad de las bases o de las caras laterales, solo en las bases.
- Clasificaciones en las que las particiones se solapan no las suele hacer.
- Clasificaciones de prismas rectos de bases regulares, de caras laterales regulares, de caras regulares, de caras iguales. no lo hace, complicado para el alumnado.
- Clasificaciones particiones disjuntas pero superpuestas con menos criterios, son difíciles para el alumnado.
- Nunca ha visto los diagramas inclusión en la clasificación de los poliedros ni clasificaciones análogas a la geometría plana.
- No se enumeran ejemplos y se describen a partir de ellos.

Después de analizado los documentos referentes a la descripción:

- Le parecen interesante las acciones de analizar y describir como componentes de la práctica matemática.

- La descripción de los sólidos la considera muy completa y descubre nuevos elementos ypoliedros.
- La descripción de los prismas, pirámides, antiprismas y bipirámides la reconoce completa y con terminología nueva.
- La descripción de los poliedros regulares la ve muy extensa.
- Considera todo importante, pero especialmente los desarrollos planos presentados de los poliedros ya que es lo que más puedo llegar a trabajar con los alumnos.
- Lo que más ha gustado al profesorado, aunque no se considere adecuado para secundaria ha sido la representación de los poliedros mediante los diagramas de Schlegel.
- Sobre la utilización de lo presentado en la enseñanza/aprendizaje de los sólidos se ha de realizar la descripción más sencilla para que el alumnado aprenda los contenidos más importante y dificultad del vocabulario utilizado en ciertos momentos para el alumnado.
- Considera fundamental la importancia que tiene la descripción en la geometría. Se considera necesario conocer las formas geométricas y sus elementos para poder aplicarlo a la vida cotidiana y a las matemáticas. Se hace un aprendizaje y uso del vocabulario en geometría, así como mejorara la expresión.

Después de analizado los documentos referentes a la clasificación:

- Considera las clasificaciones interesantes.
- Las clasificaciones que se han presentado señala que trabajan la construcción de la clasificación donde el alumnado juega un papel primordial en ella y no realizadas por el profesorado o el libro de texto como se suele realizar.
- No considera interesante las clasificaciones de los cuadriláteros presentada.
- Subraya la falta de tiempo para poder hacer la clasificación como se ha presentado.

Figura 2.43. Uso e interpretación que hace PC3 de los recursos que aparecen en la red procedentes de la investigación

2.4.2.3 Acerca de los perfiles de los/as profesores/as participantes

Para obtener información sobre los perfiles de los/as profesores/as se ha partido de las observaciones realizadas a partir de las respuestas de cada uno de ellos y tomando como referencia las características e indicadores asignados a las tendencias mostrados en el subapartado 2.3.3.2 de este capítulo; se han codificado estas observaciones según correspondan a indicadores asignados a una u otra tendencia.

Codificadas estas observaciones, hemos registrado la información obtenida mediante una cuaterna que hace referencia al número de indicadores asignados a cada tendencia, siendo el orden tradicional, tecnológico, espontaneísta e investigativo. Cuando una observación la hemos considerado asociada a indicadores de dos tendencias se ha contado la mitad para cada una de ellas.

A continuación, detallamos lo expuesto en los párrafos anteriores centrándonos en las respuestas del/de la profesor/a PC3 referidas a diferentes problemáticas.

Sobre la concepción de la geometría, descripción y clasificación. Considera la geometría como la materia que estudia las formas (los cuerpos geométricos y las figuras planas), contempla la descripción como enunciar propiedades y nombrar las formas geométricas y la clasificación como diferenciar las formas geométricas (TR1, TR2). Asimismo, la descripción la considera importante porque hace que se conozcan las formas geométricas y se puedan resolver los problemas de medición. En relación con la clasificación es importante porque ordena y establece relaciones entre las formas geométricas (TR3, TR4). La enseñanza de los contenidos geométricos está basada en el currículo o libro de texto principalmente (TR5). Sin embargo, considera importante utilizar en la enseñanza de la geometría diferentes representaciones de las formas geométricas para comprender los contenidos (TE5'). Asimismo, suele relacionar la descripción con otras materias y temas, mientras que la clasificación la centra prácticamente solo para la parte de la geometría (TE6, TR6').

En cuanto al aprendizaje de la geometría por parte del alumnado, considera que es el/la profesor/a quien lleva a cabo preguntas a los alumnos y las alumnas sobre los contenidos geométricos para que ellos/ellas respondan de una forma razonada. Las preguntas las realiza a partir de las representaciones de las formas geométricas, bien construidas, bien dibujadas en la pizarra. Con las contestaciones del alumnado y lo que va explicando el/la profesor/a, el alumnado va afianzando y comprendiendo la geometría. Se guía por lo que marca el currículum y pone el libro de texto. (TE7/TR7, TE7', TE7'', TE8, TR9).

Las observaciones sobre las problemáticas indicadas las registramos mediante la cuaterna (7,5 TR, 5,5 TE, -, -).

Sobre el estudio/enseñanza de la geometría. Considera que se ha de comenzar el estudio de la geometría por las figuras planas para poder entender los sólidos (TE10). Asimismo, considera que los conocimientos previos son interesantes para repasar los contenidos que el alumnado debería saber (I11). En general, sigue bastante el libro de texto y el currículum, pero tiene en cuenta su experiencia como profesor/a para elaborar la programación que va a llevar a cabo (TE12). Destaca la aplicación que tiene el estudio de las formas geométricas en la geometría, las matemáticas y otras áreas de la ESO (TE13). La razón por la que no enseña todos los contenidos geométricos es porque no suele haber tiempo para explicarla al enseñar otros contenidos como puede ser la aritmética y el álgebra (TR14). Los contenidos geométricos a los que les suele dar mayor importancia son aquellos que después el alumnado va aplicar más en las matemáticas y otras áreas de la enseñanza (TE15). La principal razón de la enseñanza de los contenidos geométricos es que están el currículum y se necesitan para otras partes de las matemáticas y áreas de la ESO o bachillerato (TR16/TE16, TE17, TE18). Se aprecia que el/la alumno/a ha llevado a cabo un aprendizaje cuando el/la alumno/a realiza correctamente las actividades que se proponen y cuando el/la alumno/a conoce, transmite o sabe los contenidos geométricos (TR19). Piensa que al alumnado no le gusta la geometría porque se ha de aprender las formas geométricas y sus fórmulas (TR20). El profesor/a es quien, de forma general, lleva a cabo la presentación de la geometría (TR20'/TE20').

Las observaciones las registramos con la cuaterna (4 TR, 7 TE, -, 1 I).

Sobre los contenidos geométricos. El/la profesor/a lleva a cabo la descripción de los sólidos mediante la descripción de sus representaciones o modelos construidos de las formas geométricas (TE21). Las definiciones de las formas geométricas que considera incluyen las propiedades necesarias y suficientes y las presenta el/la profesor/a y de forma única (TR22/TE22, TR32/TE32). Las representaciones que se estudian suelen ser dibujos en la pizarra, modelos construidos o que construye el alumnado (TE24). Las relaciones entre las formas geométricas y conceptos que se tratan en clase suelen ser las que se muestran en el libro de texto (TR25, TR26). No centra la atención en el número de elementos de las formas geométricas (TR27). En las clasificaciones, suele realizar clasificaciones particiones en donde las propiedades suelen ser los criterios de clasificación (TR28/TE28, TR29/TE29). La asociación de propiedades a determinadas familias de poliedros y los problemas de clasificación que lleva a clase son los que suelen aparecer en el libro de texto (TR30/TE30, TR31/TE31).

Las observaciones las registramos con la cuaterna (6 TR, 5 TE, -, -).

Sobre su labor docente. El/la profesor/a enseña los contenidos mediante las explicaciones teóricas que realiza a la clase y las preguntas que va planteando sobre los contenidos geométricos al alumnado de forma que llama la atención en el alumnado (E32, TE34, TE35). Se centra los contenidos geométricos señalados en el currículum, aunque los varía un poco dependiendo del uso que se le vaya a dar en otros cursos y asignaturas (TE33). Centrándonos en las tareas que propone al alumnado, considera que estas se llevan a cabo para que se aprendan los contenidos geométricos y, además, para que el alumnado identifique las dificultades que tiene y las corrija (TE36). La explicación de la materia la acompaña si puede de algunas formas construidas o representadas en la pizarra para que el alumnado visualice las formas geométricas (TE37). El/La docente trata que el alumnado aprenda los contenidos geométricos a través de las preguntas que va realizando al alumnado (TE38). La explicación de los contenidos geométricos los lleva a cabo a partir de formas geométricas que presenta el/la profesor/a a los/as estudiantes (TR39/TE39). La información acerca de los sólidos la suele proporcionar el/la profesor/a aunque trata de que el alumnado colabore mediante sus intervenciones (E40, TR41/TE41). El/La profesor/a intenta que el alumnado, al contestar las preguntas que el/la profesor/a va planteando en la explicación de los contenidos, reflexione sobre las contestaciones con el fin de que obtenga las respuestas correctas (TE42, TE44). Si nos centramos en los contenidos que basa su enseñanza el profesorado observamos que son los que indica el currículum o el libro de texto, modificados por la importancia que puedan tener para el alumnado en cursos posteriores u otras materias (TR43/TE43). Los conocimientos que posee el alumnado son los proporcionados por el/la profesor/a y que luego serán estudiados a partir del libro de texto (TR44 En relación con los problemas que encuentra en el alumnado en geometría considera que se deben especialmente a no conocer los conceptos y en el caso de la medición, a no conocer las fórmulas que hay que aplicar o no aplicar correctamente los datos (TR45, TR46).

Las observaciones relativas a esta problemática las registramos con la cuaterna (4.5 TR, 9.5 TE, 2 E, -).

A partir de estas cuaternas se puede concluir que PC3 es un/una profesor/a que se mueve principalmente entre las tendencias tradicionalista y tecnológica, destacando ser ligeramente más tecnológico que tradicionalista. Ha señalado ser más tradicionalista en relación con las creencias y actitudes sobre la geometría y su aprendizaje, así como, en lo referente a los contenidos geométricos que se considera que se han de enseñar. Sin embargo, ha destacado ser más tecnológico en lo concerniente a su labor docente y el estudio/enseñanza de la geometría.

Como puede constatarse en el capítulo 3, en la sección 3.5, hemos construido otras tablas en las que para cada una de estas 4 problemáticas registramos, por un lado, las tendencias de cada uno de los/as profesores/as para los indicadores de cada una de ellas. Por otro lado, el número de indicadores de las diferentes tendencias que presenta cada docente.

Asimismo, hemos registrado el número de profesores/as cuyas respuestas reflejan cada uno de los indicadores.

Puede notarse que las cuaternas asignadas a cada profesor/a se ven reflejadas en las filas de la tabla en la que en los encabezamientos de las columnas figuran las diferentes tendencias TR, TE, E, I y los encabezamientos de las filas corresponden a los códigos de los/as profesores/as. En la casilla correspondiente indicamos el número de profesores/as a los que les hemos asociado indicadores de la tendencia correspondiente.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

En el capítulo anterior hemos descrito el proceso de elaboración y desarrollo de la encuesta y de los cursos utilizados en este estudio como instrumentos para la obtención de los datos sobre la enseñanza de la geometría en los cursos de la ESO. Estos corresponden a "expresiones de los docentes" que no tienen por qué coincidir exactamente con las respuestas o intervenciones individuales de los/as profesores/as y que las hemos distinguido y/o agrupado a su vez en función de a qué hacen referencia. Además, hemos dado cuenta de los criterios y las categorías de respuesta que hemos elaborado (véase la sección 2.3) que hemos tomado como referencia para realizar el análisis de los datos obtenidos. En el capítulo 2 incluimos también diversas plantillas que nos han permitido registrar los datos obtenidos tanto si procedían de la encuesta, de comentarios y/o respuestas expresadas en los cursos y/o en los comentarios que hicieron sobre el desarrollo de los mismos. Así mismo, hemos descrito brevemente la manera de realizar el análisis cualitativo y el análisis cuantitativo que hemos realizado sobre las frecuencias en las que aparecen los enunciados o las categorías que hemos establecido, que han llevado a las observaciones que presentamos en este capítulo 3 como resultados y a las conclusiones que hemos extraído de ellos que también incluimos en este capítulo.

Las observaciones que corresponden a los resultados del estudio y las conclusiones correspondientes los agrupamos en secciones, de manera que los de cada una los presentamos después de haber mostrado los datos que sustentan los resultados correspondientes. Para ello, nos ayudamos de tablas y de parte de las plantillas que incluimos en el capítulo anterior. Cabe aclararse que si bien han sido 16 los/as profesores/as que han participado en nuestro estudio en la mayoría de las tablas que mostramos no se refleja que este haya sido el total de profesores/as de los que se han registrado los datos. Como indicamos en el capítulo 2 al explicar nuestro ámbito de estudio, con la encuesta y los tipos de curso hemos obtenido información referida a las problemáticas de nuestro estudio que se va complementando a medida que se van desarrollando los cursos. Por ello, las observaciones las indicamos con sus frecuencias relativas, esto es, de la forma n_i/n, donde n_i se refiere a su frecuencia absoluta y n al total de profesores/as que se contemplan en cada caso. Además, en una fila o columna de las tablas se muestra el código de los profesores en los que se basan las observaciones extraídas, que como hemos indicado en el capítulo 2 al describir el código, este refleja el curso en el que han participado o si el dato proviene de la encuesta realizada.

La agrupación en las secciones 3.1 a 3.5 se explica al tener en cuenta las problemáticas de nuestro estudio que indicamos en la introducción. En la sección 3.1 incluimos las observaciones y conclusiones que asociamos a las creencias, concepciones, ... que tienen profesores/as de la ESO en relación con la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos, de la descripción y la clasificación y del establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos. En la sección 3.2 indicamos aspectos relativos al conocimiento del profesorado participante de la ESO sobre los contenidos geométricos tratados en los cursos, anotaciones extraídas a partir de las respuestas de profesores/as implicados/as en el estudio a las tareas y cuestiones que se les han planteado. Las observaciones relativas a la enseñanza/aprendizaje de estos contenidos las incluimos en la sección 3.3. En la sección 3.4 incluimos otros comentarios sobre conocimientos de los/as profesores/as participantes relativos a los contenidos geométricos implicados en nuestro estudio y/o a su enseñanza, que provienen de expresiones que han señalado en relación con el aprendizaje que han contemplado al participar en el curso en el que el/la profesor/a ha estado implicado. Y en la sección 3.5 se presentan los resultados y conclusiones establecidos sobre las tendencias didácticas de los/as profesores/as atendiendo a la enseñanza/aprendizaje de la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones.

3.1 Sobre creencias y concepciones que tienen profesores/as de la ESO sobre la geometría y su enseñanza/aprendizaje

En relación con nuestro primer objetivo, en los apartados 3.1.1 y 3.1.2 de esta sección se han presentado las observaciones/ resultados sobre creencias y concepciones del profesorado que ha colaborado en nuestro estudio, por una parte, de forma general sobre la geometría (apartado 3.1.1) y, por otra parte, en relación con la descripción y la clasificación (apartado 3.1.2). La información que proviene de la encuesta la hemos obtenido especialmente a partir de las cuestiones de las dos primeras secciones de la misma y las respuestas a las tareas TCc1 y TCc2 han proporcionado especialmente los datos que provienen de uno de los cursos (CC) a partir de los que hemos realizado las observaciones correspondientes.

3.1.1 Sobre la geometría y su enseñanza en la ESO

Al igual que en nuestro primer trabajo, Pérez (2006), nos hemos acercado a esta problemática indicando, por un lado, opiniones, ideas y visiones que tiene el profesorado de la geometría (subapartado 3.1.1.1). Por otro lado, como en la enseñanza/aprendizaje de esta materia está implicado también el alumnado, hemos obtenido información sobre lo que opinan los/as profesores/as con respecto a si a los/as alumnos/as les gusta la geometría y les resulta interesante (subapartado 3.1.1.2). Asimismo, teniendo en cuenta que el/la profesor/a se coordina con el profesorado del departamento para impertir la materia, consideramos al profesor/a de geometría en relación con sus compañeros/as de trabajo; aportamos respuestas referidas a la importancia que da el profesorado de la ESO al estudio de esta materia (apartado 3.1.1.3). Para finalizar, en relación con la enseñanza de esta materia, las respuestas que indicamos se refieren a por dónde se inicia el estudio de la geometría y por dónde se comenzaría a enseñar geometría en primaria (apartado 3.1.1.4).

Como el primer curso desarrollado después de haber realizado el estudio a partir de la encuesta fue el curso en comunidad, el profesorado que se ha considerado para obtener los resultados de estos subapartados ha sido el formado por los/as 4 que realizaron la encuesta (PE2, PE2, PE3, PE4) y los/as 4 del curso en comunidad (PC1. PC2, PC3, PC4).

3.1.1.1 El profesor y la geometría

Respecto al profesorado y la geometría hemos orientado nuestro trabajo a obtener información sobre las ideas que se tienen de esta materia, si gusta o no y la relación y aplicaciones que se considera que tiene con el entorno y otras áreas de la ESO.

Acerca de la geometría. Al exponer lo que viene a la cabeza cuando se escucha la palabra geometría los/as profesores/as han indicado expresiones que hacen referencia a términos generales especialmente relacionados con su objeto de estudio. Se señalan las formas geométricas (7/8) y/o se hace referencia a las magnitudes geométricas (4/8) (Véase la tabla 3.1).

La referencia a las formas geométricas, en su mayoría (7/8) se ha hecho de una forma general, como en la respuesta “Principalmente las matemáticas y más concretamente las figuras geométricas”. Muy pocos profesores/as precisan qué formas geométricas contemplan. Solo uno de ellos menciona las figuras planas y/o del espacio (1/8) o algún tipo de figura plana, como los cuadrados y los triángulos (1/8). Ningún/a profesor/a ha indicado alguna familia de sólidos determinada.

Docente	Idea de geometría
PE2, PE3, PE4, PC1. PC2, PC3, PC4	Formas geométricas
PE1, PC1, PC3, PC4	Magnitudes geométricas

Tabla 3.1. Sobre la “idea” que se tiene de “geometría”

La palabra geometría también sugiere a los/as profesores/as verbos que se refieren a la implicación del alumno en el estudio de la misma: pensar, estudiar, conocer (3/8) y otros que corresponden a acciones como dibujar (1/8) o calcular (3/8). Dibujar las figuras geométricas y/o calcular para determinar medidas referidas al cálculo de magnitudes: áreas y volúmenes (3/8) y/o perímetros (1/8). Un ejemplo de respuesta es “Lo primero son las figuras geométricas y a partir de ahí medir cosas de ellas, como el volumen, área, perímetro, etc.”. Cabe mencionar que 3/8 no han expresado acciones al comentar sobre las figuras geométricas.

Con las observaciones realizadas corroboramos lo que ya se había remarcado en Guillén y Figueras (2005). “Lo que les viene a la cabeza cuando escuchan la palabra geometría a la mayoría de los/as profesores/as que participaron en la investigación es lo que han leído en los libros de texto y que es lo que normalmente se imparte. No se enfatiza el generar formas por diferentes procedimientos como soporte para desarrollar una actividad geométrica ni se diseñan las clases para que se pueda estudiar diferentes componentes de la actividad matemática ligadas a los procesos de describir y clasificar o para remarcar la multitud de relaciones que existen entre los contenidos geométricos escolares. Asimismo, la mayoría de los/as profesores/as al hablar de la geometría utilizaron un lenguaje asociado con las matemáticas o con el lenguaje que usan los libros de texto, lo que nos da una idea de lo que los/as profesores/as enseñan los contenidos que se indican en los libros de texto”.

¿Gusta o no gusta esta materia? Como se observa en la tabla 3.2, a la mayor parte de los/as profesores/as de este estudio les gusta (6/8); un/a docente comenta que regular; un docente señala que no.

Docente	Gusta la geometría
PE1, PE3, PE4, PC2, PC3, PC4	Sí
PE2	Regular
PC1	No

Tabla 3.2. Gusta o no la geometría

Para explicar las respuestas dadas se han indicado razones como: a) Tiene alguna cualidad destacable para el profesorado; “interesante” (2/8), “intuitiva” (1/8), “visual” (1/8), “creativa” (1/8). Ejemplo de respuesta, “Sí, pues es intuitiva y básica para la comprensión de muchos aspectos de la realidad cotidiana”. b) Se relaciona con el entorno cotidiano (2/8). Por ejemplo, “Es fácil de relacionarla con el entorno”. c) La utilidad y/o aplicabilidad que tiene (3/8). Ejemplo, “Es muy útil en la vida cotidiana”.

Cabe señalarse también las razones que dieron profesores/as a los que esta materia le gusta, a medias, o no les gusta respectivamente: “Sí que me gusta y me resulta interesante de explicar, pero difícil de trabajarla porque intento innovar. Llego con muy poco tiempo para explicarla”, “No me disgusta, pero no es mi favorita. En realidad, es lo que menos me han explicado a lo largo de mis estudios”. “No me gusta, prefiero el análisis. La verdad es que no la disfruto explicándola, la cambiaría por cualquier otra parte de las matemáticas”.

¿Se relaciona con el entorno? La tabla 3.3 refleja que todos/as los/as docentes responden afirmativamente. Las aplicaciones que subrayan que tienen las hemos agrupado en de la siguiente manera: a) Distintas áreas de la vida como son: el arte, la informática y los trabajos técnicos, entre los que tenemos, la arquitectura, la construcción y la ingeniería industrial (4/8); b) el cálculo de magnitudes como son la longitud (perímetro), el área y el volumen (3/8); c) el reconocimiento y las características de las figuras planas y geométricas en nuestro entorno cotidiano (2/8).

Docente	La geometría se relaciona con el entorno
PE1, PE2, PE3, PE4, PC1. PC2, PC3, PC4	Sí
-	No

Tabla 3.3. La geometría se relaciona con el entorno

Entre las acciones que se realizan sobre los objetos geométricos, los encuestados mencionaron: a) construir; b) observar y reconocer diariamente los objetos geométricos que nos rodean por la calle; c) resolver problemas de medida.

¿Se relaciona con las otras áreas de la Educación Secundaria Obligatoria? La tabla 3.4 refleja que todos/as los/las docentes responden afirmativamente. Las áreas que han contemplado como aquellas con las que tiene relación son: a) las Matemáticas (3/8); b) la Física (4/8); c) la Química (3/8); d) la Educación Plástica (4/8); e) la Educción Física (2/8); f) el Dibujo (2/8); g) el Diseño (1/8); h) la Tecnología (3/8), e i) la Geología (1/8).

Cabe señalar que los/las docentes no se han referido de manera explícita a las áreas mencionadas ni han indicado razones para explicar la respuesta; tan solo se han nombrado ejemplos de diferentes áreas en los que ven reflejada la geometría. Ejemplos de respuestas son: “Con el análisis, el dibujo, la trigonometría, algebra, etc. a la hora de calcular áreas o para representar”; “el balón, formas del campo…”; “en la forma de las moléculas”; “en el diseño por ejemplo de pistones”: “en el dibujo de las figuras geométricas”; “con los minerales”.

Docente	La geometría se relaciona con otras áreas de la ESO
PE1, PE2, PE3, PE4, PC1. PC2, PC3, PC4	Sí
-	No

Tabla 3.4. La geometría se relaciona con otras áreas de la ESO

Desde estas respuestas se puede concluir que se considera la geometría como una parte de las Matemáticas interdisciplinar, que se puede aplicar en ejemplos de las demás áreas de la Matemáticas y a las asignaturas de ciencias, como la Física y la Química y en menor medida, la Geología; también en algunas asignaturas más técnicas, como la Tecnología y el Diseño, o artísticas, como la Educación Plástica y el Dibujo.

3.1.1.2 El alumno y la geometría desde el punto de vista del profesor

En este subapartado, tomando como referente al alumnado, nos referimos a respuestas del profesorado relacionadas con el gusto que tiene el alumnado por la geometría, la preparación que trae cuando llega a sus clases y los contenidos con los que se debería acceder a secundaria.

¿A los alumnos les gusta la geometría? La tabla 3.5 registra las respuestas del profesorado cuando se les cuestionó sobre si al alumnado le gusta la geometría.

Docente	La geometría gusta al alumnado
PE1, PE4	Sí
PE2, PE3, PC3, PC4	No
PC1, PC2	Depende

Tabla 3.5. La geometría gusta al alumnado

Las respuestas señaladas por los/las profesores/as no permiten concluir si al alumnado le gusta o no esta materia, aunque hay mayor número de docentes que señalan que no les gusta.

Entre las razones que se han indicado para explicar la respuesta figuran: a) no le ven su utilidad; b) es más difícil que otros bloques como es la aritmética y el álgebra a los que están más acostumbrados; c) hay problemas en el aprendizaje de las formas geométricas y sus fórmulas, y d) no es un problema de la geometría, sino que en general no les gusta nada que se tenga que estudiar.

De los/as profesores/as que indicaron que sí les gusta la materia, solo uno señaló una razón, “Sí, porque la pueden aplicar en el entorno cotidiano”. El otro/a docente solo remarcó que sí, matizando “pero les resulta difícil de comprender y estudiar”.

Los/as dos docentes que responden con “depende” han comentado que en primero de la ESO les suele gustar la geometría porque se trabajan las figuras geométricas desde su representación, pero luego ya no porque empiezan las fórmulas, cálculos y problemas.
Al considerar las respuestas de los profesores, respecto de la enseñanza de la geometría podemos reseñar que:

- Como materia de la ESO no les acaba de gustar del todo a los alumnos y una de las principales razones es la forma de impartirse, ya que se basa en el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes sin entender su finalidad.

- Algunos/as profesores/as dicen que a los/las alumnos/as les gusta por su aplicación en el entorno cotidiano y porque al principio se basa en la representación de las figuras geométricas.

De las respuestas de los/as profesores/as podría concluirse que para que a los/as alumnos/as les guste la geometría, en la enseñanza de la misma se tendría que: i) utilizar en contextos cotidianos para que se viera su aplicación; ii) presentar de una forma práctica y tangible; iii) usar recursos para apoyar la imaginación espacial; iv) facilitar la visualización de las figuras objeto de estudio, y v) evitar que el cálculo de magnitudes sea una simple aplicación de fórmulas.

¿Los estudiantes traen suficiente preparación en geometría al comenzar el curso? La tabla 3.6 registra las respuestas. Puede notarse que ningún/a profesor/a ha considerado que sí; hay profesores/as que han indicado que no (3/8) y otros consideran que solo traen preparación en una parte de la misma (5/8).

Docente	Preparación alumnado en geometría
-	Sí
PE2, PE3, PE4	No
PE1 PC1. PC2, PC3, PC4	Solo parte

Tabla 3.6. Preparación del alumnado en geometría

Razones que dieron los/as profesores/as para explicar por qué los/as alumnos/as no traen la suficiente preparación al entrar en la ESO o en el curso que imparten son: a) la geometría se deja para el final con lo que no se imparte o se da muy rápida; b) se incide más en otros bloques como la aritmética y el álgebra, y c) se aprenden las fórmulas de memoria y se olvidan. Cabe apuntarse la respuesta de un/a docente: “No vienen preparados ni en geometría ni en ninguna otra área”.

Los/as docentes que han señalado que se conoce solo parte de la geometría precisan a qué parte se refieren: a) las figuras planas que se han tratado en primaria; b) alguna figura del espacio, y c) alguna fórmula para calcular el área de figuras planas.

Las respuestas de los/as profesores/as llevan a concluir que la geometría es uno de los bloques de las matemáticas al que se le suele dar poca importancia, dejándolo normalmente para el final del curso o incluso no se imparte. Además, parece que la enseñanza de geometría se centra en mostrar las formas geométricas de la geometría plana y en que el alumnado aprenda de memoria las fórmulas para calcular el área.

¿Qué contenidos geométricos se deberían haber tratado en primaria? La tabla 3.7 registra las respuestas dadas por los diferentes profesores/as.

Docente	Contenidos a los que se refiere
PE1, PE3, PC2, PC3	Figura planas
PE1, PE3, PC2, PC3	Figuras espaciales: cuerpos/Sólidos
PE2, PC4	Figuras geométricas
PE4	Figuras geométricas en 1 y 2 dimensiones
PE1, PC1, PC2, PC3, PC4	Magnitudes

Tabla 3.7. Contenidos que se deberían haber tratado en primaria

De la tabla 3.7 se desprende que se considera fundamental trabajar en primaria las magnitudes; el cálculo del área ha sido el más relevante seguido del volumen y, algún/a docente, ha indicado el perímetro. También las figuras planas y del espacio, si bien solo un/a profesor/a, PE1, especifica algunos tipos de figuras planas (los triángulos, los polígonos y los círculos). En relación con las figuras espaciales, o bien se habla de ellas en general o se hace referencia a que se han de tratar "algunas". Por ejemplo, PC3 indica: "Tener idea de las figuras planas y de algunas figuras del espacio. Saber calcular el área de algunas figuras planas y el volumen de alguna figura del espacio". Uno de los/as profesores/as hace referencia a las figuras geométricas en 1 o 2 dimensiones, pero sin especificar cuáles.

La tabla 3.8 registra las acciones que se han señalado como aquellas que se deberían realizar sobre los objetos geométricos.

Docente	Contenidos a los que se refiere
PE1, PE2, PC3, PC3	Conocer
PE1, PE4	Describir
PE1, PC1, PC3, PC4	Calcular
PE2	Dibujar
PE2, PC4	Reconocer
PE3	Definir
PC1, PC4	Identificar
PC2	Diferenciar

Tabla 3.8. Acciones que se deberían realizar sobre los objetos

Se señalan: conocer los polígonos; describir las formas geométricas; calcular áreas y volúmenes; dibujar figuras geométricas; reconocer figuras; definir propiedades; identificar figuras planas y geométricas; diferenciar el cuadrado del cubo.

Cabe concluirse pues que los/as docentes consideran que en primaria se debería introducir en las figuras planas y en el cálculo de áreas de estas, así como en alguna figura del espacio y en el cálculo de su volumen. La actividad que se considera que han de realizar los estudiantes de primaria se refiere a: describir, reconocer o identificar o en menor medida, dibujar, definir o diferenciar.

3.1.1.3 El profesor en relación con sus compañeros de trabajo y la geometría

Dado que el/la profesor/a en la enseñanza de la geometría se debe coordinar con el resto de profesores/as de matemáticas, en este subapartado vamos a estudiar si el profesorado participante considera que los/as profesores/as le dan importancia a la geometría en la enseñanza en la ESO. La tabla 3.9 registra las respuestas dadas.

Docente	Importancia del profesorado a la geometría
PE4, PC1	Sí
PE1, PE2, PE3, PC2, PC3, PC4	No

Tabla 3.9. Sobre si el profesorado de la ESO le da importancia a la geometría

Se puede apreciar que la mayoría de los/as profesores/as consideran que el profesorado de la ESO no le da importancia al estudio de la geometría en sus clases. Entre las razones que han dado figuran: a) el profesorado se dedica a usar fórmulas en la enseñanza de la geometría; b) siempre falta tiempo para darla; c) se priorizan otros bloques, y d) no se le da prioridad en el libro.

Los/las docentes que han respondido afirmativamente, han matizado que, aunque se le da importancia, no toda la que se le debería dar. Por ejemplo, PC1 indica: "Sí, pero no toda la que se le tenía que dar. Nunca se empieza por ella y llegas con el tiempo muy justo, pero siempre se da algo".

Cabe concluirse pues, que los/as docentes consideran que la geometría no es uno de los bloques al que el profesorado de la ESO le da importancia y, como especifica algún/a profesor/a, en los libros de texto tampoco se enfatiza. Esta materia suele dejarse para el final junto con la estadística y la probabilidad.

3.1.1.4 Como iniciar la enseñanza de la geometría

La tabla 3.10 muestra las respuestas del profesorado a la cuestión CCcG4 de la tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2.

Docente	Como se inicia la enseñanza de la geometría
PE1, PE2, PE3, PE4, PC1. PC2, PC3, PC4	Figuras planas
-	Figuras del espacio

Tabla 3.10. Como inicia el profesorado la enseñanza de la geometría

Puede observarse que todo el profesorado ha apuntado que se ha de comenzar por las figuras planas señalando entre las razones que: i) las figuras planas son más sencillas; ii) es más fácil ir de dimensiones pequeñas a grandes que al contario, y iii) los sólidos se componen de figuras planas.

En relación por dónde empezarían en primaria, el profesorado ha mantenido las mismas respuestas y razones que para secundaria.

Se puede notar que la postura que toman los/las docentes participantes del estudio en relación con la dicotomía que suele presentarse sobre si el primer contacto con el estudio de la geometría ha de ser a partir de los sólidos o de las figuras planas no concuerda con la que se propone en este trabajo. Al explicar nuestro marco teórico, refiriéndonos a Guillén (2010) hemos indicado nuestra concepción de la geometría como la ciencia del espacio físico, lo que conlleva que se comience con el estudio de los objetos; el estudio de la geometría del espacio conlleva el estudio de la geometría del plano.

3.1.2 Creencias y concepciones sobre la descripción y la clasificación

En este apartado se incluyen observaciones obtenidas a partir de la tarea TCc2 concerniente con la descripción y clasificación. Estas se refieren a la idea que se tiene de estos dos procesos matemáticos (subapartado 3.1.2.1), a la importancia que puede tener para el alumnado la enseñanza de la descripción y la clasificación (subapartado 3.1.2.2) y a lo que se pretende con la enseñanza de estos procesos matemáticos (subapartado 3.1.2.3). Finalmente damos cuenta de las situaciones donde se considera que se aplica la descripción y la clasificación de las formas geométricas (subapartado 3.1.2.4).

3.1.2.1 Ideas sobre la descripción y la clasificación

Las respuestas a cuestiones relativas a lo que se entiende por describir en geometría (véase CCcG5 de la tabla 2.2 del apartado 2.2.3) se han registrado tomando como referentes los descriptores de la tabla 2.5 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo anterior. La tabla 3.11 registra estas respuestas.

Docente	DDI1	DDI2	DDI3	DDI4	DDI5	DDI6
PC1				x	x	
PC2	x					
PC3	x		x			
PC4				x		
PP1				x		
PP2	x			x		
PP3				x		
PP4				x		
PO1	x					
PO2	x					
PO3	x					
PO4	x					

Tabla 3.11. Respuestas del profesorado a la cuestión CCcG5 referente a la descripción

Puede observarse que la descripción sugiere al profesorado especialmente enunciar propiedades (PC2, PC3, PP2, PO1, PO2, PO3 y PO4). Como indica PO2, describir es “enunciar o conocer las propiedades de una figura geométrica atendiendo a una o varias características prefijadas” o como apunta PC2, describir es “enumerar las características o propiedades de las figuras geométricas”. Asimismo, observamos que hay profesores/as como, por ejemplo, PC4 que considera que la descripción sugiere “identificar y conocer sus elementos”, otros como PP2 la conciben como “indicar las propiedades de cada una de las formas geométricas y enunciar los elementos que las componen” o PC1 que la considera como “explicar, indicar y dibujar las partes o elementos de las figuras geométricas”.

Cabe observarse que la mayoría de las respuestas de los/as profesores/as sobre lo que se entiende por descripción está en concordancia con lo que se asocia en Guillén (1997) a la palabra describir. Para esta autora, “la palabra describir en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos. Lo que varía de un nivel a otro es el tipo de propiedades que se incluyen en la lista. En el primer nivel de Van Hiele, en la descripción se incluyen características visuales y funcionales. En el segundo nivel, se empieza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos. En el tercer nivel ya se puede enunciar y entender de manera matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas". Cabe anotarse que ninguno/a de los/as profesores/as ha mencionado que la lista de propiedades variaría según el curso en que se diera. Asimismo, las problemáticas que se indican en Alsina et al. (1997, p. 31) relacionadas con la descripción de un objeto también se ven reflejadas en varias respuestas. Entre ellas figuran: analizar cómo se ha construido, de que elementos dispone, los planos de simetría, como de distribuyen los elementos, qué relación hay entre los elementos, grado de simetría, conocer el objeto a partir de una descripción; asociar, identificar una figura geométrica, ver sus partes. En algunas respuestas se hace referencia a las partes o elementos que componen las figuras (PC1, PC4, PP1, PP2, PP3, PP4), a la utilización de la representación gráfica mediante dibujos como una forma de describir (PC1) o a nombrar las figuras (PC3).

Continuando con la cuestión CCcG5, pero haciendo referencia ahora a la clasificación, analizamos igualmente las respuestas a esta cuestión. Los descriptores que hemos utilizado se muestran en la tabla 2.19 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2. Los descriptores que hemos considerado en la opción de "Otros" se explican desde las diferentes problemáticas que pueden abordarse ligadas a la clasificación. Razonar/argumentar hace referencia a que con la clasificación se razona o argumenta bien sobre las figuras geométricas o a partir de formas del entorno. Organizar se refiere a la organización de las formas geométricas en términos de ejemplos y/o según las propiedades que tienen; separar al establecer diferentes familias de figuras planas y/o de sólidos; definir y enumerar, al definir formas geométricas y al enumerar todos los objetos que cumplen características dadas.

Las respuestas del profesorado en relación con lo que entiende por clasificar en geometría se han registrado tomando como referentes los descriptores de la tabla 2.19 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo anterior. Las respuestas se presentan en la tabla 3.12.

Docente	DClI1	DClI2	DClI3	DClI4	DClI5	DClI6	DClI7
PC1	x						
PC2	x						
PC3	x						
PC4							x
PP1							x
PP2							x
PP3				x			
PP4	x						
PO1				x			
PO2				x			
PO3				x			
PO4							x

Tabla 3.12. Respuestas del profesorado a la cuestión CCcG5 referente a la clasificación

La tabla 3.12 refleja que la mayoría de los/as profesores/as (8/12) asocia a la clasificación las acciones de diferenciar (4/12) o agrupar (4/12). Ejemplos de respuesta de cada tipo son: La de PC3, "Es importante clasificar porque permite diferenciar las figuras geométricas" y de PP2, "Es separar las figuras geométricas en familias", y las de PO2, "Es agrupar figuras geométricas según uno o más criterios establecidos anteriormente" y PP1, "Es organizar las figuras geométricas según las propiedades que tienen". Otras respuestas se centran en desarrollar capacidades del alumno/a en relación con su razonamiento. Por ejemplo, PC4 expresa: “Es muy necesaria porque ayuda a que se razone sobre las figuras geométricas y del entorno” Y PO4 indica “Clasificar lleva a definir y enumerar todos los objetos que cumplen una serie de características comunes” (PO4).

Puede resaltarse pues que la mayoría de los/as profesores/as (8/12) asocia a la clasificación las acciones de diferenciar (4/12) o agrupar (4/12). Solo en respuestas puntuales se indican otras problemáticas asociadas a este proceso matemático o a problemas asociados a la clasificación que no sean propios de ella.

3.1.2.2 La importancia que tienen los contenidos geométricos de la descripción y la clasificación en la enseñanza

A partir de la cuestión CCgG6 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3) se ha obtenido información sobre la importancia que se asigna a la enseñanza de estos contenidos en enseñanza. Las tablas 3.13 y 3.14 registran las respuestas de los/as docentes a esta cuestión.

Docente	Importancia de la descripción
PC1, PC3, PP1, PP2, PP3, PO2	Entender/conocer/comprender las figuras geométricas/cuerpos geométricos
PC2, PC3, PP2, PP3, PP4, PO4	Realizar problemas/tareas de medición
PC4. PP3, PO2, PO3	Entender objetos del entorno/entorno
PC2, PC3, PP1, PP4, PO4	Aplicar a otros bloques/materias/procesos matemáticos
PO1, PO4	Desarrollar capacidades: razonar, imaginar, comunicar, comparar

Tabla 3.13. Razones por las que son importantes los contenidos geométricos de la descripción

Los/as profesores/as expresan que la descripción está enfocada para hacer que los/as alumnos/as tengan un conocimiento y compresión de las figuras o cuerpos geométricas (6/12), o para que los/as alumnos/as puedan resolver los problemas o tareas correspondientes a la medición (6/12). Asimismo, hay profesores (5/12) que enfocan la descripción como una parte de las matemáticas que la consideran importante para trabajar otros bloques de las matemáticas, otras materias u otros procesos matemáticos. También se observa que algunos/as profesores/as (4/12) con la descripción pretenden que se entienda el entorno o sus objetos. Igualmente, una parte del profesorado (2/12) centra la descripción en el desarrollo de capacidades para el alumnado. Cabe mencionar que la mayoría de las respuestas pertenecen a más de una categoría, como se puede comprobar en la respuesta de PP2: “Son importantes porque sin ellos sería imposible especificar como son los cuerpos geométricos. Si el alumno no tiene claros los elementos, propiedades y características de los cuerpos geométricos después va a tener problemas en los problemas de medición”.

Docente	Importancia de la clasificación
PC1, PC2, PC3, PC4, PP2, PP3, PP4, PO2, PO3	Organizar/diferenciar/ordenar las formas geométricas
PC2., PC3, PP1, PP4, PO1	Aplicar a otros bloques/materias/procesos matemáticos
PC4, PO2	Aplicar al entorno/vida cotidiana
PC4, PP1, PP2, PO1, PO3, PO4	Desarrollar capacidades: razonar, imaginar, comunicar, comparar

Tabla 3.14. Razones por las que son importantes los contenidos geométricos de la clasificación

Por lo que respecta a clasificación, como refleja la tabla 3.14, las respuestas de los/as profesores/as dan cuenta de que la clasificación para la mayoría de los/as profesores/as es importante porque se trabajan las formas geométricas en conjunto organizándolas, ordenándolas, comparándolas, etc., o estableciendo nombres, relaciones, criterios, parecidos, diferencias, etc. (9/12). La importancia se le asigna también por desarrollar capacidades (6/12), por su aplicación para otros bloques de las matemáticas, asignaturas u otros procesos matemáticos (5/12) o por su aplicación en el entorno/vida cotidiana, bien organizándolo o bien diferenciando sus objetos (2/12). Puede notarse que alguna respuesta se asigna a varios descriptores. Por ejemplo, la de PC4, que expresa "Organizan las figuras geométricas y del entorno. Además, le ayuda al alumno a mejorar su razonamiento al tener que argumentar porque una figura es de un tipo u otro"; o la de la PO1 al señalar "los alumnos aprenden a establecer criterios para relacionar y diferenciar las figuras geométricas. Este aprendizaje, en su medida, se aplica después en otras asignaturas del instituto y contextos de la vida".

Cabe remarcarse que todos los/as profesores/as del curso en comunidad han visto la actividad de describir y clasificar como una actividad interesante y fundamental en las matemáticas. El curso les ha servido para descubrir los diferentes enfoques con los que se puede abordar la clasificación de las figuras geométricas y que hasta el desarrollo de este no conocían, y consideran que les puede servir para que los alumnos no conozcan una sola manera de clasificar. Consideran muy interesante llevar a cabo la descripción y la clasificación al aula y hacer en ella diferentes clasificaciones, ya que "serviría para que los alumnos tuvieran un mayor conocimiento de las figuras geométricas" (PC1), "Los alumnos verían los diferentes enfoques que se le puede dar a la clasificación" (PC3) y "Y no sería una enseñanza memorística" (PC2). El problema principal que se vislumbra es que "No se dispone de tiempo para hacer diferentes clasificaciones" (PC4).

También puede subrayarse que los/as profesores/as que han colaborado en este estudio consideran la descripción y la clasificación importantes para comprender las matemáticas y, en particular, la geometría. Destacan su importancia para el entendimiento y organización de las formas geométricas y para realizar las tareas que trabajan la medición y la clasificación permitiendo desarrollar capacidades o el razonamiento. Las respuestas de los/as profesores/as están en concordancia con lo que se subraya en diferentes estudios. Guillén (2004) expresa que la descripción es fundamental en la comprensión de las formas geométricas y que se considera esencial en la realización de problemas que relacionan la geometría con la medida. Respecto de la clasificación, diversos autores/as han destacado su importancia para llegar a comprender las matemáticas, el entendimiento y organización de las formas geométricas y para poder desarrollar capacidades o el razonamiento (Fielker, 1987a, 1987b; Guillén, 2005; Mora, 1995).

3.1.2.3 ¿La enseñanza de la descripción y la clasificación como contenido de geometría de la ESO? ¿Qué contenidos?

Las respuestas que se han establecido para la cuestión CCcG7 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3) se registran en las tablas 3.15 y 3.16.

Docente	Contenidos relativos a la descripción/clasificación
PP1, PP2, PO1, PO2, PO3, PO4	Contenidos del currículum
PC1, PP3. PP4	Contenidos del libro de texto
PC2, PC3, PC4	Contenidos del currículum o del libro de texto

Tabla 3.15. Respuestas de los profesores sobre contenidos que se imparten

La tabla 3.15 muestra que la mayoría de los/as profesores/as participantes se centran en lo que se indica en el currículum a la hora de seleccionar para la enseñanza los contenidos de descripción y clasificación (6/12). Algunos/as (3/12) se basan en lo que propone el libro de texto y otros (3/12) no especifican si se basan en los libros de texto o en el currículum.

Los criterios que se considera que se han de tener en cuenta en la selección de estos contenidos se registran en la tabla 3.16.

Docente	Selección de contenidos
PC2, PP4	Contenidos dependiendo de la dificultad
PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PP3, PP4, PO1, PO2, PO3, PO4	Contenidos que se trabajaran en cursos posteriores, las matemáticas u otras asignaturas
PP3, PO2	Contenidos que se utilizan en la vida cotidiana
PO1	Contenidos para entender el entorno
PP4	Contenidos según el tiempo
PC1	Todos los contenidos

Tabla 3.16. Respuestas de los profesores sobre la selección de contenidos

Puede notarse que la mayoría de los/as profesores/as prioriza como contenidos a enseñar aquellos que se van a utilizar en las matemáticas, otras asignaturas o cursos posteriores (8/12). Por ejemplo, PP2 indica: “Los contenidos especificados en el currículum que, por mi experiencia docente, considero que son los que el alumno ha de conocer tanto por el carácter matemático que tienen como por su importancia para otras asignaturas”. Otros criterios son la utilidad que se les puede dar en la vida cotidiana (2/12) y la dificultad que puede llevar impartirlos y/o trabajarlos. Razones más puntuales han sido “que el contenido sirva para entender los objetos del entorno” (PO1) o “Que el tiempo no te deje explicar todo” (PP4). Cabe mencionarse PC1 que indica que “Explica todos los contenidos”.

Puede destacarse que el profesorado participante en el estudio considera que la enseñanza se centra en lo que se indica en el currículum más que en el libro de texto, ya que, aunque el libro de texto se basa en el currículum presenta algunas diferencias respecto a él. Por lo que se refiere a la selección de contenidos, el profesorado se fija especialmente en lo que el alumnado va utilizar en cursos posteriores y también, aunque en menor medida en lo que va utilizar en la vida cotidiana o no presentan dificultad para los alumnos/as.

3.1.2.4 Situaciones en las que se aplica la descripción y la clasificación de las formas geométricas

En este subapartado consideramos como datos las respuestas a la cuestión CCcG8 de la tabla 2.2 (apartado 2.2.3) de los/as docentes de los tres cursos desarrollados.

Hemos agrupado las respuestas en dos grupos, uno que hace referencia a donde se aplica la descripción dentro la enseñanza, cuyos datos se registran en la tabla 3.17. El otro grupo hace mención a donde se puede utilizar la descripción fuera de la enseñanza; los datos se muestran en la tabla 3.18.

Tabla 3.17. Situaciones en las que se aplica la descripción en la enseñanza

Docente	Aplicaciones de contenidos relativos a la descripción en la enseñanza
PC1, PC2, PC3, PC4	Otras partes de las matemáticas
PP1, PP2, PO2, PO3,	Geometría
PO4	Temas/problemas donde aparecen formas geométricas
PP1, PP2, PP3, PP4, PC3, PC4	Diferentes asignaturas
PO1	Cuando se utiliza un lenguaje de descripción

La tabla 3.17 refleja que la mayoría del profesorado considera que los contenidos relativos a la descripción se aplican en las matemáticas, bien en otros temas de geometría (4/12), bien cuando se trabajan las figuras geométricas en otras áreas de las matemáticas (4/12). En los temas no necesariamente de geometría se trabaja la descripción de las formas geométricas siempre que aparecen las formas geométricas (1/12). Algunos/as profesores/as le dan gran utilidad fuera de las matemáticas, en diferentes asignaturas, principalmente las de arte y las de ciencias y tecnología. Cabe añadirse que un/a profesor/a ha mencionado que se aplican estos contenidos cuando se utiliza un lenguaje de descripción (1/12).

Docente	Aplicaciones de contenidos relativos a la descripción fuera de la enseñanza
PC1, PC3, PP1, PP3, PP4, PO2, PO3, PO4	Al explicar los objetos cotidianos/entorno/tecnológicos
PC2, PP2	Arquitectura
PC2	Arte
PC3	Al realizar cálculos de medición
PC4	Naturaleza
PO1	Al intentar entender el entorno y en su comunicación

Tabla 3.18. Situaciones en las que se aplica la descripción fuera de la enseñanza

La tabla 3.18 muestra que la mayoría del profesorado (8/12) hace referencia a la aplicación de los contenidos de descripción fuera de la enseñanza de forma general, sin especificar, que la descripción de las formas se realiza cuando se trabajan de alguna manera (describir, construir…) los objetos que utilizamos diariamente, que encontramos en nuestro entorno, que se han fabricado para mejorar nuestro nivel de vida, etc. Se indica que estos contenidos se aplican en arquitectura (2/12), en el arte (1/12) y en la naturaleza, como los minerales (1/12). También se ha anotado (1/12) que si quiere entender el entorno en el que vivimos hemos de saber describir las formas.

Para la clasificación, son las tablas 3.19 y 3.20 las que registran las situaciones en las que se trata este proceso matemático en la enseñanza y fuera de esta.

Docente	Descriptores en la enseñanza
PC1, PC3, PC4, PP3, PP4, PO2, PO3	Formas geométricas
PC2, PP1, PP2, PO1, PO4	Geometría
PP4	Otras asignaturas

Tabla 3.19. Situaciones en las que se aplica la clasificación en la enseñanza

Docente	Descriptores fuera de la enseñanza
PC1, PC4, PP1, PO3	Organizar
PC2, PP3	Parecidos y diferencias
PC3	Ordenar
PP4. PO2	Clasificar objetos
PO1	Terminología para la descripción
PP2. PP4	No se aplica/sabe

Tabla 3.20. Situaciones en las que se aplica la clasificación fuera de la enseñanza

Puede observarse que el profesorado asocia la clasificación de las formas principalmente al bloque de geometría (5/12) y más específicamente, a la parte de geometría que trata sobre las formas geométricas (7/12). También se ha asignado puntualmente (1/12) a asignaturas como la plástica o la tecnología.

Fuera de la enseñanza, la mayoría (10/12) considera que en general se aplica para realizar diferentes acciones sobre los objetos como es organizarlos, señalar parecidos y diferencias, ordenarlos, clasificarlos… Cabe mencionarse las respuestas de dos profesores/as que indican: “Le veo poca o ninguna aplicación fuera de la enseñanza”; “No sé dónde se puede aplicar que no sea en la enseñanza”.

De las respuestas de los/las profesores/as se desprende que consideran los contenidos relativos a la descripción y la clasificación como aplicables en otras materias de la ESO distintas a la geometría y fuera de esta enseñanza secundaria obligatoria. La descripción se ha considerado como más enfocada para trabajar en otras áreas o materias y la clasificación se ha reflejado más en acciones como organizar, buscar parecidos y diferencias o separar objetos atendiendo a determinadas características.

3.2 Conocimientos que se expresan e ideas erróneas que se reflejan sobre contenidos geométricos relativos a la descripción, clasificación y establecimientos de relaciones en ESO

En esta sección incluimos observaciones/resultados asociadas al segundo objetivo de nuestra investigación. Estas las hemos extraído a partir de los datos que provienen de las respuestas dadas por los/as profesores/as implicados/as en el estudio a las tareas TCg1, TCg2 y TCg3 (tabla 2.1 del apartado 2.2.3 del capítulo 2). Hacen referencia a: i) familias de sólidos determinadas; ii) los elementos de los sólidos; iii) características de familias de poliedros; v) ideas y/o definiciones de ellas y/o de sus elementos; vi) relaciones y/o clasificaciones que se establecen, e vii) ideas erróneas que se reflejan. Las organizamos en los apartados 3.2.1 a 3.2.3 según el contenido geométrico al que se refieren. Las que se asocian a las respuestas de la tarea TCg1 corresponden a la descripción de las formas geométricas (apartado 3.2.1). Las asignadas a respuestas de la tarea TCg2 se refieren a relaciones entre ellas (apartado 3.2.2) y las correspondientes a la tarea TCg3 aluden a la clasificación de las mismas (apartado 3.2.3).

3.2.1 Acerca de la descripción de las formas geométricas

Siguiendo a Guillén (1991, 1997, 2010), la descripción de las formas geométricas la centramos en la descripción de los sólidos, especialmente de los poliedros y familias de poliedros pues a partir de ellos se puede desarrollar una gran actividad matemática. También consideramos otras familias de sólidos que no son poliedros, como cilindros, conos y esferas, que aparecen en los libros de texto. Las observaciones/resultados los presentamos agrupados en los que hacen referencia a la idea/definición que se asigna a determinados elementos de los sólidos (subapartado 3.2.1.1) y los que se refieren a las características y propiedades de las formas geométricas implicadas en el estudio (subapartado 3.2.1.2).

3.2.1.1 Sobre los elementos de los sólidos asociados a la descripción y la clasificación

Las respuestas a este subapartado se corresponden con subapartado 1.4.1.2 del capítulo 1 que trata sobre los elementos de los sólidos. Los datos se obtienen de las respuestas a la cuestión CCD1 de la subtarea S-TCg1-1 (tablas 2.2 y 2.3 del capítulo 2), presentando en 3.2.1.1.1 los elementos de los sólidos que muestran conocer y en 3.2.1.1.2 la idea/definición que tienen de determinados elementos de los sólidos.

3.2.1.1.1 Acerca de los elementos de los sólidos a los que se hace referencia

La tabla 3.21 muestra los elementos de los sólidos que los/as profesores/as señalan como que conocen; esta se extrae de parte de la tabla 2.6 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Docente	DDEI												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
PE1	x	x	x										
PE2	x	x	x										x
PE3	x	x	x										x
PE4	x	x	x										x
PC1	x	x	x		x								x
PC2	x	x	x		x								x
PC3	x	x	x		x								x
PC4	x	x	x		x								x
PP1	x	x	x		x								x
PP2	x	x	x		x								x
PP3	x	x	x		x	x							
PP4	x	x	x		x								
PO1	x	x	x		x								x
PO2	x	x	x										
PO3	x	x	x										
PO4	x	x	x										

Tabla 3.21. Elementos de los poliedros que los/as profesores/as señalan conocer

Puede observarse que los elementos que han mencionado todos los/las docentes son las caras, aristas y vértices. Se contempla que más de la mitad del profesorado (8/12) ha indicado los ángulos diedros. Un/a docente ha añadido los ángulos poliedros. Hemos incluido en la opción de “Otros elementos” cuando se ha mencionados como elementos de los poliedros las bases, la altura, la diagonal (sin especificar qué tipo de diagonales), los ángulos triedros o los ejes de simetría. Cabe notarse que como ningún/a profesor/a señaló como elementos de los sólidos los planos de simetría y ejes de rotación. Por ello, en los cursos se cuestionó sobre ellos de manera explícita.

3.2.1.1.2 Sobre las ideas/definiciones que se indican de los elementos de los sólidos

En primer lugar, hay que aclarar que los datos provienen solamente de los cursos que hemos impartido pues en la encuesta únicamente se preguntaba a los/las docentes por los elementos que se utilizaba en la descripción de formas geométricas.

Cabe señalarse que prácticamente todos los docentes implicados en los cursos coinciden en la idea/definición de caras de un poliedro como "los polígonos que lo forman".

A la hora de expresar una idea de aristas, hemos registrado dos tipos, distinguiendo según se consideren como: a) los lados de las caras de los polígonos (PC1, PC2, PP1, PP3, PO4), y b) La confluencia o intersección de dos caras (PC3, PC4, PP2, PP4, PO2, PO3).

Ambas respuestas se corresponden con las que se indican en Guillén (1997). Esta autora subraya que lado en el plano pasa a arista en el espacio al establecer analogía entre el plano y el espacio; en otras ocasiones expresa la idea de arista como la intersección de dos caras.

En cuanto a las ideas que se expresan sobre vértice tenemos tres tipos de respuesta: a) Como la intersección o punto común de las aristas (PC1, PC3, PC4, PP2, PP3) especificando que son tres o más las aristas las que tienen que intersectar o tener un punto común (PC1, PC4 y PP2) o no haciendo referencia al número mínimo de aristas imprescindible (PC3 y PP3). b) Como los vértices de los polígonos o las caras (PC2, PO4). c) Donde concurren 3 o más caras (PP1, PP4, PO2, PO3).

Puede observarse que la mayoría del profesorado expresa ideas para vértice de un poliedro en términos de caras o aristas del mismo; son ideas a las que se refiere Guillén (1997) en situaciones diferentes; ambas requieren de la utilización de términos de la geometría del espacio. Si bien, las ideas que expresan PC2 y PO4 tanto para vértice como para arista de un poliedro, se expresan con términos correspondientes a las figuras planas.

Las ideas que expresan los/as profesores/as participantes para ángulo diedro son las siguientes:

- El ángulo formado en el vértice (PC1).
- El ángulo que está formado por dos caras (PC2, PC3, PP1).
- El ángulo que forman como mínimo dos caras o aristas (PC4).
- La abertura que se forma entre dos o más caras (PP2).
- El ángulo formado por dos aristas (PP3).

Las respuestas reflejan confusión entre los ángulos relativos a los poliedros. Guillén (1997) distingue cuatro tipos: Los ángulos de las caras, que corresponden a los ángulos de los polígonos que forman el poliedro; los ángulos diedros que corresponden a los ángulos que forman las caras al juntarse; los ángulos de los vértices, que corresponden a la suma de los ángulos de los polígonos que se juntan en un vértice y que se centra en ellos para reflejar cierta idea de los ángulos poliedros.

Puede observarse que solo tres profesores/as tienen en su objeto mental de ángulo diedro una idea del mismo en la que se incluyen los atributos relevantes (PC2, PC3, PP1), pues expresan que el ángulo diedro es el ángulo formado por dos caras, si bien esta es incompleta pues no especifican que es cuando se juntan formando una arista.

También puede notarse que algunos/as profesores/as asocian el ángulo diedro al ángulo poliedro, nombrándolo de esta manera explícitamente o no; se refleja que es el ángulo poliedro el que tiene más peso en el objeto mental de estos/as profesores/as de ángulo de los poliedros, si bien expresan una “cierta idea” de ángulo poliedro con algunos atributos relevantes pero incompleta (PC1, PC4, PP2).

La respuesta de uno de los/as profesores/as (PP3), puede interpretarse como que es el ángulo de las caras el que se asocia como ángulo diedro al indicar que “es el ángulo formado por dos aristas”.

Cabe mencionar que hay profesores/as (PO2, PO3, PO4) que ni los nombran o si los nombran no proporcionan ninguna idea de ellos (PO1).

Las observaciones anteriores constatan la “pobreza” de las ideas/definiciones que se expresan verbalmente para ángulos diedros de un poliedro, así como la dificultad que conlleva para los/as profesores/as implicados en el estudio usar el lenguaje preciso al referirse a ellos y expresar las ideas/definiciones que se tienen sobre ellos. Guillén (1997) remarca que cuando se tratan los ángulos de los sólidos, que son conceptos relacionados, hay que remarcar el hecho de que les damos un nombre compuesto y que sus ideas se expresan utilizando otros elementos del poliedro; expresar estas ideas con precisión conlleva bastantes dificultades para los estudiantes. En nuestro estudio, algunos/as profesores/as ni siquiera los han nombrado o expresado alguna “idea” de ellos; hay profesores/as que hacen referencia a ellos como “ángulo” (PP2), otros los nombran como ángulo sólido (PC3) o los asocian al ángulo poliedro (PP4).

Por lo que se refiere a las diagonales de un poliedro, ideas/definiciones que han expresado los/as profesores/as participantes son:

- El segmento que une dos vértices no consecutivos del poliedro (PC2, PC3).
- La recta que une dos vértices del poliedro (PC1).
- La recta que une dos vértices que no están sobre la misma cara (PC4, PP1, PP2).

Al igual que pasa con las respuestas sobre los ángulos de los sólidos, las que expresan ideas/definiciones sobre las diagonales de los sólidos reflejan poco conocimiento de las mismas. Hay un número considerable de profesores/as (PP3, PP4, PO1, PO2, PO3, PO4) que ni las nombran ni expresan una idea/definición para ellas. Solo 6 profesores/as han expresado ideas para las diagonales de los poliedros y de estas, solo la idea/definición que indican 3 profesores/as (PC4, PP1, PP2) incluye los atributos relevantes si bien cabe señalarse que no está expresada con precisión ya que se ha usado el término recta en vez de segmento.

Además, si consideramos los tipos de diagonales del espacio que distingue Guillén (1997), que denomina “diagonales de las caras” (diagonales que tienen las caras) y “diagonales del espacio” (segmentos que unen vértices del poliedro, que no pertenecen a una misma cara), con las ideas que indican tres profesores/as es difícil determinar si se refieren a las diagonales de las caras o del espacio (PC1, PC2, PC3). Por ejemplo, puede parecer que la idea/definición que expresan PC2 y PC3 para diagonal de un poliedro está adaptada de la idea que se tiene para la diagonal de un polígono; solo se ha cambiado el término polígono por el de poliedro. Pero también puede considerarse que estos/as profesores/as tienen cierto objeto mental en relación con las diagonales del espacio lo que ocurre es que al expresar la idea que se tiene de ellas se indican algunos atributos relevantes, pero es incompleta. Respecto de la idea que expresa PC1, cabe señalarse también que además de incompleta es imprecisa.

Las observaciones anteriores constatan también la “pobreza” de las ideas/definiciones que se expresan verbalmente para diagonales de un poliedro, así como la dificultad que conlleva para el profesorado implicado en el estudio usar el lenguaje preciso al referirse a ellas y expresar las ideas/definiciones que se tienen sobre ellas.

Las ideas que se han expresado para los planos de simetría y ejes de rotación se registran en la tabla 3.22. Los códigos que se han utilizado para codificar las respuestas de estos elementos se aclaran en la tabla 2.6 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Docente	Plano de simetría		Eje de rotación	
	DDD1N	DDD1S	DDD1N	DDD1S
PC1	x			x
PC2		x		x
PC3	x		x	
PC4	x			x
PP1	x			x
PP2	x			x
PP3	x			x
PP4	x			x
PO1	x		x	
PO2	x		x	
PO3	x		x	
PO4	x		x	

Tabla 3.22: Ideas/definiciones de plano de simetría y eje de rotación

De las respuestas dadas, en relación con los planos de simetría y ejes de rotación, cabe observarse:

Para plano de simetría la mayoría del profesorado (10/12) expresa la idea de que “Es un plano o superficie plana que divide al sólido en dos partes iguales o simétricas”. Algunos han añadido además que “es plano imaginario” (PP2), “es plano que contiene al eje de simetría” (PC2), o “es plano que pasa por el centro del cuerpo geométrico” (PP4). Otras respuestas plasman la idea de plano de simetría como espejo (2/12), “en el que refleja exactamente el otro trozo” (PO1), o “que proporciona información sobre cómo se reconstruiría” (PO3).

Para los ejes de rotación se indican ideas como las siguientes: “Es una recta que atraviesa el poliedro y que, si el cuerpo gira alrededor de ella, vuelve a coincidir consigo mismo antes de dar una vuelta completa” (PO3). “Es una línea que cuando se gira el cuerpo alrededor de ella se ve lo mismo” (PC1). “Es una recta imaginaria que pasa por el cuerpo geométrico de tal manera que cuando giramos el cuerpo alrededor de él coincide” (PP2). “Es una recta que si giramos el cuerpo alrededor de ella se superpone consigo mismo” (PC2).

Las respuestas reflejan que la mayoría del profesorado que ha participado en el estudio tienen un cierto objeto mental de plano de simetría y de eje de rotación de un poliedro y una idea/definición muy unificada, si bien tiene dificultades para expresar con precisión las ideas/definiciones que se tiene de ellos. Las ideas que se aportan son incompletas e imprecisas. (véase el resumen de Guillén (1991) que se presenta en el subapartado 1.4.1.2 del capítulo 1). En las ideas de plano de simetría se habla de “partes iguales o simétricas” sin precisar qué significa “simétricas”, de “que contiene al eje de simetría”, con lo que se usa terminología de la geometría plana para los sólidos, de que “refleja exactamente el trozo” sin precisar más o de “proporciona información sobre cómo se reconstruiría” que resulta insuficiente para caracterizar al plano de simetría de un poliedro. Y en las ideas de ejes de rotación en varias respuestas no se especifica que el sólido cuando se gira alrededor del eje de rotación tiene el mismo aspecto antes de dar una vuelta completa; en otras, se confunde el término eje de rotación con eje de simetría, con lo que también se usa terminología de la geometría plana para los sólidos.

3.2.1.2 Las características y propiedades de las formas geométricas

Siguiendo a Guillén (2004), en este subapartado nos acercamos a la descripción de formas geométricas centrándonos en las características y propiedades que los/as profesores/as señalan de ellas, cuando estas se presentan en diferentes situaciones y/o contextos. Las observaciones de estas respuestas que incluimos en este subapartado están organizadas según la situación o contexto en el que se propone la descripción de estas formas y según las familias de poliedros que se propone para su descripción.

Así, en 3.2.1.2.1 incluimos observaciones/resultados sobre las respuestas dadas sobre características y propiedades cuando los poliedros o familias de poliedros se presentan con su nombre. En 3.2.1.2.2 son las diferentes formas de representación de estas familias de sólidos las que se usan como contexto/situaciones para las tareas correspondientes desde cuyas respuestas se realizan las observaciones que presentamos. En 3.2.1.2.3, los contextos/situaciones que se toman corresponden a tareas propuestas por Guillén (1997) asociadas a la descripción que tienen como objetivo ampliar los objetos mentales de contenidos geométricos relativos a la descripción en el mundo de los sólidos y desarrollar la capacidad de razonamiento geométrico de los que las realicen. Finalmente, en 3.2.1.2.4 incluimos las observaciones sobre respuestas a cuestiones asociadas a la descripción de las formas geométricas cuando estas se plantean usando los enunciados de problemas geométricos como contexto.

3.2.1.2.1 La descripción de las formas geométricas presentadas por su nombre

El estudio de la descripción de las formas geométricas se ha llevado a cabo a partir de la subtarea S-TCg1-2 planteando la cuestión CCD2 que se contempla en las tablas 2.2 y 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2.

Las familias soporte que se han considerado han sido: a) los poliedros por ser una familia muy diversa y que se presenta en una variedad de contextos (Freudenthal, 1983, p. 299); b) los prismas, familia que pertenece a los poliedros, a partir de la que se puede llevar a cabo una gran actividad matemática (Guillén, 1997), y c) Los paralelepípedos, por ser una familia finita dentro de los prismas que tiene unas propiedades específicas.

a) Los poliedros

Las respuestas de los/as docentes que han participado en nuestro estudio en las que se señalan elementos y propiedades de los poliedros se registran en la tabla 3.23. La plantilla base se muestra en la tabla 2.7 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Docente	DDPoP						DDPoE												
	1	2	3	4			1												
				A	B	C	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
PC1	x	x	x				x	x	x		x								x
PC2	x	x		x			x	x	x		x								x
PC3	x	x					x	x	x		x								x
PC4	x	x	x	x			x	x	x		x								x
PP1	x	x	x				x	x	x		x								x
PP2	x	x	x				x	x	x										x
PP3	x	x					x	x	x		x	x							
PP4	x	x	x				x	x	x			x							
PO1	x	x					x	x	x		x	x						x	x
PO2	x	x	x				x	x	x										
PO3	x	x					x	x	x										
PO4	x	x					x	x	x										

Tabla 3.23. Sobre la descripción de los poliedros por parte de los/as profesores/as participantes

La tabla 3.23 muestra que la mayoría de los profesores/as (9/12) han indicado que un poliedro “Es un cuerpo geométrico limitado por polígonos”. Otras ideas/definiciones que se aportan difieren unas de otras en los atributos críticos que se explicitan y en la manera de expresar estos atributos. Ejemplos de estas respuestas son: “Es una porción o región del espacio limitada por polígonos” (PO1 y PO2), “Un poliedro convexo es una porción acotada del espacio tridimensional limitada por planos que entre ellos delimitan unas caras” (PO1); “Es la región del espacio limitada por polígonos” (PO2); “Un cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito” (PO3).

Cabe destacarse que todos/as los/as profesores/as expresan como característica de los poliedros una “idea/definición” que los caracteriza; la mitad de ellos/as hacen explícito además que “En los vértices se juntan por los menos 3 caras o aristas”, si bien ya no se indican otras características. Solo un profesor anota que “Los poliedros han de tener como mínimo cuatro caras” (PP4).

Guillén (op. cit.) considera interesante que al hacer la descripción de poliedros se haga hincapié en las características de los poliedros que requieren del uso de expresiones como “Como mucho”, “como mínimo” … Por ejemplo, “En sus vértices se juntan por lo menos 3 caras”, “Los poliedros como mínimo tienen 4 caras, 4 vértices y 6 aristas”. Como hemos indicado en el párrafo anterior, así como en el subapartado 3.2.1.1.2, en nuestro estudio se han usado las expresiones “Por lo menos”, “Tres o más”, “Más de dos”, si bien solo lo han hecho la mitad de los/as profesores/as, y exclusivamente para hacer referencia al número de caras o aristas que concurren en un vértice. Ejemplos de respuestas son: “Son tres o más las aristas que tienen que intersectar o tener un punto común” (PC1, PC4 y PP2), “En los vértices concurren 3 o más caras” (PP1, PP4, PO2). “Los ángulos poliedros están formados por 3 o más aristas” (PP3). “En los vértices concurren más de dos caras” (PO3). Solo PP4 ha utilizado “como mínimo” al indicar una propiedad de los poliedros relativa al nº de caras que tienen.

De las respuestas dadas y teniendo en cuenta las respuestas del anterior subapartado 3.2.1.1.2, concluimos que todo el profesorado indica como elementos de los poliedros las caras, vértices y aristas, añadiendo algunos/as profesores/as los ángulos diedros, ángulos poliedros y diagonales, sin especificar en general cuáles. Como propiedades de los poliedros se indican sus propiedades específicas. Se expresa una idea/definición de ellos, pero no se especifica el número de elementos que han de tener como mínimo. A veces se utiliza vocabulario de la geometría plana para el espacio. La mayoría de los/as profesores/as no utilizan términos como “como máximo” y “como mínimo” al expresar las propiedades de esta familia de sólidos; solo un profesor lo ha hecho (PP4). Ahora bien, sí que se han utilizado expresiones como “tres o más” o “más de dos” al hablar de las aristas o caras que concurren en un vértice (7/12).

b) Los prismas

La tabla 3.24 recopila las respuestas que dieron los/las docentes en relación con la descripción de los prismas. Los códigos que se han utilizado se aclaran en la tabla 2.8 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2, donde se incluye la plantilla que hemos diseñado para registrar este tipo de respuestas.

Docente	DDPr																			
	P								E											
	1		2	3		4			1				2							
	A	B		A	B	A	B	C	A	B	C	D	A	B	C	D	E	F	G	H
PC1		x		x		x			x	x	x	x								
PC2		x		x		x			x	x										
PC3		x		x		x			x	x										
PC4		x		x		x			x	x	x	x								
PP1		x		x		x			x											
PP2		x				x			x	x										
PP3		x		x		x			x	x										
PP4				x		x			x	x										
PO1		x		x						x										
PO2		x		x		x			x	x										
PO3		x		x		x			x											
PO4		x		x		x			x	x										

Tabla 3.24. Descripción de los prismas por parte de los profesores participantes

De las respuestas dadas puede señalarse:

- La idea/definición que prevalece es la que se apoya en propiedades de las bases y las caras laterales de estos sólidos. Por ejemplo, PP4, apunta que “El prisma es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos, tiene dos polígonos iguales y paralelos, que se llaman bases, y varios paralelogramos que se llaman caras laterales”. PP2 señala que “El prisma es un poliedro formado por 2 caras iguales llamadas bases y los polígonos que las unen son paralelogramos y se llaman caras laterales". PO3 indica "Son poliedros donde dos de sus caras denominadas bases son polígonos iguales y paralelos" y PC1 ha expresado "Son poliedros formados por 2 bases iguales y paralelas unidas por paralelogramos formando 90º con las bases las cuales tienen cualquier forma poligonal".

Solamente un profesor/a (PC2), define los prismas en el sentido dinámico al indicar que "Son poliedros formados por polígonos con volumen…".

Cabe señalarse que solo una de estas ideas/definición (PP4) puede considerarse completa y precisa para caracterizar la familia de los prismas y que en la imagen que tiene PC2 sobre los prismas tiene mucho peso la subfamilia de los prismas rectos pues la idea que señala para ellos corresponde a esta subfamilia.

- Casi todos los/as profesores/as (11/12) señalan que son poliedros y no indican características generales de estos. Solo uno de ellos/as (PP4) ha hecho referencia a ello indicando que "Es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos".

- Más de la mitad de los/as profesores/as (9/12) indican que los elementos característicos de los prismas son las bases y las caras laterales. Hay profesores/as (2/12) que no los han nombrado explícitamente, pero hacen referencia a ellos indicando atributos de estos que pueden o no caracterizarlos. Por ejemplo, PO1, quien no nombra el término "bases", responde: "Es un poliedro formado por dos caras paralelas unidas por sus vértices por aristas paralelas entre sí. Estas aristas forman las caras laterales que siempre serán paralelogramos". Solo en la respuesta de uno de ellos (PO3) no se nombra ni se hace referencia a las caras laterales. Se indica: "Son poliedros donde dos de sus caras denominadas bases son polígonos iguales y paralelos". Si bien, solo tres profesores/as (PC1, PC4 y PO1) han aludido a los vértices de los prismas. Por ejemplo, PC1 y PC4 expresan que los prismas son poliedros y que entre los elementos de los prismas están los elementos de los poliedros, como por ejemplo los vértices.

- La mayoría de los profesores/as (10/12) han indicado las relaciones de paralelismo e igualdad entre las bases y los otros dos han señalado una de ellas. Por ejemplo, PP2 indica la relativa a caras iguales y PO1 la de su paralelismo.

  En relación con las aristas laterales y /o de las bases, solo la respuesta de PO1 remite a las aristas laterales, pero sin nombrarlas explícitamente e indicando solo que son paralelas. Ningún otro profesor ha explicitado propiedades relativas a estos elementos.

- Ningún/a profesor/a indica expresiones matemáticas para el número de elementos de un prisma generalizado n-agonal relativo al número de caras, vértices, diagonales…Sin embargo, todos los profesores/as, han hecho explícito que tienen dos bases.

- No se han nombrado explícitamente ninguna familia de prismas y solo un/a profesor/a ha expresado asociado a los prismas un atributo que corresponde a los prismas rectos.

- Las respuestas de los/as profesores/as no se han apoyado y/o aclarado en dibujos de ejemplos de algunos prismas.

Puede concluirse que a la hora de describir los prismas la mayoría de los/as profesores/as han dado respuestas correctas pero incompletas. Se ha usado correctamente el vocabulario geométrico para expresar ideas/definiciones de esta familia de poliedros en términos de las caras laterales y/o las bases, si bien falta especificar elementos y sus propiedades correspondientes relativas a las aristas laterales y/o al número de elementos de diferente tipo que tiene un prisma n-agonal. Solo un/a profesor/a ha hecho referencia a un atributo no crítico de los prismas que corresponde a los prismas rectos, si bien ni este ni otros profesores han hecho referencia a subfamilias de prismas y/o a propiedades de estas subfamilias. Tampoco han mostrado dibujos de algunos prismas para explicar la descripción de esta familia de formas geométricas.

c) Los paralelepípedos

Las respuestas de los/as docentes a la descripción de los poliedros se muestran en las tablas 3.25 y 3.26, que hacen referencia a las propiedades y elementos que se señalan de los paralelepípedos, respectivamente. Los datos se han registrado en las plantillas de la tabla 2.9 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Docen-te	DDPa																				
	P																				
	1			2	3	4	5	6	7	8	9	10		11		12			13		
	A	B	C									A	B	A	B	A	B	C	A	B	C
PC1		x		x								x		x							
PC2		x		x																	
PC3			x	x																	
PC4			x	x																	
PP1		x		x								x	x	x	x						
PP2			x	x																	
PP3		x		x								x		x							
PP4			x	x								x									
PO1			x	x								x		x							
PO2			x	x																	
PO3			x	x																	
PO4			x	x																	

Tabla 3.25. Sobre la descripción de las propiedades de los paralelepípedos por parte de los/as profesores/as participantes

Docente	DDPa								
	E								
	1								
	A	B	C	D	E	G	F	G	H
PC1	x								
PC2									
PC3									
PC4	x								
PP1	x								
PP2									
PP3	x								
PP4									
PO1									
PO2									
PO3									
PO4									

Tabla 3.26. Sobre los elementos de los paralelepípedos que indican parte de los/as profesores/as participantes

De las respuestas dadas puede señalarse:

- La idea/definición que prevalece para los paralelepípedos es la que se apoya en que están formados por paralelogramos y en que son un tipo de prismas (8/12) o de poliedros (4/12). Destacamos que solo un profesor/a, PC2, caracteriza los paralelepípedos en el sentido dinámico, al igual que hizo para los prismas, al indicar que “Son poliedros formados con paralelogramos con volumen…”

- Todos los profesores/as hacen referencia al atributo crítico de que sus caras son paralelogramos y solo uno de ellos (PO2) especifica además que es un tipo de prisma, prisma cuadrangular. Ningún profesor expresa que al pertenecer a estas familias cumplen sus propiedades y tampoco mencionan propiedades específicas de ellas.

- En cuanto a las propiedades de los paralelepípedos que se han indicado cabe destacarse que solo se ha hecho referencia explícita a que tienen 6 caras, y lo han hecho solo algunos/as profesores/as (5/12), y a que las caras son paralelas e iguales dos a dos (3/12). Un/a profesor/a, PO1, solo lo ha hecho para la relación de paralelismo al indicar que “Las caras son paralelas dos a dos”.

- No se han nombrado otros elementos de los paralelepípedos ni otras familias a las que pertenece; por ejemplo, ninguno ha señalado que son poliedros convexos. Tampoco se han expresado propiedades específicas de los prismas cuadrangulares, relativas a su número de aristas y vértices, ni propiedades específicas de los prismas convexos relativas a los ángulos de las caras y/o a las diagonales de las caras. Por ejemplo, las diagonales del espacio caen siempre en el interior del sólido o los ángulos diedros son menores que 180º.

  Solo un profesor, PP4, expresa una propiedad relativa a las diagonales del espacio “Las cuatro diagonales que tiene son iguales” si bien no especifica de qué tipo de diagonales está hablando y que esta propiedad la cumplen solo familias concretas de paralelepípedos (los ortoedros y los cubos como familias especiales de ortoedros).

- Los profesores/as tampoco han hecho referencia a propiedades en los que se usen expresiones como “el mayor número de medidas diferentes” que pueden tener sus caras, sus aristas o sus ángulos de las caras.

Puede concluirse que a la hora de describir los paralelepípedos la mayoría de los/as profesores/as han dado respuestas correctas si bien el listado de propiedades que se ha enumerado ha sido pobre. Se ha usado correctamente el vocabulario geométrico para expresar ideas/definiciones de esta familia de prismas en términos de la familia de sólidos a la que pertenece y el tipo de caras que tiene. Si bien falta especificar otras familias de poliedros a las que pertenece, como, por ejemplo, la de los prismas cuadrangulares, que solo la ha señalado uno de los/as profesores/as, o la familia de los prismas convexos, que no se ha nombrado por ninguno de ellos. Tampoco se han especificado elementos y sus propiedades correspondientes relativas a las aristas, vértices, diferentes tipos de ángulos y de diagonales o a las medidas diferentes para estos elementos. Solo un profesor ha hecho referencia a una propiedad relativa a las diagonales del sólido y esta corresponde a un atributo crítico de una familia contenida en la de los paralelepípedos (los ortoedros) si bien es un atributo no crítico de esta familia de prismas. Ningún/a profesor/a ha apoyado la descripción de los paralelepípedos con dibujos.

3.2.1.2.2 La descripción de las formas geométricas mostradas mediante diferentes tipos de representaciones

En la subtarea, S-TCg1-3 se muestran formas geométricas y se ha propuesto la cuestión CCD2 que se señala en las tablas 2.1 y 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2. Se pretende que los/as profesores/as participantes identifiquen familias específicas de poliedros y de familias de sólidos que no lo son a partir de diferentes representaciones físicas y/o planas de ellas. Así mismo, se pide que se explique la respuesta para obtener información sobre el tipo de razonamiento que se usa para identificar las formas geométricas correspondientes. En los subapartados a) y b) se muestran pirámides y/o tetraedros y octaedros respectivamente; y en los subapartados c), d) y e) esferas, cilindros y conos respectivamente. Para finalizar este subapartado, en f) indicamos observaciones sobre las opiniones de los profesores participantes en relación con las diferentes representaciones usadas en esta tarea de identificación de formas geométricas.

Cabe aclarar de que, con objeto de mostrar las formas geométricas en diferentes contextos y con diferentes representaciones, algunas representaciones expuestas para el curso en comunidad se han variado cuando se han presentado en el curso presencial y online.

a) Para las pirámides y/o tetraedros

La tabla 3.27 muestra representaciones usadas para las pirámides en los cursos correspondientes.

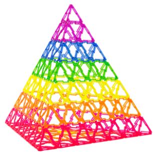
Curso en comunidad	Cursos presencial y online
	

Tabla 3.27. Representaciones para las pirámides y/o tetraedros

Con las dos representaciones de formas geométricas que se han mostrado en estos cursos se pretendía que en un principio se identificasen como una pirámide. Se ha cambiado la representación en los cursos presencial y online respecto al curso en comunidad porque en este curso verificamos que la gente tiene muy identificada las pirámides de Egipto con las pirámides como figuras geométricas; rápidamente las identificaron con ellas. También se consideró interesante que en los cursos presencial y online no se mostraran representaciones que hicieran referencia a objetos del entorno sino a una representación física de las formas con una estructura diferente, hueca y formada por una estructura de varillas.

Las respuestas a esta tarea de identificación de formas geométricas, tablas 3.28 y 3.29, se registraron en las plantillas que se incluyen en las tablas 2.10 y 2.11 del capítulo 2, ambas diseñadas para registrar respuestas relativas a la descripción de las pirámides y los tetraedros (no necesariamente regulares) respectivamente.

Docente	DDPi																			
	P					E														
	1		2		3	1							2							
	A	B	A	B		A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	H
PC1						x	x	x	x			x								
PC2						x	x					x								
PC3						x	x				x	x								
PC4						x	x	x	x			x								
PP1		x						x				x	x							
PO2		x				x	x													
PO4						x	x					x	x							

Tabla 3.28. Sobre la identificación de las formas implicadas en la tabla 3.27 como pirámides

Docente	DDT														
	P								E						
	1			2				3	1						
	A	B	C	A	B	C	D		A	B	C	D	E	F	G
PP2			x		x	x			x	x					
PP3			x				x	x	x						
PP4	x			x					x						
PO1			x		x	x			x	x	x				
PO3					x	x		x							

Tabla 3.29. Sobre la identificación de las formas implicadas en la de la tabla 3.27 como tetraedros (no necesariamente regulares)

Analizando las respuestas observamos que todo el profesorado del curso en comunidad ha indicado que es una pirámide, sin especificar el tipo de pirámide al que corresponde. En los cursos presencial y online, cuya representación se ha variado respecto a la del curso en comunidad, se observan diferentes respuestas. Por un lado, algunos/as profesores/as han especificado que es una pirámide (3/8) de manera que uno de ellos/as no ha indicado el tipo de pirámide al que corresponde y los/as otros/as dos la han clasificado según la base, identificándola como de base triangular (1/8) o como de base cuadrangular (1/8). Por otra parte, la mayoría de profesores/as de estos cursos (5/8) han puntualizado que es un tetraedro. De estos/as últimos/as, algunos/as han indicado que es el tetraedro regular (3/8), mientras que los/as otros/as dos han señalado que está formado por triángulos (1/8) o que tiene una base triangular y tres caras que son triángulos isósceles (1/8).

Cabe pues concluirse que algunos/as profesores/as tienen dificultades para interpretar las representaciones planas de formas tridimensionales. Hay profesores/as que ante una misma representación de una pirámide que se muestra como estructura de varillas, se interpreta como que tiene base triangular o cuadrada, o que sus caras laterales son triángulos equiláteros o isósceles.

Las respuestas se explican indicando ideas/definiciones de las pirámides y/o del tetraedro regular que se apoyan en los elementos que la forman, el número de estos y/o la familia específica a la que pertenece. Por ejemplo, PC3 indica que "Es una pirámide porque tiene por base un polígono y cuyas caras son triángulos que se reúnen en un mismo punto llamado vértice". PP2 comenta que "Es un poliedro regular formado por 4 caras y triángulos equiláteros, 4 vértices y 4 aristas". PO4 señala que "Sus tres caras laterales son triángulos que tienen un vértice común, la base también es un triángulo y que no se aprecian bien si son equiláteros, pero en ese caso sería un poliedro regular llamado tetraedro".

Casi todos los/las profesores/as (6/7) que han identificado la figura como representación de una pirámide han mencionado como elementos la base y las caras laterales. El/La único/a docente que no lo ha especificado (PP1), sin embargo, ha señalado que las aristas laterales son iguales. Queremos constatar que un número bajo de profesores/as (2/7) ha mencionado como elementos las aristas básicas y las laterales.

Al hablar de los vértices estos/as profesores/as solo se han referido al ápice, sin tener en cuenta los vértices de la base. Solo un/a profesor/a ha especificado como se llama este vértice, cúspide, el resto del profesorado se refieren a él como "el vértice", como se aprecia en la respuesta de PC3: "La base es un polígono cualquiera, las caras laterales son triángulos, el vértice es donde concurren los triángulos y la altura la distancia del vértice a la base". Esta respuesta refleja también que la pirámide de la figura que se muestra se ha considerado como soporte para enunciar propiedades de una pirámide en general al expresar que "La base es un polígono cualquiera".

Cabe mencionarse que en el curso en comunidad todo el profesorado ha anotado como elemento la altura, expresando una idea de esta. Como ejemplo, la respuesta de PC3 que acabamos de indicar.

Cabe destacarse también que solo dos profesores/as han especificado cuantas caras tiene y no se ha indicado cuantos elementos tiene de cualquier otro elemento.

Por lo que respecta a las respuestas del profesorado que ha identificado la figura como representación del tetraedro regular, en las propiedades señaladas figuran que está formado por triángulos equiláteros. Los/as dos docentes que lo identifican con un tetraedro indican que está formado por triángulos; PP4 detalla que de los cuatro triángulos que lo forman, tres son isósceles. En cuanto al número de elementos, la mayoría de este profesorado (4/5) ha comentado que está formado por cuatro caras. Sin embargo, disminuye el número de profesores/as (2/5) que indica el número de vértices. Tan solo un/a docente ha dicho que tiene 6 aristas. Cabe mencionar que PO1 señala fórmulas de medición para calcular el área y el volumen, delimita los elementos que hay que determinarse e indica cómo hallar estos elementos. Responde: “La fórmula de su área en función de la arista de manera sencilla aplicando el teorema de Pitágoras sobre una de las caras y multiplicando por 4 tendremos $\sqrt{3} \cdot a^2$ La fórmula del volumen es más complicada, pero se puede partir de considerar el tetraedro como una pirámide de base triangular y utilizar la fórmula volumen = 1/3 del área de la base por la altura. El cálculo de la altura es un problema de los que se hacen en trigonometría de 4º de Eso; calcular la altura de un triángulo conocidos sus lados. Habrá que descomponer el triángulo en dos triángulos rectángulos, aplicar el T. de Pitágoras dos veces y formar un sistema…”.

Teniendo en cuenta las respuestas de todo el profesorado de los cursos se puede concluir que el listado de propiedades que se ha enumerado ha sido muy pobre. Los atributos críticos que se han indicado son los que podrían ser suficientes para caracterizar la forma geométrica correspondiente. Los que tienen más peso en la imagen de las pirámides y/o tetraedros son los relativos al tipo de caras y/número de ellas. En las pirámides se distinguen las caras laterales y la base y se hace también referencia al ápice, si bien solo algunos/as profesores/as remiten al resto de vértices (2/5) y/o aristas (1/5) y solo PP3 y PO3 lo ha hecho al orden de los vértices al señalar que “En cada vértice concurren tres caras”. Puede destacarse también el peso que tiene la altura de las pirámides en los profesores del curso CC así como la referencia que ha hecho uno de ellos a la apotema de las caras (PP1), a las fórmulas de medición para calcular el área y el volumen (PO1) o a la propiedad “La suma de los ángulos que concurren en cada vértice ha de ser menor de 360º” (PO3), específica de los poliedros regulares convexos. Ahora bien, ningún/a profesor/a ha hecho referencia a que son poliedros convexos y rectos ni han apuntado otras propiedades específicas de estas familias.

Hay que remarcar dificultades que han tenido algunos/as profesores/as para interpretar las fotografías de objetos tridimensionales correspondientes a pirámides y/o tetraedros que les ha llevado a visualizar los triángulos equiláteros como triángulos isósceles o a no poder determinar si la base de la pirámide correspondía a un cuadrado, un rectángulo o un triángulo. Por otro lado, la terminología utilizada en algunos casos se tiene que precisar al hacer referencia al ápice, que lo nombran como vértice, como si las pirámides no tuvieran otros vértices. También al referirse a las caras laterales que en algunos casos se llaman como “caras”. Por ejemplo, parece que PP4 no considera la base como una cara de la pirámide al indicar que “Es un cuerpo geométrico de base triangular y tres caras”. Así mismo se observa imprecisión cuando PP1 habla de la apotema de la pirámide, refiriéndose a la de las caras del tetraedro.

b) Para los octaedros

Las figuras mostradas para los cursos realizados se incluyen en la tabla 3.30. Al exponerlas se pretendía que se identificasen las figuras como representaciones del octaedro regular. Se ha cambiado la representación en los cursos presencial y online respecto al curso en comunidad ya que, como han subrayado estudios previos (Guillén, 2004), la representación de los sólidos puede influir en los problemas de visualización que pueden tener los profesores en tareas de identificación de estas formas.

Comunidad	Presencial y online
	

Tabla 3.30. Representaciones para los octaedros

Las respuestas a esta tarea de identificación de formas geométricas, tabla 3.31, se registraron en las plantillas que se incluyen en la tabla 2.12 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2, diseñada para registrar respuestas relativas a la descripción del octaedro (no necesariamente regular).

Docente	DDO														
	P								E						
	1			2				3	1						
	A	B	C	A	B	C	D		A	B	C	D	E	F	G
PC1					x	x		x	x						
PC2					x	x		x	x						
PC3					x	x		x	x						
PC4					x	x			x						
PP1			x		x	x			x						
PP2			x		x	x			x	x	x				
PP3		x			x	x			x						
PP4			x		x	x			x						
PO1			x		x	x			x	x	x				
PO2			x		x	x		x	x						
PO3			x		x	x		x	x						
PO4			x		x	x		x	x						

Tabla 3.31. Sobre la identificación de las formas implicadas en la de la tabla 3.30 como octaedros (no necesariamente regulares)

Puede observarse que la mayoría del profesorado (7/12) ha expresado que es un poliedro regular. Los/as profesores/as que no lo han indicado explícitamente, como han sido los profesores del curso en comunidad, al describir la figura han indicado los atributos críticos que caracterizan al octaedro regular. Por ejemplo, PC1 responde que "Está formado por 8 triángulos equiláteros y que en cada vértice concurren 4 caras". Cabe mencionar que PP3 tampoco ha señalado que era regular, si bien ha señalado atributos críticos de este poliedro al responder "Es un poliedro de ocho caras que son triángulos equiláteros".

Este poliedro lo han caracterizado indicando propiedades relativas al tipo de caras y a su número. Todos los/las docentes han expresado que está formados por polígonos regulares, principalmente lo hacen precisando que son triángulos equiláteros, que son iguales, y que tiene 8 caras.

Además, la mayoría de los profesores del curso en comunidad (3/4) y del curso online (3/4) han indicado que los vértices son de orden 4, mientras que en el curso presencial ningún/a profesor/a lo ha señalado.

Sin embargo, solo dos profesores/as (2/12) ha hecho referencia al número de vértices y aristas y ningún/a profesor/a ha nombrado otros elementos de este poliedro, como su número de ángulos diedros, planos de simetría…

Cabe subrayarse que solo uno de los/as profesores/as (PO3) ha añadido una de las condiciones que deben cumplir los poliedros regulares convexos al apuntar que “La suma de los ángulos que concurren en cada vértice ha de ser menor de 360º”, que también solo un/a profesor/a (PP4) lo ha visto como “Formado por dos pirámides de base cuadrada unidas por las bases” y ninguno de ellos lo ha considerado como antiprisma triangular con caras triángulos equiláteros.

Las respuestas dadas al identificar el octaedro llevan a concluir que los listados de propiedades que enumeran la mayoría de los profesores participantes para este poliedro regular se reducen a los atributos críticos imprescindibles para caracterizarlos. Apenas contienen propiedades relativas al orden de los vértices y al nº de vértices, aristas, ángulos de las caras, ángulos de las caras que concurren en un vértice del poliedro y/u otros elementos del poliedro. Por otro lado, cabe destacarse que este poliedro solo se ha relacionado con los poliedros regulares. No se ha indicado que el octaedro regular es un poliedro convexo ni se ha relacionado con familias de poliedros específicas, como los antiprismas, pirámides y/o pirámides de caras regulares. Así, por ejemplo, no se ha considerado como bipirámide cuadrada de caras regulares ni tampoco como antiprisma triangular de caras regulares.

Cabe apuntarse también que algunos/as profesores/as tienen dificultad para interpretar las representaciones de este poliedro como estructura de aristas.

c) Para las esferas

La representación de la esfera mostrada en los cursos se contempla en la tabla 3.32.

Comunidad, presencial y online


Tabla 3.32. Representación para la esfera

Las respuestas a esta tarea de identificación de las esferas, tabla 3.33, se registraron en la plantilla que se incluye en la tabla 2.13 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2, diseñada para registrar este tipo de respuestas.

Docente	DDE												
	P						E						
	1	2	3	4	5	6	1						
							A	B	C	D	E	F	G
PC1				x				x	x				x
PC2	x			x						x			
PC3	x		x					x	x	x	x		
PC4				x		x		x	x	x			x
PP1		x		x			x			x			
PP2	x			x						x			
PP3	x			x						x			
PP4	x		x					x					
PO1													x
PO2			x					x					
PO3				x	x				x				
PO4	x			x									x

Tabla 3.33. Sobre la identificación de la forma implicada en la de la tabla 3.32 como esfera

En relación con la esfera, en la tabla 3.33 puede observarse que la idea que predomina entre el profesorado es la que se concibe como cuerpo (o sólido) de revolución. La mitad de los/las docentes (6/12) lo indican explícitamente y el resto señala cómo se genera. También en este caso distinguimos dos tipos de respuesta, la más frecuente, es aquella en la que el elemento básico para generarla es un semicírculo, que conduce a una idea de esfera como modelo macizo, y el otro tipo, en la que se parte de una circunferencia y desde la que se desprende una idea de esfera como modelo hueco. Por ejemplo, PC1 apunta que “Es una esfera porque se obtiene girando un semicírculo sobre su diámetro” y PP2 establece que se genera al girar una circunferencia. Solo 3 profesores/as la definen en función de la distancia de sus puntos al centro. Por ejemplo, PO2 indica que “Es una esfera ya que todos los puntos de ella están a la misma distancia de un punto llamado centro de la esfera”.

Al fijarnos en los elementos de la esfera a los que se hace referencia los más señalados han sido diámetro, radio y centro. Se ha de subrayar que en general los/as profesores/as no han expresado ideas/definiciones para estos elementos; se han nombrado en las ideas/definiciones que han expresado para la esfera. En todo caso, se ha hecho solo para el centro de la esfera (PO2, PP4). Por ejemplo, PP4 ha indicado que “Es un sólido en el que todos sus puntos de la superficie están a la misma distancia del centro de la esfera”. PC3 ha definido centro anotando “punto interior que equidista de cualquier punto de la esfera”.

Cabe destacarse que la mayoría del profesorado (11/12) no hace referencia a que la esfera tiene una cara, este elemento que todos nombran al referirse a los poliedros no se destaca en la esfera. Tampoco se señala que no tiene vértices ni aristas. Subrayamos que solo dos docentes (PC4 y PO3) han aludido a la figura que se obtiene cuando se secciona la esfera con un plano, solo un/a docente (PC3) se ha referido a la cuerda como elemento de la esfera, tres docentes (PC1, PC4, PO4) han nombrado “el eje de giro o de la esfera” y un/a cuarto/a (PO1) ha indicado algunas características como círculo máximo, latitud o longitud. Cabe aclarar que ninguno ha hecho aclaraciones sobre estos elementos o características.

d) Para los cilindros

Las figuras mostradas en los cursos realizados se muestran en la tabla 3.34. Puede observarse que contiene dos tipos de representaciones planas de los cilindros. Por una parte, se han presentado fotografías de formas de la naturaleza con forma cilíndrica y, por otra parte, un desarrollo plano del cilindro.

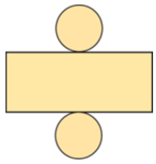
Comunidad	Presencial y online
	

Tabla 3.34. Representaciones de los cilindros

Las respuestas a esta tarea de identificación de los cilindros, tabla 3.35, se registraron en la plantilla que se incluye en la tabla 2.14 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2, diseñada para registrar este tipo de respuestas.

Docente	DDCi																	
	P									E								
	1	2				3			4	1								
		A	B	C	D	A	B	C		A	B	C	D	E	F	G	H	I
PC1			x	x	x		x			x			x		x	x		x
PC2			x				x			x						x		x
PC3			x	x			x			x			x		x	x		x
PC4			x	x			x			x					x	x		
PP1	x						x											
PP2	x						x											
PP3	x		x				x			x								
PP4																		
PO1			x															
PO2							x								x	x		
PO3							x			x					x	x		
PO4	x																	

Tabla 3.35. Sobre la identificación de las formas implicadas en la de la tabla 3.34 como cilindros

De las respuestas de los/as profesores/as podemos observar que un pequeño número de profesores/as (4/12) ha expresado que es un sólido o cuerpo, si bien todos/as ellos/ellas han especificado que es de revolución. La idea/definición que ha expresado la mayoría del profesorado para los cilindros es la que incide en cómo se genera, de manera que distinguimos dos tipos de respuesta: La que han expresado la mayoría de ellos/as (9/12), que considera que se genera “a partir de una superficie rectangular girando alrededor de uno de sus lados” y la que ha indicado un/a docente (PO4) que también lo considera un cuerpo de revolución, pero “Generado al girar alrededor de un eje una recta paralela a él”. Puede notarse que entre los profesores que han expresado la primera idea, ninguno ha hecho referencia a que con un mismo rectángulo se pueden generar dos cilindros dependiendo del lado del rectángulo alrededor del que se gira. También cabe comentarse la idea imprecisa de cilindro expresada por PO4, de la que se desprende una idea de cilindro como un tubo infinito.

Destacamos otro tipo de respuesta en el que la idea/definición que se expresa se apoya en los elementos que componen su desarrollo plano estándar. Distinguimos dos tipos de respuesta. Por un lado, la de un/a docente (PP4) que hace una descripción del cilindro a partir de la del desarrollo plano que se le muestra: “Es un rectángulo con dos circunferencias exteriores tangentes a dos de sus lados paralelos”, con lo que cabe preguntarse sobre si está estableciendo correspondencia entre el desarrollo y el cilindro que puede obtenerse a partir de él. Por otro, la de otro docente (PO1), quien ha especificado las figuras planas que lo forman, rectángulo y círculos, y añade además que también pueden tener la base no circular. ¿Está considerando los cilindros como prismas rectos en el límite?

Cabe destacarse que ningún/a profesor/a ha señalado una manera de generar el cilindro a partir del círculo, bien como desplazamiento de este paralelamente a sí mismo según un vector de desplazamiento, o como apilamiento de círculos iguales.

Entre los elementos que se señalan destaca “las caras” y el radio, que se nombran por la mitad de los/las profesores/as. Entre las ideas/definiciones que se han dado de ellos, tenemos, por ejemplo, las de PC4: “Las bases, que son dos círculos iguales” y “El radio de la base es el radio del círculo”. Para bases, se han presentado otras dos ideas; la de dos docentes (PP4 y PO3) que reflejan una idea de cilindro como estructura, pues han señalado que están formados por circunferencias iguales y la del profesor que ya hemos comentado (PO1) que ha indicado que los cilindros pueden tener una base que no sea circular. Cabe preguntarse ¿Les asigna un atributo crítico erróneo o es que considera los cilindros como límite de los prismas?

Algunos profesores (5/12) han indicado la altura y/o la generatriz (2/12). Las respuestas que hemos marcado como otros elementos se deben a que han señalado el eje; por ejemplo, PC2 indica que “El eje es el lado fijo alrededor del cual gira el rectángulo”.

Remarcamos que cuando los profesores se han referido a las caras solo se han tenido en cuenta las bases. La superficie lateral no se ha considerado como cara del cilindro. Ningún/a profesor/a ha hecho referencia a las aristas del cilindro ni ha expresado relaciones entre el cilindro generado y el elemento usado para ello.

Cabe destacarse también que solo dos profesores/as (PO1 y PO3) han anotado que los cilindros pueden ser rectos u oblicuos. Pero ninguno/a ha hecho apreciaciones sobre cómo sería el desarrollo de un cilindro oblicuo y qué características diferenciarían unos de otros.

De las respuestas dadas puede concluirse que los/as profesores/as que han participado en nuestro estudio tienen una cierta idea/definición de los cilindros que se apoya especialmente en la forma de generarlos como sólidos de revolución, con lo que en su objeto mental correspondiente los cilindros rectos tienen gran peso. Este objeto mental puede enriquecerse considerablemente al considerar otras posibles ideas/definiciones para esta familia de sólidos, que pueden provenir de otras maneras posibles de generarlos, otros atributos críticos, otros desarrollos de los cilindros, o al establecer familias de cilindros y relaciones entre ellas así como relaciones entre elementos de estos y de las figuras planas y/o sólidas usadas para generarlos por los diferentes procedimientos y/o que pueden obtenerse por truncamiento de estos.

e) Para los conos

La figura mostrada para los cursos presencial y online se muestra en la tabla 3.36. Se presentó en los cursos presencial y online porque se consideró que era un sólido no poliédrico que suele aparecer en los libros de texto y que es familiar para el alumnado de la ESO.

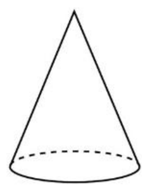
Presencial y online


Tabla 3.36. Representación del cono

Las respuestas relativas a la descripción del cono, tabla 3.37, registradas en la plantilla de la tabla 2.15 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2, se muestran en la figura 3.37.

Docente	DDCo																	
	P								E									
	1	2		3			4	5	1									
		A	B	A	B	C			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
PP1	x					x												
PP2	x					x												
PP3	x		x			x			x									
PP4	x					x			x						x			
PO1	x		x		x				x							x	x	
PO2						x						x		x		x		
PO3	x					x												
PO4	x		x		x				x								x	

Tabla 3.37. Sobre la identificación de la forma implicada en la de la tabla 3.36 como una representación del cono.

Observando los datos registrados en esta tabla se observa que la mayoría de los/as docentes de los dos cursos han señalado que es un sólido. Se han referido a este término como, cuerpo geométrico, cuerpo de revolución o, en menor medida, cuerpo redondo. La mayor parte del profesorado (6/8) ha indicado que se obtiene haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Los/as dos profesores/as que han apuntado una respuesta diferente han comentado que obtiene rotando la generatriz en torno a un eje, especificando un/a docente (PO1) sobre su punto de corte (vértice).

Si nos centramos en los elementos que el profesorado ha anotado cabe indicar que el más señalado ha sido la base, indicado por la mitad del profesorado. Entre las respuestas de los/as profesores/as vislumbramos, como se aprecia en la tabla 3.37, que tres profesores/as han señalado que la base es un círculo, mientras que un/a profesor/a (PP4) ha indicado que es una circunferencia. El resto de elementos no han sido apenas nombrados. Solo dos profesores/as han nombrado el eje y la altura y el vértice, la generatriz y el radio han sido apuntados cada uno de ellos por un profesor/a. Cabe aclararse también que no se han expresado ideas/definiciones de estos elementos.

Hemos de señalar que solo un/a docente (PO1) ha anotado las curvas cónicas (elipse, parábola e hipérbola) que se pueden obtener al seccionarlo con un plano. Además, ha señalado cómo será su área a partir de su desarrollo plano y la fórmula de su volumen. Y solo otro/a docente (PO3) ha indicado la forma geométrica que se obtiene al cortar el cono por un plano paralelo a la base (tronco de cono).

Así pues, respecto del cono se pueden extraer conclusiones análogas a las que hemos indicado para el cilindro. El profesorado que ha participado en nuestro estudio tiene una cierta idea/definición de los conos que se apoya especialmente en la forma de generarlos como sólidos de revolución, con lo que en su objeto mental correspondiente los conos rectos tienen gran peso. Este objeto mental puede enriquecerse considerablemente al considerar otras posibles ideas/definiciones para esta familia de sólidos, que pueden provenir de otras maneras posibles de generarlos, otros atributos críticos, otros desarrollos de los conos, o al establecer familias de conos y relaciones entre ellas así como relaciones entre elementos de estos y de las figuras planas y/o sólidas usadas para generarlos por los diferentes procedimientos y/o que pueden obtenerse por truncamiento de estos.

f) Sobre las diferentes representaciones usadas en las tareas de identificación de sólidos y familias de sólidos

La tabla 3.38 registra respuestas de los/as docentes en las que expresan opiniones sobre las diferentes representaciones usadas en esta tarea de identificación de formas geométricas.

Docente	Objetos reales	Dibujos (proyecciones)	Desarrollo plano	Dimensión en que se presenta	Ordenador	Material construcción
PC1	x					
PC2	x					
PC3	x					
PC4	x					
PP1	x	x		x		
PP2	x	x				
PP3	x	x	x			
PP4				x		
PO1	x	x	x		x	x
PO2	x	x				x
PO3		x	x			
PO4	x		x			

Tabla 3.38. Sobre diferentes formas de representación usadas en tareas de identificación de sólidos

La tabla 3.38 registra respuestas de los/as docentes con comentarios sobre las diferentes representaciones de los sólidos usadas en las tareas del curso correspondiente. Puede notarse que la mayoría ha hecho referencia a la representación de las formas geométricas mediante fotografías de objetos reales, que como ha señalado PC3 “Con estas figuras los alumnos ven que la geometría tiene aplicación en el entorno y no solo sirve para que se estudie". También se han seleccionado los dibujos de las formas geométricas; algún/a docente como PP1 especifica que "Se ha representado mediante un dibujo técnico en perspectiva". Los desarrollos planos también han sido apuntados sobre todo en los cursos presencial y online que es donde se ha mostrado el desarrollo plano del cilindro de revolución. Ya en menor medida, se ha comentado que algunas formas geométricas se han representado en el plano (dos dimensiones) y otras en el espacio (tres dimensiones); PP4 anota que "Mostrar las figuras geométricas en varias dimensiones ayuda a que los alumnos entiendan que no siempre la figura se representa como es realmente". Asimismo, solo dos docentes han comentado sobre formas geométricas construidas con diferentes materiales, como cartón (PO1) o mecano (PO3). Y un solo docente ha señalado el ordenador como recurso para poder representar formas geométricas.

De las respuestas de los/as docentes puede concluirse que el profesorado considera interesante conocer diferentes representaciones de las formas geométricas. Entre ellas, la que les resulta más familiar son fotografías de objetos reales. Si además consideramos las respuestas en su conjunto, cabe destacarse que entre todos ellos han nombrado, las diferentes representaciones físicas y planas de los sólidos partir de las que según Alsina et al. (1987) y Guillén (1991) se pueden "comunicar" los sólidos y desarrollar una gran actividad matemática; entre ellas, el dibujo en perspectiva y/o las proyecciones, el desarrollo plano, los dibujos en un ordenador o las representaciones físicas de los sólidos construidas con cartón o con material comercializado.

3.2.1.2.3 La descripción de las formas geométricas a partir de tareas propuestas por Guillén (1997)

Las tareas cuyas respuestas proporcionan las observaciones que incluimos en este subapartado corresponden a 4 tareas que propone Guillén (1997) para trabajar la descripción de sólidos. En nuestro estudio las hemos considerado subtareas que en la tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2 hemos codificado como S-TCg1-G1, S-TCg1-G2, S-TCg1-G3 y S-TCg1-G4 y que se muestran en el anexo 3. Hacen referencia a la cuestión CCD2 expuesta en la tabla 2.2 de este mismo apartado 2.2.3.

En el subapartado *a*, con la subtarea S-TCg1-G1 se van a enumerar propiedades de determinadas familias de poliedros (prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides) referentes al tipo de caras, orden de los vértices y relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos. También se van a encontrar relaciones para determinar el número de elementos de diferente tipo que tiene el representante general n-agonal de la familia correspondiente. En el subapartado *b*, con las subtareas *S*-TCg1-G2 y S-TCg1-G3 se asignan familias de sólidos a propiedades; y a partir de la subtarea S-TCg1-G4, en el subapartado *c*, se van determinando y eliminando familias de sólidos a partir de las propiedades que se van indicando progresivamente (ejercicio adivinanza).

Estas subtareas se llevaron a cabo solamente en el curso presencial, por ello, las observaciones se obtienen a partir de las respuestas que dieron los/as 4 profesores/as que participaron en el mismo.

a) La subtarea S-TCg1-G1. Recopilación de propiedades de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Hallar el número de elementos de formas n-agonales

Las respuestas de los/las docentes del curso presencial a la subtarea S-TCg1-G1 (figura A3.1 del anexo 3) se han registrado en la tabla 3.39 construida a partir de la plantilla que mostramos en la tabla 2.16 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Código				PP1				PP2				PP3				PP4			
				Pr	Ap	Pi	Bi	Pr	Ap	Pi	Bi	Pr	Ap	Pi	Bi	Pr	Ap	Pi	Bi
DDP	Tc	1	A		x				x								x		
			B																
			C			x		x		x	x				x			x	x
		2	A																
			B																
			C	x			x					x	x	x		x			
			D																
			E	x								x				x			
		3	A																
			B																
			C																
		4																	
	Ov	1	A					x	x	x	x						x		
			B																
			C	x	x	x	x					x	x	x		x		x	x
		2	A																
			B												x				
			C																
			D																
			E																
		3	A																
			B																
			C																
		4																	
	Pa	1	A																
			B																
			C		x				x				x				x		
		2	A																
			B																
			C	x				x				x				x			
			D	x				x				x				x			
			E																
		3	A																
			B																
			C																
		4												x				x	
		5	A																
			B																
			C			x				x									
		6	A																
			B				x				x								
			C																
			D																
			E																
	Pp	1	A																
			B																

			C																
		2	A																
			B																
			C																
			D																
			E																
		3	A																
			B																
			C																
		4										x	x	x	x	x	x	x	x
		5	A																
			B																
			C			x				x	x								
		6	A						x										
			B		x														
			C																
			D																
			E	x				x								x			
	Nc	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x					x	x	x	x
			B																
			C									x	x	x	x				
		2	A																
			B																
			C																
		3																	
	Nv	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x					x	x	x	x
			B																
			C									x	x	x	x				
		2	A																
			B																
			C																
		3																	
	Na	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x					x	x	x	x
			B																
			C									x	x	x	x				
		2	A																
			B																
			C																
		3																	
	Nac	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x					x	x	x	x
			B																
			C									x	x	x	x				
		2	A																
			B																
			C																
		3																	
	Nad	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x					x	x	x	x
			B																
			C									x	x	x	x				
		2	A																
			B																
			C																
		3																	
	Nav	1	A	x															
			B																
			C																
		2	A																

			B																
			C																
		3						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Tabla 3.39. Sobre propiedades de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Respuestas de profesores del curso presencial

La tabla 3.39 muestra que la mayoría de los/as profesores/as del curso presencial han indicado que las bases de los prismas son polígonos. Entre las especificaciones que han señalado tenemos que pueden ser los polígonos cóncavos o convexos (PP1, PP4) y/o regulares o irregulares (PP1, PP4). Además, PP2 ha indicado que sus ángulos interiores determinarán los ángulos interiores entre las caras laterales. Cabe señalar que un profesor/a, PP3, no especifica que las bases sean un tipo de caras, ha señalado que los tipos de bases pueden ser regulares o no regulares. Parecer ser, según lo expuesto, diferencia cara de base cuando se le pregunta por los tipos de caras.

Por lo que respecta a las caras laterales de los prismas, se observa que todos/as ellos/as tienen en su objeto mental de prisma una cierta idea de que estas son paralelogramos distinguiendo los prismas rectos y los oblicuos y caracterizándolos según sus caras laterales. Ahora bien, solo un/a profesor/a (PP2) ha respondido que "Las caras laterales de los prismas solo pueden ser paralelogramos". Las respuestas de PP1 y PP4, al detallar que "Cuando el prisma es oblicuo han de ser romboides", llevan a cuestionarse si el rombo se incluye como romboide, y por tanto como una de las formas planas para el prisma oblicuo. Y la respuesta de PP3, quien al hablar de las caras no especifica que se refiere a las caras laterales, e indica que "Pueden ser rectángulos o paralelogramos, generando prismas rectos en el primer caso, y oblicuos en el segundo", lleva a cuestionarse si el rectángulo se considera o no como un tipo de paralelogramo y, por tanto, el prisma recto un caso especial de prisma oblicuo. Así pues, desde las propiedades que se indican para las caras laterales de los prismas parece que los prismas rectos y los oblicuos se consideran familias disjuntas si bien no se puede concluir el tipo de clasificación que se establece entre los diferentes tipos de paralelogramos.

El orden de los vértices parece que sea un concepto que todos/as los/las profesores/as conocen ya que todos/as los/as docentes lo han contestado de forma correcta. Sin embargo, solo uno/a de ellos/as, PP2, la ha contestado indicando el porqué toma ese valor, indicando que confluyen dos aristas de la base y una arista lateral. El resto de los/as profesores/as se ha limitado a dar tan solo el número del orden de los vértices.

Todos/as los/as profesores/as han apuntado la relación de paralelismo entre las bases, pero ninguno ha mencionado que las aristas laterales son paralelas. Hemos de señalar que un profesor (PP2) ha mencionado que las caras laterales pueden ser paralelas dos a dos si el polígono de la base es regular y tiene un número par de lados. Al fijarnos en las relaciones de perpendicularidad, cabe destacarse de nuevo el peso que tienen los prismas rectos en la imagen que los/as profesores/as se construyen para los prismas. Ha habido dos profesores/as, (PP2 y PP4) que han seleccionado de nuevo esta subfamilia para indicar uno de sus atributos críticos "Las caras laterales son perpendiculares a las bases si el prisma es recto", añadiendo PP4 que "Cuando las caras son romboides no se tiene dicha perpendicularidad". Y uno de ellos (PP1) ha asignado a los prismas este atributo crítico de los prismas rectos "Las caras laterales están en planos perpendiculares a las bases".

De las respuestas dadas puede concluirse que las subfamilias de prismas que tienen más peso en los objetos mentales que el profesorado del curso ha construido para esta familia de poliedros son los prismas rectos y los de bases regulares.

Determinar el número de caras, vértices y aristas de un prisma n-agonal no ha conllevado dificultad. Los/as tres profesores/as, PP1, PP2 y PP4, que han explicado cómo han obtenido este resultado lo han hecho a partir de ir aumentando el número de lados de la base para luego generalizar, de la siguiente manera. Para el número de caras, estos/as docentes han contado por un lado el número de bases y por otro el número de caras laterales, sumando después el resultado. Por lo que respecta al número de vértices, PP1, ha separado el prisma en pisos contando los elementos de una base, luego los de la otra base y finalmente sumarlos. En cuanto al número de aristas, PP1, también ha dividido el prisma en pisos contando los elementos de una base, luego los de la otra base y, por último, los de las caras laterales, para finalizar sumándolos. PP2 y PP4 han contado los elementos de una base y los han multiplicado por 2 para el caso de los vértices. Para el caso de las aristas, estos/as dos docentes han multiplicado por 3 el número de aristas de una base porque han indicado que es el mismo número para las dos bases y para las caras laterales. PP3, ha señalado el resultado final, sin explicación.

Tampoco la ha tenido hallar los ángulos de las caras y de los ángulos diedros. Para los ángulos de las caras han sumado los ángulos de una base, de la otra base y de las caras laterales. Para los ángulos diedros, PP1, PP3 y PP4, han observado que dicho número coincide con el número de aristas. PP2 ha sumado los ángulos formados entre las bases y las caras laterales y los ángulos formados entre las caras laterales, indicando después que coincide con el número de aristas. Ahora bien, para los ángulos de los vértices de un prisma n-agonal se constata la dificultad que subraya Guillén (1997) para este concepto al implicar otro tipo de ángulos (los ángulos de las caras que se juntan en el vértice) y considerar la suma de estos. PP2, PP3 y PP4, ni siquiera se han referido a ellos. El/La único/a profesor/a que ha señalado una relación numérica para determinarlos, esta no es correcta y tampoco lo es el razonamiento empleado. Ha indicado que “El número de ángulos de los vértices, son los ángulos que forman las aristas que llegan o salen de cada vértice, indicando, por tanto, 6n”.

En la recopilación de propiedades, si bien se incidió en que podían determinar los elementos de un prisma n-agonal utilizando otras estrategias y que también podían determinar otros elementos de un prisma n-agonal, todo el profesorado realizó un resumen de las propiedades mencionadas en los apartados anteriores, añadiendo la mayoría del profesorado, PP2, PP3 y PP4 que las bases son iguales. Cabe mencionar que ningún/a profesor/a abordó la problemática de hallar el número de diagonales de las caras o el número de diagonales del espacio.

Las características numéricas de los antiprismas, pirámides y bipirámides, las vamos a estudiar en conjunto particularizando cuando sea pertinente. Hemos de señalar que PP1 y PP4 han basado sus respuestas en formas geométricas estudiadas. PP4 ha indicado algunos parecidos y diferencias entre prismas y antiprismas. Por ejemplo, en los tipos de caras de los antiprismas señala “Empezamos fijándonos en las caras laterales, las cuales son todas triángulos. Es aquí donde encontramos la primera diferencia significativa con respecto a los prismas”. PP1 se ha centrado en las diferencias de prismas y pirámides. Por ejemplo, para contar los elementos de la pirámide ha indicado “Podemos proceder por analogía con el prisma, pero teniendo en cuenta que en vez de dos bases tenemos una base solo y las aristas convergen en un vértice”.

Por lo que se refiere al tipo de caras, para los antiprismas y pirámides, al igual que se había indicado para los prismas, los/as profesores/as PP1, PP2 y PP4 han señalado que las bases o base, respectivamente, son polígonos. PP3, también de forma similar a los prismas, no ha especificado que las bases sean un tipo de caras. Por lo que se refiere a las caras laterales, PP1, PP2 y PP4 han especificado que son triángulos. PP3, al igual que en los prismas, ha señalado que las caras son triángulos, sin especificar que se refiere a las caras laterales. Destacamos que PP2 ha apuntado para los antiprismas que si las bases son polígonos regulares y las caras laterales triángulos equiláteros se trata de antiprisma regular. Esto es, nombra esta familia de antiprismas de caras regulares de manera análoga a como se nombra los prismas rectos de bases regulares en los libros de texto de secundaria. Por lo que se refiere a bipirámide, uno de los profesores (PP1) ha expresado que tiene bases iguales y paralelas; el resto del profesorado ha comentado que no tiene bases y las caras laterales son triángulos.

Determinar el orden de los vértices de los antiprismas y pirámides no ha conllevado dificultades si bien, al igual que se ha hecho para los prismas, solo se ha indicado el orden de los vértices de la familia correspondiente sin explicar más la respuesta. Para las bipirámides se han mostrado algunos errores. PP3 ha indicado que “Para la “base” donde se juntan las dos pirámides el orden de los vértices es 3”. Cabe mencionar que PP4 solo ha justificado el orden de los vértices para los antiprismas. Hay profesores/as, como PP1 que, en algunas formas geométricas, no señalan el tipo de vértices al que se están refiriendo, por ejemplo, para la pirámide apunta “Hay vértices que son de orden 3 y del mismo orden que el polígono de la base”.

Respecto a la relación de paralelismo todos los/las docentes han señalado que en los antiprismas las bases son paralelas y, a excepción de PP3, el resto del profesorado ha señalado que están giradas. Cabe mencionar que PP2 ha apuntado relación de paralelismo para casos particulares de antiprismas; ha extendido a los antiprismas la propiedad que cumplen solo los prismas rectos correspondientes, pero no todos los antiprismas de la familia delimitada, comentando que “las caras laterales pueden ser paralelas dos a dos si las bases son polígonos regulares y tienen un número par de lados siendo la orientación de estos triángulos opuesta”. En las pirámides PP1 y PP2 anotan que no hay relación de paralelismo si bien consideran que en las bipirámides sí que la hay haciendo referencia a caras opuestas correspondientes a las pirámides que generan la bipirámide. Con esta respuesta, los/las docentes han generalizado para las bipirámides una propiedad que solo cumplen alguna de ellas.

Otra propiedad de una familia de los prismas que se extiende a la familia correspondiente de los antiprismas es la correspondiente a la perpendicularidad de las caras laterales y las bases. Esta propiedad de los prismas rectos, PP2 la asocia también a los antiprismas rectos al indicar que “si el antiprisma es recto se daría perpendicularidad entre las bases y las caras laterales”. Y PP1 la asigna a todos los antiprismas. Se ha destacado también las familias que no cumplen esta propiedad. Así, PP2 y PP1 han subrayado que en las pirámides y bipirámides no hay relación de perpendicularidad. Por ejemplo, PP1 ha indicado que “En las pirámides las caras laterales no son perpendiculares a las bases”. PP2 ha apuntado que “En las bipirámides no hay relaciones de perpendicularidad”.

Por lo que se refiere a las características numéricas asociadas a diferentes elementos (caras, vértices y aristas), la estrategia usada para determinarlas para los antiprismas ha sido la utilizada para los prismas. Cabe indicar que, para los antiprismas, pirámides y bipirámides. PP3 solo ha señalado la respuesta, sin razonarla. Para las pirámides y bipirámides, el resto del profesorado, PP1, PP2 y PP4, lo que han variado respecto a los prismas ha sido la forma de contar el número de vértices y aristas. En cuanto al número de vértices de las pirámides, los/as docentes han contado el número de vértices de la base y luego le han sumado el ápice. Para las bipirámides han contado el número de vértices donde se juntan las "dos bases" de las pirámides que las forman y luego le han sumado los ápices. En cuanto al número de aristas, estos/as tres docentes han contado por un lado las aristas laterales, por otro lado, las de las bases y luego las han sumado. El/la único/a docente que también ha basado sus respuestas en formas geométricas ya estudiadas ha sido PP4, señalando, por ejemplo, para la bipirámide, "el número de caras se obtiene multiplicando el número de caras laterales de una pirámide por 2". Hemos de subrayar que PP1 lo que ha hecho es indicar como cambia la forma geométrica que se estudia, por ejemplo, "Para la bipirámide podemos proceder por analogía con el prisma, pero teniendo en cuenta que no tenemos base, pero sí aristas donde se unen las dos pirámides, y las aristas de arriba convergen hacia un vértice y las de abajo hacia otro vértice".

Si examinamos las respuestas de los/las profesores/as concernientes al número de ángulos de las caras y diedros para los antiprismas, las pirámides y las bipirámides, observamos que se ha utilizado la estrategia ya usada para hallar estos elementos en los prismas. Los profesores/as que han explicado sus respuestas, PP1, PP2 y PP4, han señalado, que al igual que han realizado para los prismas, para calcular el número de ángulos de las caras han separado la forma geométrica en los polígonos que componen las caras laterales y la base o bases, han calculado los ángulos de las caras independientemente para estas caras y luego los han sumado. Hemos de subrayar que PP4, además, ha indicado como se calculan teniendo en cuenta formas geométricas ya estudiadas, denotando, por ejemplo, para el caso de los ángulos de las caras de las bipirámides "Tendríamos el doble de ángulos de las caras laterales que en las caras laterales de una pirámide". En el caso de los ángulos diedros, los/las tres docentes han basado sus respuestas en que coinciden con el número de aristas. Subrayamos que PP3 no ha explicado sus respuestas. Por lo que se refiere a al número de ángulos de los vértices para estas formas geométricas, al igual que se ha comentado en los prismas, PP2, PP3 y PP4, no han señalado este tipo de ángulos y PP1 ha apuntado de nuevo que el número de ángulos de los vértices, son los ángulos que forman las aristas que llegan o salen de cada vértice.

Al pedir la recopilación de las propiedades de estas familias sugiriendo que se podían enumerar algunas que no se hubieran tratado en el curso o que se determinasen las características numéricas de otros elementos de las familias de sólidos tratadas y/o con estrategias diferentes a las usadas en clase, al igual que para los prismas los docentes se limitaron a apuntar las propiedades que se acaban de estudiar sin atender a que se sugería que se añadiese algunas más.

Las respuestas comentadas en los párrafos anteriores permiten concluir que algunos/as profesores/as asignan a familias de sólidos atributos críticos de una familia contenida; de aquella que tiene más peso en el objeto mental que se ha construido de la familia correspondiente y de la que se entresacan los ejemplos que apoyan la respuesta. Por ejemplo, se asignan a los prismas y/o antiprismas propiedades de los prismas rectos. O la propiedad de paralelismo entre caras opuestas de una familia específica de bipirámides se asigna a las bipirámides. Asimismo, se extienden a determinadas familias de antiprismas, pirámides y/o bipirámides, propiedades de determinadas familias de prismas, si bien estas no la cumplen. Por ejemplo, la perpendicularidad de las caras laterales y las bases se extiende de los prismas rectos a los antiprismas rectos. El paralelismo de caras opuestas de los prismas rectos de bases regulares con número par de lados se extiende de esta familia a la correspondiente de los antiprismas. Para las bipirámides se han mostrado algunos errores. Uno de los profesores ha considerado que las bipirámides mantienen las dos bases de las pirámides que la forman y también se ha indicado que el orden de sus vértices es 3, al igual que los vértices de las pirámides que la forman.

En relación con las características numéricas de determinados elementos de las familias tratadas cabe destacarse que la actividad que se ha desarrollado en el curso al tratar estas cuestiones ha sido muy pobre.

b) Las subtareas S-TCg1-G2 y S-TCg1-G3. Asignar familias de sólidos a propiedades

En este subapartado vamos a tratar dos subtareas referentes a las propiedades que cumplen diferentes familias de los prismas. Lo que cambia de una a otra son las familias de prismas y propiedades implicadas.

La subtarea *S*-TCg1-G2 se muestra en la figura A3.2 del anexo 3 y las respuestas se han registrado en la tabla 3.40.

Propiedad	Familia	PP1	PP2	PP3	PP4
a) Las aristas laterales tienen la misma longitud	P	x	x	x	
	PR	x	x	x	x
	PX	x	x	x	
	PBR	x	x	x	
	PRBR	x	x	x	x
	PCR	x	x	x	x
	PCI	x	x	x	x
	P. Reg.	x	x	x	x
b) Tienen n·(n-1) diagonales de las caras	P			x	
	PR			x	x
	PX	x		x	x
	PBR	x		x	x
	PRBR	x		x	x
	PCR			x	x
	PCI	x		x	x
	P. Reg.	x		x	x
c) Las diagonales del sólido caen dentro del sólido	P				
	PR		x		x
	PX	x		x	x
	PBR	x		x	x
	PRBR	x	x	x	x
	PCR		x		x
	PCI	x			x
	P. Reg.	x	x	x	x
d) La longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales	P				
	PR	x	x	x	x
	PX				

	PBR				
	PRBR	x	x	x	x
	PCR	x	x	x	x
	PCI	x		x	x
	P. Reg.		x	x	x
e) Las caras laterales son iguales	P				
	PR				
	PX				
	PBR	x	x		x
	PRBR	x	x	x	x
	PCR	x	x	x	x
	PCI	x	x	x	x
	P. Reg.	x	x	x	x
f) Sus aristas son iguales	P				
	PR				
	PX				
	PBR				
	PRBR				
	PCR				
	PCI	x			x
	P. Reg.		x	x	
g) Sus caras son paralelas dos a dos	P			x	
	PR			x	
	PX			x	
	PBR			x	
	PRBR			x	
	PCR			x	
	PCI	x		x	
	P. Reg.		x	x	
h) Sus ángulos diedros son iguales	P				
	PR		x		
	PX				
	PBR				
	PRBR		x		x
	PCR		x		x
	PCI	x			x
	P. Reg.		x	x	x
i) Sus vértices son de orden 4	P				
	PR				
	PX				
	PBR				
	PRBR				
	PCR				
	PCI				
	P. Reg.				

Tabla 3.40. Sobre familias de prismas que cumplen propiedades. P (Prismas), PR (Prismas rectos), PX (Prismas convexos) PBR (Prismas de bases regulares) PCR (Prismas de caras regulares), PCI (Prismas de caras iguales), P. Reg. (pisma regular). Respuestas a la subtaraea S-TCg1-G2 de profesores del curso presencial

La tabla 3.40 refleja que la mayoría de los/las profesores/as (3/4) han identificado como propiedad de los prismas el que las aristas laterales tienen la misma longitud, si bien no la habían hecho explícita en la tarea anterior al enumerar propiedades de esta familia de sólidos. Las explicaciones que han dado para la respuesta se apoyan en atributos que tendrían que precisarse. Se indica “Por el desplazamiento unidireccional de una base respecto de la otra” (PP1), “Por el paralelismo de bases” (PP3), “Porque el ángulo de inclinación es el mismo en todas las aristas" (PP2). Ahora bien, un/a profesor/a (PP4) ha reflejado la idea errónea de que en los prismas oblicuos las aristas laterales tienen medidas diferentes.

En cuanto a la propiedad *b*, tienen n·(n-1) diagonales de las caras, cabe mencionar que el/la único/a profesor/a que ha realizado la demostración llevando a cabo cálculos numéricos y generalizando ha sido PP3, demostrando que lo cumplen todos los prismas. Uno/a de ellos/as (PP4) ha plasmado la idea de que en los prismas las diagonales de las caras no pueden quedar fuera de la superficie de los prismas. Basando su respuesta en la forma de las bases, PP4 ha indicado que las bases han de ser convexas para poder cumplir esta propiedad.

La mayoría del profesorado (3/4) ha asignado la propiedad *c*, las diagonales del sólido caen dentro del sólido, a los prismas convexos. Sin embargo, uno/a de ellos/as (PP2) la asigna a los prismas rectos. Los/as que la asignan correctamente centran sus respuestas en cómo son las bases de los prismas, indicando dos de ellos/as que para que la cumplan han de ser convexas y el/la otro/a señala que han de ser regulares o convexas. El/La profesor/a que no basa su respuesta en las bases (PP2) lo hace en términos de la inclinación o no que pueda presentar el sólido, comentando que no la cumplirán los oblicuos. Se ha observado que todos/as los/las profesores/as tienen problemas para identificar los prismas convexos, señalando que pueden que no sean convexos familias que sí lo son como los PCR (PP1) y los PCI (PP3) o indicando que, de los mencionados, los únicos que no son todos ellos convexos son los prismas en general (PP4), olvidándose de que los PR no tienen por qué ser todos ellos convexos.

Si nos centramos en la propiedad *d*, la longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales, todo el profesorado ha asociado esta propiedad a los prismas rectos, pero tan solo un/a profesor/a (PP2) ha identificado correctamente las subfamilias que cumplen esta propiedad. PP1, PP3 y PP4 han identificado los PCI como rectos. Cabe comentarse también que PP1, al igual que en algunos libros de texto de la ESO ha identificado los P. Reg. con los prismas de bases regulares; ha indicado que no cumplen esta propiedad porque algunos no son rectos.

Fijándonos en la propiedad *e*, las caras laterales son iguales, se observa que solo PP3 ha asignado de forma correcta esta propiedad. PP3 exige a las bases regulares que el prisma sea recto y además incluye a los PCI como que también cumple la propiedad. El resto del profesorado asocia esta propiedad a los PBR olvidando los prismas oblicuos de esta familia.

La propiedad *f*, sus aristas son iguales, divide a los profesores/as en dos grupos. Por un lado, PP1 y PP4 extienden la propiedad de aristas iguales a caras iguales, por lo que se señala que solo lo cumplen los PCI. Por otra parte, los/as que indican que los prismas han de ser regulares (PP2 y PP3) para que cumplan dicha condición, remarcando PP3 que es el único caso en que las aristas tendrían la misma longitud, como es el caso del cubo formado por seis cuadrados iguales. Los primeros olvidan los PCR y P. Reg, mientras que los segundos no señalan ni PCR ni PCI.

Si se considera la propiedad *g*, sus caras son paralelas dos a dos, no hay ninguna respuesta en la que se haya asignado la propiedad a todas las familias a las que corresponde y solo a esas. Cada respuesta merece un comentario. PP1 indica que la condición es que sean paralelepípedos, selecciona los PCI pero no el P. Reg. (el cubo). PP2 apunta que deben cumplir dos condiciones, que la base sea regular y tenga un número par de lados. Solo se la asocia al P. Reg. PP3 asocia a las caras la propiedad de los prismas relativa a las aristas. Considera que es una propiedad de los prismas y de todas las subfamilias. PP4 las condiciones que señala que han de cumplir es que sean rectos, base regular y un número par de lados, no asociando la propiedad a ninguna familia de las que hemos indicado.

La propiedad *h*, sus ángulos diedros son iguales, ha provocado varias dudas al profesorado del curso. Las condiciones que anotan los/as profesores/as para que se cumpla dicha propiedad apuntan a diversidad de respuestas todas ellas erróneas. PP1 y PP4 entienden que el tener caras iguales lleva a formar ángulos diedros iguales. PP2 y PP4 consideran solo un tipo de ángulos diedros. PP2 marca como única condición que los prismas sean rectos lo que hace que solo considere como ángulos diedros los formados por las bases y las caras laterales. PP4 anota que sean rectos y bases regulares con lo que solo tiene en cuenta los ángulos diedros entre las caras laterales. Solo hay un/a profesor/a que indica que el único prisma que lo cumple es el prisma regular, apuntando además que dichos ángulos miden 90º.

Sin embargo, la propiedad *i*, sus vértices son de orden 4 no ha conllevado ninguna dificultad. Todo el profesorado ha expresado que ningún prisma la cumple. PP2, PP3 y PP4 lo explican indicando el orden de los vértices de los prismas “Todos son todos de orden 3” y PP1 interpreta el significado de orden de un vértice e indica que no es propiedad de los prismas: “Eso significaría que en cada vértice concurrirían 4 caras, lo que no es una propiedad de los prismas”.

Para la subtarea, S-TCg1-G3, que se muestra en la figura A3.3 del anexo 3, las respuestas se registran en la tabla 3.41.

Propiedad	Familia	PP1	PP2	PP3	PP4
1) Tiene caras paralelas dos a dos	PR				
	PX				
	PBR				
	PRBR				
	PCLR				
	PCR				
	PCI	x			
	L	x	x	x	x
	R	x	x	x	
	C	x	x	x	x
2) Los vértices son iguales	PR		x	x	
	PX		x	x	
	PBR		x	x	x
	PRBR	x	x	x	x
	PCLR	x	x	x	
	PCR	x	x	x	
	PCI	x	x	x	
	L	x	x	x	
	R		x	x	
	C	x	x	x	x
3) Las aristas son iguales	PR				x
	PX				x

	PBR				x
	PRBR				x
	PCLR				x
	PCR	x			x
	PCI	x			x
	L				x
	R	x		x	
	C	x		x	x
4) Los ángulos diedros de las caras laterales son iguales al correspondiente de la base	PR		x	x	x
	PX		x	x	
	PBR		x	x	
	PRBR		x	x	x
	PCLR		x	x	x
	PCR		x	x	x
	PCI		x	x	x
	L	x	x	x	x
	R		x	x	
	C	x	x	x	x
5) Los ángulos diedros son menores de 180°	PR				
	PX	x			
	PBR	x	x		x
	PRBR	x	x		x
	PCLR		x		
	PCR	x	x		
	PCI	x	x		
	L	x	x		x
	R	x	x	x	
	C	x	x	x	x

Tabla 3.41. Sobre familias de prismas que cumplen propiedades. PR (Prismas rectos), PX (Prismas convexos) PBR (Prismas de bases regulares), PRBR (Prismas rectos de bases regulares), PCLR (Prismas de caras laterales regulares), PCR (Prismas de caras regulares), PCI (Prismas de caras iguales), L (Paralelepípedos), R (Romboedros), C (Cubo). Respuestas a la subtaraea S-TCg1-G3 de profesores del curso presencial

En relación con la propiedad *1*, tienen caras paralelas 2 a 2, puede observarse que solo PP1 ha identificado correctamente las familias de paralelepípedos que la cumplen. Se observa también que los demás profesores/as no están familiarizados con los PCI y que PP4 no lo está tampoco con los romboedros. Todo el profesorado indica que una de las condiciones es que las bases han de ser regulares y aristas opuestas paralelas o que tengan número par de lados, lo que refleja que esa propiedad tiene un gran peso en los objetos mentales que los profesores han construido para los prismas con bases regulares (si bien solo la cumplen los rectos y algunos oblicuos) y también tiene gran peso como propiedad específica de los paralelepípedos pues todos/as han apuntado los paralelepípedos. El cubo les resulta muy familiar y mayoritariamente (3/4) los romboedros. Sin embargo, hemos de remarcar, que uno de los/as docentes (PP4), marcando los paralelepípedos, ha dejado sin señalar los romboedros. Cabe mencionar que el PCI solo lo ha indicado un profesor/a (PP1), con lo que se pone de manifiesto que los profesores/as no tienen claro qué prismas son los PCI.

Considerando la propiedad *2*, los vértices son iguales, los requisitos que conlleva esta propiedad ha llevado a que ningún/a profesor/a haya asignado la propiedad a las familias sin ningún error. PP1 parece que se ha fijado solo en que los vértices sean del mismo orden y que concurran en ellos los mismos polígonos, pero no ha tenido en cuenta que tienen que hacerlo con los mismos ángulos. Señala que los prismas han de ser rectos y las bases han de ser regulares o rectángulos, apuntando correctamente que la cumplen PRBR, PCR y C. Sin embargo, dicho/a profesor/a indica erróneamente que la satisfacen PCLR, PCI y L. PP2 y PP3 identifican vértices iguales con vértices del mismo orden con lo que asignan la propiedad a todas las familias de prismas. PP4 hace explícitas diferentes condiciones para los vértices iguales si bien no están expresadas de manera precisa. Comenta que han de ser del mismo orden y que midan lo mismo, con lo que se fija en que la base sea regular. Ahora bien, la poca familiaridad que tiene con algunas familias de prismas le ha llevado a que no asigne la propiedad a los PCR. Por otro lado, cabe preguntarse si contempla la amplitud de los ángulos de las caras que concurren en los vértices o solo los ángulos correspondientes a las bases o si no ha contemplado los ejemplos de PBR que tienen menos peso en el objeto mental que tiene de esta familia de prismas. Ha asociado erróneamente la propiedad a los PBR sin tener en cuenta los ejemplos de ella que son oblicuos.

Referente a la propiedad *3*, las aristas son iguales, se ha vislumbrado de nuevo que esta propiedad ha presentado dificultad para el profesorado. Hay profesores/as, como PP1, que, expresando las condiciones precisas, identifica correctamente la mayoría de familias de prismas que la cumplen, pero deja de asignarla a la familia de prismas que le resulta menos familiar que también la verifica, la de los PCLR. Este/a docente expresa que las caras laterales las tienen que formar cuadriláteros con todos los lados iguales y la base regular o que tenga aristas iguales, no indicando PCLR. PP2 solo la asigna al prisma que la cumple que le resulta familiar, al cubo. PP3 y PP4 extienden la igualdad de aristas a igualdad de caras. PP3 aplica esta condición, con lo que subraya que han de ser iguales las caras laterales y las bases, apuntando R y C. Sin embargo, la respuesta de PP4, quien ha indicado que todas las caras han de ser iguales, resulta difícil de interpretar. Asigna la propiedad a todas las familias de prismas menos a los romboedros. ¿Se fija solo en las caras laterales, aunque las nombre como caras, e identifica caras del mismo tipo con caras iguales? ¿Los romboedros se han descartado porque no les resultan familiares?

En relación con la propiedad *4*, los ángulos diedros de las caras laterales son iguales al correspondiente de la base, de nuevo encontramos dificultades en relación con este elemento de los poliedros. No se contemplan los dos tipos de ángulos diedros que tienen los prismas (los de las caras laterales entre ellas y los que forman las caras laterales con las bases) y se tiene un desconocimiento sobre cómo obtener su medida seleccionando segmentos perpendiculares a la arista que forman las caras que concurran en el mismo punto de la arista. Encontramos dos tipos de respuestas. Por una parte, los/as profesores/as PP2 y PP3 que asignan esta propiedad a los prismas en vez de a los prismas rectos, indicando PP3 porque las bases son iguales. Por otra parte, los/as profesores/as PP1 y PP4 que especifican correctamente la familia de prismas para la que es propiedad específica, apuntan que han de ser rectos, sin embargo, estos/as dos profesores/as no identifican las familias que cumplen la propiedad correctamente. PP1 impone además la condición de que todos los ángulos diedros deben medir lo mismo con lo que extiende dicho ángulo (90ª) a los ángulos que deben tener las bases y, sin embargo, también asocia la propiedad a los L. Y PP4 considera los PCI y los L como rectos. La poca familiaridad con la propiedad y con las familias de prismas implicadas en la tarea queda patente.

Respecto a la propiedad *5*, los ángulos diedros son menores de 180°, no se ha presentado dificultad para identificar la familia de sólidos para la que es propiedad específica pero sí para seleccionar las familias de prismas contenidas en ella. Ha habido tres profesores/as (PP1, PP3, PP4) que han apuntado que los ángulos de las bases ha de ser convexos o menores de 180º. Sin embargo, solo un/a profesor/a de ellos/as (PP1) ha marcado correctamente los prismas que lo cumplen. En los/as otros/as dos encontramos diferentes tipos de respuestas. PP2, no tiene claro cómo son las bases de determinadas familias de prismas, dejando en sus respuestas “Dependerá de si las bases tienen ángulos menores de 180º”. PP4, no ha señalado prismas como PX, PCR, PCI y R. Por otra parte, PP2 se ha liado con los términos cóncavos y convexos, comentando que solo en los prismas convexos hay algún ángulo mayor de 180º.

c) La tarea S-TCg1-G4. Delimitar familias de sólidos a partir de la enumeración progresiva de propiedades

En este subapartado hacemos observaciones sobre las respuestas dadas por los profesores del curso presencial a la subtarea S-TCg1-G4 de la figura A3.4 del anexo 3, con la que se intenta descubrir un sólido, o familia de sólidos, cuando se dan características de él, o de la familia correspondiente.

La categorización de las respuestas la hemos llevado a cabo de la siguiente manera. Estas las hemos registrado en la tabla 3.42. Puede notarse que para la mayoría de las propiedades se registran tres opciones: Los sólidos o familia de sólidos para la que la propiedad es propiedad específica; la que refleja que con la propiedad indicada no se restringe el mundo de soluciones posibles al contemplarse esta propiedad y las anteriores; y una opción que nombramos como “otra” con la que registramos, por un lado, aquellos ejemplos de determinadas familias que cumplen la propiedad pudiendo darse el caso de que no la cumplan todos los ejemplos de la familia correspondiente y, por otro, aquellas soluciones que se aporten que no verifiquen las condiciones impuestas.

Propiedad	Familia	PP1	PP2	PP3	PP4
a) Sus caras son polígonos	Poliedros		x	x	
	Otra	x			x
b) Tiene varios vértices y aristas	No añade información		x	x	
	Poliedros	x			
	Otra				x
c) Es un modelo cerrado	No añade información	x	x	x	x
	Solido				
	Otra				
d) Tiene dos caras iguales	Prismas	x	x	x	x
	Antiprismas	x	x	x	x
	Otra			x	
e) Tiene dos caras paralelas	No añade información		x		
	Prismas	x		x	x
	Antiprismas	x		x	x
	Otra	x		x	x
f) Tiene todos sus vértices de orden 3	Prismas	x	x	x	x
	Otra				
g) Tiene todas las aristas laterales de la misma longitud	No añade información	x	x		x
	Prismas				
	Otra			x	
h) Tiene las aristas laterales paralelas	No añade información	x	x		x
	Prismas				
	Otra			x	

i) Tiene las aristas laterales perpendiculares a la base	Prismas rectos	x	x	x	x
	Prismas				
	Otra				
j) Las caras laterales son rectángulos	No añade información	x		x	x
	Prismas rectos				
	Otra		x		
k) La altura dibujada desde un punto de la base cae en el interior del sólido	No añade información	x		x	x
	Prismas rectos				
	Otra		x		
l) La altura tiene la misma longitud que las aristas laterales	No añade información	x		x	x
	Prismas rectos		x		
	Otra				
m) Los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con el correspondiente ángulo del polígono de la base	No añade información	x		x	x
	Prismas rectos				
	Otra		x		
n) Los ángulos que forman las caras son menores que 180°	No añade información				
	Prismas rectos convexos	x	x	x	x
	Otra				
o) Las diagonales del espacio quedan completamente en el interior del sólido	No añade información	x	x	x	x
	Prismas rectos convexos				
	Otra				
p) Tiene todos los vértices iguales	Prismas rectos de bases regulares		x		x
	Otra	x		x	
q) Tiene todas las caras laterales iguales	No añade información		x		x
	Prismas rectos de bases regulares				
	Otra	x		x	
r) Tiene todas sus caras regulares	Prismas de caras regulares	x			
	Otra		x	x	x
s) Todas sus aristas tienen la misma longitud	No añade información	x			
	Prismas de caras regulares				x
	Otra		x	x	
t) Tiene 24 aristas	Prismas de cara regulares octogonales	x			x
	Otra		x	x	
u) Tiene 16 vértices	No añade información	x			x
	Prismas de caras regulares				
	Otra		x	x	
v) Tiene 10 caras	No añade información	x			x
	Prismas de caras regulares				
	Otra		x	x	

Tabla 3.42. Respuestas de los/las docentes del curso presencial sobre las familias de sólidos que cumplen la propiedad correspondiente y las anteriores (subtaraea S-TCg1-G4)

Las observaciones que cabe destacar para cada una de las propiedades sobre las respuestas que se registran en la tabla 3.42 son:

La propiedad *a*, sus caras son polígonos, propiedad específica de los poliedros, remite a esta familia solo para PP2 y PP3. Sin embargo, PP1 lo reduce solamente a las familias de poliedros que se han visto en el curso, dejando de esta forma algunos poliedros sin incluir. Y PP4 la extiende a todos los sólidos, atribuyendo pues como atributo crítico de los sólidos propiedades específicas de una familia contenida (la de los poliedros).

Para la propiedad *b*, tiene varios vértices y aristas. PP1 y PP3 apuntan que la cumplen todos los poliedros. PP2 no tiene en cuenta las familias que ya había descartado con la propiedad anterior. Comenta que todos los poliedros la cumplen y añade que los cilindros no tienen aristas. PP4 sigue comentando que la cumplen todos los sólidos indicando que el sólido con menos caras, aristas y vértices es un poliedro, concretamente el tetraedro.

Para la propiedad *c*, es un modelo cerrado, propiedad específica de los sólidos, PP2, PP3 y PP4 subrayan que son los sólidos o los poliedros los que la verifican. PP1 de nuevo se centra en que la cumplen las familias estudiadas lo que hace que no incluya determinados poliedros en particular y sólidos en general.

Las propiedades *d*, tiene dos caras iguales, y *e*, tiene dos caras paralelas, a todos/as los/as profesores/as les remiten a los prismas y antiprismas. La propiedad d, además remite a algunas pirámides y bipirámides, pero se tienen dificultades para delimitar de manera precisa las subfamilias de estas que cumplen esta propiedad y/o que no la cumplan. Por ejemplo, PP4 solo descarta las pirámides y bipirámides que tienen diferentes los lados de la base o donde se unen las bases y PP1 indica que “No lo cumplirían las pirámides de base irregular cuya base no tenga ningún lado igual. Tampoco las bipirámides si además de provenir de una base irregular no tienen los vértices simétricos”. Ninguno considera que algunas pirámides oblicuas de base regular tampoco las cumplirían. PP2 puntualiza que “Las pirámides y bipirámides tienen más de dos caras iguales” sin precisar más. PP3 indica que “Lo cumplen las pirámides regulares y bipirámides” con lo que se ha de precisar qué entiende por pirámides regulares ya que encontramos pirámides no regulares que lo cumplen y que no todas las bipirámides lo cumplen.

Para la propiedad *e*, PP2 indica que solo los prismas y antiprismas la verifican. Los otros tres PP1 y PP3 y PP4 la asocian también a algunas bipirámides, descartando las pirámides. Sin embargo, no se delimitan de manera precisa y correcta las bipirámides que cumplen la propiedad. PP1 y PP4 indican “Las bipirámides que provienen de una base regular”. PP3 especifica que dentro de las de base regular tengan un número par de lados. Parece que se extiende a las bipirámides las ideas que se tienen para el paralelismo de caras en los prismas rectos de bases regulares. Cabe destacarse que para estas propiedades ninguno ha remitido a la familia de los poliedros regulares y tampoco se ha señalado que todas las bipirámides formadas con dos pirámides iguales y/o las pirámides rectas de base regular cumplen también la propiedad relativa a la igualdad.

Para las tres propiedades específicas de los prismas, *f*, tiene todos sus vértices de orden 3; *g*, tiene todas las aristas laterales de la misma longitud, y *h*, tiene las aristas laterales paralelas, el profesorado no ha tenido dificultad para asociarlas a esta familia, si bien solo 2 de ellos/as, PP1 y PP4, en relación con la propiedad *f* aclaran que en los prismas en los vértices concurren una arista lateral y dos aristas de una base y las bipirámides y antiprismas no lo cumplen puesto que los vértices de las bases son de orden 4. Para la propiedad *g*, PP1, PP2 y PP4 aclaran que las bases han de ser paralelas. Sin embargo, PP3 subraya que solo los prismas rectos sin indicar ninguna explicación. Plasma la idea de que los prismas oblicuos no tienen las aristas laterales iguales.

Tampoco se ha tenido dificultad para asignar las propiedades específicas de los prismas rectos, *i*, tiene las aristas laterales perpendiculares a la base; *j*, las caras laterales son rectángulos; *k*, la altura dibujada desde un punto de la base cae en el interior del sólido; *l*, la altura tiene la misma longitud que las aristas laterales, y *m*, los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con el correspondiente ángulo del polígono de la base, a esta subfamilia de prismas. Si bien se han dado pocas explicaciones. En relación con *i*, PP1 precisa que “La cumplen los prismas rectos, aunque las bases no sean regulares”. Para *j*, PP2 aclara que “La cumplen los prismas rectos que no son regulares, pues sino las caras serían cuadrados”. Con lo que PP2 no incluye los cuadrados dentro de los rectángulos. Para *k* cabe mencionar que PP2 la asocia a los prismas convexos sin dar ninguna explicación. Parece que las propiedades relativas a caer un elemento dentro y/o fuera del sólido se asocia las asocia a la convexidad. Para *m*, PP2 indica los prismas regulares. Parece que nombra los PBR como prismas regulares y al imponer la regularidad a la base exige más requisitos de los necesarios.

Para las propiedades *n*, los ángulos que forman las caras son menores que 180° y o, las diagonales del espacio quedan completamente en el interior del sólido, propiedades específicas de los prismas convexos, ha habido unanimidad en la selección de los prismas convexos, pero solo PP1 y PP4, y para la propiedad *n*, dan la razón de ello. Indican que al introducir esta nueva propiedad descartan los prismas cóncavos ya que al menos tienen un ángulo mayor a 180° y por lo tanto los que cumplen la propiedad son los prismas rectos convexos.

Una vez centrados en los prismas rectos y convexos, la propiedad *p*, Tiene todos los vértices iguales, propiedad específica de los prismas rectos de bases regulares, al referirse a los ángulos de los vértices, su asociación a esta subfamilia de prismas ha conllevado dificultad. Las respuestas han sido pobres o contienen errores. PP2 y PP4 delimitan esta subfamilia de prismas sin dar explicaciones. PP1 identifica vértices iguales con vértices del mismo orden, por lo que considera que la propiedad no añade información. Y PP3 delimita los prismas rectos convexos sin dar explicación de ello.

El razonamiento para la propiedad *q*, tiene todas las caras laterales iguales ha sido correcto en todas las respuestas considerando las familias de prismas que se habían concretado a partir de las propiedades anteriores. PP2 y PP4 subrayan que se continúa con los prismas rectos de bases regulares. PP1 que partía de la familia de los prismas rectos subraya que “Para que las caras laterales sean iguales tienen que ser los lados del polígono de la base todos iguales, no llega a hacer falta la regularidad de las bases”. PP3 anota que los prisma rectos y regulares con lo que nombra como regulares a los prismas con bases regulares.

Para las propiedades *r*, tiene todas sus caras regulares, y *s*, todas sus aristas tienen la misma longitud, solo PP1 razona adecuadamente para ambas propiedades. Para *r* delimita la familia para la que es propiedad específica y explica la respuesta: “Son los prismas rectos de bases regulares y caras laterales cuadrados ya que es necesaria la regularidad de las bases, y para que las caras laterales sean regulares tienen que ser cuadrados”. La respuesta es coherente con las familias delimitadas a partir de las propiedades anteriores que, si bien no había seleccionado aún los prismas rectos de bases regulares, los razonamientos han sido adecuados en todas ellas si tenemos en cuenta la idea errónea reflejada en la propiedad *p*, al considerar los vértices iguales como vértices del mismo orden. Para *s* apunta que no aporta información, porque al ser las caras laterales cuadrados, las aristas laterales tienen la misma longitud que los lados de las bases. Sin embargo, las respuestas del resto de profesores/as contienen fallos que se refieren a las condiciones que se imponen en la tarea o a que se aplican las condiciones de la propiedad solo a parte de las caras y/o aristas en vez de a todas ellas. PP2 en la respuesta a *r* delimita los poliedros regulares. Parece ser que esta propiedad tiene gran peso solo asociada a esta familia de poliedros pues remite solo a esta familia sin tener en cuenta la condición de la tarea de que las familias seleccionadas tienen que cumplir la propiedad que se considera y todas las anteriores. PP3 y PP4 parece que solo aplican la regularidad de las caras a parte de ellas: las bases. PP3 continúa manteniendo la misma respuesta que la cuestión anterior (prismas rectos y regulares) con lo que entiende por caras regulares al prisma de bases regulares. PP4 comenta que esta propiedad resume las dos anteriores con lo que para este/a docente el prisma recto de bases regulares cumple esta propiedad. Para la propiedad *s* estos/as profesores/as siguen manteniendo la misma respuesta.

Las propiedades *t*, tiene 24 aristas, *u*, tiene 16 vértices y *v*, tiene 10 caras, no conllevan dificultad. Ningún/a profesor/a ha tenido dificultades para determinar en número de lados del polígono de las bases del prisma que han delimitado a partir de su número de aristas, vértices y caras. Ahora bien, cabe señalarse que la mayoría de los/as profesores/as no han nombrado con precisión el prisma al que conducían las propiedades enumeradas. Solo lo ha hecho PP1 señalando que de los prismas de caras regulares lo cumple el de base octogonal. Los demás, solo han añadido a los que habían precisado para las propiedades anteriores que el prisma era octogonal. Con lo que PP4 lo ha nombrado como el prisma octogonal. PP2, que deja los poliedros regulares y vuelve de nuevo a los prismas, delimita el prisma de base octogonal y PP3 lo nombra como prisma regular octogonal.

En un intento de obtener información de la obtenida por Guillén (1997) cuando planteó, la subtarea S-TCg1-G4 a los/as profesores/as participantes en su estudio, en la tabla 3.43 hemos registrado si para cada una de las diferentes propiedades de la lista que se van enumerando progresivamente: 1) se ha explicado o no la razón por la que la cumplen las formas que se han indicado; 2) se delimitan determinadas familias (o familia) como las que cumplen la propiedad considerada, o como las que no la cumplen. Solo se trabajan las familias delimitadas; 3) se hacen demostraciones, para delimitar posibles soluciones (pruebas por enumeración de posibilidades), para explicar que algunas familias no son soluciones, o para explicar que no puede haber más soluciones posibles que las delimitadas, y 4) se da finalmente un nombre para el sólido solución que es una descripción del sólido.

Docente	Realizan			
	1	2	3	4
PP1	*b,c,d,e,f,g,k,m,n,p,q,r,s,t*	*d,e,f,i,k,n,*	No	*t,u,v*
PP2	*b,c,d,e,g,j*	*b,d,e*	No	*t,u,v*
PP3	-	-	No	*t,u,v*
PP4	*b,c,d,e,f,g,h,n*	*d,e,f,h,n*	No	*t,u,v*

Tabla 3.43. Propiedades para las que en las respuestas de los profesores del curso presencial se contempla si: 1) se ha explicado o no la razón por la que la cumplen las formas que se han indicado; 2) se indican formas geométricas que cumplen estas propiedades y también que no las cumplen; 3) si se justifica por qué son soluciones o que no puede haber más soluciones, y 4) si se ha indicado finalmente un nombre para el sólido solución que es una descripción de la familia específica de sólidos a la que pertenece

La tabla 3.43 refleja que los/as profesores/as PP1 y PP4 han sido los que han explicado más las respuestas dadas y los que en su discusión contemplan determinadas familias (o familia) que cumplen la propiedad considerada y otras que no la cumplen. Por ejemplo, PP1 para la propiedad *d)* ha aclarado que “Es propiedad que cumplen todos los prismas, porque por definición, aunque las bases sean irregulares las dos bases tienen que ser iguales, los antiprismas también por el mismo razonamiento. No lo cumplirían las pirámides de base irregular cuya base no tenga ningún lado igual. Tampoco las bipirámides si además de provenir de una base irregular no tienen los vértices simétricos". Y PP4 ha respondido: "Esta propiedad la cumplen los prismas y antiprismas, puesto que las dos bases son iguales. En cambio, descartaríamos las pirámides que no tienen ningún lado de la base igual y las bipirámides que no tienen ningún lado de las bases que se unen igual". Nótese que en la respuesta de PP1 se han incluido algunas pirámides que tampoco cumplen la propiedad pues habría que descartar también pirámides de base regular oblicuas y en la respuesta de PP4 no se incluyen las bipirámides formadas por dos pirámides rectas iguales. Cabe señalarse que al descartar ejemplos posibles ninguno de los dos se ha fijado en las pirámides de base regular oblicuas y que PP4 para descartar subfamilias de bipirámides se fija solo en características de la base en vez de en las pirámides que las forman.

Cabe señalarse también que PP2 lo comprobaba algunas veces mientras que en otras solo daba la respuesta sin explicación. Por ejemplo, para la propiedad *f)* ha indicado solamente "Los prismas", mientras que en la propiedad *g)* ha especificado "Todos los prismas tienen la propiedad de que sus aristas laterales tienen la misma longitud, ya que todo prisma tiene dos bases paralelas entre sí, por tanto, todas sus aristas laterales tendrán la misma longitud". Ya hemos comentado en el párrafo anterior que a veces tampoco tenía en cuenta la condición de la tarea de que se tenían que cumplir también las propiedades anteriores. PP3 se ha limitado a señalar la familia o forma geométrica que cumple la propiedad considerada. Por ejemplo, para la propiedad *h)* ha indicado "prismas rectos".

Cabe mencionarse también las pocas explicaciones que se dan para exponer cómo se delimitan las familias de sólidos que cumplen las propiedades correspondientes, para justificar por qué son soluciones o para explicar que puede o no puede haber más soluciones posibles y que si bien todos han llegado a delimitar el prisma octogonal recto como solución, solo PP1 lo ha nombrado con una descripción precisa de la familia específica de sólidos a la que pertenece: prisma octogonal de caras regulares.

3.2.1.2.4 La descripción de las formas geométricas a partir de problemas en contexto (S-TCg1-P1, S-TCg1-P2, S-TCg1-P3, S-TCg1-P4, S-TCg1-P5)

En este subapartado incluimos observaciones referidas a las respuestas del profesorado a subtareas relativas a la descripción de familias de poliedros y problemas en contexto; se refieren a la cuestión CCD2 expuesta en la tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2. Las subtareas, S-TCg1-P1, S-TCg1-P5 se han presentado en los tres cursos, mientras que S-TCg1-P2, S-TCg1-P3, S-TCg1-P4, se han llevado a cabo en los cursos presencial y online.

a) Subtarea S-TCg1-P1

Esta subtarea se presenta en la figura A1.1 del anexo 1. En ella se cuestiona sobre si su forma corresponde o no a la de un poliedro, sobre sus propiedades *y* sobre la forma de nombrar los ortoedros como perteneciente a la familia de los "prismas" a la que también se agregan los calificativos "recto" y "rectangular". Son cuestiones que ya se han planteado en otras subtareas, con lo que al plantearlas de nuevo se pretendía, por un lado, indagar sobre la información que aportaban al respecto los/as profesores/as de los tres cursos realizados cuando se cuestionaba sobre un objeto cotidiano que podían asociar a una forma geométrica que se estudia en la ESO. Por otra parte, averiguar si sus respuestas se mantenían o cambiaban después de haberlas abordado con tareas anteriores.

En la tabla 3.44 hemos registrado las respuestas. Para ello hemos utilizado la plantilla de la tabla 2.17 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Docente	DDP1											
	Ip			E			P			In		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
PC1	x					x	x			x		
PC2	x				x			x				x
PC3	x			x				x		x		
PC4	x			x				x				x
PP1	x				x			x		x		
PP2	x			x				x				x
PP3	x					x		x				x
PP4	x			x				x				x
PO1	x			x			x			x		
PO2	x			x				x				x
PO3			x	x				x				x
PO4	x			x			x			x		

Tabla 3.44. Sobre las respuestas a la subtarea S-TCg1-P1

En la tabla 3.44 puede observarse que la mayoría del profesorado mantiene la idea/definición expresada anteriormente para poliedro. Se señala que la forma presentada es un poliedro porque todas sus caras son polígonos y algunos/as profesores/as añaden además los elementos que lo forman. Sin embargo, matices que marcan diferencias en las respuestas de algunos/as profesores/as son: PC2 ha indicado “Que significa poli (varias) y edro (caras)”. Este/a docente cuando se les preguntó por cómo describen a los poliedros indicó que es un cuerpo geométrico determinado por cuatro o más polígonos y señaló los elementos que los forman. Cabe mencionar que PO1 diferencia entre la caja y la figura geométrica que representa la caja, el prisma, indicando “El prisma sí, la caja no”. Este/a profesor/a también se diferencia porque aquí habla de planos en vez de polígonos, “Es un poliedro porque es una región del espacio cerrada y acotada que está limitada por planos”. Asimismo, matizamos que PO3 señala que el prisma recto rectangular está formado por polígonos regulares iguales cuando en el texto no se especifica y además parece indicar que considera el rectángulo como una figura plana regular. PO4 además de señalar que sus caras son polígonos comenta características respectos a los elementos aristas, caras y vértices, “Sus aristas son rectas, en sus vértices se juntan 3 caras y tiene 6 caras”.

En la tabla 3.44 también podemos observar que la mayoría del profesorado (10/12) señala que el elemento común a la base y las caras laterales es la arista. Solo dos profesores/as se centran en una propiedad específica de los paralelepípedos o de los ortoedros al indicar el tipo de polígonos que se consideran: PP1 responde “Que se juntan con paralelogramos” y PP2 que “Tienen en común que todas las caras son rectángulos”. Por lo que se refiere a lo que tienen en común la base y dos caras laterales consecutivas, solo un profesor, PP3, ha centrado la atención en los ángulos y ha respondido que “Un ángulo”. El resto coincide en responder que un vértice. Se subraya que ningún/a profesor/a se fija en los tipos de caras o polígonos que se juntan. Para los ángulos diedros también se siguen reflejando el mismo tipo de respuestas y las mismas dificultades que les llevan a cometer los mismos errores. La mayoría del profesorado (8/12) respondió que la caja tiene 12 ángulos diedros y las explicaciones dadas fueron de dos tipos; en unas se apoyaron en el número de pares de caras que tienen los ortoedros y las otras en el número de aristas. Por ejemplo, PC3 indicó "12 porque hay 12 pares de caras que se junta" y PO1 "Doce ángulos diedros correspondientes a las doce aristas; son todos rectos". Caben comentarse respuestas en las que se utilizan razonamientos incompletos al explicar la respuesta lo que lleva a respuestas incorrectas. Por ejemplo, PC1 al determinar el número de ángulos diedros del ortoedro repite "4 por cada cara" y PP1 y PP3 que de nuevo solo consideran los ángulos que se forman entre las caras laterales, PP1 "Hay 4 ángulos diedros que son iguales y de 90º y son los formados por dos caras que se intersectan en una arista" y PP3 "Cuatro que son los ángulos que forman sus caras. Como tenemos cuatro caras pues al juntarlas forman cuatro ángulos". Finalmente, PO3 solo considera 8 señalando "Son ocho, y son los que concurren al ser cortado por un plano perpendicular a dos de sus caras". Por lo que respecta al número de ángulos triedros de las respuestas de los profesores se puede concluir que la mayoría tiene una idea en su objeto mental de este tipo de ángulos. Pero también para estos elementos se siguen encontrando respuestas que reflejan que solo se tiene en cuenta parte de las caras en vez de todas ellas. Por ejemplo, PP3 parece tener problemas a la hora de realizar la actividad. Por una parte, parece que se consideran caras solo las caras laterales y no las bases pues responde que no hay ángulos formados por tres caras en la figura propuesta. Por otra parte, ha mostrado errores a la hora de señalar el número de ángulos que forma la base con dos caras laterales, ya que ha señalado 4 en lugar de 8. Da a entender que se solamente ha contado los de una de la base.

Las características más resaltadas para las caras laterales no consecutivas fue que eran paralelas (8/12) y que eran iguales o idénticas (7/12). Puede notarse que solo un/a profesor/a más comenta que son paralelas que iguales. Solo tres profesores/as (PC1, PO1, PO4) señalaron que son iguales y paralelas y solo uno/a de ellos/as indicó que son opuestas (PC4). La pregunta planteada ha remitido a que los/as profesores/as indiquen solo una propiedad relativa a este tipo de caras opuestas; no han hecho referencia a que hay varias propiedades de los ortoedros (específicas de los paralelepípedos) relativas a este tipo de caras.

En relación con la forma de nombrar el objeto, cuestionándoles sobre por qué su nombre de "prisma" al que pueden agregarse los calificativos "recto" y "rectangular", para explicar las respuestas algunos profesores/as han indicado propiedades específicas de la familia de prismas rectos, relativas a sus ángulos, la forma de las caras laterales, las aristas, la traslación de sus bases, y de los prismas rectangulares, relativas a sus bases. Así para explicar que es prisma recto, PC1, PC3 han indicado que el ángulo que forman las caras laterales con las bases mide 90º. PP1, PO2, PO4 que las caras laterales son rectángulos, PP4 que las aristas laterales son perpendiculares a la base y PO1 que las bases se superponen por traslación ortogonal. Para explicar que es prisma rectangular, PC1, PC3, PP1, PO1, PO4 han indicado que las bases son rectángulos. Otros profesores sin embargo se han apoyado en el ejemplo que se les muestra, que pertenece a las familias de sólidos sobre las que se les cuestiona y también a la subfamilia más específica de los ortoedros. En las respuestas se indican propiedades específicas de esta familia contenida. Para explicar que es recto PC4, PP3, PO3 han indicado que los ángulos entre todas las caras son rectos y PC2 que todos los ángulos son rectos (sin especificar cuáles). Y para explicar que son rectangulares, PC2, PC4, PP3, PO2, PO3 han indicado que todas las caras son rectángulos. Las respuestas dadas siguen siendo muy breves. Ninguno/a de estos/as profesores/as ha aclarado que si se cumple una condición para todas las caras también se cumple para una parte de ellas o que los ortoedros son también prismas rectos y prismas rectangulares y que, al cumplir las propiedades de los ortoedros, que son más restrictivas que la de los prismas rectos y/o rectangulares, también cumplen las propiedades de la familia más general. Cabe destacarse también las respuestas dadas por dos profesores en las que en la explicación se indican atributos críticos de subfamilias de prismas que no son atributos críticos de las familias sobre las que se cuestiona. Por ejemplo, PP4 para explicar que es prisma rectangular responde que “Porque las caras laterales son rectángulos”, atributo crítico de los prismas rectos, pero no de los prismas rectangulares. PP2, no ha diferenciado en su respuesta entre recto y rectangular contestando que tiene estos calificativos porque está formado por cuadriláteros, propiedad específica de los prismas cuadrangulares pero los prismas rectangulares requieren más requisitos.

Cabe mencionar que ningún profesor ha comentado que en un prisma rectangular cualquier cara puede ser base.

b) Subtarea S-TCg1-P2

La subtarea de este subapartado se muestra en la figura A1.2 del anexo 1. Con ella se pretendía que el profesorado de los dos cursos en los que se había abordado la tarea (CP y CO) aportara información sobre el conocimiento que se tenía acerca de los prismas y pirámides de caras regulares. La tabla 3.45 registra las respuestas de los/as docentes respecto a las condiciones que deben cumplir estas subfamilias específicas de prismas y pirámides y la tabla 3.46 refleja el número de caras regulares que han asignado a la subfamilia correspondiente.

Docente	Cumplir				
	1	2	3	4	5
PP1	x				
PP2		x			
PP3		x			
PP4			x		
PO1				x	
PO2					x
PO3		x			
PO4				x	

Tabla 3.45. Propiedades que el profesorado de los cursos presencial y online asigna a los prismas y pirámides de caras regulares: 1) regularidad de la base o bases y caras laterales iguales; 2) regularidad de la base o bases; 3) rectos y bases regulares; 4) regularidad de las caras laterales y de las bases, y 5) todas las caras regulares e iguales

Docente	Nº de prismas de caras regulares	Nº de pirámides de caras regulares
PP1	Infinitos	Infinitos
PP2	Infinitos	Infinitos
PP3	Infinitos	Infinitos
PP4	Infinitos	Infinitos
PO1	Infinitos	3
PO2	1	1
PO3	Infinitos	Infinitos
PO4	Infinitos	3

Tabla 3.46. Número de caras regulares que el profesorado de los cursos presencial y online asigna a los prismas y pirámides de caras regulares

Las tablas 3.45 y 3.46 reflejan que todo el profesorado señala que para que un prisma o una pirámide sea de caras regulares, las bases o base, respectivamente han de ser regulares. Ahora bien, en relación con las caras laterales hay diferentes tipos de respuesta: Solo dos profesores/as (PO1 y PO4) han respondido que todas las caras han de ser regulares, pero no necesariamente iguales, marcando que lo cumplen infinitos prismas y 3 pirámides. Los demás, o bien imponen además la condición de igualdad a las caras laterales (PO2), con lo que concluye que solo el cubo y tetraedro respectivamente pertenecen a estas subfamilias, o no se impone ninguna condición relativa a la regularidad. Por ejemplo, PP2, PP3 y PO3 no les imponen ninguna condición, PP1 indica que las caras laterales han de ser iguales y PO3 impone la condición de que tienen que ser rectos, condiciones que se asignan en algunos libros de texto de la ESO a las familias que nombran como prismas y pirámides regulares. Estos profesores concluyen que hay infinitos ejemplos en cada subfamilia.

.

c) Subtarea S-TCg1-P3

En la figura A1.3 del anexo 1 se expone la subtarea que se estudia en este subapartado. Con ella se pretendía que el profesorado de los cursos en los que se ha abordado (CP y CO) eligiera la forma que debería tener el embalaje, basándose en las propiedades que cumplen las formas geométricas y las condiciones que expone la subtarea presentada. Se ha tratado de que los/as docentes analizaran la geometría de los sólidos en un contexto real en donde la imagen de la forma geométrica y las características geométricas son importantes. En la tarea se cuestiona sobre la forma del embalaje que se considera más adecuado teniendo en cuenta las condiciones que se indican de fácil embalaje, con una capacidad determinada de antemano (entre 270 y 540 centímetros cúbicos) y con un coste mínimo para el material. Las respuestas de esta subtarea sobre las formas del embalaje las hemos registrado en la tabla 3.47; en la tabla 3.48 registramos las razones dadas por los/as docentes para elegir la forma geométrica del embalaje, y en la tabla 3.49 anotamos los requisitos propuestos que cumplen cada una de las formas geométricas señaladas.

Docente	Pirámide cuadrangular	Cubo	Prisma cuadrangular	Tetraedro	Prisma recto rectangular	Prisma recto hexagonal
PP1	x					
PP2		x				
PP3				x		
PP4			x			
PO1						x
PO2			x			
PO3					x	
PO4	x					

Tabla 3.47. Formas geométricas seleccionadas para el embalaje por los docentes de los cursos presencial y online

Docente	Formato oriental	Empaquetamiento fácil	Optimización espacio	Capacidad propuesta	Coste mínimo	Argumenta
PP1	x	x				No
PP2		x		x		No
PP3	x	x				No
PP4	x		x		x	No
PO1	x		x	x	x	No
PO2			x	x		No
PO3			x	x		No
PO4		x		x	x	No

Tabla 3.48. Razones del profesorado para seleccionar para el embalaje la forma geométrica indicada

Forma geométrica	Formato oriental	Empaquetamiento fácil	Optimización espacio	Capacidad propuesta	Coste mínimo
Pirámide cuadrangular	x	xx		x	x
Cubo		x		x	
Prisma cuadrangular	x		xx	x	x
Tetraedro	x	x			
Prisma recto rectangular			x	x	
Prisma recto hexagonal	x		x	x	x

Tabla 3.49. Características de las formas geométricas propuestas para el embalaje indicadas por los/las profesores/as de los cursos presencial y online

La tabla 3.47 muestra que las formas geométricas propuestas para el embalaje corresponden a los prismas (4/8), las pirámides (2/8) y los poliedros regulares (2/8). Entre los prismas se propone el prisma cuadrangular (2/8), el prisma recto rectangular (1/8) y el prisma recto hexagonal (1/8). Por lo que respecta a las pirámides, solo se ha indicado la pirámide cuadrangular (2/8). En cuanto a los poliedros regulares se han seleccionado el cubo (1/8) y el tetraedro (1/8). Cabe señalarse que las respuestas en las que se han seleccionado los prismas cuadrangulares o hexagonales y las pirámides cuadrangulares se apoyan solo en los rectos correspondientes, si bien solo en dos respuestas se ha hecho explícito.

Las tablas 3.48 y 3.49 muestran que el formato oriental se ha asociado a la pirámide cuadrangular, el prisma cuadrangular, el tetraedro y el prisma recto hexagonal sin destacarse ninguna de estas formas geométricas. Se ha de apuntar que los/as profesores/as que han asociado el formato oriental a la pirámide (cuadrangular o tetraedro) lo han hecho asignando también la característica del empaquetamiento fácil y los que lo han asignado al prisma (cuadrangular o hexagonal) consideran que con estas formas se optimiza el espacio. Cabe destacarse la pobreza de la argumentación matemática en las respuestas. Por lo que se refiere a cómo rellenar el espacio hemos diferenciado, por un lado, aquellas respuestas que se han referido a un empaquetamiento fácil y, por otro lado, aquellas que han hecho referencia a la optimización del espacio. El empaquetamiento fácil es llevado a cabo por la pirámide cuadrangular, el cubo y el tetraedro, acentuándose, dentro de estas formas geométricas, la pirámide cuadrangular. Las explicaciones que han señalado los/as dos profesores/as PP1 y PO4 para esta selección se reducen a indicar que 6 pirámides forman un cubo o se indica que se pueden poner unas entre otras boca abajo. Los profesores que han indicado el tetraedro y el cubo no han apuntado ninguna razón. En lo concerniente a la optimización del espacio, las formas geométricas que se han identificado han sido el prisma cuadrangular. el prisma recto rectangular y el prisma recto hexagonal, siendo el prisma cuadrangular el seleccionado por dos profesores/as (PP4 y PO2). Hemos de reseñar que ningún/a docente ha dado explicaciones en términos matemáticos para explicar su elección, tan solo se ha señalado que tiene buena capacidad para rellenar el espacio.

La capacidad ha sido la característica que el profesorado ha tenido en cuenta para todas las formas geométricas exceptuando el tetraedro, pero tampoco se han explicado las respuestas dadas. La mayoría del profesorado que ha indicado las medidas para llevar a cabo la capacidad propuesta ha dado datos para que la capacidad coincida con la propuesta sin explicar cómo se ha llegado a ellos y sin tener en cuenta el coste mínimo. Un/a docente (PO1) ha elegido un volumen dentro de los límites propuestos sin más explicaciones.

Como formas geométricas que tienen un coste mínimo se han seleccionado la pirámide cuadrangular, el prisma cuadrangular y el prisma recto hexagonal, siendo cada una de ellas seleccionada por un docente. De nuevo constatamos la pobreza de las explicaciones en las respuestas dadas. Entre los que han tenido en cuenta el coste mínimo, un/a profesor/a (PO1) ha realizado el cálculo suponiendo una capacidad entre los valores establecidos y a partir de ella ha determinado las dimensiones de la figura. Otro/a docente (PO4) ha comparado entre el cubo, el prisma de bases cuadradas y la pirámide cuadrada con datos. Finalmente, el/la otro/a profesor/a (PP4) que ha anotado una explicación, se ha centrado en el área de las figuras planas que forman las bases. Dicho/a docente ha comentado, sin realizar cálculos que, los prismas de base cuadrada gastan menos material que los prismas de otras bases, como la hexagonal.

d) Subtarea S-TCg1-P4

En esta subtarea, que se presenta en la figura A1.4 del anexo 1, se pide a al profesorado que encuentre la forma de unir dos puntos situados en caras opuestas de un ortoedro por el camino más corto. Se ha presentado una subtarea en la que la problemática analizada trata las representaciones de los sólidos a partir de una situación cotidiana. En la tabla 3.50 hemos registrado tres tipos de respuestas. En la que nombramos “Camino en tramos directo” los/as docentes han resuelto la subtarea delimitando un camino a partir de segmentos determinados sobre las caras del ortoedro y determinando la medida de estos. En la que denominamos “A partir del recorrido mostrado”, se ha descodificado el camino que se les ha mostrado con el dibujo que se les ha presentado. Y en “A partir del desarrollo del ortoedro” la subtarea se ha resuelto apoyándose en un desarrollo plano del ortoedro y delimitando en él el recorrido.

Docente	Camino en tramos directos	A partir del recorrido mostrado	A partir del desarrollo del ortoedro
PP1	x		
PP2		x	
PP3	x		
PP4	x		
PO1			x
PO2	x		
PO3			x
PO4	x		

Tabla 3.50. Tipos de respuesta para resolver la subtarea S-TCg1-P4

Cabe señalarse que han sido 5/8 profesores/as los/as que han resuelto la subtarea realizando el problema a través de las paredes de la habitación directamente trazando tres segmentos sobre ellas. Estos/as profesores/as han indicado que han partido del punto A, han llegado hasta el suelo o el techo, lo han recorrido y después, han subido o bajado por la pared hasta llegar el punto B. Como ejemplo de respuesta mostramos la indicada por PP1 quien señala que “Teniendo en cuenta que el cable está a 0.5 m del suelo, el camino más corto sería hacer líneas rectas. Iría del punto A al techo que hay 3,5 m. Luego iría en línea recta por el techo hasta llegar a la otra pared que son 10 m. Finalmente bajaría hasta el punto B que son 0.5 m. Ahora sumamos todo y da 14 m, que es la cantidad mínima. por el techo hasta la otra pared en línea recta”. Hemos de mencionar que estos/as profesores/as no han explorado otras opciones a pesar de que en el dibujo del enunciado se mostraba un camino alternativo. En sus explicaciones solo han indicado que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta. Una vez determinado un camino y su medida han dado por seguro que era el recorrido más corto si bien no es cierto.

Solo un/a profesor/a ha realizado la subtarea teniendo en cuenta el camino que se les ha mostrado en el enunciado. Este/a profesor/a lo ha resuelto formando triángulos rectángulos y aplicando el teorema de Pitágoras. La respuesta que ha señalado ha sido “Fijándome en la figura que nos han dado, creo que el camino más corto es sumando distancias y aplicando el teorema de Pitágoras. Bajo 0.5 m. Ahora voy hasta la otra pared aplicando Pitágoras $d_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83\ m$. Vuelvo a aplicar Pitágoras para llegar a al techo $d_2 = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7.21\ m$. Voy por el techo aplicando Pitágoras $d_3 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83\ m$. Finalmente, bajo hasta el punto B que son 0.5 m. Total, realizamos la suma de esos valores y sale 13.87 m como distancia mínima”. Puede notarse que esta respuesta ha sido completa en cuanto a determinar un camino y su medida y en ella se ha descodificado correctamente la información que se aportaba en la representación plana del ortoedro. Ahora bien, cabe destacarse que tampoco este/a docente ha explorado otros caminos posibles para ir de A a B, que cumpliesen los requisitos impuestos, para convencerse de que efectivamente el camino que se había representado en la figura correspondía al recorrido mínimo pues podía haberse convencido de que no lo era.

Otras dos respuestas que cabe comentar son respuestas en las que el problema se reformula para otro tipo de representación del ortoedro: un desarrollo del mismo. Estas dos respuestas trabajando la misma representación para su resolución, lo resuelven de forma diferente. Un/a docente (PO1) tras la suposición de datos por su parte, da el resultado, indica cómo lo llevaría a cabo, pero sin llegar a realizarlo “14 metros. Suponiendo que están centrados en cada pared y uno en frente del otro. Lo haría trazando una línea recta entre ambos puntos sobre un desarrollo plano del recinto”. Ha llegado a la misma conclusión que los/as profesores/as que hemos categorizado como “camino en tramos directos”, pero a partir de un desarrollo plano. El otro docente (PO3) como no supone que los puntos A y B están centrados horizontalmente en las paredes indica “Si tomamos como referencia una de las paredes y llamamos a las distancias a las que se encuentra cada uno de los enchufes de dicha pared como d1 y d2. Si desplegásemos las paredes sobre un plano obtendríamos un rectángulo de 18 m de largo por 4 m de ancho y sobre este aparecería al unir los enchufes un triángulo rectángulo de 14 m de alto y d1-d2 de base y la hipotenusa de dicho triángulo corresponde a la distancia mínima, que sería aplicando Pitágoras: $D = \sqrt{14^2 + (d1 - d2)^2}$". En relación con las respuestas de estos/as dos docentes hemos de subrayar que ambos/as profesores/as han pensado en el mismo desarrollo plano, considerando como bases los dos cuadrados y situándolas sobre el mismo rectángulo. Esto nos lleva a concluir que se tiende a dibujar en los desarrollos planos de los prismas las bases sobre los mismos paralelogramos.

Destacamos que ninguno/a de los/as docentes se ha apoyado en la realización de un dibujo para explicar el problema y que las respuestas de todos ellos resultan incompletas porque falta la discusión para convencer de que el recorrido seleccionado lleva al recorrido mínimo. Además, ninguno/a de ellos/as ha determinado la mínima cantidad de cable posible. Las estrategias usadas para resolver el problema no llevan a la solución mínima si el desarrollo del ortoedro que se contempla es el utilizado. Puede notarse el poco peso que tiene en la imagen que se tiene de desarrollo del ortoedro el que las bases se sitúen en lados de distintos rectángulos, desarrollo que hubiera llevado a la solución mínima y a poder justificar que realmente lo era.

e) Subtarea S-TCg1-P5

Esta subtarea se muestra en la figura A1.5 del anexo 1. Con ella se trataba de mostrar al profesorado la importancia que tiene la geometría en un contexto real. Pudiera pensarse que las abejas, utilizan conocimientos de geometría al construir sus panales. Además, a partir de un enunciado que sitúa las formas geométricas en la naturaleza, se relaciona la geometría del espacio con la del plano. Esta subtarea se ha realizado en los tres cursos de nuestra investigación.

En la tabla 3.51 registramos las respuestas sobre si se han cuestionado acerca de la forma de los panales de las abejas (Se han cuestionado), las explicaciones de la elección elegida para la forma geométrica en los paneles de abeja (Razón utilizar hexágonos) y las propuestas que se harían para ello, con las explicaciones que se aportan (Elección. Explicación).

Docente	Se ha cuestionado	Razón de utilizar hexágonos	Elección. Explicación
PC1	NO	No lo tiene claro	Cuadrado
PC2	NO	No lo tiene claro	Cuadrado
PC3	NO	No lo tiene claro	Cuadrado
PC4	NO	Relación área y perímetro	Explicación numérica
PP1	NO	Cubrir el plano	Con un dibujo
PP2	Sí	Se unen los lados	No se sabe
PP3	NO	Cubrir el plano y mejor relación área y perímetro	Dibujo y analizando características
PP4	NO	Relación espacio y material	Rellenar superficie con esas figuras
PO1	-	Cubrir el plano y mejor relación área y perímetro	Comprobación mediante dibujos
PO2	-	Cubrir el espacio	No se especifica
PO3	-	Meter mayor cantidad de objetos en el mismo espacio	Construyendo figuras y rellenado el plano
PO4	.	Supone que tienen la superficie máxima y no dejan huecos	Calculando superficies con misma longitud de lados

Tabla 3.51. Sobre la utilización de las formas geométricas en los paneles de abeja

Puede observarse que la mayoría del profesorado de los cursos en comunidad y presencial no se había cuestionado sobre porqué las abejas hacen los panales de forma hexagonal. El/La único/a docente que se lo había cuestionado ha indicado que no sabía realmente la razón. Hemos de señalar que ninguno/a de los/as profesores/as del curso online ha respondido a esta pregunta. Del análisis de estas respuestas puede concluirse que la situación no se suele utilizar por el profesorado que ha participado en nuestro estudio en sus clases de la ESO. El estudio de los cubrimientos en el plano y en el espacio, si es que se abordan en las clases, parece que no se tratan relacionando la problemática matemática con situaciones que se presentan en el mundo real.

Una vez trasladado el problema del espacio al plano, el profesorado del curso en comunidad ha dudado entre utilizar el cuadrado y el hexágono para las colmenas. Todos/as los/as docentes menos uno/a de ellos/as (PC4) han señalado que es difícil pensar que el cuadrado no rellena mejor el plano con menos perímetro. PC4 ha subrayado “El hexágono es el que ocupa mayor superficie con menor perímetro”. En los otros dos cursos las razones que se han señalado es que el hexágono cubre el plano o el espacio (5/8) y, además, dos de estos/as cinco docentes, han acentuado que lo hace con menor perímetro. Cabe señalar que algunos/as docentes en sus respuestas han hablado de cubrir el plano y otros/as, sin embargo, de cubrir el espacio, pero ninguno/a ha hecho explícito bien que el problema planteado en el espacio se ha reformulado en el plano, bien que si estamos en el espacio los hexágonos podrían corresponder a prismas rectos hexagonales. Ningún/a docente ha mencionado pasar por analogía esta problemática al espacio y contemplar las posibles soluciones que se tendrían. La explicación de la selección es en la mayoría de las respuestas una afirmación; no se justifica en términos de ángulos cuáles son los polígonos que cubren el plano; no se conjetura ni justifica con ejemplos de polígonos regulares con el mismo perímetro cuál es el que tiene mayor área o con polígonos regulares de la misma área el que tiene el menor perímetro. Algunas respuestas que han seleccionado el hexágono, la explicación del porqué es imprecisa. Por ejemplo, PP2, refiriéndose al hexágono, indica “Opino que es porque se pueden unir los lados sin dejar huecos”, cuando el cuadrado también lo hace. Destacamos la respuesta de PO3 quien ha centrado su contestación en la geometría y la biología al señalar que se trata, con estas formas geométricas, de llevar a cabo un empaquetamiento compacto intentando meter el mayor número de objetos en el mismo espacio, refiriéndose a las larvas de las abejas.

Para explicar que el hexágono cumple la condición propuesta se indican pruebas visuales en las que se comprueba con la representación gráfica de hexágonos y cuadrados que rellenan el mismo trozo del plano o, como ha indicado algún/a docente (PO3), se construyen esas formas geométricas y se cubre el plano con ellas. Cabe mencionarse que ha habido un/a docente (PC4) que ha señalado que lo realizaría con cálculos numéricos, indicando superficialmente los pasos que se habrían de seguir. Y la respuesta de otro/a (PP2) reconoce que no sabe justificar que realmente el hexágono va a cubrir el espacio con menor perímetro que el cuadrado. Hay otra respuesta que no lo especifica (PO2). Hemos de subrayar que los/as tres profesores/as del curso en comunidad pensaban más en el cuadrado como forma geométrica para cumplir las condiciones apuntadas y tampoco han señalado como justificarlo, solo PC2 ha indicado una explicación y esta no ha estado argumentada más allá de señalar que “Si fuera el hexágono las baldosas las harían hexagonales”.

3.2.2 Relaciones en/entre las formas geométricas

El estudio sobre el establecimiento de relaciones entre formas geométricas, correspondiente a la tarea TCg2 (tabla 2.1 del apartado 2.2.3 del capítulo2), lo presentamos en dos subapartados. En 3.2.2.1 nos centramos en ideas que se expresan sobre la igualdad de algunos elementos de los poliedros y en el subapartado 3.2.2.2 examinamos relaciones entre diferentes formas geométricas del espacio y/o del plano.

3.2.2.1 Sobre la relación de igualdad de caras y de vértices de un poliedro

Guillén (1997) señala que al tratar las relaciones entre sólidos cabe examinar ideas que se tienen sobre los términos caras iguales, caras del mismo tipo, vértices iguales y vértices del mismo tipo. Estas ideas las vamos a contrastar con las que expresamos en el subapartado 1.4.1.3 del capítulo 1.

Las respuestas del profesorado a la subtarea S-TCg2-1 (tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) han reflejado que los/as profesores/as no suelen establecer ninguna relación de igualdad entre los elementos de un mismo poliedro. Y las ideas que se expresan sobre la igualdad de estos elementos suelen ser incompletas, imprecisas y en algunos casos reflejan ideas erróneas que se tienen que revisar. En la tabla 3.52 se muestra si no se detectan errores en la respuesta de los profesores (No) o, por el contrario, sí que se detectan errores (Sí) para los conceptos señalados.

Docente	Caras iguales		caras del mismo tipo		vértices iguales		vértices del mismo tipo	
	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí
PC1	x			x		x	x	
PC2	x		x			x	x	
PC3		x		x		x	x	
PC4	x		x			x	x	
PP1	x			x	x		x	
PP2	x			x		x	x	
PP3	x		x			x	x	
PP4	x		x			x	x	
PO1	x			x		x	x	
PO2	x			x	-	-	x	
PO3	x		x			x	x	
PO4	x		.	-	-	-	x	

Tabla 3.52. Sobre si se detectan o no errores en las ideas que se expresan para términos ligados a relaciones entre poliedros y/o sus elementos

Por lo que se refiere a "caras iguales" la mayoría del profesorado expresa su idea de manera incompleta e imprecisa, pero sin errores. 5/12 profesores (PP4, PO1, PO2, PO3, PO4) explican este término de forma general sin concreciones. Señalan que son polígonos iguales sin especificar que entienden por polígonos iguales. PO1 lo matiza al añadir que "Son polígonos iguales salvo traslación y rotación. Se utiliza para comparar caras de un mismo poliedro". Otros, como PP2 indica que "Tienen la misma superficie"; no considera que puede haber polígonos con la misma superficie y diferente forma.

Hay también otras respuestas que precisan esta idea, como las apuntadas por PC1, PC2, PC4, quienes añaden que los polígonos que forman las caras son de la misma forma y tamaño, la de PP3 que aclara "Las que tienen iguales ángulos y aristas" y la de PP1 que expresa "Son idénticas en tamaño, área, forma, ángulos, en todo". Solo la respuesta de PC3 la consideramos incorrecta pues considera caras iguales cuando los polígonos son del mismo tipo. Cabe subrayarse que el que dos polígonos sean del mismo tipo no indica que al superponerlos coincidan.

Para “caras del mismo tipo”, solo un profesor, PO4, ha indicado que desconoce a qué caras corresponden. Las respuestas de 5/12 profesores (PC2, PC4, PP3, PP4, PO3) las consideramos completas y correctas. Expresan que son de la misma familia, aunque para ello utilizan diferentes términos como misma clase o misma forma. Tres de estos/as profesores/as han realizado alguna especificación. PP3 añade que las que tienen los mismos ángulos, pero no las aristas, indicando que pueden ser más grandes. PP4 ha señalado que son de la misma clase o forma, pero diferente tamaño y PO3 ha indicado que son de la misma clase, aunque no necesariamente iguales. Por otro lado, las respuestas de 6/12 profesores/as solo se apoyan en clasificaciones determinadas, las que tienen más peso en las ideas que se tienen sobre los polígonos. 5/12 profesores/as se apoyan en la clasificación de estos según su número de lados. Expresan que los polígonos que tienen el mismo número de lados pertenecen al mismo tipo sin aclarar que solo pertenecen a la misma familia si clasificamos según el número de lados de los polígonos. Como ejemplo de respuesta señalamos la indicada por PO1 “Mismo número de lados” o por PC1 “Todos los polígonos tienen el mismo número de vértices y aristas”. Para uno/a de los/as profesores/as, PC3, la respuesta dada se ha apoyado solo en las clasificaciones que llevan a los polígonos regulares o a los polígonos convexos. Este profesor expresa que “Son del mismo tipo todos los que presenten regularidad o que todos sean convexos”.

En cuanto a “vértices iguales”, algunos/as profesores/as solo hacen referencia a alguno de los tres requisitos (en ellos concurren los mismos polígonos, con los mismos ángulos y dispuestos de la misma manera) que se imponen para que los vértices sean iguales. Por ejemplo, PP1 hace referencia a que “En ellos hay el mismo número de aristas y además genera los mismos ángulos”. PC4, PP3, PO3 apuntan que las caras han de ser iguales. PC2 y PP4 que expresan que “Los polígonos que forman cada uno de los vértices tienen que ser de la misma familia”, “Que concurren el mismo número de caras y las caras que confluyen son del mismo tipo” y PC3 expresa para vértices iguales una idea de vértices del mismo orden “Han de coincidir el número de aristas que concurren en un vértice”. Otros/as profesores/as intentan expresar la idea de vértices iguales en términos del ángulo poliédrico, pero lo hacen con imprecisión. Por ejemplo, PC1 y PO1 expresan que han de tener el mismo ángulo poliedro y PP2 indica que “Son aquellos que el ángulo mide lo mismo”. Cabe destacarse que dos profesores/as, PO2, PO4, han expresado que “No lo saben”. Por el contrario, todos ellos han señalado con precisión una idea para “vértices del mismo orden”. Como ejemplo de respuestas señalamos la de PC2 “Que tienen el mismo número de aristas” o la de PO4 “Que confluyen en él el mismo número de caras”.

3.2.2.2 Sobre las relaciones en y entre las formas geométricas

En este subapartado presentamos las observaciones que hemos realizado relativas a relaciones entre formas geométricas obtenidas a partir de las respuestas a la encuesta que se describe en Pérez (2006) y a la subtarea S-TCg2-2, descrita en la tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2. Hemos agrupado las observaciones según que estas correspondan a relaciones entre diferentes poliedros (subapartado 3.2.2.2.1), cuerpos de revolución (subapartado 3.2.2.2.2), poliedros y cuerpos de revolución (subapartado 3.2.2.2.3), entre los elementos del espacio y del plano (subapartado 3.2.2.2.4) y entre los elementos del plano (subapartado 3.2.2.2.5). El estudio se ha realizado con el profesorado de la encuesta y de los cursos desarrollados. Hemos de aclarar que en los cursos hemos ampliado el estudio con el de relaciones entre los poliedros regulares convexos por ser una familia de poliedros con características especiales (subapartado 3.2.2.2.6).

3.2.2.2.1 Relaciones entre poliedros o familias de poliedros

En la tabla 3.53 se registra lo que los/as docentes realizan cuando se les pide que expresen relaciones entre poliedros y familias de poliedros y en la tabla 3.54 aquello en lo que se centran a la hora de señalar las relaciones en estas formas geométricas. Dichas tablas se han cumplimentado teniendo en cuenta la plantilla de la tabla 2.22 mostrada en el subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2.

Docente	DRlH													
	Cg		Ec		Ci		F		Re		M		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1		x												
PE2	x													
PE3			x				x							
PE4			x				x							
PC1	x													
PC2	x		x								x			
PC3	x													
PC4			x								x			
PP1			x								x			
PP2			x								x			
PP3			x				x				x			
PP4			x				x				x			
PO1			x				x							
PO2			x								x			
PO3		x												
PO4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.53. Sobre lo que realizan los profesores cuando se les pide que relacionen poliedros y familias de poliedros

Docente	DRlC									
	G		Cf		R		Mo		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1				x						
PE2			x							
PE3					x					
PE4					x					
PC1			x							
PC2			x				x			
PC3			x							
PC4							x			
PP1							x			
PP2							x			
PP3					x		x			
PP4					x		x			
PO1					x					
PO2							x			
PO3				x						
PO4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.54. En lo que se centran al relacionar poliedros o familias de poliedros

La tabla 3.53 muestra que hay varios/as profesores/as (6/16), mayoritariamente en el curso CC, que cuando se les pide que establezcan relaciones entre poliedros o familias de poliedros lo que expresan son características generales de los mismos. Así, PE2 ha anotado características que cumplen los sólidos en general al indicar que son figuras en tres dimensiones, tienen altura y aristas, y PC1, PC2 y PC3 indican cómo están formados los poliedros (por polígonos) y que elementos comunes tienen (caras, vértices y aristas). Cabe destacarse las respuestas en las que se han generalizado características para todos los poliedros cuando no todos las cumplen. Entre ellas, la de PE1 quien ha apuntado que en todos los poliedros se calcula de igual manera el volumen. Asimismo, PO3 ha anotado, entre otras características, que los poliedros tienen un eje de rotación central y un centro de simetría que coincide con el centro del sólido.

Los ejemplos de poliedros o familias de poliedros que se han indicado corresponden a aquellos entre los que se han establecido las relaciones concretas. Por ejemplo, PP2 indica "El cubo se puede descomponer en seis pirámides idénticas que tienen todas como base una cara del cubo y su vértice en el centro del cubo". Y PC2 y PC4 apuntan que unos tipos de poliedros están formados por otros tipos de poliedros, después han concretado que los prismas los puedes descomponer en pirámides.

Al fijarnos en las relaciones concretas que se han establecido, las que han tenido gran peso han sido las que se expresan mediante fórmulas establecidas para llevar a cabo problemas de medición. Tenemos las que relacionan los volúmenes, por ejemplo, escribiendo solo alguna fórmula como PE4 "$V_{pirámide} = \frac{1}{3}V_{prisma}$" o señalando como se obtiene, como PP4 "Para calcular el volumen de un prisma, aplicando el principio de Cavalieri entre un ortoedro y cualquier prisma, tenemos multiplicar el área de la base por la altura. Además, como podemos descomponer el cubo en 3 pirámides de igual volumen, el volumen de una pirámide es 1/3 del área de la base por la altura". Hemos de subrayar que un/a docente (PO3) ha indicado que los poliedros cumplen la fórmula de Euler y otro/a (PO4) ha expresado que no conoce relaciones entre poliedros.

Al centrar la atención en los modelos que visualizan las relaciones entre poliedros las respuestas se han enfocado a la inscripción de poliedros, destacándose el curso presencial, señalando los/las docentes que unos tipos de poliedros están formados por otros tipos de poliedros. De nuevo es la descomposición del cubo en pirámides la que surge casi exclusivamente. Por ejemplo, PP1 anota "Un cubo contiene 3 pirámides cuadradas que tienen de base una cara del cubo y la altura de las pirámides coincide con la arista del cubo". Asimismo, PP2 apunta también con respecto a los cubos y las pirámides que "el cubo se puede descomponer bien en tres o seis pirámides iguales".

3.2.2.2.2 Relaciones entre cuerpos de revolución

En la tabla 3.55 se registra lo que los/as docentes realizan cuando se les pide que expresen relaciones entre familias de cuerpos de revolución y en la tabla 3.56 aquello en lo que se centran a la hora de señalar las relaciones en estas formas geométricas. Dichas tablas se han realizado a partir de la plantilla de la tabla 2.22 mostrada en el subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2.

Docente	DRlH													
	Cg		Ec		Ci		F		Re		M		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1		x												
PE2	x													
PE3			x				x							
PE4			x				x							
PC1			x										x	
PC2			x										x	
PC3			x										x	
PC4			x										x	
PP1			x				x							
PP2			x				x							
PP3			x				x							
PP4			x								x			
PO1			x				x							
PO2			x				x							
PO3			x				x							
PO4		x												

Tabla 3.55. Sobre lo que realizan los profesores cuando se les pide que relacionen familias de cuerpos de revolución

Docente	DRlC									
	G		Cf		R		Mo		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1				x						
PE2			x							
PE3					x					
PE4					x					
PC1	x									
PC2									x	
PC3									x	
PC4	x									
PP1					x					
PP2					x					
PP3					x					
PP4							x			
PO1					x					
PO2					x					
PO3					x					
PO4										x

Tabla 3.56. En lo que se centran al relacionar familias de cuerpos de revolución

De las respuestas de los/as profesores/as que se registran en las tablas 3.55 y 3.56, sobre las relaciones que establecen entre los cuerpos de revolución extraemos observaciones análogas a las obtenidas para las relaciones entre poliedros.

También en este caso se expresan como relaciones entre cuerpos de revolución características generales de los mismos. Estas pueden ser específicas de esta familia, de otra más general o de familias contenidas en ella. Por ejemplo, PE2 ha indicado que son figuras en tres dimensiones que tienen altura. Y PO4 ha señalado elementos que tienen en común familias concretas, cuando ha manifestado que sus bases son círculos. Y también entre los/as profesores/as del curso en comunidad y los de la encuesta encontramos respuestas de este tipo. Cabe subrayarse que en el curso en comunidad se han señalado como relaciones entre cuerpos de revolución la forma de generar estos cuerpos a partir de determinadas figuras planas y relaciones que existen los sólidos y figuras planas que se obtienen al cortar estos sólidos de determinada manera. Las respuestas las hemos registrado en las tablas 3.55 y 3.56 como “otras”. Pero las relaciones no se han establecido como que corresponden a relaciones entre elementos del plano y del espacio, sino que se ha considerado que existe relación entre los elementos correspondientes del espacio porque se generan de la misma manera o porque en ellos se pueden hacer transformaciones a partir de los que se obtienen resultados análogos. Por ejemplo, PC1 y PC4 en su respuesta indican cómo se generan los cuerpos de revolución señalando que se obtienen girando una vuelta completa una figura geométrica plana. Por otra parte, PC2 y PC3 que hacen referencia a las figuras planas que se pueden obtener cortando los sólidos de revolución, marcando que al hacer cortes paralelos a la base de conos o cilindros se obtienen círculos.

Pero también para estas familias de sólidos, la mayoría de las relaciones que se han establecido han sido las que se expresan mediante fórmulas para calcular sus volúmenes, principalmente entre el volumen de los conos y de los cilindros y alguna de ellas es incompleta. Por ejemplo, PP1 ha señalado que “si el cono y el cilindro tienen la misma base y altura, el volumen de un cono es el volumen de un cilindro divido entre 3”. Ahora PE3 ha remarcado que “se les aplica diferente fórmula para calcular el volumen en el caso del cono y del cilindro, $V_{cono} = \frac{1}{3}V_{cilindro}$” sin precisar que tienen la misma base y altura. También se han indicado las relaciones entre los cilindros, las semiesferas y los conos, apuntando que el volumen cilindro = volumen semiesfera + volumen cono.

En relación con la especificación de modelos solo se ha registrado una respuesta, señalada por PP4 al indicar que si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base se obtiene un tronco de pirámide cuyas caras, en vez de triángulos son trapecios.

3.2.2.2.3 Relaciones entre poliedros y cuerpos de revolución

En la tabla 3.57 se registra lo que los/as docentes realizan cuando se les pide que expresen relaciones entre familias de poliedros y de cuerpos de revolución y en la tabla 3.58 aquello en lo que se centran a la hora de señalar las relaciones en estas formas geométricas. Estas tablas se han elaborado a partir de la plantilla de la tabla 2.22 mostrada en el subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2.

Docente	DRlH													
	Cg		Ec		Ci		F		Re		M		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1		x												
PE2	x													
PE3			x				x							
PE4			x				x							
PC1			x						x					
PC2			x						x					
PC3			x								x			
PC4			x						x					
PP1			x				x							
PP2			x								x			
PP3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

PP4	x		x											
PO1			x				x							
PO2	x		x											
PO3			x										x	
PO4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.57. Sobre lo que realizan los profesores cuando se les pide que relacionen familias de poliedros y de cuerpos de revolución

Docente	DRlC									
	G		Cf		R		Mo		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1				x						
PE2			x							
PE3					x					
PE4					x					
PC1					x					
PC2					x					
PC3							x			
PC4					x					
PP1					x					
PP2							x			
PP3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
PP4			x							
PO1					x					
PO2			x							
PO3					x					
PO4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.58. En lo que se centran al relacionar familias de poliedros y de cuerpos de revolución

De las respuestas de los/as profesores/as que se muestran en las tablas 3.57 y 3.58 sobre las relaciones que establecen entre los poliedros y cuerpos de revolución extraemos también observaciones análogas a las obtenidas para las relaciones establecidas entre cada una de estas familias de sólidos.

Algunos/as profesores/as, especialmente los/as que han realizado la encuesta, han anotado características generales comunes específicas de los sólidos, como por ejemplo, PE2 indica que “Son figuras en tres dimensiones que tienen altura”, pero las que prevalecen entre las de todos/as los/as profesores/as son las que hacen referencia a las dos familias de sólidos implicadas en la relación. En ellas se expresan relaciones entre los elementos de las familias de sólidos implicadas, relativas a que tienen elementos comunes, por ejemplo, comentando que tienen dos bases (PC1, PC4) o indicando que tienen 2 caras iguales y paralelas (PC2) o se refieren a la manera de calcular el volumen. Por ejemplo, PE1 señala que en estas formas geométricas se calcula el volumen de igual forma. PO2 ha señalado que “si un prisma y un cilindro tienen la misma altura y, al cortarlos por planos paralelos a sus bases, ambos cortes tienen la misma área, entonces el prisma y el cilindro tienen el mismo volumen”. De igual modo, PP4 ha especificado la misma relación, pero entre la pirámide y el cono.

La respuesta que hemos categorizado como “otras” ha hecho referencia a una relación entre una familia particular de poliedros y de los cuerpos de revolución, anotada por PO3 “tanto los poliedros regulares como los cuerpos de revolución tienen simetría axial. Tanto los poliedros regulares como los cuerpos de revolución tienen simetría respecto a un punto, su centro. Y respecto a distintos planos”.

Se ha hecho referencia principalmente a los prismas y cilindros y, en menor medida, se han indicado como ejemplos los conos y pirámides. De nuevo, la mayoría de las relaciones que se han establecido han sido las que se expresan mediante fórmulas para calcular sus volúmenes, siendo la mayoría de las respuestas incompletas. Algunos/as profesores/as, como PE3 y PE4, tan solo han indicado que las fórmulas para calcular el volumen coinciden. Otros profesores como PP1 y PO1 han apuntado que el volumen del prisma y del cilindro es el área de la base por la altura y que el volumen de la pirámide y del cono es un tercio del área de la base por la altura. Hemos de subrayar que dos docentes han indicado que no conocen relaciones entre poliedros y cuerpos de revolución.

Si nos centramos en los modelos que se visualizan en estas relaciones, solo PC3 y PP2 han señalado alguno de ellos al destacar que se puede obtener un prisma a partir de un cilindro haciendo cortes perpendiculares a las bases del cilindro. Puede observarse el gran peso que tienen los correspondientes prismas y cilindros rectos en la imagen que tienen estos/as profesores/as de estas familias de sólidos.

Se puede pues concluir que las relaciones entre los poliedros y los cuerpos de revolución en las que se centran los profesores se expresan mediante fórmulas para calcular el volumen de estos sólidos o corresponden a los elementos que tienen en común. Al igual que hemos comentado en las relaciones de las formas geométricas anteriores, los/as profesores de la encuesta se han centrado en las características fundamentales de estos sólidos y de los sólidos en general o han indicado que se calcula el volumen en todos de la misma manera. Cabe mencionar que, esta última relación también ha sido señalada por algún/a profesor/a del curso presencial y online. Además, en las respuestas de dos profesores/as, apoyándose solo en las subfamilias de los cilindros y los prismas rectos, pero extendiendo la transformación a todos los cilindros y prismas, se expresan transformaciones que permiten pasar desde los cilindros rectos a diferentes prismas rectos, pero no es así para los prismas y cilindros oblicuos.

3.2.2.2.4 Relaciones entre los elementos del espacio y del plano

Las tablas 3.59 y 3.60 son las que registran las respuestas de los/as profesores/as relativas a relaciones entre elementos del plano y del espacio. Las plantillas que se han usado para ello se muestran en la tabla 2.22 mostrada en el subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2.

Docente	DRlH													
	Cg		Ec		Ci		F		Re		M		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1			x								x			
PE2											x			
PE3			x								x			
PE4			x								x			
PC1			x								x			
PC2			x								x			
PC3			x								x			
PC4			x								x			
PP1			x								x			
PP2			x								x			
PP3			x								x			
PP4			x								x			

PO1			x										x	
PO2			x										x	
PO3			x								x			
PO4			x								x			

Tabla 3.59. Sobre lo que realizan los profesores cuando se les pide que relacionen elementos del espacio y del plano.

Docente	DRlC									
	G		Cf		R		Mo		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1	x						x			
PE2	x						x			
PE3	x						x			
PE4	x						x			
PC1	x						x			
PC2	x						x			
PC3	x						x			
PC4	x						x			
PP1	x						x			
PP2	x						x			
PP3	x						x			
PP4	x						x			
PO1	x						x			
PO2	x						x			
PO3	x						x			
PO4	x						x			

Tabla 3.60. En lo que se centran al relacionar elementos del espacio y del plano

La tabla 3.59 muestra que todos/as los/as profesores/as hacen referencia a modelos que visualizan relaciones de este tipo. La mayor parte del profesorado ha apuntado las relaciones entre formas geométricas concretas del espacio y las figuras geométricas en particular que se obtendrían del plano. Entre las relaciones de este tipo que predominan son aquellas que relacionan determinados sólidos con las figuras planas que se pueden obtener truncando estos de determinada manera. Por ejemplo, PC4 ha respondido "Realizando cortes paralelos a las bases de un cilindro obtienes círculos", PE1 ha señalado "Si seccionamos una esfera obtenemos una circunferencia" y que PP2 ha apuntado "Quitando los vértices de los prismas, mediante un corte plano, obtenemos triángulos". Cabe señalar que algunos/as docentes han citado que se obtiene más de una forma geométrica en dos dimensiones de un sólido, por ejemplo, PE3 "Si seccionamos un cubo podemos obtener sección triangular, pentagonal, hexagonal…y si seccionamos un tetraedro podemos obtener sección triangular, cuadrada, etc.".

Sin embargo, también hay algunas respuestas de los/as docentes que no han apuntado la figura geométrica plana que se obtendría, bien porque depende de la base del poliedro que se secciona, como ha anotado PC1 "Haciendo cortes paralelos a la base de una pirámide obtienes la figura plana que forma la base de la pirámide", o bien porque depende de por dónde se realice el corte, apuntado PE2 "Se obtienen secciones planas diferentes dependiendo de la distancia al vértice que se seccione en el sólido". Cabe subrayar, que algún/a docente ha indicado que no sabría cómo realmente truncarlo para obtener figuras geométricas planas concretas, como ha indicado PO4 "Se me ocurre que utilizaría los poliedros regulares y con ellos se podrían obtener polígonos regulares, aunque no sé cómo se deberían hacer los cortes”.

Otras relaciones entre elementos del espacio y del plano que han señalado dos profesores/as del curso en comunidad hacen referencia a la generación de formas tridimensionales mediante figuras planas por dos procedimientos. Por una parte, PC3 ha subrayado la generación de ciertos poliedros a partir de figuras geométricas planas, “Con una representación plana puedes construir un poliedro, dando volumen a un cuadrado obtienes un prisma”. Por otra parte, PC2 ha apuntado la obtención de figuras geométricas planas a partir de las sombras producidas por determinados sólidos, “Con sombras, proyectando una luz sobre una pirámide, la sombra es un triángulo”.

En la tabla 3.59 hemos incluido en el apartado de “otras” las respuestas de dos profesores/as en las que si bien se relaciona los sólidos obtenidos truncando sólidos con el sólido de partida también se describe o mencionan en ellas figuras planas obtenidas mediante el truncamiento correspondiente. Por ejemplo, PO1 ha anotado “Podemos truncar los vértices de los poliedros y obtener otro poliedro distinto. Si truncamos por los vértices un poliedro regular convexo obtenemos un poliedro arquimediano. El plano de corte debe ser perpendicular al eje de rotación del sólido que contiene ese vértice (y el opuesto). De esta forma cada vértice original del sólido se convierte en un polígono regular con tantos lados como orden tenía el vértice (número de aristas que incidían en él)”. PO2 ha comentado “Si se trunca los vértices de un cubo mediante planos que pasan por los puntos medios de las aristas adyacentes, se obtiene un cuboctaedro que tiene 6 caras cuadradas y 8 caras triangulares”.

Cabe pues concluirse que en lo que respecta a las relaciones de los elementos del espacio y del plano las respuestas de los/as profesores reflejan que se han centrado principalmente en los modelos que visualizan las relaciones indicando las figuras planas que se obtienen al seccionar o truncar diferentes sólidos. Destacamos que, en el curso en comunidad, se ha centrado alguna respuesta en relacionar las formas geométricas del espacio y las figuras geométricas planas al darle un sentido dinámico a estas últimas o utilizando las sombras de las formas geométricas para la obtención de figuras geométricas planas.

3.2.2.2.5 Relaciones entre figuras geométricas planas

Las tablas 3.61 y 3.62 registran las respuestas de los/las docentes relativas a relaciones entre figuras planas. Las plantillas que se han usado se muestran en la tabla 2.22 mostrada en el subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2.

Docente	DRlH													
	Cg		Ec		Ci		F		Re		M		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1			x								x		x	
PE2	x		x								x			
PE3			x								x		x	
PE4			x								x		x	
PC1			x						x					
PC2			x						x					
PC3			x								x			
PC4			x						x					
PP1			x								x			

PP2			x								x		x	
PP3			x								x			
PP4			x								x			
PO1			x								x		x	
PO2			x								x			
PO3			x								x			
PO4			x								x			

Tabla 3.61. Sobre lo que realizan los profesores cuando se les pide que relacionen figuras planas

Docente	DRlC									
	G		Cf		R		Mo		O	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
PE1	x				x		x			
PE2	x		x				x			
PE3	x				x		x			
PE4	x				x		x			
PC1			x							
PC2			x							
PC3	x						x			
PC4			x							
PP1	x						x			
PP2	x						x			
PP3	x						x			
PP4	x						x			
PO1	x						x		x	
PO2	x						x			
PO3	x						x			
PO4	x						x			

Tabla 3.62. En lo que se centran cuando se relacionan figuras planas

Cabe destacarse que todo el profesorado ha señalado la descomposición de las formas geométricas planas en otras formas geométricas planas. Entre las respuestas tenemos los/as profesores/as que han basado sus relaciones solo en el ejemplo mostrado y las de los/as que se han fijado en determinadas familias de polígonos. Por ejemplo, PO2 ha comentado “Un hexágono regular contiene 6 triángulos equiláteros” o PE2 que ha apuntado “El hexágono está formado por triángulos equiláteros Tienen altura, área, perímetro”. PP3 se ha centrado en los polígonos convexos “Un hexágono regular está formado por seis triángulos equiláteros. Los polígonos convexos se pueden descomponer en triángulos”, y PC3 se ha fijado en los polígonos regulares “Un hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros, los triángulos del hexágono tienen elementos (lados y ángulos) iguales. A los polígonos regulares se les puede inscribir y circunscribir una circunferencia, tienen un ángulo central y sus ángulos interiores miden lo mismo”.

En las respuestas se hace también referencia a los elementos que son iguales o bien a lo que tienen en común las figuras planas implicadas. Por ejemplo, PC1 indica “Un hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros, los triángulos del hexágono tienen todos los elementos (lados y ángulos) iguales. Todos tienen lados, vértices, ángulos y la mayoría diagonales”. Asimismo, PC3, en la transcripción de su respuesta indicada anteriormente, ha señalado la inscripción y suscripción de elementos del plano al indicar “A los polígonos regulares se les puede inscribir y suscribir una circunferencia, tienen un ángulo central y sus ángulos interiores miden lo mismo”.

Las respuestas que hemos marcado como "otras" en la tabla 3.61 informan sobre el uso que se hace de la descomposición indicada para determinar magnitudes como el área o el perímetro. Y ha habido un/a profesor/a que la ha relacionado con los cubrimientos del plano. Por ejemplo, PE3 ha apuntado "El hexágono está formado por triángulos equiláteros. El área se calcula a veces descomponiendo las figuras en otras de la que conoces las fórmulas", o bien, porque se aplica el principio de conservación del área, apuntado por PP2 "Una figura plana la podemos descomponer en varias figuras planas, importantísimo para calcular áreas de figuras planas. También formar figuras planas uniendo varias figuras planas. El hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros". PO1, ha relacionado la descomposición de polígonos con la problemática de rellenar el plano al indicar "Podríamos embaldosar una superficie sin dejar huecos utilizando triángulos equiláteros o utilizando hexágonos. Esto no ocurre con otro tipo de polígonos como el pentágono". Es claro el peso que tiene el pentágono regular en la imagen que tiene este/a profesor/a para el pentágono pues si bien el pentágono regular no rellena el plano, hay pentágonos que sí que lo hacen sin dejar huecos.

En cuanto a los ejemplos que se han indicado, cabe señalarse que todos/as los/as docentes han apuntado la forma geométrica indicada en el enunciado. Los otros ejemplos que se han presentado han sido para indicar específicamente las formas geométricas que se pueden obtener descomponiendo una forma geométrica, como, por ejemplo, las relaciones que ha señalado PC4 "Un trapecio isósceles está formado por dos triángulos iguales y un rectángulo. Un polígono convexo se puede dividir en triángulos trazando diagonales desde un vértice". O los que hemos visto anteriormente que ha apuntado PO1 para llenar el plano o PC3 para marcar relaciones de inscripción y circunscripción.

3.2.2.2.6 Relaciones entre poliedros regulares: dualidad de poliedros

En este subapartado vamos a diferenciar, por una parte, lo relativo a las características que indica el profesorado de los poliedros regulares duales. Por otra parte, los poliedros regulares convexos que, según los/as profesores/as, son duales. Este subapartado se ha llevado a cabo solo en los cursos. Tomando como referencia la tabla 2.24 mostrada en el subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2 se ha cumplimentado la tabla 3.63 sobre las características que, según el profesorado, deben cumplir los poliedros duales.

Docente	DRlPr						
	V	I	A	C	O	Is	D
PC1	x						
PC2		x	x	x		x	
PC3		x				x	
PC4	x		x				
PP1				x			
PP2	x	x				x	
PP3	x	x		x			
PP4		x		x			
PO1	x	x	x			x	
PO2				x			
PO3	x		x	x			x
PO4	.	.	.	.			.

Tabla 3.63. Características que el profesorado de los cursos ha indicado como que deben cumplir los poliedros regulares duales

La tabla 3.63 muestra que las propiedades que más ha señalado el profesorado participante como las que cumplen los poliedros regulares duales son las que describen el modelo que puede construirse de uno de ellos inscrito en el otro incidiendo en la correspondencia entre los vértices y las caras de los poliedros duales y, en menor medida, en que el número de aristas coincide. Ninguno de ellos/as ha señalado la similitud entre el número de lados de las caras de un sólido y el orden de los vértices del otro sólido. Solo se ha remarcado que los vértices de un poliedro se corresponden con los centros de las caras del otro poliedro (6/12), que “el número de vértices de un poliedro coincide con las caras del otro poliedro” (6/12), y que se pueden inscribir un poliedro dentro de otro (6/12). Por ejemplo, PC2 indica “Son los poliedros que se obtienen uniendo los puntos medios de las caras”, especificando además “Que un poliedro debe dar otro y viceversa”. Cabe mencionar que también se ha apuntado, aunque por un número menor del profesorado (4/12) que el número de aristas, coincide, indicado, por ejemplo, por PC4 quien comenta que “las aristas de ambos coinciden”.

Hemos de señalar que un docente, PO3, ha hecho referencia al concepto de autodual, señalando, por un parte, que cuando el dual de una figura es la figura misma se dice que esta es autodual. Por otra parte, ha añadido que el poliedro dual del dual es similar al original. Y de nuevo encontramos un docente (PO4) que ha indicado que no sabe lo que son los poliedros regulares convexos duales.

Cabe destacarse que todos/as los/as profesores/as de los diferentes cursos que han participado en esta investigación han expresado que no conocían relaciones entre los planos de simetría y los ejes de rotación de los poliedros regulares duales; que nunca habían relacionado los planos de simetría de los poliedros regulares ni las esferas en las que se pueden inscribir o circunscribir los planos de simetría. Tampoco han relacionado los ejes de rotación de los poliedros regulares ni los planos de simetría con los ejes rotación. Los profesores del curso en comunidad, que es donde se llevó a cabo un debate más extenso sobre estas relaciones en los poliedros regulares convexos duales, subrayaron que lo ven muy complicado para que ellos puedan entenderlo y sobre todo para el alumnado. Por ejemplo, PC3 ha señalado “Estas relaciones son muy difíciles para secundaria” y PC1 ha comentado “Solo se puede llegar a ver en un tema de oposición”, y PC3 ha añadido “O en un curso de formación para nosotros del CEFIRE de Mauricio”.

La tabla 3.64 registra los pares de poliedros regulares convexos que han indicado los/as profesores/as participantes como aquellos que tienen relación de dualidad. La plantilla que se ha usado se muestra en la tabla 2.23 del subapartado 2.3.2.3 del capítulo 2.

Docente	DRlPd				
	Tt	Co	Oc	Di	Id
PC1	x	x	x	x	x
PC2	x	x	x	x	x
PC3	x	x	x	x	x
PC4	x	x	x	x	x
PP1		x	x	x	x
PP2		x	x	x	x
PP3	x	x	x	x	x
PP4	x	x	x	x	x
PO1	x	x	x	x	x
PO2	x	x	x	x	x
PO3	x	x	x	x	x

PO4	-	-	-	-	-

Tabla 3.64. Pares de poliedros regulares convexos marcados por los profesores con relación de dualidad

Puede observarse que la mayoría de los/as profesores/as (9/12) conocen los pares de poliedros regulares convexos duales. En solo dos respuestas (2/12) no se ha contemplado el tetraedro como dual de sí mismo. Y solamente uno/a de los/as profesores/as ha manifestado que no conoce el tema. Los nombres que han apuntado los/as profesores han sido mayoritariamente tetraedro-tetraedro, cubo-octaedro, dodecaedro-icosaedro. Solamente un profesor, PP3, ha mencionado hexaedro en lugar del cubo. Y un/a profesor/a, PP1, ha especificado el término regular al mencionar el octaedro, dodecaedro e icosaedro.

3.2.3 Clasificación de las formas geométricas

En este último apartado de la sección 3.2 vamos a presentar observaciones sobre la clasificación de formas geométricas extraídas a partir de las respuestas a la tarea TCg3 del profesorado que ha participado en nuestro estudio. Hemos divido nuestro estudio, por un lado, en la clasificación de formas geométricas de tres dimensiones, dando cuenta de ello el subapartado 3.2.3.1. Por otro lado, se ha contemplado la clasificación de las formas geométricas de dos dimensiones, presentado en el subapartado 3.2.3.2.

3.2.3.1 Clasificación de las formas geométricas en tres dimensiones

El estudio de la clasificación de las formas geométricas en tres dimensiones se ha realizado con la tarea TCg3 atendiendo a la cuestión CCCl1 de la tabla 2.2 del apartado 2.2.3. Se ha partido de lo más general para después trabajar la clasificación de determinadas familias en particular. Primero se ha analizado como se clasifican los sólidos (subapartado 3.2.3.1.1). Una vez examinada esta clasificación nos hemos centrado en las clasificaciones que se establecen en el mundo de los poliedros y de los que no lo son (subapartado 3.2.3.1.2). Por último, hemos analizado la clasificación en el mundo de los prismas y las pirámides, familias de poliedros que aparecen en el estudio de los poliedros en los libros de texto de secundaria (subapartado 3.2.3.1.3).

3.2.3.1.1 Clasificación de los sólidos

La tabla 3.65 registra las respuestas del profesorado de los cursos relativas a las familias de sólidos que establecen cuando se les pide que clasifiquen los sólidos.

Clasificación	PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
a	x	x			x		x	x				x
b									x		x	
c			x	x		x						
d										x		

Tabla 3.65. Clasificación de los sólidos por parte de los profesores/as participantes: a) poliedros y cuerpos de revolución; b) poliedros y cuerpos redondos; c) poliedros y cuerpos redondos o de revolución, y d) otras

La tabla 3.65 muestra que a la hora de clasificar los sólidos hay profesores/as que los separan en dos familias, los poliedros y cuerpos de revolución (6/12), como por ejemplo PP4 que ha indicado “en poliedros si está formado por polígonos o cuerpo de revolución si está formado a partir de una figura plana que gira alrededor de un eje”. También se observa que hay docentes que los clasifican en poliedros y cuerpos redondos (2/12) como PO3 “Los poliedros o cuerpos planos, que son cuerpos geométricos compuestos exclusivamente por figuras geométricas planas; como por ejemplo el cubo; los cuerpos redondos, que son cuerpos geométricos compuestos total o parcialmente por figuras geométricas curvas; como por ejemplo el cilindro, la esfera o el cono”. Asimismo, hay docentes que han utilizado dos notaciones para los sólidos que no son poliedros, indicando poliedros y cuerpos redondos o de revolución (3/12), como PP2 que ha anotado “Poliedros sus caras son polígonos: prismas, pirámides, tetraedro, pentaedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro; cuerpos de redondos o de revolución si algunas de sus caras son curvas o se obtienen a partir de una figura plana que gira alrededor de un eje”. En la clasificación *d* el/la docente PO2 también ha establecido esta distinción entre familias de poliedros y cuerpos de revolución o redondos, pero no los ha nombrado de manera explícita; lo ha hecho indicando ejemplos correspondientes a estas familias pues ha distinguido “Prismas, pirámides, conos, cilindros y esferas” indicando que el criterio que ha utilizado ha sido “Tienen todas las caras planas (prismas, pirámides) o al menos alguna no plana y sí curva (cono, cilindro y esfera)”. Podemos señalar que la mayor parte del profesorado ha distinguido los poliedros y los que no lo son, y para esta familia de sólidos se ha utilizado el nombre de cuerpos de revolución, en menor medida, el de cuerpos redondos, y algunos/as docentes los han denominado de las dos maneras.

La tabla 3.66, construida a partir de la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2, registra los ejemplos, características, ideas y/o definiciones de las familias de sólidos que se han indicado en las respuestas de los profesores.

Código				PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
DCl	C	1	A												
			B												
			C												
		2	A												
			B												
			C												
		3	A			x	x		x			x	x	x	
			B												
			C												
		4	A												
			B												
			C												
		5	A	x	x	x	x	x	x	x	x				x
			B												
			C												
	T	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B												
		2	A												
			B												
		3	A												
			B												
		4	A												
			B												
	S	1	A			x	x		x			x	x	x	
			B												
		2	A						x				x	x	x
			B												
		3	A												

			B												
		4	A												
			B												
		5	A												
			B												
		6	A	x	x	x	x	x	x	x	x				
			B												
	D		A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B												

Tabla 3.66. Sobre la clasificación de los sólidos en poliedros y cuerpos de revolución: características, ideas y/o definiciones

Cabe señalarse que, aunque se clasifique el mismo universo y se lleguen a establecer las mismas familias, el tipo de criterio que se usa al clasificar para llegar a establecer los sólidos de revolución y/o los cuerpos redondos incide en aspectos diferentes. Se puede observar en las respuestas de PO3 y PP4 señaladas anteriormente. Estas se basan en atributos de las caras o destacan cómo están formados los poliedros y cómo se generan los cuerpos de revolución (respuesta que incluimos en la figura 3.65 como "otros").

En relación con los tipos de clasificaciones observamos que la mayoría del profesorado ha llevado a cabo una clasificación partición, en la que un sólido pertenece a los poliedros o a los cuerpos de revolución/redondos, según la anotación empleada. El/la único/a docente que no ha hecho esta bipartición de nombres de los sólidos ha sido PO2, como ya hemos indicado anteriormente. Cabe mencionar que PO2 (dentro de los que tienen caras planas) y PO4 (dentro de los poliedros) han señalado solo a prismas y pirámides; se ha centrado en lo que aparece en los libros de textos de secundaria.

Por lo que respecta a lo que se señala en la clasificación de los sólidos hemos codificado como propiedades (6/12) cuando han indicado el tipo de figuras geométricas, planas o curvas que forman las clases establecidas, como PO2 al comentar "Tienen todas las caras planas (prismas, pirámides) o al menos alguna no plana y sí curva (cono, cilindro y esfera)". Las respuestas que hemos anotado que señalan ejemplos (4/12) hacen referencia a que han indicado ejemplos de las formas geométricas que pertenecen a cada familia, como, por ejemplo, a PP2 al apuntar ejemplos de poliedros "Prismas, pirámides, tetraedro, pentaedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro". Las respuestas que hemos identificado como otras hacen mención a como se generan un tipo de formas geométricas y como se generan los otros tipos.

Cabe destacarse que todo el profesorado ha dado alguna idea/definición para las familias de sólidos que han establecido, en las que se destaca la forma de las caras y/o la manera de generarlos, como se puede observar en las respuestas incluidas en este subapartado, y como, por ejemplo, la de PC1 que ha indicado "En poliedros si el cuerpo está limitado por polígonos o en cuerpos de revolución si se obtiene a partir de una figura plana que gira alrededor de un eje".

3.2.3.1.2 Clasificación de los poliedros y los no poliedros

La tabla 3.67 muestra las clasificaciones que el profesorado participante ha establecido al clasificar los poliedros. Se observa que las respuestas las hemos agrupado según el universo que se considera al clasificar y las clasificaciones particiones, dicotómicas o no, que se han establecido, que cubren o no el universo de partida. Los poliedros se han clasificado en poliedros regulares e irregulares (a), según el número de caras que tiene el poliedro (b) y también se han separado los poliedros cóncavos y convexos (c). También se clasifica los poliedros regulares (d) y los poliedros irregulares (e) y se establece como una familia de poliedros los poliedros semirregulares (arquimedianos) (f).

Clasificación	PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
a	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
b		x		x							x	
c		x		x		x	x		x	x		
d	x		x		x					x		
e	x		x		x				x	x		x
f			x									

Tabla 3.67. Clasificación de los poliedros por parte de los profesores/as participantes: a) poliedros regulares e irregulares; b) se clasifica según el número de caras; c) poliedros cóncavos y convexos; d) se clasifican los poliedros regulares; e) se clasifican los poliedros irregulares, y f) Se establecen los poliedros semirregulares (arquimedianos)

Las características que se indican de la clasificación que se establece de los poliedros y no poliedros se registran en la tabla 3.68, elaborada usando la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2.

Código				PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
DCl	C	1	A		x		x		x	x					
			B												
			C									x	x		
		2	A										x		
			B		x	x	x							x	
			C	x				x	x	x	x	x			x
		3	A												
			B												
			C												
		4	A		x		x							x	
			B												
			C												
		5	A												
			B												
			C												
	T	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B												
		2	A												
			B												
		3	A												
			B												
		4	A												
			B												
	S	1	A		x		x		x	x			x	x	
			B		x	x	x							x	
		2	A		x	x	x	x					x		x
			B	x											
		3	A												
			B												
		4	A												
			B												
		5	A												
			B												

		6	A												
			B												
	D		A		x		x		x	x			x	x	
			B		x	x	x							x	

Tabla 3.68. Características que se indican sobre las clasificaciones de los poliedros que realiza el profesorado

Como puede apreciarse en las tablas 3.67 y 3.68, todo el profesorado ha hecho referencia a la clasificación dicotómica de los poliedros que lleva a establecer las clases disjuntas de los poliedros regulares e irregulares. Ahora bien, las respuestas dadas las consideramos muy incompletas y con errores. Por ejemplo, PC2 señala que “Los poliedros regulares son aquellos en que todas las caras son polígonos regulares iguales en forma y tamaño y poliedros irregulares son aquellos que no cumplen lo anterior”, PC3 indica que “Los poliedros regulares son aquellos que las caras son polígonos regulares iguales”, PC4 responde que “Poliedro regular es aquel que las caras son polígonos regulares iguales y todas sus aristas son de igual longitud y poliedro irregular es aquel que los polígonos que forman las caras no son todos regulares iguales”, PO2 indica que “Lo que diferencia los poliedros regulares de los que no lo son es si tienen o no todas las caras que son polígonos regulares idénticos y en cada vértice concurre el mismo número de caras” y, PO3 subraya que “En los poliedros regulares todas las caras son iguales” matizando para los poliedros irregulares “no se trata de que todas sus caras sean distintas, sino de que tienen caras que comprenden más de un tipo de figuras planas”. De estas respuestas se observa que para algunos/as de estos/as docentes (PC2, PC3, PC4) todos los deltaedros serían poliedros regulares, ya que les faltaría añadir que el orden de los vértices es el mismo para todos los vértices. También hemos de señalar que PO3 debería añadir para los poliedros regulares que las caras también han de ser regulares, así como, que el orden de los vértices es el mismo para todos los vértices.

La tabla 3.67 muestra también que hay una cantidad pequeña de profesores/as (3/12) que clasifican los poliedros según el número de caras, realizando de esta forma una clasificación partición basada en un criterio cuantitativo lo que lleva a que se expresen con terminología cuantitativa. El profesorado del curso en comunidad que se ha referido a esta clasificación ha indicado ciertos ejemplos, como tetraedro, pentaedro, hexaedro, etc. Sin embargo, el profesor del curso online que ha señalado este tipo de clasificación, tan solo ha dicho que conoce la clasificación según el número de caras que tenga el poliedro.

Respecto de la clasificación que distingue los poliedros cóncavos y convexos, cabe señalarse que han sido dos profesores/as de cada curso los que se han referido a ella (6/12). Se han expresado tres ideas/definiciones para caracterizar estas familias de poliedros con un fuerte componente visual y en solo una de ellas se hace referencia a los ángulos diedros del poliedro. Por ejemplo, PC2 y PP2 apuntan que el poliedro convexo puede apoyarse sobre cualquiera de sus caras y en el poliedro cóncavo hay varias caras que no tocarán la superficie sobre la que se apoya. PP3 aclara que “Un poliedro convexo es aquel que si no tiene ninguna cara que al prolongarla cortara al poliedro y cóncavo si tuviera alguna cara que al prolongarla cortara al poliedro”. La definición menos visual es la indicada por PC4 quien expresa que “Un poliedro es convexo si toda recta solo pueda cortar a su superficie en dos puntos y el poliedro es cóncavo cuando una recta corta su superficie en más de dos puntos, por lo que posee algún ángulo diedro entrante”.

Si tomamos como universo de clasificación los poliedros irregulares o no regulares, cabe señalarse que en la mayoría de las respuestas (PC1, PC3, PP1, PO1) solo se han indicado familias de poliedros que se estudian en la ESO (especialmente los prismas y pirámides); se han considerado que corresponden a poliedros irregulares, sin dar otras explicaciones. Uno/a de los/as profesores/as del curso en comunidad, PC1, ha señalado que los clasificaría en prismas, paralelepípedos y pirámides, lo que indica que sitúa a los paralelepípedos al mismo nivel que los prismas cuando son un tipo de prisma, y un profesor online, ha distinguido también los antiprismas y ha especificado atributos que podrían cumplir o no las familias correspondientes, pero no ha delimitado las familias de poliedros irregulares que corresponderían a los atributos señalados. Esto es, PO1 ha indicado "Aunque en clase no lo hago, los antiprismas también se podrían clasificar dentro de los irregulares, aunque la cosa se puede complicar mucho; caras iguales, pero vértices de distinto orden, vértices iguales pero caras distintas..."

El profesorado que se ha fijado en los poliedros regulares (PC1, PC3, PP1 PO2), solo lo ha hecho enumerando ejemplos de esta familia de poliedros y/o haciendo referencia a su número de caras. Por ejemplo, PC1 ha indicado "Tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro". PC2 expresa "Se clasifican atendiendo al número de caras, a título de ejemplo tenemos a tetraedro, hexaedro, etc.". Y solo un profesor, PC3, modifica una de las condiciones de los poliedros regulares, indica que las caras no son iguales, para dar lugar a los poliedros arquimedianos, aunque ni los nombra ni señala cuantos hay.

La tabla 3.69 registra las respuestas dadas por el profesorado de los cursos a la clasificación de los sólidos que no son poliedros.

Clasificación	PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
Cilindros	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Conos	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Esferas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Otros				x								

Tabla 3.69. Clasificación de lo sólidos no poliedros

Puede constatarse que todo el profesorado al clasificar los sólidos no poliédricos señala una clasificación partición en la que se indican las familias que se establecen, los cilindros, los conos y las esferas, sin especificar las diferencias entre ellos. De las respuestas de estos/as docentes cabe comentar la de PO1 que ha distinguido en los cilindros los rectos de los inclinados y la de PC4 que ha ampliado estas familias con "Otras", como "El elipsoide, el paraboloide, el hiperboloide y el toro".

3.2.3.1.3 Clasificación de los prismas y las pirámides

Relativo a las clasificaciones que señala el profesorado de los prismas y las pirámides se observa que para ambas familias coinciden los criterios aplicados. En la tabla 3.69, se da cuenta de ellos y en la tabla 3.70, construida a partir de la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2, se registran las respuestas dadas referidas a las clasificaciones establecidas.

Clasificación	PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
a	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
b		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
c		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
d		x		x	x	x		x	x		x	

Tabla 3.70. Clasificación por parte de los profesores/as participantes según a) el número de lados del polígono de la/s base/s; b) la inclinación; c) la regularidad de la/s bases, y d) la concavidad y convexidad

Código				PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
DCl	C	1	A		x	x	x	x	x	x	x		x		
			B												
			C									x		x	x
		2	A												
			B		x	x	x	x	x	x	x		x		
			C									x		x	
		3	A												
			B												
			C												
		4	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B												
			C												
		5	A												
			B												
			C												
	T	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B												
		2	A												
			B												
		3	A												
			B												
		4	A		x		x	x	x		x				
			B												
	S	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B												
		2	A	x	x	x	x		x			x	x	x	
			B												
		3	A												
			B												
		4	A												
			B												
		5	A												
			B												
		6	A												
			B												
	D		A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B		x	x	x	x	x	x	x		x		

Tabla 3.71. Sobre las clasificaciones que establece el profesorado de los prismas y las pirámides

De las tablas 3.70 y 3.71 se desprende que la mayoría de las clasificaciones que se establecen para los prismas y las pirámides se basan en criterios que centran la atención en el polígono de la/s base/s. estableciéndose así una analogía con las clasificaciones que se hacen de los polígonos en el plano. Cabe señalarse que todo el profesorado clasifica los prismas y las pirámides fijándose en el número de lados de los polígonos de las bases. Algunos/as profesores/as (PC1, PC2, PC3, PC4, PP2, PO1, PO2, PO3) han señalado los nombres que se les asigna a las familias establecidas, como PC1, que ha indicado prisma o pirámide triangular, cuadrangular, pentagonal…

La mayoría del profesorado hace también una clasificación partición de los prismas y pirámides en los que la regularidad o no de los polígonos de las bases hace que el prisma o la pirámide se considere regular o no (PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PP3. PP4, PO2) sin exigir otro atributo para que estas familias se nombren como prismas y/o pirámides regulares. Solo un/a profesor/a, PP3, ha indicado un nuevo atributo al señalar que el prisma o la pirámide para que sea regular ha de tener la/las base/es regulares y ser recta/o, pero en su respuesta tampoco se indican los atributos necesarios y suficientes para que los poliedros correspondientes pertenezcan a los poliedros regulares.

Además, hay profesores/as que de nuevo centran la atención en las bases al establecer una clasificación, con fuerte componente visual, en la que se distinguen los prismas o pirámides cóncavos o convexos. Los que han señalado la razón de esta clasificación (PC2, PC4, PP1, PP2, PP4) aclaran que atienden a que el polígono de la base o bases sea cóncavo o convexo, respectivamente. Cabe señalarse que hay profesores/as (PO1, PO3) que no han especificado la diferencia entre cóncavos y convexos.

Las tablas 3.70 y 3.71 muestran también que hay una tendencia a clasificar los prismas y las pirámides en rectos y oblicuos (11/12), criterio basado también en observaciones/percepciones con fuerte componente visual. En las ideas/definiciones que se indican para las familias de “los rectos” y los “oblicuos” se expresan atributos sobre la forma de sus caras laterales, en término de la altura de los prismas o pirámides o corresponden a atributos visuales. Para los prismas, algunos profesores distinguen estas familias indicando atributos relativos a los ángulos diedros de las caras laterales y las bases o a relaciones de perpendicularidad entre ellas. Por ejemplo, docentes como PC4, PP1 y PP2, expresan sus ideas de prismas rectos y oblicuos a partir de las figuras planas que forman las caras laterales, indicando PC4 que las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos y/o cuadrados, y en los prismas oblicuos son paralelogramos. Para las pirámides, los que han especificado la diferencia entre rectas y oblicuas en general han comentado que en las rectas las caras laterales son triángulos isósceles, como PC2, PC3, PC4, PP1, PP2 y PO2. Por otro lado, profesores/as, como PP3 y PP4, han indicado que los prismas y las pirámides se clasifican en rectos o inclinados según tengan o no inclinación. Un/a docente, PC3, ha indicado que en los prismas rectos la altura siempre está sobre las bases, en el prisma oblicuo la altura puede estar fuera de una base y en las pirámides rectas la altura cae en el centro de la base. Para los prismas, PC2 y PO2 han explicado sus respuestas a partir de los ángulos que forman las caras laterales con las bases, señalando PC2 que en los prismas rectos las caras laterales son perpendiculares a la base, mientras que en los prismas oblicuos las caras laterales forman un ángulo con las bases distinto a los 90°. El resto del profesorado que ha indicado esta forma de clasificar no ha explicado sus respuestas.

Cabe resaltarse que dos profesores/as, PC3 y PP4, se centran en un tipo de prismas, los paralelepípedos. PC3 remarca que sus caras son paralelogramos pudiendo se rectos y oblicuos, pero sin especificar los tipos que hay dependiendo de los polígonos que formen las caras. En cambio, PP4 ha apuntado que pueden ser el ortoedro, el romboedro y el cubo.

3.2.3.2 Clasificación de las formas geométricas en dos dimensiones

Si nos centramos ahora en las formas geométricas planas, nuestra investigación se ha dirigido a estudiar la clasificación que realizan los/las profesores/as participantes de los polígonos, los triángulos y los cuadriláteros. En los cursos también se ha estudiado la clasificación de los hexágonos.

Conforme a las respuestas que ha apuntado el profesorado, en las tablas 3.72 y 3.73, construida a partir de la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2, se expone cómo clasifican los/las docentes los polígonos.

Docente	Regularidad	Nº lados	Amplitud ángulos
PE1		x	
PE2	x	x	
PE3	x	x	
PE4		x	x
PC1	x	x	
PC2	x	x	x
PC3	x	x	x
PC4	x	x	x
PP1	x	x	x
PP2	x	x	x
PP3	x	x	
PP4	x	x	x
PO1	x	x	x
PO2	x	x	
PO3	x	x	
PO4		x	

Tabla 3.72. Criterios usados por el profesorado participante para la clasificación de los polígonos

Código				PE				PC				PP				PO			
				1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
DCl	C	1	A					x	x	x	x	x	x	x	x				
			B																
			C				x									x		x	
		2	A					x	x	x	x	x	x	x	x				
			B																
			C		x	x										x	x	x	
		3	A																
			B																
			C																
		4	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
			C																
		5	A																
			B																
			C																
	T	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
		2	A																
			B																
		3	A																
			B																
		4	A																

			B																
	S	1	A					x	x	x	x	x	x	x	x				
			B																
		2	A					x	x	x	x					x	x	x	
			B																
		3	A																
			B																
		4	A																
			B																
		5	A																
			B																
		6	A																
			B																
	D		A					x	x	x	x								
			B																

Tabla 3.73. Sobre las clasificaciones que realiza el profesorado de los polígonos

En las tablas 3.72 y 3.73 se aprecia que las clasificaciones que han propuesto los/as profesores/as para los polígonos centran la atención en el número de lados, en su regularidad y en la convexidad. Solo los/as profesores/as del curso en comunidad y presencial han indicado propiedades para distinguir los polígonos regulares e irregulares, así como los polígonos cóncavos y convexos.

Todo el profesorado realiza una clasificación partición basándose en el número de lados que tiene el polígono. La mayor parte del profesorado en comunidad y online ha mencionado algunos de los nombres que reciben estos polígonos (PC1, PC2, PC3, PC4, PO1, PO2, PO3), por ejemplo, PC2, ha indicado que "Según su número de lados en triángulo (3 lados), cuadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), etc.".

Asimismo, el profesorado ha concretado una clasificación partición apoyándose en los criterios cualitativos de la igualdad o no de sus elementos (13/16). Los/as profesores/as del curso en comunidad y presencial son los que han señalado la diferencia entre polígonos regulares e irregulares. Por ejemplo, PC1 ha indicado "Los polígonos regulares tienen todos los lados y ángulos iguales mientras que los irregulares tienen algún lado o ángulo diferente".

Igualmente, se ha indicado una clasificación partición que tiene una fuerte componente visual, indicando la distinción entre cóncavos y convexos, centrándose en observaciones/percepciones de los ángulos. Como ha pasado en la anterior clasificación, los/as docentes que han apuntado una diferencia entre cóncavos y convexos han sido los/as profesores/as del curso en comunidad y presencial, señalando, por ejemplo, PC4, que "Según sus ángulos en convexo si tiene todos sus ángulos menores de 180º y cóncavo si alguno de sus ángulos es mayor de 180º".

En cuanto a los triángulos, en la tabla 3.74 se presenta los criterios usados por el profesorado al clasificarlos y, en la tabla 3.75, construida a partir de la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2, registramos las respuestas dadas por el profesorado sobre las clasificaciones que realiza de estas formas geométricas.

Docente	Amplitud Ángulos	Longitud/igualdad lados	Igualdad de ángulos
PE1	x	x	
PE2		x	
PE3	x	x	
PE4	x	x	
PC1	x	x	
PC2	x	x	
PC3	x	x	
PC4	x	x	
PP1	x	x	
PP2	x	x	
PP3	x	x	
PP4	x	x	
PO1			x
PO2	x	x	
PO3	x	x	
PO4	x	x	

Tabla 3.74. Criterios usados por el profesorado participante para la clasificación de los triángulos

Código				PE				PC				PP				PO			
				1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
DCl	C	1	A																
			B																
			C																
		2	A																
			B																
			C																
		3	A																
			B																
			C																
		4	A																
			B																
			C																
		5	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
			C																
	T	1	A	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
		2	A																
			B																
		3	A																
			B																
		4	A																
			B																
	S	1	A					x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
		2	A	x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
		3	A																
			B																
		4	A																
			B																
		5	A																
			B																
		6	A																
			B																

	D	A					x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		B																

Tabla 3.75. Sobre las clasificaciones que realiza el profesorado de los triángulos

Las tablas 3.74 y 3.75 muestran que todos/as realizan clasificaciones particiones. Los dos tipos de clasificaciones que mayoritariamente ha indicado el profesorado se centran en la medida o amplitud de los ángulos o se atiende a la longitud de los lados. La mayor parte del profesorado ha indicado que realiza estas dos clasificaciones, sin embargo, como se puede observar en la tabla 3.74 algún/a docente solo ha señalado que realiza una de las dos. Cabe señalarse que solo ha habido un/a docente (PO1) que ha centrado la clasificación en función de la igualdad de sus ángulos. Entre las respuestas encontramos, por un lado, aquellas en las que solamente se han indicado los nombres que reciben los triángulos (PE1, PE2, PE3, PE4), por ejemplo, PE1 ha señalado que los clasifica en "Acutángulo, rectángulo u obtusángulo" y en "Equilátero, isósceles y escaleno". Por otro lado, las de los/as profesores/as que solo han indicado el criterio (PC2, PC4), por ejemplo, PC2 ha comentado "Por el número de lados iguales y desiguales" y "Por el tipo de ángulos". El resto del profesorado ha indicado el criterio y los nombres, especificando algunos de estos/as profesores, como son esos triángulos. Por ejemplo, PO4 ha anotado que "Según el tamaño de sus lados se clasifican en: equiláteros, los tres lados iguales; isósceles: dos lados iguales y uno distinto y escalenos: los tres lados diferentes", mientras que "Según sus ángulos se clasifican en: acutángulos: los tres ángulos agudos; rectángulo: un ángulo recto y obtusángulo: un ángulo obtuso".

Si nos fijamos en los cuadriláteros, en la tabla 3.76 se muestran los criterios usados por el profesorado al clasificarlos.

Docente	Lados	Ángulos	Paralelismo	Inscripción	Conc/convex	Sin criterio
PE1	-	-	-	-	-	-
PE2			x			
PE3			x		x	
PE4			x		x	
PC1						x
PC2			x			
PC3						x
PC4			x		x	
PP1			x			
PP2			x			
PP3	x		x			
PP4			x			
PO1				x		
PO2			x			
PO3			x			
PO4					x	

Tabla 3.76. Criterios con los que han clasificado los cuadriláteros

La tabla 3.77, construida a partir de la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2, registra las respuestas de los/as profesores/as sobre las clasificaciones que se establecen de los cuadriláteros.

Código				PE				PC				PP				PO			
				1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
DCl	C	1	A								x								x
			B																
			C			x	x												
		2	A		x	x	x		x		x	x	x	x	x		x	x	x
			B																
			C																
		3	A																
			B																
			C																
		4	A																
			B																
			C																
		5	A					x		x						x			
			B																
			C																
	T	1	A		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
		2	A																
			B																
		3	A																
			B																
		4	A																
			B																
	S	1	A		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																
		2	A					x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x
			B																
		3	A							x									
			B																
		4	A																
			B																
		5	A																
			B																
		6	A																
			B																
	D		A		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
			B																

Tabla 3.77. Sobre las clasificaciones que realizan los/as profesores/as de los cuadriláteros

Las tablas 3.76 y 3.77 muestran que una gran parte del profesorado (12/16) enfoca la clasificación de los cuadriláteros con un criterio cualitativo desde el número de lados paralelos que tienen. Algunos, como PC2, PC4, PP2, PP3, PP4, PO2 y PO3, distinguen estos en trapezoides, trapecios y paralelogramos. Otros, PE2, PE3 y PE4, solo han indicado el criterio que usan para clasificar; señalan que se clasifican según los lados que tenga paralelos para luego tener en cuenta los que tenga iguales. Y un tercer grupo, PP1 y PO4, han diferenciado entre paralelogramos y no paralelogramos, al dividir los que tienen todos los lados opuestos paralelos de los que no; PP1 dentro de los no paralelogramos, ha diferenciado entre trapecios y trapezoides y PO4 ha especificado que la clasificación se establece en los cuadriláteros convexos.

Al clasificar los paralelogramos, solo algunos/as profesores/as (4/16) han establecido para los paralelogramos una clasificación partición al separar los romboides, los rectángulos,

los rombos y los cuadrados (PC2, PP2 y PP3) o los paralelogramos en rectángulos, rombos y cuadrados (PC4). Ahora bien, dos profesores del curso presencial (PP1 y PP4) han dado respuestas en las que las relaciones que se establecen entre los cuadrados con los rombos y con los rectángulos son relaciones inclusivas. PP1 ha situado dentro de los paralelogramos a los romboides, rectángulos y rombos, señalando que los cuadrados son rectángulos y rombos, y PP4 ha situado también a los cuadrados como un tipo de rombos y rectángulos. También solo algunos/as profesores/as (5/16) han distinguido los trapecios en tres tipos (PC4, PP2, PP4), trapecios rectángulos, escalenos e isósceles, o solo en dos (PP1, PP3), los trapecios rectángulos y los isósceles (PP1) o los trapecios escalenos y los isósceles (PP3). Cabe señalarse que hay dos docentes (PC3 y PC1) que no han separado los tipos de paralelogramos de los trapecios al organizar los cuadriláteros en cuadrados, rombos, rectángulos, romboides, trapecios y trapezoides. PC1 distingue los cuadrados, rombos, rectángulos, romboides, trapecios y trapezoides, sin hacer divisiones dentro de estas formas geométricas. Y PC3 clasifica en cuadrados, rombos, rectángulos, paralelogramos, trapecios y trapezoides, distinguiendo dentro de los trapecios a los trapecios rectángulos y los trapecios escalenos.

Otra clasificación que han señalado algunos/as profesores/as (PE3, PE4, PC4 y PO4) para los cuadriláteros es la que lleva a distinguir los cuadriláteros en cóncavos y convexos (véase la tabla 3.76), si bien solo dos de ellos/as han expresado una idea/definición para cada una de las clases basada en el tipo de ángulos que tienen o en un atributo visual. PC4 ha apuntado que “Los cóncavos tienen un ángulo mayor de 180º y los convexos todos los ángulos menores de 180º” y PO4 que “Los polígonos convexos se caracterizan porque cualquier segmento que une dos puntos del polígono está contenido totalmente en él”, destacando que “los convexos se dividen en paralelogramos (rectángulos, rombos y romboides) y no paralelogramos (trapecios y trapezoides)”. Y solo un/a profesor/a, PO1 ha anotado también una clasificación partición dividiendo los cuadriláteros en “Inscriptibles (en una circunferencia) y no inscriptibles” refiriéndose a que se pueden inscribir o no en una circunferencia.

La tabla 3.77 muestra que las explicaciones que se dan para explicar las clasificaciones de los cuadriláteros que se hacen son muy pobres. Los ejemplos que se indican se usan para nombrar o explicar las figuras y un docente ha realizado dibujos de algunos cuadriláteros sin dar más explicaciones. Las propiedades que expresan se reducen a la usada como criterio o criterios para clasificar o a alguna propiedad y/o idea/definición de uno de los tipos de cuadriláteros establecidos. Por ejemplo, PC2 indica que los paralelogramos son cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos, PP1 señala como ejemplos de paralelogramos al romboide indicando que es un paralelogramo que no tiene ni todos los lados iguales ni los cuatro ángulos rectos y PP2 especifica que el rectángulo tiene sus lados iguales dos a dos, los ángulos rectos y diagonales iguales.

Respecto de la clasificación de los hexágonos, en la tabla 3.78 mostramos las familias que han establecido los/las profesores/as de los cursos.

Docente	Regulares/irregulares	Cóncavos/convexos
PC1	-	-
PC2	x	
PC3	x	
PC4	x	x
PP1	x	
PP2	-	-
PP3	-	-
PP4	-	-
PO1	x	
PO2	x	
PO3	-	-
PO4	x	

Tabla 3.78. Clasificación de los hexágonos. Familias establecidas por el profesorado de los cursos

Las explicaciones dadas por los/as docentes se han registrado en la tabla 3.79, elaborada a partir de la plantilla de la tabla 2.20 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2.

Código				PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
DCl	C	1	A				x								
			B												
			C												
		2	A		x		x	x					x		x
			B												
			C			x						x			
		3	A												
			B												
			C												
		4	A												
			B												
			C												
		5	A												
			B												
			C												
	T	1	A		x	x	x	x				x	x		x
			B												
		2	A												
			B												
		3	A												
			B												
		4	A												
			B												
	S	1	A		x		x	x					x		x
			B												
		2	A												
			B												
		3	A												
			B												
		4	A												
			B												
		5	A												
			B												
		6	A												
			B												
	D		A		x		x	x					x		x
			B												

Tabla 3.79. Sobre las clasificaciones que realiza el profesorado de los hexágonos

Las tablas 3.78 y 3.79 muestran que los/as profesores/as de los cursos señalan solo clasificaciones de los hexágonos que corresponden a particiones y que el criterio más señalado ha sido el que hace referencia a la regularidad o irregularidad de los hexágonos (7/12). Cabe señalar respuestas en las que se han expresado los dos requisitos para que un polígono sea regular pero que para un hexágono irregular se han negado ambos requisitos, en vez de uno de ellos al menos y aquellas en las que no se ha explicado la respuesta. Por ejemplo, PP1 ha señalado “El hexágono regular tiene todos sus lados y sus ángulos iguales, mientras que el hexágono irregular no tiene ni todos sus lados ni todos sus ángulos iguales” y PO2 ha anotado “Regular: tiene lados y ángulos iguales, irregular: no cumple lo anterior”. PC1 revela “No me acuerdo de esta clasificación”, y PC3 expresa “No suelo clasificarlos, de hacerlo es en regulares e irregulares”. Solo un profesor (PC4) ha indicado la clasificación que los separa en los cóncavos y los convexos, utilizando como criterio el relativo a la medida de sus ángulos. Apunta que “En relación con los ángulos, si tiene alguno que es mayor 180º o, por el contrario, todos son menores de 180º se separan en cóncavos y convexos”.

3.3 Sobre la enseñanza de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones de formas geométricas de profesores de ESO

Con respecto a nuestro tercer objetivo presentamos esta sección que contempla la información que ha aportado el profesorado de nuestra investigación referida a la enseñanza de los contenidos geométricos implicados en nuestro estudio relativos a la descripción, la clasificación de las formas geométricas y al establecimiento de relaciones entre ellas.

En los apartados 3.3.1 a 3.3.4 nos centramos en respuestas a cuestiones que el/la profesor/a puede plantearse previo a la enseñanza en la planificación de la misma. Estas se refieren a lo que se pretende con la enseñanza de estos contenidos, a cómo se inicia el estudio y a la interacción que hay entre el alumnado y el profesorado (apartado 3.3.1), los contenidos que se imparten (apartado 3.3.2), los materiales que se utilizan para desarrollar la enseñanza (apartado 3.3.3) y a aspectos de conocimientos previos y aprendizaje (apartado 3.3.4). Y en los apartados 3.3.5 a 3.3.7 exploramos opiniones al respecto expresadas como respuesta a cuestiones planteadas a partir de recursos que se han presentado al desarrollar los cursos. Estos corresponden a libros de texto (apartado 3.3.5), problemas en contexto (3.3.6) y/o aparecen en la red procedentes de la investigación (apartado 3.3.7).

3.3.1 Iniciando la enseñanza de contenidos geométricos. Lo que se pretende

Como hemos señalado al comienzo de esta sección, vamos dividir este apartado en tres subapartados, atendiendo a lo que se pretende con la enseñanza de estos contenidos (subapartado 3.3.1.1), a la manera de introducir en su estudio (subapartado 3.3.1.2) y a la interacción profesorado/alumnado en la enseñanza/aprendizaje de los mismos.

Cabe aclararse que todo el profesorado ha señalado que el establecimiento de relaciones se introduce conjuntamente con la descripción y clasificación, por lo que en los subapartados no se hacen comentarios específicos sobre este contenido geométrico.

3.3.1.1 Lo que se pretende con la enseñanza/aprendizaje de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones

Las respuestas a las cuestiones CED3 y CECl3 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) que se refieren a esta problemática las hemos agrupado como se muestra en las tablas 3.80 y 3.81 según que correspondan a objetivos de la descripción o de la clasificación respectivamente. Cabe señalar que para algunos/as docentes se ha registrado su respuesta en más de una columna de estas tablas.

Docente	Contenidos	Razonar/comprender	Aplicación	Descubrir
PC1	x			
PC2	x			
PC3	x	x		
PC4		x		x
PP1	x	x		
PP2	x	x		
PP3	x		x	
PP4	x			
PO1	x	x		
PO2	x			
PO3		x		x
PO4	x			

Tabla 3.80. Objetivos que se pretenden por parte de los/as profesores/as con la descripción

La tabla 3.80 muestra que para el profesorado participante la descripción se enseña especialmente para que el alumnado conozca las características de las formas geométricas que se proponen en el currículum (10/12). Entre las respuestas podemos destacar a PC1 que indica “Con la descripción se pretende que el alumnado aprenda las características de las figuras geométricas y a describirlas”. También cabe destacar que la mitad de las respuestas (6/12) han ido enfocadas a que con la descripción los alumnos/as aprendan a razonar o reflexionar, por ejemplo, PP2 ha indicado que “Al describir el alumno puede mejorar su razonamiento y expresión”. Asimismo, encontramos, aunque en menor número de respuestas (2/12), que con la descripción los/as alumnos/as aprenden a descubrir características de las formas, por ejemplo, PC4 ha señalado que con “La descripción se aprende a hallar y razonar las propiedades de las figuras geométricas”. Finalmente cabe indicar que ha habido un docente (PP3) que ha señalado que con la descripción se pretende que esta se pueda aplicar a otras partes de las matemáticas y en la vida cotidiana, matizando como ejemplo, cuando se quiere explicar cómo es un objeto.

En cuanto a los objetivos de la clasificación, la tabla 3.81 da cuenta de los que han indicado los/as docentes.

Docente	Organizar	Razonar/comprender	Aplicar	Describir
PC1	x			
PC2	x		x	
PC3	x			
PC4	x	x		

PP1		x		x
PP2		x		
PP3	x		x	
PP4	x		x	
PO1		x	x	
PO2	x			
PO3	x		x	
PO4				x

Tabla 3.81. Objetivos que se pretenden por parte de los/as profesores/as con la clasificación

La tabla 3.81 refleja que mayoritariamente (8/12) el profesorado con la clasificación pretende que se organicen o se agrupen los diferentes tipos de formas geométricas según los criterios que se establezcan, así como establecer nombres o criterios para clasificarlas. Entre las respuestas que hemos categorizado aquí tenemos a PP4 que ha señalado “Con la clasificación se asocian y designan familias de objetos que presentan características comunes”. También destaca la respuesta de PO3 que asocia la clasificación con la organización del entorno cotidiano. También se ha indicado que la clasificación tiene un aspecto importante en las formas geométricas del entorno y en otras partes de las matemáticas, como acabamos de señalar con la respuesta de PO3 o con la contestación de PC2 que apunta “Se necesita para otras partes de la matemáticas y asignaturas como la Física y la Química”. Cabe mencionar, aunque en menor medida (4/12), que con la clasificación se pretende que se trabaje el razonamiento, la argumentación o la discusión, por ejemplo, PO1 ha señalado “Describir, verbalizar, nombrar, clasificar son todo caminos que nos acercan a la comprensión del objeto y a razonar”. Finalmente, se ha anotado (2/12) que ayuda a afianzar la descripción de las formas geométricas al comparar y trabajar sus características, destacando PO4 que señala que con la clasificación se conocen las figuras geométricas, el mundo en el que vivimos, se pueden resolver los problemas, o profundizar en el conocimiento de la geometría.

3.3.1.2 La introducción de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones

Las tablas 3.82 y 3.83 registran las respuestas a la subtarea S-TEcg1-1 (tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) en lo que concierne a las cuestiones CED1 y CECl1 que se refieren a cómo se introduce la descripción y la clasificación respectivamente.

Las relativas a la descripción se han registrado atendiendo a parte de la tabla 2.18 del subapartado 2.3.2.1 del capítulo 2.

Código		PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
DDI	M	x		x	x	x		x		x	x	x	x
	T												
	E												
	D					x	x						
	P												
	L		x						x				
	O												

Tabla 3.82. Como se introduce la descripción

La tabla 3.82 refleja que todo el profesorado suele recabar información de los/as alumnos/as antes de empezar la descripción haciéndoles normalmente preguntas. Los/as profesores/as indican que empiezan con la descripción de las formas geométricas en 2 dimensiones continuando después con las de tres dimensiones. La razón más señalada por la que empiezan por las figuras geométricas planas es, como señala PO4 que para entender los sólidos hay que tener claras las figuras planas. Destacamos que algún/a docente como PC1 señala que “Empiezo por las figuras planas ya que son más sencillas y continuo con los sólidos que se componen de las figuras planas”, subrayando este/a docente que “Para estudiar los sólidos hay conocer y saber las figuras planas”. Sin embargo, observamos que tras plantear en los cursos por donde empiezan la enseñanza de la descripción y la clasificación, hay profesores/as que empiezan a planteársela. Por ejemplo, PP1 comenta “Aunque empiezo por las figuras planas quizá habría que plantearse empezar por las figuras del espacio que son más cercanas para los estudiantes”. La mayor parte del profesorado (9/12) ha indicado que introduce la descripción de los sólidos a partir de modelos o representaciones de objetos del entorno. Entre las respuestas que hemos categorizado aquí tenemos aquellas observaciones del profesorado que han señalado de alguna manera que han utilizado modelos o representaciones de las formas geométricas o han relacionado la introducción con objetos del entorno. Como ejemplo de respuesta tenemos a PP3 que ha indicado que “Les suelo mostrar, a través de fotografías o mediante algunos objetos cotidianos que llevo a clase, los cuerpos geométricos que se pueden encontrar en el entorno y les pido que señalen a que cuerpos geométricos de los que han estudiado en cursos anteriores corresponden”. Destacamos también a PC1 que ha apuntado que les muestra figuras geométricas dibujadas o construidas para que ellos señalen individualmente lo que saben de ellas. Cabe mencionar a PO4 que ha señalado que lleva modelos construidos para que los/as alumnos/as los observen, toquen y señalen características. Contemplamos también que ha habido profesorado, aunque en menor proporción (2/12), que ha indicado que la introducción la lleva a cabo atendiendo a lo que señala el libro de texto, independientemente de lo que se trabaja en él, como, por ejemplo, PP4 que ha mencionado que suele coger la primera página del libro de texto y realizar las actividades y preguntas que allí se proponen. Asimismo, examinamos que hay algunos/as profesores/as (2/12) que han anotado que introducen la descripción mediante cuestiones con las que tratan de conocer el nivel que tiene el alumnado sobre los cuerpos geométricos; marcamos la respuesta de PP2 que ha indicado que pregunta conceptos sobre los cuerpos geométricos para conocer el nivel que tiene el alumnado.

La tabla 3.83 muestra las respuestas de los/as docentes en relación con la clasificación. Estas se han registrado atendiendo a la tabla 2.21 del subapartado 2.3.2.2 del capítulo 2.

Código		PC1	PC2	PC3	PC4	PP1	PP2	PP3	PP4	PO1	PO2	PO3	PO4
DClI	O												
	G												
	S			x	x	x	x	x	x			x	
	N	x	x							x	x		x
	P												
	T												

Tabla 3.83. Como se introduce la clasificación

Cabe destacarse que todos/as los/as profesores/as señalan que la introducen conjuntamente con la descripción. Expresan que la introducción de la descripción les conduce a la introducción de la clasificación y que no suelen diferenciarla. Además, todos/as ellos/as subrayan que empiezan con la enseñanza de la clasificación con las figuras planas, señalando por ejemplo PO1 haciendo referencia a la descripción y la clasificación que “Los conceptos se amplían cuando se pasa de dos a tres dimensiones”. La tabla 3.83 refleja que los/as docentes al introducir la clasificación tratan, por una parte, de que el alumnado señale características comunes o diferentes de las formas geométricas (7/12). Entre las respuestas que hemos apuntado en esta categoría destacamos a PP3 que especificaba que a partir de diferentes objetos cotidianos pregunta al alumnado sobre las semejanzas y diferencias que observaba entre los objetos mostrados. Asimismo, también se han contemplado respuestas que hacen referencia a identificar mediante un nombre las diferentes formas geométricas que podemos encontrar dentro de una familia (5/12), por ejemplo, PC1 indica que presenta a los/as alumnos/as diferentes formas geométricas de una familia para que al nombrarlas muestren una clasificación.

En cuanto al establecimiento de relaciones entre formas geométricas, las respuestas a la cuestión CERl1 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) se han registrado en la tabla 3.84.

Docente	Magnitud	Composición
PC1		x
PC2		x
PC3		x
PC4		x
PP1	x	
PP2	x	
PP3	x	
PP4	x	
PO1	x	
PO2	x	
PO3	x	
PO4	-	-

Tabla 3.84. Importancia de la enseñanza/aprendizaje del establecimiento de relaciones en la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos

Es importante remarcar que cuando se ha cuestionado sobre la introducción y desarrollo del establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos, los/as profesores/as han señalado que no le dan importancia al estudio de relaciones que se puede encontrar entre las formas geométricas en la enseñanza/aprendizaje de los cuerpos geométricos. Ahora bien, como refleja la tabla 3.84, el profesorado relaciona las formas geométricas principalmente cuando trabaja el tema de medición (8/12), como, por ejemplo, al obtener las fórmulas para calcular áreas y volúmenes o trabajar los problemas en los que se pide el cálculo de estas magnitudes. Destacamos a PP4 que señala “Relaciono un ortoedro y cualquier prisma para hallar la fórmula del volumen del prisma aplicando el principio de Cavalieri”. Asimismo, PO1 indicaba que relacionaba la pirámide y el cubo para calcular el volumen de la pirámide y el volumen del cubo. También se ha comentado por algunos/as profesores/as (4/12) que relacionan las formas geométricas señalando como están formados, por ejemplo, PC4 subrayaba que los prismas se podían descomponer en pirámides, o PC1 indicaba que a la hora de explicar los cuerpos de revolución indicaba al alumnado que todos tienen en común que se generaban de la misma manera.

3.3.1.3 La interacción profesorado/alumnado en la enseñanza/aprendizaje de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones

Continuando dentro de la subtarea, S-TEcg1-1, con las respuestas a las cuestiones CED2 y CEDl2 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) analizamos la interacción profesorado/alumnado que según los profesores participantes existe en la enseñanza/aprendizaje de los contenidos tratados en los cursos. En la tabla 3.85 se registran las respuestas dadas relativas a dicha interacción atendiendo a las tablas 2.18 y 2.21 de los subapartados 2.3.2.1 y 2.3.2.2 del capítulo 2 respectivamente.

Docente	Enseñanza profesor		Enseñanza alumno		Enseñanza profesor y alumno	
	descripción	clasificación	descripción	clasificación	descripción	clasificación
PC1	x	x				
PC2	x	x				
PC3					x	x
PC4					x	x
PP1					x	x
PP2					x	x
PP3	x	x				
PP4	x	x				
PO1			x	x		
PO2	x	x				
PO3			x	x		
PO4	x	x				

Tabla 3.85. Enseñanza de la descripción y la clasificación

Analizando la tabla 3.85, por lo que respecta a cómo se lleva a cabo la descripción de las formas geométricas observamos que 6/12 de los/las profesores/as son ellos/ellas los que llevan a cabo la descripción de las formas geométricas apoyándose del libro de texto, figuras construidas o dibujos en la pizarra. Como ejemplo de respuesta tenemos la comentada por PC1 quien señala que él/ella lleva a cabo la descripción de los sólidos con figuras construidas e indicando la descripción que propone el libro. Por otra parte, 4/12 de los/as profesores/as llevan a cabo una enseñanza basándose en plantearles cuestiones a los alumnos/as de forma que las respuestas de los alumnos/as van a ir proporcionando las características de las formas geométricas. Los/as profesores/as acabaran señalando las características. Un ejemplo de esta categoría de respuesta es la proporcionada por PP2 quien señala que propone una serie de cuestiones sobre la descripción de las formas geométricas para que el alumnado en grupo las discuta y a partir de ellas, extraiga las características de las figuras tratadas. El/La profesor/a acaba realizando las aclaraciones y explicaciones pertinentes para que se entiendan. Finalmente, 2/12 de los/as profesores/as comentan que son los/as alumnos/as, previa propuesta del profesorado los/as que suelen señalar las características geométricas que observan de las formas geométricas, principalmente de forma individual. Cabe señalar que estos/as dos profesores/as acaban finalmente señalando o completando las características que han de saber finalmente los/as alumnos/as. Entre las respuestas de estos/as profesores/as señalamos la comentada por PO3 que indica que un/a alumno/a a partir de material manipulable o algún dibujo explica a la clase las características de las figuras geométricas. También señala que a veces sale un/a alumno/a al que se le entrega un cuerpo geométrico y el resto de alumnos/as forman dos grupos que hacen preguntas alternadas y se trata de descubrir de qué cuerpo se trata más rápidamente.

Si examinamos ahora en la tabla 3.85 la clasificación de los sólidos, se contempla que hay diferencia en relación con la enseñanza indicada para la descripción. Las respuestas de la mitad de ellos/as (6/12) señalan que son ellos/as los que muestran la clasificación a los/as alumnos/as. Los/as profesores/as se basan en los criterios que principalmente propone el libro de texto, currículum o ellos/as mismos. Para ello se apoyan principalmente de la pizarra para realizar los esquemas o dibujos. También se ha señalado, aunque minoritariamente, el uso de ordenadores o figuras construidas. Como ejemplos de respuesta se ha indicado la de PP4 que ha señalado que les hace un esquema detallado en la pizarra con dibujos de la clasificación de cada familia de cuerpos geométricos. Por otro lado, vislumbramos que algunos/as profesores/as (4/12) llevan a cabo una clasificación conjunta entre el/la profesor/a y el/la alumno/a en el que el/la profesor/a va a ir encauzando los criterios de clasificación mediante preguntas encaminadas a los alumnos/as. Un ejemplo de repuesta que se ha categorizado aquí es la proporcionada por PP1 quien pregunta al alumnado por el nombre de las figuras geométricas a partir de la modificaciones y características propuestas. Finalmente, destacamos que solo dos profesores/as (2/12) permiten a los/as alumnos/as que señalen los criterios de clasificación a partir de los objetos manipulables o la información que se encuentre. Como ejemplo de esta categoría se ha anotado la respuesta de PO1 quien ha señalado que en un principio es el alumnado quien, a partir de las observaciones de los sólidos, establece los criterios de clasificación de las figuras geométricas. Cabe señalar que todos/as los/as profesores/as acaban mostrando o revisando los criterios de clasificación que los alumnos/as habrán de utilizar en la ESO.

Cabe señalarse que, si bien algunos/as profesores/as han comentado que el alumnado intervine de una forma activa en el desarrollo de la enseñanza/aprendizaje, las preguntas de los/as profesores/as y respuestas de los/as alumnos/as no apuntan a que los/as alumnos/as participen de una forma directa en el desarrollo de la enseñanza/aprendizaje de la descripción y la clasificación. Lo apuntado por el profesorado no parece indicar que las sesiones de las clases se guíen y desarrollen según las respuestas o inquietudes de los/as alumnos/as.

3.3.2 La enseñanza de la descripción y la clasificación. Elementos, criterios de clasificación y familias de sólidos implicados

En este apartado presentamos información obtenida a partir de las respuestas a las cuestiones CED4, CECl4, CED5 y CECl5 planteadas en la subtarea S-TEcg2-1 (tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2). Por un lado, nos fijamos en los elementos y formas geométricas del espacio que los/as profesores/as apuntan como que los trabajan con su alumnado al tratar la descripción en sus clases y en las razones que dan para explicar por qué trabajan los contenidos indicados relativos a la descripción (subapartado 3.3.2.1). Por otro lado, en relación con la clasificación, recopilamos las familias de sólidos que se consideran como objeto de clasificación y los criterios que se usan para ello; también nos fijamos en las razones que indican los/as profesores/as para explicar por qué clasifican atendiendo a los criterios señalados (subapartado 3.3.2.2).

3.3.2.1 La enseñanza de la descripción. Elementos, y familias de sólidos implicadas

En la tabla 3.86 se muestran las formas geométricas que el profesorado participante indica que enseña en sus clases.

Doc.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
PE1		x	x		x	x	x	x				
PE2		x	x		x	x	x					
PE3		x	x	x	x	x	x	x				
PE4		x	x	x	x	x	x	x				
PC1		x	x		x	x	x	x				
PC2		x	x		x	x	x	x				
PC3		x	x		x	x	x	x				
PC4		x	x		x	x	x	x		x	x	
PP1	x	x	x		x	x	x	x	x			
PP2		x	x	x	x	x	x	x				
PP3		x	x		x	x	x	x			x	
PP4		x	x		x	x	x	x				
PO1		x	x		x	x	x	x				
PO2	x		x		x	x	x	x				x
PO3		x	x		x	x	x	x				
PO4		x	x		x	x	x	x				

Tabla 3.86. Formas geométricas que se enseñan en clase: A) poliedros; B) poliedros regulares; C) prismas; D) ortoedro; E) pirámides; F) cilindros; G) conos; H) esferas; I) cuerpos de revolución; J) troncos de pirámides; K) troncos de conos, y L) secciones

Se contempla que en general todo el profesorado suele centrar la enseñanza de los sólidos en los poliedros y sólidos redondos o cuerpos de revolución. Entre las respuestas tenemos, por una parte, algunos/as docentes que han hecho referencia de forma general a ellos, señalando la enseñanza de los poliedros, aunque luego han especificado los tipos de poliedros que trabajan en clase. Por otra parte, observamos que la mayoría de los/as docentes han mencionado los tipos de poliedros en los que basan su enseñanza, apuntando principalmente los prismas, las pirámides y los poliedros regulares y algunos/as han especificado algunos tipos de prismas como los ortoedros. Por lo que respecta a los sólidos redondos o cuerpos de revolución, todo el profesorado ha marcado los cilindros, los conos y las esferas. Un/a docente, además de señalar estas familias de sólidos, ha nombrado la familia general de los cuerpos de revolución. Algunos/as docentes han señalado también formas geométricas truncadas como los troncos de pirámides y los troncos de conos y un/a docente ha hecho también referencia al estudio de las secciones.
Atendiendo a las respuestas de los/as profesores/as, las razones del porqué se enseñan las formas geométricas señaladas se registran en la tabla 3.87. En esta tabla las hemos nombrado como: i) libro, si han indicado que son las que aparecen en los libros de texto; ii) tradición, si han apuntado que son las que siempre se describen; iii) otros contenidos, si han señalado que son necesarias para la enseñanza de otros contenidos; iv) fundamentales, si han considerado que son las más básicas y necesarias; v) tiempo, si han mencionado que la falta de tiempo condiciona las formas geométricas que se han de explicar; vi) entorno, si han considerado que son las que suelen aparecer en nuestro entorno; vii) programa, si han comentado que se enseñan porque están en el programa, y viii) capacidades, si han manifestado que desarrollan capacidades para el alumnado.

Doc.	Libro	Tradición	Otros contenidos	Fundamentales	Tiempo	Entorno	Programa	Capacidades
PE1			x				x	
PE2							x	x
PE3								x
PE4								x
PC1	x	x						
PC2	x							
PC3	x							
PC4	x		x					
PP1				x			x	
PP2		x			x		x	
PP3					x	x	x	
PP4	x			x	x			
PO1				x	x			
PO2						x	x	
PO3				x				
PO4	x			x	x			

Tabla 3.87. Razones que señala el profesorado sobre el porqué enseñan estas formas geométricas relativas a los sólidos

Puede observarse que hay varias razones que las han seleccionado prácticamente el mismo número de profesores/as si bien depende de los cursos el que se haya expresado más una razón u otra. Así, la respuesta más señalada es la que hace referencia a que aparecen en los libros de texto (6/16), razón que han remarcado todos los/as profesores/as del curso en comunidad. Varios/as profesores/as (5/16) han señalado que porque están en el programa; lo han remarcado principalmente los/as profesores/as del curso presencial, apuntando que se ha de intentar dar, al menos lo que marca el currículum. También se ha destacado por el mismo número de profesores/as (5/16) que son las que se consideran como fundamentales en la enseñanza de la geometría de los sólidos apuntando PP1 “Son la base de las figuras del espacio y a partir de ellas se puede ir ampliando su estudio”. Y que el tiempo de que disponen para enseñar esta parte de la geometría hace que se tengan que centrar en estas formas geométricas. Asimismo, observamos que hay determinados/as profesores/as (3/16), principalmente los/as participantes de la encuesta, que han apuntado que porque desarrollan capacidades. Por último, anotamos que han sido mencionado por algunos/as docentes las siguientes razones; que son las figuras que siempre se han descrito (2/16), principalmente como señala PP2, porque se empiezan a estudiar algunas de ellas desde Educación Primaria con lo que ya las conocen; que son las que se encuentran en nuestro entorno (2/16), indicando PO2 “Estos sólidos aparecen en muchos objetos del entorno”; que son necesarias para otros contenidos (2/16), subrayando PC4, que son la formas geométricas que se utilizan en los ejercicios de medición.

De las respuestas dadas puede concluirse que los/as profesores/as centran su enseñanza en las formas geométricas que aparecen en los libros de texto y que señala el currículum. Asimismo, consideran que son las formas geométricas que son fundamentales para luego continuar estudiando geometría. Subrayamos que la falta de tiempo conduce a que no se profundice en su enseñanza.

En relación con la enseñanza que se imparte sobre los elementos de los poliedros, las respuestas dadas al respecto las hemos registrado en la tabla 3.88.

Doc.	Caras	Aristas	Vértices	Diagonales (espacio)	Ángulos diedros	Ángulos triedros	Otros
PE1	x	x	x				
PE2	x	x	x				x
PE3	x	x	x				
PE4	x	x	x				x
PC1	x	x	x				
PC2	x	x	x		x		
PC3	x	x	x		x		
PC4	x	x	x	x			
PP1	x	x	x	x			
PP2	x	x	x	x	x		
PP3	x	x	x				
PP4	x	x	x				
PO1	x	x	x		x	x	
PO2	x	x	x				
PO3	x	x	x				
PO4	x	x	x				

Tabla 3.88. Sobre la enseñanza de los sólidos y de sus elementos

Puede observarse que todo el profesorado al enseñar los sólidos se centra en las caras, aristas y vértices, si bien solo una minoría de docentes contemplan la enseñanza de otros elementos; se destaca los/as que apuntan las diagonales del espacio, los ángulos diedros y triedros y las alturas.

Dado que algunas de las razones por las que se enseñan los elementos de los sólidos citados coinciden con las razones sobre el porqué se enseñan las formas geométricas apuntadas, en la tabla 3.89, donde registramos las respuestas, hemos mantenido las siguientes categorías: libro, tradición, otros contenidos, fundamentales y tiempo. Como se muestra en esta figura, hemos añadido la categoría conocimiento, en la que se incluyen respuestas en las que se ha señalado que los enseñan porque son los que conocen. Cabe apuntarse que como en la encuesta no se preguntó por las razones de la enseñanza de estos elementos, centramos los resultados en las respuestas proporcionadas por el profesorado de los cursos.

Docente	Libro	Tradición	Otros contenidos	Fundamentales	Conocimiento	Tiempo
PC1	x	x				
PC2	x			x		
PC3	x				x	
PC4	x		x	x		
PP1				x		
PP2				x		
PP3				x		
PP4	x			x		
PO1				x		x
PO2				x		
PO3				x		
PO4	x			x		

Tabla 3.89. Razones que señala el profesorado sobre el porqué enseñan los elementos de los sólidos

De la tabla 3.89 se desprende que la razón principal por la que los/as docentes de los cursos indican que llevan a cabo la enseñanza de los elementos que han apuntado en la enseñanza de los sólidos (10/12) es porque se consideran que son los necesarios para poder describir las formas geométricas. También se ha apuntado, por la mitad de los/as docentes de los cursos (6/12) que porque son los elementos que aparecen en los libros de texto (4/12). Entre las razones que se han nombrado solo por algún/a docente encontramos las que hacen referencia bien a que son los elementos que siempre se han dado, o a que son los que el/la profesor/a conoce, bien a que la falta de tiempo hace que no se puedan explicar más.

3.3.2.2 La enseñanza de la clasificación. Criterios de clasificación y familias de sólidos implicadas

Hemos de señalar que distinguimos la información obtenida al respecto a partir de los cursos de la obtenida a partir de la encuesta ya que es en los cursos en los que nos hemos detenido más en el estudio realizado.

La tabla 3.90 registra las respuestas dadas en relación con las clasificaciones de los sólidos que los profesores/as de los cursos realizan en sus clases cuando explican la geometría de los sólidos. Puede notarse que las respuestas dadas las hemos organizado y nombrado de la siguiente manera: A) sólidos, si se diferencian los poliedros de los cuerpos de revolución o de los formados por figuras curvas; B) poliedros, si se señala que tienen en cuenta diferentes tipos de poliedros diferenciando, B1) si son cóncavos/convexos, B2) según el número de caras que tengan, B3) según el número de bases, B4) si presentan o no alguna regularidad; C) poliedros regulares, según número de caras; D) prismas, señalando, D1) si se fijan en número de lados de la base, D2) si se centran en que los polígonos de las bases sean cóncavos o convexos, D3) si diferencian que los polígonos de las bases sean regulares o no, D4) si se apunta que los prismas puedan ser rectos o inclinados; E) pirámides, distinguiendo, E1) si se fijan en número de lados de la base, E2) si se apunta que el polígono de la base es cóncavo o convexo, E3) si se diferencia que el polígono de la base es regular o no, E4) si se señala que las pirámides pueden ser rectas o inclinadas ; F) paralelepípedos, según los polígonos que los forman; G) cuerpos de revolución/redondos, G1) según la figura plana que lo genera, G2) según como está formada la figura; H) cilindros, según su inclinación o no, e I) conos, según su inclinación o no.

Docente	A	B				C	D				E				F	G		H	I
		1	2	3	4		1	2	3	4	1	2	3	4		1	2		
PC1	x			x	x	x	x				x					x			
PC2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x		
PC3	x			x	x	x	x		x	x	x		x	x		x			
PC4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x		
PP1	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x			
PP2	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x			
PP3	x			x	x	x	x		x	x	x		x	x		x			
PP4	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x			
PO1	x	x		x	x	x		x		x		x		x		x			
PO2	x	x		x	x	x	x		x	x	x		x	x		x			
PO3	x			x	x	x		x		x		x		x			x		
PO4	x			x	x	x	x			x	x			x		x			

Tabla 3.90. Figuras geométricas que clasifican en clase: A) sólidos; B) poliedros; C) poliedros regulares; D) prismas; E) pirámides; F) paralelepípedos; G) cuerpos de revolución; H) cilindros, e I) conos

En la tabla 3.90 contemplamos que todos/as los/as profesores/as señalan que clasifican los sólidos en sus clases en una clasificación partición poliedros y cuerpos de revolución. En cuanto a los poliedros contemplamos que todos/as clasifican atendiendo al número de bases que presentan en prismas y pirámides, así como que sean regulares o no. Por otra parte, encontramos que en los prismas y las pirámides mayoritariamente se apunta una clasificación atendiendo al número de lados del polígono de la(s) base(s) y si poseen o no inclinación. En cuanto a los cuerpos de revolución/redondos se contempla, que todos los clasifican principalmente a tendiendo a la figura plana que al girar lo genera.

La categorización de las razones por la que los/as profesores/as han indicado que llevan a cabo esta clasificación la hemos realizado atendiendo a las respuestas que nos han mostrado (Véase la tabla 3.91). Hemos categorizado como: i) libro, si han apuntado que son los criterios y formas geométricas que se presentan en los libros de texto; ii) diferencian, si han señalado que los criterios aplicados hacen que se obtengan diferencias en las formas geométricas; iii) otros contenidos, si los criterios se consideran necesarios porque se utilizan las formas geométricas en otros contenidos, y iv) tiempo, si se ha apuntado que por razones de tiempo no se pueden realizar más tipo de clasificaciones.

Docente	Libro	Diferencian	Otros contenidos	Tiempo
PC1	x	x		
PC2	x	x		
PC3	x	x		
PC4	x	x	x	
PP1		x		
PP2		x		
PP3			x	
PP4	x			
PO1				x
PO2	x	x		
PO3				
PO4	x			

Tabla 3.91. Razones del profesorado sobre el porqué impartir las clasificaciones señaladas

La tabla 3.91 refleja que las razones que indican los/as profesores/as sobre el porqué clasifican atendiendo a estos criterios han sido principalmente dos. Por un lado, porque es la clasificación que aparece en los libros de texto (7/12), indicando PC1 “Me fijo normalmente en la clasificación que está en el libro de texto, estableciendo así diferentes tipos de figuras geométricas según las condiciones que pongan”. Por otro lado, porque consideran que con ellas diferencian las formas geométricas (7/12). Destacamos entre estas respuestas a PO2 que comenta “Porque considero que, atendiendo a dichos criterios, los alumnos pueden llegar a conocer y saber distinguir unos cuerpos de otros” o a PP2 que señala “Son los criterios que utilizamos para que al describir las figuras geométricas podamos diferenciarlas”. También se ha indicado por algunos/as profesores/as (2/12) que, porque son las figuras que luego se utilizarán en otros contenidos, por ejemplos, PC4 indica que en la realización de problemas de medición a veces te describen o nombran las figuras geométricas atendiendo a estos criterios con lo que los alumnos tienen que reconocerla para poder realizar el problema. Finalmente, observamos que el tiempo también ha sido considerado por un/a profesor/a, como un obstáculo para llevar a cabo más tipo de clasificaciones.

La información obtenida a partir de las respuestas del profesorado que realizó la encuesta en relación con las formas geométricas del espacio que se clasifican en clases de la ESO la mostramos en las tablas 3.92 y 3.93.

Docente	Sólidos	Prismas y pirámides
PE1	No	No
PE2	Sí	Sí
PE3	Sí	Sí
PE4	Sí	Sí

Tabla 3.92. Formas geométricas que profesores/as clasifican en la ESO según encuesta

En la tabla 3.92 se contempla que un/a profesor/a ha indicado que no clasifica estas formas geométricas. La razón dada ha sido la falta de tiempo en la enseñanza de las matemáticas.

Las razones dadas sobre el porqué se enseñarían determinadas clasificaciones en una situación ideal se presentan en la tabla 3.93.

Docente	Sólidos			Prismas y pirámides		
	Programa	Otros contenidos	Desarrolla capacidades	Programa	Otros contenidos	Desarrolla capacidades
PE1			x			x
PE2	x	x	x	x		x
PE3		x	x	x	x	x
PE4		x	x		x	x

Tabla 3.93. Razones por las que se enseñarían estas formas geométricas en una situación ideal

Puede observarse que los/as profesores/as que respondieron a la encuesta consideran que la clasificación de los sólidos y más en particular la de los prismas y las pirámides desarrolla capacidades para el alumnado. También se ha indicado, acentuándose más en los sólidos en general que particularmente en los prismas y las pirámides, que estas clasificaciones se necesitan para otros contenidos. Finalmente se observa que algunos/as profesores/as también han mencionado que se deben enseñar porque están en el programa, marcándose más en los prismas y las pirámides que en los sólidos en general.

Continuando con el profesorado de la encuesta, pero centrándonos ahora en la clasificación de los sólidos con criterios que no se centren en el polígono de la base, un/a docente, PE1, ha indicado que no realiza otras clasificaciones, posiblemente porque no clasifica los sólidos. Los/as otros/as 3 docentes han indicado que los clasifican en rectos y oblicuos. Dos de ellos/as también han diferenciado entre poliedros y cuerpos de revolución. Un/a docente ha distinguido los cóncavos y convexos y otro/a docente los regulares e irregulares.

Cabe destacarse la brevedad de las respuestas dadas, lo que constata gran pobreza al trabajar en las clases de la ESO el proceso de la clasificación.

3.3.3 Sobre el uso de materiales y representaciones en la enseñanza de la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones entre formas geométricas. Importancia de la construcción y representación

En este subapartado nos vamos a centrar en la subtarea S-TEcg1-2 que se indica en la tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2. Con ella se ha obtenido información sobre los materiales que los/as profesores/as utilizan en la enseñanza de los contenidos geométricos implicados en nuestro estudio y sobre la importancia que se da al uso de la construcción y la representación en la enseñanza/aprendizaje de estos contenidos.

La tabla 3.94, construida a partir de la tabla 2.26 del subapartado 2.3.2.5 del capítulo 2, registra los materiales que se usan. Puede notarse que los materiales que más se utilizan para explicar la geometría de los sólidos, indicado por todo el profesorado participante, son la pizarra y el libro de texto. El profesorado señala la pizarra porque es el principal medio con en el que el/la profesor/a puede mostrar a todo el alumnado las representaciones gráficas de las formas geométricas, anotar las observaciones correspondientes y, además, porque es un material que se encuentra en todas las aulas. Cabe mencionar que PP4 ha señalado "Es el material con el que siempre se han enseñado las matemáticas". Por lo que se refiere al libro de texto, es también señalado por todos los/as docentes; se ha marcado que es al material donde se encuentra el contenido que se va explicar, las actividades que se van a realizar y, como ha indicado PC1 "Es un material que lo tienen todos los alumnos".

Docente	DRpMa								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
PE1	x	x					x		x
PE2	x	x	x				x		x
PE3	x	x	x				x		x
PE4	x	x							x
PC1	x	x	x						
PC2	x	x		x	x				
PC3	x	x	x	x	x				
PC4	x	x				x		x	
PP1	x	x	x	x	x	x			
PP2	x	x	x						
PP3	x	x					x	x	
PP4	x	x				x			
PO1	x	x	x		x	x	x	x	
PO2	x	x	x		x	x	x		
PO3	x	x	x	x	x			x	x
PO4	x	x	x						

Tabla 3.94. Materiales que utiliza el profesorado en la enseñanza de la descripción y la clasificación, A) la pizarra; B) el libro de texto; C) figuras geométricas construidas; D) materiales comercializados para construir figuras geométricas o materiales para construir (plastilina, palillos …); E) desarrollos planos para construir figuras geométricas; F) programas informáticos; G) material de dibujo; H) representaciones de las figuras geométricas en el entorno, e I) material complementario de refuerzo o ejercicios

Las formas geométricas construidas han sido indicadas por 10/16 de los/as profesores/as señalando que ayudan a que los/as alumnos/as puedan entender y observar directamente las formas geométricas. Entre las respuestas tenemos a PO1 que ha indicado "Manipular poliedros directamente es lo mejor para entender determinados conceptos como eje de rotación o caras paralelas, vértices opuestos...pero este material tiene sus limitaciones; es costoso y no suele haber suficiente”. Cabe mencionar que también se ha indicado por algún/a profesor/a, como PC3, que se utiliza gracias a que el centro dispone de este material.

Los programas informáticos apuntados por 5/16 de los/as profesores/as se considera una herramienta esencial para poder dibujar o representar las formas geométricas con más precisión, así como que el/la alumno/a pueda interactuar sobre ellas. PO2 señala que entre los programas informáticos que se utilizan particularmente están el GeoGebra y Poly Pro, destacando dicho/a profesor/a “Que ayuda al profesor a la hora de representar y estudiar propiedades de las figuras y sobre todo ayuda al alumno a ver mejor las figuras y a interactuar sobre ellas”. Se ha destacado además que es un material esencial para comprender los conceptos y en los ejercicios que se plantean en clase; por ejemplo, PO1 ha mencionado “Los programas informáticos son una buena herramienta a través de un cañón o en un aula de informática sobre todo para resolver problemas y entender conceptos donde el dibujo sea excesivo”.

Los desarrollos planos para construir formas geométricas se han indicado también por 7/16 de los/as profesores/as apuntando que, a partir de ellos, los/as alumnos/as pueden generar y manipular fácilmente los sólidos. PP1 ha anotado “Con los desarrollos planos los alumnos pueden construir de una manera sencilla los cuerpos geométricos” y ha remarcado “se ve como se pasa del plano al espacio”. Asimismo, ha mencionado dicho/a docente que una vez construidas las figuras geométricas se pueden tomar como modelo para explicar la geometría.

Los materiales comercializados o materiales para construir se han señalado por los profesores que lo utilizan, 4/16, generalmente porque el centro dispone de ellos, destacando PC2 “Sobre todo en el taller de matemáticas es donde más se utilizan, pero en la asignatura de matemáticas, si dispongo de tiempo, lo utilizo”. PC3 apunta “Construimos algunos poliedros con el material de plástico Creator”. Además, comentaba PP1 que a los alumnos/as en general les gustaba utilizarlos y conseguir de esa forma tener el cuerpo geométrico construido.

La representación de las formas geométricas del entorno a través de fotografías o mostrando objetos del entorno que se relacionan con la geometría de los sólidos lo mencionan 4/16 de los/las docentes participantes. Remarcamos que PP3 ha indicado que al mostrar al alumnado objetos de su entorno que se pueden asociar con la geometría que se estudia, la hace más útil y atractiva. PO1 ha subrayado la importancia que tiene presentar ejemplos reales de la geometría en la arquitectura y la construcción. Es importante destacar que PO3 señala que para las personas que no se les da bien el dibujo lo considera esencial para explicar geometría.

El material de dibujo para llevar a cabo la representación gráfica de las formas geométricas ha sido marcado por 6/16 del profesorado. La razón por la que en general el profesorado de los cursos señala que se utiliza el material de dibujo ha sido porque, a veces, para visualizar y comprender las formas geométricas se han de representar gráficamente con precisión. Entre estas respuestas tenemos la señalada por PO1 “El saber dibujar mínimamente bien siempre es garantía de buena imaginación espacial y, por tanto, siempre ayuda mucho”. Cabe remarcarse, que este material ha sido mencionado por la mayoría de los/as profesores/as de la encuesta, aunque no se han señalado las razones de su utilización.

Finalmente, cabe mencionarse que también se ha marcado por el profesorado el material complementario de apoyo para la enseñanza de la geometría de los sólidos haciendo referencia a ejercicios complementarios de refuerzo y ampliación.

Continuando con la subtarea S-TEcg1-2 hemos analizado la importancia que el profesorado señala que tiene la representación y la construcción con la enseñanza de la descripción y la clasificación. La subtarea se ha planteado antes de explicar al profesorado de los cursos el uso de estos procedimientos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría. La tabla 3.95 registra las respuestas de los profesores de los cursos a la cuestión CERp2 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) que se refiere a la importancia que asignan a la representación, particularmente a la representación gráfica, en la enseñanza/aprendizaje de las formas geométricas.

Docente	Entender	Visualizar	Enseñar
PC1	x		x
PC2	x	x	
PC3		x	x
PC4		x	x
PP1		x	
PP2	x		
PP3	x	x	
PP4	x		
PO1	x		
PO2	x		
PO3	x		
PO4	x		

Tabla 3.95. Sobre la importancia de la representación (dibujo) en la enseñanza/aprendizaje de las formas geométricas

Puede observarse que todo el profesorado considera importante llevar a cabo la representación gráfica de las formas geométricas cuando se enseñan en clase. La principal razón por la que los/as profesores/as usan este tipo de representación para la enseñanza/aprendizaje de los sólidos (9/12), es porque facilita al alumnado su entendimiento. Por ejemplo, PP4 indica “Si no se dibuja en geometría es muy difícil que el alumno comprenda como son los cuerpos geométricos y tampoco puede realizar los ejercicios de áreas y volúmenes”. Por otra parte, se ha subrayado que con la representación se pueden visualizar y observar las formas geométricas y sus características (5/12). Por ejemplo, PP2 subraya que los dibujos de las formas geométricas ayudan a que se identifiquen sus propiedades geométricas. Finalmente, aunque todo el profesorado ha dado a entender que el dibujo es fundamental en la enseñanza de la descripción y la clasificación, algunos/as docentes (3/12) lo han expresado explícitamente, por ejemplo, PC1 señala que “Es necesario para poder enseñar los elementos y propiedades de las figuras geométricas”. Cabe mencionarse que PO3, en relación con el subapartado 1.4.4.1, ha hecho referencia a las proyecciones para representar los objetos geométricos, aunque ha matizado que no las utiliza. Es importante destacar que algunos/as profesores/as destacan que dibujar es importante en geometría, pero es un hándicap para el profesorado o alumnado, por ejemplo, PO1 remarca “El saber dibujar mínimamente bien siempre es garantía de buena imaginación espacial y, por tanto, siempre ayuda mucho. El inconveniente es que dibujar en pizarra lleva tiempo y los alumnos no siempre son capaces de reproducirlo”. Este/a profesor/a puntualiza que se puede resolver el problema que plantea el dibujo con programas informáticos.

La tabla 3.96 registra las respuestas del profesorado de los cursos a la cuestión CERp3 (tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2) que se refiere a la importancia que los/as docentes atribuyen a los procedimientos de construir o generar sólidos para la enseñanza de la descripción y clasificación. Cabe informar de que esta cuestión se planteó antes de usar la construcción en la enseñanza de la descripción y la clasificación en los cursos, particularmente en los cursos en comunidad y presencial. La categorización de las respuestas se han divido en dos grupos, según se considerase o no necesario su utilización.

Docente	No			Sí	
	Otras representaciones	No aprendizaje	Como complemento	Familiarizarse	Entienden
PC1	x				
PC2			x		
PC3			x		
PC4	x				
PP1				x	x
PP2		x			
PP3		x			
PP4		x			
PO1					x
PO2					x
PO3					x
PO4	x				

Tabla 3.96. Sobre la construcción en la enseñanza de la descripción y la clasificación

Puede observarse que una parte del profesorado (8/12) no considera necesario utilizar la construcción de formas geométricas para explicar la descripción y clasificación de las mismas. Principalmente, PP2, PP3 y PP4 apuntan que cuando construye el alumnado lo único que hace es construir el cuerpo geométrico que le propone el/la profesor/a, sin llegar a realizar un aprendizaje a partir de él. PP2 subraya que al alumnado le gusta construir las formas geométricas, pero como una manualidad y, además, mientras se construye no se da clase. También encontramos algunos/as profesores/as, como PC1, PC4 y PO4 que consideran que al utilizar otras representaciones no es necesario que los alumnos/as construyan. Por ejemplo, PO4 apunta que dibuja las formas geométricas siempre que las explica y los modelos construidos los lleva a clase para que los toquen y observen. Asimismo, PC1 ha anotado que con los modelos construidos el alumnado puede estudiar los cuerpos geométricos. Cabe mencionarse algunos/as docentes, como PC2 y PC3, que manifiestan que no lo ven necesario, pero que ayuda al alumnado a conocer las formas geométricas y a poder trabajar con ellas en otras tareas. Por ejemplo, PC2 señala que la construcción ayuda en el estudio de los elementos.

Por otra parte, los/as profesores/as que sí que han considerado que es necesaria la construcción han señalado que con ella se pueden entender mejor los conceptos y propiedades. Por ejemplo, PO3 lo subraya al responder “Es como les resulta más sencillo de comprender al alumno de secundaria. Es un alumno al que hemos educado durante años en todo lo que sea manipulativo, pero no lo hemos educado en la abstracción por ello el construir los poliedros con cartulinas o bien con palillos y plastilina resulta sencillo, cómodo y enseguida el alumno comprende los conceptos". Asimismo, PP1 ha señalado que "Al construir las formas geométricas el alumnado se familiariza con ellas".

Las respuestas de los/as profesores/as han reflejado que los/as docentes no suelen trabajar las matemáticas y la construcción de forma conjunta como señala Guillén (1997).

3.3.4 Sobre la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos en la ESO. Conocimientos previos, dificultades y errores

Dado que el alumnado es fundamental en la enseñanza/aprendizaje de contenidos, en este apartado tratamos aspectos de la enseñanza que implican al profesor/a, al alumno/a y al contenido. En el subapartado 3.3.4.1 nos fijamos en los conocimientos previos relativos a los sólidos que los/as profesores/as consideran que han de tener sus estudiantes antes de impartir en sus clases la descripción y la clasificación o en aspectos relativos al aprendizaje de estos contenidos y a cómo se considera que se puede motivar al alumnado para amplíen sus conocimientos al respecto y puedan desarrollar su nivel de razonamiento. En el subapartado 3.3.4.2 tratamos aspectos referidos a las dificultades y errores que el profesorado participante considera que enfrentan sus estudiantes al estudiar los contenidos implicados en nuestro estudio que pueden llevarles a que cometan determinados errores. La información al respecto ha hemos obtenido a partir de la subtarea S-TEcg2-2 de la tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2.

3.3.4.1 Sobre conocimientos previos. Creencias sobre el aprendizaje de la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones

Las tabla 3.97 muestra que las respuestas señaladas por el profesorado de los cursos en comunidad y presencial, referidas a cómo influyen en la enseñanza los conocimientos previos que tiene el alumnado, las hemos categorizado en: i) creencias/concepciones, cuando se han indicado que estos son interesantes para prestar atención a las ideas previas que posee el alumnado; ii) contenidos adquiridos, cuando se ha comentado que estos ayudan a conocer el grado de adquisición de los contenidos que se han impartido anteriormente, y iii) modificación contenidos, cuando se ha apuntado que los conocimientos previos que posee el alumnado varían los contenidos a enseñar.

Docente	Creencias/concepciones	Contenidos adquiridos	Modificación contenidos
PC1			x
PC2		x	
PC3		x	
PC4	x		
PP1			x
PP2	x		
PP3		x	
PP4		x	

Tabla 3.97. Sobre la influencia de los conocimientos previos del alumnado

Se observa que el profesorado tiene en cuenta los conocimientos previos que tiene el alumnado principalmente para conocer los que se mantienen de los estudiados (4/8). PP3 ha anotado "Me sirven para tener una idea del nivel que tienen el alumnado que, aunque sé que han dado los contenidos anteriormente, normalmente se les olvida". También para revisar las creencias y conocimientos previos que poseen los/as alumnos/as (2/4), indicando PC4 “Pregunto a los alumnos al principio del tema sobre los conceptos que voy a tratar y así me ayudan a conocer las dificultades que tienen”. Cabe señalarse que una parte del profesorado (2/8) ha apuntado que los conocimientos previos del alumnado puedan llegar a influir en la modificación de los contenidos que se imparten. Por ejemplo, PP1 ha anotado que “Si observo que la clase viene con nivel superior al habitual, puedo llegar a explicar el truncamiento de poliedros o incluso hablar algo de los poliedros arquimedianos”. Ha subrayado este/a docente que normalmente no suele ocurrir.

Por lo que se refiere a cuando se observa que se produce aprendizaje sobre los contenidos implicados en nuestro estudio, como se muestra en la tabla 3.98 hemos distinguido 4 tipos de respuesta que las nombramos como: i) realiza tareas, si el profesorado ha indicado que el alumnado realiza correctamente las tareas/ejercicios que se plantean en clase; ii) comunica los contenidos, si se ha apuntado que el alumnado transmite correctamente el conocimiento que posee de los contenidos, y iii) argumenta con los contenidos, si ha señalado que el alumnado puede razonar, argumentar, explicar los contenidos geométricos.

Docente	Realiza tareas	Comunica los contenidos	Argumenta con los contenidos
PC1	x	x	
PC2	x	x	
PC3	x		x
PC4	x		x
PP1	x	x	
PP2	x		x
PP3	x	x	
PP4	x	x	

Tabla 3.98. Creencias sobre el aprendizaje de contenidos

Puede notarse que todo el profesorado opina que el alumnado ha llevado a cabo un aprendizaje de los contenidos geométricos si realiza correctamente las tareas que se proponen. Entre las respuestas que marcan esta categoría señalamos la de PP1 que ha apuntado “Que los alumnos realicen correctamente los problemas y los ejercicios que se mandan me indica que van dominando la materia”. Asimismo, PP2 ha señalado “Las actividades que se proponen en los libros son para repasar lo explicado y comprobar que los alumnos han afianzado los contenidos”. También, se ha apuntado por más de la mitad del profesorado (5/8), que ha habido aprendizaje de los contenidos geométricos por parte de los/as alumnos/as si ellos/as pueden comunicarlos. Por ejemplo, PC2 ha indicado “Yo les suelo preguntar en clase alguna definición sobre las figuras geométricas para que ver si han comprendido lo que se ha explicado”. PP3 ha apuntado “Saber las características de los sólidos que enseño en clase y como se clasifican me demuestran que saben describir y clasificar”. Hay tres profesores (PC3, PC4, PP2) que han remarcado que consideran realmente un aprendizaje en los/as alumnos/as cuando ellos/as pueden llegar a explicar los contenidos geométricos y/o argumentar a partir de ellos. PC3 ha apuntado que considera que los/as alumnos/as conocen los contenidos geométricos señalando “Una vez trabajados en clase los contenidos referentes a los sólidos, considero que los alumnos han de ser capaces de explicar por qué las figuras geométricas tienen ciertas características”. PP2 ha señalado “Lo que yo pretendo es que los alumnos puedan por ellos mismos razonar propiedades o clasificaciones”.

Por lo que se refiere a cómo se puede motivar al alumnado en el aprendizaje de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones, las respuestas de los profesores las hemos categorizado en dos grupos, que en la tabla 3.99 nombramos como: i) explicación, si se ha hecho referencia a modificar la forma de explicar la materia; ii) entorno, si se propuesto mostrar la materia en un entorno cotidiano, y iii) aplicación materias, si se destaca su aplicación en otras materias y/o partes de las matemáticas.

Docente	Explicación	Entorno	Aplicación
PC1	x		
PC2		x	x
PC3	x		
PC4		x	
PP1		x	
PP2		x	
PP3		x	
PP4	x		

Tabla 3.99. Cómo motivar al alumnado en el aprendizaje de contenidos geométricos relativos a los sólidos

Puede observarse que más de la mitad de los/as profesores/as (5/8) expresan que para motivar al alumnado en el aprendizaje de la descripción y clasificación hay que aplicar estos procesos matemáticos en un contexto real. Por ejemplo, PP3 apunta que concibiendo que todo lo que está aprendiendo sirve para entender los objetos que le rodean. PC2 indica que mostrándoles la utilidad de esta parte de la geometría en otras asignaturas y en la vida real, lo que ha llevado a que asignemos la respuesta en dos categorías. Asimismo, algunos/as profesores/as (3/8) han sugerido llevar a cabo explicaciones sencillas en las que el alumnado comprenda fácilmente la materia. Por ejemplo, PP2 señala que se ha de tratar que encuentren los contenidos fáciles de entender y aprender.

En relación con las respuestas dadas referidas a cómo se pueden mejorar en el alumnado capacidades asociadas a la descripción y la clasificación hemos distinguido 5 grupos, que en la tabla 3.100 hemos nombrado como: i) tareas, si se ha subrayado la realización de tareas/ejercicios en las que se aplican los conocimientos teóricos; ii) construcción y manipulación, si se ha indicado la construcción o manipulación de las formas geométricas para desarrollar la habilidad espacial; iii) razonando, si se ha planteado que se razonen los contenidos geométricos; iv) representación gráfica, si se ha indicado que se han de trabajar las formas geométricas desde el ordenador o dibujo, y v) debatiendo, si se ha señalado que se ha de implicar al alumnado en discusiones al tratar los contenidos geométricos.

Docente	Tareas	Construcción/ manipulación	Razonando	Representación gráfica	Debatiendo
PC1	x				
PC2		x			
PC3		x			
PC4			x		
PP1		x			
PP2					x
PP3				x	
PP4				x	

Tabla 3.100. Como mejorar capacidades del alumnado asociadas a la descripción y clasificación

En la tabla 3.100 puede observarse que algunos profesores/as (3/8) señalan la construcción/ manipulación como medio para desarrollar capacidades del alumnado asociadas a la descripción y la clasificación. Por ejemplo, PC2 señala “Haciéndola más creativa, de forma que se lleven a cabo construcciones de las formas geométricas”. Y PC3 indica, “Presentando al alumnado las formas geométricas construidas”. Asimismo, se ha apuntado que trabajando las representaciones gráficas de las formas geométricas (2/8), bien mediante dibujos (PP4) o bien mediante programas informáticos o representaciones con el ordenador (PP3). Igualmente se ha comentado que realizando más tareas que trabajaran los contenidos geométricos (PC1), se razonasen los contenidos geométricos por parte del alumnado (PC4) y que los/las alumnos/as debatieren entre ellos/as los contenidos geométricos para obtener conclusiones (PP2).

3.3.4.2 Dificultades y errores del alumnado en relación con aspectos asociados a la descripción y la clasificación

Continuando con el punto de mira en el profesor, los contenidos y el alumnado, en este subapartado nos fijamos, por un lado, en respuestas del profesorado del curso online a la subtarea S-TEcg2-3 de la tabla 2.3 del apartado 2.2.3 del capítulo 2, en la que se cuestiona sobre las dificultades y errores de los/as alumnos/as de secundaria que han observado en el desarrollo de su tarea asociados a la descripción y la clasificación. Cabe aclararse que las anotaciones de los/as profesores/as han sido breves y carentes de explicación.

Por otro lado, consideramos respuestas del profesorado que realizó la encuesta en la que se les cuestionaba directamente sobre estas problemáticas.

Por lo que respecta a las dificultades que señalan los/as profesores/as como que enfrentan los/as alumnos/as al desarrollar actividad matemática asociada a la descripción, distinguimos según que estas se presenten para visualizar las formas geométricas (visión), en la utilización/expresión del vocabulario (lenguaje), en la representación de las formas geométricas (representación), al expresar las propiedades/características de ellas (propiedades) o simplemente no se indican o se apunta que no se conocen. En la tabla 3.101 hemos anotado con S o con Gp según que las dificultades se hayan asociado a la geometría de los sólidos o de las figuras planas.

Docente	Visión	Lenguaje	Representación	Propiedades	No indicadas
PO1	S	S, Gp	S, Gp		
PO2		S		Gp	
PO3	S				Gp
PO4	S	S, Gp			

Tabla 3.101. Dificultades del alumnado al desarrollar actividad matemática asociada a la descripción

Puede observarse que las dificultades que señalan los/as profesores/as como que presentan los/as alumnos/as, tanto para las formas geométricas del espacio como del plano, se expresan de forma muy general. Por ejemplo, PO1 en relación con las formas geométricas del espacio ha indicado “Falta de lenguaje, falta de visión espacial, falta de saber dibujar con cierta perspectiva”. Otros/as profesores/as, aunque han concretado un poco la dificultad, también se ha indicado muy generalizada. Por ejemplo, PO2 ha apuntado “En el espacio: tienen dudas de algunos conceptos: aristas, caras, bases, caras laterales, cuerpo de revolución” y “En el plano: no tienen claras las características que han de utilizar para la descripción: lados opuestos paralelos, igualdad de ángulos o lados”.

Las respuestas dadas por el profesorado en relación con los errores que el alumnado comete al desarrollar actividad matemática asociada a la descripción se han registrado en la tabla 3.102. También en este caso hemos anotado con S o con Gp según que los errores se hayan asociado a la geometría de los sólidos o de las figuras planas.

Docente	Lenguaje	Propiedades	No identificados/no indicados
PO1	S, Gp		
PO2		S, Gp	S
PO3	S		Gp
PO4	S		Gp

Tabla 3.102. Errores del alumnado en la descripción de las formas geométricas del espacio y del plano

Cabe subrayarse la brevedad de las respuestas dadas. Por ejemplo, PO3 ha señalado solo un error para las figuras del espacio "Confundir el concepto de vértices iguales con vértices del mismo orden" mientras que para el plano no ha indicado ningún error. Hay docentes, como PO1 que han indicado el mismo error para ambas formas geométricas y señalado la respuesta de forma muy general "El empleo de términos poco adecuados y la confusión que esto crea". PO2 ha señalado "Cuentan mal las caras, las aristas, vértices del mismo orden".

Las dificultades que los/as profesores/as indican como que enfrentan los/as alumnos/as al clasificar las formas geométricas del espacio y del plano, las hemos organizado como indicamos en la tabla 3.103 atendiendo al subapartado 1.5.2.2. del capítulo 1. Distinguimos las que nombramos como: i) propiedades, si se ha anotado que tienen dificultades en el conocimiento de las propiedades de las formas geométricas; ii) criterios, si se ha apuntado que la dificultad está en aplicar/saber los criterios para clasificar; iii) material, si se ha señalado que la dificultad está en no poseer material con el que se puedan manipular las formas geométricas, y iv) no indicadas, si ha apuntado que no sabe las dificultades que puedan tener o no se indican dificultades. En la tabla 3.103 hemos anotado con S o con Gp según que las dificultades se hayan asociado a la geometría de los sólidos o de las figuras planas.

Docente	Propiedades	Criterios	Material	No indicadas
PO1	Gp	Gp	S	
PO2		S, Gp		
PO3	S, Gp			
PO4	S			Gp

Tabla 3.103. Dificultades del alumnado en la clasificación de las formas geométricas del espacio y del plano

Puede observarse que las principales dificultades con que las se enfrenta el alumnado a la hora de clasificar se asocian al conocimiento de las propiedades que poseen las formas geométricas tanto en el espacio como en el plano. PO4 ha señalado que no acaban de asimilar las características de las formas geométricas. Cabe mencionarse que tanto PO3 como PO4 han señalado que la enseñanza de ellas debe mejorarse, apuntando PO3 que el profesorado no establece un "andamiaje" adecuado para la enseñanza de los contenidos matemáticos. Por otra parte, se ha comentado que el alumnado muchas veces no tiene claro los criterios que se han de aplicar a la hora de clasificar (PO2) o se olvidan de cuales son (PO1). Cabe mencionarse que PO1 ha hecho referencia a que la falta de recursos dificulta el aprendizaje de la clasificación en el alumnado, remarcando la falta de material para manipular.

Los errores que según el profesorado comete el alumnado al clasificar las formas geométricas del espacio y del plano los hemos organizado como en la tabla 3.104 atendiendo al subapartado 1.5.2.2. del capítulo 1. Distinguimos los que nombramos como: i) propiedades, si se ha comentado que tienen errores al expresar las propiedades/características que tienen las formas geométricas o sus elementos; ii) representación, si se ha anotado errores en la representación de las formas geométricas; iii) visualización, si se ha señalado que cometen errores por no visualizar correctamente las formas geométricas, y iv) no indicados, si ha apuntado que no sabe los errores que puedan tener o no se indican. En la tabla 3.104 hemos anotado con S o con Gp según que los errores se hayan asociado a la geometría de los sólidos o de las figuras planas.

Docente	Propiedades	Representación	Visualización	No indicados
PO1		Gp		S
PO2	S, Gp			
PO3	S, Gp		S, Gp	
PO4				S, Gp

Tabla 3.104. Errores del alumnado en la clasificación de las formas geométricas del espacio y del plano

Puede observarse que para las formas geométricas del espacio apenas se han señalado errores en la clasificación. Un/a docente ha apuntado que están relacionados con la falta de conocimiento en las propiedades de las formas geométricas y la visión de ellas. Y ha subrayado que parte de estos errores se deben al profesorado por no dotar de unas herramientas geométricas para poder desarrollar la capacidad de crear imágenes mentales en el alumnado, poniendo más énfasis en la enseñanza del cálculo. PO2 señala los mismos errores que para la descripción al indicar de nuevo “Los errores que tiene el alumnado se presentan al contar mal las aristas, los ángulos y las alturas”. Cabe destacarse que PO1 y PO4 han remarcado que no se le presta la atención necesaria a la clasificación de las formas geométricas, indicando PO4 la clasificación la centra en las clasificaciones mínimas que suele haber en los libros de texto y a partir de ahí trabajar más la parte de medición.

Para la clasificación de las figuras planas PO2 apunta que “No conocer las propiedades ocasiona que el alumnado no conozca la clasificación de figuras planas como los trapecios o clasificar los polígonos en cóncavos o convexos”. PO3 ha vuelto a subrayar que “El alumnado no domina ni las propiedades de las formas geométricas planas ni tiene una visión clara de ellas”. PO1 ha anotado que “Los errores son propios de no saber dibujar”.

Las dificultades y errores que los/as profesores/as encuestados/as han indicado como los detectados usualmente en geometría en los diferentes cursos de la ESO, los hemos categorizado según hagan referencia a habilidades (H), a los procesos de describir o clasificar las formas geométricas (P), a los contenidos de medición (M) o la resolución de problemas (R). En la tabla 3.105 hemos registrado estas respuestas marcando con una D si se ha indicado una dificultad de esa categoría y con una E si lo que se ha asignado ha sido un error.

Docente	H	P	M	R
PE1			D	D, E
PE2		D, E	D, E	D, E
PE3	D	D	D	D, E
PE4	D	D	E	D, E

Tabla 3.105. Dificultades (D) y errores (E) detectados en los/as alumnos/as en geometría: H- habilidades; P- procesos de describir o clasificar las formas geométricas; M- contenidos de medición; R- resolución de problemas

Se observa que, cuando se pregunta por las dificultades y errores que detecta el profesorado en geometría, es el bloque de medición y resolución de problemas en donde el profesorado señala que el alumnado tiene las mayores dificultades y errores. Si examinamos la tabla 3.105 se percibe que una buena parte del profesorado (3/4) también señala que el alumnado presenta dificultades en los procesos de describir y clasificar, pero remarcando los/as tres profesores/as que en la descripción y conocimiento de las formas geométricas planas. Cabe subrayarse que, en relación con los sólidos, ha habido dos profesores/as (PE3, PE4) que han apuntado que el alumnado presenta dificultades al visualizar las formas geométricas del espacio, categorizadas estas respuestas como habilidades. Por lo que respecta a los errores, se ha observado que solo un/a docente (PE2) ha mencionado que los/as alumnos/as cometen errores relativos a procesos matemáticos de la descripción y la clasificación, indicando que los errores en estos procesos se deben a la confusión entre los elementos del plano y del espacio.

3.3.5 La enseñanza de la geometría en los libros de texto

Dado que en las respuestas a la encuesta se destacó la importancia que tenían lo libros de texto en la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos, en este apartado se muestra el examen realizado en el curso presencial de la enseñanza de los sólidos que se propone en libros de texto de Matemáticas de las editoriales más utilizadas en ESO en la provincia de Valencia.

El estudio se ha realizado en el curso presencial a partir de la subtarea S-TEcg1-L en la que se han planteado las cuestiones CED1, CECl1, CED2, CECl2, CED6 y CECl6 centradas en la enseñanza en general de los sólidos y que se contemplan en la tabla 2.2 del apartado 2.2.3 del capítulo 2. Cada profesor/a de este curso ha comentado la parte correspondiente a la geometría de los sólidos que se muestra en los libros de texto de la ESO de una editorial concreta y ha respondido a las cuestiones planteadas en la subtarea propuesta.

De esta manera hemos obtenido información, en lo que corresponde a la geometría de los sólidos, sobre los aspectos que destaca el profesorado del curso presencial en relación con los libros de texto de la ESO. Comenzamos señalando las características que se han destacado como que tienen y/o deberían tener (subapartado 3.3.5.1). Seguimos indicando observaciones centradas en la introducción a la geometría de los sólidos (subapartado 3.3.5.2) y en las propuestas/tareas que se presentan en ellos para desarrollar su enseñanza/aprendizaje (subapartado 3.3.5.3). En el subapartado 3.3.5.4 exponemos las tareas/ejercicios que se quitarían o añadirían a las que se proponen en los textos examinados. Finalmente, en el subapartado 3.3.5.5 nos fijamos en las respuestas dadas cuando se cuestiona sobre lo que se considera que le falta al libro de texto examinado en su propuesta para la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos.

3.3.5.1 Características destacadas de los libros de texto en relación con la geometría de los sólidos

Las características de los libros de texto examinados en las que se han fijado los/as profesores/as del curso presencial están recopiladas en la tabla 3.106 y los comentarios que han hecho sobre ellas los indicamos al presentar las respuestas que han dado.

Docente	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
PP1	x	x	x	x				x
PP2	x	x		x			x	x
PP3	x		x	x	x	x		
PP4	x	x		x			x	x

Tabla 3.106. Características que según los docentes deberían tener los libros de texto: a) Explicaciones, definiciones y representaciones sencillas o claras; b) impacto visual; c) formas geométricas en contexto; d) tareas/ejercicios para comprender los contenidos; e) tareas/ejercicios en contexto; f) contenidos geométricos diferenciados; g) demostraciones de fórmulas y h) otras

El mostrar objetos o formas geométricas referentes a los sólidos que los/as alumnos/as encuentran en el entorno cotidiano es una de las características que se contemplan. PP3 ha indicado “Al final de los temas hay un pequeño apartado en el que se muestran problemas en los que se aplica la geometría de los sólidos en la vida cotidiana, pero que durante la explicación de los contenidos solo se muestran dibujos de figuras geométrica en un contexto matemático”. También se ha destacado que deben tener un alto impacto visual, señalando PP2 “Añadiría imágenes de mayor tamaño y más atractivas”. Destaca PP4 que “Es esencial que se muestren bastantes representaciones de los diferentes sólidos”. Asimismo, se ha remarcado que no se mostrara demasiada teoría y que las explicaciones fueran sencillas para el alumnado. PP1 comenta que “Los libros de texto empiezan con la definición de poliedro como cuerpo geométrico limitado por polígonos, la veo complicada para los alumnos. Los alumnos encuentran en esa definición palabras que no tienen todavía consolidadas. Yo empiezo diciendo que tiene 4 rectángulos iguales y 2 cuadrados que si los cierro tengo un poliedro. A partir de ahí ya les señalo la definición más formal. El libro tiene que mostrar diferentes imágenes de poliedros para que acaben comprendiendo lo que es un poliedro”.

Cabe destacar la importancia que dan los/as profesores/as a la inclusión de tareas en los libros de texto, las cuales, según ellos/as, han de estar muy relacionadas con la explicación que se lleva a cabo en la teoría, han de servir para comprender los contenidos, tienen que estar planteadas en contexto y algún docente añade que algunas tienen que ser lúdicas. Por ejemplo, PP1 indica “Añadiría actividades más lúdicas, plantillas para construir poliedros y cuerpos redondos, cosas más motivadoras, más lecturas referentes al tema que sean de interés para los alumnos, más aplicaciones prácticas y mostrar figuras relacionadas con el entorno”. PP3 ha subrayado que un libro de texto debe presentar una buena cantidad de ejercicios en los que se apliquen los contenidos. Por lo que se refiere a la explicación de los contenidos considera que debe tener una estructura clara y seguir un orden aclarando además “Me parece bien la estructura que se plantea en la explicación de los contenidos, primero la definición, luego explica los elementos de la figura, después la clasificación, posteriormente el desarrollo plano y finalmente sus fórmulas matemáticas”. Asimismo, PP2 ha señalado que habría que intentar no repetir tanto los contenidos y tipo de ejercicios lo largo de los cursos, pero sí que se plantearan suficientes ejercicios en cada curso con los nuevos contenidos. También, PP4 subraya que la geometría de los sólidos debe relacionarse con la cultura, haciendo hincapié en las relaciones históricas y ofrecer diferentes lecturas sobre los sólidos.

Estas características en las que se han fijado los profesores del curso presencial nos han llevado a que distingamos los textos según que en ellos se enfaticen aspectos visuales, teóricos, de contexto y/o referidos a "practicar". En los visuales se presentan sus propuestas de forma clara, sencilla y atrayente; en ellos se usan esquemas y diferentes tipos de representaciones visuales. PP2 hace referencia a este tipo de textos al responder "Los libros han de utilizar un vocabulario sencillo en sus definiciones y explicaciones, esquemas claros cuando se muestran las características y los tipos de figuras geométricas, demostraciones simples para las fórmulas del área y volumen y buenas representaciones de las figuras geométricas". En los teóricos se incide en la presentación completa de los contenidos geométricos. Como ejemplo, los de la respuesta de PP4 "Es fundamental para la enseñanza que en el libro se muestren todos los contenidos desarrollados que plantea el currículum sobre los sólidos. Me gusta que haya una definición clara de las figuras geométricas que se tratan, se expliquen sus elementos, se detalle la clasificación que se realiza y demostrar, dentro del nivel que se trabaje, como calcular su área y su volumen". Los que enfatizan aspectos "de contexto" centran su enseñanza/aprendizaje en propuestas de tareas/ejercicios con enunciados situados en el entorno cotidiano. Como ejemplo, los que corresponden a la respuesta de PP3 "Los libros deben tener una parte teórica en donde se expliquen los contenidos relativos a la geometría de los sólidos de una manera fácil y mayoritariamente ejercicios de aplicación en la vida cotidiana para que los alumnos vean utilidad a esta parte de la geometría". Por último, los que destacan aspectos referidos a "practicar" basan su enseñanza/aprendizaje en la realización de tareas, dedicando una parte a la explicación de los contenidos geométricos. La respuesta de PP1 refleja los textos que hemos incluido en esta categoría "Los libros de texto tienen que ofrecer una explicación teórica sencilla de los contenidos geométricos que incluyan definiciones, características, tipos, fórmulas…, de los cuerpos geométricos y, una gran cantidad y variedad de ejercicios de aplicación de forma que los alumnos aprendan con su realización los contenidos geométricos".

3.3.5.2 Sobre la introducción en el estudio

Las respuestas a cómo se considera que tendría que ser la introducción de la geometría de los sólidos en los libros de texto se registran en la tabla 3.107.

Docente	a)	b)	c)	d)
PP1		x	x	x
PP2	x	x	x	
PP3	x	x	x	
PP4	x	x	x	

Tabla 3.107. Cómo debe ser la introducción de la geometría de los sólidos en un libro de texto: a) motivadora/sencilla y/o hechos históricos, b) repasar contenidos y/o introducir los nuevos, c) conexión con el entorno y/o utilidad, d) dibujos y/o manipular cuerpos geométricos

Puede observarse que todo el profesorado considera que en la introducción de los cuerpos geométricos se deben repasar los conceptos que se han estudiado en cursos anteriores. Por ejemplo, PP2 señala que "Se debe hacer una introducción sencilla para que los alumnos repasen los conceptos anteriores". Asimismo, PP3 señala "Me parece interesante que se empiece con lecturas que hagan referencia a hechos históricos, pero veo más conveniente introducir las figuras geométricas que ya tendrían que conocer y algunas de las que se van a estudiar, relacionándolas con objetos de la vida cotidiana”. También se ha destacado que una introducción debe motivar al alumnado, puntualizando PP2 que se debería utilizar un lenguaje que no fuera técnico y que fuera apropiado para los/as alumnos/as del curso en cuestión, subrayando “Las introducciones de estos libros no me gusta cómo están estructuradas, son demasiado técnicas, poco motivadoras y algo alejadas de la realidad y la cotidianidad”. Destacando la motivación, PP4 ha señalado “las introducciones tienen que acercar la geometría a los alumnos para que vean que es útil en la vida real y así se animen a estudiarla”. Además, se ha especificado por todo el profesorado que debería conectar la geometría de los sólidos con el entorno cotidiano, comentando PP1 “Me parece bien que se muestren dibujos que relacionan lo que se va estudiar en el tema con objetos de la vida cotidiana”. Ha mencionado este/a docente, además, que sería conveniente que se propusiera material para construir las formas geométricas.

3.3.5.3 Sobre las propuestas/tareas que se presentan

Como la realización de tareas/ejercicios ha sido una de las características más señaladas que han de contener los libros de texto cuando se trata el tema de los sólidos, en este subapartado nos fijamos en las que según el profesorado se plantean mayoritariamente en los libros examinados, en lo que según ellos se destaca en las tareas/ejercicios que más se proponen y en sí les gustan o no las propuestas que se hacen en los libros de texto analizados para tareas/ejercicios relativos a la geometría de los sólidos.

Docente	Clasificación	Medición	Dibujar	Descripción
PP1	x	x		
PP2		x		
PP3		x	x	x
PP4		x	x	

Tabla 3.108. Tipos de tareas/ejercicios que más se proponen

La tabla 3.108 muestra que el profesorado ha subrayado que el tipo de tareas/ejercicios que más se propone sobre la geometría de los sólidos hace referencia a la medición. También se ha mencionado, aunque en menor medida que se tratan tareas/ejercicios en los que se pide que se dibujen las formas geométricas. Por último, se ha señalado puntualmente las tareas/ejercicios referentes a la clasificación y descripción, principalmente referidas a contar elementos. PP1, PP2 y PP3 han subrayado que en sus libros en primero de ESO no se suele trabajar la parte de medición en los sólidos, pero que en segundo y tercero de ESO sí. PP1 y PP2 han destacado que en sus libros se le da poca importancia a la geometría de los sólidos, mientras que PP3 ha apuntado que en sus libros hay un tema para ello. Sin embargo, PP4 ha apuntado que, en sus libros, en primero de ESO, se dedica un tema a los cuerpos geométricos calculando el volumen de ellos.

Dado que las tareas/ejercicios que más se han señalado han sido los de medición, en la tabla 3.109 se ha registrado lo que el profesorado destaca sobre estas tareas/ejercicios propuestos.

Docente	Aplicación fórmulas	Falta de problemas de contexto	Orden en que se presentan
PP1	x	x	
PP2	x	x	
PP3	x	x	
PP4	x		x

Tabla 3.109. Lo que se destaca de las tareas/ejercicios de medición

Los/as profesores/as han señalado que en todas las tareas/ejercicios de medición mostradas en los libros de texto hay que aplicar fórmulas matemáticas para su realización. PP1 señala “Algunos problemas son largos. En todos hay que aplicar la fórmula que se ha visto en la teoría”. Se remarca también por la mayoría del profesorado las pocas tareas/ejercicios que se presentan en contexto. PP3 señala “No hay apenas problemas que estén relacionados con la vida cotidiana”. Cabe mencionar que PP4 ha subrayado “Me gusta el orden en que se presentan las actividades de estos libros: cálculo mental, ejercicios para entrenarse, problemas para aplicar, actividades de refuerzo y finalmente actividades de ampliación”. En general, el profesorado propone que las tareas/ejercicios han de presentarse en contexto, no ser largos e iniciarse siempre con formas geométricas que sean familiares al alumnado.

Volviendo a las propuestas que se hacen en los libros de texto analizados para tareas/ejercicios relativos a la geometría de los sólidos cabe señalarse que encontramos docentes, como PP1 y PP2, que no les ha gustado la propuesta de tareas/ejercicios que se ha hecho en el libro de texto examinado y otros/as profesores/as, como a PP3 y PP4, a los que sí les ha gustado. Los primeros subrayan que son poco motivadoras para los/as alumnos/as, suelen ser bastante numéricas donde su resolución se basa en saber aplicar las fórmulas estudiadas para calcular áreas y volúmenes y, mayoritariamente se muestran las formas geométricas en un contexto matemático. Por otro lado, PP4 ha señalado que se empiezan con problemas de aplicación directa de fórmulas y luego presentan las formas geométricas en la vida real y PP3 ha destacado la diversidad y dificultad de algunos de las tareas/ejercicios mostradas.

3.3.5.4 Sobre las tareas/ejercicios que se quitarían o añadirían a las propuestas que presentan los libros de texto consultados para la geometría de los sólidos

Se ha observado en este estudio que el tiempo es un factor fundamental a la hora de tener en cuenta la enseñanza/aprendizaje de un contenido determinado de geometría y, en particular, la geometría de los sólidos. Por ello hemos planteado la misma cuestión considerando que nos situamos en dos situaciones diferentes: en una situación real y también en otra ideal en la que no hubiera limitación de tiempo.

Las respuestas a cuestiones sobre las tareas/ejercicios que se quitarían o añadirían en relación a la geometría de los sólidos a las propuestas que presentan los libros de texto consultados se registran en las tablas 3.110 y 3.111.

Docente	Unidades	Simetría	Proyecciones	Semejanza	Relaciones	Puntos/rectas/planos
PP1	x	x	x	x		
PP2		x	x	x		
PP3					x	
PP4						x

Tabla 3.110. Tipos de tareas/ejercicios que se eliminarían de los que se proponen en los libros de texto

Docente	Construcción	Ordenador	Contexto	Composición/descomposición	Representación
PP1	x	x			
PP2					x
PP3			x	x	
PP4		x			

Tabla 3.111. Tipos de tareas/ejercicios que se añadirían a los que se proponen en los libros de texto

Puede observarse que hay unanimidad en mantener los tipos de tareas/ejercicios que se han planteado referente a la geometría de los sólidos. Sin embargo, como muestra la tabla 3.110, en caso de reducirlas, se propone quitar las tareas/ejercicios referentes a los planos de simetría y ejes de rotación, señalando PP2 que considera que son complicados para el alumnado y PP1 que se habría que invertir bastante tiempo para que los entendieran. Asimismo, PP1 ha apuntado “Yo suprimiría los ejercicios referentes a las unidades de volumen y los pondría en un tema dedicado al sistema métrico decimal. Aquí ya lo daría por sabido y así se podrían realizar otro tipo de ejercicios”. PP1 y PP2 también han subrayado que, en un momento dado, eliminarían las tareas/ejercicios en los que se aplica semejanza de triángulos, por ejemplo, las referentes a los troncos de conos comentando PP1 “No les veo una aplicación más que la pura matemática” y PP2 subraya que a una parte del alumnado le costaría comprenderlos. Cabe mencionar que PP1 y PP2 han destacado que reducirían la parte de proyecciones en las que se pasa de una superficie esférica al plano, señalando PP1 “En este libro se les da importancia a los mapas dentro del tema de figuras en el espacio y luego no hay actividades sobre esto en el libro. Considero que los alumnos tendrían problemas para visionarlo”. PP2 subraya que se podía pasar a la asignatura de geografía. PP3 ha destacado que los ejercicios de relaciones de volumen, capacidad y masa no los explicaría porque piensa que se tendrían que tratar en la asignatura de ciencias. PP4 ha señalado que reduciría el número de ejercicios que se dedican a trabaja puntos, rectas y planos ya que opina que se puede profundizar sobre ellas al trabajar directamente con los cuerpos geométricos.

Si nos centramos ahora en las tareas/ejercicios que añadirían, tabla 3.111, contemplamos que serían principalmente aquellas que estuvieran relacionados con programas informáticos, apuntando PP4 “Se han de incluir ejercicios para realizarlos con el ordenador”. PP1 ha apuntado también relacionado con las nuevas tecnologías “Me gustaría que hubiera alguna actividad que requiriera ir al aula de informática donde los alumnos pudieran trabajar las figuras geométricas con el ordenador”. Asimismo, se observa, aunque en menor medida, que el profesorado también ha hecho referencia a la falta de tareas/ejercicios de representación en algunos manuales. Por ejemplo, PP2 ha anotado “Aquí no hay ejercicios en las que se pida que se dibuje el desarrollo plano de un cuerpo geométrico. Tampoco lo contario, ejercicios que pasen del desarrollo plano al cuerpo geométrico”. También ha añadido, que no hay ejercicios en los que se pida dibujar un cuerpo geométrico a partir de las características que deba cumplir. La falta de tareas/ejercicios en los que se proponga la construcción también ha sido indicando por algún docente como PP1 “Estos libros no tienen ninguna actividad en la que se trabaje la construcción y pienso que es interesante para conocer las figuras geométricas”. Igualmente, se subraya que se tendrían que incluir formas geométricas del entorno cotidiano que hicieran referencia a las estudiadas en clase. PP3 comentaba que se deberían centrar los ejercicios más en problemas relacionados con la vida cotidiana o, al menos, relacionarlos con situaciones más próximas al alumnado. De igual modo, también ha remarcado PP3 la falta de tareas/ejercicios en lo que para resolverlos hubiera que descomponer la forma geométrica en otras más sencillas y conocidas.

Hemos considerado interesante también plantear las mismas cuestiones, pero considerando situaciones diferentes, por un lado, cuando se tiene limitaciones de tiempo y, por otra, cuando se tiene una situación ideal en la que esto no ocurre. Las tablas 3.112 y 3.113 recopilan las respuestas dadas.

Docente	Ejercicios de cálculos	Selección contenidos	Demostraciones
PP1	x		
PP2		x	
PP3		x	
PP4			x

Tabla 3.112. Sobre lo que se eliminaría de la geometría de los sólidos si se tuviera limitación de tiempo

Docente	Ejercicios	TIC	Representaciones
PP1	x	x	
PP2	x		x
PP3	x	x	
PP4	x	x	

Tabla 3.113. Sobre lo que se añadiría de la geometría de los sólidos si no tuviera limitación de tiempo

Como muestra la tabla 3.112 hemos organizado en tres categorías las respuestas dadas a lo que se quitaría para explicar la geometría de los sólidos si se tuviera limitación de tiempo. Por una parte, aquellos ejercicios que el cálculo fuera un hándicap para la resolución del problema, como apunta PP1, “Hay problemas en estos libros que les costaría a los alumnos de resolverlos con lo que los quitaría porque lo que interesa es que sepan aplicar los conceptos a los problemas y no realizar grandes cálculos”. Por otra parte, se llevaría a cabo una selección de contenidos, bien en función de lo que se considera más importante, subrayado por PP2 “Haría una introducción rápida y visual, se trabajarían en clase los contenidos más importantes y seleccionaría lo ejercicios más significativos”; bien centrándose en los contenidos del propio curso, indicado por PP3 “Quitaría aquellos contenidos que el alumno ya sabe o al menos debería saber y que normalmente se suelen repetir a lo largo de los cursos”. Asimismo, se apunta que evitarían las demostraciones de las fórmulas de medición, apuntado por PP4 “Aunque considero que son importantes las demostraciones de las fórmulas, si no hay tiempo, directamente se señalan las fórmulas para calcular áreas y volúmenes y se aplican a los ejercicios”.

Al observar la tabla 3.113 se puede notar que, en caso de que no se tuviera limitación de tiempo, todo el profesorado del grupo presencial incrementaría en los textos el número de ejercicios a realizar proponiendo ejercicios más diversos, como clasificar y describir (PP1 PP2), construcción de figuras geométricas (PP1) y aplicados a la vida real (PP1, PP2 PP3, PP4) o sobre el truncamiento de los sólidos (PP4). También se añadiría el aplicar las TIC en la enseñanza de la geometría (PP1, PP4), indicando PP1 “No se indica nada de trabajar con programas informáticos”. Y un docente, PP2, ha señalado que ampliaría la cantidad de representaciones que muestra el libro para trabajar sobre ellas.

3.3.5.5 Sobre lo que se considera que le falta al libro de texto examinado

En la tabla 3.114 se muestran las respuestas de los/as profesores/as.

Docente	Actividades prácticas y visuales	Conexión con vida real	Utilización de recursos
PP1	x		
PP2		x	
PP3		x	
PP4			x

Tabla 3.114. Lo que se considera que le falta al libro de texto examinado

El profesorado ha indicado que, tomando como referentes para llevar a cabo la enseñanza de la geometría de los sólidos los manuales examinados, el alumnado tendría un buen nivel en geometría de los sólidos, pero que para que el alumnado tuviera un mayor nivel en esta materia, la propuesta sería, por una parte, hacerla más práctica (PP1), con más actividades enfocadas a la construcción y al uso del ordenador, subrayando que tocando y visualizando la geometría se aprende mejor. Por otra parte, se ha señalado que habría que conectarla con la vida cotidiana (PP3, PP2) destacando PP3 "Así le llamaría la atención al alumnado y se motivaría su aprendizaje". De igual modo, PP2 ha subrayado "Pondría actividades que estuvieran relacionadas con el exterior como buscar determinados cuerpos geométricos por tu ciudad o en casa". Finalmente, destacamos la propuesta del uso de recursos, apuntado por PP4 "Añadiría que se indicaran lecturas, vídeos, página de internet y material complementario relacionado con esta parte de la geometría".

3.3.6 Análisis de la enseñanza de contenidos geométricos en el contexto de la resolución de problemas

En este apartado se analiza la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos mediante el estudio de subtareas en las que estos contenidos están inmersos en el contexto de resolución de problemas. En el subapartado 3.2.1.2.4 de este capítulo ya hemos informado sobre las respuestas de los/as profesores/as de los cursos presencial y online a estas subtareas. En este apartado nos fijamos de nuevo en ellas dado que en las subtareas propuestas además de plantear resolver el problema correspondiente se incluyen otras cuestiones concernientes a la enseñanza/aprendizaje de los contenidos implicados en nuestro estudio. Hemos agrupado esta información en los subapartados 3.3.6.1. a 3.3.6.4, según las diferentes subtareas/problemas que hemos considerado. En cada uno de ellos examinamos las respuestas dadas sobre: i) su actuación al proponer a sus alumnos la subtarea correspondiente; ii) la adecuación o no para llevarla a la enseñanza en la ESO; iii) los contenidos geométricos implicados en ella iv) el orden que se establece para tratar la resolución del problema y los contenidos geométricos implicados; v) lo que se podría trabajar en clase con el problema planteado: vi) cuestiones que se pueden añadir a la subtarea y/o extensión del problema que se propone para desarrollar más actividad matemática a partir de ella, y vii) lo que se destaca de la subtarea correspondiente.

Cabe aclararse que en este apartado vamos a referirnos a las subtareas nombrándolas también como problemas dado que parte de las subtareas se centran en la resolución del problema correspondiente.

3.3.6.1 Subtarea S-TEcg2-P2

En relación con la actuación del profesor en sus clases al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2-P2, figuras A1.2 y A1.6 del anexo 1, en la que se cuestiona cuántos prismas y cuántas pirámides de caras regulares hay, hemos distinguido tres tipos de respuesta que registramos en la tabla 3.115 como a), b) y c).

Docente	Cómo se desarrollaría la clase			¿Se llevaría al aula?			
				Sí			No
	a	b	c	d	e	f	
PP1	x			x			
PP2		x		x			
PP3		x		x			
PP4	x			x			
PO1			x			x	
PO2		x			x		
PO3			x		x	x	
PO4	x			x		x	

Tabla 3.115. Actuación de los profesores al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2-P2: a) se explican las formas geométricas implicadas; b) se indica la definición de las formas implicadas, y c) se dibuja/construye las formas geométricas.

Se llevaría al aula la subtarea: d) sí, por la forma como se plantea el estudio de los contenidos geométricos; e) sí, por los contenidos geométricos que se pueden trabajar, y f) sí, por la importancia que puede tener para el aprendizaje

Por una parte, tenemos aquellos/as profesores/as que señalarían a los/as alumnos/as las características que tienen los prismas de caras regulares, como, por ejemplo, PP4 que les comentaría las condiciones que deben cumplir los prismas y pirámides regulares para que ellos dedujeran cuántos hay. Por otra parte, los que plantearían la subtarea definiendo que es un prisma o una pirámide de caras regulares, como, por ejemplo, PO2 que primero les establecería bien las definiciones de caras (bases o caras laterales), polígonos regulares y prismas de caras regulares, hasta que ellos se den cuenta de que las soluciones son las enunciadas. Finalmente, los que la propondrían a partir de una representación como PO3, que empezaría pidiéndoles que tracen primero polígonos regulares, y luego que comprueben si sobre los mismos se pueden trazar prismas o pirámides conservando la forma de la base o bases.

En cuanto a si esta subtarea se llevaría o no al aula de la ESO, la misma tabla 3.115 registra con d), e) y f) las respuestas de los docentes que son afirmativas. En ella se contempla que todos/as los/as profesores/as han indicado que es una subtarea para llevarla al aula, aunque han indicado diferentes razones en las que sustentan sus respuestas. La razón más señalada es estudiar los contenidos geométricos a partir de una tarea, entre las que tenemos la señalada por PP1, "Sí, porque es una forma diferente de estudiar cómo son las figuras regulares" o PP3 "Sí, porque se estudian las figuras a través de una actividad que tiene como contexto al colegio y alumnos". Seguidamente tenemos los que lo explican desde la importancia que pueda tener sobre el aprendizaje del alumnado, como PO4 "Sí que lo llevaría al aula porque los alumnos participan de una forma activa en la introducción de los conceptos geométricos". Por último, tenemos las respuestas de los/as profesores/as que han subrayado que con esta subtarea se trabajan los contenidos geométricos, por ejemplo, PO3 señala "Sí que trabajaría este problema, pues podemos trabajar desde lo más simple polígonos en el plano, a trabajar en el espacio y relacionarlo".

Los contenidos de geometría que se podrían tratar con esta subtarea S-TEcg2-P2 según el profesorado de los cursos presencial y online se registran en la tabla 3.116. En esta tabla también se recopilan las respuestas dadas en relación con el orden en que consideran que se han de tratar en clase los contenidos geométricos y los de resolución de problemas.

Docente	Contenidos para tratar			Qué se explicaría primero	
	a	b	c	d	e
PP1		x	x	x	
PP2		x			x
PP3		x			x
PP4	x			x	
PO1		x			x
PO2		x			x
PO3	x			x	
PO4	x				x

Tabla 3.116. Contenidos geométricos implicados en la subtarea S-TEcg2-P2 según el profesorado: a) formas geométricas del plano y del espacio; b) formas geométricas del espacio; c) cálculo de volúmenes y áreas.

Sobre el orden en el que se impartirían los contenidos geométricos y la subtarea: d) se explicarían primero los contenidos; e) se explicaría primero la subtarea

Puede observarse que los contenidos indicados por los diferentes profesores/as se refieren a las formas geométricas del espacio y/o del plano y a la medición. Por ejemplo, PO2 plantea que se pueden llevar a cabo definiciones, características... de la geometría de los sólidos. PO4 comenta que es posible trabajar los polígonos regulares y construcción de poliedros. Hay profesores/as como PP1 que indica “Definir, clasificar y representar los prismas y pirámides y calcular sus áreas y volúmenes”.

También puede notarse que los/as profesores/as han señalado en mayor proporción que lo más conveniente es explicar antes la subtarea que los contenidos geométricos. Las razones que han señalado versan sobre que se conocen los conocimientos geométricos (PO4, PO1) o se hace notar que los/as alumnos/as son capaces de encontrar la solución (PP2, PP3, PO2). Los que sugieren tratar primero los contenidos lo explican señalando que los contenidos geométricos se necesitan para resolver el problema o remarcando que tras explicar la teoría se pueden retomar los conceptos de nuevo al resolver la subtarea (PP1, PP4, PO3). Por ejemplo, PP4 indica “Primero les explicaría los conceptos para que la puedan hacer”.

Los contenidos que según el profesorado se podrían trabajar en clase con el alumnado con el problema planteado se refieran a: i) los prismas y pirámides, haciendo más preguntas relacionadas con estas formas geométricas; ii) los poliedros, trabajando más familias de poliedros, y iii) formas geométricas planas y del espacio, trabajando los contenidos geométricos del espacio y del plano. En la tabla 3.117 se han registrado las respuestas de los profesores organizadas en estas tres categorías.

Docente	Prismas/pirámides	Otras familias de poliedros	Formas geométricas planas y del espacio
PP1	x		
PP2		x	
PP3		x	
PP4		x	
PO1		x	

PO2		x	
PO3	x		
PO4			x

Tabla 3.117. Respuestas de los profesores sobre los contenidos a trabajar en clase a partir de la subtarea S-TEcg2-P2

Las preguntas que los/as profesores/as participantes añadirían a las planteadas en este problema se refieren a los contenidos que se han sintetizado en la tabla 3.117. Ejemplos de respuesta de profesores/as que ampliarían preguntas referentes a los prismas y pirámides son la de PP1 que "Realizaría cálculo de áreas y volúmenes con estas formas geométricas" o la de PO3 que cuestionaría "Si consideran que una estrella podría considerarse un prisma regular y que lo razonen". Respuestas que hacen referencia a extender las cuestiones del problema a otras familias de poliedros son las de PO1 que las extiende a los deltaedros de caras regulares y la de PO2 que lo hace para los antiprismas y bipirámides. Asimismo, PP4 considera que se podría trabajar el concepto de regularidad en otros poliedros; preguntaría "Por qué otros poliedros, además de los prismas y pirámides, pueden ser regulares y que características tendrían que cumplir". Y en la respuesta de PO4 se añaden preguntas generales sobre las formas geométricas planas o del espacio. Cuestiona "¿Qué es un polígono regular? ¿Qué es un poliedro, un prisma, una pirámide?"

Las respuestas sobre lo que ha llamado la atención de este problema al profesorado participante se han registrado en la tabla 3.118. En ella nombramos como: i) conceptos geométricos, si se señala que se pueden trabajar diferentes conceptos geométricos; ii) razonamiento, si se indica que la resolución del problema implica razonamiento; iii) planteamiento, si se incide en cómo se plantea el estudio de los contenidos geométricos implicados; iv) resultado, si se refieren a las soluciones del problema, y v) confusión, si se considera que se deberían explicar los términos incluidos en el problema.

Docente	Conceptos geométricos	Razonamiento	Planteamiento	Resultado	Confusión
PP1	x				
PP2		x			
PP3			x		
PP4			x		
PO1				x	
PO2					x
PO3					x
PO4				x	

Tabla 3.118. Sobre lo que ha llamado la atención de los profesores de esta subtarea S-TEcg2-P2

Por lo que se refiere a lo que les ha llamado la atención de este problema cabe destacarse las respuestas de algunos/as profesores/as que han señalado la solución obtenida (PO1, PO4). Por ejemplo, PO4 ha especificado que "No sé si lo he resuelto correctamente porque no he obtenido ningún límite para el número de prismas, pero sí para el número de pirámides". También cabe señalar las respuestas en las que se indica que los conceptos trabajados pueden llevar a confusión en los/as alumnos/as con lo que se habría de especificar a qué se refieren al plantear la subtarea (PO2, PO3). Y aquellas en las que se ha destacado el planteamiento con el que se trata de estudiar los conceptos tratados (PP3, PP4), el razonamiento que puede realizar el alumnado para resolver el problema (PP2) y los conceptos geométricos que se puedan trabajar a partir de él (PP1).

3.3.6.2 Subtarea S-TEcg2-P3

En relación con la actuación del profesor/a en sus clases al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2- P3, figuras A1.3 y A1.6 del anexo 1, referida al diseño del embalaje presentado cumpliendo las condiciones planteadas, fijándonos en cómo se comenzaría el planteamiento del problema hemos distinguido tres tipos de respuesta que en la tabla 3.119 nombramos como a), b) y c).

Docente	Cómo se resolvería			Llevarlo al aula				
				Sí			No	
	a	b	c	d	e	f	g	h
PP1	x				x			
PP2			x		x	x		
PP3	x							x
PP4		x					x	
PO1		x					x	
PO2		x				x		
PO3			x	x				
PO4		x		x	x			

Tabla 3.119. Actuación de los profesores al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2-P3: a) se centran en las características del envase (forma, nombre, …) y después se propone rellenar el espacio; b) se centran en rellenar el espacio y después se exige que el envase tenga las características citadas; c) se propone a los/as alumnos/as que se elija según sus criterios, los tipos de embalaje y que se expresen las razones de su elección.

Sobre si se llevaría al aula esta subtarea: d) Sí, por su aplicación a la vida cotidiana; e) sí, por ser una tarea atractiva; f) sí, porque la tarea tiene una respuesta abierta/sin datos; g) no, por ser complicado para la ESO; h) no, por no presentar una solución exacta.

Puede observarse que a la hora de plantear el problema el profesorado se centra en dos condiciones especialmente: que el embalaje tenga un formato adecuado a las características exóticas del perfume y que el embalaje permita un empaquetamiento fácil, dejando en un segundo plano la parte de medición, como son la capacidad y el coste del material. De estas dos condiciones, los/as profesores/as se centrarían primero en encontrar formas geométricas que les permitan un correcto almacenamiento. Por ejemplo, PO4 responde “Descartar en primer lugar las figuras que no permitan un fácil almacenamiento como esfera, cono y cilindro, y del resto de poliedros comparar para volúmenes similares, sus superficies. Creo que el que tenga una forma exótica es secundario”. Entre los que se centrarían primero en las características del envase tenemos a PP3 que indica “Les comentaría que piensen que ha de ser un producto que se ha de vender luego, primero que analicen las formas que pudiera tener porque tenía que hacer referencia a Oriente y despierte el interés de los clientes”. Por último, indicamos aquellas respuestas que dejarían al alumnado que eligieran los criterios utilizados, por ejemplo, PP2 señala “Que propongan embalajes, estudien cada tipo de los propuestos, den las razones de por las que utilizar uno u otro y finalmente decidan con cual se quedarían y por qué”.

En cuanto a si esta subtarea se llevaría o no al aula de la ESO, la misma tabla 3.119 registra con d), e) y f) las respuestas de los docentes que son afirmativas y con g) y h) las negativas. En ella se contempla que mayoritariamente se ha indicado que sí, siendo las razones de ello que es una tarea que tiene aplicación en la vida real, como señalaba PP1 al responder “En la vida real se han de transportar cosas de forma que ocupen el mínimo espacio posible”. También se remarca los que la llevarían al aula porque la consideran una tarea atractiva para el alumnado, como expresa PO3 “En mi opinión es muy creativa y motivadora pudiendo despertar en los alumnos el gusto por la investigación”. Finalmente, dentro de los que la llevarían al aula se ha marcado que la consideran interesante por no tratar datos concretos ni tener una respuesta única; ejemplo de este tipo de respuesta es la de PO2 “Lo veo adecuado a partir de 3º de ESO y se trata de un problema “abierto” donde podemos considerar varias soluciones. Sí que lo llevaría al aula, sobre todo para ver las diferentes soluciones que dan los alumnos y que se den cuenta que podemos mejorar algunas de ellas”. Si miramos ahora los/as docentes que han indicado que no la llevarían a la enseñanza tenemos dos razones, una es por la dificultad que pueda tener el problema para los alumnos de la ESO, como indicaba PP4 “Se necesitaría realizar un análisis detallado de las figuras que se pueden utilizar, y esto no lo podrán hacer sin ayuda”. Asimismo, PO1 ha subrayado que lo llevaría posiblemente al Bachillerato y dentro de otro bloque. La otra razón, y en contraposición a lo indicado por otros/as docentes, se ha señalado que al no tener una solución definida llevaría a los/as alumnos/as una resolución liosa, por lo que PP3 plantea poner más condiciones.

Los contenidos de geometría que se podrían tratar con esta subtarea S-TEcg2-P3 según el profesorado de los cursos presencial y online se registran en la tabla 3.120. En esta tabla también se recopilan las respuestas dadas en relación con el orden en que consideran que se han de tratar en clase los contenidos geométricos y los de resolución de problemas.

Docente	Contenidos para tratar				Qué se explicaría primero	
	a	b	c	d	e	f
PP1	x				x	
PP2		x			x	
PP3		x				x
PP4	x	x				x
PO1			x		x	
PO2		x	x		x	
PO3				x	x	
PO4	x	x			x	

Tabla 3.120. Contenidos geométricos implicados en la subtarea S-TEcg2-P3 según el profesorado. Se refieren a: a) identificar/describir formas geométricas; b) calcular áreas o volúmenes; c) rellenar el espacio con sólidos, y d) relacionar forma y capacidad.

Sobre el orden en el que se impartirían los contenidos geométricos y la subtarea: e) se explicaría primero la subtarea, y f) se explicaría primero los contenidos

Puede observarse que los contenidos más señalados por los/as profesores participantes como los que se podrían tratar con este problema se refieren al cálculo de áreas y volúmenes. Asimismo, algunos/as profesores/as ven este problema enfocado al estudio de las características y propiedades de las formas geométricas del espacio y alguno/a de ellos/as considera que se podría orientar a estudiar el rellenado del espacio con los sólidos, como ha indicado PO1 en su respuesta “El rellenar el espacio con los sólidos es un problema complicado, sobre todo si se sale de los prismas”. Finalmente, un/a profesor/a, PO3, ha visto en este problema una forma de trabajar la relación entre dos características de los sólidos, la forma y la capacidad.

La tabla 3.120 muestra también que la mayoría de los/as profesores/as (6/8) plantearían antes el problema que los contenidos geométricos. Las razones que han señalado se refieren, por un lado, a la implicación de los/as alumnos/as en el proceso de enseñanza/aprendizaje, señalando que los/as alumnos/as llevarían a cabo un descubrimiento y búsqueda de la información de los contenidos a tratar (PP1, PP2, PO3) y, por otro lado, se subraya que con la resolución de este problema se pueden ir explicando determinados contenidos geométricos (PO1, PO2, PO4). Por ejemplo, PP2 ha indicado que al realizar los/as alumnos/as el problema han de pensar sobre los conceptos de las formas geométricas y por tanto llevarán a cabo un aprendizaje más efectivo. PO4 indica "Sería mejor plantear primero el problema, porque en secundaria tienen ya conocimientos de geometría y a partir de lo que les va sugiriendo el problema se podrían explicar los contenidos geométricos". Cabe señalar también la respuesta de PP1, quien ha indicado además que el problema hace que el alumnado sienta curiosidad a través de él por la geometría. La tabla3.121 muestra también que una parte del profesorado (2/8) considera más conveniente explicar primero los contenidos geométricos y después realizar la subtarea. Estos/as profesores/as expresan que "Explicando primero los contenidos se realiza más rápido el problema" (PP3) y que "Es necesario saber los contenidos geométricos para la resolución de la tarea" (PP4).

Centrándonos en cómo ampliaría el profesorado este subtarea, en la tabla 3.121 hemos organizado las respuestas de los/as profesores/as participantes en tres categorías. Por un lado, aquellas que hacen referencia a realizar preguntas relacionadas con la economía (a). Por otro lado, aquellas que versan sobre el estudio de las formas geométricas (b). Por último, aquellas que están orientadas a obtener una opinión del problema (c).

Docente	a	b	c
PP1	x		
PP2		x	
PP3		x	
PP4		x	
PO1		x	
PO2		x	
PO3			x
PO4		x	

Tabla 3.121. Respuestas de los profesores sobre la ampliación de la subtarea S-TEcg2-P3 para clases de la ESO

Puede notarse que la mayoría de los/as profesores/as (6/8) ampliaría este problema planteándoles más cuestiones relacionadas con las formas geométricas u objetos cotidianos. Entre estas preguntas destacamos las que señalan que se investigaran más formas geométricas u objetos relacionado con lo señalado, como PP2. También las que investigarían como son los objetos en la vida cotidiana, como PP3. Igualmente, las que estudiaran relaciones entre los elementos de las formas geométricas, como PO1. Sin embargo, algún/a profesor/a comenta que se podrían plantear cuestiones que hicieran referencia a la parte económica del producto como cuánto costaría realizarlo y llevar a cabo su publicidad (PP1). Asimismo, otro/a profesor/a apunta que haría preguntas referentes a la opinión del alumnado sobre la resolución del problema planteado.

Las respuestas sobre lo que ha llamado la atención de este problema al profesorado participante se han registrado en la tabla 3.122. En ella nombramos como: i) contexto, si hace referencia a que es un problema de aplicación cotidiana; ii) complicada, si se considera difícil para la ESO; iii) otros contenidos, si se considera que no es un problema de geometría; iv) exótica, si se hace referencia a figuras exóticas, y v) creativa, si se contempla que esta subtarea es creativa.

Docente	Contexto	Complicada	Otros contenidos	Exótica	Creativa
PP1	x				
PP2	x				
PP3		x			
PP4		x			
PO1			x		
PO2				x	
PO3				x	
PO4					x

Tabla 3.122. Sobre lo que ha llamado la atención del profesorado de esta subtarea S-TEcg2-P3

Se observa que lo que ha llamado la atención a los/as profesores/as en relación con este problema es que el problema tiene un enfoque real para el alumnado que lo puede aplicar a objetos cotidianos. Por ejemplo, PP1 ha señalado que se podía dar realmente en situaciones de la vida cotidiana con otros objetos, como por ejemplo fabricando y transportando diferentes tipos de bebidas o envases de comida. También se ha destacado la dificultad de relacionar una forma geométrica con una figura exótica. Por ejemplo, PO3 ha señalado la dificultad que ha tenido encontrar una forma geométrica exótica. Asimismo, se ha hecho mención a la complicación que puede tener el problema para resolverlo un alumno de la ESO, destacando PP3 que era un problema lioso y largo para el alumnado. Entre las otras respuestas encontramos a PO4 que lo ve creativo, remarcando, sin embargo, largo de resolver. Cabe mencionar que un/a docente (PO1) remarca que no lo consideran un problema propio geometría métrica (PO1) a pesar de unificar contenidos matemáticos de geometría, cálculo y álgebra.

3.3.6.3 Subtarea S-TEcg2-P4

En relación con la actuación del profesor/a en sus clases al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2-P4, figuras A1.4 y A1.6, del anexo 1, hemos distinguido dos tipos de respuesta que registramos en la tabla 3.123 como a), b).

Docente	Como se resolvería		Llevarla al aula			
			Sí			No lo sabe
	a	b	c	d	e	
PP1	x		x			
PP2		x	x		x	
PP3	x			x		
PP4	x		x			
PO1	x				x	
PO2	x			x		
PO3		x				x
PO4	x				x	

Tabla 3.123. Actuación del profesorado al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2-P4: a) se propondría al alumnado analizar diversos casos y después seleccionar la solución adecuada, y b) se guiaría al alumnado por el camino en el que se parte del dibujo del recorrido.
Sobre si se llevaría al aula esta subtarea: c) sí, la problemática se plantea también en la vida cotidiana; d) sí, se favorece el razonamiento; e) sí, se trabajan contenidos geométricos, y f) no se sabe, se ve que resolver la tarea es complicado para el alumnado

Puede observarse que el profesorado plantearía al alumnado que buscara diferentes soluciones y las analizara hasta obtener la que más se ajuste a lo pedido (6/8). Como ejemplo de este tipo de repuestas tenemos la de PO4 que plantearía al alumnado que primero ensayara diferentes recorridos, comprobara cuál es el más corto y después realizara los cálculos. También tenemos a PO1 que conecta la geometría de los sólidos con el plano, destacando que les daría diferentes desarrollos de un prisma para que el alumnado pintara el camino más corto con una regla. Fijándonos ahora en los/as docentes que señalarían al alumnado el recorrido que habría que hacer tenemos la respuesta de PP2 que les comentaría que lo resolvieran haciendo cálculos sobre el camino que se había indicado en el enunciado. Asimismo, PO3 les plantearía el dibujo haciendo una representación plana de la posible solución del problema.

En cuanto a si esta subtarea se llevaría o no al aula de la ESO, la misma tabla 3.123 registra con c), d) y e) las respuestas de los docentes que son afirmativas. En ella se contempla que la tarea se llevaría al aula por la conexión que tiene con una problemática que puede plantearse en la vida real; por ejemplo, PP1 responde “Que realizaría esta tarea en el aula porque considera que es un problema que se le podría plantear al alumnado en su vida real y tendría que resolverlo”. También se destaca que la tarea permite que los alumnos trabajen contenidos geométricos o que desarrollen el nivel de razonamiento. Por ejemplo, PO4 responde “Sí que lo llevaría al aula, porque intentando resolverlo tienen que pensar en conceptos geométricos de longitudes, diagonales, longitudes mínimas” y PP3 expresa que “Los alumnos han de razonar para poder encontrar la solución más óptima”. Cabe comentarse que el/la único/a docente que ha señalado que no sabe si lo llevaría al aula, ha matizado que no consideraba que el alumnado por sí solo pudiera hallar la solución, aunque también ha destacado que dependería del curso.

Los contenidos de geometría que se podrían tratar con esta subtarea S-TEcg2-P4 según el profesorado de los cursos presencial y online se registran en la tabla 3.124. En esta tabla también se recopilan las respuestas dadas en relación con el orden en que consideran que se han de tratar en clase los contenidos geométricos y los de resolución de problemas.

Docente	Contenidos para tratar				Qué se explicaría primero	
	a	b	c	d	e	f
PP1		x				x
PP2	x	x	x		x	
PP3		x				x
PP4		x				x
PO1		x		x		x
PO2			x	x		x
PO3			x	x	x	
PO4	x					x

Tabla 3.124. Contenidos geométricos implicados en la subtarea S-TEcg2-P4 según el profesorado: a) formas geométricas y/o sus elementos; b) cálculo de perímetros, longitudes, distancias, etc.; c) aplicación de fórmulas y teoremas como el de Pitágoras, y d) representación de formas geométricas del espacio en el plano.

Sobre el orden en el que se impartirían los contenidos geométricos y la subtarea: e) se explicarían primero los contenidos, y f) se explicaría primero la subtarea

Puede observarse que los contenidos más señalados por los/as profesores/as participantes como los que se podrían tratar con este problema se refieren al cálculo de distancia, longitudes, perímetros…, remarcando PO1 que trata los problemas de mínima distancia. Asimismo, también se ha destacado la aplicación de fórmulas y teoremas, como el de Pitágoras, ya que de alguna manera lo utilizan algunos/as docentes para su resolución. Igualmente, se han señalado el estudio de las características de las formas geométricas ya que bien se han de representar gráficamente, aplicar sus propiedades y/o usar sus elementos para poder resolver el problema. Por ejemplo, PP2 ha especificado que se pueden trabajar figuras geométricas como el triángulo. Finalmente, se ha indicado las representaciones planas de las formas geométricas, bien al trabajar los desarrollos planos de los sólidos, o bien al proyectar la recta sobre un plano, como ha señalado PO2.

La tabla 3.124 muestra también que la mayoría de los/as profesores/as (6/8) plantearían antes el problema que los contenidos geométricos. Las razones que se han señalado hacen referencia bien a que no hacen falta contenidos previos para su resolución (PP1, PP3), bien a que se pueden introducir y/o explicar los conceptos a partir de él (PO1, PO2, PO4). También se hace notar, como señala PO4, que los contenidos que se aplican en el problema ya los conocen los estudiantes en secundaria. Los que sugieren tratar primero los contenidos lo explican señalando que los contenidos geométricos se necesitan para resolver el problema, especificando PP2 y PO3 que es necesario conocer el teorema de Pitágoras para poder solucionarlo.

Centrándonos en cómo ampliaría el profesorado esta subtarea, en la tabla 3.125 hemos organizado las respuestas de los/as profesores participantes en categorías que nombramos como: i) áreas y volúmenes, si se propone trabajar aplicaciones de áreas y volúmenes; ii) modificar datos, si se plantea modificar o ampliar algunos datos y/o condiciones de la subtarea; iii) aplicación real, si se sugiere estudiar alguna situación real relacionada con la subtarea; iv) opinión de la subtarea, si le considera interesante averiguar la opinión del alumnado en relación con la subtarea, y v) formas geométricas, si se señalan estas como objeto para ampliar el estudio.

Docente	Áreas y volúmenes	Modificar datos	Aplicación real	Opinión de la subtarea	Figuras geométricas
PP1		x			
PP2					x
PP3			x		
PP4	x				
PO1		x			
PO2		x			
PO3				x	
PO4					x

Tabla 3.125. Respuestas de los profesores sobre la ampliación de la subtarea S-TEcg2-P4 para clases de la ESO

Puede notarse que la opción más señalada por el profesorado (3/8) corresponde a la de plantear cuestiones en las que se modifiquen los datos y/o condiciones del problema. Por ejemplo, PO1 cuestionaría qué ocurriría si los puntos A y B siguieran enfrentados, pero a un metro de la pared de la derecha. Le sigue la propuesta de trabajar las formas geométricas (2/8). Por ejemplo, PO4 señala que al ser la habitación un tipo de prisma realizaría preguntas sobre sus elementos como cuáles son las diagonales de las caras. Cabe mencionar que este /a profesor/a también ha preguntado por cuál es la diagonal de un prisma, haciendo referencia a una diagonal del espacio. Las otras opciones se han nombrado solo por un docente. PP4 se centraría en llevar a cabo problemas de medición calculando áreas y volúmenes, al solicitar que se calculasen la cantidad de pintura para pintar la habitación. Por otro lado, PP3 plantea estudiar situaciones de la vida cotidiana similares a la propuesta al sugerir que se buscaran ejemplos de la vida real en los que se pudieran dar situaciones similares a la planteada. Y un/a docente cuestionaría al alumnado sobre la opinión que tiene de la subtarea.

Las respuestas sobre lo que ha llamado la atención de este problema al profesorado participante se han registrado en la tabla 3.126. En ella las sintetizamos como: i) aplicación vida cotidiana, si se ha destacado que la tarea permite mostrar la aplicación de la geometría para resolver problemas del entorno cotidiano; ii) cómo se ha considerado, si se considera fácil o difícil para el alumnado, y iii) planteamiento, si se ha remarcado cómo se ha enunciado la subtarea.

Docente	Aplicación vida cotidiana	Como se ha considerado	Planteamiento
PP1	x		
PP2			x
PP3	x		
PP4	x		
PO1		x	
PO2	x		
PO3		x	
PO4		x	

Tabla 3.126. Sobre lo que ha llamado la atención de los profesores de esta subtarea S-TEcg2-P4

Puede observarse que la mitad de los/as profesores/as (4/8) ha acentuado de esta tarea la aplicación de la geometría para resolver problemas de la vida cotidiana. Por ejemplo, PP1, destaca que con esta tarea se plantea una situación real en la que el alumno podría ver la aplicación de la geometría y PP4 señala que el alumnado realizando la subtarea podrá contemplar el ahorro de material realizando las cosas por el camino más corto. También se ha subrayado que la subtarea resulta fácil o difícil para los/as alumnos/as. Por ejemplo, PO1 y PO4 la han considerado fácil, mientras que PO3 ha anotado que la ha considerado difícil. Asimismo, PP2 ha hecho mención al planteamiento, precisando que considera que no se debería proporcionar el dibujo ya que hace que el alumnado no razone la respuesta.

3.3.6.4 Subtarea S-TEcg2-P5

Hemos de señalar que, aunque esta subtarea S-TEcg2-P5 ha sido también propuesta en el curso en comunidad, no vamos a incluir en este subapartado respuestas de profesores/as de ese curso al no presentar el mismo modelo de cuestiones que en el curso presencial y online. Las respuestas de los/as profesores/as de estos cursos sobre la enseñanza que se imparte a partir de esta subtarea, figuras A1.5 y A1.6 del anexo 1, en la que se plantea que se analicen las diferentes figuras planas que se han propuesto para cubrir el plano en los diferentes proyectos que se han planteado, las hemos organizado en la tabla 3.127 como a), b) y c).

Docente	Cómo se resolvería			Lo llevarían al aula				
				Sí				No
	a	b	c	d	e	f	g	
PP1	x		x	x	x		x	
PP2	x		x		x			
PP3	x		x			x		
PP4		x			x	x		
PO1		x	x	x				
PO2	x				x			
PO3		x				x		
PO4	x		x			x		

Tabla 3.127. Actuación de los profesores al desarrollar la enseñanza a partir de la subtarea S-TEcg2-P5: a) se usa la representación gráfica de las figuras planas propuestas; b) se usa su construcción con materiales, y c) se plantea una comprobación matemática numérica.

Sobre si se llevaría al aula esta subtarea: d) sí, plantea ejercicios de medición referentes al perímetro y área; e) sí, trabaja el recubrimiento de superficies con figuras planas; f) sí, tiene aplicación en la vida real, y g) sí, plantea investigación matemática para el alumnado.

Puede observarse que todo el profesorado plantearía al alumnado llevar a cabo el recubrimiento del plano mediante la representación de las figuras geométricas, bien mediante representaciones planas o con la construcción de los polígonos correspondientes. La mayoría de los profesores plantearían que realizaran el dibujo de las figuras geométricas que van a utilizar, como señala PP2, "Lo más sencillo para comprobar que cubren el plano es dibujar las figuras". El resto de los/as profesores/as plantearían la construcción de las mismas, como ha indicado PO1 "Se construirían un cuadrado y un hexágono de igual perímetro y a partir de ellos, se comprobaría que efectivamente el hexágono encierra un área mayor". Asimismo, observamos que algunos/as profesores/as han apuntado que se podrían realizar cálculos para comprobar que cumplen las condiciones expuestas; por ejemplo, PP1 indica que "Sería conveniente calcular el perímetro y el área de las figuras utilizadas para comprobarlo".

En cuanto a si esta subtarea se llevaría o no al aula de la ESO, la misma tabla 3.127 registra con d), e), f) y g) las respuestas de los docentes. Puede notarse que todo el profesorado participante ha dado una respuesta afirmativa. Entre ellas destacan, por una parte, que es un problema que trabaja el recubrimiento del plano, como anota PP2, "Es una forma diferente de plantear en geometría los problemas de mosaicos". Por otra parte, que tiene utilidad en la vida real, como indica PP3, "Hay diferentes situaciones en la vida real que debes cubrir el plano, por ejemplo, al chapar una pared". Asimismo, también se ha señalado que es una subtarea para trabajar cálculos de perímetros y áreas, subrayando PP1 "Indirectamente se trabajan los conceptos de perímetro y área". Además, se ha subrayado también por PP1, que "Este tipo de subtareas implican una investigación por parte el alumnado a la que no están acostumbrados".

Los contenidos de geometría que se podrían tratar con esta subtarea S-TEcg2-P5 según el profesorado participante se registran en la tabla 3.128. En esta tabla también se recopilan las respuestas dadas en relación con el orden en que consideran que se han de tratar en clase los contenidos geométricos y los de la resolución del problema planteado.

Docente	Contenidos para tratar				Qué se explicaría primero	
	a	b	c	d	e	f
PP1	x	x	x			x
PP2	x	x	x			x
PP3		x	x			x
PP4	x	x	x		x	
PO1		x	x		x	
PO2		x	x	x		x
PO3	x	x			x	
PO4	x	x	x			x

Tabla 3.128. Contenidos geométricos implicados en la subtarea S-TEcg2-P5 según el profesorado que se refieren a: a) figuras planas; b) calcular perímetros y áreas; c) rellenar el plano y construir mosaicos, y d) realizar movimientos en el plano.

Sobre el orden en el que se impartirían los contenidos geométricos y la subtarea: d) se explicarían primero los contenidos, y e) se explicaría primero la subtarea

Puede observarse que los contenidos más señalados por los/as profesores/as participantes como los que se podrían tratar con este problema se refieren de nuevo al cálculo de áreas y perímetros, especificando PP3 que "Con estas magnitudes se comprueba matemáticamente con qué figuras geométricas se puede gastar menos material y ocupar más espacio". Además, se ha señalado que se puede trabajar el cubrimiento completo del plano aplicando determinadas condiciones, apuntando PP3 que el alumnado podría ver una aplicación real del recubrimiento del plano. También se ha apuntado que con esta subtarea se podrían estudiar las características de las figuras geométricas, indicando PP1 que "Se han de conocer las propiedades de las figuras geométricas para su realización". Finalmente, cabe mencionar que un/a docente, PO2, ha señalado que "Se aplicaría para estudiar movimientos de las figuras geométricas" sin realizar ninguna especificación.

En cuanto a si se plantearía primero el problema o se explicarían primero los contenidos, en la tabla 3.128 observamos que de nuevo mayoritariamente (5/8) se propondría primero el problema. Las razones que se han señalado hacen referencia, por una parte, que son contenidos que el alumnado ya ha trabajado en los niveles educativos anteriores y por lo tanto debería conocerlos (PP1, PP2, PO4), anotando PO4 que a partir de este problema se podrían introducir los conceptos que fueran nuevos. Por otra parte, PP1 y PO2 consideran que es un problema para que su discusión y razonamiento conduzcan a la explicación de ciertos contenidos relacionados con la geometría plana. Los/as profesores/as que expresan que explicarían primero los contenidos (PP4, PO3) lo explican señalando que conocer los contenidos es fundamental para llevar a cabo la resolución del problema, destacando PO3 que "si no están dotados de instrumentos para resolverlo, difícilmente van a dar con la solución". Cabe destacar que PO1 ha anotado que aplicaría este problema para asentar los conceptos ya adquiridos.

Centrándonos en cómo ampliaría el profesorado esta subtarea, en la tabla 3.129 registramos las respuestas dadas por el profesorado participante. Hemos establecido cinco categorías distinguiendo según que los contenidos se refieran a: a) realizar cálculos de perímetros y áreas de las figuras geométricas; b) examinar las figuras geométricas que pueden recubrir el plano; c) estudiar las propiedades de las figuras geométricas; d) relacionar los elementos de las figuras geométricas con determinadas magnitudes geométricas, y e) cuestionar sobre dificultades que se tienen en la resolución de la subtarea.

Docente	a	b	c	d	e
PP1			x		
PP2	x				
PP3		x			
PP4		x			
PO1	x				
PO2		x	x		
PO3				x	
PO4		x			x

Tabla 3.129. Respuestas de los/as profesores/as sobre la ampliación de la subtarea S-TEcg2-P5 para clases de la ESO

La tabla 3.129 muestra que lo que más señalado por los/as profesores/as (4/8) son cuestiones sobre las figuras geométricas que pueden recubrir el plano. Por ejemplo, PP4 expresa que "Incluiría cuestiones sobre qué figuras planas regulares e irregulares pueden recubrir el plano". También se ha apuntado, aunque por un número menor de profesores/as (2/8) que se establecerían cuestiones relacionadas con las propiedades que cumplen las figuras geométricas planas. Como ejemplo, la respuesta de PP1 quien plantearía "Cuestiones relacionadas con el cálculo de diagonales o el valor de los ángulos interiores de las figuras geométricas que se utilizaran". Asimismo, se ha anotado por algunos/as profesores/as (2/8) que se añadirían preguntas sobre el cálculo de áreas y perímetros. Por ejemplo, PO1 que plantea que "Se calcule el área de determinadas figuras geométricas como las que se han presentado en el enunciado". Además, cabe mencionar las respuestas dadas por un/a docente cada una en las que se propone "Cuestionar la relación que puede haber entre algunos elementos de los polígonos, como puede ser el número de lados y, una magnitud geométrica, como su área" (PO3) o preguntar por "Las dificultades que puede encontrar el alumnado a la hora de aplicar los conceptos con la resolución del problema" (PO4).

Las respuestas sobre lo que ha llamado la atención de este problema a los/as profesores/as participantes se han registrado en la tabla 3.130. En ella las sintetizamos como: i) contexto, si se comenta sobre el contexto en el que se plantea el problema; ii) aplicación, si se hace referencia a que es un problema de aplicación en la vida real; iii) razonamiento, si se subraya que el problema favorece el razonamiento; iv) confuso, si se expresa que el planteamiento del problema genera dificultad en su resolución; v) original, si se considera interesante, y vi) sencillo, si se supone que no tiene complicación su resolución.

Docente	Contexto	Aplicación	Razonamiento	Confuso	Original	Sencillo
PP1	x		x		x	
PP2	x		x			
PP3	x					
PP4	x		x			
PO1				x		
PO2						x
PO3		x	x		x	
PO4			x			

Tabla 3.130. Sobre lo que ha llamado la atención de los/as profesores/as de esta subtarea S-TEcg2-P5

La tabla 3.130 muestra que lo que ha llamado la atención de este problema a más profesores/as (5/8) ha sido que la resolución de la subtarea implica razonamiento matemático. Por ejemplo, PP4 ha subrayado que “Hay que razonar por una parte las figuras planas que recubren el plano y por otra parte los conceptos de máxima área con mínimo perímetro”. De igual modo, PO4, ha apuntado que “Conlleva razonar lo que se supone evidente, como es utilizar hexágonos para recubrir el plano”. Asimismo, varios profesores (4/8) han destacado de este problema el contexto en el que se ha planteado el contenido matemático a trabajar. Por ejemplo, PP2 ha apuntado que “Presentar el problema mediante una pequeña historieta hace que el alumnado se implique en el problema”. Asimismo, PP3 ha subrayado que “Considera un enunciado atrayente para que el alumnado se interese por los contenidos a aplicar”. Además, dos profesores/as lo han considerado original, precisando PO3 que “Por no presentar datos” y PP1 “Por llevar un problema matemático a la naturaleza”. Por último, cabe mencionar las respuestas dadas por un/a profesor/a cada una en las que se ha destacado, por un lado, la aplicación que puede tener este problema en la vida real, subrayando PO3 que además de la aplicación que se le ha dado en el enunciado, se puede aplicar en muchos otros ámbitos cotidianos. Por otro lado, PO2 lo ha considerado sencillo para poder aplicarlo en todos los cursos de secundaria. Por el contrario, PO1 ha visto confusa para la resolución del problema la representación mostrada en el enunciado y aclara que una representación apropiada ayuda a una mejor visualización y resolución.

3.3.7 La investigación en didáctica de la geometría y la transposición a tareas de clase en la ESO

En este apartado se contemplan opiniones del profesorado participante sobre problemáticas que se tratan en trabajos procedentes de la investigación en didáctica de la geometría, relativas a la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos implicados en nuestro estudio. En el subapartado 3.3.7.1 se ha tomado como referente el trabajo de Guillén (2004, pp. 121-123) en el que señala diferentes situaciones en las que está implicada la descripción de las formas. Al fijarnos en la actividad que se destaca en Guillén (2010) al utilizar los poliedros regulares como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría, en el subapartado 3.3.7.2 se ha utilizado como recurso Guillén (1991) donde se muestra la riqueza de esta familia de poliedros para trabajar la descripción y establecimiento de relaciones. En el subapartado 3.3.7.3 se parte de tareas que Guillén (1997) ha elaborado para la introducción al estudio de la geometría de los sólidos y para tratar la descripción, tareas que permiten que los estudiantes puedan desarrollar su nivel de razonamiento. Y en el subapartado 3.3.7.4 analizamos el uso y la opinión que tiene el profesorado sobre las representaciones que se contemplan en los recursos que presentamos al tener en cuenta que los investigadores consideran las representaciones como un recurso fundamental en la enseñanza de la geometría.

Centrándonos ahora en la clasificación, al fijarnos en las clasificaciones de las formas geométricas que se examinan en la investigación en didáctica de la matemática, las opiniones que se incluyen en el subapartado 3.3.7.5 corresponden a cuestiones que están inmersas en el examen que se realiza de Guillén (2005), en lo que concierne a los diferentes tipos de clasificaciones de familias de sólidos que se analizan en este trabajo y las propuestas que se proponen para llevarlas a cabo en la enseñanza/ aprendizaje de la geometría. En el subapartado 3.3.7.6, al igual que se ha realizado con la descripción, el análisis de las tareas que propone Guillén (1997) para abordar la clasificación de los sólidos son el soporte para las cuestiones y opiniones que se incluyen en este subapartado. Y en el subapartado 3.7.7.7 las cuestiones y opiniones surgen a partir del análisis de la enseñanza de las clasificaciones de algunas figuras geométricas planas que propone Fielker (1987a, 1987b).

Cabe mencionarse que los recursos presentados en esta sección a veces no han sido los mismos en los diferentes cursos de nuestra investigación debido a que estos han tenido diferente estructura.

3.3.7.1 Situaciones/Contextos en las que está implicada la descripción de las formas y la enseñanza de la geometría en la ESO

Guillén (2004) plantea que a la hora de realizar descripción de los sólidos se lleve a cabo en diferentes contextos (véase el subapartado 1.6.2.4 del capítulo 1). Los/as profesores/as del curso en comunidad, que es donde se ha examinado este trabajo, señalan que cuando enseñan matemáticas la descripción de los sólidos la ven involucrada en la representación e identificación de las formas geométricas, que lo indican todos ellos; la mayoría (PC1, PC2 y PC4) también la ven implicada en los problemas de álgebra y ecuaciones, y, algunos (PC2, PC3) en los procesos de construcción.

Sobre las situaciones que se señalan en este trabajo que podemos encontrar en un contexto matematizado todos indican que no las suelen plantear en sus clases. Se limitan como mucho a justificar si los enunciados referentes a las formas geométricas son verdaderos o falsos.

El profesorado comenta que el alumnado debería:

- Distinguir y enunciar todos los elementos, características y propiedades de los poliedros y cuerpos redondos.
- Diferenciar todos los sólidos, así como sus elementos y tipos.
- Reconocer los poliedros regulares.

Una vez examinado el trabajo de Guillén (2004, pp. 121-123) el profesorado ve interesante llevar al aula dichas situaciones, señalando PC2 que ayudaría a que el alumnado aprendiera y afianzara los contenidos geométricos. Ahora bien, los problemas que mencionan los/as profesores/as para llevar estos contextos a clase son el tiempo de que disponen para explicar estos temas, señalado por todo el profesorado y, que no se encuentran este tipo de tareas en los libros de texto, indicado por PC1 y PC4. Cabe señalarse que los/as profesores/as creen que a los/as alumnos/as no les gustan los problemas en que aparece la geometría debido a que en general no conocen las formas geométricas del espacio y, además, tienen problemas para representarlas.

Si nos centramos ahora en la geometría de reflejos, como se ha indicado en el subapartado 1.6.2.4, Alsina et al. (1988) destacan la importancia de la misma. Ahora bien, ningún/a profesor/a del curso en comunidad conoce la tarea del réflex con la que se inicia experimentalmente el concepto de simetría axial plana; todos/as los/as profesores/as señalan que la tarea en general está bien pero el problema es que ningún/a profesor/a de los participantes ha utilizado los espejos, no saben realmente para qué pueden utilizarlos. Solo los han visto en un curso de formación del CEFIRE. PC3 y PC4 la ven interesante para llevarla a cabo en clase y PC2 indica que les sería curioso, que sería algo similar a los dobletes en papiroflexia. Estaría bien para un taller. PC4 indica que la geometría es la parte de las matemáticas que menos sabe de todo lo que se puede hacer en clase. Todos/as comentan que hay una gran diferencia entre la geometría que se enseña en la Facultad de Matemáticas y la geometría que se enseña en secundaria. PC2 indica que cambiaría la enseñanza de la geometría en la ESO si esta geometría se diera en la universidad.

En relación con la geometría de las sombras y las pompas de jabón, el profesorado ha expresado que en clase no utiliza actividades relacionadas con estas geometrías. No obstante, PC2 indica que lo de las sombras se podría utilizar para los problemas de Tales.

Entre las tareas que se les plantea que pueden realizar, todos/as ven más factible realizar la de los mapas topográficos referentes a la geometría del entorno. En dicha actividad se trata de saber definir una posición o un movimiento en relación con un punto determinado, reconocer los elementos planimétricos y altimétricos, representar un camino o un trayecto. PC2 comenta que se puede llevar a cabo tomando las medidas de alguna parte del colegio y a partir de ahí realizar un mapa escolar. PC4 indica que los mapas escolares se utilizan para los temas de escala y luego lo ven aplicado a la realidad. PC3 indica que los mapas son más manipulativos y les gusta más, destacando que ya no es la geometría de pizarra y libreta.

En relación con la tarea del entorno natural en la que se observa directamente formas y producciones naturales, PC2 y PC3 opinan que es tarea interesante. Sin embargo, apuntan que el problema de llevar a cabo esta tarea es que se necesita tiempo debido al crecimiento de los cultivos. PC4 indica que otro problema que ve es la obtención del campo. Sin embargo, el profesorado señala que es interesante conocer las unidades agrarias, aunque ellos/as subrayan que ni el alumnado las conoce ni el profesorado las explica. El profesorado manifiesta que solamente se reconocen en las regiones donde se utilizan.

3.3.7.2 Acerca de las propuestas de Guillén (1991) para tratar la descripción y el establecimiento de relaciones a partir de los poliedros regulares como contexto

En este apartado se parte del recurso de Guillén (1991, pp. 46-48) que muestra cómo a partir de los poliedros regulares como contexto se puede tratar la descripción, el establecimiento de relaciones y diferentes tipos de prueba, con objeto de obtener información sobre la opinión de los profesores del curso en comunidad sobre las propuestas de dicha autora para trabajar estos contenidos geométricos a partir de esta familia de poliedros. Nos vamos a centrar en la investigación que se muestra en torno a la prueba de que hay 5 poliedros regulares convexos, la relación de dualidad entre ellos, su regularidad e interrelaciones y las formas geométricas que se pueden obtener a partir de truncarlos y desplegarlos.

Acerca de la prueba de que hay 5 poliedros regulares convexos

Dado que Guillén (1991) propone que se investiguen cuáles son los poliedros regulares y se concluya que no hay más (véase en el subapartado 1.4.1.2) vamos a examinar la opinión de los profesores sobre la investigación que presenta esta autora que lleva a descubrir los poliedros regulares convexos y al desarrollo de diferentes tipos de prueba.

En la figura 3.131 hemos categorizado las respuestas del profesorado según haya considerado la investigación sobre cuáles son los poliedros regulares mediante la construcción de ellos, sencilla, visual, creativa o intuitiva.

Docente	Sencilla	Visual	Creativa	Intuitiva
PC1			x	
PC2		x		
PC3	x		x	
PC4		x	x	
PP1	x		x	
PP2		x		
PP3			x	x
PP4	x	x		
PO1	x	x		
PO2			x	
PO3	x			
PO4		x		x

Figura 3.131. Poliedros regulares convexos. Acerca de la investigación presentada por Guillén (1991)

Y en la figura 3.132 se contempla la opinión de los/as profesores sobre la prueba que presenta Guillén (1991) para justificar que solo hay cinco poliedros regulares. La categorización se ha realizado en función de que hayan señalado que se basa en la utilización de fórmulas matemáticas, resolver inecuaciones o tener conocimientos de álgebra. También en función de cómo la han encontrado si complicada o formal.

Docente	Fórmulas matemáticas	Inecuaciones	Álgebra	Complicada	Formal
PC1	x				
PC2		x			
PC3		x			
PC4				x	
PP1	x			x	
PP2		x		x	
PP3	x		x		
PP4		x	x		
PO1			x		x
PO2				x	x
PO3		x	x		
PO4		x		x	

Figura 3.132. Poliedros regulares convexos. Acerca de la demostración presentada por Guillén (1991)

De las figuras 3.131 y 3.132 observamos que los/as docentes consideran que las demostraciones visuales y de construcción resultan más fáciles de entender para el alumnado que aquellas pruebas que se basan en fórmulas matemáticas, donde hay que resolver inecuaciones y dominar el álgebra. Entre las respuestas del profesorado que apoyan lo señalado destacamos la de PC4 que señala "La demostración construyendo los poliedros hace que el alumno vaya probando con los distintos tipos de polígonos teniendo en cuenta las condiciones de los poliedros regulares. Lo más interesante es que los van a visualizar y construir". Asimismo, PO3 subraya "La primera demostración creo que resulta más sencilla para los alumnos y es la que realizamos en clase. La segunda creo que es excesiva y no sería entendida por la mayoría de alumnos, trabajar con inecuaciones no suele resultar cómodo y menos con literales". Cabe mencionar que algunos/as profesores/as han tenido problemas para llegar a la inecuación propuesta, indicando por ejemplo PP3 que no tenía claro cómo se reducía a tanto la inecuación. Asimismo, se ha indicado el problema que tiene el alumnado a la hora de trabajar demostraciones que se basan en cálculos matemáticos. Igualmente, se ha indicado por algunos/as docentes que la demostración construyendo los poliedros regulares es más lógica para el alumnado. En referencia a lo señalado, PP4 comenta que cuando aparecen demostraciones en las que se utilizan fórmulas matemáticas los/as alumnos/as acaban aprendiéndose la demostración de memoria sin entenderla, aunque subraya que en la ESO no se suelen hacer este tipo de demostraciones. Cabe mencionar que un/a profesor/a, PO1, ha indicado que no merece la pena llevar al aula ninguna de las demostraciones o pruebas mostradas debido al temario que se ha de dar y al tiempo que se dispone para los poliedros regulares.

En cuanto a las diferentes formas de presentar las formas geométricas y, en particular, los poliedros regulares, el profesorado señala mayoritariamente que le parece interesante. Cabe destacarse que algunos/as profesores/as han remarcado que no las conocían. Las razones que se han indicado han sido: porque ayuda a que se tenga mayor conocimiento de él (PO2); para recordar o conocer las formas geométricas más fácilmente (PC1, PC2, PO2); repasar otras formas geométricas (PP1, PP4, PO4); mejorar la percepción visual (PC4, PP2) y relacionar las formas geométricas (PC3, PP3). Cabe mencionar que también ha sido indicado por algún/a profesor/a que debido al poco tiempo del que se dispone para explicar el temario, considera difícil llevarlo a cabo. Por ejemplo, PP1 comenta “Lo veo interesante, pero la falta de tiempo al intentar explicar el temario, hace que haya que recortar algunas cosas y, posiblemente para no liar tanto al alumno y ganar tiempo, se podía suprimir”.

Todos/as los/as profesores/as de los cursos han opinado también que se debería dedicar tiempo en clase a demostrar cuántos y cuáles son los poliedros regulares convexos, sin embargo, encontramos entre las respuestas que la falta de tiempo para enseñar el temario de matemáticas es un hándicap para llevar estas demostraciones a clase. PC1 indica que se podría construir algún poliedro regular como el tetraedro, cubo u octaedro y los otros poliedros regulares decir cómo se construirían. PC2 comenta que se debería hacerlo porque ayuda a entenderlos, pero la falta de tiempo impide que se pueda realizar. Se remarca que al final buscas que sepas cuáles son y sus principales características. Cabe mencionar que PO1 subraya que más que demostrar se tendría que mostrar cuáles son.

Por otra parte, el profesorado que indica que sí, remarca que el alumnado de esta forma lo aprende razonando y no de memoria, por ejemplo, PP4 señala “Sí porque lo que se busca es que no se lo aprendan de memoria y que los comprendan”.

Si nos centramos en cómo se debe llevar a cabo la explicación, todo el profesorado comenta que convendría que la explicación de los poliedros regulares vaya acompañada de la construcción de ellos. La razón que se apunta es que de esa manera se lleva a cabo una mejor comprensión de ellos. Como ejemplo de respuesta indicamos la señala por PO2 que comenta que “Cree que es interesante llevar a cabo la construcción, pues pienso que al manipular y crear la figura les es más sencillo darse cuenta de las propiedades que tienen y sus relaciones con otras figuras”.

Los materiales que exponen todos/as los/as docentes que utilizarían para construir los poliedros regulares son los desarrollos planos comercializados o construirlos a partir de cartulina. Las razones que apuntan principalmente son, por una parte, el conocimiento que tienen de ellos y, por otra parte, que son los más fáciles y baratos de construir. También hay docentes que han señalado las piezas de plástico que engarzan, llamándolos alguno por su marca, Polydron. Asimismo, se ha anotado que se pueden construir con palillos y plastilina. Estos dos últimos materiales se han comentado por dos profesores/as (PO2, PO3).

Acerca de las características numéricas de los poliedros regulares

Continuando con los poliedros regulares, si nos centramos ahora en las características numéricas que se establecen en los poliedros regulares convexos (número de vértices, caras, aristas, orden de los vértices, número de lados de las caras) y que se dan cuenta en el subapartado 1.4.3 del capítulo 1, los/as profesores/as señalan en general que las ven interesantes dentro de la enseñanza de la geometría de los sólidos en secundaria. Entre las anotaciones que ha señalado el profesorado, tenemos, por una parte, las que han indicado algunos/as profesores/as (PC1, PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PO1, PO4) quienes han subrayado que lo importante no es que conozcan las características numéricas, sino que los/as alumnos/as puedan deducirlas y razonarlas por ellos/as mismos/as. Entre las respuestas tenemos a PP2 que señala que le interesaría que el alumnado pudiera construir la tabla indicando el número de caras, vértices, etc. Otros/as profesores/as (PP3, PP4, PO2, PO3) han remarcado que conocer las características numéricas les ayudarán a conocer los poliedros, sus elementos, sus características numéricas y sus propiedades. Entre estas respuestas tenemos que PO2 ha subrayado que ayudaría a conocer mejor los poliedros regulares.

Por lo que se refiere a si creen conveniente que los/as alumnos/as comparen ciertas características numéricas de los poliedros regulares, por ejemplo, las caras del cubo coinciden con los vértices del octaedro, las aristas del dodecaedro e icosaedro coinciden, etc., encontramos que hay disparidad en las respuestas, aunque sobresale ligeramente que no lo explicarían.

- No harían las comparaciones ha sido indicado por 6 profesores/as (PC1, PC2, PC3, PC4, PP2, PP3).

- Sí que haría las comparaciones ha sido indicado por 5 profesores/as (PP1, PP4, PO1, PO2, PO4).

- Un/a profesor/a (PO3) no la contesta.

Las razones que se han señalado por lo que respecta a los que no las compararían tenemos principalmente la falta de tiempo y la complicación que lleva entenderlas en secundaria. También se ha destacado la poca utilidad que se le da después. Entre las respuestas que han señalado estas razones contemplamos a PC2 que comenta que lo ve complicado para el alumnado. Asimismo, señala la poca utilidad que pueda tener para secundaria ya que las conclusiones que se obtienen las considera para cursos superiores.

Sin embargo, entre las razones que han remarcado que ven conveniente comparar estas características tenemos principalmente porque se pueden observar las relaciones que hay entre los poliedros regulares y porque introduce el concepto de dualidad. Se ha de apuntar que algunos/as de los/as profesores/as que han indicado que sí, han puntualizado que realmente no hay tiempo para ello. Señalamos entre estas respuestas a PP4 que comenta que sería adecuado que las conociesen porque les haría ver que ciertas figuras están relacionadas. Sin embargo, este/a profesor/a cuestiona si hay tiempo para ello.

De las relaciones que se pueden encontrar entre los poliedros duales hemos destacado para conocer la opinión de los/as profesores/as las señaladas en el subapartado 1.4.3 del capítulo 1.

Por lo que se refiere a la primera relación la mayoría de los/as profesores/as han señalado que no la conocen; tan solo PO1 ha indicado conocimiento de ella, subrayando que prefiere verla de la siguiente manera:

$$\text{Orden vértice} \cdot V = 2A = \text{Lados Cara} \cdot C$$

Sin embargo, por lo que respecta a la segunda relación, todos los/as profesores/as han apuntado que la conocen, distinguiendo algunos/as docentes como, PP3 y PO1, que es el teorema de Euler.

En cuanto a si es importante que los/as alumnos/as sepan las diferentes relaciones que se han mencionado todos/as han señalado que sí, aunque se ha matizado que solo se suele enseñar la segunda por las siguientes razones: falta de tiempo (PC1, PC2, PP1, PP3; es la que aparece en los libros de texto (PC1, PC2); la cumplen los poliedros convexos o más poliedros (PC3, PC4, PP2); ayudan a calcular elementos (PC4); es más fácil de aplicar, recordar o es menos compleja (PP2, PP3, PP4. PO1); se suele utilizar más (PP4) y es fundamental en el tema (PO1). Por otra parte, PO2 ha destacado que es importante que se sepan dependiendo del nivel y PO3 no ha indicado la razón por la que se enseña la segunda relación y no la primera. Cabe señalar que PO4 ha matizado "Que las sepan no le parece imprescindible, pero sí que las manejen y comprueben que son ciertas, aunque no las memoricen, en el caso de que se trabajen en clase las relaciones numéricas. Porque le parece un nivel demasiado elevado para ellos".

Centrándonos en si los/as profesores/as consideran que el alumnado debe saber los poliedros regulares que son duales tenemos que mayoritariamente (7/12) comentan que no, principalmente por la falta de tiempo y la dificultad que conlleva. Entre las expresiones del profesorado que señalan que no, debido al tiempo, tenemos a PC2 que considera que se podría introducir el concepto de dualidad si se tuviera tiempo, remarcando que como no hay tiempo, es un concepto que se puede suprimir. También contemplamos que se ha señalado que no, por la dificultad que pueda tener, como PP2 que considera que a los/as alumnos/as les costaría entender este concepto y, además remarca, que no se dispone de tiempo para poder explicarlo. Por otra parte (1/12) indica que se debería saber, pero la falta de tiempo y dificultad hace que no se enseñe. Sin embargo, (3/12) subrayan que sí que se deberían enseñar, como indica PO1, aunque no fuera un objetivo mínimo o como indican PO2 y PO3 que ayuda a conocer propiedades, remarcando también PO3 que ayuda a describir y clasificar. PO4 destaca que no lo considera un concepto imprescindible y que dependiendo de la profundidad que se le quiera dar al tema se explicaría o no.

Acerca de los poliedros regulares convexos. Descripción de la regularidad. Interrelaciones

Los/as docentes han considerado interesante de cara a su formación la descripción de los planos de simetría y ejes de rotación de los poliedros regulares convexos que se han mostrado a partir del recurso de Guillén (1991, pp. 62-77), por las relaciones que se establecen y las descripciones que se pueden hacer basándose en estos elementos. Como ejemplo de respuesta tenemos la de PP3 quien señala que lo considera interesante porque se ha hecho un amplio análisis de los planos de simetría y ejes de rotación que realmente desconocía. Asimismo, PO2 ha comentado que, a través de la descripción de los planos de simetría y de los ejes de rotación, podemos describir poliedros. Sin embargo, algunos/as profesores/as, sobre todo los/as profesores/as del curso en comunidad, han centrado sus respuestas en los/as alumnos/as, señalando que es importante que el alumnado conozca que es un plano de simetría y un eje de rotación y que sepa cuáles son los planos de simetría y ejes de rotación de algunos poliedros regulares como el cubo o el tetraedro, pero no consideran conveniente, por la dificultad que conlleva, profundizar más. Entre las respuestas del curso en comunidad tenemos la de PC2 que indica que es interesante mostrar los planos de simetría y ejes de rotación del cubo y del tetraedro, subrayando que los planos de simetría de los otros poliedros regulares son difíciles de ver. Asimismo, PC4 ha destacado que hay que saber lo que es un plano de simetría, un eje de rotación y el orden de giro, mostrando algún ejemplo de ellos en un poliedro regular. Cabe mencionar que un/a profesor/a, PO2, ha señalado que encuentra más dificultad, de cara al alumnado, el estudio mostrado de los ejes de rotación de los poliedros regulares que el de los planos de simetría. Sin embargo, dicho/a docente ha remarcado que les puede servir para mejorar su visión espacial.

Por lo que se refiere a que se añadiría en relación con los planos de simetría y los ejes de rotación, se observa que la mayoría de los/as profesores/as han indicado que no ampliarían nada porque se ha presentado demasiado completo. Anotamos entre las respuestas, contestaciones como PC3, que señala “Nada, ¿qué más se puede añadir?” o PP3 que indica “Nada, ya está muy desarrollado”. Sin embargo, cabe destacar que dos profesores/as del curso online han subrayado que complementarían la explicación, por una parte, con el empleo de programas informáticos (PO1) y, por otra parte, incorporando una tabla resumen de los planos de simetría y los ejes de rotación de los poliedros regulares (PO1, PO3).

Por lo que se respecta a lo que se quitaría de este apartado tenemos que la mayoría de los/as profesores/as no suprimirían nada porque se trata de cursos formativos y les aporta información. Sin embargo, en general, los/as profesores/as han considerado que las relaciones entre los poliedros regulares tienen un determinado nivel que se sale de los cursos de secundaria. Las relaciones, por ejemplo, entre los planos de simetría del cubo y del octaedro ya se han considerado complicadas para los/as profesores/as participantes, PC4 ha indicado “Yo ya me he quedado en la primera frase, los planos de simetría del cubo u octaedro descomponen la superficie de la esfera circunscrita en una red de 48 triángulos esféricos iguales”. PP3 “Me cuesta ver los planos de simetría del dodecaedro e icosaedro y también, que la posición relativa de estos planos en el espacio es exactamente la misma”. Si nos centramos entre las relaciones de los ejes de rotación y planos de simetría de los poliedros regulares, todos/as han señalado que las desconocían. Entre las respuestas destacamos a PC4 “Estas relaciones entre los planos de simetría y los ejes de rotación me han sorprendido bastante y, de hecho, nos la acabo de ver, me tengo que detener aquí unos minutos y concentrarme para poder visualizarlas".

Entre lo que señalan los/as profesores/as como que quitarían algunos/as profesores/as de cara a su enseñanza en secundaria, destacamos algunas relaciones, por ejemplo, PC1 todo lo referente a las relaciones de los planos de simetría y los ejes de rotación de los poliedros regulares y los círculos máximos. Igualmente, PC2 quitaría lo señalado del armazón del modelo de simetría ya que considera que es complicado de entender. Otros/as profesores/as como PC3, PP4 y PO4 se centrarían en explicar los conceptos estudiados en uno o dos poliedros regulares. Destacamos que PC4 quitaría la mayor parte de lo explicado debido a la falta de tiempo y el nivel con que vienen los/as alumnos/as, quedándose con que supieran los conceptos y aplicarlos en algún poliedro regular. Hay otros/as profesores/as que no han indicado que es lo que quitarían, como PP1, PP2 y PP3, pero han remarcado la dificultad que podría suponer para el alumnado estas explicaciones, por ejemplo, PP3 ha subrayado que es muy difícil para el alumnado y, además, se sale del temario.

Acerca de los poliedros regulares convexos: Segundas conexiones. Dualidad e Interrelación

La mayoría de los/as profesores/as apuntan que es muy interesante la información que se les ha proporcionado a partir del recurso de Guillén (1991, pp. 90-98), sobre los poliedros regulares convexos, segundas conexiones, dualidad e interrelación (subapartado 1.4.3.2 del capítulo 1). Entre estas respuestas tenemos, por una parte, los/las profesores/as que solo han señalado como le ha perecido, por ejemplo, PO1 ha señalado que le parecía muy interesante y curioso. Por otra parte, las respuestas que han indicado lo que les ha parecido interesante, por ejemplo, PO2 que ha subrayado que le ha parecido interesante ver como por tener simetrías comunes, un poliedro se puede introducir en otro. Asimismo, PO3 ha especificado más al señalar que le ha resultado interesante ver las relaciones entre los vértices, aristas y caras de los cuerpos contenidos unos dentro de otros, el tetraedro contenido en el cubo y este a su vez dentro del dodecaedro, o bien el tetraedro en el octaedro de manera que los vértices están en el centro de las caras, y el modelo resultante tiene las simetrías del tetraedro. Cabe mencionar que los/as profesores/as de los cursos en comunidad y presencial han remarcado además en su respuesta la imposibilidad de explicarlo en secundaria. Por ejemplo, PP3 comenta que como formación le parece una información muy valiosa, pero que sobrepasa con creces los contenidos de secundaria y es imposible darlo por la falta tiempo, nivel en los alumnos y complicación de lo presentado. De igual modo, PC2 remarca que tras un estudio como este se dominan los poliedros regulares y todos los contenidos que conlleva, pero acentúa que es demasiado para secundaria. Cabe mencionar que PC4 ha considerado que es interesante por la información que se ha presentado, pero que no se podría aplicar en secundaria por la dificultad que conllevaría visualizarlo y comprenderlo, resaltando además que se saldría del temario.

Asimismo, todos/as subrayan que no explican prácticamente nada de lo aquí expuesto, considerando además que realmente tampoco se puede llevar al aula por la dificultad que conlleva. Entre los profesores/as que apuntan que se puede llevar algo tenemos, por ejemplo, a PC2 y PC4 que comentan que se podría indicar que poliedros regulares son duales y, además, PC4 indica que se podría señalar a los alumnos alguna relación como que el número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su dual. Asimismo, PP4 destaca que, como curiosidad, si se tuviera tiempo y ganas, se podría mencionar alguna inscripción en clase. De igual forma y, centrándose en los recursos de que dispone el profesorado, PO1 subraya que quizá alguna cosa sí, si se dispusiera del material necesario como los modelos con varillas que salen en las fotos porque es bueno. Además, PO3 anota que, si planifica de otra forma los contenidos, posiblemente sí que podría, aunque de forma más superficial. Comenta que les haría notar alguna de las propiedades que aparecen en el documento, o intentaría que fueran los/as alumnos/as los/as que las descubrieran, desarrollando así su sentido de observación.

Acerca de los poliedros regulares convexos: Truncar y desplegar

Por lo que respecta al documento de los poliedros regulares que versa sobre truncar y desplegar, Guillén (1981, pp. 80-85) apreciamos que todos/as los/as docentes lo consideran interesante. Las razones que ha señalado el profesorado por las que consideran el documento relevante han sido: es una forma diferente de trabajar con los poliedros (PC1), se obtienen figuras geométricas planas a partir de poliedros (PC1, PC2, PC3, PC4, PO1), se consiguen nuevos poliedros a partir de los poliedros (PC2), relaciona el plano y el espacio y también, los poliedros entre ellos (PP2, PO2), aporta propiedades y características de los poliedros regulares (PO2) y, desarrolla la imaginación y el descubrimiento (PO3).

Sin embargo, aunque se haya valorado positivamente este documento, entre las respuestas destacamos que algunos/as profesores/as han considerado complicado entender lo que se les ha expuesto (PC3, PP1, PP2, PP4) u opinan que sobresale el nivel o temario de secundaria (PC2, PP3).

En cuanto a lo que se explica en clase de lo mostrado aquí vemos que la mayoría de los/as profesores/as no explican nada de lo presentado. Los/as profesores/as que especifican alguna razón de por qué no lo explican apuntan que no lo conocían. Los/as dos profesores/as que indican que explican algo de lo presentado subrayan que lo hacen de forma muy esporádica. PC4 ha comentado que para la parte de volúmenes les señala que un cubo se puede descomponer en tres pirámides y de esta forma se puede deducir alguna fórmula. También destacamos a PO1 que ha señalado que alguna vez ha indicado en que consiste truncar los vértices de un poliedro y ha llegado a trabajar algún modelo de icosaedro truncado, como el balón de fútbol, por ser muy familiar para ellos/as.

Por lo que se refiere a lo que se podría llevar al aula de lo mostrado, vemos que todos/as los/as docentes del curso en comunidad han señalado que lo ven apropiado para un taller de matemáticas. Cabe mencionar entre las anotaciones a PC3, que destaca que para un taller considera muy apropiado el truncamiento de poliedros por ser una parte muy práctica y visible, pero subrayando que siempre obteniendo figuras planas muy sencillas. Asimismo, dicho/a profesor/a señala que en relación con el despliegue de poliedros también le parece muy interesante para el taller, pero con figuras comercializadas o construidas a partir de desarrollos planos, donde se puede montar el cubo a partir de tetraedro. Expone que para la clase de matemáticas lo ve complicado por el tiempo que se tardaría en realizarlo. Entre lo que se podría llevar al aula de lo expuesto aquí tenemos que la mayoría de los/as docentes subrayan que presentarían algún poliedro para que los/as alumnos/as pudieran truncarlo y observaran que figuras geométricas planas se obtienen dependiendo de cómo se truncaran. Asimismo, también la mayoría de los/as docentes han comentado que llevarían algún poliedro para que el alumnado observe que está formado a partir de otros poliedros mediante su montaje y desmontaje. Entre las respuestas contemplamos que PP2 ha indicado que se podría truncar algún poliedro y que vieran lo que se obtiene y quizá como se puede descomponer un poliedro en otros poliedros, remarcando que no hay tiempo para más. Cabe mencionar que en general los/as docentes han comentado que la forma de llevarlo a cabo es mediante material apropiado, destacando PP3 que lo ideal es poder realizarlo con formas geométricas para que los alumnos lo vean. Este/a docente ha remarcado que en el caso de que tenga tiempo y material, señalando, asimismo que normalmente no se dispone. PC4 apunta que se pueden utilizar programas informáticos para trucar y desplegar poliedros.

3.3.7.3 Sobre la transposición a tareas de clase de las tareas de Guillén (1997) relativas a la introducción al estudio de la geometría, a la descripción y al establecimiento de relaciones

En este subapartado partimos de tareas T-0d a T-10d de Guillén (1997), que describimos en el apartado 1.6.3 del capítulo 1 e incluimos en el anexo 2, diseñadas para la introducción al estudio de la geometría y para desarrollar el nivel de razonamiento en torno a la descripción y el establecimiento de relaciones. Las observaciones obtenidas a partir de comentarios de los profesores del curso en comunidad al analizar este recurso, las hemos organizado según las tareas a partir de las que las hemos obtenido. Cabe aclararse que en nuestro estudio hemos denominado estas tareas como subtareas, dado que forman parte de tareas más amplias, de las que hemos dado cuenta en el capítulo 2. Ahora bien, en este subapartado, al partir directamente de las tareas propuestas por esta autora nos referimos a ellas de la misma manera.

Sobre la tarea T-0d

Los/as profesores/as han indicado que en sus clases también plantean algunas propuestas de las que se indican en esta tarea. PC2 y PC3 coinciden que al empezar el tema en el libro de texto suelen aparecer ilustraciones de edificios u objetos en los que los alumnos tienen que indicar si por ejemplo son poliedros, cuerpos de revolución, etc. PC3, aunque suele llevar sólidos construidos para que el alumnado conteste preguntas a veces les nombra algún objeto que conocen como puede ser un tetrabrik para indicar un poliedro o más particularmente un prisma. También señala que la introducción del libro la suele realizar si dispone de tiempo. Por otra parte, PC1 intenta introducir las familias de sólidos nombrando objetos del entorno cotidiano que ellos conocen para que los asocien con figuras matemáticas, por ejemplo, una pirámide de Egipto para las pirámides o una caja de zapatos para los prismas. PC4 aparte de los objetos cotidianos intenta que los alumnos señalen formas geométricas que pueden encontrar en la naturaleza como puede ser en las plantas, formas de las nubes, rocas, etc.

Las propuestas que los/as profesores/as de este curso consideran más interesantes y atractivas para realizarlas en clase contemplan el uso del polydron para hacer construcciones o modelos de sólidos, indicado por PC2 y PC3, y el uso de los cubos de estyropor en los que el profesor hace un corte en uno de ellos, indicado por PC2 y PC4. Ahora bien, en general, en sus clases los/as profesores/as no proporcionan a los alumnos diversos materiales para construir modelos o armazones de sólidos; solo PC2 y PC3 construyen algunas veces formas geométricas con materiales comercializados, como el Polydron, y/o a partir de los desarrollos planos. El profesorado ha señalado que harían la construcción con un solo tipo de material.

Cabe destacarse que a todos ellos les ha interesado y llamado la atención cómo se conjuga en Guillén (1997) la construcción con la actividad matemática cuando se pide que se utilicen témperas para pintar la cara del sólido que se obtiene con el corte, y hacer estampaciones en papel con la cara que ha pintado (la que ha obtenido con el corte), cuestionando preguntas como ¿Qué forma tiene la cara del cubo que he pintado? ¿Qué forma se obtiene al estampar la cara en papel? Y también cuando a la hora de construir los poliedros se pregunta: “¿Qué te llama la atención de un modelo y no del otro? ¿Qué polígonos tienes que seleccionar para construirlos? ¿Cuántos en cada caso? ¿Cuántas varillas necesitas para construir el armazón en cada caso? ¿Y cuántas bolitas? ¿Puedes construirlos con cubos multilink? ¿Qué tienen en común los sólidos seleccionados? ¿En qué se diferencian?”.

Los/as docentes ven interesante que se le dedique unos minutos al principio del tema a introducir las familias de sólido, bien porque es necesario que sepan identificar en los objetos del entorno cotidiano que podrían ser poliedros indicado por PC1, bien porque relacionan las matemáticas con el entorno cotidiano, señalado por PC2, o bien para que vean un poco la aplicación de lo que se va a explicar, comentado por PC3. Pero ninguno de ellos presenta en sus clases inicialmente pares de ejemplos de una familia de sólidos dada, como puede ser el cubo, la pirámide, la esfera, el cilindro, el cono, el ortoedro, el romboedro u otro prisma y después pares de modelos formados por un ejemplo y un no ejemplo pidiendo a su vez que se comente lo que tienen de parecido y lo que los diferencia. Aunque PC2 y PC4 consideran que sería interesante.

Sobre la tarea T-1d

En las respuestas a esta tarea, los/as profesores/as expresan que no suelen realizar la descripción a partir de la construcción, siendo PC2 y PC3 los/as únicos/as profesores/as que realizan la construcción de poliedros. Ambos/as indican que utilizan el Polydron y los desarrollos planos. Los/as dos profesores/as señalan que cuando construyen formas geométricas con Polydron se limitan a la construcción de las formas geométricas sin plantear preguntas referentes a la descripción como las que señala Guillén (1997). En relación con los desarrollos planos, PC2 y PC3 comentan que lo que tiene que hacer el alumnado es solamente recortar y pegar la forma geométrica que se les plantea. Cuando explican los poliedros en clase, se limitan a cuestionar sobre los tipos de polígonos que forman los poliedros, pero no plantean las preguntas que señala Guillén (1997). Cabe mencionarse que PC4 apunta que estas preguntas solo las suele plantear cuando explica los sólidos platónicos.

Después de haber analizado la tarea T-1d en general, el profesorado reconoce como muy interesante usar la construcción con materiales comercializados para trabajar la descripción de los poliedros. Consideran que los/as estudiantes pueden hacer un análisis primario de los sólidos a nivel local, centrando la atención en los elementos de los sólidos y esta construcción hace más fácil la enseñanza/aprendizaje de las formas geométricas. Sin embargo, los dos problemas que plantea el profesorado sobre la realización de esta actividad en clase es, por un aparte, la falta de habilidad de algunos/as alumnos/as en la construcción de las formas geométricas y, por otra parte, la falta de tiempo para poderla llevar a cabo.

Sobre la tarea T-2d

En relación con esta tarea todos/as los profesores del curso en comunidad señalan que son los/as profesores/as y no los/as alumnos/as los que muestran solo un par de ejemplos de una familia de sólidos, siendo en el caso de los poliedros principalmente los prismas y las pirámides. PC4 indica que suele poner como ejemplo de prismas el cuadrangular y hexagonal que son los que luego suelen salir en problemas.

Si nos centramos en como muestran los sólidos, todos/as comentan que suelen enseñarlos en la misma posición, la estándar. PC3 hace hincapié, que hasta ahora no le había dado mucha importancia a los modelos y posiciones que cogía para explicar. PC1 manifiesta que lo tiene en la mesa sin cambiar la posición, pero sí que explica que si le cambia de posición es la misma figura.

Examinada la tarea, en general los/as profesores/as la consideran interesante para verificar lo que el alumnado conoce sobre las familias de sólidos y sus propiedades. Cabe señalar que PC1 comenta que es una actividad sencilla de realizar. Todo el profesorado la considera adecuada para los primeros cursos de ESO y señala como problema para poder desarrollarla el que en el centro se disponga de las figuras geométricas.

Sobre la tarea T-3d

En esta tarea todos/as los/as profesores/as indican que suelen realizar este tipo de tarea en clase, pero de forma mucho más sencilla, señalando que en general suelen identificar dibujos con familias de poliedros y cuerpos de revolución. Además, PC3 manifiesta que en las actividades los/as alumnos/as tienen que justificar a la familia a la que pertenecen.

Estudiada la tarea, todos/as opinan que es interesante y que la ven más completa que la que ellos realizan. Sin embargo, en cuanto se refiere a la realización de la tarea en las clases, la mayoría de los/las profesores/as (PC1, PC2, PC3) indican que no la llevaría a cabo por la dedicación de tiempo que requiere; solo un/a profesor/a (PC4) comenta que ve factible realizarla en clase.

Sobre la tarea T-4d

Todo el profesorado ha indicado que no desarrolla en sus clases las propuestas que se plantean en esta tarea. No suelen preguntar a los/as alumnos/as normalmente que indiquen familias de sólidos que tienen todas las caras planas o que señalen los sólidos que no tienen vértices. Cabe señalar que más que enumerar propiedades de conos, cilindros y esferas, suelen pedir al alumnado sus definiciones y solo piden algunas propiedades para los poliedros. Además, PC1 menciona que suele pedir definiciones sencillas de los elementos de los poliedros. Asimismo, PC3 y PC4 indican que solo cuentan los vértices y aristas en los poliedros.

Estudiada esta actividad por los/as profesores/as, todos consideran convenientes las preguntas que plantea Guillén (1997) para conocer si el alumnado diferencia los poliedros, cilindros, conos y esferas, así como, para obtener información sobre algunos de sus elementos. Sin embargo, ningún/a profesor/a cree necesario desarrollar estas propuestas con su alumnado de secundaria debido al poco tiempo que tienen para impartir esta parte de la geometría.

Sobre la tarea T-5d

Respecto de esta tarea el profesorado señala que lo que hace en clase con el alumnado es estudiar las figuras geométricas planas que forman los sólidos y en el caso de los poliedros, ver los polígonos que lo forman. Aclaran que no plantean preguntas en las que se cuestionan los tipos de polígonos que se pueden utilizar para construir un prisma. Solo PC2 y PC3 señalan que cuando los/as alumnos/as construyen algún poliedro con material comercializado ellos/as deben seleccionar los polígonos que van a utilizar. Cabe mencionar que ningún/a profesor/a trabaja los truncamientos de las figuras e incluso remarcan que no saben si está en el temario.

Se observa que a todos/as los/as profesores/as les ha llamado la atención el apartado *e)* en el que se pide a los/as alumnos/as que den instrucciones a un amigo para que este pueda construir diferentes ejemplos de la familia señalada o que expliquen a un amigo como son las figuras geométricas. El profesorado cree que esta actividad es muy interesante para saber los conocimientos que posee el alumnado.

En general los/as profesores/as consideran interesante esta tarea por la cantidad de subtareas planteadas por Guillén (1997) en las que se trabaja la relación entre las diferentes formas geométricas. Asimismo, destacan las subtareas en las que los/as alumnos/as interaccionan entre ellos/as para describir los sólidos. Al llevar a cabo esta tarea, los/as profesores/as encuentran dificultades en las propuestas relacionadas con los cortes en las figuras del espacio. Además, PC1 y PC3 ven un inconveniente el que se realizara la actividad de truncamiento sin el material adecuado. En general, consideran que es una tarea complicada de realizar por la falta de tiempo y disponibilidad de material.

Sobre la tarea T-6d

Los/as profesores/as señalan que cuando explican los prismas subrayan que sus bases son paralelas. Tan solo PC4 ha hecho referencia a que a veces trabaja el paralelismo también en las aristas laterales. Si nos centramos en las relaciones de perpendicularidad que se pueden encontrar en los prismas rectos, la mayoría de los/as profesores/as se limitan a la que existe entre las caras laterales y las bases. Solamente PC4 añade que a veces ha señalado que en los prismas rectos las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de las bases. Los/as profesores/as han comentado que no suelen plantear tareas/ejercicios que trabajen los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en los prismas. Asimismo, señalan que la mayoría de las tareas/ejercicios referentes a los prismas se presentan con primas rectos y en las posiciones estándar.

Tras examinar esta tarea, los/as profesores/as, consideran interesante estudiar en clase la relación de paralelismo que existe en las aristas laterales de los prismas y la de perpendicularidad en los prismas rectos entre las aristas laterales y de las bases. Los/as profesores/as también acentúan que se trabajen prismas rectos y oblicuos en diferentes posiciones. Sin embargo, consideran que debido al tiempo de que disponen, no se puede hacer mucho hincapié en estas posiciones.

Sobre la tarea T-7d

Todos/as los/as profesores/as especifican que suelen explicar en clase los ángulos interiores y exteriores y las diagonales de los polígonos. Aclaran que los ángulos exteriores se suelen trabajar menos. Además, señalan que realizan en clase actividades similares a las que plantea Guillén (1997) para trabajar estos conceptos. Por ejemplo, PC1 indica que las tareas/ejercicios que propone en clase son similares a los que señala Guillén (1997) para los elementos de los polígonos. Sin embargo, por lo que se refiere a los elementos de los poliedros, como se ha indicado anteriormente, los/as profesores/as señalan que no trabajan en clase todos los contemplados en Guillén (1997). Indican que no trabajan la tarea T-7d con la profundidad que señala Guillén (1997). Para algunos/as profesores/as como PC2 lo que les interesa es que los alumnos tengan una ligera idea de algunos elementos expuestos. Los/as profesores/as indican que las tareas/ejercicios que llevan al aula suelen consistir en señalar sobre dibujos que aparecen en el libro de texto o en la pizarra los elementos explicados en clase.

Todos/as los/as profesores/as del curso en comunidad consideran interesante esta tarea, por la cantidad de conceptos que se trabajan tanto en la geometría del plano como del espacio. Asimismo, consideran llamativo de esta tarea que, en algunos momentos, antes de explicar los conceptos se les pregunte en los apartados de la tarea sobre ellos.

En cuanto a la realización de esta tarea en clase, los/as profesores/as remarcan que la ven demasiada larga para realizarla. Además, consideran que algunos de los conceptos planteados sobre las formas geométricas, como son los vértices iguales, sobrepasan el nivel de secundaria. También comentan que pueden encontrar dificultad en la disponibilidad y utilización de material comercializado.

Sobre la tarea T-8d

Los profesores/as suelen llevar a cabo parte de lo indicado en las propuestas que se proponen en esta tarea. Cuando explican la teoría todo el profesorado subraya que una arista siempre la forman dos caras al juntarse y que los vértices se forman con 3 polígonos o aristas como mínimo. Y solo algunos/as profesores/as (PC2, PC4) remarcan que para formar el modelo de un poliedro se necesitan por lo menos 4 caras. Respecto de lo señalado por Guillén (1997) en esta tarea, en las clases se trata cuántos polígonos forman los poliedros.

Dos profesores/as (PC3 y PC4), durante las explicaciones teóricas suelen pedir al alumnado que se señalen propiedades de los poliedros. Sin embargo, ningún/a profesor/a cuestiona al alumnado sobre propiedades específicas de los sólidos curvos relativas a vértices y aristas.

Todo el profesorado considera interesante esta tarea por la participación del alumnado en el descubrimiento y la elaboración de las propiedades de los poliedros. Ahora bien, se hace referencia a la falta de tiempo como problema para su realización en sus clases. PC1 y PC2 apuntan que, debido al temario que se ha de dar y al tiempo de que se dispone, dar las definiciones y las propiedades que cumplen los poliedros no les permite dar otros contenidos. Además, PC2 y PC3 subrayan que es una tarea para que se lleve a cabo construyendo los/as alumnos/as las formas geométricas, apuntando PC3 “Con la cantidad de alumnos que hay y si además tienen que pensar ellos la cantidad de varillas o polígonos que se necesitan, como ponerlos…, no se acabaría”. PC4 indica que es una tarea para que el alumnado la haga en casa y así utilice las TICs.

Sobre la tarea T-9d

Los/as profesores/as del curso en comunidad indican que a la hora de describir en clase los sólidos y, en particular, los poliedros, se centran en el tipo de caras que tienen estas formas geométricas, pero no trabajan la idea de caras vecinas ni suelen indicar como son las caras que bordean otras caras. Por ejemplo, en el caso de los prismas y las pirámides indican como son los polígonos de las bases o base y de las caras laterales, y, en la enseñanza de los poliedros regulares, señalan como son las caras que los forman. Y solo cuando se tratan los poliedros regulares una parte del profesorado (PC2 y PC3) indica que en cada vértice se une el mismo número de caras o aristas, pero sin hacer referencia al orden de los vértices.

Los/as profesores/as destacan que no suelen proponer subtareas como las que se incluyen en esta para comparar diferentes formas geométricas en relación con sus elementos y, por lo tanto, no se establecen analogías y diferencias entre ellas. Tampoco plantean propuestas en las que a partir de mostrar varios modelos de una familia se enuncian las propiedades que cumplen todos los ejemplos de ella y/o se cuestiona si además estas propiedades las cumplen otras familias. Aclaran que las descripciones de las diferentes formas geométricas se hacen de forma independiente, señalando que la descripción de los prismas va en un apartado diferente a la de las pirámides. Subrayan que no plantean la descripción de una forma geométrica a partir de otra.

En relación con las familias de poliedros que trabaja la tarea, los/as profesores/as anotan que no tratan en sus clases ni las bipirámides ni los antiprismas. Comentan que, en las bipirámides, no señalarían ni piensan que los/as alumnos/as dijeran que las bases que unen las dos pirámides sería una cara de la bipirámide. PC2 indica “Cuando se describe el octaedro, que es la única bipirámide que se ve en clase, aunque no se señale que lo es, los alumnos no cuentan como caras las bases de las dos pirámides”. Por lo que respecta a los antiprismas, ningún/a profesor/a hace referencia a ellos. Cabe mencionar que la mitad del profesorado (PC1, PC4) no incluiría en sus clases ni las bipirámides ni los antiprismas, por la dificultad que puede tener para el alumnado el estudio de estas familias de poliedros, y la otra mitad del profesorado (PC2, PC3) sí que las explicarían pues considera que con ello se reforzaría lo explicado a partir de los prismas y pirámides.

Los/as profesores/as consideran esta tarea interesante por la cantidad de conceptos que se introducen en ella, como son, por ejemplo, caras vecinas, caras laterales, arista de la base, orden de un vértice, etc. PC1 indica que parte de estos conceptos serían totalmente nuevos para el alumnado. También remarcan el hincapié que hace la tarea en que sean los/as alumnos/as los/as que descubran las propiedades de las familias relativas a los distintos elementos. Ahora bien, problemas que contemplan para desarrollarla en sus clases es la disponibilidad de tiempo para poderla llevar a cabo y la dificultad que conlleva para los/as alumnos/as establecer analogías y diferencias entre las formas geométricas, así como encontrar las propiedades que cumplen las familias.

Sobre la tarea T-10d

Los/as profesores/as del curso en comunidad señalan que lo que suelen desarrollar en sus clases de las propuestas de esta tarea se centra en contar el número de caras, vértices y aristas de los prismas y pirámides concretas y de los poliedros regulares, que son las formas geométricas que trabajan principalmente en clase. Una parte del profesorado (PC3y PC4) halla también el número de caras que concurren en los vértices de cada uno de los poliedros regulares. Y solo un/a profesor/a (PC3) propone determinar qué polígonos forman las bases de los prismas, o la base de las pirámides, que tienen un número determinado de: a) aristas; b) vértices; c) caras laterales, d) caras. Todos/as los/as profesores/as responden que no llevan a cabo el determinar el número de caras, vértices y aristas de un prisma o una pirámide n-agonal.

En relación con otros elementos de los sólidos (ángulos de las caras, ángulos diedros, ángulos de los vértices, diagonales de las caras y diagonales del espacio) implicados en esta tarea, todos/as los/as profesores/as señalan que no realizan esos tipos de subtareas con los/as alumnos en secundaria porque no las conocían o lo ven complicado para los/as alumnos/as de este nivel.

Los/as profesores/as expresan que esta tarea es interesante por las estrategias que los/as alumnos/as pueden emplear para contar los distintos elementos de los poliedros que se trabajan. Asimismo, destacan que permite averiguar si el alumnado considera todos los elementos que componen las formas geométricas o solo una parte. También apuntan que ayuda a que el alumnado desarrolle el lenguaje algebraico y dé expresiones verbales en torno a la expresión simbólica correspondiente. Finalmente, subrayan que desarrolla el pensamiento deductivo.

Ningún/a profesor/a opina que se pueda llevar esta tarea a las clases de matemáticas de secundaria. Los problemas que señalan para poder hacerlo se refieren a la: i) falta de capacidad por parte de los estudiantes para simbolizar y operar con la variable n; ii) dificultad para entender todos los conceptos y formas geométricas implicadas; iii) falta de habilidad para representar gráficamente las formas geométricas estudiadas; iv) ausencia de material para poder realizar las construcciones señaladas, y v) carencia de tiempo para llevarla a cabo. La mayoría (PC1, PC2 y PC3) la derivan para la asignatura de taller de matemáticas.

3.3.7.4 Las representaciones de las formas geométricas en la investigación en didáctica de la geometría y en la enseñanza/aprendizaje de la geometría

Dado que las representaciones son fundamentales en el estudio de las formas geométricas, en este subapartado aportamos información sobre los dibujos de figuras planas y sólidos, como representaciones de formas geométricas determinadas, que contemplan los/as profesores/as del curso en comunidad en sus clases, contrastándolos con representaciones que se contemplan en diversos trabajos de didáctica de la geometría. Nos fijamos también en el uso que hace este profesorado en sus clases de representaciones planas de los sólidos como los desarrollos y los diagramas de Schlegel.

Sobre los ejemplos de representaciones de figuras planas y de sólidos que se usan en la enseñanza: ¿Qué? ¿Por qué? ¿Para qué?

Una vez examinado con el profesorado del curso en comunidad el trabajo de Rey (2004), que se describe en el subapartado 1.5.2.1 del capítulo 1, y cuestionarles sobre los dibujos que muestran a sus estudiantes para el triángulo, el triángulo rectángulo, el cuadrado, el cubo, el cilindro y la pirámide los profesores han indicado en general que dibujan en sus clases los ejemplos prototípos. Para el triángulo, PC1 y PC2 han indicado dibujan en sus clases los que se presentan como prototipos, el triángulo equilátero. Sin embargo, PC3 y PC4 muestran el triángulo rectángulo, especificando PC4 que normalmente suele situar el ángulo recto arriba, sin especificar que es un triángulo rectángulo. Acentúan que no suelen hacer los que en Rey (2004) no se señalan como prototipos. En el caso del triángulo rectángulo todos/as indican que dibujan en clase uno de los que se señala como prototipo, situando uno de sus catetos como base y el ángulo recto en la posición horizontal-vertical. Ningún/a profesor/a sitúa la hipotenusa como base. Para el cuadrado, todo el profesorado indica que representa el que se propone como prototipo, siempre un lado como base, y apuntan que el que no se presenta como prototipo, efectivamente se reconoce como un rombo.

El cubo se muestra apoyándose sobre una superficie inexistente. Cabe mencionar que PC2 y PC4 subrayan que representan el indicado, pero en perspectiva, añadiendo líneas discontinuas a la "base" por detrás. El cilindro se presenta en posición vertical apoyado sobre una de sus superficies circulares y más alto que ancho. PC2 y PC4 subrayan que lo que suelen añadir son líneas discontinuas para la superficie circular por detrás, dándole perspectiva. Como ejemplo de pirámide, en general, suelen dibujar la que se ha representado como prototipo, rectas y con una de sus caras actuando como base. PC2 y PC4 indican que a los/as alumnos/as les cuesta dibujar una pirámide. En relación con dibujarla apoyada en un pico todos/as señalan que no la dibujarían. PC3 comenta "Se te puede ocurrir, pero así es mucho más difícil de dibujarla y la otra forma clásica es más fácil". PC3 remarca además que la pirámide de base cuadrada es la que más se identifica como una pirámide por su similitud con las pirámides de Egipto.

Las respuestas de los/as profesores/as participantes expresan que se utilizan estas representaciones gráficas porque los/as alumnos/as ya las conocen (PC1), por costumbre (PC2), porque son las más utilizadas (PC3) o porque son las clásicas (PC4). PC4 señala que ya aparecen otras representaciones cuando se resuelven problemas y el alumnado tiene a veces dificultades para identificar las formas geométricas. Si analizamos en concreto un caso particular, por ejemplo, las pirámides, la razón dada por todos/as los/as profesores/as del curso para explicar por qué utilizan la representación indicada como clásica se sustenta en cómo se muestran en la vida real; esto es, apoyadas en la base y no en el vértice (pirámides de Egipto). Además, PC3 especifica que los/as alumnos/as identifican las pirámides generalmente con la de base cuadrada, añadiendo PC4 que es la más fácil de dibujar. PC3 señala que es donde mejor se muestran las propiedades porque es la más sencilla de dibujar y muy visual.

Analizadas en el curso en comunidad las ideas expuestas por diferentes investigadores, los profesores del curso se manifiestan de acuerdo con Rey (2004) cuando expresa que con la intención de mejorar la comprensión de determinados conceptos se utilizan ejemplos clarificadores que intentan dar un modelo sobre el concepto que se quiere incorporar y para ello se recurre a ejemplos que modelizan el concepto. Los prototipos tienen una gran cantidad de ventajas ya que muestran la mayor cantidad posible de propiedades del objeto en cuestión. También apoyan a Moriena y Scaglia (2003) cuando señala que los libros de texto y el profesorado utilizan formas geométricas estereotipadas. Además, coinciden en que los esquemas mentales a que conducen estas representaciones gráficas estereotipadas influyen en el aprendizaje de los conceptos geométricos, ya que constituyen puntos de referencia cognitivos.

Los/as profesores/as están de acuerdo con lo señalado por Guillén (2004) quien subraya la importancia que tiene para describir un objeto geométrico variar la representación física y la posición. Asimismo, concuerdan con lo indicado por Blanco y Crespo (2007) quien expresa que para modelizar conceptos geométricos es importante, entre otros aspectos, dar gran cantidad de ejemplos. Entre las ventajas de utilizar otras representaciones, PC1, PC3 y PC4 señalan que sirven para que conozcan más representaciones de la forma geométrica estudiada. PC2 piensa que les ayudaría a que entendieran más las formas geométricas.

Los/as profesores/as señalan que introducen los conceptos relativos a formas geométricas definiéndolas, normalmente apoyando la definición con un dibujo de un ejemplo. Algunos/as profesores/as (PC2, PC3) indican que a partir de una definición ponen ejemplos. Todos/as ellos/as proponen tareas/ejercicios en los que los/as alumnos/as tienen que identificar formas geométricas a partir de dibujos que se les muestran. Les parece interesante lo que propone Rey (2004) para la construcción del concepto, esto es, la elaboración de una definición matemática, a partir de una gran variedad de ejemplos – prototípicos y no prototípicos con toda la amplitud de casos posibles –, junto con una complementación adecuada con descripciones verbales y orientaciones en la construcción de las características de dicho objeto. Comentan que de esta forma podrían descubrir las propiedades que cumple cada forma geométrica y, por tanto, describir correctamente las formas geométricas, pero aclaran que lo que ellos suelen hacer es dar directamente la definición. Según ellos, hay diferentes problemas con los que se han de enfrentar para desarrollar para llevar a sus clases los que propone este autor, como el tiempo que tienen para explicar el temario, así como, disponer de la variedad de ejemplos, descripciones verbales y dibujos en las diferentes orientaciones que plantea este autor.

Siguiendo también a Rey (2004), creen conveniente que, para describir un objeto geométrico, además de incorporar una variedad de ejemplos, con diversas orientaciones y configuraciones, analizar las definiciones puntualmente, y recurrir a descripciones de tipo discursivo (Hershkowitz, 1996; Duval, 1998, citados por Rey, 2004). Ahora bien, cuando se les cuestiona sobre lo que trabajan en sus clases al respecto, todos/as los/as profesores/as de curso señalan que cuando dibujan una forma geométrica, por ejemplo, un cubo, en general lo dibujan en perspectiva y no suelen indicar que todas las aristas miden lo mismo, aunque en los dibujos miden diferente. Tampoco comentan, que, aunque en los dibujos no lo parezca, mide lo mismo la cara que nos da a nosotros que la de un lateral. Exponen que no se hace hincapié en eso porque el alumnado en los cubos ya lo tienen asimilado y no se lo plantean. Además, en relación con los cubos, PC1 señala “Los alumnos ven el cubo como un dado por tanto, no hace falta especificarlo”; PC2 indica “Solo comento lo señalado de las aristas o caras si lo preguntan”; PC3 apunta “En clase a veces suelo decir: imaginaros que está todo perfecto, que las líneas son rectas y todo mide lo mismo”: PC4 anota “Se incide, más que en los lados, en decir que los ángulos son rectos, por ejemplo, les digo que esto es como la habitación, en los vértices inciden ángulos rectos” . Por lo que se refiere al cilindro, todos/as los /as profesores/as comentan que el que es más ancho que alto no lo ven como un cilindro, apuntando PC1 que lo ven como una pastilla o, anotando PC3 como una moneda. Además, PC3 señala “A la vista el alto es más bonito que el ancho”. Las respuestas de los/as profesores/as indican que no se suelen comentar las representaciones por considerarlo superfluo, ya que el alumnado ya conoce las propiedades que no se mantienen en los dibujos. Comentan que los/as alumnos/as tienen imágenes mentales incorporadas para la representación de cuerpos geométricos que no suelen cambiar.

Rey (2004) expresa también que los objetos geométricos son entes abstractos, solo comprensibles a partir de sus definiciones, y que toda representación de los mismos es una concretización de un objeto que no lo es por no cumplir con todas las características. Todo el profesorado ha indicado que esta observación no se centra en lo que se trata en secundaria. PC2 responde que “Eso es de muy artista” y PC4 que “Eso es muy ético, filosófico”. En relación con que los objetos geométricos son entes abstractos que solo son comprensibles a partir de sus definiciones, no se han manifestado ni de acuerdo ni en desacuerdo. Y todos/as ellos/as han opinado que mostrar el dibujo de un triángulo y expresarlo de esa manera, diciendo a los/as alumnos/as de sus clases que eso no es un triángulo rectángulo sino una representación de este complicaría el aprendizaje. PC1 y PC2 aclaran que a veces se dice que vas a representar un triángulo rectángulo, pero no especifican que el dibujo que realizan no es un triángulo rectángulo sino la representación. Se puede concluir que ningún/a profesor/a está de acuerdo en especificar tanto a la hora de representar una forma geométrica.

Los trabajos examinados hacen también referencia a dificultades que pueden presentarse al codificar o descodificar las representaciones de las formas geométricas. Moriena y Scaglia (2003) consideran que las representaciones estereotipadas constituyen el origen de ciertas dificultades que tienen algunos/as alumnos/as durante la identificación de ciertas formas geométricas. Guillén (2010, pp. 36-38) se apoya en Bishop (1992, p. 34) para llamar la atención sobre los obstáculos que enfrentan los alumnos para representar los sólidos. Asimismo, Blanco y Crespo (2007) también llaman la atención sobre que los/as alumnos/as tienen serias dificultades para representar en el plano cuerpos geométricos. Los/as profesores/as, del curso en comunidad, una vez ha intervenido el profesor director y examinados los artículos de investigación mencionados, han aclarado que ellos mismos enfrentan dificultades al dibujar algunas formas geométricas, especialmente los sólidos, lo que hace que a veces no realicen otras representaciones. Por ejemplo, PC1, PC2 y PC4 comentan que entre los inconvenientes que hay para utilizar otras representaciones en sus clases está el de saberlas dibujar y PC3 señala que pueden llevarles a confusión. Asimismo, en concordancia con Blanco y Crespo (2007), apuntan que el alumnado refleja dificultades en tareas/ejercicios en los que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar, evitándose en algunos casos. Consideran que utilizar otras representaciones de las formas geométricas puede ayudar al alumnado a describirlas, sin embargo, antes se deberían subsanar los problemas que puedan tener con el dibujo.

Por lo que respecta a si se relacionan diferentes representaciones de las formas geométricas entre sí, por ejemplo: el dibujo con un modelo, o el desarrollo plano con un dibujo, todos indican que sí. PC1 relaciona dibujos en la pizarra con objetos manipulables construidos. PC2 y PC3 relacionan los desarrollos planos con formas geométricas construidas a partir de ellos. PC4 relaciona formas geométricas en la pizarra con representaciones en el ordenador y formas del entorno, así como desarrollos planos con dibujos de formas geométricas.

La mayoría de los/as profesores/as relacionan representaciones gráficas con modelos, ahora bien, de todas las representaciones que señala Alsina et al. (1987) el profesorado no parece que lleve a cabo ninguna de ellas ya que lo que suelen hacer son representaciones gráficas de forma aproximada y solo PC4 que utiliza el ordenador las relaciona con algunas de las representaciones gráficas planas y del espacio que señala Alsina et al. (1987). PC2 y PC3 en concordancia con Guillén (1991) relacionan los dibujos de los desarrollos planos con figuras que construyen a partir de ellos.

Sobre los desarrollos y diagramas de Schlegel de los sólidos

En relación con los desarrollos de los sólidos, los/as profesores/as del curso en comunidad han dado respuestas diferentes en relación con lo que suelen trabajar en sus clases al centrarse en este tópico. PC2 y PC3 suelen dar a los/as alumnos/as desarrollos planos de algunos poliedros para que ellos/as construyan los modelos materiales. PC4 indica que las tareas sobre desarrollos planos que lleva a cabo en clase están relacionadas generalmente con los problemas en lo que hay que calcular el área de los sólidos. PC1 comenta que suele trabajar los desarrollos planos cuando la tarea/ejercicio lo indica. Al trabajar los desarrollos planos PC4 hace hincapié en las figuras planas que forman los sólidos y en cómo situarlas para que puedan representar a los sólidos. PC2 y PC3 se fijan en cómo habrá que juntar las figuras planas para construir los sólidos y PC1 en cómo hacer una representación plana de una forma geométrica del espacio. Cabe destacarse que la tarea que proponen PC1 y PC4 al trabajar los desarrollos de los poliedros se centra en ir del modelo a la representación al dibujar desarrollos de poliedros determinados para obtener las áreas laterales y totales de los sólidos. Sin embargo, PC2 y PC3 desarrollan actividad que se centra en el paso de la representación al modelo al realizar la construcción de algunos de ellos.

Al examinar el recurso de Guillén (1991, pp. 179-188) sobre los desarrollos planos, los/as profesores/as apuntan que el trabajo desarrollado por la autora lo consideran muy completo y que ellos/as no lo abordan con el alumnado. Expresan que algunas propuestas de las que se detallan se podrían plantear en secundaria, principalmente centrándose en el caso de los prismas y pirámides. PC1 añade que el desarrollo plano de algún poliedro regular también se puede describir, siempre que sea sencillo. PC3 subraya que se han presentado desarrollos planos bastante complicados de entender. Todos los profesores indican que no suelen llevar a cabo las tareas en las que se cuestiona por qué se puede o no montar un sólido determinado a partir de un desarrollo plano. Tampoco proponen a sus alumnos/as que describan los desarrollos con los que están trabajando. Solo PC4 ha apuntado que únicamente sugiere al alumnado que explique los desarrollos planos cuando contempla que algún/a alumno/a ha hecho un desarrollo plano que no corresponde con la forma geométrica solicitada. El profesorado en general ve complicado que el alumnado lleve a cabo tareas como las que desarrolla Guillén (1991) en la que los/as alumnos/as tengan que determinar todos los desarrollos planos de un poliedro o averiguar si una figura plana compuesta de polígonos es desarrollo de un poliedro en particular o no lo es.

Cabe señalarse que PC2 ha sido el/la único/a docente que ha indicado que ha llevado al aula la tarea de Guillén (1991) sobre los hexaminós presentado al alumnado varios desarrollos planos del cubo para que ellos/as señalaran con cuales se podían formar cubos. También consideran que es demasiado complicado para que los/as alumnos/as lo lleven a cabo las investigaciones que se plantean sobre las disposiciones de las pestañas en los desarrollos planos para posteriormente montarlos. PC2 anota que sería interesante su realización, pero el alumnado no lo harían bien.

En relación con las representaciones de los poliedros mediante diagramas de Schlegel todo el profesorado ha subrayado que no los conocían y que los ven complicado para enseñarlos en secundaria. PC4 apunta que es una forma muy original de representar a los poliedros, pero difícil de entender y realizar por parte de los alumnos. PC3 subraya que, aunque estos diagramas aportan mucha información de los poliedros no los considera necesarios para secundaria por su complejidad.

3.3.7.5 Sobre la enseñanza/aprendizaje de diferentes tipos de clasificación en la ESO

Guillén (2005) diferencia diferentes tipos de clasificación que se pueden tratar a partir de la geometría de los sólidos: i) clasificaciones a priori y a posteriori; ii) clasificaciones basadas en observaciones/percepciones de los objetos visualmente, centrándose en si se tiene o no determinados elementos o basadas en un elemento así como clasificaciones con criterios cuantitativos, en las que hay implicados más de un criterio, y iii) clasificaciones particiones, clasificaciones jerárquicas, clasificaciones con criterios de construcción y clasificaciones por analogía. En este trabajo se enumeran las características de cada una de ellas y se muestran diagramas que pueden representarlas (véase el apartado 1.4.2 del capítulo 1). En este subapartado incluimos información obtenida a partir de cuestiones planteadas a los profesores de los cursos en comunidad y presencial acerca de estos tipos de clasificación inmersas en el examen de este recurso realizado en el curso correspondiente.

Como señala Guillén (2005), con la clasificación “a priori” se crean nuevos conceptos. Las respuestas de los/as profesores/as destacan esta característica de este tipo de clasificación. Por ejemplo, PP3 ha indicado que veía interesante que el alumnado modificase las propiedades de las formas geométricas, obteniendo así formas geométricas diferentes y creando nuevos conceptos. Asimismo, se ha comentado el carácter investigador que tiene esta clasificación en el alumnado, indicando PP2 que el/la alumno/a va a investigar qué pasa con las formas geométricas cuando se modifican sus condiciones. También se ha apuntado por PO1 lo creativa que puede ser esta clasificación. Cabe mencionar que los/las profesores/as del curso en comunidad (PC1, PC2, PC3, PC4) han señalado que el alumnado aprendería más con esta forma de clasificar porque es el alumnado quien descubre los conceptos. También se ha hecho referencia a que el alumnado puede tener problemas para crear/ entender/ visualizar nuevos conceptos a partir de un concepto (PC1, PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PP3, PO4). De igual modo, se ha comentado que puede ser confusa por los nuevos conceptos creados (PO1) y que se pueden aplicar criterios que no sean del todo correctos (PO3). Respecto del tiempo que se emplearía para llevarla a término en clase hay disparidad de opiniones. Mientras que PO3 señala que sería rápida de realizar, PC3 anota que ve complicada de hacerla en clase porque se emplearía mucho tiempo.

Las clasificaciones “a posteriori” las consideran más fáciles de realizar por el alumnado que las “a priori”. Los/as profesores/as del curso en comunidad apuntan que para el alumnado esta clasificación será más sencilla porque a partir de conocer las propiedades de las formas geométricas las pueden organizar atendiendo a características comunes. Cabe destacarse que PO4 ha apuntado que es más asequible organizar si se conocen las formas geométricas y, además, se han manipulado. Asimismo, PO1 destaca que la clasificación a posteriori hace recapitular al estudiante sobre todos los conceptos y le obliga a tomar decisiones sobre la importancia de las cosas, asentando lo que se ha estudiado. Los inconvenientes que se han señalado por los profesores del curso en comunidad se refieren a la cantidad de formas geométricas que puede conocer el alumnado y las propiedades que conoce realmente de ellas. PC3 ha destacado que el universo de las figuras geométricas que conocen los/as alumnos/as puede llegar a ser muy reducido. Igualmente, PP2 y PO2 han destacado que el alumnado debe realmente conocer y haber trabajado las propiedades anteriormente, remarcando PP4 que el alumnado no va conocer las propiedades minuciosamente lo que puede hacer que no se clasifique correctamente. PP3 y PP4 han subrayado que se trabaja con lo conocido con lo que el alumnado no descubrirá conceptos.

El profesorado ha considerado sencillas las clasificaciones ingenuas, destacando el caso en que la clasificación salga dicotómica. Cabe mencionar que PP1 ha subrayado que si se conoce el criterio es bastante sencilla de realizar. Asimismo, PP2 ha anotado que ayuda a conocer ciertas propiedades de las formas geométricas. Además, PO2 remarca que son interesantes, porque al ser sencillas llegan de una manera directa a los/as alumnos/as. También se ha indicado que hace que los/as alumnos/as razonen sobre los diferentes criterios que se han apuntado. De igual modo, para evaluar el dominio que muestran los/as alumnos/as sobre estos conceptos. Asimismo, los/as profesores/as del curso online han subrayado que son clasificaciones sencillas al centrase en regularidades e igualdad de elementos. Por otra parte, algunos/as profesores/as del curso en comunidad, aunque también la consideran relativamente asequible para el alumnado, han remarcado que no son conceptos que los/as alumnos/as dominen, por ejemplo, la igualdad de vértices (PC3). Asimismo, también se ha señalado por PC1 que no se suele trabajar en clase la regularidad e igualdad de los elementos en los poliedros, a excepción de que se trabajen los poliedros regulares. El/La único/a profesor/a que ha indicado que la considera clásica, PP3, ha subrayado que lo que se suele trabajar en clase es la igualdad de los elementos y clasificaciones en las que los grupos de clasificación no se solapen, con lo que se fija en una de las características de este tipo de clasificación.

Tanto el profesorado del curso en comunidad como el del presencial ha indicado que las clasificaciones basadas en observaciones/percepciones de los objetos visualmente y las establecidas al fijarse en un elemento de los poliedros son las que ellos trabajan en sus clases para las familias de los prismas y las pirámides. Se distinguen los prismas y las pirámides entre rectos/as u oblicuos/as, especificando PC4 que cuando las aristas son perpendiculares a las aristas básicas dice que es recto y si no oblicuo. PC2 y PC4 también señalan que distinguen entre poliedros cóncavos o convexos. PC3 expresa que se nombran pirámides de base triangular, cuadrangular, etc. Cabe mencionar que los/as profesores/as del curso presencial han expresado que este tipo de clasificación no debe presentar dificultad para el alumnado, según PP1, PP2 y PP3, por ser visual y según PP4 porque es la que se suele enseñar en clase y aparece en los libros de texto. Entre las respuestas de estos/as profesores/as tenemos a PP3 que indica que las ve útiles porque cada forma geométrica pertenece según el criterio que se propone en un grupo u otro. No debe presentar confusión para el alumnado. Sin embargo, ningún profesor trata en sus clases la clasificación que se centra en aquellas formas geométricas que no tienen base, tienen una base, dos bases, etc. PC3 y PC4 indican que distinguen entre los prismas y las pirámides si tienen bases o base respectivamente, pero no clasifican con ese criterio; indican la propiedad de la familia correspondiente pero no las utilizan para clasificar

Por lo concerniente a las clasificaciones particiones, clasificaciones jerárquicas, clasificaciones con criterios de construcción, clasificaciones por analogía (Guillén, 2005), se ha realizado un estudio diferente en los cursos estudiados debido principalmente a la estructura del curso y al tiempo del que se disponía. En el curso en comunidad se han analizado estas clasificaciones mientras que en los cursos presencial y online nos ha interesado cuales han sido las que les han parecido más y menos convenientes para llevarlas al aula en secundaria.

Todos/as los/as profesores/as han expresado que llevan a clase de alguna forma las clasificaciones particiones, sobre todo atendiendo a un criterio. Entre las respuestas señalamos la de PP1 que comenta que de las clasificaciones la más convenientes es la clasificación partición porque se establecen clases y el alumnado ha de asignar la forma geométrica en una clase concreta. Asimismo, PC4 señala que clasificar los prismas en función de un criterio es sencillo para el alumnado. PC3 apunta que clasificar los prismas en rectos y oblicuos o en cóncavos y convexos es una tarea que es fácil de llevarla a clase. Respecto de la clasificación jerárquica y en particular en los cuadriláteros, la mayoría de los profesores de curso presencial (PC1, PC2, PC3) señala que no les gusta la que se muestra en Guillén (2005), apuntando PC3 que un cuadrado no es un rectángulo y además el cuadrado tiene todos los lados iguales y el rectángulo no, con lo que ya se están diferenciando, añade PC2. Sin embargo, otro profesor (PC4) señala que, aunque realiza la de particiones, para él en determinados casos un cuadrado es un tipo de rectángulo. Cabe mencionar que PP2 por lo que respecta a la menos conveniente comenta que la jerárquica porque incluir unas figuras dentro de otras es complicado para el alumno, como árbol es posible, pero como red lo ve muy difícil. Asimismo, PP4 indica que la ve de las menos conveniente porque establecer relaciones entre las familias no es fácil para el alumnado. En cambio, PO2 señala que para su parecer para secundaria la clasificación jerárquica es la más sencilla de entender, aunque no señala la razón. Además, PO3 comenta que la clasificación jerárquica la considera la más rigurosa, aunque remarca que se deben establecer particiones dentro de ella.

Y por lo que respecta a la clasificación con criterios de construcción todos/as los/as profesores/as del curso en comunidad señalan que no se hace, indicando PC1 que los/as alumnos/as tendrían problemas para realizarla. Sin embargo, dentro del cuso presencial ha habido dos profesores/as que la han considerado como la más conveniente. Indicando PP2 y PP4 que al construir ya está aplicando y aprendiendo las propiedades. Asimismo, PC4 especifica que los alumnos aprenderían bastante con este tipo de clasificación, pero en contrapartida comenta que necesitaría mucho tiempo para llevarla a cabo. En cuanto a si se podría hacer oralmente todos/as los/as profesores/as del curso en comunidad señalan que sí pero que no se les había ocurrido. Sin embargo, como la menos conveniente la destaca PO1 al señalar que no se pueden ver esas normas, por ser muy complejas y además se suelen solapar las distintas clases.

En cuanto a las clasificaciones por analogía el profesorado del curso en comunidad considera que es complicada para el profesorado y, más para que la realice el alumnado. PC3 destaca, por ejemplo, que la clasificación por analogía que presenta Guillén (2005) no la considera de su agrado porque no ve al cuadrado como rombo y rectángulo, sin embargo, remarca que puede venir bien para clasificar prismas en cóncavos y convexos a partir de polígonos cóncavos y convexos. Asimismo, se ha comentado que puede ser esta clasificación un problema para el alumnado porque los/as alumnos/as de secundaria no dominan la clasificación en el plano, como ha indicado PP1; no la recuerdan, como ha anotado PP3; les cuesta a los alumnos relacionar por ejemplo propiedades que ocurren en el plano y llevarlas al espacio, anotado por PO2. Si bien, el/la único/a profesor/a que la considera como más acertada para los/as alumnos/as ha sido PO3 al señalar que la búsqueda de analogías puede ser interesante al relacionar dos grupos. Y algunos/as profesores/as del curso en comunidad, como PC2 y PC4, tras explicar el profesor director este tipo de clasificación, la consideran bastante interesante por ver cuándo se puede o no establecer analogías entre el plano y el espacio.

Cabe mencionar que en general el profesorado ha mostrado aprendizaje con estas clasificaciones, señalando PO4 que no conocía estos tipos de clasificaciones y que por lo tanto no opina cuál sería mejor para el alumnado.

3.3.7.6 Sobre la transposición de las tareas de Guillén (1997) en relación con la clasificación a tareas de clase

En este subapartado partimos de las tareas T-1cl a T-8cl Guillén (1997), que describimos en el apartado 1.6.3 del capítulo 1, diseñadas para trabajar la clasificación de las formas geométricas. Las observaciones obtenidas a partir de comentarios de los profesores del curso en comunidad al analizar este recurso, las hemos organizado según las tareas a partir de las que las hemos obtenido. El estudio solo se ha llevado a cabo en el curso presencial.

Las respuestas de los profesores del curso en comunidad a la T-1cl y T-2cl señalan que en sus clases algunos (PC2 y PC4) clasifican los primas y pirámides en cóncavos/as y convexos/as, la mayoría de ellos (PC2, PC3 y PC4) distinguen los prismas en rectos y oblicuos, todos ellos señalan la clasificación de los prismas y pirámides en función del número de lados del polígono/s de la base/s y la mayoría (PC2, PC3, PC4) los distingue en regulares o irregulares en función de la base, especificando que no dicen prismas o pirámides de bases regulares sino prismas o pirámides regulares. Cabe destacarse que solo PC2 pone tareas/ejercicios referentes a la clasificación que distingue los cóncavos de los convexos, que consisten en representar estas formas geométricas mediante dibujos y que los/as alumnos/as indiquen como son. En relación con las otras clasificaciones mencionadas ningún/a profesor/a de este curso propone otras tareas/ejercicios relativos a estas clasificaciones. Las razones dadas para explicar por qué no las realizan hacen referencia a que: i) no aparecen en los libros de texto (PC1, PC3); ii) no se consideran necesarias (PC2); iii) se consideran clasificaciones sencillas para los alumnos (PC4). PC3 comenta que luego las utilizan en enunciados como por ejemplo “sea un prisma regular hexagonal…”.

Dado que la T-1cl trata sobre la altura de un sólido, se cuestionó a los/as profesores/as del curso acerca de las definiciones que señalaban en clase para altura de un prisma y de una pirámide. Para el prisma, todos/as los/las docentes han expresado que la altura de un prisma es la distancia entre las bases y la altura de una pirámide la distancia del ápice a la base.

Para las tareas T-3cl a T-8cl, las respuestas del profesorado del curso en comunidad han indicado que ningún profesor ha tratado en sus clases las problemáticas que se contemplan en ellas. Respuestas sobre la T-3cl indican que no se clasifica fijándose en la regularidad, o en la igualdad, de todas las caras, ni tampoco se realizan clasificaciones centradas en la regularidad de las caras laterales. Los/as profesores/as comentan que no llevan a cabo ninguna de ellas porque no se trabajan esos criterios de clasificación en los libros de texto (PC4, PC2) y/o no se conocen esos criterios para clasificar ni esa manera de clasificar las formas geométricas (PC1, PC3). Algunos/as profesores/as han señalado que este contenido lo ven complicado para los/as alumnos/as (PC1, PC4). Las respuestas a la T-4cl informan de que los/as profesores/as de este curso no realizan clasificaciones utilizando varios criterios conjuntamente, y aclaran que no han visto nunca clasificaciones de prismas y pirámides utilizando estos criterios. En general, consideran interesante estas clasificaciones, pero las ven complicadas para los/as alumnos/as de secundaria.

La T-5cl se centra en la enumeración de propiedades de las familias de sólidos establecidas en las clasificaciones. Los/as profesores/as subrayan que no realizan tareas/ejercicios en los que hay que descubrir propiedades e indican que no las harían por lo complicado que es para los alumnos (PC1, PC4) y por la falta de tiempo (PC2, PC3). En relación con la T-6cl, que se centra en las relaciones de inclusión, los/as profesores/as comentan que no realizan tareas/ejercicios de este tipo, que las encuentran difíciles para los/as alumnos/as (PC2, PC3) y que tampoco ellos/as tienen dominio del tema (PC1, PC3, PC4). Respecto a la T-7cl, según los/as profesores/as del curso, nunca han visto los diagramas de inclusión en la clasificación de los poliedros ni clasificaciones análogas a la geometría plana, excepto clasificar según el número de lado del polígono o polígonos de la base o bases.

En la T-8cl los/as profesores/as comentan que no hacen este tipo de tareas. PC1 señala no trabaja especialmente los prismas cuadrangulares y no suele especificar los paralelepípedos. PC2 comenta que les da la misma importancia a los paralelepípedos que a los otros tipos de prismas. PC3 solo trata los paralelepípedos en clase diciendo que hay rectos y oblicuos. PC4 no los suele enseñar.

Cabe destacarse que a todos/as los/as docentes de este curso les han parecido interesantes las tareas que se han examinado cuyas respuestas incluimos en este subapartado, pero remarcan que no tienen tiempo para realizarlas.

3.3.7.7 Clasificación de cuadriláteros, triángulos y hexágonos. Sobre el trabajo de Fielker (1987a, 1987b)

Si nos centramos en la clasificación jerárquica señalada por Fielker (1987a) de los cuadriláteros basada en lados paralelos, lados iguales, y presentada en el apartado 1.6.1 del capítulo 1, todos los/as profesores/as del curso en comunidad y presencial señalan que ni la llevan a cabo ni la ven conveniente para realizarla con los/as alumnos/as de secundaria. Comentan que prefieren clasificaciones particiones en las que se especifica el número exacto de lados paralelos. En general estos/as profesores/as apuntan que no están acostumbrados a incluir los paralelogramos dentro de los trapecios. Entre las respuestas mencionamos, por ejemplo, la de PP4 quien comenta que le parece interesante porque no la conocía, pero complicada de ponerla en práctica en clase. Considera que como profesor/a es curiosa, pero para enseñarla tendría que llegar a un acuerdo con todo el profesorado, incluido el de primaria. En un principio señala que seguirá aplicando la que aparece en los libros de texto.

Por otra parte, Fielker (1987a) propone que sean los/as alumnos/as quienes lleven a cabo la clasificación de los cuadriláteros en función del número de pares iguales y paralelos o la clasificación de los cuadriláteros basándose en la comparación entre el número de lados paralelos con el número de ángulos rectos. De las respuestas de los/as profesores/as del curso en comunidad y presencial se contempla que están todos/as de acuerdo en que sean los/as alumnos/as los que hacen las clasificaciones. Además, PC1 piensa que este tipo de tareas se pueden hacer en clase, PC2 y PC3 opinan que es interesante que los niños hagan la clasificación y descubran las cosas y PC4 señala que es una forma diferente de llevar a cabo la clasificación. Se puede constatar que todos/as estos/as profesores/as ven favorable que sean los/as alumnos/as los/as que lleven a cabo la clasificación, realizando ellos la elección a la hora de clasificar. Sin embargo, PP4 señala que los/as alumnos/as no están habituados a trabajar la clasificación de esta forma, sino que el/la profesor/a es el que se la da hecha. La mayoría de los profesores del curso presencial (PP1, PP2 y PP4) consideran que la falta de tiempo sería un hándicap para poder realizar las clasificaciones señaladas. Cabe mencionar que PP3 piensa que esta forma de llevar a cabo la clasificación en la que es el alumnado es quien la tiene que realizar funcionaría solo con una parte de ellos/as que sería los/as que se implicarían en la tarea.

Si nos fijamos ahora en algunas de las figuras geométricas en concreto que clasifica Fielker (1987a) como el cuadrado que lo incluye dentro del rombo y rectángulo, cabe señalar que si bien en el curso en comunidad la mayoría de los docentes (PC1, PC2, PC3) no consideran al cuadrado ni como rombo ni como rectángulo, en el curso presencial la mitad no lo consideran incluido y la otra mitad sí, pero tras mostrarle este artículo, solamente PP3 considera que el cuadrado no es un rombo porque los rombos no tienen todos los ángulos iguales y el rectángulo no tiene todos sus lados iguales.

Por lo que se refiere a incluir al rombo como un tipo de trapecio y cometa, observamos que prácticamente todos/as los/as profesores/as difieren de lo presentado por Fielker (1987a). La mayoría de los/as profesores/as del curso en comunidad y presencial señalan que no los pondrían ni como cometas ni como trapecios, ya que subrayan que los trapecios tienen un par de lados paralelos y las cometas no tienen lados paralelos. Además, PC2 comenta que están acostumbrados a la otra clasificación. Sin embargo, aunque PC4 opine que como los/as demás profesores/as parece que después de estudiar a Fielker (1987a) dude en cómo clasificarlos. PP2 y PP4 especifican que el rombo tiene unas características particulares que lo diferencian del trapecio y cometa. Además, PP4 subraya que no aparece en los libros de texto.

En cuanto a las condiciones que plantea Fielker (1987a) para clasificar los cuadriláteros según el número de pares de lados paralelos y ángulos rectos, contemplamos que la mitad de los/as profesores/as del curso en comunidad (PC3, PC4) no la ven apropiada porque el cuadrado y el rectángulo estarían en el mismo lugar en la clasificación y piensan que por lo tanto tendrían que tener el mismo nombre. Sin embargo, la otra mitad del curso en comunidad opina que se podría hacer ya que el que estén situados en el mismo lugar no hace que tengan que tener el mismo nombre (PC1, PC2). En cambio, en el curso presencial, la mayoría de los/as profesores/as (PP1, PP2, PP3) consideran apropiados plantear estas condiciones para que los alumnos/as clasifiquen los cuadriláteros en secundaria porque, por ejemplo, PP2 opina que los/as alumnos/as de esta forma conocen más las propiedades que cumplen las figuras geométricas. Por otra parte, PP3 al igual que han señalado PC3 y PC4, opina que habría figuras que solaparían como es el caso del rectángulo y cuadrado y del rombo y romboide.

Si examinamos, por último, dentro de la clasificación de los cuadriláteros, lo que opinan los/as profesores/as sobre si en la clasificación comparativa de pares de lados paralelos y ángulos rectos se añade el número de pares de lados iguales, los/as profesores/as de ambos cursos opinan que estamos haciendo una clasificación disjunta, ahí no se van a solapar y que se parece mucho a la que ellos realizan en clase. Cabe destacar, sin embargo, que PC3 señala que no les gusta ninguna de las formas de clasificar que se han expuesto.

Por lo que concierne al curso online donde los/as profesores/as participantes han señalado lo que les ha aportado las clasificaciones de los cuadriláteros mostrada por Fielker (1987a) a partir de las diapositivas que se les ha proporcionado en el curso, encontramos diferentes opiniones. Entre los que han valorado positivamente estas propuestas señalan como ventajas el que se ha clasificado mediante tablas con dos criterios (PO1), se ha profundizado en el estudio de la clasificación al añadirse nuevos criterios (PO2, PO4), y replantea quien debe realizar la clasificación el profesorado o el alumnado (PO3). Por lo que se refiere a las dificultades que se señalan para trabajar la clasificación de los cuadriláteros siguiendo esta propuesta figuran las que se refieren a que los/as propios/as profesores/as han tenido dificultad en entender diferentes conceptos por tratarse de una presentación sin ponente (PO1), se ha utilizado demasiada terminología (PO1) y se ha profundizado demasiado, lo que hace que no pueda quedar clara para el alumnado (PO3).

Fijándonos ahora en la clasificación expuesta por Fielker (1987a) de los triángulos en la que para el curso en comunidad y presencial se les ha presentado que se pueden clasificar según la igualdad de lados, según a magnitud del ángulo mayor, según las simetrías y según los ejes de simetría, los/as profesores/as de estos cursos han señalado que clasifican los triángulos de forma euclidiana, clasificando por una parte atendiendo a las longitudes de sus lados y a la medida de sus ángulos. Se aprecia como ningún docente lleva a cabo la clasificación de los triángulos según las simetrías o ejes de simetrías que tengan. Se aclara que se clasifica de esa forma porque son las clasificaciones que siempre se han enseñado. También señala PC4 que son las clasificaciones de los triángulos que se realizan en los cursos posteriores. Además, apunta que los problemas que se plantean sobre triángulos atienden a los triángulos clasificados con estos criterios. PP4 ha señalado que son las que aparecen en los libros de texto de secundaria. Sobre si llevarían otras clasificaciones a la enseñanza en secundaria distintas a las que tratan en sus clases, todos indican que no lo harían, principalmente porque no hay tiempo, señalado por todos, y porque lo ven complicado para los alumnos indicado por PP3 y PP4.

En el curso online, dado que en los cursos en comunidad y presencial se había indicado que los/as profesores/as solo realizaban la clasificación según la igualdad de los lados y según la magnitud del ángulo mayor, se decidió mostrar solo estas clasificaciones en este curso. Los/as profesores/as subrayaron que realmente estas eran las que se trabajaban con losas alumnos/as; señalaron que las han visto perfectas y sencillas (PO2, PO3, PO4) y son las que aparecen en los libros de texto (PO4). Cabe señalar que PO1 comenta que al trabajo de Fielker le falta añadir algún dibujo.

Si nos centramos en la clasificación de los hexágonos que plantea Fielker (1987b), los profesores del curso en comunidad señalan que les llama la atención clasificar estos polígonos ya que ninguno/a los clasifica en clase y nunca habían visto la forma de clasificar los hexágonos mediante tramas (figura 3.1). Por otra parte, en el curso presencial PP1 y PP2 consideran que puede ser interesante clasificar los hexágonos como se les ha mostrado, mientras que PP3 y PP4 apuntan que no ven estas figuras geométricas tan importantes como para clasificarlas en clase ya que no se trabajan en curso posteriores.

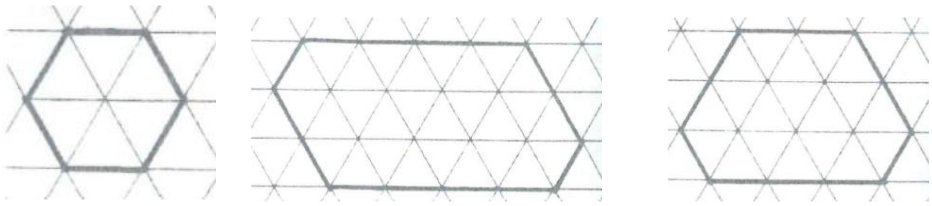


Figura 3.1. Ejemplos de hexágonos propuestos por Fielker

Según los/as profesores/as, el hexágono regular es el único hexágono que conoce el alumnado. Indican que, si se les dijera a los/as alumnos/as que dibujaran y clasificaran los hexágonos, solo dibujarían uno, el regular. PC4 opina que se les tendría que decir que dibujen figuras planas de 6 lados, no decirles hexágonos, si quisiéramos que dibujaran varios tipos de hexágonos. Los/as profesores/as del curso en comunidad señalan que los/as alumnos/as tendrían dificultad para identificar hexágonos que no fueran regulares e incluso algún/a profesor/a indica que no sabrían que cualquier figura plana de seis lados podría considerarse como ejemplo de hexágono. Los/as profesores/as del curso presencial hacen hincapié en que el alumnado debe saber lo que es un hexágono y qué condiciones cumple un hexágono regular.

Todos/as los/as profesores/as del curso en comunidad señalan que no sería conveniente llevar al aula la propuesta que desarrolla Fielker (1987b) para la clasificación de los hexágonos. PC3 piensa que solo aprenderían que hay más tipo de hexágonos, ya que para él/ella esto son curiosidades. Asimismo, PC2 y PC3 señalan que hay cosas como estas que las dejaría para el taller de matemáticas y no para las clases de matemáticas por la amplitud del temario. Sin embargo, dentro de los/as profesores/as del curso presencial hay dos profesores/as (PP1, PP2) que sí que llevarían esta tarea al aula especificando siempre que tuvieran tiempo. Los/as otros/as dos profesores/as del curso presencial (PP3, PP4) opinan que no, indicando PP3 que con los hexágonos que mostrara el/la profesor/a sería suficiente y, anotando PP4 que no hace falta saber todos los tipos y propiedades de los hexágonos. En general y una vez examinado el trabajo los/as docentes del curso en comunidad opinan que seguirían sin realizar la clasificación en clase ya que la amplitud del temario no les permite puntualizar tanto sobre los hexágonos. Además, PC3 señala que sigue sin verle mayor utilidad a la clasificación realizada de los hexágonos que la de saber que diferentes tipos de ellos. Sin embargo, PC1 y PC2 ven esta clasificación apropiada para realizarla en los talleres de matemáticas. Y si se tuviera tiempo, después de examinar el trabajo, en general los profesores del curso en comunidad siguen sin ser partidarios de impartirlo. PC1 y PC2 lo dejarían para el taller de matemáticas aún disponiendo de tiempo para desarrollarlo en clases de geometría. Por otra parte, PC3 haría algo sencillo dándoles una trama y PC4 lo haría si tuviera mucho tiempo.

En cuanto a los otros tipos de clasificación que señala Fielker (1987b) de los hexágonos de acuerdo con su simetría, según el nº de ángulos rectos, clasificar los hexágonos cóncavos, etc., todo el profesorado señala también que no lo imparte en sus clases, indicando la mayoría (PC1, PC2, PC3, PP1, PP2) que, aunque lo ven interesante, consideran complicado realizar clasificaciones basándose en las diagonales y simetrías. Hay ciertos/as profesores/as como PC4 que no lo consideran importante o como PP3 y PP4 que, aunque lo ven interesante, no disponen de tiempo para llevar a clase esta clasificación.

Para finalizar este subapartado cabe destacarse que la mayoría de los/as docentes del curso en comunidad y presencial comentan que la enseñanza de la geometría en sus clases no se imparte como se desarrolla en el trabajo de Fielker (1987a, 1987b). Consideran que sería interesante tratar diferentes clasificaciones de las examinadas pues opinan que los/as alumnos/as mejorarían su aprendizaje. PC1 manifiesta que cambiarían los conceptos que tienen de las formas geométricas. PC2 comenta que cambiaría la forma de enseñar de los/as profesores/as y de aprender de los/as alumnos/as. PC3, PP1 indican que los alumnos/as aprenderían a realizar clasificaciones con distintos criterios. PP2 señala que el alumnado conocería como son las figuras realmente y serviría para que los/as alumnos/as vieran que no existe solo el hexágono regular. PP3 apunta que los/as alumnos/as descubrirían que habría diferentes formas de llevar a cabo una clasificación. Pero la mayoría (PC1, PC3, PC4, PP1, PP2, PP3, PP4) opina también que hay que avanzar en el temario, especificando PC1 que aprenderían más, pero hay que centrarse en lo más importante y esto para él/ella no lo es. PC3 subraya que sí que se aprendería más porque ellos/as serían los que construirían los hexágonos pero que no se puede invertir tanto tiempo a cosas que prácticamente no se ven en cursos posteriores. PC4 y PC2 marcan que aprenderían a pensar, razonar, pero hay que avanzar y dar la parte de la geometría que se va a utilizar en un futuro. PP1 considera esta metodología de enseñanza un poco ideal debido al tiempo que se emplearía en llevarla a cabo, PP3 destaca que es una metodología diferente, pero al igual que subraya PP4 complicada de realizarla por el tiempo que se tardaría en resolverla y remarca que realizar diferentes clasificaciones variando los criterios puede ser un obstáculo para los alumnos/as que presenten dificultades de aprendizaje.

3.4 Sobre los cursos desarrollados. Una reflexión posterior

Las observaciones que incluimos en esta sección corresponden a la tarea TRfc1 de la tabla 2.1 del apartado 2.2.3 del capítulo 2. Se han recopilado expresiones que el profesorado ha indicado cuando se les ha cuestionado sobre el aprendizaje recibido en el curso en el que han estado implicados. Las que incluimos en el apartado 3.4.1 se refieren a los contenidos geométricos implicados en los cursos y a la manera de desarrollar la enseñanza recibida, y las del apartado 3.4.2 conciernen a las propuestas presentadas para trabajar la descripción clasificación y establecimiento de relaciones en el desarrollo del curso correspondiente.

3.4.1 Sobre el aprendizaje recibido en el curso correspondiente

La tabla 3.133 registra los/as profesores/as que han hecho referencia a cierto aprendizaje en relación con contenidos geométricos y con cuestiones relativas a la enseñanza de estos contenidos.

Docente	Contenidos	Materiales	Metodología planteada	Tareas/actividades
PC1	x	x		x
PC2	x	x		x
PC3	x	x	x	x
PC4	x	x		x
PP1	x	x	x	
PP2	x	x	x	
PP3	x	x		
PP4	x	x		
PO1				
PO2	x			
PO3			x	
PO4	x		x	x

Figura 3.133. Sobre el aprendizaje recibido en el curso correspondiente

Puede observarse que donde mayoritariamente se ha notado un aprendizaje por parte de los/as profesores/as participantes ha sido en la parte de los contenidos geométricos. El profesorado que ha mostrado un mayor aprendizaje en los contenidos geométricos ha sido el de los cursos en comunidad y presencial. Entre las respuestas destacamos a PC1 comentando “Considero que se nos han presentado una gran cantidad de elementos de los poliedros de los que yo realmente algunos no recordaba”, PC2 “Cuántas cosas de los poliedros nos dejamos sin explicar y yo creía que explicaba todos sus elementos”, PC4 “Sí que se nos está proporcionando información sobre los elementos de los poliedros aunque considero que para el nivel que damos es demasiada información”, PP4 “Nunca consideraba que podía haber diferentes tipos de diagonales en el poliedro”. Por lo que se refiere a los tipos de prismas, PP1 señala “No me imaginaba la clasificación tan extensa que se podía realizar con los prismas”. PP2 “Solo con los tipos de prismas ya cubrimos todo el tiempo que le dedicamos a la geometría”. Cabe mencionar que en el curso online han señalado el aprendizaje de una forma más general comentado PO2 que en los documentos de la descripción ha ampliado la información que conocía y ha descubierto nuevos criterios para describir y clasificar. PO4 ha apuntado que ha recibido mucha información y se le han aclarado conceptos en los que tenía dudas.

Y también ha sido en los cursos en comunidad y presencial donde el profesorado ha indicado mayor aprendizaje respecto de los materiales que pueden usarse en la enseñanza de la geometría. Destacamos que PC3 subraya “Nunca he utilizado los espejos en la enseñanza de la geometría, solo los he visto en algún curso de formación del CEFIRE”. Asimismo, PC4 indica “El otro día empecé a abrir cajas que contenían materiales de geometría en el instituto que no tenía ni idea de para que eran. Claro, ahora ya las voy conociendo un poco más”. PC1 apunta “Yo nunca he visto el polydron, de hecho, solo conozco los troquelados, pero no con gomitas”. PC2 “Me ha llamado la curiosidad el del puzle, pero nunca lo he visto. Además, el de las varillas tampoco lo he visto nunca”.

Asimismo, PP2 comenta “Me ha parecido muy interesante trabajar con estos materiales para construir figuras geométricas. No los conocía y creo que pueden hacer la clase más entretenida y, además, que aprendan los alumnos por ellos mismos las figuras geométricas”. También PP3 ha anotado “Yo no conocía la mayoría de los materiales que nos has presentado. A partir de ahora, si el departamento tiene alguno de estos materiales sé cómo utilizarlos y pienso que si tengo lo tiempo lo haré”. PP4 señala “Yo utilizo los programas informáticos para explicar algunas figuras geométricas cuando me hacen falta, pero creo que con estos materiales los alumnos van a ser más participativos y creativos. No los conocía y me parecen interesante”. PP1 indica “Yo conocía algunos de ellos y alguna vez lo he utilizado, pero el enfoque que se me ha dado en este curso para su uso me parece muy bueno”. Cabe señalarse que PO1 ha subrayado la importancia que tiene el uso de los materiales comercializados en la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos. Ha anotado lo difícil que le ha sido apreciar la dualidad e interrelación entre los poliedros regulares, remarcando que, si se hubiera acompañado la explicación con modelos construidos con varillas, como se indicaba en la presentación, se habría entendido mejor.

Dado que en el curso online la explicación ha sido mediante diapositivas en las que se presentaba texto acompañado de formas geométricas, se ha preguntado si hubiera sido interesante que se hubieran añadido más formas geométricas acompañando las cuestiones planteadas. Se ha preguntado también si se ha buscado alguna forma geométrica para responder alguna cuestión. Cabe destacarse que la mayor parte de los/las profesores/as han indicado que sí (PO2, PO3, PO4) a ambas preguntas. Por ejemplo, PO2 ha indicado que para estudiar algunas propiedades es mejor tener la forma geométrica delante, sobre todo para encontrar los ejes de simetría. PO3 y PO4 han apuntado que han tenido que buscar información, señalando PO2 que en referencia a las cuestiones relativas a los poliedros regulares a pesar de que la información iba acompañada de ilustraciones. PO4 ha apuntado que, en algunas formas geométricas, especialmente de los poliedros regulares convexos sobre todo para identificar como eran y ver los planos de simetría y ejes de rotación del cubo y octaedro. Es importante señalar que el/la único/a docente, PO1, que ha señalado que no las ha echado en falta, ha subrayado que ha sido debido a que las tiene a su disposición. Sin embargo, este/a docente ha remarcado que hubiera sido más ilustrativo haber tenido incrustado en el texto en vez de una forma geométrica fija algún modelo en movimiento para las preguntas de los planos de simetría y ejes de rotación del cubo y octaedro.

Por lo que se refiere a la metodología, algunos/as profesores/as han señalado que el enfoque presentado en la enseñanza de la geometría les ha hecho contemplar otra manera de llevar a cabo su enseñanza. Cabe mencionar que PO2 apunta “Muchas veces nos dejamos llevar por lo que sabemos, que lo hemos aprendido en los libros y no nos paramos a pensar en otras posibilidades. Quizá deberíamos emplear más tiempo en el aula para “investigar”. Tanto la descripción como la clasificación requieren fijarnos en distintas propiedades o características que nos llevan a considerar más casos que los que normalmente estudiamos”. Asimismo, PO3 ha señalado positivamente la metodología que se les hemos presentado “También me ha hecho replantearme la metodología que empleo en las clases y, a partir de ahora, voy a cambiar alguna de estas cosas, dejando que sean los propios alumnos los que descubran muchas de estas, en lugar de descubrirlas yo al alumno”. También destacamos que PP1 ha subrayado que el curso le ha aportado que se puede llevar a cabo la enseñanza de la geometría desde la experimentación y construcción por parte del alumnado. Del mismo modo, PP2 ha destacado que la metodología que se ha mostrado ayuda al alumnado a razonar más en geometría y tener visión espacial. Cabe mencionarse que PC3 ha anotado que la metodología mostrada ayuda a los/as alumnos/as a ser más observadores y ver la geometría sin el cálculo al que están acostumbrados.

Si nos centramos en las tareas/ejercicios que se han propuesto, el conocimiento adquirido al respecto ha sido subrayado por los/as profesores/as del curso en comunidad, que es donde se han analizado las tareas de Guillén (1997) sobre la descripción y la clasificación. Cabe destacarse que, de forma generalizada, estos/as profesores/as han considerado estas tareas interesantes por la cantidad de conceptos que se trabajan, tanto en la geometría del espacio como en la del plano. PC1 ha considerado llamativo que en algunas tareas se pregunte al alumnado sobre los conceptos geométricos sin haberse explicado anteriormente. PC4 ha remarcado la cantidad de conceptos que se pueden introducir en una sola tarea como, por ejemplo, caras vecinas, caras laterales, arista de la base, orden de un vértice, etc., PC2 ha destacado en las tareas presentadas que son los/as alumnos/as quienes, a través de ellas, llevan a cabo la descripción y la clasificación de las formas geométricas. PC3 ha manifestado que el alumnado, a través de la resolución de estas tareas, comprendería mejor los contenidos geométricos referentes a la descripción y la clasificación. Asimismo, PC4 ha remarcado que este tipo de tareas no se muestran en los libros de texto, con lo que le han servido para descubrir otra forma de enseñar la geometría. Los/as profesores/as de este curso han subrayado también los diferentes contextos y situaciones en que se puede llevar a cabo la descripción y que desconocían (PC1, PC2, PC3). Asimismo, los diferentes procedimientos de construir o de generar sólidos que pueden facilitar la descripción/análisis (PC3). También, como se puede ir aumentando el nivel de descripción de las formas geométricas según el nivel que se busque que tengan los/as alumnos/as (PC1). Igualmente, los diferentes tipos de análisis que se pueden llevar a cabo y los elementos que podemos considerar para describir (PC2). De la misma manera se ha indicado la cantidad de ideas que ha aportado para plantear la descripción de las formas geométricas en clase y lo que realmente interesa que se describa (PC4). Cabe mencionar que PC4 ha indicado que se propone una descripción diferente a la mostrada en los libros de texto.

3.4.2 Acerca de las propuestas presentadas para trabajar la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones

En este apartado incluimos observaciones que se refieren a las propuestas presentadas en el desarrollo del curso correspondiente y/o a carencias que se han detectado en el desarrollo del mismo, a creencias que se tienen, a contenidos y/o tareas que gustan más y/o que se añadirían y/o se eliminarían en sus clases y a las dificultades enfrentadas por el profesorado y/o por el alumnado bien para resolverlas bien para impartirlas en las clases de la ESO.

La mayoría de los/as profesores/as de los diferentes cursos implicados en nuestro estudio han considerado la descripción como enriquecedora para la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos. Algunos/as profesores/as han expresado que en el curso en que han participado la propuesta para tratar la descripción ha sido muy completa y ha aportado una gran cantidad de información (PC2, PC3, PC4, PP2, PP3, PO4). Se ha remarcado que el curso ha ayudado a recordar formas geométricas y/o a conocer nuevas formas geométricas (PC1, PC2, PC4, PP3, PP4, PO2, PO4). También se ha comentado que se ha presentado la descripción de una forma muy didáctica (PC1). Igualmente se ha remarcado la cantidad de elementos que se pueden utilizar para la descripción de los sólidos y la cantidad de familias de poliedros que se pueden describir (PC3). De la misma manera se ha destacado la utilidad que puede tener en la enseñanza de los sólidos en secundaria (PP1) y que en el curso se han aclarado conceptos para los que el profesorado tenía dudas (PO3, PO4). Cabe mencionar que ha habido un docente del curso online (PO1) que en el desarrollo del curso señaló que consideraba la descripción incompleta debido a que no se trataban algunos elementos de lo sólidos, algunas relaciones entre los poliedros y algunos tipos de poliedros. Se explicó que el curso continuaba y que se tenía planificado tratarlo posteriormente.

Respecto de la descripción de familias de poliedros como los prismas, pirámides, antiprismas y bipirámides, la mayoría de los/las docentes la han considerada detallada y/o completa (PC1, PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PP3, PP4, PO2, PO3, PO4). Además, los docentes han expresado que la descripción presentada es demasiado amplia para el alumnado de secundaria (PC2, PP1, PP2), que se han empleado términos complicados (PC3) y que ha sido muy minuciosa y rigurosa (PO4). Cabe informar también de que un/a profesor/a del curso online (PO1) ha remarcado que ha sido aburrida y con falta de imágenes.

En relación con los poliedros regulares convexos, la mayoría de los/las docentes no añadirían nada a lo expuesto en el curso porque, según han expresado, lo impartido ha sido demasiado extenso (PC1, PC2, PC3, PC4, PP2, PP3, PP4, PO2, PO3, PO4). Cabe destacarse que en el curso online se ha indicado que se debía haber manipulado formas geométricas (PO2, PO3) y haber realizado la explicación más práctica (PO4). También se ha destacado que tenía que haberse mostrado aplicándola en la vida cotidiana del alumno (PP1). De igual modo, se ha comentado que se debería haber dedicado más tiempo para explicar lo abordado (PP4). Un profesor del curso online, PO1, ha remarcado que se tendrían que haber presentado mejores diagramas y dibujos.

Asimismo, se han considerado interesantes para su formación como profesores/as los diferentes tipos de clasificación que se han tratado desde las matemáticas y desde su enseñanza que, como han aclarado, la mayoría se desconocían (PC1, PC4, PP1, PP3, PP4). Se ha resaltado además que las clasificaciones que se han presentado implican al alumnado en el desarrollo de la clasificación; el alumnado juega un papel primordial en ellas, no se muestran por el profesorado ya acabadas, o como se indican en el libro de texto, que es como se suelen llevar a cabo (PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PO4). Además, se ha subrayado el sentido que puede tener la clasificación desde la enseñanza de la geometría (PP3). También se ha acentuado que no solamente se han mostrado diferentes tipos de clasificaciones; además se han señalado los problemas que se pueden encontrar en las clasificaciones tratadas (PP2).

El profesorado ha considerado importantes todos los contenidos tratados en los cursos, pero se han destacado especialmente las relaciones entre los poliedros regulares, entre sus elementos, entre ellos con otras familias y/o entre sus representaciones, así como lo concerniente al descubrimiento de los elementos de esta familia de poliedros. En particular las que se refieren a planos de simetría y ejes de rotación (PC1, PO1). Asimismo, se ha subrayado el truncamiento de los poliedros regulares porque es una forma de conectar la geometría plana y del espacio (PC2; PP4). También se ha considerado importante los desarrollos planos de los poliedros ya que “Es lo que más puedo llegar a trabajar con los alumnos” (PC3). Además, la interrelación de los poliedros platónicos (inscripción) “Porque muchas de las relaciones que podemos ver entre ellos han sido nuevas para mí y sobre todo la forma en cómo están relacionados” (PC4). También el concepto de dualidad y los poliedros regulares (PP4, PO2, PO3). La formación de los poliedros regulares porque les parece muy interesante como trabajo pequeño de investigación, de cara a los alumnos de secundaria, y tiene como conclusión algo comprensible para ellos y bastante básico (PO4). Cabe destacarse que la mayoría de los/as profesores/as del curso presencial han remarcado como importantes todas las explicaciones del profesor director en los cursos (PP1, PP2, PP3).

Los contenidos que más han gustado, aunque no se consideren adecuados para secundaria, han sido la representación de los poliedros mediante los diagramas de Schlegel (PC3, PC4, PP1, PP4, PO1, PO2) y la interrelación entre los poliedros platónicos (PC1, PC2, PP2, PP3, PO3, PO4). También se ha hecho referencia a la presentación que se ha llevado a cabo de los planos de simetría y ejes de rotación (PO4). Cabe mencionarse que PC1 ha subrayado la cantidad de conceptos que se pueden trabajar con los poliedros regulares.

Cabe destacarse que el profesorado ha subrayado que los contenidos tratados en el curso correspondiente no se pueden trasladar a las clases de la ESO. Se ha acentuado que habría que simplificar las tareas que se proponen para trabajar la descripción (PC1, PC2, PP1, PP2, PP3, PP4, PO2), que se ha de realizar la descripción más sencilla para que el alumnado aprenda los contenidos más importantes (PC1, PC2, PC3, PC4, PP1, PP2, PP4, PO3), enriqueciendo la descripción trabajando alguna forma geométrica en concreto (PO1). Se ha apuntado la dificultad para el alumnado del vocabulario utilizado en algunas descripciones (PC3, PP1). Cabe mencionar que también se ha destacado el poco tiempo de que se dispone en secundaria para explicar la geometría (PC4, PO4).

Para la clasificación, se ha indicado que las clasificaciones de los cuadriláteros son importantes (PC1, PP3), pero también se ha señalado que son liosas, especialmente para los/as alumnos/as de secundaria (PC1, PC2, PC3. PO1) y que es difícil de llevarlas al aula por la falta de tiempo (PC1). Por lo que respecta a la clasificación de los hexágonos en el curso en comunidad, que es donde se planteó, se ha indicado que no la consideran realizable por falta de tiempo y por la poca utilidad que puede tener en los cursos posteriores (PC2, PC3, PC4).

Dado que el profesorado ha encontrado complicado llevar a cabo lo explicado a clase se cuestionó sobre qué contenidos de los tratados se podrían adecuar al aula de secundaria. Los/as profesores/as indicaron que además de llevar a cabo la descripción de los principales poliedros de una forma más sencilla, consideraron que la descripción de los poliedros regulares sería una parte que se podría explicar en secundaria (PC1, PC4, PP3, PP4, PO1), así como su obtención (PC2, PP2, PP3, PP4, PO1, PO2, PO4). También se ha hecho referencia a la representación de los poliedros mediante sus desarrollos planos (PC1, PC3, PP1, PO1, PO2). De igual modo se ha mencionado, pero llevado a cabo de una manera sencilla, los planos de simetría y ejes de rotación (PO1, PO2, PO4), así como la dualidad de los poliedros regulares convexos (PO3, PO4).

En general, al finalizar el curso correspondiente se ha destacado la importancia de la descripción y clasificación en geometría. Todo el profesorado ha considerado la actividad de describir y clasificar fundamental e imprescindible en la enseñanza de esta materia. Se considera necesario conocer las formas geométricas y sus elementos para poder aplicarlo a la vida cotidiana y a las matemáticas (PC1, PC2, PC3, PC4, PP4, PO3, PO4). Además, se ha remarcado que al describir se comprenden como son los objetos (PO1), se hace un aprendizaje y uso del vocabulario en geometría, mejorando la expresión (PC1, PC3, PO1). También se desarrolla la visión espacial (PC1, PP2). De igual modo se ha destacado la importancia que tiene para después aplicarla en la clasificación (PO3, PO4). Respecto de la clasificación se ha señalado que la clasificación es fundamental para poder organizar las formas geométricas (PC1, PC2) y que al clasificar se comprenden como son los objetos (PO1). También se ha subrayado que con la clasificación el alumnado se inicia en investigación (PO2) y puede ver la utilidad que tiene la geometría (PO3. PO4).

Se ha destacado que la enseñanza de la geometría impartida en el curso ha llevado a plantearse la forma de enseñar la geometría donde el profesorado es el principal transmisor de los contenidos geométricos (PP1, PO3). Como hándicap para ello se ha señalado la falta de tiempo (PP1, PP2, PP3, PP4) y la extensión de lo presentado para la descripción (PP3). También se han referido a la falta de tiempo para poder hacer la clasificación como los/as investigadores/as proponen en los recursos examinados en el curso (PC1, PC2, PC3, PC4, PP2, PP3, PP4). Algunos/as profesores/as han indicado que el alumnado podría llevar a cabo la clasificación, proponiendo que se podría plantear al alumnado que hiciera una clasificación sencilla (PC2) y en función de pocos criterios (PP1).

3.5 Sobre los perfiles de los/as profesores/as implicados en el estudio en relación con la enseñanza de la geometría en la ESO

En el apartado 2.3.3 del capítulo 2 se indican las características generales que asignamos a cada uno de los perfiles que denominamos según que su tendencia didáctica sea Tradicional, Tecnológica, Espontaneísta o Investigativa (véase el subapartado 2.3.3.1) y se establecen los indicadores de los perfiles que precisan las características asignadas a estas tendencias en relación con la enseñanza particular de contenidos relativos a los procesos de describir y clasificar y al establecimiento de relaciones. En esta sección incluimos observaciones y resultados en relación con las tendencias que reflejan los/as profesores/as implicados en nuestro estudio, obtenidas tomando como referencia estos indicadores, a los que nos referimos con los códigos que les hemos asignado en el subapartado 2.3.3.2. Y al igual que los indicadores asignados a las diferentes tendencias, las observaciones las hemos organizado en cuatro grupos, en los apartados 3.5.1 a 3.5.4.

Como indicamos en este subapartado, codificadas las respuestas de los/as profesores/as, para cada profesor/a implicado contrastamos sus respuestas con los indicadores de las diferentes tendencias mediante una cuaterna en la que cada componente refleja el número de indicadores asignados a cada tendencia, siendo el orden TR (tradicional), TE (tecnológica), E (espontaneísta) o I (investigativa). Cuando una observación la hemos considerado como asociada a indicadores de dos tendencias se ha contado la mitad para cada una de ellas. Cabe aclararse también que, dado que las preguntas realizadas no han sido las mismas para todos los cursos de nuestra investigación, en los siguientes apartados solo se contemplan los/as profesores/as de los cursos en los que se ha tratado la problemática planteada. Recordamos asimismo que, con objeto de visualizar la información que presentamos sobre las tendencias que prevalecen en los/as profesores/as implicados en el estudio, en los diferentes apartados de esta sección incluimos tablas en las que se registra, por un lado, la tendencia que reflejan las respuestas de los profesores implicados al contrastarlas con cada uno de los indicadores de cada uno de los cuatro grupos en los que los hemos organizado. Por otro lado, para mostrar el peso que tiene las tendencias asignadas a los/as diferentes profesores/as en el grupo que corresponda, recopilamos en una tabla el número de indicadores del grupo correspondiente para cada una de las diferentes tendencias que han reflejado las respuestas de cada uno de los/as profesores/as implicados/as. Y también, para mostrar la información obtenida en relación con los indicadores, para cada uno de ellos del grupo correspondiente registramos en una tabla el número de profesores/as que lo ha reflejado en sus respuestas.

3.5.1 Acerca de la geometría: Creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones

En la tabla 3.134 se muestra la tendencia que ha mostrado cada profesor/a para cada uno de los indicadores de este apartado.

Docente	1	2	3	4	5	5’	6	6’	7	7’	7’’	8	9
PC1	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TR
PC2	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TR
PC3	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TE//TR	TE	TE	TE	TR
PC4	TR	E	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TE//TR	TE	TE	TE	TR
PP1	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TE	TE	TE	TE	TR
PP2	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TR	TE	TE	TE	TE	TR
PP3	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TR	TE	TE	TR	TR
PP4	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TE	TE	TR	TE	TE	TR	TR
PO1	TR	TE	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TE	TE	TE	TE	TE
PO2	TR	E	TR	TR	TR	TE	TR	TR	TR	TE	TE	TR	TR
PO3	TR	TR	TR	TR	TR	TE	TR	TR	TE	TE	TE	TE	TE
PO4	TR	TE	TR	TR	TR	TR	TE	TR	TR	TE	TE	TR	TR

Tabla 3.134. Tendencias de los profesores para los indicadores de la sección “Acerca de la geometría: creencias y ...”

Puede observarse que hemos asignado a todo el profesorado de los cursos una tendencia tradicionalista para los indicadores 1, 3, 4, 5 y 6’. Al cuestionar sobre lo que se entiende por geometría, descripción y clasificación se responde que es el estudio de las formas geométricas enunciando sus propiedades, explicando los elementos que forman parte de ellas, diferenciando unas formas geométricas de otras o agrupándolas. Se basa la enseñanza de estos procesos matemáticos en los contenidos que se van trabajar en los cursos posteriores, otras disciplinas y destrezas básicas para la vida cotidiana, enfocando la enseñanza de la geometría al conocimiento de los conceptos geométricos para su posterior continuidad en los estudios posteriores. Las respuestas reflejan también una visión de la descripción y la clasificación estática-restringida. Cabe destacar que, aunque algunos/as profesores/as consideran ambos procesos matemáticos importantes en diferentes asignaturas de la ESO, pero acaban finalmente centrando su enseñanza en la explicación de la descripción y clasificación de las formas geométricas como contenido matemático.

Por lo que concierne al contenido de la descripción y la clasificación (indicador 2), el profesorado tiene mayoritariamente una tendencia tradicionalista; se pretende que el alumnado conozca y comprenda las formas geométricas, sea capaz de resolver los problemas o tareas de medición u organice, diferencie u ordene las formas geométricas. Sin embargo, a dos profesores/as (PO1, PO4) les hemos asignado una tendencia tecnológica al anotar que con la descripción y la clasificación el profesorado pretende desarrollar capacidades, razonamiento e imaginación en el alumnado mediante técnicas. Asimismo, anotamos dos tendencias espontaneístas (PC4, PO2) al enfocar la descripción y la clasificación para que se entienda el entorno o sus objetos. Por otra parte, para los indicadores 5' y 6 indicamos una tendencia mayoritariamente tecnológica, percibiéndose la enseñanza de la geometría como una materia en la que para facilitar la creatividad y reflexión de la descripción y la clasificación se emplean símbolos, material comercializado o programas informáticos, y la materia se relaciona con diferentes asignaturas del currículum. También observamos en algunos/as profesores/as una tendencia tradicionalista al considerar estos procesos matemáticos para visualizar los conceptos geométricos, sin prácticamente construir las formas geométricas, basándose para su explicación principalmente en el dibujo de la pizarra o libro de texto y relacionar la descripción y clasificación solo con los temas propios de geometría.

Por lo que atañe al aprendizaje de la descripción y la clasificación por parte del alumnado (indicadores 7, 7', 7'') para un mismo indicador, cuando las respuestas para la descripción y la clasificación presentaban tendencias distintas, las hemos separado con una doble raya (//), la primera pertenece a la descripción y la segunda a clasificación. Los/as profesores/as que hemos anotado como tradicionalista señalan que el aprendizaje del alumnado se realiza por parte de superposición de conceptos por parte del profesorado sobre el alumnado. Sin embargo, hemos considerado como tecnológicos cuando el profesorado hace que el alumnado intervenga en el proceso de enseñanza/aprendizaje contestando a las preguntas que va planteando el profesorado sobre los conceptos o es el alumnado, a partir de planteamientos del profesorado, quien lleva a cabo la descripción o clasificación. Cabe mencionarse que para todos/as los/as profesores/as se ha marcado que el aprendizaje viene de la observación o explicación de casos particulares para después generalizarse. Asimismo, también para todo el profesorado se ha apuntado que el alumnado ha de entender los conceptos para poder aprendérselos. En cuanto a la comunicación de los contenidos (indicador 8), observamos que la mitad del profesorado tiene una tendencia tradicional al considerar que lo importante es que el alumnado explicite lo aprendido, no pareciendo que le conceda importancia a la argumentación. Sin embargo, la otra mitad del profesorado tiene una tendencia tecnológica al indicar que el alumnado ha de argumentar lo que ha comprendido. Respecto a lo que se considera como dinamizador del aprendizaje (indicador 9), se contempla que el profesorado del curso en comunidad, presencial y algunos/as profesores/as del curso online presentan una tendencia tradicionalista al centrar principalmente la enseñanza de sus contenidos en aquellos que aparecen en el libro de texto o el currículum. Sin embargo, los/as otros/as profesores/as del curso online, hemos apuntado que presentan una tendencia tecnológica al centrar la enseñanza de los contenidos de la descripción y la clasificación en los que consideran más fundamentales dentro de la matemática escolar.

En la tabla 3.135 registramos el número de indicadores de las diferentes tendencias que presenta cada docente respecto del total de los indicadores de este apartado.

Docente	TR	TE	E	I
PC1	11	2	-	-
PC2	10	3	-	-
PC3	7.5	5.5	-	-
PC4	6.5	5.5	1	-
PP1	7	6	-	-
PP2	8	5	-	-
PP3	9	4	-	-
PP4	8	5	-	-
PO1	5	8	-	-
PO2	9	3	1	-
PO3	7	6	-	-
PO4	9	4	-	-

Tabla 3.135. Número de indicadores de la sección "Acerca de la geometría: creencias y ...", de las diferentes tendencias, asignados a los profesores de los cursos

Puede observarse que destaca una tendencia tradicionalista en los/as profesores/as PC1, PC2, PC3, PP2, PP3, PP4, PO2 y PO4, una tendencia tecnológica en PO1y hay profesores/as que se mueven entre una tendencia tradicionalista y tecnológica, sin predominar claramente ninguna de las dos, como PC4, PP1 y PO3.

En la tabla 3.136 registramos el número de profesores/as cuyas respuestas reflejan cada uno de los indicadores sobre creencias y ... para las diferentes tendencias.

Tendencia	1	2	3	4	5	5'	6	6'	7	7'	7''	8	9
TR	12	8	12	12	12	3	4	11	7	-	-	6	10
TE	-	2	-	-	-	9	8	1	5	12	12	6	2
E	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
I	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.136. Número de profesores que reflejan cada uno de los indicadores, de las diferentes tendencias, de la sección "Acerca de la geometría: creencias y ..."

Puede notarse que los indicadores 1, 2, 3, 4, 5, 6', 7 y 9 presentan una tendencia mayoritariamente tradicionalista. Por otra parte, reflejan una tendencia tecnológica los indicadores 5', 6, 7' y 7''. Finalmente, se examina que el indicador 8 está entre una tendencia tradicional y tecnológica. Cabe destacarse que la tendencia espontaneísta solo han sido reflejada por dos docentes para el indicador 2 y la tendencia investigativa no se ha visto reflejada para ningún indicador.

3.5.2 Sobre la enseñanza de la geometría en la ESO

La tabla 3.137 presenta las tendencias que ha manifestado cada profesor/a para los diferentes indicadores del apartado que se está analizando.

Docente	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	20'
PC1	TE	I	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR/TE
PC2	TE	I	TE	TE	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TR	TR	TR/TE
PC3	TE	I	TE	TE	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TR	TR	TR/TE
PC4	TE	I	TE	E	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TE	TR	TR/TE
PP1	TE	I	TE	TE	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TR	-	-
PP2	TE	I	TE	TE/I	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TE	-	-
PP3	TE	I	TE	TR	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TR	-	-
PP4	TE	I	TE	TE	TR	TE	TR/TE	TE	TE	TR	-	-

PO1	TE	I	TE	I	TR	TE	TR/TE	TE	TE	-	-	-
PO2	TE	I	TE	E	TR	TE	TR/TE	TE	TE	-	-	-
PO3	TE	I	TE	E/I	TR	TE	TR/TE	TE	TE	-	-	-
PO4	TE	I	TE	I	TR	TE	TR/TE	TE	TE	-	-	-

Tabla 3.137. Tendencias de los/as profesores/as para los indicadores de la sección “Sobre la enseñanza de la geometría en la ESO”

La tabla 3.137 muestra que en relación con el indicador 10 todo el profesorado tiene asignado una tendencia tecnológica al señalar que comienzan la descripción y clasificación por las figuras planas porque los sólidos se construyen con las figuras planas, aunque también se destacado por algún/a docente que son más sencillas de estudiar. También hemos asignado la misma tendencia a todos/as los/as profesores/as para el indicador 11, pero hora es la investigativa ya que todos/as los/as profesores/as han expresado que al empezar la descripción y la clasificación suelen preguntar a los/as alumnos/as sobre los conocimientos que tienen bien a través de modelos o representaciones del espacio, definiciones verbales o tareas del libro de texto.

Respecto de la programación de los contenidos a tratar (indicador 12), hay un/a profesor/a al que hemos asignado una tendencia tradicionalista ya que expresa que enseña todos los contenidos geométricos que propone el libro de texto. Al resto del profesorado les hemos asociado una tendencia tecnológica porque varían los contenidos del currículum o libro de texto en función de la dificultad que puedan tener para el alumnado, los que se trabajaran en cursos posteriores u otras asignaturas, en la vida cotidiana, etc.

Por lo que se refiere a por qué se considera importante la enseñanza de la descripción y la clasificación (indicador 13) hay profesores/as para los que varía la tendencia asignada según se trabaje el proceso matemático de la descripción o la clasificación. La tendencia tradicionalista se ha contemplado en 2/12 donde se ha señalado principalmente que se consideran importantes estos procesos matemáticos porque centran su enseñanza en el estudio de la geometría. La tendencia tecnológica en la enseñanza de la descripción se ha reflejado en 5/12 profesores; la consideran importante porque tiene una aplicación además de en la geometría en otras partes de las matemáticas o materias. En la enseñanza de la clasificación se reduce a 4/12 el número de profesores/as que presenta esta tendencia. Por lo que respecta a la tendencia espontaneísta, 3/12 del profesorado considera que la descripción es importante por la conexión que pueda tener con el entorno para el alumnado, mientras que en la clasificación considera esta tendencia 2/12 del profesorado. Y hemos asignado la tendencia investigativa a 2/12 profesores que consideran que la descripción puede desarrollar el razonamiento del alumnado a partir de problemas que lo favorezcan, mientras que aumenta esta tendencia a 4/12 en la clasificación.

Los profesores de los cursos correspondientes han mostrado una tendencia tradicionalista para los indicadores 14, 19, 20 y 20’. Entre las razones indicadas por los profesores/as para explicar por qué no se enseña toda la geometría (indicador 14) destacan las que hacen referencia a que no se tiene tiempo para explicar todos los contenidos de la descripción y la clasificación, principalmente porque no empiezan el temario por la geometría o porque consideran que hay temas más importantes. Como se aprecia en el apartado 3.3.6, el profesorado de los cursos en comunidad y presencial es mayoritariamente tradicionalista también en relación con el indicador 19 al opinar que considera que el alumnado lleva una preparación en geometría cuando realiza las tareas propuestas en geometría y conoce, transmite o sabe los contenidos geométricos. Las dos tendencias tecnológicas se han marcado por hacer referencia a que se contempla el razonamiento de los contenidos geométricos y la resolución de tareas. Las respuestas del profesorado del curso en comunidad al expresar la razón por la que les gusta o no la geometría al alumnado (indicadores 20 y 20') también las hemos marcado como con tendencia tradicionalista al destacar que opinan que a los alumnos no les gusta la geometría por basarse en una memorización de figuras geométricas, fórmulas y aplicación de las fórmulas a problemas.

Para los indicadores 15, 17 y 18 el profesorado ha marcado una tendencia tecnológica. La razón que más se ha subrayado para explicar los contenidos geométricos que se priorizan (indicador 15) ha sido la referente a que esos contenidos son necesarios principalmente para la continuidad en el estudio de las matemáticas y en menor medida, en el estudio de otras materias. A un/a docente se le ha asignado la tendencia tradicional porque indica que no suele priorizar contenidos intentando darlos todos. Las razones que se han dado para explicar por qué se enseñan estos contenidos geométricos (indicador 17) hacen referencia a que se marcan en el currículum y debido a la falta de tiempo, se centran en aquellos que tienen más aplicación en las matemáticas y otras materias. El/La profesor/a que hemos marcado como tradicional ya hemos comentado que intenta enseñar todos los contenidos. Respecto de los cursos en los que se enseñan los contenidos geométricos (indicador 18) se ha señalado que en aquellos en los que a partir de los contenidos geométricos que el currículum señala para cada curso, el profesorado se centra en la enseñanza de aquellos que, según su criterio, pueden tener más repercusión para sus estudios posteriores.

En relación con el indicador 16, concerniente con por qué se les da importancia a los contenidos de descripción y clasificación, a todo el profesorado les hemos asignado una tendencia tradicional/tecnológica pues el que los marca el currículum de la ESO es la razón que prevalece al explicar por qué se da importancia a estos contenidos.

En la tabla 3.138 registramos el número de tendencias que presenta cada docente para el total de los indicadores de este apartado.

Docente	TR	TE	E	I
PC1	8	3	-	1
PC2	4	7	-	1
PC3	4	7	-	1
PC4	3	7	1	1
PP1	2.5	6.5	-	1
PP2	1.5	7	-	1.5
PP3	3.5	5.5	-	1
PP4	2.5	6.5	-	1
PO1	1.5	5.5	-	2
PO2	1.5	5.5	1	1
PO3	1.5	5.5	0.5	1.5
PO4	1.5	5.5	-	2

Tabla 3.138. Número de indicadores de la sección "Sobre la enseñanza de la geometría en la ESO", de las diferentes tendencias, asignados a los profesores de los cursos

Puede observarse que se distingue una tendencia tecnológica para todo el profesorado de los cursos de nuestro estudio excepto para PC1 que muestra una tendencia tradicional. Se subraya que, aunque la tendencia investigativa ha sido poco asignada, a todos/as los/as docentes se les ha asociado al menos un indicador de esta tendencia investigativa. Se destaca que la tendencia espontaneísta apenas ha sido mostrada en los/as docentes, tan solo expuesta por algún/a docente en algún indicador.

En la tabla 3.139 registramos para cada uno de los indicadores de este apartado el número de tendencias.

Tendencia	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	20’
TR	12	-	1	2	12	1	6	-	1	6	4	4
TE	-	-	11	4.5	-	11	6	12	11	2	-	-
E	-	-	-	2.5	-	-	-	-	-	-	-	-
I	-	12	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 3.139. Número de profesores que reflejan cada uno de los indicadores, de las diferentes tendencias, de la sección “Sobre la enseñanza de la geometría en la ESO”

La tabla 3.139 muestra que la tendencia tradicional destaca en los indicadores, 10 y 14 ya que se ha asignado a todo el profesorado. También se ha asociado mayoritariamente en los indicadores 19, 20 y 20’. La tendencia tecnológica destaca claramente en los indicadores 12, 15, 17 y 18, y, en menor proporción, en el indicador 13. Se resalta que la tendencia investiga la hemos asignado a todo el profesorado en el indicador 11. Finalmente, anotamos que el indicador 16 se mueve entre la tendencia tradicionalista y tecnológica. La tendencia espontaneísta solo ha sido reflejada por algún/a docente en relación con el indicador 13.

3.5.3 El profesor y los contenidos geométricos de la ESO

La tabla 3.140 presenta las tendencias que ha manifestado cada profesor/a para los diferentes indicadores del apartado que se está analizando.

Docente	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
PC1	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PC2	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PC3	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PC4	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PP1	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PP2	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PP3	E	TR/TE	TR/TE	E	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PP4	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PO1	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TE	TE	TR	TR	E/I	TR/TE	TR/TE
PO2	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE
PO3	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	E/I	TR/TE	TR/TE
PO4	TE	TR/TE	TR/TE	TE	TR	TR	TR	TR	TR/TE	TR/TE	TR/TE

Tabla 3.140. Tendencias de los profesores para los indicadores de la sección “El profesor y el currículum de geometría”

La tabla 3.140 muestra que la mayoría de los/as profesores/as han reflejado una tendencia tradicional/tecnológica para la mayoría de los indicadores de este apartado. Ello ocurre para los indicadores 22, 23, 29, 30 y 31. Hemos asignado esta tendencia a los indicadores 22 y 23 ya que se indica que las definiciones las expresa el/la profesor/a e incluyen las propiedades necesarias y suficientes. Aunque hay dos profesores/as (PO1 y PO3) que pretenden que el alumnado llegue a la definición de la familia de sólidos no se han considerado espontaneístas porque el/la profesor/a es quien realmente acaba definiendo. También para la clasificación de los sólidos (indicador 29), es el profesorado quien lleva a cabo la clasificación. Tan solo dos profesores/as han indicado que ellos pretenden que el alumnado lleve a cabo la clasificación, con lo que hemos asignado una tendencia espontaneísta/investigativa. Los problemas asociados a las clasificaciones (indicador 30) se limitan a realizar clasificaciones particiones de las formas geométricas y a asociar a las familias de sólidos (indicador 31) las propiedades que se señalan en los libros de texto o en el currículum, mostrándolas principalmente en figuras dibujadas o construidas.

Para el resto de los indicadores hemos asociado una tendencia tradicionalista (para los indicadores 25, 26, 27 y 28) o tecnológica (indicadores 21 y 24). Por lo que se refiere a las relaciones entre familias y/o sus elementos (indicadores 25 y 26) la mayoría de los/as profesores/as consideran solo las relaciones entre sólidos que se muestran en el libro de texto. Solo un/a profesor/a (PO1) ha añadido que en ocasiones señala algunas relaciones de las mostradas en el curso para que se comprendan mejor las formas geométricas; a este le hemos asociado tendencia tecnológica para estos indicadores. En lo que concierne a determinar el número de elementos de los sólidos (indicador 27) y los tipos de clasificaciones que se establecen (indicador 28) ningún/a profesor/a ha expresado que determina el número de elementos que tienen algunas familias como los prismas o paralelepípedos, a no ser que se les pregunte específicamente por ellos y las clasificaciones las basan en clasificaciones particiones utilizando uno o varios criterios. Por lo que respecta a la descripción de un sólido, una familia de sólidos o sus elementos (indicador 21) esta se lleva a cabo mediante las formas geométricas que ha construido el alumnado o ya están construidas, o bien mediante representaciones de ellas en el ordenador. Solo PP3 centra la descripción de los sólidos en ejemplos del entorno; su respuesta la hemos asignado como espontaneísta. Cabe aclararse que algunos/as docentes (PC4, PO1, PO3) han apuntado que algunas veces complementan la descripción con las formas geométricas del entorno, pero al no predominar esta forma de enseñanza, solo se considera como una complementación, no se ha asociado su respuesta a la tendencia espontaneísta. Todos/as los/as profesores/as señalan propiedades geométricas al describir las formas geométricas. Y si nos centramos en el material manipulativo que se utiliza (indicador 24) la mayoría de los/as profesores/as han indicado que suele enseñar la descripción y la clasificación a partir de formas geométricas construidas, formas geométricas construidas por el alumnado o utilizando en clase programas informáticos. Solamente hemos asociado a PP3 una tendencia espontaneísta al explicar que utiliza figuras del entorno para la enseñanza de estos procesos matemáticos.

En la tabla 3.141 registramos el número de indicadores de este apartado de las diferentes tendencias que hemos asociado a cada docente.

Docente	TR	TE	E	I
PC1	6.5	4.5	-	-
PC2	6.5	4.5	-	-
PC3	6.5	4.5	-	-
PC4	6.5	4.5	-	-
PP1	6.5	4.5	-	-
PP2	6.5	4.5	-	-
PP3	6.5	2.5	2	-
PP4	6.5	4.5	-	-
PO1	4	6	0.5	0.5
PO2	6.5	4.5	-	-

PO3	6	4	0.5	0.5
PO4	6.5	4.5	-	-

Tabla 3.141. Número de indicadores de la sección "El profesor y el currículum de geometría" asignados a los profesores de los cursos

Puede observarse que el profesorado se mueve entre la tendencia tradicional y tecnológica, destacando ligeramente la tendencia tradicional para todo el profesorado, excepto para PO1 que apunta ser levemente más tecnológico. La tendencia espontaneísta ha sido mostrada tan solo en algunos indicadores por PP3 y junto con la investigativa por PO1 y PO3.

Y en la tabla 3.142 registramos el número de profesores/as a los que hemos asociado para las diferentes tendencias cada uno de los indicadores de este apartado.

Tendencia	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
TR	11	6	6	-	11	11	12	12	5	6	6
TE	-	6	6	11	1	1	-	-	5	6	6
E	1	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-
I	-	-	-	-	-	-	-		1	-	-

Tabla 3.142. Número de profesores a los que hemos asociado los indicadores, de las diferentes tendencias, de la sección "El profesor y el currículum de geometría"

Puede observarse como la tendencia tradicional sobresale ampliamente en los indicadores 21, 25, 26, 27 y 28. Sin embargo, la tendencia tecnológica tan solo prevalece sobre las demás en el indicador 24. Se apunta que los indicadores que se han movido entre la tendencia tradicional y tecnológica han sido el 22, 23, 29, 30 y 31. La tendencia espontaneísta tan solo ha sido contemplada levemente en los indicadores 21, 24 y 29, este último junto a la tendencia investigativa.

3.5.4 La labor docente del profesor en la ESO

La tabla 3.143 presenta las tendencias que ha manifestado cada profesor/a teniendo en cuenta los diferentes indicadores del apartado que se está analizando.

Docente	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
PC1	TE	TR	TR	TR	TR	TE	TR	TR/TE	TE	TR/TE	TR	TR/TE	TR	.	-
PC2	TE	TE	TR	TR	TR	TE	TR	TR/TE	TE	TR/TE	TR	TR/TE	TR	-	-
PC3	E	TE	TE	TE	TE	TE	TE	TR/TE	E	TR/TE	TE	TR/TE	TR	-	-
PC4	E	TE	TE	TE	TE	TE	TE	TR/TE	E	TR/TE	TE	TR/TE	TR	-	-
PP1	E	TE	TE	TE	TR	TE	TE	TR/TE	E	TR/TE	TE	TR/TE	TR	-	-
PP2	E	TE	TE	TE	TE	TE	TE	TR/TE	E	TR/TE	TE	TR/TE	TR	-	-
PP3	TE	TE	TR	TR	TR	TE	TR	TR/TE	TE	TR/TE	TR	TR/TE	TR	-	-
PP4	TE	TE	TR	TR	TR	TE	TR	TR/TE	TE	TR/TE	TR	TR/TE	TR	-	-
PO1	E	TE	TE	TE	-	TE	TE	TR/TE	E	E/I	TE	TR/TE	E/I	TR	TE
PO2	TE	TE	TR	TR	-	TE	TR	TR/TE	TE	TR/TE	TR	TR/TE	TR	TR	TE
PO3	E	TE	TE	TE	-	TE	TE	TR/TE	E	E/I	TE	TR/TE	E/I	TR	TE
PO4	TE	TE	TR	TR	-	TE	TR	TR/TE	TE	TR/TE	TR	TR/TE	TR	TR	TE

Tabla 3.143. Tendencias de los/as profesores/as para los indicadores de la sección "El profesor en clase"

La tabla 3.143 muestra que en relación con los indicadores de esta sección también se ha observado especialmente las tendencias tradicionales y tecnológicas. En relación con el indicador 32 hemos asignado también a la mitad de los/as profesores/as la tendencia espontaneísta al implicar al alumnado en las explicaciones bien contestando a las preguntas que el profesor va planteando, bien describiendo o clasificando las formas geométricas. La otra mitad de los profesores/as se han anotado como tecnológicos por apoyar sus explicaciones con construcciones, formas geométricas construidas o formas geométricas mostradas mediante ordenadores.

Mayoritariamente hemos asignado la tendencia tecnológica para los indicadores 33 y 37 pues los/as profesores/as han hecho referencia a que debido al poco tiempo del que disponen para la enseñanza de la geometría, los contenidos que imparten los seleccionan en función de lo fundamentales que los consideran, sobre todo de cara a cursos posteriores. Cabe mencionar que la tendencia tradicionalista se ha marcado al profesor/a que ha expresado que se centra en enseñar los contenidos geométricos que marca el currículum. En lo que atañe al uso del material manipulativo que se utiliza (indicador 37) se han mencionado los materiales para construir formas geométricas, no habiendo una variación de ellos, se utilizan de forma aislada y los más utilizados son los modelos construidos de las formas geométricas usados como modelos para las explicaciones.

Para los indicadores 34, 35, 36, 38, 42, 45 hemos asociado a la mitad de los/as profesores/as la tendencia tradicionalista y a la otra mitad la tecnológica. Los/as profesores/as a los que hemos asignado la tendencia tradicionalista, en relación con cómo se imparten los contenidos geométricos (indicador 34) y cómo actúa el profesorado (indicador 35) expresan que es el profesorado quien explica lo del libro de texto, aunque apoyado de material comercializado o figuras del entorno, siendo él un transmisor experto de los contenidos geométricos sin apenas intervención del alumnado. Mientras que los anotados como tecnológicos en estos indicadores han expresado que intentan utilizar estrategias que de alguna manera pueda intervenir el alumnado principalmente haciéndoles preguntas o realizando alguna explicación. El profesorado va exponiendo los contenidos geométricos a partir de las explicaciones que realiza combinándolas con las intervenciones del alumnado mediante las cuestiones que les plantea. Por lo que respecta a las tareas que se llevan a cabo en el aula (indicador 36), cómo se presentan los objetivos al alumnado (indicador 38) y cómo se validan las ideas en el aula (indicador 42), los asociados a la tendencia tradicional han expresado que encaminan las tareas a que el alumnado aprenda los contenidos geométricos mediante su realización y repetición, sus objetivos se centran en que el alumnado debe aprender los conceptos del tema y es el profesorado es el que realmente corrige y valida la información. Mientras que los asignados a la tendencia tecnológica han anotado que las tareas van enfocadas a que el alumnado descubra y corrija los errores que tiene en los contenidos geométricos tratados; como objetivo se persigue que los alumnos aprendan los contenidos geométricos a partir de su construcción; y se plantean preguntas al alumnado para que vayan corrigiendo sus respuestas en el caso de ser erróneas, si bien es el profesorado el que finalmente valida la información.

En la tabla 3.143 puede observarse también que para los indicadores 39 y 43 a todos/as los/as profesores/as les hemos asignado una tendencia tradicionalista/tecnológica. Y para el 41 a la mayoría de ellos/as. Las formas geométricas se presentan (indicador 39) mediante representaciones que son principalmente ejemplos y a veces también no ejemplos, de las familias de sólidos estudiadas. Con respecto a la participación del alumnado en clase (indicador 43), ningún/a profesor/a ha hecho mención a que su enseñanza cambia dependiendo del alumnado. Solo dos profesores/as, PC1 y PP1, han señalado que los conocimientos previos podrían modificar los contenidos ampliándolos o profundizándolos más, pero que no suele ocurrir. Por lo que se refiere a la descripción de las formas geométricas (indicador 41), la mayoría del profesorado señala que es él quien describe las formas geométricas o que es el profesorado quien suele describirlas con intervenciones del alumnado. A dos profesores/as les hemos asociado una tendencia espontaneísta/investigativa al explicar que quien lleva a cabo la descripción son los/as alumnos/as pero dirigida y validada la información por el profesorado.

Cabe comentar también la asignación hecha para los indicadores 40, 44, 45 y 46. En cuanto a la identificación de la información de un sólido (indicador 40) a la mitad del profesorado le hemos marcado una tendencia tecnológica al ser él quien explica los contenidos mostrándolos en las representaciones en las que apoya la explicación; y a la otra mitad una tendencia espontaneísta al plantear que sea el alumnado, generalmente a partir de las preguntas que va planteando el profesorado, quien va apuntando sobre las representaciones de las formas geométricas la información solicitada. En lo concerniente a la fuente de información para el alumno (indicador 44) hemos asociado una tendencia tradicionalista a la mayoría del profesorado al ser el profesor y el libro de texto quien moviliza la información para el alumnado; y a dos profesores/as una tendencia espontaneista/investigadora al señalar que son los/as alumnos/as quienes suelen presentar los contenidos al resto de compañeros, dirigidos siempre por el profesorado.

Para los indicadores 45 y 46 solo hemos contemplado respuestas de los/as profesores/as del curso online. Las de todos/as los/as profesores/as de este curso se han asociado a las tendencias tradicionalista y tecnológica respectivamente. Por lo que se refiere a los errores (indicador 45) los/as profesores/as del curso online han indicado que suelen ser teóricos o prácticos. Sin embargo, en cuanto a las dificultades que detectan en el alumnado (indicador 46) se han señalado las relativas a encontrar las técnicas aplicadas.

En la tabla 3.144 registramos el número de indicadores de las diferentes tendencias asignados a cada docente para el total de los indicadores de este apartado.

Docente	TR	TE	E	I
PC1	8.5	4.5	-	-
PC2	7.5	5.5	-	-
PC3	2.5	8.5	2	-
PC4	2.5	8.5	2	-
PP1	3.5	7.5	2	-
PP2	2.5	8.5	2	-
PP3	7.5	5.5	-	-
PP4	7.5	5.5	-	-
PO1	2	8	3	1
PO2	7.5	6.5	-	-
PO3	2	8	3	1
PO4	7.5	6.5	-	-

Tabla 3.144. Número de indicadores de la sección “El profesor en clase” asignados a los/as profesores/as de los cursos

Puede notarse una tendencia tecnológica en los/as profesores/as PC3, PC4, PP1, PP2, PO1 y PO3. Por otra parte, se aprecia una tendencia tradicionalista en los/as docentes PC1, PC2, PP3, PP4 y en menor medida en PO2 y PO4. La tendencia espontaneísta ha sido manifestada para algún indicador por algún/a docente: PC3, PC4, PP1, PP2, PO1 y

PO3. La tendencia investigativa solo se ha apreciado en PO1 y PO3 para algunos indicadores junto con la tendencia espontaneísta.

En la tabla 3.145 registramos el número de profesores/as a los que hemos asociado cada uno de los indicadores de las diferentes tendencias correspondientes a este apartado.

Tendencia	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
TR	-	1	6	6	5	6	6	6	-	5	6	6	10	4	-
TE	6	11	6	6	3	6	6	6	6	5	6	6	-	-	4
E	6	-	-	-	-	-	-	-	6	1	-	-	1	-	-
I	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1	-	-

Tabla 3.145. Número de profesores/as a los que hemos asociado los indicadores, de las diferentes tendencias, de la sección "El profesor en clase"

Puede observarse que hay dos indicadores para los que destaca la tendencia tradicional y tecnológica; son respectivamente el 44 y el 33. También destaca la tradicional, pero más ligeramente en los indicadores 36 y 45, este último reflejado en un curso. También ha destacado la tecnológica en el indicador 46, también contemplado solo en un curso. Los indicadores 34, 35, 37, 38, 39, 42 y 43 se mueven entre las tendencias tradicional y tecnológica y los indicadores 32 y 40 se presentan entre una tendencia tecnológica y espontaneista. Tan solo los indicadores 41 y 44 presentan alguna respuesta que corresponde a una tendencia espontaneista/investigativa.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN FINAL

El trabajo que presentamos en esta memoria, que explora procesos enseñanza/aprendizaje de la geometría mediante una encuesta y cursos dirigidos a profesores de secundaria, nos ha permitido:

- Diseñar modelos de enseñanza para la enseñanza de la geometría utilizando los sólidos como contexto.

- Elaborar indicadores para caracterizar perfiles de profesores.

- Obtener información sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría mediante los sólidos.

A continuación, presentamos a modo de conclusiones las observaciones que hemos considerado más relevantes y que proceden de los diferentes estudios que hemos realizado. Estas observaciones las hemos organizado, igual que en el capítulo anterior, atendiendo a las creencias y concepciones que tiene el profesorado sobre la geometría, los procesos matemáticos de la descripción y la clasificación y el establecimiento de relaciones. Asimismo, señalamos los aspectos más notables que hacen referencia a los conocimientos que se poseen sobre los contenidos geométricos relacionados con nuestro estudio y cómo se lleva a cabo su enseñanza/aprendizaje. Igualmente presentamos las opiniones más reseñables concernientes a los cursos que hemos presentado al profesorado. Acabamos estas observaciones indicando las tendencias didácticas mostradas por el profesorado en relación con los contenidos geométricos examinados.

Finalizamos el capítulo haciendo una reflexión sobre la aportación de nuestro trabajo a la educación matemática, la limitación de nuestro estudio y su posible continuación.

Sobre creencias y concepciones sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría en la ESO a través de los procesos de describir y clasificar

En relación con esta problemática, al considerar observaciones que provienen de la encuesta y del desarrollo de los cursos, como conclusiones destacamos:

- La palabra geometría sugiere el estudio de las formas geométricas y el cálculo de las magnitudes geométricas. Las visiones de la geometría que han reflejado los profesores participantes corresponden a una visión de la materia: i) curricular, ii) interdisciplinar, iii) dimensional. Estas visiones se contemplan en Guillén y Figueras (2005), si bien, la visión que en este trabajo denominan como *etimológica* no se refleja en este estudio.

- La geometría gusta a la mayoría de los/as profesores/as implicados en el estudio. Se considera interesante, que conecta con el entorno, pues se puede aplicar en la vida cotidiana, y es interdisciplinar al poderse aplicar en otras áreas de la ESO. Se relaciona con las áreas de la Matemáticas, con asignaturas de ciencias (Física, Química y Geología), con algunas materias más técnicas (Tecnología y Diseño) y con disciplinas artísticas

(Educación Plástica y Dibujo). Los/as profesores/as que han expresado que no les gusta la geometría hacen referencia a la dificultad que conlleva la enseñanza o el aprendizaje de la misma.

- No hay uniformidad entre los/as profesores/as sobre si a sus alumnos/as les gusta la geometría o no, si bien la opinión mayoritaria es que no les gusta por la dificultad que tiene el aprendizaje de las formas geométricas y fórmulas, porque la consideran más complicada que otros bloques o debido a que se le presta menos atención en su enseñanza. Para que a los/as alumnos/as les guste la geometría, en su enseñanza se tendría que: i) utilizar en contextos cotidianos para que se viera su aplicación; ii) presentar de una forma práctica y tangible; iii) usar recursos para apoyar la imaginación espacial; iv) facilitar la visualización de las figuras objeto de estudio, y v) evitar que el cálculo de magnitudes sea una simple aplicación de fórmulas.

- Se considera que los/as alumnos/as no traen suficiente preparación en geometría cuando entran a la ESO. Se opina que es uno de los bloques de las matemáticas al que se le suele dar poca importancia, con lo que puede faltar tiempo para impartirla en las clases y su enseñanza se ha centrado en mostrar las formas geométricas de la geometría plana y en aprender de memoria las fórmulas para calcular el área.

- Un número considerable de profesores/as encuestados expresa que la geometría de la ESO no es una materia a la que se le dé importancia en las clases. Su aprendizaje se reduce a usar fórmulas, siempre falta tiempo para impartirla, se priorizan otros bloques temáticos y no se le da prioridad en el libro de texto.

- Tanto en la Educación Primaria como en la ESO, el estudio de la geometría comienza por las figuras planas. Las razones que han señalado los profesores han sido: i) las figuras planas son más sencillas; ii) es más fácil ir de dimensiones pequeñas a grandes que al contario, y iii) los sólidos se componen de figuras planas.

- La descripción de las formas geométricas se basa en enunciar sus propiedades y/o en indicar o explicar los elementos que las componen. Puntualmente se incluye en la descripción la representación de las formas geométricas mediante dibujos o el indicar ejemplos de ellas.

- Se considera que la clasificación se lleva a cabo para diferenciar o agrupar las formas geométricas. Solo algunos/as profesores/as expresan que al clasificar se organizan las formas geométricas y se desarrolla su nivel de razonamiento.

- El profesorado considera importante la descripción porque es fundamental para conocer y comprender las formas geométricas y resolver los problemas de medición relacionados con ellas. Se hace referencia puntualmente a que permite examinar los objetos del entorno o que puede aplicarse en otros bloques o materias. Esto lleva a concluir que la descripción se restringe al estudio de la geometría y la medición.

- La enseñanza/aprendizaje de la clasificación también se considera importante pues se trabajan las formas geométricas en conjunto organizándolas, estableciendo diferencias… Y porque desarrolla capacidades como razonar o comparar.

- Cabe destacar la importancia que subraya el profesorado de nuestro estudio a la descripción y la clasificación en la enseñanza/aprendizaje de las formas geométricas. Se opina que la descripción está más enfocada a entender y comprender las formas geométricas y la clasificación está orientada a su organización y comparación.

- La selección de los contenidos geométricos para impartir en las clases se hace tomando como referencia el currículum y considerando su relevancia para el estudio de las matemáticas u otras asignaturas en los cursos posteriores. En menor medida se considera su importancia para explicar la vida cotidiana o el entorno.

- Se considera que los contenidos asociados a la descripción y la clasificación se aplican en la enseñanza de contenidos de la ESO y fuera de la enseñanza. En la enseñanza, los relativos a la descripción se aplican en la materia de la geometría y en otras áreas de las Matemáticas que se relacionan con ella mientras que los referidos a la clasificación se contemplan al explicar las formas geométricas o de forma más general en la geometría. Fuera de la enseñanza, la descripción se aplica para explicar los objetos cotidianos, del entorno y tecnológicos, así como, en las descripciones de la arquitectura. La clasificación va más orientada en realización de las acciones sobre los objetos como organizar y ver parecidos y diferencias.

Referidas a conocimientos sobre contenidos geométricos relativos a la descripción, clasificación y establecimientos de relaciones de formas geométricas

En relación con esta problemática, al considerar observaciones sobre las respuestas de los/as profesores/as que han colaborado en el estudio a cuestiones de la encuesta y/o que se plantearon en el desarrollo de los cursos, destacamos las conclusiones que exponemos a continuación.

Para la descripción de las formas geométricas

- Sobre los elementos de los sólidos asociados a la descripción y la clasificación

Los que se utilizan prioritariamente para describir los sólidos son las caras, aristas y vértices; elementos que tienen una fuerte componente visual. Sus ideas se expresan utilizando terminología del plano y del espacio de manera precisa.

No ocurre lo mismo con los otros elementos de los poliedros. Sólo algunos/as profesores/as hacen referencia a algún tipo de ángulos de los poliedros (ángulos de las caras, ángulos de los vértices, ángulos poliedros) y/o de diagonales de estos sólidos (diagonales de las caras y diagonales del poliedro correspondiente) y ningún/a profesor/a señaló como elementos de los sólidos los planos de simetría y ejes de rotación hasta que el profesor director cuestionó sobre ellos de manera explícita.

La mayoría de los/as profesores/as que han participado en el estudio tienen un cierto objeto mental de estos elementos si bien se refleja "pobreza" en las ideas/definiciones que se expresan verbalmente para ellos, así como cierta dificultad para usar el lenguaje preciso al referirse a ellos y expresar las ideas/definiciones que se tienen sobre ellos. Las ideas que se aportan son incompletas e imprecisas. Se ha constatado lo que se expresa en Guillén (1997). Al ser conceptos relacionados que tienen un nombre compuesto cuyas ideas se expresan utilizando otros elementos del poliedro, expresar estas ideas con precisión conlleva bastantes dificultades. Algunas respuestas reflejan confusión entre los diferentes tipos de ángulos y/o de diagonales de estos sólidos y en las ideas que se expresan para estos elementos se incluyen atributos críticos relevantes, pero estas son incompletas e imprecisas; además, varios/as profesores/as ni los nombran o si los nombran no proporcionan ninguna idea de ellos.

- Sobre las ideas/definiciones, propiedades de las formas geométricas que se asocian con el nombre de familias de sólidos

La mayoría de los/as profesores/as han dado respuestas correctas, pero incompletas. A veces se utiliza vocabulario de la geometría plana para el espacio. Las propiedades que se asocian se refieren a los elementos que las componen (caras, vértices y aristas), sin embargo, no se incide en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que puede haber entre ellos ni en el número de elementos que tienen, a excepción del número de caras.

Como propiedades de los poliedros se indican sus propiedades específicas. Se expresa una idea/definición de ellos, pero la mayoría de los/as profesores/as no utilizan términos como “como máximo” y “como mínimo” al expresar las propiedades de esta familia de sólidos.

Para los prismas y paralelepípedos se ha usado correctamente el vocabulario geométrico para expresar ideas/definiciones de estas familias en términos de la familia de sólidos a la que pertenecen y el tipo de caras que tienen. Para los prismas se distinguen las caras laterales y/o las bases si bien falta especificar otros elementos y sus propiedades correspondientes como las relativas a las aristas laterales y/o al número de elementos de diferente tipo que tiene un prisma n-agonal. Para los paralelepípedos falta especificar otras familias de poliedros a las que pertenecen y tampoco se han especificado propiedades relativas a las aristas, vértices, diferentes tipos de ángulos y de diagonales o a las medidas diferentes para estos elementos.

No se ha hecho referencia a subfamilias de prismas (paralelepípedos) y/o a propiedades de estas subfamilias y algún/a profesor/a ha atribuido a los prismas (paralelepípedos) atributos críticos de los prismas rectos (ortoedros).

- Sobre la descripción de las formas geométricas mostradas mediante diferentes tipos de representaciones

El listado de propiedades que se expresa para las pirámides, tetraedros y/u octaedros se reduce a los atributos críticos imprescindibles para caracterizarlos. Los que tienen más peso en la imagen de que se tiene de estas familias de poliedros son los relativos al tipo de caras y número de ellas. En las pirámides se distinguen las caras laterales y la base y se hace también referencia al ápice. Pero solo algún/a profesor/a remite al resto de vértices (2/5) y/o aristas (1/5). En uno de los cursos se ha nombrado la altura de las pirámides y solo un/a profesor/a ha hecho referencia a la apotema de las caras (PP1), a las fórmulas de medición para calcular el área y el volumen (PO1) o a la propiedad “La suma de los ángulos que concurren en cada vértice ha de ser menor de 360º" (PO3), específica de los poliedros regulares convexos. Pero los listados de propiedades de los tetraedros y octaedros regulares apenas contienen propiedades relativas al orden de los vértices y al nº de vértices, aristas, ángulos de las caras, ángulos de las caras que concurren en un vértice del poliedro y/u otros elementos del poliedro. Y solo se han relacionado con los poliedros regulares. Ningún/a profesor/a ha hecho referencia a que son poliedros convexos y rectos ni los ha identificado como antiprismas y/o pirámides y/o bipirámides de caras regulares. Así, por ejemplo, el octaedro no se ha considerado como bipirámide cuadrada de caras regulares ni tampoco como antiprisma triangular de caras regulares.

Se han mostrado dificultades para interpretar las fotografías de objetos tridimensionales correspondientes a pirámides y/o tetraedros y las representaciones de los poliedros como estructura de aristas. Se han identificado los triángulos equiláteros como triángulos isósceles y la base de la pirámide que se ha expuesto se identifica tanto con un cuadrado, como con un rectángulo o un triángulo. También las hemos encontrado para utilizar el lenguaje geométrico con precisión. Al hacer referencia al ápice se nombra como vértice, como si las pirámides no tuvieran otros vértices; las caras laterales se nombran como "caras" y se habla de la apotema de la pirámide, refiriéndose a la de las caras del tetraedro.

Al describir los sólidos de revolución el profesorado se centra en la forma de generarlos como sólidos de revolución. Para la esfera apenas se aporta más información. No se indica que no tiene vértices ni aristas; solo uno/a de ellos/as expresa que tiene una cara, o hace referencia a otros elementos que pueden obtenerse cuando se secciona la esfera con un plano; solo un docente se ha referido a la cuerda como elemento de la esfera, otro ha nombrado "el eje de giro o de la esfera" y un tercero ha indicado algunas características como círculo máximo, latitud o longitud.

Al describir el cilindro y el cono precisan cómo se generan y que tienen bases/e circular, con lo que en su objeto mental de estas familias de sólidos los cilindros y conos rectos tienen gran peso. Este objeto mental puede enriquecerse considerablemente al contemplar: i) otras posibles ideas/definiciones para estas familias de sólidos, que pueden provenir de otras maneras posibles de generarlos; ii) la identificaciones de diferentes elementos de los cilindros o conos y al expresar atributos críticos relativos a estos elementos; iii) relaciones entre elementos de los cilindros o conos y de las figuras planas usadas para generarlos por diferentes procedimientos; iv) diferentes desarrollos de estos sólidos, discutir sobre sus parecidos, diferencias y sus relaciones con los elementos del sólido construido a partir de ellos; v) diferentes familias de sólidos y relaciones entre ellas, y vi) al establecer relaciones con otros sólidos que se pueden obtener transformando los sólidos de partida. Destacamos también la importancia que puede tener también el revisar la utilización del lenguaje geométrico no solo para distinguir el uso de los términos de círculo y circunferencia; también para nombrar los diferentes elementos de estas familias de sólidos, al expresar las propiedades relativas a estos elementos y expresar las relaciones entre diferentes objetos geométricos que corresponden a longitudes, figuras planas y sólidos.

Los profesores consideran interesante conocer las diferentes representaciones físicas y planas de los sólidos a partir de las que según Alsina el al. (1987) y Guillén (1991) se pueden "comunicar" los sólidos y desarrollar una gran actividad matemática; entre ellas, el dibujo en perspectiva y/o las proyecciones, el desarrollo plano, los dibujos en un ordenador o las representaciones físicas de los sólidos construidas con cartón o con material comercializado.

- En relación con la subtarea de Guillén S-TCg1-G1

El profesorado del curso presencial que es donde se llevó a cabo esta subtarea no presentó dificultad al señalar los polígonos que pueden ser bases de los prismas. Por lo que respecta a las caras laterales, se observa que todos/as ellos/as tienen en su objeto mental de prisma una cierta idea de que estas son paralelogramos distinguiendo los prismas rectos y los oblicuos y caracterizándolos según el tipo de caras laterales que tienen. Ahora bien, los atributos críticos que se indican para estas subfamilias llevan a que nos planteemos si los tipos de clasificación que se establecen entre los diferentes tipos de paralelogramos son inclusivas o excluyentes y si al separar los prismas rectos y los oblicuos se consideran familias excluyentes o inclusivas.

Las subfamilias de prismas que tienen más peso en los objetos mentales que los/as profesores/as del curso presencial han construido para esta familia de poliedros son los prismas rectos y los de bases regulares. Los atributos críticos que se expresan se apoyan en ejemplos de estas subfamilias de prismas. Sus respuestas no se apoyan en la variación y selección de posibles ejemplos que se pueden tener de prismas al variar la altura de los mismos y/o la inclinación, manteniendo el paralelismo de las bases y la correspondencia de los vértices. Esta variación en los ejemplos de prismas facilitaría el que se hicieran explícitas lo que se mantiene y cambia a lo largo de estas transformaciones. Se incidiría en las propiedades de los prismas relativas al paralelismo e igualdad de las bases y de las aristas laterales y se expresarían las variaciones que tienen lugar en las caras laterales de los ejemplos obtenidos y las posibles relaciones de inclusión o exclusión entre los diferentes tipos de paralelogramos que se van obteniendo en las transformaciones realizadas.

La actividad desarrollada por los/as profesores/as que han participado en el curso para determinar los diferentes elementos de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides podría haberse ampliado considerablemente. Guillén (2010) muestra cómo diferentes estrategias de construcción de los modelos y/o armazones de los sólidos puede enfatizar las diferentes propiedades de las caras, vértices y aristas relativas a igualdad, paralelismo y perpendicularidad y pueden derivar también a que se utilicen diferentes estrategias a la hora de determinar los diferentes elementos de estas familias de poliedros. Enfatiza que aprender a mirar y expresar lo que cambia y permanece en una transformación también puede derivar en ello. Como ejemplo compara tres estrategias para hallar el número de aristas de un prisma n-agonal. Dos de ellas se apoyan en estrategias de construcción de armazones de los prismas; una de ellas es la usada por los profesores del curso, al fijarse en las dos bases y las aristas que las juntan; la otra se fija en los vértices de cada una de las dos bases, se observa que en todos ellos confluyen dos aristas de la base y una lateral y que cada arista se cuenta desde dos vértices. Una tercera se apoya en razonamientos deductivos y en el conocimiento que se tiene de que un prisma n-agonal tiene sus vértices de orden 3 y tienen $2n$ vértices. También se tiene en cuenta que cada arista corresponde a dos vértices. Además, se extienden estas observaciones para hallar las diagonales de las caras y las diagonales del espacio. El problema resulta también interesante cuando se trata en nuevas familias. Por ejemplo, se puede determinar el número de aristas de una pirámide a partir del número de aristas del prisma correspondiente, y viceversa, al fijarse en la transformación que convierte uno en otro. Por ejemplo, si un prisma n-agonal tiene 3n aristas la pirámide n-agonal sólo tiene 2n aristas porque las n de una base del prisma desaparecen en la transformación (se convierten en un vértice). La adaptación de la estrategia deductiva de los prismas a las pirámides requiere tener en cuenta la distinción de los dos tipos de vértices que tiene una pirámide y el orden de los mismos.

Si tenemos en cuenta lo expuesto por Guillén (2010) cabe destacarse que prácticamente solo se han usado estrategias que se apoyan en la descomposición de los prismas u otras familias en caras laterales y las bases, o bases y aristas laterales, que son los atributos de estas familias que han tenido más peso en los objetos mentales que han construido para la familia de sólidos correspondiente. Cabe subrayarse también que se ha plasmado la idea de que una vez resuelta una cuestión ya no se aborda de nuevo para resolverla con otra estrategia, así como que las cuestiones que se han de resolver son las que se plantean de manera explícita.

- En relación con las subtareas de Guillén S-TCg1-G2 y S-TCg1-G3

Se ha observado gran dificultad para delimitar las subfamilias de prismas que cumplen las propiedades propuestas. Esto ha ocurrido en todas las propiedades a excepción de al considerar el orden sus vértices. No solo se ha mostrado dificultad en evocar las diferentes subfamilias de prismas que se han propuesto; también se ha dificultado el centrar la atención en parte de las caras u otros elementos en vez de en todos ellos, considerar los diferentes conceptos implicados en la propiedad y todos los atributos implicados en la propiedad correspondiente. También ha conllevado dificultad verificar si la expresión dada corresponde al número de diagonales de las caras de los prismas.

Hay profesores/as que han mostrado ideas erróneas asociadas a determinadas familias de sólidos. Por ejemplo, se expresa que en los prismas oblicuos las aristas laterales no son iguales, que en los prismas convexos las diagonales de las caras (del sólido) no pueden quedar fuera de la superficie (del interior del sólido) o que no puede haber prismas cóncavos que tengan caras paralelas dos a dos. Y también se han tenido dificultades con algunos conceptos. Hay profesores/as que muestran confusión entre la concavidad y la convexidad. Para los ángulos diedros no se han tenido en cuenta los dos tipos de ángulos diedros de los prismas (los que forman las caras laterales entre ellas y los que forman las caras laterales con las bases). No se está familiarizado con ellos ni con cómo se puede obtener su medida. Y para vértices iguales no se han exigido todos los atributos críticos imprescindibles. Se han identificado con vértices del mismo orden y/o no se ha tenido en cuenta que los polígonos que en los vértices iguales concurren los mismos polígonos, con los mismos ángulos y con la misma disposición.

Hay subfamilias de prismas que tienen gran peso en el objeto mental que se construye para la familia de prismas. En general corresponden a subfamilias que se han establecido cumpliendo todos los criterios que se han usado para establecer las familias disjuntas. Por ejemplo, los prismas rectos, convexos de bases regulares (PRBR). Son los ejemplos que se evocan al nombrar algunas familias, aunque estas solo se hayan establecido con uno de estos criterios. Ello lleva a que se asocien a determinadas familias de prismas propiedades que son atributos críticos de una familia contenida; esto es, se impone a una familia de prismas más condiciones de las requeridas. Por ejemplo, a los prismas de bases regulares (PBR) se les impone la condición de que las caras laterales han de ser iguales;

esto es, no se contempla que en los PBR también hay prismas oblicuos. A los prismas de caras laterales regulares se les impone la condición de que sean convexos y/o que sus bases sean regulares, cuando basta con que los lados de las bases sean iguales.

Observamos que, aunque conocen que determinadas propiedades caracterizan a determinadas familias de prismas, en relación con las propiedades propuestas tienen gran dificultad para delimitar las familias de prismas que están contenidas en estas y, por tanto, también las cumplen. Por ejemplo, se ha tenido dificultad para delimitar todas las subfamilias de las que se han propuesto que corresponden a prismas rectos, las que corresponden a prismas convexos y las que corresponden a prismas de bases regulares. Hemos comprobado en repetidas ocasiones que no están muy familiarizados con alguna de las propiedades propuestas ni con las familias de prismas que se han presentado en el curso. Ha quedado claro que no se tiene familiaridad con los prismas de caras iguales (PCI), los romboedros (R), los prismas de caras regulares (PCR) o los prismas de caras laterales regulares (PCLR). También hay ejemplos de determinadas familias que no se evocan al considerar la familia correspondiente. En general corresponden a los ejemplos que no cumplen un atributo usado al establecer otra clasificación. Por ejemplo, en la familia de los prismas rectos no se incluyen ejemplos de prismas cóncavos; en la familia de los prismas convexos no se incluyen prismas oblicuos, o en la familia de los prismas de bases regulares no se incluyen prismas oblicuos.

Considerar criterios de regularidad y/o igualdad de parte de las caras y/o de todas las caras se asocia a que se cumpla el otro atributo crítico y a que se extienda a todas las caras. Así, por ejemplo, en la familia de los prismas de caras regulares se asocia que también tienen que ser iguales, lo que conlleva a incluir en esta familia solo el cubo como ejemplo. Lo mismo ocurre al hablar de prismas de caras iguales que le añaden además la condición de que sean regulares. Así mismo, la igualdad se extiende de unos elementos a otros. Por ejemplo, la igualdad de aristas lleva a que se considere la igualdad de las caras y que solo se evoque el cubo como posible ejemplo de prisma que cumpla la propiedad de tener aristas iguales en vez de remitir a los PCLR, a los PCR y a los PCI. La igualdad de ángulos diedros sugiere que las caras tengan que ser iguales, lo que lleva a que se considere erróneamente que los PCI cumplen esa propiedad. También se llegan a exigir más requisitos de los necesarios. Por ejemplo, la igualdad de caras laterales lleva a exigir regularidad a las bases en vez de imponer la condición de que la base tenga lados iguales y/o sea recto y/o PCI. O el tener los ángulos diedros iguales al correspondiente de la base lleva a imponer la condición de que todos ellos midan 90º.

Se puede concluir que los/as profesores/as que han participado en el curso están familiarizados con razonamientos en los que se aplica que una propiedad, atributo crítico, de una familia la cumplen todas las subfamilias (por ejemplo, que los vértices son de orden 3) y se acepta que hay propiedades que no las verifican ninguna de las familias de prismas propuestas (por ejemplo, que los vértices son de orden 4). También están familiarizados con la manera de razonar deductivamente al determinar determinadas características numéricas de los prismas. Sin embargo, se ha mostrado poca familiaridad con las diferentes subfamilias que pueden establecerse en los prismas para seleccionar ejemplos que no sean los prototípicos. Si bien se ha argumentado adecuadamente asociando propiedades que implican solo parte de los elementos de los prismas (por ejemplo, las caras laterales, las bases, las aristas laterales, las aristas de las bases, los ángulos diedros de las caras laterales y las bases, ...) a una determinada familia de prismas que les resulta familiar, se tienen dificultades para hacerlo cuando la propiedad implica a todos los elementos de un determinado tipo (por ejemplo, las caras, las aristas, los ángulos diedros,...) y/o cuando la propiedad o la subfamilia no les resulta familiar. Guillén (1997) considera que no haber trabajado las diferentes maneras de generar los prismas y sus subfamilias, variando en el proceso de construcción el mundo de ejemplos posible para las familias y subfamilias que se generan, que pueden establecerse al exigir que se cumplan determinados atributos, lleva a que las respuestas a este tipo de tareas se apoyen solo en ejemplos prototípicos que generalmente pertenecen a los PRBR. Hace notar cómo, por ejemplo, para la familia de los PCLR (prismas de caras laterales regulares) una manera de generar ejemplos construyendo "pulseras" con cuadrados permite visualizar que el único requisito para las bases de los ejemplos es tener los lados iguales y que los ejemplos tienen las aristas iguales. Además, los ejemplos con bases cóncavas y convexas surgen fácilmente.

- En relación con la tarea de Guillén S-TCg1-G4

Se observa que el profesorado en su mayoría y para todas las propiedades que se enumeran tiene en cuenta la propiedad que se indica y todas las anteriores. Mantienen las formas geométricas o reducen las posibles soluciones al considerar una nueva propiedad. Solo uno de ellos/as (PP2) deja de tener en cuenta las propiedades anteriores al enumerarse la propiedad *r*, tiene todas sus caras regulares, propiedad que PP2 asocia a los poliedros regulares sin tener en cuenta que las propiedades anteriores ya la habrían descartado y al considerar la propiedad *t*, tiene 24 aristas, vuelve de nuevo a una familia de prismas, el prisma octogonal.

Ahora bien, cabe comentar que se generalizan propiedades para familias cuando realmente no la cumplen todos sus ejemplos y a veces se dejan familias generales sin especificar. Por ejemplo, algunos/as profesores/as extienden a todos los sólidos propiedades específicas de los poliedros y otros asocian estas solo a las subfamilias específicas que se han tratado en el curso. Se observa que los poliedros tienen gran peso en el objeto mental que se construye para los sólidos lo que lleva a que algunos/as profesores/as extiendan a los sólidos atributos críticos de los poliedros que para los sólidos son atributos no críticos al ser propiedades específicas de una familia contenida (la de los poliedros).

Al igual que en tareas anteriores se siguen mostrando algunas ideas erróneas. Hay profesores/as que expresan que el cilindro no tiene aristas, que los prismas oblicuos no tienen las aristas laterales iguales, que los cuadrados no son rectángulos, identifican los vértices iguales con los vértices del mismo orden y los prismas de bases regulares los nombran como prismas regulares, como lo hacen algunos libros de la ESO. Además, se tiene poca familiaridad con las relaciones que hay entre diferentes tipos de ángulos en los prismas. Para la propiedad "los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con el correspondiente ángulo del polígono de la base" no se exige solo la condición de que el prisma sea recto. Algunos/as profesores/as han expresado que las bases tienen que ser regulares. Otros fallos aparecen cuando se aplican ciertas condiciones de regularidad e igualdad solo a parte de las caras y/o aristas en vez de a todas ellas. Por ejemplo, la propiedad "Tiene todas sus caras regulares" les remite a los prismas de bases regulares y la de "Tener las aristas iguales" les remite a los prismas.

También en esta tarea se ha reflejado que no se tiene dificultad para asignar atributos críticos específicos de los prismas y antiprismas relativos al tipo de caras u orden de sus vértices. Así mismo, se delimitan los atributos específicos de los prismas rectos y/o los prismas convexos. Si bien algún/a profesor/a asocia alguna propiedad de los prismas rectos relativa a la altura (por ejemplo, la altura dibujada desde un punto de la base cae en el interior del sólido) a la convexidad.

Ahora bien, las respuestas son incompletas e imprecisas al considerar familias de sólidos y propiedades que son atributos no críticos de ellas; esto es, las verifican algunos ejemplos de la familia, pero no todos ellos; se han presentado dificultades para precisar las condiciones que deben cumplir los ejemplos que verifican la propiedad correspondiente y/o que no la cumplen. Por ejemplo, las propiedades “Tiene dos caras iguales” y/o “Tiene dos caras paralelas” se asignan a algunas pirámides y/o bipirámides, pero no se delimitan de manera precisa las subfamilias de las pirámides y/o bipirámides que las cumplen. Cabe señalarse el poco peso que tienen en los objetos mentales que se construyen para las pirámides, las pirámides de base regular oblicuas y el peso que tiene en las bipirámides las características de su base. Para descartar las pirámides que no cumplen “tener dos caras iguales”, se han fijado en la medida de los lados del polígono de la base, pero no en si eran rectas y/u oblicuas y para seleccionar y/o descartar las subfamilias de bipirámides que cumplen esta misma propiedad se fijan en características de la base en vez de en las pirámides que las forman. Y para la selección de bipirámides que verifican “Tiene dos caras paralelas” parece que se extiende a las bipirámides las ideas que se tienen para el paralelismo de caras en los prismas rectos de bases regulares.

Ningún/a profesor/a ha tenido dificultades para determinar en número de lados del polígono de las bases del prisma que han delimitado a partir de su número de aristas, vértices y caras. Ahora bien, la mayoría de los/as profesores/as no han nombrado con precisión el prisma al que conducían las propiedades enumeradas. Todos han incluido en la descripción que es prisma de base regular y octogonal, pero sólo uno de ellos (PP1) ha descrito todas las condiciones necesarias: “De los prismas de caras regulares lo cumple el de base octogonal”. De las respuestas de los/as profesores/as se puede concluir el peso que tiene en los objetos mentales que construyen los/as profesores/as para los prismas los nombres que se les da a las familias al fijarse en la regularidad y/o el número de lados de las bases y la poca familiaridad que tienen con las familias de prismas, en las que son las caras laterales las que son regulares pudiendo serlo también las bases, con lo que se tendría la familia de los prismas de caras regulares (PCR) o no, con los que se distinguirían los prismas de caras laterales regulares (PCLR).

Las respuestas dadas en esta tarea, al igual que en las de asociar propiedades a familias de sólidos han sido bastante incompletas e imprecisas. Apenas se dan explicaciones para explicar cómo se delimitan las familias de sólidos que cumplen las propiedades correspondientes, para justificar por qué son soluciones o para explicar que puede o no puede haber más soluciones posibles. Además, como ya hemos indicado solo PP1 ha nombrado el sólidos solución con una descripción precisa de la familia específica de sólidos a la que pertenece.

En la mayoría de las propiedades, hay profesorado que solamente delimita las familias que son posibles soluciones sin comprobar si cumplen las propiedades o no. Solo algunos/as y, para algunas propiedades, se centran en comprobar si las familias o los modelos seleccionados son soluciones posibles. Y solo en algún caso, en la respuesta a una propiedad se delimitan ejemplos de determinadas familias (o familia) que cumplen la propiedad considerada, y se explica también que hay ejemplos en estas familias que no la cumplen.

Cabe destacarse que ningún/a profesor/a hace enumeración de las diferentes familias de sólidos tratadas en el curso con discusión posterior para verificar si en cada una de ellas hay ejemplos o no que cumplan las propiedades impuestas. Ninguno/a ha remitido a la familia de los poliedros regulares al considerar las propiedades “Tiene dos caras iguales (paralelas)”, como si tener dos caras iguales (paralelas) se interpretara como tener “exactamente” dos caras iguales (paralelas). Sólo PP2 ha remitido a esta familia, pero al considerar la propiedad “Tiene todas sus caras regulares” que como ya hemos comentado se ha reflejado un fallo en relación con la condición impuesta en la tarea pues a partir de las propiedades anteriores ya se habían descartado todos los ejemplos de esta familia de poliedros.

- Sobre la descripción y los problemas de contexto, subtareas S-TCg1-P1, S-TCg1-P2, S-TCg1-P3, S-TCg1-P4 y S-TCg1-P5

Se puede concluir que al plantear cuestiones ya propuestas en otras tareas anteriores se siguen reflejando el mismo tipo de respuestas. La mayoría de ellos/as mantienen las ideas/definiciones expresadas en otras tareas para la familia de los poliedros y/o sus elementos, y las respuestas reflejan las mismas dificultades que les llevan a cometer los mismos errores. Ahora bien, caben señalarse algunos matices referidos a las respuestas de algunos/as profesores/as. Se muestra una idea de poliedro que no se había reflejado todavía, una idea que llamamos “etimológica” por explicarla apoyándose en la descomposición de la palabra poliedro. Así mismo, cabe destacarse que se ha plasmado diferencia entre el objeto y la forma geométrica a la que corresponde al señalarse que el prisma corresponde a un poliedro, pero la caja no e ideas erróneas sobre regularidad de polígonos al contemplar solo una de las condiciones pues se ha considerado que el rectángulo es un polígono regular.

Referido a las cuestiones sobre sus elementos, las respuestas son muy pobres, se indica algún elemento y/o propiedad al que remite la cuestión, pero ya no se indican otras que también se verifican. Entre los elementos, los que tienen más peso son los elementos que componen los poliedros (caras, vértices y aristas), pero al mostrar “la caja” a la que puede asociarse la forma de la familia específica de los ortoedros no se incide ni en el tipo de caras o polígonos que se juntan ni en los ángulos de las mismas. Solo algún/a profesor/a hace referencia a ellas y solo en las respuestas a alguna de las cuestiones planteadas. Para los ángulos diedros y triedros también se siguen reflejando el mismo tipo de respuestas y las mismas dificultades que les llevan a cometer los mismos errores. Hay respuestas en las que se utilizan razonamientos incompletos al explicar la respuesta o se fijan solo en parte de los elementos en vez de en todos ellos, lo que lleva a respuestas incorrectas. Para las caras laterales no consecutivas, la mayoría de los profesores solo indican una propiedad (que son iguales o que son paralelas); no se ha hecho referencia a que hay varias propiedades de los ortoedros (específicas de los paralelepípedos) relativas a este tipo de caras.

Para explicar el calificativo de “recto” y rectangular que se añade a los prismas, algunos/as profesores/as han indicado propiedades específicas de la familia de prismas rectos o de los prismas rectangulares. Otros/as profesores/as, sin embargo, se han apoyado en el ejemplo que se les muestra, que pertenece a las familias de sólidos sobre las que se les cuestiona y también a la subfamilia más específica de los ortoedros. En las respuestas se indican propiedades específicas de esta familia contenida. Las respuestas dadas siguen siendo muy breves. Ninguno de estos/as profesores/as ha aclarado que si se cumple una condición para todas las caras también se cumple para una parte de ellas o que los ortoedros son también prismas rectos y prismas rectangulares y que, al cumplir las propiedades de los ortoedros, que son más restrictivas, también se verifican las de estas subfamilias. Cabe destacarse también las respuestas dadas por dos profesores/as en las que en la explicación se indican atributos críticos de subfamilias de prismas que no son atributos críticos de las familias sobre las que se cuestiona. Condiciones de las bases se atribuyan a las caras laterales y/o se indican propiedades específicas de una familia más general sin tener en cuenta que las familias contenidas requieren más atributos. Por ejemplo, se indica que el prisma es rectangular “Porque las caras laterales son rectángulos” o que “Tiene estos calificativos porque está formado por cuadriláteros”. Destacar también que ninguno/a ha remarcado que el nombre de los ortoedros proviene de que sus caras tienen relación ortogonal y que si bien se ha reflejado que las bases de un prisma tienen gran peso en el objeto mental que se tiene los prismas, ningún/a profesor/a ha señalado como propiedad de los ortoedros, como tampoco se destacó en las tareas anteriores como propiedad de los paralelepípedos, que en ellos cualquier par de caras opuestas pueden considerarse bases de estos tipos de prismas.

Se constata de nuevo el poco peso que tiene en el objeto mental que se tiene de los prismas y pirámides oblicuos correspondientes, así como la poca familiaridad que se tiene con las familias de prismas y pirámides de caras regulares y la dificultad que presenta para los/as profesores/as interpretar la condición de regularidad de todas las caras sin exigir necesariamente la igualdad. O bien solo se aplica a parte de las caras (las bases) o bien cuando se aplica la regularidad a todas ellas también se exige la igualdad, con lo que estas familias de prismas y pirámides de caras regulares se asocian bien a los prismas o pirámides de base/s regulares o a los prismas regulares, lo que les lleva a concluir que hay infinitos ejemplos en cada una de estas subfamilias o sólo uno en cada una de ellas (el cubo y tetraedro respectivamente). Destacamos la brevedad de las explicaciones para apoyar las respuestas. Apenas se argumenta para explicar por qué se considera que las familias tienen el número de ejemplos que se indica.

Se observa la influencia que tiene sobre el profesorado las representaciones prototípicas, como, por ejemplo, apuntar que, en el desarrollo plano de un prisma, en particular de un ortoedro, las bases se han de situar en lados opuestos del mismo rectángulo, una a cada lado.

Cabe subrayarse la pobreza de la argumentación matemática en las respuestas a las cuestiones que se plantean inmersas en problemas de contexto. Las explicaciones en la mayoría de las respuestas son afirmaciones y en las justificaciones que se hacen se observan carencias en los pasos de la argumentación que les conduce a la solución dada. Se constata poca familiaridad reformulando los problemas planteados en contexto real en enunciados en un contexto matemático, para expresar los enunciados de los problemas en los que se descompone el problema propuesto y para transformar problemas que se plantean en el espacio a problemas en el plano, y viceversa. Cabe acentuarse también el peso que tiene la idea de que resolver un problema es dar una solución que se considera única, no se revisa ni contrasta con otras posibles incluso en problemas como los planteados en que hay que cuestionarse sobre mínima superficie para una máxima capacidad, trayectoria más corta posible con ciertas condiciones impuestas, mayor área para un mismo perímetro... El profesorado al resolver el problema no se convence de que la solución obtenida es la más adecuada, simplemente la acepta como la solución para el problema sin otra argumentación.

Para el establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos

- Sobre la relación de igualdad de caras y de vértices de un poliedro

Las respuestas de los/as profesores/as a la subtarea S-TCg2-1 han reflejado que los/as profesores/as no suelen establecer ninguna relación de igualdad entre los elementos de un mismo poliedro. Y las ideas que se expresan sobre la igualdad de estos elementos suelen ser incompletas, imprecisas y en algunos casos reflejan ideas erróneas que se tienen que revisar.

Por lo que se refiere a “caras iguales” la mayoría de los profesores expresan su idea de manera incompleta e imprecisa, pero sin errores. Para “caras del mismo tipo”, sólo un profesor, PO4, ha indicado que desconoce a qué caras corresponden. Las respuestas de 5/12 profesores/as las consideramos completas y correctas. Por otro lado, las respuestas de 6/12 profesores/as solo se apoyan en clasificaciones determinadas, las que tienen más peso en las ideas que se tienen sobre los polígonos; 5/12 profesores/as se apoyan en la clasificación de estos según su número de lados. Expresan que los polígonos que tienen el mismo número de lados pertenecen al mismo tipo sin aclarar que solo pertenecen a la misma familia si clasificamos según el número de lados de los polígonos. Para uno de los profesores, PC3, la respuesta dada se ha apoyado solo en las clasificaciones que llevan a los polígonos regulares o a los polígonos convexos.

En cuanto a “vértices iguales”, como subraya Guillén (1997), expresar una idea para este concepto presenta dificultades para los/as profesores/as. Algunos/as profesores/as solo hacen referencia a alguno de los tres requisitos (en ellos concurren los mismos polígonos, con los mismos ángulos y dispuestos de la misma manera) que se imponen para que los vértices sean iguales. Otros/as profesores/as intentan expresar la idea de vértices iguales en términos del ángulo poliédrico, pero lo hacen con imprecisión. Cabe destacarse que ningún profesor ha intentado expresar para este concepto una idea en términos del polígono verticial y que dos profesores/as, PO2, PO4, han expresado que “No lo saben”. Por el contrario, todos ellos han expresado con precisión una idea para “vértices del mismo orden”.

- Sobre las relaciones en y entre poliedros y familias de poliedros

Se puede concluir que varios/as profesores/as (6/16), mayoritariamente del curso CC, consideran que establecer relaciones entre poliedros corresponde a expresar propiedades comunes a todos ellos y en algunos casos se indican como propiedades de todas las familias de poliedros algunas que no lo son porque se apoyan solo en familias específicas de los mismos.

El cubo, los prismas y las pirámides son los ejemplos de poliedros o familias de poliedros entre los que se han establecido especialmente las relaciones concretas. La descomposición del cubo o los prismas en pirámides es la que resulta más familiar dado que esta descomposición se usa para hallar el volumen de las pirámides. Sólo un profesor, PP4, relaciona el ortoedro con los prismas para determinar la fórmula del volumen de los prismas a partir del ortoedro aplicando en principio de Cavalieri.

Ello se constata además al fijarnos en las relaciones concretas que se han establecido, pues las que las que han tenido gran peso han sido las que relacionan los volúmenes de los prismas y las pirámides y también al centrar la atención en los modelos que visualizan las relaciones entre poliedros; de nuevo es la descomposición del cubo en pirámides la que surge casi exclusivamente. Cabe destacarse que solo un docente (PO3) ha indicado que los poliedros cumplen la fórmula de Euler y que otro (PO4) ha indicado que no conoce relaciones entre poliedros.

- Acerca de las relaciones entre los cuerpos de revolución

Se extraen conclusiones análogas a las establecidas para las familias de poliedros. Se expresan como relaciones entre cuerpos de revolución características generales de los mismos. Estas pueden ser específicas de esta familia, de otra más general o de familias contenidas en ella. Así mismo, al fijarnos en las relaciones concretas que se han establecido, las que han tenido gran peso han sido las que relacionan los volúmenes de los cilindros y los conos. Ahora bien, para esta familia de sólidos cabe subrayarse que en el curso en comunidad se han señalado como relaciones entre cuerpos de revolución la forma de generarlos a partir de determinadas figuras planas y también relaciones que existen entre los sólidos y figuras planas que se obtienen al truncarlos de determinada manera. Pero las relaciones no se han establecido como que corresponden a relaciones entre elementos del plano y del espacio, sino que se ha considerado que existe relación entre los elementos correspondientes del espacio porque se generan de la misma manera o porque en ellos se pueden hacer transformaciones a partir de los que se obtienen resultados análogos.

- En cuanto a las relaciones entre los poliedros y cuerpos de revolución

Extraemos también observaciones análogas a las obtenidas para las relaciones establecidas entre cada una de estas familias de sólidos. Algunos/as profesores/as, especialmente los/as que han realizado la encuesta, han anotado como relaciones entre estas familias de sólidos características generales comunes específicas de los sólidos, pero las que prevalecen son aquellas en las que se hace referencia a las dos familias de sólidos implicadas en la relación que se expresan mediante fórmulas para calcular el volumen de estos sólidos o corresponden a los elementos que tienen en común. Hay que destacarse que dos profesores/as han señalado que se puede obtener un prisma a partir de un cilindro (sin precisar que se refieren a los cilindros rectos) haciendo cortes perpendiculares a las bases del cilindro. Se constata de nuevo el gran peso que tienen los prismas y cilindros rectos en la imagen que tienen estos profesores de estas familias de sólidos.

Hemos de subrayar también el desconocimiento que tienen algunos/as profesores/as acerca del establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos asociados a los sólidos. También en este caso dos docentes han indicado que no conocen relaciones entre poliedros y cuerpos de revolución.

- En lo que respecta a las relaciones de los elementos del espacio y del plano

Las respuestas de los/as profesores/as se limitan a describir la transformación que permite pasar del sólido a la figura plana, o a la inversa, y a enunciar entre qué elementos del espacio y del plano se puede establecer la relación correspondiente. En ellas se usan solo ejemplos de sólidos y se indican solo algunas figuras planas que se obtienen al seccionarlos o truncarlos de determinada manera. Otras relaciones entre elementos del espacio y del plano que se han señalado, aunque solo por dos profesores/as del curso de comunidad, hacen referencia a la generación de formas tridimensionales mediante figuras planas por dos procedimientos. En una de ellas se le da un sentido dinámico a estas últimas y en la otra se hace referencia a las figuras geométricas planas que proporcionan las sombras de los objetos tridimensionales.

Cabe señalarse que, al cuestionar sobre relaciones entre sólidos y figuras planas, dos profesores/as del curso online han indicado relaciones entre poliedros que no se indicaron al pedir que se expresaran relaciones entre ellos. Se relacionan los sólidos obtenidos por truncamiento con los sólidos de partida y también se describen o mencionan figuras planas obtenidas mediante el truncamiento correspondiente.

- Sobre las relaciones que se establecen entre figuras planas

Cabe destacarse la familiaridad que se tiene con la descomposición de polígonos en triángulos. Todo el profesorado ha indicado esta descomposición indicando los modelos que visualizan estas relaciones. Unas respuestas se apoyan solo en el ejemplo mostrado y en otras se han fijado en determinadas familias de polígonos. Los/as profesores/as de la encuesta y del curso presencial se han fijado especialmente en que la descomposición se usa en la forma de calcular magnitudes como el área o el perímetro. Y ha habido un/a profesor/a del curso online que la ha relacionado también con los cubrimientos del plano. Es claro el peso que tiene el pentágono regular en la imagen que tiene este/a profesor/a para el pentágono pues si bien el pentágono regular no rellena el plano, hay pentágonos que sí que lo hacen sin dejar huecos. Los/as profesores del curso en comunidad han expresado además características fundamentales comunes a todas las figuras planas implicadas que hacen referencia a elementos comunes, a diferentes descomposiciones de un polígono en polígonos y a relaciones de inscripción y circunscripción en un círculo.

- Sobre las relaciones de dualidad en los poliedros regulares convexos

La mayoría de los/las profesores/as (9/12) conocen los pares de poliedros regulares convexos duales. En solo dos respuestas (2/12) no se ha contemplado el tetraedro como dual de sí mismo. Y solamente uno/a de los/as profesores/as ha manifestado que no conoce el tema. Las características de los pares de poliedros regulares duales más destacadas por el profesorado son las que describen el modelo que puede construirse de uno de ellos inscrito en el otro; inciden en la correspondencia y posición que hay entre los vértices y las caras de los pares de poliedros en el modelo y en menor medida en que el número de aristas coincide, pero no se aclara que en el modelo estas se cruzan perpendicularmente. Ninguno de ellos/as ha señalado la similitud entre el número de lados de las caras de un sólido y el orden de los vértices del otro.

Pero lo que cabe destacarse es el desconocimiento que han expresado todos/as los/as profesores/as acerca de que los pares de poliedros regulares convexos duales, así como los modelos que pueden construirse de uno de ellos inscrito en el otro y viceversa, comparten modelo para sus "simetrías" (planos de simetría y ejes de rotación) y que este modelo puede inscribirse y circunscribirse a una esfera (véase Guillén, 1991).

- Mirando las relaciones entre formas geométricas en su conjunto

Podemos concluir que la mayoría del profesorado no suele señalar relaciones en clase a sus alumnos/as ni tampoco lo han hecho en la encuesta o los cursos. No están familiarizados con las caras del mismo tipo y los vértices iguales, pero sí con el significado de caras iguales y vértices del mismo orden. Las relaciones entre poliedros que se indican corresponden especialmente a elementos que tienen en común y a la inscripción de pirámides en el cubo. Sólo se enuncia alguna relación métrica entre sus elementos y alguna otra relación establecida en los poliedros regulares convexos (como la fórmula de Euler). Las relaciones entre cuerpos de revolución se basan mayoritariamente en relaciones que se expresan mediante fórmulas para volúmenes y, en menor medida, se refieren a truncamientos, generación de sólidos y elementos que tienen en común los sólidos implicados en la relación. Las relaciones entre poliedros y cuerpos de revolución también se basan principalmente en relaciones entre las fórmulas de los volúmenes de los sólidos implicados y en los elementos iguales que tienen en común. Como relaciones entre los elementos del plano y del espacio se han indicado las relativas a transformaciones de truncamiento que generan figuras planas a partir de formas del espacio; solo se enuncian otras dos relaciones que hacen referencia respectivamente a que las sombras generan figuras planas desde los sólidos y a la generación de formas tridimensionales mediante figuras planas. Las relaciones entre figuras planas que se indican se basan en las figuras planas en que se pueden descomponer los polígonos, seguido de aquellas en las que se expresan elementos comunes. Entre los poliedros regulares, al considerar la relación de dualidad que puede establecerse entre ellos, las relaciones que se han mencionado con mayor frecuencia han sido que se pueden inscribir unos en otros y la posición en el modelo resultante de los pares de poliedros regulares convexos duales de los vértices de uno y los centros de las caras del otro. Si comparamos la actividad relativa al establecimiento de las relaciones entre diferentes contenidos geométricos que se sintetiza en Guillén (2010) y que se desarrolla con más detalle en Guillén (1991) con la que han reflejado los/as profesores/as participantes en nuestro estudio en sus respuestas a las tareas propuestas, puede vislumbrarse la importancia que puede tener dedicar atención a esta problemática en los cursos de formación del profesorado.

Sobre la clasificación en el mundo de los sólidos y las figuras geométricas planas

- Clasificación de los sólidos

La mayor parte del profesorado ha distinguido los poliedros y los que no lo son, y para esta familia de sólidos se han utilizado los nombres de cuerpos de revolución y de cuerpos redondos y algunos/as docentes los han denominado de las dos maneras. El nombre de cuerpos de revolución proviene de la manera de generarlos que tiene más peso en la imagen que se tiene de esta familia de sólidos, y el de cuerpos redondos refleja una característica relativas a sus caras. Todo el profesorado ha dado alguna idea/definición para las familias de sólidos que han establecido, en las que se destaca la forma de las caras y/o la manera de generarlos.

Cabe señalarse que, aunque se clasifique el mismo universo y se lleguen a establecer las mismas familias, el tipo de criterio que se usa incide en aspectos diferentes. El que diferencia los poliedros de los cuerpos redondos por el tipo de caras que tienen se basa en atributos y el que lleva a los poliedros y cuerpos de revolución que se fija en la manera de generar las familias lo que destaca es cómo están formados los poliedros y cómo se generan los cuerpos de revolución.

- Sobre las clasificaciones establecidas en los poliedros

Las que se han señalado son en su mayoría particiones basadas en la regularidad de sus elementos; centradas en criterios cuantitativos de sus elementos, como el número de caras, o basadas en la observación/percepción de la concavidad o convexidad de los mismos. Cabe destacarse que todo el profesorado ha hecho referencia a la clasificación dicotómica de los poliedros que lleva a establecer las clases disjuntas de los poliedros regulares e irregulares. Ahora bien, las respuestas dadas las consideramos muy incompletas y con errores. La mayoría de los/as docentes han indicado solamente las clases que establecen al clasificar. Solo dos profesores/as del curso en comunidad y un/a profesor/a del curso presencial y otro del online han enumerado ejemplos de poliedros regulares e irregulares. Para los regulares hacen referencia a su número de caras y para los poliedros irregulares especialmente se han indicado las familias de poliedros que se estudian en la ESO (los prismas y pirámides). Solo un/a profesor/a del curso en comunidad, PC1, ha distinguido los prismas, paralelepípedos y pirámides, estableciendo una clasificación que no es partición al ser los paralelepípedos una familia de prismas, y un/a profesor/a online, ha distinguido también los antiprismas y ha especificado atributos que podrían cumplir o no las familias correspondientes, sin delimitar las familias de poliedros irregulares que corresponderían a los atributos señalados. Cabe destacarse que ningún/a profesor/a ha hecho referencia al universo que se considera al clasificar, tampoco al criterio que se utiliza para distinguir las clases y solo algunos/as profesores/as del curso en comunidad y online han descrito las clases establecidas y lo han hecho indicando una idea/definición de ellas, para diferenciar los poliedros regulares de los que no lo son, en las que falta señalar algún atributo imprescindible para caracterizar los poliedros regulares y, para caracterizar los poliedros irregulares se niegan todos los atributos de los poliedros regulares o sólo uno de ellos, en vez de indicar que deja de cumplirse al menos uno de ellos.

Cabe señalarse que solo la mitad de los profesores han clasificado los poliedros en cóncavos y convexos y hay una cantidad pequeña de profesores (3/12) que los han distinguido según el número de caras. En el primer caso, al ser una clasificación partición con un criterio basado en la observación/percepción que se hace sobre los objetos, se han expresado tres ideas/definiciones para caracterizar estas familias de poliedros con un fuerte componente visual, y si bien una de ellas, indicada solo por uno/a de los/as profesores/as, también se apoya en uno de los elementos de los sólidos, los ángulos diedros, la característica de estos que se indica también es fuertemente visual. Para la clasificación partición basada en un criterio cuantitativo, los/as profesores/as del curso de comunidad que se han referido a ella han indicado ciertos ejemplos, como tetraedro, pentaedro, hexaedro, etc.

Es importante destacar que solamente un profesor, PC3, modifica una de las condiciones de los poliedros regulares, indica que las caras no son iguales, para dar lugar a los poliedros arquimedianos, aunque ni los nombra ni señala cuantos hay.

- Sobre la clasificación de sólidos no poliédricos

Algunos/as profesores/as al clasificar los sólidos no poliédricos indican en singular los nombres de las familias que establecen, el cilindro, el cono y la esfera, sin dar otras explicaciones. Solo un/a profesor/a del curso online ha distinguido en el cilindro los rectos de los inclinados y otro del curso en comunidad ha ampliado estas familias con “otras”, como “el elipsoide, el paraboloide, el hiperboloide y el toro”.

- Sobre la clasificación de los prismas y las pirámides

Se han clasificado las dos familias con los mismos criterios; se priorizan los que centran la atención en el polígono de la/s base/s, estableciéndose así una analogía con las clasificaciones que se hacen de los polígonos en el plano. Cabe señalarse que todos/as los/as profesores/as han clasificado estas familias fijándose en el número de lados de los polígonos de las bases y la mayoría de ellos (8/12) han indicado los nombres que se les asigna a las familias establecidas (prisma o pirámide triangular, cuadrangular, pentagonal…). La mayoría de los docentes (8/12) hacen también una clasificación partición de los prismas y pirámides en los que la regularidad o no de los polígonos de las bases hace que el prisma o la pirámide se considere regular o no sin exigir otro atributo para que estas familias se nombren como prismas y/o pirámides regulares. Solo un profesor/a del curso presencial ha exigido además otro atributo al señalar que el prisma o la pirámide para que sea regular ha de tener la/las base/es regulares y ser recta/o, pero en su respuesta tampoco se indican los atributos necesarios y suficientes para que los poliedros correspondientes pertenezcan a los poliedros regulares. Otro criterio con fuerte componente visual que centra la atención en la/s base/s que han utilizado la mayoría de profesores (7/12) al clasificar los prismas y pirámides es el que distingue los cóncavos de los convexos, si bien apenas se han dado otras características de las familias establecidas diferente de que la/s base/s corresponden a estos tipos de polígonos.

La mayoría de los/as profesores/as también han clasificado los prismas y las pirámides en rectos y oblicuos (11/12), criterio basado en observaciones/percepciones con fuerte componente visual. Hay profesores/as que no han explicado sus respuestas y en las de los que sí lo hacen, para las familias de “los rectos” y los “oblicuos” se expresan atributos sobre la forma de sus caras laterales, en término de la altura de los prismas o pirámides o corresponden a atributos visuales. Para los prismas, algunos/as profesores/as indican atributos relativos a los ángulos diedros de las caras laterales y las bases o las relaciones de perpendicularidad entre ellas.

Cabe señalarse que sólo un profesor/a del curso en comunidad y otro del curso presencial han hecho referencia a otra familia de prismas: los paralelepípedos. El profesor del curso en comunidad ha expresado que sus caras son paralelogramos pudiendo se rectos y oblicuos, pero sin especificar los tipos que hay dependiendo de los polígonos que forman las caras. En cambio, el del curso presencial ha apuntado que pueden ser paralelepípedos el ortoedro, el romboedro y el cubo.

- Sobre la clasificación de las figuras geométricas planas

Las clasificaciones que han propuesto los/as profesores/as para los polígonos se corresponden con las que se han indicado al clasificar los prismas y pirámides con criterios que centran la atención en la/s base/s de estas familias de poliedros. Centran la atención en el número de lados, en su regularidad y en la convexidad. Sólo los profesores del curso en comunidad y presencial han indicado propiedades para distinguir los polígonos regulares e irregulares, así como los polígonos cóncavos y convexos.

En relación con la clasificación de las figuras planas (los polígonos, los triángulos, los cuadriláteros y los hexágonos) podemos concluir que los/as profesores/as participantes en nuestro estudio han mostrado que no conocían y/o desarrollaban en clase la actividad que se detalla en Fielker (1987a, 1987b) al tratar la clasificación de los cuadriláteros y hexágonos. Estos/as profesores/as al clasificar las figuras planas se centran especialmente en los polígonos, los triángulos y los cuadriláteros y las dos únicas variables que han tenido en cuenta para clasificarlos han sido las relativas a relaciones entre los lados y al tamaño de los ángulos.

Para los polígonos y los triángulos se hacen clasificaciones particiones clásicas basadas en lo que marcan los libros de texto de secundaria. Los hexágonos, no se suelen clasificar, y los que lo hacen o lo harían se centran principalmente en su regularidad o no; solo un/a profesor/a del curso en comunidad ha indicado que los separa en los cóncavos y los convexos con el criterio que centra la atención en la medida de sus ángulos. Cabe señalar respuestas en las que se han expresado los dos requisitos para que un polígono sea regular pero que para un hexágono irregular se han negado ambos requisitos, en vez de uno de ellos al menos y aquellas en las que no se ha explicado la respuesta.

Por lo que se refiere a los cuadriláteros, los/as docentes de nuestro estudio han realizado diferentes clasificaciones, aunque ha predominado la que corresponde a una clasificación partición centrada en el número de lados paralelos que tienen, que lleva a distinguir los trapezoides, trapecios y paralelogramos o a distinguir entre los paralelogramos y no paralelogramos, diferenciando en estos los trapecios y trapezoides. Dentro de los paralelogramos y los trapecios algunos profesores (4/16) han establecido otras clasificaciones particiones. Para los paralelogramos se separan los romboides, los rectángulos, los rombos y los cuadrados. Para los trapecios, algunos profesores (5/16) han distinguido los trapecios rectángulos, escalenos e isósceles, o solo dos de ellos. Cabe señalarse que hay dos docentes que no han separado los tipos de paralelogramos de los trapecios distinguiendo todos ellos (los cuadrados, rombos, rectángulos, romboides, trapecios y trapezoides) en una sola clasificación partición.

Para los cuadriláteros también se contempla otra clasificación partición centrada en los ángulos que lleva a establecer los cuadriláteros cóncavos y convexos. Y un/a profesor/a ha anotado otra clasificación partición al dividir los cuadriláteros en los que se pueden inscribir o no en una circunferencia.

Cabe destacarse que se han observado diferencias entre las respuestas del profesorado que como hemos indicado se basan en hacer una clasificación partición y dentro de ella realizar otras clasificaciones particiones o de entrada realizar una clasificación partición que dé cuenta de los diferentes tipos de cuadriláteros. Es importante remarcar que, como apunta Fielker (1987a), los/as docentes no realizan clasificaciones jerárquicas en los cuadriláteros. Solo dos profesores/as han señalado relación de inclusión y es entre el cuadrado con otros dos tipos especiales de cuadriláteros; con los rombos y con los rectángulos. Las respuestas dadas han sido muy pobres. Los ejemplos que se han indicado se han usado para nombrar o explicar las figuras y un/a docente ha realizado dibujos de algunos cuadriláteros sin dar más explicaciones. Aunque corresponde a un tema de la geometría plana que resulta familiar a los/as profesores/as, para explicar las respuestas, si es que se hace, las propiedades que se han indicado se han reducido a la indicación del criterio o criterios que se han usado para clasificar o a indicar alguna propiedad y/o idea/definición de uno de los tipos de cuadriláteros establecidos, ideas que reflejan que el tipo de clasificación que se ha establecido es una partición.

Respecto a la enseñanza de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones de formas geométricas de profesores/as de ESO

Analizando las respuestas de los/as profesores/as participantes en nuestra investigación para esta sección, principalmente los profesores que han participado en los cursos y en ciertos aspectos los que han realizado la encuesta, obtenemos las conclusiones que exponemos seguidamente.

Sobre cómo se inicia la enseñanza de contenidos geométricos y lo que se pretende

Las respuestas de los/as profesores/as participantes en nuestro estudio sobre lo que se pretende al enseñar la descripción y la clasificación se orientan a destacar la importancia que tiene el trabajar en las clases de la ESO la enseñanza de estos procesos matemáticos porque permiten conocer las formas del entorno cotidiano, desarrollar el razonamiento y su estudio se puede aplicar también en otras partes de las matemáticas.

Según han expresado estos/as profesores/as, antes de introducir la descripción y la clasificación en sus clases comienzan con algunas cuestiones para recabar información del alumnado sobre los conocimientos que tienen al respecto. Estos procesos matemáticos los introducen conjuntamente. La introducción de la descripción les conduce a la introducción de la clasificación y no suelen diferenciarla.

Comienzan su estudio con la descripción y clasificación de las formas geométricas en 2 dimensiones continuando después con las de tres dimensiones pues consideran que para entender los sólidos hay que conocer las figuras planas. También se señala que las figuras planas son más sencillas. Sin embargo, después de haber realizado el curso correspondiente, en alguno de los/as profesores/as participantes se ha observado un cambio al respecto. Aclaran que “aunque empiezo por las figuras planas quizá habría que plantearse empezar por las figuras del espacio que son más cercanas para los estudiantes”.

Las respuestas de los/as profesores/as contemplan también que, aunque no hay una manera generalizada de iniciar la descripción de los sólidos, los/as profesores/as suelen iniciarla mayoritariamente mediante representaciones de las formas geométricas a través de dibujos, fotografías, en algunos casos ya construidas. Algunos/as docentes apuntan que relacionan ejemplos de objetos cotidianos con las formas geométricas que el alumnado conoce, ahora bien, si bien parece que intentan conectar directamente el estudio con el entorno cotidiano al intentar organizar objetos, no introducen la descripción y la clasificación planteando diversas situaciones de partida ni se ha comentado que se introduzcan estos procesos matemáticos inmersos en procesos de construcción de modelos por diferentes procedimientos. No señalan que construyan formas y a partir de ellas se introduzcan conceptos, se observen propiedades y relaciones, ni tampoco que se vuelvan a retomar los modelos como ejemplos aplicación de los objetos geométricos estudiados. Vislumbramos que al iniciar la descripción tampoco se presta atención al uso de ejemplos/contraejemplos salvo que ellos aparezcan indicados en el libro de texto y la pobreza que muestran las respuestas de los/as profesores/as hace entrever que los/as docentes no se aproximan a la clasificación desde diferentes puntos de vista.

Si analizamos las observaciones que han anotado los/as profesores/as de nuestra investigación puede concluirse que el profesorado considera importante la enseñanza/aprendizaje de la descripción y la clasificación. Sin embargo, su enseñanza parece estar focalizada al aprendizaje de formas geométricas. Es importante remarcar que cuando se ha cuestionado sobre la introducción y desarrollo del establecimiento de relaciones entre contenidos geométricos, los/las profesores/as han señalado que no consideran importante su estudio en la enseñanza/aprendizaje de los cuerpos geométricos. La enseñanza/aprendizaje de la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones se asocia al estudio de los cuerpos geométricos y de las figuras planas; esto es esta se centra en la enseñanza/aprendizaje de conceptos en vez de en el estudio de los procesos matemáticos mencionados o en el estudio de las relaciones que pueden establecerse entre las formas geométricas. En la enseñanza de estos contenidos no se considera la variedad de situaciones que pueden servir como soporte para su enseñanza y no se remarcan las acciones ligadas a estos contenidos que se consideran como componente de la práctica matemática escolar (Guillén, 2004 y 2005). Cabe destacarse que el profesorado no ha hecho mención a los aspectos de la geometría que se pueden trabajar con en la enseñanza de estos dos procesos matemáticos como son, por ejemplo, el aspecto constructivo, el aspecto de relación o el aspecto del lenguaje. Por ejemplo, al generar sólidos mediante construcciones se pueden introducir ideas visuales y geométricas del sólido, de elementos del plano y construir frases que son propiedades geométricas. Asimismo, la descripción y clasificación de las formas geométricas se puede llevar a cabo relacionando sólidos. Al establecer relaciones se observan las propiedades que tienen las familias de sólidos, las que se mantienen y las que cambian de una familia a otra.

Sobre la interacción entre el profesor/alumno cabe señalarse que, si bien algunos/as profesores/as han comentado que el alumnado intervine de una forma activa en el desarrollo de la enseñanza/aprendizaje de la descripción y la clasificación, se observa una enseñanza/aprendizaje en la que el profesorado es el gran conductor de ella. Lo apuntado por el profesorado no parece indicar que las sesiones de las clases se guíen según las respuestas o inquietudes de los/as alumnos/as. El profesorado no muestra darle importancia a las respuestas de los/as estudiantes para revisar y/o cambiar su programación y/o para revisar las ideas que tiene el alumnado sobre contenidos implicados en el estudio, "ideas" que los/as alumnos/as incorporan en los objetos mentales que construyen para determinados conceptos geométricos, que tienen mucho peso en estos objetos mentales que construyen, lo que les lleva a basar sus respuestas en ellas, y que en algunos casos se tienen que revisar. Tampoco parece que se tengan en cuentan algunos factores que actúan como distractor, que provocan que algunos/as alumnos/as enfrenten dificultades que les llevan a cometer algunos errores.

Respecto a la enseñanza de la descripción y la clasificación. Elementos, criterios de clasificación y familias de sólidos implicados

Los/as profesores/as centran su enseñanza en las formas geométricas que aparecen en los libros de texto y que señala el currículum. Esto es, en los cilindros, conos, esferas, los prismas y las pirámides. Consideran que son las formas geométricas fundamentales para luego continuar el estudio de la geometría. Las razones que han apuntado los/as profesores/as para explicar el motivo por el que enseñan las formas geométricas en sus clases no hacen referencia a que a partir de ellas se puede desarrollar diversidad de actividad matemática al trabajarlas de manera dinámica, en una constante transformación, obteniendo ejemplos de una familia a partir de otros que no lo sean; generando diferentes ejemplos de una familia; convirtiendo los ejemplos de una familia de sólidos en ejemplos de otra o transformando ejemplos de una familia de sólidos en una familia de polígonos o a la inversa. Cabe señalarse que ningún profesor ha destacado que se puede abordar el estudio de la geometría de dos y una dimensiones inmerso en las situaciones que se plantean para el estudio de los sólidos. Lo que sí se ha subrayado es que la falta de tiempo conduce a que no se profundice en su enseñanza.

Centrando la atención en la enseñanza de la geometría de dos y una dimensiones, en relación con las respuestas dadas sobre los elementos de los poliedros en los que se fijan al considerar la enseñanza de estos en sus clases cabe señalarse que hay prácticamente unanimidad en señalar las caras, aristas y vértices y particularmente otros como los ángulos diedros o las diagonales del sólido. Entre las razones de porque se enseñan esos elementos también encontramos concordancia al destacar que son los que realmente se necesitan para describir los sólidos. Cabe citar que algún/a docente ha indicado que la falta de tiempo hace que se tenga que reducir su estudio a los más fundamentales. Las respuestas apuntan que los/as docentes se centran en enseñar los elementos que caracterizan a las familias en general, no dando importancia a los elementos que ayudarían a particularizar las formas geométricas dentro de las familias.

Cabe destacarse la brevedad de las respuestas dadas en lo que concierne a la enseñanza de la descripción y de la clasificación a partir de los sólidos. Si tomamos como referencia la actividad matemática que según Guillén (2004 y 2005) se puede desarrollar en las clases de la ESO asociada a estos procesos matemáticos, las respuestas de los/as profesores/as implicados/as en nuestro estudio han reflejado cierta pobreza en cuanto a los aspectos de estos procesos matemáticos que tratan en sus clases de la ESO. Cabe concluirse que apenas se trabaja la geometría desde los procesos matemáticos de describir, clasificar, … centrando la atención en la multitud de relaciones que hay entre estos contenidos geométricos. El profesorado no implica al alumnado en discusiones sobre diferentes tipos de clasificación que pueden establecerse al considerar diversos universos y/o criterios de clasificación y/o diferentes tipos de clasificación que corresponden a una partición y/o son clasificaciones inclusivas. Tampoco se les implica en la comparación de unas familias de sólidos con otras, buscando parecidos y diferencias entre ellas, representando mediante diagramas relaciones entre ellas, nombrando y describiendo las subfamilias establecidas y/o buscando ideas/definiciones para ellas.

Acerca del uso de materiales y representaciones en la enseñanza de la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones entre formas geométricas. Importancia de la construcción y representación

Materiales que todos los/as profesores/as participantes han indicado como que usan al explicar la geometría de los sólidos son la pizarra y el libro de texto. En las razones dadas expresan que la pizarra puede mostrar las representaciones gráficas de las formas geométricas, en ella se puede anotar las observaciones correspondientes y, además, es un material que se encuentra en todas las aulas. Y el libro de texto es al material donde se encuentra el contenido que se va explicar, las tareas que se van a realizar y es un material que tienen todos los alumnos. Se ha mencionado también el material complementario de apoyo para la enseñanza de la geometría de los sólidos haciendo referencia a ejercicios complementarios de refuerzo y ampliación.

Asimismo, se usan formas geométricas construidas o materiales para construirlas (plastilina, palillos …) (10/16) pues se considera que al poder observar los modelos (las representaciones físicas) de las formas geométricas se facilita la comprensión de los contenidos tratados, en algunos casos el centro dispone del material comercializado y a los/as alumnos/as les gusta utilizarlos. Los desarrollos planos para construir figuras geométricas se han destacado por diversos/as profesores/as (7/16) apuntando que, a partir de ellos, los/as alumnos/as pueden generar y manipular fácilmente los sólidos. Pero cabe subrayarse que no se ha hecho referencia a que al usarlos como contexto se puede desarrollar gran actividad matemática, como se describe en Guillén (1991). Otras representaciones de formas del entorno a las que se ha hecho referencia corresponden a los objetos o a fotografías de estos (4/16).

Los programas informáticos (5/16) y el material de dibujo (6/16) se consideran herramientas esenciales para poder dibujar o representar las formas geométricas. Se ha señalado que para visualizar y comprender las formas geométricas se han de representar gráficamente con precisión; se supone que el saber dibujarlas puede ser garantía de buena imaginación espacial, pero el inconveniente es que dibujar en la pizarra lleva tiempo y los alumnos no siempre son capaces de reproducirlo. Cabe remarcarse, que este material ha sido mencionado por la mayoría de los/las profesores/as de la encuesta, aunque no se han señalado las razones de su utilización.

Una parte del profesorado (8/12) considera que no es necesario utilizar la construcción de formas geométricas para explicar la descripción y clasificación de las mismas. Apuntan que basta con utilizar otras representaciones físicas o planas; se ha mencionado que cuando el alumnado construye el cuerpo geométrico realiza una tarea manual, sin llegar a realizar aprendizaje de contenidos geométricos y, además, “mientras se construye no se da clase”. Por otra parte, los/as profesores/as que sí que han considerado que es necesaria la construcción han señalado que con ella los/as alumnos/as se familiarizan con las formas y de esta manera se puede facilitar la comprensión de los conceptos y propiedades.

Las respuestas de los/as profesores/as han reflejado que los/as docentes no suelen trabajar las matemáticas y la construcción de forma conjunta como señala Guillén (1997, 2010). Muestran que no se plantean tareas al alumnado que van de la construcción a las matemáticas, en donde se construyen formas y a partir de ellas se introducen conceptos, se observan propiedades y relaciones, pudiendo analizarse posteriormente los modelos como ejemplo aplicación. Por otro lado, tampoco se han apuntado que se realizan tareas que van de las matemáticas a la construcción, en donde dadas determinadas propiedades o relaciones se pide que se construyan formas. Si bien una parte del profesorado anota que genera sólidos utilizando los desarrollos planos o materiales comercializados, apenas se aprovecha esta construcción como contexto para desarrollar actividad matemática y no se contemplan otras maneras de generar sólidos, como, por ejemplo, a partir de una unidad base o truncando formas de determinada manera, situaciones que también pueden llevar a desarrollar diversa actividad matemática asociada a los contenidos implicados en nuestro estudio.

Sobre la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos en la ESO. Conocimientos previos, dificultades y errores

Según las respuestas de los/as profesores/as participantes, en la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de la descripción y la clasificación se presta atención a los conocimientos previos que tiene el alumnado sobre estos procesos matemáticos si bien se presta poca atención a las creencias y concepciones previas que tienen sobre ellos.

Los/as profesores/as indican que le dan bastante importancia a la realización de tareas siendo los objetivos de su realización, por un lado, aplicar lo que se ha trabajado y, por otro lado, comprobar que se han adquirido los conocimientos. Sin embargo, no se ha comentado la actividad matemática que se puede desarrollar realizando las tareas. En la enseñanza/aprendizaje de los contenidos parece que se le dé poca importancia a trabajar con el alumnado las reflexiones y discusiones en clase, pudiendo así ellos tomar conciencia de sus propios conocimientos.

Cabe mencionarse que al igual que Guillén (1997) propone iniciar la geometría con un lenguaje visual e ir introduciendo poco a poco el lenguaje geométrico, para que el alumnado finalmente sea capaz de utilizar el lenguaje geométrico, el profesorado ha apuntado la importancia que puede tener en la enseñanza/aprendizaje mostrar la geometría en el entorno cotidiano, utilizando explicaciones sencillas para el alumnado.

Se ha indicado también que para mejorar capacidades del alumnado asociadas a estos procesos matemáticos es importante que el alumnado esté activo en el proceso de enseñanza/aprendizaje, trabajando en clase la construcción y la representación de las formas geométricas, así como razonando y debatiendo sobre los contenidos geométricos implicados en el estudio.

Las respuestas de la encuesta y de algunos/as profesores/as del curso online han remarcado que la enseñanza de geometría se centra en la medición, prestando poca importancia a los procesos matemáticos de la descripción y la clasificación. En relación con las dificultades que enfrenta el alumnado sobre aspectos asociados a la descripción y la clasificación los/as profesores/as del curso online, en concordancia con Guillén (2000) y Radatz (1979), han mencionado que tanto en las formas geométricas del espacio como en las del plano los/as alumnos/as enfrentan dificultades para usar el vocabulario y expresar las propiedades y relaciones de las formas geométricas de manera precisa, siendo un hándicap para el aprendizaje correspondiente, el vocabulario y símbolos en matemáticas. Cabe señalarse las dificultades que parece tener el alumnado para obtener y registrar información espacial; se tiene dificultad para llevar a cabo una representación espacial de una forma geométrica y para la descodificación correspondiente.

Para los errores, al igual que señalan Guillén (2000) y Movshovitz-Hadar et al. (1987), los/as profesores/as del curso online destacan los debidos a un uso incorrecto del vocabulario. También, como Guillén (2000), mencionan desconocimiento e imprecisión al expresar propiedades de las formas geométricas del espacio y del plano.

En relación con la enseñanza de la geometría en los libros de texto

Las características de los libros de texto examinados que según los/as profesores/as del curso presencial deberían tener los libros de texto son: a) no contener demasiada teoría con explicaciones y definiciones sencillas; b) tener un alto impacto visual; c) mostrar objetos del entorno o formas geométricas referentes a los sólidos que los/as alumnos/as encuentran en el entorno cotidiano; d) incluir tareas relacionadas con la explicación que se lleva a cabo en la teoría, que favorezcan la comprensión de los contenidos, que estén planteadas en contexto siendo alguna de ellas lúdica; e) la explicación de los contenidos debe tener una estructura clara y seguir un orden, y f) la geometría de los sólidos debe relacionarse con la cultura, hacer hincapié en las relaciones históricas y proponer diferentes lecturas sobre los sólidos.

Estas características han llevado a que distingamos los textos según que en ellos se enfaticen aspectos visuales, teóricos, de contexto y/o referidos a “practicar”. Los que consideramos que destacan aspectos visuales son los que presentan sus propuestas de forma clara, sencilla y atrayente; en ellos se usan esquemas y diferentes tipos de representaciones visuales. Los categorizados como que destacan aspectos teóricos son los que inciden en la presentación completa de los contenidos geométricos. Los textos considerados como que enfatizan aspectos “de contexto” centran su enseñanza/aprendizaje en propuestas de tareas/ejercicios con enunciados situados en el entorno cotidiano. Por último, los que destacan aspectos referidos a “practicar” basan su enseñanza/aprendizaje en la realización de tareas, dedicando una parte a la explicación de los contenidos geométricos.

Algunos/as profesores/as han apuntado que el lenguaje utilizado en los libros de texto ha de ser sencillo para que el alumnado no tenga dificultades en entender los conceptos. Sin embargo, ningún/a profesor/a ha anotado que los libros han de evitar las definiciones, guiando para que sea el propio alumnado el que vaya elaborando y expresando ideas/definiciones para ellos. No se ha sugerido la conveniencia de que los libros de texto presenten ejemplos/contraejemplos de los objetos geométricos tratados para que los propios alumnos/as vayan delimitando progresivamente sus características e incluso lleguen a expresar ideas/definiciones para ellos.

Todos/as los/as profesores/as del curso presencial consideran que en la introducción de los cuerpos geométricos se deben repasar los conceptos que se han estudiado en cursos anteriores. Alguno de ellos ha destacado además que una introducción: i) debe motivar al alumnado, bien utilizando un lenguaje no técnico, apropiado para los/as alumnos/as del curso, bien presentando situaciones no alejadas de la realidad y la cotidianidad; ii) debería conectar la geometría de los sólidos con entorno cotidiano, mostrando dibujos que relacionan lo que se va estudiar en el tema con objetos de la vida cotidiana, y iii) proponer material para construir las formas geométricas.

Se ha apuntado que los libros de texto contienen tareas/ejercicios para comprender los contenidos geométricos; en ellas se pide que se dibujen las formas geométricas o se refieren a la clasificación y descripción, principalmente a contar elementos. Ahora bien, destacan que la mayor parte de ellas se centran en tareas de medición en las que hay que aplicar fórmulas matemáticas para su realización. Cabe señalarse que no se han hecho comentarios sobre que los libros de texto no plantean tareas sobre relaciones entre familias, en las que se trabaje la construcción o se realicen trasformaciones en las formas geométricas, se clasifiquen las formas geométricas atendiendo a diversos criterios…

La mayoría de los profesores han llamado la atención sobre las pocas tareas/ejercicios que se presentan en contexto. A algunos no les gustan las propuestas que presentan los textos examinados porque consideran que son poco motivadoras para los/as alumnos/as, pues en su mayoría se basan en saber aplicar las fórmulas estudiadas para calcular áreas y volúmenes mostrando las formas geométricas en un contexto matemático. Se considera que las tareas/ejercicios deben plantearse en contexto cotidiano, no ser largas y han de iniciarse siempre con formas geométricas que sean familiares a los/as alumnos/as del curso.

Hay unanimidad en mantener los tipos de tareas/ejercicios que se han planteado referente a la geometría de los sólidos. Sin embargo, en caso de reducirlas, se propone eliminar las que se refieren a: i) los planos de simetría y ejes de rotación; ii) las unidades de volumen; iii) la semejanza de triángulos; iv) los troncos de conos; v) la parte de proyecciones en las que se pasa de una superficie esférica al plano, vi) las relaciones de volumen, capacidad y masa, y vii) los puntos, rectas y planos. Las razones dadas han sido: i) pueden plantearse en otro tema al trabajar otros contenidos o en un tema específico, ii) pueden plantearse en otra asignatura; ii) no se les ve más aplicación que las matemáticas puras; iii) costaría comprenderlos, y iv) los/as alumnos/as tendrían problemas de visualización.

Las tareas/ejercicios que se añadirían están relacionadas con: i) las nuevas tecnologías y programas informáticos; ii) el paso de los sólidos a sus desarrollos planos y a la inversa; iii) dibujar sólidos a partir de características dadas; iii) la construcción de sólidos; iv) las formas geométricas del entorno cotidiano; v) la vida cotidiana o con situaciones próximas al alumno/a, y vi) la descomposición de formas geométricas en otras más sencillas y conocidas. Las razones dadas son: i) poder ir al aula de informática para realizar las tareas/ejercicios con el ordenador y ii) la falta de tareas/ejercicios de ese tipo.

Si se tuviera limitación de tiempo, lo que se eliminaría al explicar la geometría de los sólidos sería: i) aquellos ejercicios que el cálculo fuera un hándicap para la resolución del problema; ii) los contenidos que se considera que el alumno ya sabe, y iii) las demostraciones de las fórmulas de medición.

Las razones dadas son: i) a los/as alumnos/as les cuesta resolverlos; ii) lo que interesa es que los/as alumnos/as apliquen los conocimientos que tienen a los problemas y no realizar grandes cálculos; iii) no son los ejercicios más significativos, y iv) se suelen repetir a lo largo de los cursos.

Si no se tuviera limitación de tiempo, todos ellos incrementarían en los textos el número de ejercicios a realizar proponiendo tareas/ejercicios más diversos, que coinciden en parte con las tareas/ejercicios que se añadirían en una situación real. Están relacionados con: i) la descripción y la clasificación; ii) la construcción de formas geométricas y con su aplicación a la vida real; iii) el truncamiento de los sólidos; iv) la aplicación de las TIC en la enseñanza de la geometría, y v) la diversidad de representaciones de las formas geométricas para trabajar sobre ellas.

Los/as profesores/as del curso presencial consideran que los manuales examinados pueden ser un buen referente para que el profesor pueda desarrollar la enseñanza de la geometría de los sólidos en clases de la ESO. Ahora bien, consideran interesante que se amplíen estas propuestas haciéndolas más prácticas, con más tareas/actividades enfocadas a la construcción y al uso del ordenador, subrayando que tocando y visualizando la geometría se aprende mejor. Se ha propuesto también conectarla con la vida cotidiana pues así llamaría la atención al alumnado y se motivaría su aprendizaje. Y uno de los/as profesores/as ha sugerido añadir lecturas e indicaciones que remitan a vídeos, página de internet y material complementario relacionado con esta parte de la geometría.

En cuanto a la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos en el contexto de resolución de problemas

Las subtareas/problemas propuestos a los/as profesores/as de los cursos presencial y online en el contexto de resolución de problemas han permitido obtener información sobre: i) la actuación de los/as profesores/as participantes al proponer a sus alumnos/as las subtareas/problemas correspondientes; ii) si se consideran o no adecuados para llevarlos a la enseñanza en la ESO; iii) los contenidos geométricos que los/as profesores/as consideran que están implicados en ellos iv) el orden que se establece para tratar la resolución del problema y los contenidos geométricos implicados; v) lo que según los/as profesores/as se podría trabajar en clase con los problemas planteados vi) las cuestiones que se pueden añadir a las subtareas/problemas que se proponen para desarrollar más actividad matemática a partir de ellos, y vii) lo que los/as profesores/as participantes destacan de la subtarea/problema correspondiente.

La actuación del profesor/a en sus clases al desarrollar la enseñanza a partir de las subtareas/problemas que hemos trabajado en los cursos difiere según la tarea planteada. Ahora bien, en la mayoría de ellas se distinguen actuaciones en las que prima el desarrollo teórico, por ejemplo, explicando las formas geométricas implicadas o indicando una definición de ellas, o desarrollando una comprobación matemática numérica; y otras en las que se enfatiza el uso del dibujo y/o construcción de los polígonos, el rellenado del espacio con sólidos, el dibujo del recorrido en el sólido o los cubrimientos con polígonos para desarrollar las tareas correspondientes. También se han señalado actuaciones en las que la tarea se propone a los/as alumnos/as para que la resuelvan según sus criterios y solo posteriormente el/la profesor/a guiaría en la resolución.

Cabe destacarse que la mayoría de los/as profesores/as han indicado que las subtareas las llevarían al aula de la ESO, aunque se han indicado diferentes razones en las que los profesores sustentan sus respuestas. Contemplando las diferentes subtareas tratadas en los cursos, las razones que se han señalado para justificar esta respuesta enfatizan: i) los contenidos geométricos implicados en ellas; ii) la forma como se plantea el estudio de estos contenidos; iii) la importancia que pueden tener para motivar el aprendizaje; iv) el plantearse en el contexto de la vida cotidiana y/o su aplicación en este contexto; v) el ser tareas atractivas para el alumnado; vi) el tener una respuesta abierta/sin datos; vii) el favorecer el razonamiento, y viii) el plantear investigación matemática para el alumnado. La razón expresada por algún profesor para explicar el porqué alguna de estas subtareas, no la propondría en clase destaca la dificultad que puede conllevar para el alumnado de la ESO el desarrollarla; de manera explícita se llama la atención sobre la dificultad de la subtarea en la que se cuestiona el número de prismas de caras regulares, que se considera que no presenta una solución exacta. Parece reflejarse que no se está familiarizado con que las cuestiones del tipo “Cuántos...” pueden tener un resultado finito o infinito. Como destaca Guillén (2010) estas cuestiones son interesantes porque permiten argumentar, desarrollando el razonamiento, para explicar que los prismas de caras regulares, tienen infinitos elementos, sin embargo, la familia de las pirámides de caras regulares solo tiene 3, la triangular, la cuadrada y la pentagonal. Para la otra tarea en la que se ha destacado su dificultad para los/as alumnos/as de la ESO señalan su ambigüedad. Parece que tampoco se está familiarizado con los problemas en los que hay que hacer examen de posibilidades para su resolución y, por tanto, se consideran difíciles para estos/as alumnos/as. Se indica “esto no lo podrán hacer sin ayuda, al no tener una solución definida llevaría a los alumnos una resolución liosa”.

Los contenidos de geometría más señalados por los/as profesores/as de los cursos presencial y online como que se podrían tratar con las subtareas se refieren a la medición, especialmente al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes; se ha hecho referencia a ellos de manera explícita para todas las subtareas. Otros contenidos que también se han mencionado por algún profesor y sólo para alguna de ellas son: i) identificar y describir formas geométricas del plano y del espacio y/o sus elementos; ii) rellenar el espacio con sólidos; iii) rellenar el plano con polígonos y construir mosaicos; iv) relacionar forma y capacidad; v) aplicación de fórmulas y teoremas como el de Pitágoras; vi) representación de formas geométricas del espacio en el plano, y vii) realizar movimientos en el plano. Cabe destacarse que los/as profesores/as participantes, para todas las subtareas planteadas en los cursos, han señalado en mayor proporción que lo más conveniente es explicar antes la subtarea que los contenidos geométricos. Las razones que han señalado se apoyan en que: i) los contenidos que se aplican en el problema ya los conocen los/as estudiantes en secundaria, son contenidos que el alumnado ha trabajado en los niveles educativos anteriores y por lo tanto debería conocerlos; ii) con la resolución del problema se pueden ir explicando los contenidos geométricos implicados en el problema; iii) los/as alumnos/as son capaces de encontrar la solución; iii) la implicación de los alumnos/as en el proceso de enseñanza/aprendizaje favorece un descubrimiento y búsqueda de la información de los contenidos a tratar, y iv) el problema hace que el alumnado sienta curiosidad a través de él por la geometría.

Los que sugieren tratar primero los contenidos geométricos subrayan que estos se necesitan para resolver el problema o que tras explicar la teoría se pueden retomar los contenidos de nuevo al resolver el problema para asentar estos conocimientos. Un/a profesor/a ha puntualizado además que explicando primero los contenidos se realiza más rápido el problema.

Las cuestiones que los/as profesores/as participantes añadirían a las planteadas en las subtareas dependen de la subtarea considerada. Si las miramos en su conjunto caben destacarse las que: i) versan sobre el estudio de familias específicas de sólidos o de figuras planas, de objetos de la vida cotidiana y/o de relaciones entre sus elementos; ii) se refieren al cálculo de perímetros, áreas o volúmenes y/o a trabajar aplicaciones de ellos; iii) cuestionan sobre relaciones entre los elementos de las figuras geométricas y determinadas magnitudes; iv) proponen examinar las figuras geométricas que pueden recubrir el plano; v) plantean modificar o ampliar algunos datos y/o condiciones de la subtarea; vi) sugieren estudiar otras situaciones reales relacionadas con ella; vii) se centran en la parte económica de los productos que se contemplan en el enunciado; viii) están orientadas a averiguar la opinión del alumnado en relación con la subtarea, y ix) cuestionan sobre dificultades que se tienen en la resolución de la misma.

Lo que ha llamado la atención a los/as profesores/as participantes de las subtareas también depende de la subtarea y del profesor/a correspondiente. Lo que se ha destacado es: i) a partir de ellas se pueden trabajar diferentes contenidos geométricos; ii) la resolución de los problemas implica razonamiento matemático; iii) la manera de poder estudiar los contenidos geométricos inmersos en la resolución de las subtareas; iv) las subtareas se han enunciado en un contexto cotidiano y/o permiten mostrar la aplicación de la geometría para resolver problemas del entorno cotidiano; v) las soluciones de alguno de los problemas planteados; vi) el planteamiento de alguno de los problemas que genera dificultad en su resolución, y vii) la mayoría de las subtareas son creativas, originales y sencillas para los estudiantes de la ESO.

Se puede concluir que para la enseñanza mediante las subtareas que hacen referencia a situaciones de contexto, los/as profesores/as plantearían la resolución de las subtareas en clase dependiendo del tipo de subtarea planteada, pero normalmente explicando los conceptos implicados, que se deben conocer para su resolución, dibujando/construyendo las formas geométricas expuestas o realizando cálculos numéricos para hallar el valor de magnitudes geométricas. En cuanto a si se llevarían las subtareas planteadas observamos que mayoritariamente se han señalado en todos los problemas mostrados que sí, principalmente por la aplicación en la vida real que pueden tener y por los contenidos geométricos que se pueden tratar. Los contenidos que se podrían trabajar a partir de estas subtareas son el estudio de las formas geométricas y el cálculo de áreas y volúmenes. En cuanto a que se llevaría primero si el planteamiento de la situación o la explicación de los contenidos observamos que han señalado una u otra opción dependiendo de los conocimientos que se necesiten para su realización. Por lo que concierne a como ampliarían estas subtareas contemplamos que se ampliarían con el estudio de formas geométricas relacionadas con ella, planteando cálculos de medición y pidiendo al alumnado una opinión del problema. Finalmente, lo que han destacado de estas subtareas ha sido el contexto en el que se plantean, el razonamiento que lleva a su resolución y en algunos casos, la dificultad que presentan.

Puede concluirse también que las situaciones propuestas como problemas de contexto no se suelen utilizar por los profesores que han participado en nuestro estudio en sus clases de la ESO. Parece que en éstas no prevalece presentar las problemáticas matemáticas relacionándolas con situaciones del mundo real.

Sobre la investigación en didáctica de la geometría y la transposición a tareas de clase en la ESO

- Situaciones/Contextos en las que está implicada la descripción de las formas y la enseñanza de la geometría en la ESO

Según Guillén (2004, pp. 121-123), hay una diversidad de situaciones/contextos en los que pueden estar implicadas las familias de sólidos y sus propiedades. Las respuestas de los profesores del curso en comunidad han señalado que en sus clases estos contenidos solo se trabajan inmersos en tareas de identificación y problemas que relacionan la geometría con otras partes de las matemáticas. Algunos/as profesores/as también han apuntado los procesos de construcción añadiendo que a los/as alumnos/as no les gustan los problemas en que aparece la geometría debido a que en general no conocen las formas geométricas del espacio y, además, tienen problemas para representarlas. Además, según han indicado, apenas se trabajan estos contenidos en un contexto matematizado. En las tareas que suelen plantear principalmente se ha de justificar si los enunciados referentes a las formas geométricas son verdaderos o falsos.

Una vez examinado el trabajo de Guillén (2004, pp. 121-123) todos ven interesante llevar al aula dichas situaciones, pues "ayudaría a que los alumnos aprendieran y afianzaran los contenidos geométricos" (PC2). Ahora bien, los problemas que mencionan los profesores para llevar estos contextos a clase son el tiempo de que disponen para explicar estos temas y que no se encuentran este tipo de tareas en los libros de texto (PC1 y PC4).

En relación con la geometría de los reflejos, como se ha indicado en el subapartado 1.6.2.4, Alsina et al. (1988) destacan su importancia. Sin embargo, todos/as los/as profesores/as del curso en comunidad indican que no llevan a cabo este tipo de enseñanza de la geometría porque no disponen de espejos, o no saben si disponen de ellos en los centros, no conocen para qué pueden utilizarse, no saben cómo desarrollar el tema, y, porque no consideran que sea importante para cursos posteriores. Lo mismo ocurre con la geometría de las sombras y de las pompas de jabón; los profesores han expresado que en clase no utilizan actividades relacionadas con estas geometrías. No obstante, uno de ellos (PC2) indica que "El estudio de las sombras se podría utilizar para los problemas de Tales".

Ahora bien, todos/as los profesores del curso ven factible realizar tareas sobre los mapas topográficos referentes a la geometría del entorno. Se considera que los mapas son manipulativos y les gusta la tarea, destacando que ya no se trata de la geometría de pizarra y libreta. También consideran interesante la tarea del entorno natural en la que se observa directamente formas y producciones naturales. Sin embargo, apuntan que el problema de llevar a cabo esta tarea es que se necesita tiempo debido al crecimiento de los cultivos. Todos/as los/as profesores/as señalan que es interesante conocer las unidades agrarias si bien sólo se conocen en las regiones donde se utilizan; ni los alumnos las saben ni los profesores las explican.

Para concluir cabe destacarse el desconocimiento para tratar la geometría a partir de diferentes contextos que han reflejado los profesores del curso. Uno de ellos ha expresado que la geometría es la parte de las matemáticas para la que menos conoce lo que se puede hacer en clase. Todos ellos comentan que hay una gran diferencia entre la geometría que se enseña en la Facultad de Matemáticas y la geometría que se enseña en secundaria, añadiendo uno de ellos que cambiaría la enseñanza de la geometría en ESO si estas geometrías de los espejos, las sombras, ... se dieran en la universidad.

- Acerca de las propuestas de Guillén (1991) para tratar la descripción y el establecimiento de relaciones a partir de los poliedros regulares como contexto

    - *Acerca de la prueba de que hay 5 poliedros regulares convexos*

Los/as profesores/as consideran que las demostraciones visuales y de construcción resultan más fáciles de entender para el alumnado que aquellas pruebas que se basan en fórmulas matemáticas, donde hay que resolver inecuaciones y dominar el álgebra. Comentan que convendría que la explicación de los poliedros regulares vaya acompañada de la construcción de ellos pues sería más sencillo para los/as alumnos/as darse cuenta de las propiedades que tienen los poliedros que se construyen y de las relaciones que tienen con otros poliedros. La mayoría opina que se debería dedicar tiempo en clase a demostrar cuántos y cuáles son los poliedros regulares convexos, sin embargo, entre las respuestas encontramos algunas que señalan que la falta de tiempo para enseñar el temario de matemáticas es un hándicap para llevar estas demostraciones a clase. Se ha indicado que cuando aparecen demostraciones en las que se utilizan fórmulas matemáticas los/as alumnos/as acaban aprendiéndose la demostración de memoria sin entenderla, que en la ESO no se suelen hacer este tipo de demostraciones y que no merece la pena llevarlas al aula debido al temario que se ha de dar y al tiempo que se dispone para los poliedros regulares. Cabe mencionar que algunos/as profesores/as han tenido problemas para llegar a la inecuación propuesta.

El profesorado en su mayoría ha considerado interesante presentar las formas geométricas y, en particular, los poliedros regulares, de diferentes maneras. Cabe destacarse que algunos/as profesores/as han remarcado que no las conocían. Para construir los poliedros regulares se utilizaría los desarrollos planos comercializados o construidos con cartulina por el conocimiento que se tiene de ellos, y también porque son baratos y es fácil la construcción con ellos. Algunos docentes han señalado también material comercializado como el Polydron así como los palillos y la plastilina.

    - *Acerca de las características numéricas de los poliedros regulares convexos*

Los/as profesores/as consideran que es interesante dentro de la enseñanza de la geometría de los sólidos en secundaria registrar en una tabla las características numéricas de los poliedros regulares convexos (número de vértices, caras, aristas, orden de los vértices, número de lados de las caras). Para algunos/as, lo importante es que las conozcan, pues opinan que ayuda a los/as alumnos/as a conocer los poliedros, sus elementos, sus características numéricas y sus propiedades y, para otros/as, lo importante no es que conozcan las características numéricas, sino que puedan determinarlas por ellos mismos.

Ahora bien, los/as profesores/as no aprovechan en sus clases la riqueza que ofrece esta tabla para desarrollar la tarea de investigación desde la que surgen diversas problemáticas que conllevan una gran actividad (véase Guillén y Puig, 2006, pp. 78-89). Apenas se aprovecha esta situación para introducir y/o reforzar algunos conceptos, como los de inscripción y de dualidad de poliedros regulares, para conjeturar, establecer y describir relaciones de diferente tipo entre poliedros regulares y/o entre sus elementos, ni para abordar diversidad de pruebas que en algunos casos implican razonamientos deductivos de muy pocos pasos. Si bien todo el profesorado considera que es importante que el alumnado conozca diferentes relaciones que se han establecido a partir de la tabla, por ejemplo, la que iguala el orden de los vértices por el número de vértices con el número de lados de las caras por el número de caras, la falta de tiempo de que disponen los docentes para explicar el temario de Matemáticas, la complicación que se considera que conllevan para la ESO, el desconocimiento que se ha expresado que se tiene de ellas o la poca aplicación que se les conoce en otros contenidos explica que solo se suela enseñar en la ESO la fórmula de Euler. Entre las razones que se han expresado para enseñar esta relación figuran su sencillez para aplicarla y recordarla, el que la conocen todos los profesores, la cumplen todos los poliedros convexos y es la que aparece en los libros de texto.

- *Acerca de los poliedros regulares convexos. Descripción de la regularidad. Interrelaciones. Truncar y desplegar*

Los/as profesores/as han considerado muy interesante de cara a su formación la información aportada a partir del recurso de Guillén (1991, pp. 62-77) sobre descripción de los planos de simetría y ejes de rotación de los poliedros regulares convexos. La mayoría han expresado que no suprimirían nada de lo que han trabajado a partir de estos recursos porque se trata de cursos formativos y les ha aportado información. También han indicado que no ampliarían lo que se ha indicado en relación con los planos de simetría y los ejes de rotación porque el tema se ha presentado muy desarrollado. Solo dos profesores/as del curso online han subrayado que complementarían la explicación, por una parte, con el empleo de programas informáticos (PO1) y, por otra parte, incorporando una tabla resumen de los planos de simetría y los ejes de rotación de los poliedros regulares (PO1, PO3).

Algunos/as profesores/as han expresado que es importante que los alumnos conozcan qué es un plano de simetría y un eje de rotación y que conozcan cuáles son los planos de simetría y ejes de rotación de algunos poliedros regulares como el cubo o el tetraedro, pero no consideran conveniente profundizar más en el tema por la dificultad que conlleva. Las relaciones, por ejemplo, entre los planos de simetría del cubo y del octaedro ya se han considerado complicadas para los/as profesores/as participantes. Se ha señalado que de cara al alumnado se encuentra más dificultad en el estudio mostrado de los ejes de rotación de los poliedros regulares que en el de los planos de simetría. Si bien dicho/a docente ha remarcado que el estudio de los ejes de rotación les puede servir a los alumnos para mejorar su visión espacial. Ahora bien, la mayoría de los profesores ha remarcado que por el nivel exigido en secundaria no consideran apropiado lo referente a las relaciones entre los planos de simetría y los ejes de rotación de los poliedros regulares y lo relativo al armazón del modelo de las simetrías de estos poliedros ya que se considera que resulta muy difícil para el alumnado y, además, se sale del temario.

Los profesores de los cursos en comunidad y presencial también han considerado muy interesante y valiosa de cara a su formación la información aportada a partir del recurso de Guillén (1991, pp. 90-98) sobre la dualidad en los poliedros regulares convexos.

Ahora bien, todos/as ellos/as han expresado que en sus clases no explican prácticamente nada de lo expuesto en ese trabajo, por la falta tiempo, nivel de los/as alumnos/as, la dificultad que conlleva visualizarlo y comprenderlo, resaltando además que se saldría del temario. Solo algún profesor ha comentado que se podría indicar que poliedros regulares son duales y señalar a los/as alumnos/as como curiosidad alguna relación, como que el número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su dual; y si se tuviera tiempo y ganas, se podría mencionar alguna inscripción en clase, y, planificando los contenidos de otra manera, se podría hacer notar alguna propiedad de las que aparecen en el documento, intentando que fueran los/as alumnos/as los/as que la descubrieran, desarrollando así su sentido de la observación.

Los profesores de los cursos en comunidad y online también han considerado muy interesante de cara a su formación la información aportada a partir del recurso de Guillén (1991, pp. 80-86) sobre el truncamiento, montaje y desmontaje de los poliedros regulares convexos. Consideran que es una forma diferente de trabajar con los poliedros que lleva a que se obtengan figuras planas y/o nuevos poliedros a partir de poliedros; además, se relaciona el plano y el espacio, los poliedros entre ellos, se aportan propiedades y características de los poliedros regulares y se desarrolla la imaginación y el descubrimiento.

Sin embargo, aunque se haya valorado positivamente este documento, la mayoría de los/as profesores/as en sus clases no explican nada de lo presentado en este recurso. Se ha considerado complicado entender lo que se les ha expuesto y otros opinan que sobresale el nivel o temario de secundaria. También se ha expresado que no se hace por el desconocimiento que se tiene del tema o se han referido al tiempo que se necesitaría para ello. Solo dos profesores/as han hecho notar que explican "algo" de lo presentado, pero que lo hacen de forma muy esporádica. "Al trabajar la parte de volúmenes se muestra que un cubo se puede descomponer en tres pirámides y de esta forma se puede deducir alguna fórmula" y "Alguna vez se ha indicado en qué consiste truncar los vértices de un poliedro y se ha llegado a trabajar algún modelo de icosaedro truncado al centrar la atención en el balón de fútbol, por ser muy familiar para los alumnos". Los/as docentes del curso en comunidad han señalado que lo ven apropiado para un taller de matemáticas. La forma de llevarlo a cabo es mediante material apropiado, presentando algún poliedro para truncarlo y observar las figuras planas que se obtienen dependiendo de cómo se realiza el truncamiento y diversos puzles para que mediante su montaje y desmontaje se observe que un poliedro está formado a partir de otros poliedros. Se ha apuntado también que se pueden utilizar programas informáticos para truncar, descomponer y componer los poliedros.

Se puede concluir que los/as profesores/as implicados en nuestro estudio no aprovechan la familia de los poliedros regulares como contexto para que al plantear el estudio de sus simetrías, introducir y desarrollar el concepto de dualidad a partir de ellos, trabajar diferentes inscripciones y/o descomposiciones, obtener los poliedros arquimedianos por truncamiento de los poliedros regulares, los/as alumnos/as de sus clases desarrollen gran actividad matemática trabajando los procesos matemáticos de la descripción, clasificación, conjetura y prueba y/o estableciendo multitud de relaciones de diferente tipo entre los poliedros regulares y/o sus elementos y/o entre poliedros de diferentes familias.

- Sobre la transposición a tareas de clase de las tareas de Guillén (1997) relativas a la introducción al estudio de la geometría a la descripción y al establecimiento de relaciones

  - *Sobre la tarea T-0d*

  Los/as profesores/as han indicado que en sus clases también plantean algunas propuestas de las que se indican en la tarea T-0d. Se suele disponer de objetos del entorno del estudiante para que se nombre cada uno de esos objetos; también se centra la atención en edificios y objetos del entorno del estudiante y se pide que se busquen entre ellos los que pueden ser ejemplos de las familias de sólidos que conocen.

  Las propuestas que los/as profesores/as de este curso consideran más interesantes y atractivas para realizarlas en clase contemplan el uso del polydron y de los cubos de estyropor. Ahora bien, en general, en sus clases no proporcionan a los/as alumnos/as diversos materiales para construir modelos o armazones de sólidos; solo alguno de ellos/as construye algunas veces alguna forma geométrica y el profesorado ha señalado que haría la construcción con un solo tipo de material.

  Cabe destacarse que todos/as ellos/as ven interesante que se le dedique unos minutos al principio del tema a introducir las familias de los sólidos, pero ninguno de ellos presenta en sus clases pares de ejemplos de una familia de sólidos dada y pares de modelos formados por un ejemplo y un no ejemplo pidiendo a su vez que se comente lo que tienen de parecido y lo que los diferencia; si bien alguno de ellos/as consideran que sería interesante. A todos/as ellos/as les ha interesado y llamado la atención cómo se conjuga en Guillén (1997) la construcción con la actividad matemática que se despega a partir de las preguntas que se plantean en y después de la construcción.

  - *Sobre la tarea T-1d*

  En las respuestas a la tarea T-1d, los/as profesores/as del curso en comunidad expresan que no suelen realizar la descripción a partir de la construcción. Los/as dos profesores/as que construyen poliedros con Polydron se limitan a la construcción manual. Cuando los/as profesores/as explican los poliedros en clase, se limitan a cuestionar sobre los tipos de polígonos que forman los poliedros, pero no plantean las preguntas que señala Guillén (1997). Después de haber analizado esta subtarea, el profesorado reconoce como muy interesante usar la construcción de los poliedros con materiales comercializados para hacer más fácil el realizar un análisis primario de los sólidos a nivel local; y contemplan como posibles problemas para realizarlo la falta de habilidad manual de algunos/as alumnos/as y la falta de tiempo para poderla llevar a cabo.

  - *Sobre la tarea T-2d*

  En relación con la tarea T-2d, todos/as los profesores del curso en comunidad señalan que son los profesores y no los/as alumnos/as los que muestran solo un par de ejemplos de una familia de sólidos, siendo en el caso de los poliedros principalmente los prismas y las pirámides. Los sólidos se muestran en la misma posición, la estándar. No se suelen presentar los modelos o armazones en diferentes posiciones. Un profesor expresa que “hasta ahora no le había dado mucha importancia a los modelos y posiciones que cogía para explicar”.

Los/as profesores/as consideran la tarea interesante para verificar lo que los/as alumnos/as conocen sobre las familias de sólidos y sus propiedades. Se considera adecuada para los primeros cursos de ESO y se vislumbra como problema el que en el centro se disponga de las figuras geométricas. Las respuestas de los profesores muestran que no se suelen usar los modelos o armazones en tareas de identificación de ejemplos y no ejemplos de algunas familias de sólidos. Además, no parece que el profesorado se centre en investigar cómo identifican los/as estudiantes los modelos o armazones que se les presentan, la influencia que tienen los atributos no críticos dominantes en la identificación de las determinadas clases de sólidos, los factores con fuerte poder visual que actúan como distractores en tareas de identificación de ejemplos y no ejemplos, las familias de poliedros que los estudiantes evocan espontáneamente, etc.

- *Sobre la tarea T-3d*

En relación con la tarea T-3d, todos los profesores han indicado que en clase se limitan a identificar dibujos con familias de poliedros y cuerpos de revolución. Opinan que la tarea es interesante pero la mayoría expresa que completa no la llevaría a cabo en sus clases por la dedicación de tiempo que requiere. Las respuestas de los/as profesores/as muestran que, debido a la falta de tiempo, el profesorado no le presta mucha atención al problema de la visualización espacial implicada en esta tarea, íntimamente relacionado con el estudio de los sólidos.

- *Sobre la tarea T-4d*

Todo el profesorado considera convenientes las preguntas que plantea Guillén (1997) en la tarea T-4d para conocer si los/as alumnos/as diferencian los poliedros, cilindros, conos y esferas, así como, para obtener información sobre algunos de sus elementos. Sin embargo, ningún/a profesor/a desarrolla en sus clases las propuestas que se plantean en esta tarea ni cree necesario desarrollar estas propuestas con sus alumnos/as de secundaria debido al poco tiempo que tienen para impartir esta parte de la geometría. Los profesores/as se limitan a diferenciar los sólidos que son poliedros de los que no lo son a partir de sus ideas/definiciones. No se suelen estudiar estas formas geométricas a través de sus ejemplos y propiedades. Tampoco se centran en contemplar los atributos críticos de las formas geométricas estudiadas.

- *Sobre la tarea T-5d*

Al examinar la tarea T-5d el profesorado señala que con el alumnado se limita a estudiar las figuras planas que forman los sólidos y en el caso de los poliedros, los polígonos que los forman. Ningún/a profesor/a trabaja los truncamientos de las figuras y desconocen si el temario incluye trabajar estos tópicos. A todos ellos les ha llamado la atención la actividad en la que se pide a los estudiantes que indiquen las instrucciones que le darían a un amigo para que este pueda construir diferentes ejemplos de la familia señalada o como le contarían a un amigo como son las figuras geométricas. Los/as profesores/as creen que esta actividad es muy interesante para saber los conocimientos que posee el/la alumno/a.

Los/as profesores/as consideran interesante esta tarea por la diversidad de propuestas que se plantean en ella con las que se trabajan relaciones entre diferentes formas geométricas y favorecen que los/as alumnos/as interaccionen entre ellos/as para describir los sólidos. Los propios profesores/as tienen dificultad para trabajar las propuestas relacionadas con los cortes en las figuras del espacio. Consideran que es una tarea complicada de realizar, además de por su dificultad, por la falta de tiempo y disponibilidad de material.

- *Sobre la tarea T-6d*

La mayoría de los/as profesores/as del curso en comunidad al explican los prismas se limitan a señalar que sus bases son paralelas y para los prismas rectos inciden en la relación de perpendicularidad que existe entre las caras laterales y las bases. La mayoría de las tareas/ejercicios referentes a los prismas se presentan con primas rectos colocados en la posición estándar. Tras examinar esta tarea T-6d, los/as profesores/as, consideran interesante que en clase se incida también en las relaciones de paralelismo y/o perpendicular que existen en las aristas laterales de los prismas y/o en los prismas rectos entre éstas y las de las bases. Los/as profesores/as también acentúan que se trabajen prismas rectos y oblicuos en diferentes posiciones si bien se hace referencia al tiempo del que disponen para explicar que no se puede hacer mucho hincapié en ello.

Sin embargo, no se hace referencia a la relación de igualdad que existe entre las aristas laterales de los prismas, no se plantean tareas en las que se revisan las ideas que tienen los/las estudiantes de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo. Tampoco se determina si las ideas que tienen los/as alumnos/as para el paralelismo y perpendicularidad entre caras (y aristas) se mantienen cuando se mueve la figura o cuando la relación es entre más de dos elementos.

- *Sobre la tarea T-7d*

Los/as profesores/as explican en clase los ángulos interiores y exteriores, si bien se presta menos atención a los ángulos exteriores, y las diagonales de los polígonos; también desarrollan las propuestas que se proponen en Guillén (1997) para ello. Sin embargo, apenas se presta atención a los elementos de los poliedros contemplados en este trabajo. Indican que, aunque consideran interesante esta tarea T-7d por la cantidad de conceptos que se trabajan tanto en la geometría del plano como del espacio, no la trabajan con profundidad; solo se introduce algún elemento de los poliedros y las tareas que llevan al aula suelen consistir en señalar sobre dibujos que aparecen en el libro de texto o en la pizarra los elementos explicados en clase.

En esta tarea consideran llamativo que, para algunos elementos, antes de explicarlos se pregunte sobre ellos. La reconocen como demasiada larga para realizarla en sus clases y además hacen referencia a la dificultad que conlleva para el nivel de secundaria el estudio de algunos conceptos, como el de vértices iguales, y a la dificultad en la disponibilidad y utilización de material comercializado.

- *Sobre la tarea T-8d*

En relación con la tarea T-8d, los/as profesores/as del curso en comunidad se limitan a señalar ideas para aristas y vértices de los poliedros y a determinar el número de caras de algunos poliedros. Solo algunos/as profesores/as enuncian propiedades en relación con el número mínimo de caras que se necesitan para formar un poliedro y ningún profesor hace referencia al número mínimo de aristas y/o vértices que se necesitan para ello; tampoco cuestionan si en los sólidos que tienen caras curvas puede haber vértices en los que se juntan menos de 3 caras y si es esto posible en los poliedros.

Algunos/as profesores/as, durante las explicaciones teóricas suelen pedir al alumnado que señalen propiedades de los poliedros, pero ninguno de ellos propone tareas para que sea el alumnado el que descubra estas propiedades. Una vez presentada esta tarea, se considera interesante que sea el propio alumnado quien realice la descripción de las formas geométricas implicadas en la tarea, pero se señala que es difícil llevarla a cabo por el tiempo que se tiene y el material comercializado que requiere. Uno de los/as profesores/as apunta que es una tarea para que los alumnos la hagan en casa y así utilicen las TICs.

- *Sobre la tarea T-9d*

Los/as profesores/as del curso en comunidad al describir poliedros y familias de poliedros, se centran en el tipo de caras que tienen, pero no trabajan la idea de caras vecinas ni suelen indicar como son las caras que bordean otras caras. Y en cuanto al orden de los vértices, solo algunos/as profesores/as, y solo cuando se tratan los poliedros regulares, expresan una propiedad relativa a este concepto en la que se expresa una idea de él, pero no se nombra orden de los vértices explícitamente.

Los/as profesores/as no suelen proponer tareas para comparar diferentes formas geométricas en relación con sus elementos y, por lo tanto, no se establecen analogías y diferencias entre ellas. Tampoco plantean propuestas en las que a partir de varios modelos se enuncian propiedades que cumplen todos los ejemplos de ella y/o se cuestiona si además estas propiedades las cumplen otras familias. Las descripciones de las familias de sólidos se hacen de forma independiente, no plantean la descripción de una familia relacionándola con la descripción de otras.

El profesorado se centra en describir las formas geométricas que conoce, sin prestar atención a otras formas geométricas como las bipirámides o los antiprismas. Cabe mencionar que la mitad de los profesores no incluirían el estudio de estas familias de poliedros en sus clases por la dificultad que según los profesores puede conllevar para estudiantes de secundaria y la otra mitad del profesorado sí lo harían pues consideran que con ello se reforzaría lo explicado a partir de los prismas y pirámides.

El profesorado reconoce que esta tarea T-9d es interesante por la cantidad de conceptos que se introducen en ella. También remarca el hincapié que se hace en ella en que sean los/as alumnos/as los/as que descubran las propiedades de las familias relativas a los distintos elementos. Ahora bien, el tiempo de que se dispone para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, vuelve a ser un inconveniente para trabajar esta tarea en clase; y también la dificultad que según los/as profesores/as puede conllevar para los/as alumnos/as establecer analogías y diferencias entre las formas geométricas, así como encontrar las propiedades que cumplen las familias relacionando unas con otras.

- *Sobre la tarea T-10d*

En relación con las propuestas que se plantean en la tarea T-10d, los/as profesores/as del curso en comunidad centran la descripción solo en la de los prismas, las pirámides y los poliedros regulares. Los elementos que contabilizan en clase para ejemplos concretos de estas familias de poliedros son las caras, los vértices y las aristas, dejando sin trabajar propuestas como, por ejemplo, la de determinar el número de caras, vértices, aristas y/o de otros elementos de un prisma o una pirámide n-agonal utilizando diferentes estrategias. Guillén (2010, pp. 32-33) muestra que son propuestas muy ricas para desarrollar actividad matemática pues a partir de ellas se puede tratar la elaboración de conjeturas, la generalización, algunas pruebas deductivas de pocos pasos, y el establecimiento de relaciones entre los elementos de diferentes familias de poliedros. Los/as profesores/as de este curso señalan que no tratan estas problemáticas con los alumnos en secundaria porque no las conocían o lo ven complicado para los/as alumnos/as de este nivel.

Examinada la tarea T-10d, los/as profesores/as consideran interesante que se trabajen otros elementos de estas formas geométricas (ángulos de las caras, ángulos diedros, ángulos de los vértices, diagonales de las caras y diagonales del espacio) y que los/as alumnos/as utilicen diferentes estrategias para determinarlos, tanto para ejemplos concretos como para un prisma y/o pirámide n-agonal. La ven como una tarea interesante por las estrategias que los/as alumnos/as pueden emplear para contar los distintos elementos de los poliedros que se trabajan. Asimismo, destacan que permite averiguar si los/as alumnos/as consideran todos los elementos que componen las formas geométricas o solo una parte. También apuntan que ayuda a que los/as alumnos/as desarrollen el lenguaje algebraico, den expresiones verbales en torno a la expresión simbólica correspondiente y además desarrolla el pensamiento deductivo. Sin embargo, siguen considerando que es una tarea que no se puede tratar en clase de secundaria, por la falta de tiempo, el material manipulable que requiere, la complejidad que puede tener el estudio de algunos elementos, la dificultad que puede conllevar simbolizar y operar con la variable n y la falta de habilidad del alumnado para representar gráficamente las formas geométricas estudiadas. Algunos profesores proponen tratarla en el taller de matemáticas.

- Las representaciones de las formas geométricas en la investigación en didáctica de la geometría y en la enseñanza/aprendizaje de la geometría

  - *En lo que concierne a los ejemplos de representaciones de figuras planas y de sólidos que se usan en la enseñanza: ¿Qué? ¿Por qué? ¿Para qué?*

Rey (2004) muestra diferentes representaciones para determinadas formas geométricas, tanto las que se consideran como clásicas (prototipos) como las que no lo son. Examinado este trabajo por el profesorado del curso en comunidad, al cuestionar sobre los dibujos que muestran a sus estudiantes para representar el triángulo, triángulo rectángulo, cuadrado, cubo, cilindro y pirámide, todos ellos han señalado ejemplos prototípicos: el triángulo equilátero apoyado en un lado para el triángulo; para el triángulo rectángulo, el situado sobre uno de sus catetos como base y el ángulo recto en la posición horizontal-vertical; para el cuadrado, el apoyado en un lado. Ningún/a profesor/a del curso en comunidad sitúa la hipotenusa como base del triángulo rectángulo e indican que el cuadrado que se apoya en el vértice se reconoce como rombo. Asimismo, los/as profesores/as presentan tanto el cubo como el cilindro y la pirámide con los dibujos prototípicos: el cubo se dibuja apoyado en una cara; el cilindro se presenta en posición vertical apoyado en su base y más alto que ancho y como ejemplo de pirámide, se muestra una pirámide recta apoyada en la base. Aclaran que no suelen mostrar ejemplos que no sean los prototípicos Y en el caso de los sólidos añaden que resultaría más difícil dibujar estos ejemplos.

Al dibujar las formas geométricas los docentes de este curso suelen utilizar los ejemplos gráficos, visuales, que intentan incorporar una visión más o menos completa de las características del mismo, lo que Vinner (1991) ha definido como atributos relevantes, propiedades que lo hacen ser lo que es y no otra cosa. Debido a esto, como señala Rey (2004), se recurre en general a los mismos ejemplos que, por sus bondades (cumplir la mayor parte de propiedades del objeto geométrico en cuestión) han sido elegidos como los ejemplos más adecuados, ejemplos que se han denominado prototipos (Hershkowitz, 1990, 2002); son los que han indicado los/as profesores/as y coinciden con los que ha mostrado Rey (2004).

Los profesores/as señalan que introducen los conceptos relativos a formas geométricas definiéndolas, normalmente apoyando la definición con un dibujo de un ejemplo y proponiendo tareas/ejercicios en los que los/as alumnos/as tienen que identificar formas geométricas a partir de dibujos que se les muestran. Les parece interesante lo que propone Rey (2004) para la construcción del concepto, esto es, la elaboración de una definición matemática, a partir de una gran variedad de ejemplos –prototípicos y no prototípicos con toda la amplitud de casos posibles –, junto con una complementación adecuada con descripciones verbales y orientaciones en la construcción de las características de dicho objeto. Siguiendo a este autor, creen conveniente también que para describir un objeto geométrico se incorporen una variedad de ejemplos, con diversas orientaciones y configuraciones, analizar las definiciones puntualmente, y recurrir a descripciones de tipo discursivo (Hershkowitz, 1996; Duval, 1998, citados por Rey, 2004); es decir proponen recurrir no solo a los ejemplos visuales sino también a las explicaciones verbales de las definiciones y el análisis de los ejemplos tomados; consideran que de esta forma se podrían descubrir las propiedades que cumple cada forma geométrica, pero expresan de nuevo que lo que ellos suelen hacer es dar directamente la definición indicando además diferentes problemas con los que se tienen que enfrentar para llevar a sus clases lo que propone este autor; entre ellos, el tiempo que tienen para explicar el temario y poder disponer de la variedad de ejemplos, descripciones verbales y dibujos en las diferentes orientaciones.

Rey (2004) expresa también que los objetos geométricos son entes abstractos, solo comprensibles a partir de sus definiciones, y que toda representación de los mismos es una concretización de un objeto que no lo es por no cumplir con todas las características. Todos/as los/as profesores/as han indicado que esta observación no se centra en lo que se trata en secundaria. Y expresan que en sus clases no han centrado la atención en las propiedades que se reflejan o rompen en las diferentes representaciones. Aclaran que no suelen comentar las representaciones por considerarlo superfluo, ya que el alumnado ya conoce las propiedades que no se mantienen en los dibujos. Los/as profesores/as se basan en una comunicación gráfica y no suelen utilizar la comunicación verbal para aclarar las dificultades que puedan surgir de los dibujos. Por tanto, los/as docentes no parecen poner de manifiesto lo señalado por Crespo (2012) sobre la existencia y utilidad de diversos modos de comunicación. Además, los/as profesores/as comentan que los/as alumnos/as tienen imágenes mentales incorporadas para la representación de cuerpos geométricos que no suelen cambiar.

Los trabajos examinados hacen también referencia a dificultades que pueden presentarse al codificar o descodificar las representaciones de las formas geométricas, especialmente de los sólidos. Scaglia y Moriena (2003) consideran que las representaciones estereotipadas constituyen el origen de ciertas dificultades que tienen algunos/as alumnos/as durante la identificación de ciertas formas geométricas. Guillén (2010, pp. 36-38) se apoya en Bishop (1992, p. 34) para llamar la atención sobre los obstáculos que enfrentan los alumnos para representar los sólidos dado que existe un vocabulario visual muy complejo, con convenciones y símbolos que deben comprender quienes aprenden, si se espera que les den sentido a las formas geométricas. Asimismo, Blanco y Crespo (2007) también llaman la atención sobre que los/as alumnos/as tienen serias dificultades para representar en el plano cuerpos geométricos. Los/as profesores/as, del curso en comunidad han aclarado que ellos mismos enfrentan dificultades al dibujar algunas formas geométricas, especialmente los sólidos, lo que hace que a veces no realicen otras representaciones. Apuntan que el alumnado refleja dificultades en tareas/ejercicios en los que deben poner en juego la visualización de propiedades geométricas de cuerpos representados o bien de cuerpos que deben imaginar, evitándose en algunos casos. Consideran que utilizar otras representaciones de las formas geométricas puede ayudar al alumnado a describirlas, sin embargo, antes se deberían subsanar los problemas que puedan tener con el dibujo.

La mayoría de los/as profesores/as relacionan representaciones gráficas con modelos, tanto los dibujos en perspectiva como los dibujos de los desarrollos planos se relacionan con los sólidos correspondientes; ahora bien, de todas las representaciones que señala Alsina et al. (1987) el profesorado no parece que lleve a cabo ninguna de ellas.

- *Correspondiente a los desarrollos de los sólidos y los diagramas de Schlegel*

En relación con los desarrollos de los sólidos, los/as profesores/as del curso en comunidad han dado respuestas diferentes en relación con lo que suelen trabajar en sus clases al centrarse en este tópico. Dos de ellos/as al trabajar los desarrollos de los poliedros se centran en ir del modelo a la representación al dibujar desarrollos de poliedros determinados para obtener las áreas laterales y totales de los sólidos y los/as otros/as dos desarrollan actividad que se centra en el paso de la representación al modelo al realizar la construcción de algunos de ellos.

Los profesores consideran muy completo el trabajo de Guillén (1991, pp. 179-185) sobre los desarrollos planos de los poliedros e indican que ellos/as no lo abordan con el alumnado. Expresan que algunas propuestas de las que se detallan se podrían plantear en secundaria, centrándose especialmente en el caso de los prismas y pirámides. De las respuestas de los/as profesores/as puede concluirse que apenas desarrollan actividad matemática a partir de los desarrollos planos como contexto. Se utilizan especialmente para construir los modelos o realizar tareas de medición. Aunque consideran interesante trabajar a partir de los desarrollos planos como se propone en Guillén (1991), ninguno/a de ellos/as propone a sus alumnos/as que describan los desarrollos con los que están trabajando y consideran complicadas para ellos/as las propuestas que conllevan pruebas por enumeración de posibilidades, como por ejemplo, determinar todos los desarrollos planos diferentes de un poliedro o determinar todas las posibilidades diferentes para colocar las lengüetas en un desarrollo para que se pueda montar el poliedro correspondiente. También se consideran difíciles tareas con las que se desarrolla la imaginación espacial, como, por ejemplo, determinar si una figura plana compuesta de polígonos es desarrollo de un poliedro en particular o no lo es y dando una explicación visualizando cómo se hacen los dobles y dónde quedan los polígonos del desarrollo como caras del sólido obtenido y/o a partir de las propiedades del sólido correspondiente.

En relación con las representaciones de los poliedros mediante diagramas de Schlegel todo el profesorado ha subrayado que no los conocían, que es una forma muy original de representar los poliedros, pero difícil de entender y realizar por parte de los/as alumnos/as, con lo que lo ven complicado para enseñarlos en secundaria.

- Acerca de la enseñanza/aprendizaje de diferentes tipos de clasificación en la ESO

De las características que se señalan en Guillén (2005) sobre la clasificación "a priori", los/as profesores/as destacan el que a partir de ella se crean nuevos conceptos. Se ve interesante que el alumnado modifique las propiedades de las formas geométricas, obteniendo así otras formas geométricas diferentes, creando nuevos conceptos; se ha comentado la creatividad y el carácter investigador que tiene esta clasificación pues el/la alumno/a va a investigar qué pasa con las formas geométricas cuando se modifican sus condiciones. Se ha hecho referencia a que el alumnado puede tener problemas para crear/ entender/ visualizar nuevos conceptos a partir de un concepto y unos/as profesores/as opinan que sería rápida de realizar en clase mientras que otros señalan como inconveniente para ello el que se emplearía mucho tiempo. Las clasificaciones "a posteriori" se consideran más fáciles de realizar por el alumnado que las "a priori" porque se considera que si se conocen las propiedades de las formas geométricas se pueden organizar atendiendo a determinadas características. Los inconvenientes que se han señalado se refieren al desconocimiento que pueden tener el alumnado de determinadas formas geométricas y de sus propiedades.

El profesorado, especialmente el del curso online, ha considerado sencillas las clasificaciones ingenuas al centrarse en regularidades e igualdad de elementos, destacando el caso en que la clasificación salga dicotómica. Un profesor del curso en comunidad ha hecho notar que los/as alumnos/as desconocen la definición de igualdad de vértices y solo un/a profesor/a, del curso presencial, ha indicado una característica de este tipo de clasificación; ha subrayado que la clasificación que se suele trabajar en clase es la que considera como criterios la igualdad de los elementos, clasificaciones en las que las clases establecidas no se solapan.

Según los/as profesores/as de los cursos en comunidad y presencial, en las clases trabajan clasificaciones establecidas en las familias de los prismas y pirámides y/o en los poliedros, basadas en observaciones/percepciones de los objetos con gran componente visual y, también, las que se establecen al fijarse en la regularidad y/o número de lados de un elemento de determinadas familias de poliedros. Se distinguen los prismas y las pirámides entre rectos/as u oblicuos/as y los poliedros cóncavos o convexos. Se nombran pirámides de base triangular, cuadrangular, etc. Pero no se hace referencia a los prismas y/o pirámides de base/s regular/es. Los/as profesores/as del curso presencial han expresado que estos tipos de clasificación no deben presentar dificultad para el alumnado, por ser visuales, porque se suelen enseñar en clase y aparecen en los libros de texto. De nuevo solo uno/a de los profesores/as indica una característica de la clasificación: cada forma geométrica, según el criterio que se proponga, vamos a poder incluirla en un grupo u otro. Y solo uno de ellos/as, en la clasificación que distingue los prismas rectos y oblicuos, ha indicado una propiedad de las familias establecidas: cuando las aristas son perpendiculares a las aristas básicas, el prisma es recto y si no oblicuo. Respecto de la clasificación que se centra en aquellas formas geométricas que no tienen base, tienen una base, dos bases, etc., ningún/a profesor/a la trata en sus clases. Se ha indicado como propiedad de los prismas y/o pirámides que tienen bases o base respectivamente, pero no la utilizan para clasificar.

Todos/as los/as profesores/as han expresado que llevan a clase de alguna manera las clasificaciones particiones, sobre todo atendiendo a un criterio. Sin embargo, las clasificaciones jerárquicas, y en particular en los cuadriláteros, no gustan a los/as profesores/as. Se defiende que un cuadrado no es un rectángulo si bien un/a profesor/a ha expresado que, aunque realiza clasificaciones particiones, para él/ella en determinados casos un cuadrado es un tipo de rectángulo. Se opina que la clasificación partición es más conveniente que la jerárquica porque incluir unas figuras dentro de otras y dibujar el diagrama con forma de red se considera difícil para el/la alumno/a; se apunta que dibujar el diagrama de árbol para las clasificaciones particiones conlleva menos dificultad.

Los/las docentes no trabajan en clase las clasificaciones basadas en criterios de construcción ni las que se basan en la analogía. Los/as del curso de comunidad expresan que encuentran problemas para trabajar en el aula las clasificaciones en las que los ejemplos se obtienen inmersos en procesos de construcción, cuando no se construye al azar sino siguiendo normas fijadas de antemano, por el tiempo que les llevaría a los profesores realizarla con el material manipulable, destacándose que sería buena para un taller. Los del curso presencial, la consideran interesante y apuntan que se puede llevar a cabo imponiendo solo algún criterio para que se pudiera realizar de forma sencilla por el alumnado. Por lo que respecta a la clasificación por analogía todos los/as profesores/as han remarcado la complicación que pueda conllevar para el alumnado. Tras explicar el profesor director este tipo de clasificación, la consideran bastante interesante por determinar cuándo se puede o no establecer analogías entre el plano y el espacio.

- Sobre la transposición de las tareas de Guillén (1997) en relación con la clasificación a tareas de clase

Al examinar las tareas T-1cl y T-2cl de Guillén (1997), algunos/as profesores/as del curso en comunidad expresan que en sus clases clasifican los primas y pirámides en cóncavos/as y convexos/as, la mayoría de ellos/as (PC2, PC3 y PC4) distinguen los prismas en rectos y oblicuos, todos ellos/as clasifican los prismas y pirámides en función del número de lados del polígono/s de la base/s y la mayoría (PC2, PC3, PC4) los distingue en regulares o irregulares en función de la base, especificando que no dicen prismas o pirámides de bases regulares sino prismas o pirámides regulares. Cabe destacarse que prácticamente ningún/a profesor/a de este curso propone otras tareas/ejercicios relativos a estas clasificaciones porque: i) no aparecen en los libros de texto (PC1, PC3); ii) no se consideran necesarias (PC2), y iii) se consideran clasificaciones sencillas para los alumnos (PC4).

Cabe destacarse que, si bien, los/as profesores/as del curso en comunidad consideran interesantes las clasificaciones y las problemáticas que se contemplan sobre ellas en las tareas T-3cl a T-8cl, ningún/a profesor/a las ha tratado en sus clases. Las clasificaciones y problemáticas se refieren a la clasificación de familias de poliedros fijándose en la regularidad, o en la igualdad, de todas las caras y/o de las caras laterales; clasificaciones utilizando varios criterios conjuntamente; la enumeración de propiedades de las familias de sólidos establecidas en las clasificaciones; las relaciones de inclusión entre las familias de sólidos establecidas; los diagramas de inclusión en la clasificación de los poliedros; la clasificación inclusiva de familias de prismas cuadrangulares (entre ellos familias de paralelepípedos). Las razones que se han señalado para aclarar que estas problemáticas no se abordan en sus clases se refieren a: i) no se trabajan esos criterios de clasificación en los libros de texto; ii) se desconoce o no se tiene dominio del tema; iii) el contenido se considera complicado para los/as alumnos/as de secundaria, y iv) no se dispone de tiempo para impartirlas.

Puede concluirse que los/as profesores/as de los cursos limitan el mundo de los sólidos objeto de clasificación a los prismas y pirámides y, en algunos casos, a los poliedros, sin considerar los antiprismas, bipirámides, etc. Las clasificaciones que tratan en sus clases casi exclusivamente se reducen a las establecidas con criterios visuales o que centran la atención en la base/s. Se da cuenta de ellas sólo nombrando las familias que establecen. No se ha hecho referencia a la diversidad de problemáticas que se pueden trabajar a partir de las clasificaciones comentadas ni se vislumbra de sus respuestas que la clasificación puede conllevar gran diversidad de actividad matemática.

- Clasificación de cuadriláteros, triángulos y hexágonos

Los/as profesores/as de los cursos en comunidad y presencial no llevan a cabo la clasificación jerárquica de los cuadriláteros basada en lados paralelos, lados iguales señalada por Fielker (1987a) y presentada en el apartado 1.6.1 del capítulo 1, ni la ven conveniente para realizarla con los/as alumnos/as de secundaria. Comentan que prefieren clasificaciones particiones en las que se especifica el número exacto de lados paralelos. Estos/as profesores/as apuntan que no están acostumbrados a incluir los paralelogramos dentro de los trapecios. Ahora bien, todos ellos están de acuerdo en que sean los/as niños/as los que lleven a cabo las clasificaciones, como propone Fielker (1987a).

Consideran interesante que sean ellos/as los que realicen la elección a la hora de clasificar pues es una forma diferente de abordar la clasificación en las clases. Sin embargo, se apunta también que los/as alumnos/as no están habituados a trabajar la clasificación de esta forma, por ser el profesor/a el que la imparte ya hecha, por lo que sólo funcionaría con una parte de los/as alumnos/as, que serían los que se implicarían en la tarea. La falta de tiempo también se ha señalado por la mayoría de los/as profesores/as del curso presencial (PP1, PP2 y PP4) como un hándicap para poder realizar las clasificaciones señaladas.

Si nos fijamos ahora en las relaciones que se establecen entre el cuadrado, rombo, rectángulo, trapecio y cometa cabe destacarse la resistencia que se tiene para abandonar las clasificaciones particiones y establecer entre ellos relaciones jerárquicas como en Fielker (1987a). La mayoría de los/as docentes del curso en comunidad (PC1, PC2, PC3) no consideran al cuadrado ni como rombo ni como rectángulo y en el curso presencial la mitad no lo consideran incluido y la otra mitad sí. Con respecto al rombo como un tipo de trapecio y cometa, la mayoría de los/as profesores/as de ambos cursos en comunidad y presencial señalan que no lo es; el rombo no es ni trapecio ni cometa. Tras examinar este artículo, un/a profesor/a de estos cursos sigue expresando que el cuadrado no es un rombo "porque los rombos no tienen todos los ángulos iguales y el rectángulo no tiene todos sus lados iguales". Puede observarse que la razón que se apunta refleja que se tiene dificultad para establecer relaciones de inclusión entre los grupos de propiedades de familias que tienen relación de inclusión. No se aplica que el grupo de propiedades de la familia incluida contiene al de la familia que la contiene sino a la inversa. Una vez examinado el trabajo de Fielker (1987a) hay profesores del curso presencial dudan en cómo clasificarlos; especifican que el rombo tiene unas características particulares que lo diferencian del trapecio y cometa. Se subraya que no aparece en los libros de texto.

Al fijarnos en la clasificación de los cuadriláteros según el número de pares de lados paralelos y ángulos rectos, se vuelve a reflejar el gran peso que tiene en la imagen (objeto mental) de clasificación que tienen algunos/as profesores/as el que las clases establecidas tienen que ser disjuntas y que el nombre que se da a los ejemplos de una clase hace referencia a la familia a la que pertenece exclusivamente. No se contempla que algunos ejemplos de una familia, al tener más propiedades específicas pertenece a otra familia contenida y, por tanto, a un ejemplo determinado se le pueden asignar varios nombres porque pertenece a diferentes familias incluidas unas en otras. Se ha expresado que no ven apropiada esta clasificación porque el cuadrado y el rectángulo estarían en el mismo lugar en la clasificación y que, por lo tanto, tendrían que tener el mismo nombre. Otros/as profesores/as que han aclarado que el que estén situados en la misma clase no hace que tengan que tener el mismo nombre, no han explicado la respuesta. Cabe aclararse que después de examinar el trabajo de Fielker (1987a) varios/as profesores/as han considerado interesante tratar esta clasificación en sus clases y remarcado que en ese caso habría figuras que solaparían como es el caso del rectángulo y cuadrado y del rombo y romboide. La clasificación de los cuadriláteros, en la que a clasificación comparativa de pares de lados paralelos y ángulos rectos se añade el número de pares de lados iguales, es la que ha resultado familiar a los/as profesores/as de ambos cursos en comunidad y presencial pues corresponde a una clasificación partición con clases disjuntas, que según los/as profesores/as se parece mucho a la que ellos realizan en clase.

Los/as profesores/as del curso online han valorado positivamente las propuestas de Fielker (1987a) para trabajar la clasificación de los cuadriláteros. Como ventajas señalan: i) el que se ha clasificado mediante tablas con dos criterios; ii) se ha profundizado en el estudio de la clasificación al añadirse nuevos criterios, y iii) replantea quien debe de realizar la clasificación el profesor o el alumno. Como dificultades destacan: i) los/as propios profesores/as han tenido dificultad para seguir la propuesta; ii) se ha utilizado demasiada terminología, y iii) se ha profundizado demasiado para que pueda comprenderla el alumnado.

Analizadas las clasificaciones propuestas por Fielker (1987a) para los cuadriláteros, los/as profesores/as continuarían clasificando como lo hacen antes de analizar el trabajo; no van a desarrollar en sus clases una clasificación jerárquica principalmente porque no están acostumbrados a ella. La mayoría de los/as docentes continúa claramente diferenciando a los rombos de los trapecios y cometas. Se ha mostrado que para algunos/as profesores/as las clasificaciones que les resultan familiares son las que llevan a que, a la hora de clasificar las formas geométricas, estas pertenezcan cada una a una clase y que dentro de la misma clase no haya ejemplos que pertenezcan a familias contenidas en ella. Sin embargo, otros/as profesores/as contemplan también otra forma de clasificar en la que ven factible que dentro de una clase haya ejemplos que tengan alguna propiedad diferente a los otros, pero exigiendo que todos los ejemplos de esa clase cumplan las propiedades que se están considerando como criterio de clasificación. Conforme se van poniendo más condiciones como criterios de clasificación, la clasificación se acerca más a la clasificación que llevan a cabo los/as profesores/as cuando explican la geometría en sus clases.

Los/as profesores/as de los cursos en comunidad y presencial clasifican los triángulos atendiendo a las longitudes de sus lados y a la medida de sus ángulos. Cabe destacarse que ningún/a docente de estos cursos clasifica los triángulos según sus simetrías. Las razones que se han indicado hacen referencia a que: i) son las clasificaciones de los triángulos que se realizan en los cursos posteriores; ii) los problemas que se plantean sobre triángulos atienden a los triángulos clasificados con estos criterios, y iii) son las que aparecen en los libros de texto de secundaria. Todos/as ellos/as añaden que no llevarían otras clasificaciones de los triángulos a la enseñanza en secundaria porque no hay tiempo; algunos expresan también que las ven complicadas para los/as alumnos/as. En el curso online, del trabajo de Fielker (1987a) se decidió centrar la atención en las clasificaciones de triángulos priorizadas en los otros cursos, esto es, según la igualdad de los lados y según la magnitud del ángulo mayor. Todos/as los/as profesores/as subrayaron que eran estas las que se trabajaban con los/as alumnos/as, que las habían visto perfectas y sencillas y que son las que aparecen en los libros de texto. Cabe señalar que un/a profesor/a de este curso apuntó que al trabajo de Fielker le falta añadir algún dibujo.

Si nos centramos en las clasificaciones de los hexágonos que desarrolla Fielker (1987b), los profesores de los cursos en comunidad y presencial subrayan que en clase no se trabajan estas clasificaciones. El hexágono regular es el único hexágono que conoce el alumnado. Expresan que es la primera vez que ven que se utilicen las tramas para clasificar estas figuras geométricas y menos todavía para los hexágonos. Comentan que no ven apropiado realizar una clasificación tan exhaustiva de los hexágonos debido a la falta de tiempo para explicar las matemáticas y que son figuras que luego no se suelen ver en comparación con otras como pueden ser los cuadriláteros o los triángulos. Además, algún/a profesor/a ha expresado que las clasificaciones de los hexágonos por sus simetrías, según el nº de ángulos rectos, clasificar los hexágonos cóncavos, etc., resultan muy complicadas para que las realicen los/as alumnos/as.

La mayoría de los/as profesores/as de los cursos en comunidad y presencial comentan que la enseñanza de la geometría en sus clases no se imparte como desarrolla Fielker (1997a, 1987b). Consideran que sería interesante tratar diferentes clasificaciones de las examinadas pues opinan que el alumnado mejoraría su aprendizaje. Ahora bien, la falta de tiempo del que se dispone para impartir todo el temario de matemáticas en el curso correspondiente explica que los profesores, aún conociendo cómo desarrollar actividad matemática a partir de la clasificación de los polígonos, implicando a los/as alumnos/as en ello, no ven posible un cambio en la enseñanza de la geometría que están impartiendo.

Las observaciones expresadas en relación con la enseñanza de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones llevan a concluir que los/as profesores/as de los cursos implicados en nuestro estudio centran la enseñanza de la geometría en la enseñanza de conceptos. No se siente como prioritario el proponer a los estudiantes situaciones abiertas e investigaciones mostrando un enfoque de la enseñanza/aprendizaje de la geometría desde el punto de vista investigativo y/o desde los procesos matemáticos como describir, clasificar, conjeturar, probar, ...

En lo que concierne a los cursos desarrollados. Una reflexión posterior

Las expresiones que el profesorado ha indicado cuando se les ha cuestionado sobre el aprendizaje recibido en el curso en el que han estado implicados versan sobre: i) los contenidos geométricos de la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones; ii) las maneras de enseñar y/o los materiales y recursos usados para ello; iii) las tareas propuestas en el curso correspondiente. También han expresado observaciones sobre: i) el desarrollo del curso y/o carencias que se han detectado en el desarrollo del mismo; ii) contenidos que más han gustado a los/as profesores/as; iii) creencias que se tienen sobre la importancia de los contenidos geométricos implicados en el estudio y/o sobre su adecuación para llevarlos a clases de la ESO; iv) contenidos geométricos, tareas propuestas en el curso correspondiente que se añadirían y/o se eliminarían en las clases con sus alumnos; v) dificultades enfrentadas por el/la profesor/a y/o por los/as estudiantes en el aprendizaje de los contenidos implicados; vi) su conocimiento anterior y/o posterior al curso y cambios que pueden repercutir en la enseñanza de la geometría en sus clases, y vii) expresiones sobre la situación escolar y/o sobre los libros de texto.

- Sobre el aprendizaje recibido en el curso correspondiente

Los/as profesores/as participantes, especialmente el de los cursos en comunidad y presencial, han expresado que ha sido en relación con los contenidos geométricos donde han observado mayor aprendizaje. Y también ha sido en estos cursos donde se ha destacado mayor conocimiento de los materiales que pueden usarse en la enseñanza de la geometría. Profesores/as del curso online, donde la explicación ha sido mediante diapositivas en las que se presentaba texto acompañado de figuras, la mayor parte de los/las profesores/as han aclarado que han buscado alguna otra figura para responder las cuestiones planteadas y alguno de ellos ha subrayado la importancia que tiene el uso de los materiales comercializados en la enseñanza/aprendizaje de la geometría de los sólidos.

Se ha mencionado lo difícil que había resultado apreciar la dualidad e interrelación entre los poliedros regulares, remarcando que, si se hubiera acompañado la explicación con modelos construidos con varillas, como se indicaba en la presentación, se habría entendido mejor. Y también que hubiera sido más ilustrativo haber tenido incrustado en el texto en vez de una figura fija algún modelo en movimiento para las preguntas de los planos de simetría y ejes de rotación del cubo y octaedro.

Por lo que se refiere a la metodología, varios/as profesores/as han señalado que el enfoque presentado en el curso les ha hecho contemplar otra manera de llevar a cabo la enseñanza de la geometría. Se ha hecho referencia específica al enfoque desde la experimentación y construcción por parte del alumnado, remarcando que este enfoque favorece que se sea más observador, se desarrolle la visión espacial y el nivel de razonamiento, y se pueda ampliar la visión que se tiene de la geometría sin el cálculo al que están acostumbrados los/as alumnos/as. Algún/a profesor/a ha expresado que se ha replanteado la metodología que emplea en sus clases y su propósito de cambiar algunas cosas, dedicando más tiempo en el aula para "investigar" y/o implicando más al alumnado, en vez de presentar la materia el profesorado como algo ya acabado y/o como se presenta en los libros de texto.

Los profesores del curso en comunidad, que es donde se han analizado las tareas de Guillén (1997) sobre la descripción y la clasificación, de manera generalizada han considerado estas tareas muy interesantes para su formación como profesores/as. Las razones indicadas se refieren a: i) la cantidad de conceptos que se trabajan, tanto en la geometría del espacio como en la del plano; ii) los diferentes contextos y situaciones en que se puede tratar la descripción y que desconocían; iii) los diferentes procedimientos de construir o de generar sólidos que pueden facilitar la descripción/análisis; iv) cómo se puede ir aumentando el nivel de descripción de las formas geométricas con los elementos que podemos considerar para describir y los diferentes tipos de análisis que se pueden llevar a cabo; v) los diferentes tipos de clasificación que se han tratado desde las matemáticas y desde su enseñanza que, como han aclarado, la mayoría se desconocían; vi) la implicación del alumnado en el desarrollo de las clasificaciones, y vii) el abordar problemas que se pueden encontrar en las clasificaciones tratadas. Se subraya la cantidad de ideas que han aportado estas tareas para plantear la descripción y la clasificación de las formas geométricas en clase y alguno/a de ellos/as ha añadido que se propone una descripción y clasificación diferente a la mostrada en los libros de texto que ha servido para descubrir otra forma de enseñar la geometría.

- Acerca de las propuestas presentadas para trabajar la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones

Profesores/as de los diferentes cursos han expresado que las propuestas desarrolladas en el curso correspondiente para trabajar la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones ha sido muy completa y ha aportado una gran cantidad de información. En relación con la descripción se ha remarcado que: i) el curso ha ayudado a recordar formas geométricas y/o a conocer nuevas formas geométricas; ii) se ha presentado la descripción de una forma muy didáctica; iii) hay cantidad de elementos que se pueden utilizar para la descripción de los sólidos y cantidad de familias de poliedros que se pueden describir; iv) la descripción puede tener gran importancia en la enseñanza de los sólidos en secundaria, y v) en el curso se han aclarado conceptos para los que el profesorado tenía dudas. Respecto de la descripción de familias de poliedros como los prismas, pirámides, antiprismas y bipirámides, la mayoría de los/las docentes la han considerada detallada y/o completa pero algunos docentes han expresado que ha sido demasiado amplia para el alumnado de secundaria y que se han empleado términos complicados. Un/a profesor/a del curso online ha remarcado que ha sido aburrida y con falta de imágenes. En relación con los poliedros regulares convexos, la mayoría de los/las docentes no añadirían nada a lo expuesto en el curso porque, según han expresado, lo impartido ha sido demasiado. En el curso online se ha notado carencia de: i) realizar manipulación de formas geométricas; ii) mejores diagramas y dibujos; iii) explicación más práctica; iv) mostrar su aplicación en la vida cotidiana del alumnado, y v) tiempo para explicar lo abordado.

Los profesores de los cursos, especialmente los del curso presencial, han considerado importantes todos los contenidos tratados en el curso correspondiente. Se han destacado especialmente las relaciones de dualidad entre los poliedros regulares, entre planos de simetría y ejes de rotación, entre ellos con los poliedros obtenidos por truncamiento y/o entre ellos y sus desarrollos planos y/o sus diagramas de Schlegel; y también lo concerniente al descubrimiento de los elementos de esta familia de poliedros. Estos son también los contenidos que más han gustado a los/as profesores/as. Se ha subrayado la cantidad de actividad matemática que se puede desarrollar a partir de los poliedros regulares.

El profesorado ha indicado que los contenidos tratados en el curso correspondiente no se pueden trasladar a las clases de la ESO. Se ha apuntado que habría que simplificar y hacer más sencillas las tareas que se proponen para trabajar la descripción y que la descripción de los poliedros regulares sería una parte que se podría explicar en secundaria, así como su obtención y su representación mediante desarrollos planos. El profesorado del curso online señala que puede llevar a cabo en sus clases de una manera sencilla los planos de simetría y ejes de rotación, así como la dualidad de los poliedros regulares convexos. Se ha apuntado la dificultad para el alumnado del vocabulario utilizado en algunas descripciones, así como las clasificaciones de los cuadriláteros; estas se consideran importantes, pero “liosas”, especialmente para el alumnado de secundaria. Se aclara que es difícil de llevar las clasificaciones de cuadriláteros y de los hexágonos al aula por la falta de tiempo; de esta los profesores del curso de comunidad lo explican también por “la poca utilidad que puede tener en los cursos posteriores”. Diferentes profesores/as han mencionado en diversas ocasiones el poco tiempo de que se dispone en secundaria para explicar la geometría.

Los/as docentes de los diferentes cursos han visto la tarea de describir y clasificar como actividad interesante y fundamental en las matemáticas que favorece: i) conocer las formas geométricas y sus elementos para poder aplicarlo a la vida cotidiana y a las matemáticas; ii) utilizar el leguaje geométrico de manera precisa y llegar a expresar con precisión propiedades, definiciones, clasificaciones y relaciones; iii) desarrollar la visión espacial; iv) organizar las formas geométricas, e v) iniciar al alumnado en las tareas/investigación. Ven interesantes las distintas clasificaciones que hasta ahora no conocían y que les puede servir para que los/as alumnos/as no conozcan una sola manera de clasificar. Los principales problemas que ven los/as docentes es el tiempo que lleva realizar estas clasificaciones. También se ha destacado por el profesorado el problema que conllevaría ampliar los criterios de clasificación para el alumnado en general y, particularmente a aquel con dificultades de aprendizaje.

Cabe mencionar que en general los/as profesores/as han mostrado aprendizaje en el curso, señalando alguno/a de ellos/as que no se conocía la mayoría de lo expuesto. Les parece interesante conocer lo que dicen los investigadores en los recursos que se han examinado, si bien han expresado que no consideran que sea posible trasladar a sus clases gran parte de lo que se ha expuesto en ellos especialmente por el tiempo del que se dispone para enseñar la geometría en cursos de la ESO. Algunos/as profesores/as han destacado que la enseñanza de la geometría impartida en el curso correspondiente ha llevado a plantearse su forma de enseñar la geometría en la que el profesorado es el principal transmisor de los contenidos geométricos. Como hándicap para ello se ha señalado la falta de tiempo y la extensión de los recursos entregados en el curso correspondiente para tratar los contenidos relativos a la descripción, clasificación y establecimiento de relaciones.

A propósito de los perfiles de los profesores implicados en el estudio en relación con la enseñanza de la geometría en la ESO

En el capítulo anterior mostramos como columnas de una tabla las cuaternas que reflejan para cada una de las 4 secciones que hemos distinguido el número de indicadores de cada tendencia asignados a los profesores de los cursos (véase las tablas 3.135, 3.138, 3.141, 3.144). Determinando la cuaterna que indica el número total de indicadores de cada tendencia asignadas a los profesores que han colaborado en la investigación (265 TR, 255 TE, 21.5 E, 18 I) contemplamos que el profesorado de nuestro estudio se mueve entre la tendencia tradicional y la tecnológica. Si nos fijamos en el número de indicadores de la tendencia estudiada que asignamos a un profesor en relación con el número total de indicadores que podría haber reflejado según el curso en el que ha estado implicado, podemos concluir que la tendencia tradicionalista se ha visto reflejada especialmente en los profesores PC1 (33/48), PC2 (28/48), PP3 (26.5/46) y, en menor medida en PP4 (24.5/46), PO2 (24.5/46) y PO4 (23.5/46). Por otra parte, la tendencia tecnológica ha destacado en el resto del profesorado: PC3 (24.5/48), PC4 (24.5/48), PP1 (23.5/46), PP2 (25/46), PO1 (26.5/46) y PO3 (22.5/46), siendo esta más acentuada en PO1 y PP2. Subrayamos la poca tendencia espontaneísta e investigativa que han manifestado los/as profesores/as. La tendencia espontaneísta se ha apreciado en la mayoría de los/as docentes, pero sólo para algunos indicadores, siendo PC4 (4/48), PO1 (3.5/46) y PO3 (4/46) los/as profesores/as que más la han manifestado. La pobreza de la tendencia investigativa se muestra también al verificar que aunque la hemos asignado a todos los/as profesores en algún indicador, sólo los profesores/as PO1 (3,5/46) y PO3 (2/46) la han reflejado en más de uno de ellos.

Al fijarnos en los indicadores, se ha mostrado una clara tendencia tradicionalista en los indicadores 1, 2, 3, 4, 5, 6’, 9, 10, 14, 19, 20, 20’, 21, 25, 26, 27, 28, 44 y 45, este último estudiado solo en un curso. También destaca la tendencia tradicionalista, pero más ligeramente en los indicadores 7 y 36. La tendencia tecnológica se ha destacado en los indicadores 5’, 6, 7’, 7’’, 12, 15, 17, 18, 24, 33 y 46, este último examinado solo en un curso, y más ligeramente en el indicador 13. Entre la tendencia tradicionalista y tecnológica se mueven los indicadores 8, 16, 22, 23, 29, 30, 31. 34, 35, 37, 38, 39, 42 y 43. La tendencia espontaneísta ha sido señalada ligeramente en los indicadores 2, 13, 21 y 24. Entre la tendencia tecnológica y espontaneísta se distinguen los indicadores 32 y 40. La tendencia investigativa se refleja solo en el indicador 11. Se vislumbra alguna respuesta a la que para los indicadores 29, 41 y 44 asignamos una tendencia espontaneísta/investigativa. Se concluye que la mayoría de los indicadores se mueven entre la tendencia tradicionalista y tecnológica, destacándose ligeramente en ellos la tendencia tradicionalista. Subrayamos que la tendencia investigativa solo se ha destacado en el indicador 11. La espontaneísta apenas la hemos asociado a respuestas de profesores, a excepción de en los indicadores, 32 y 40, para los que esta tendencia se ha asignado al mismo número de profesores que la tendencia tecnológica. Resaltamos que el indicador 13 ha sido en el que se ha presentado la mayor homogeneidad entre las tendencias.

Aportación, limitación y continuación de nuestro estudio

Como se desprende de las conclusiones que hemos enumerado, en esta investigación hemos constatado una enseñanza de la geometría en la ESO en donde parece que no se le ha dado importancia a la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar, así como del establecimiento de relaciones y la representación de las formas geométricas. Se ha vislumbrado una enseñanza de la geometría que va de la enseñanza de la geometría de una y dos dimensiones a la geometría de tres dimensiones.

Dado que nos movemos en un mundo en tres dimensiones, los sólidos juegan un papel fundamental. Por tanto, consideramos esencial mostrar la geometría partir de las formas geométricas en tres dimensiones. Subrayamos que la descripción, la clasificación, la relación y la representación de estas formas geométricas conducirán intuitivamente al estudio de las figuras planas y en una dimensión. Además, en el espacio se puede contemplar infinidad de relaciones, es más intuitivo y posibilita una gran cantidad de tareas creativas. Nuestro estudio constata la necesidad de desarrollar cursos de formación para profesores de secundaria para mostrar diferentes enfoques para el estudio de la geometría y en particular el que se centra en el estudio de los procesos matemáticos, el establecimiento de relaciones y la representación, utilizando los sólidos como soporte, pasando así de la geometría en tres dimensiones a la de dos y una dimensión. Centrándonos en los sólidos, consideramos que hay una variedad de contextos en los que se pueden mostrar, así como presentarlos desde diferentes enfoques. Destacamos que se puede describir, analizar, representar…, el entorno cotidiano. Se pueden tratar los contenidos geométricos a partir de la generación y transformación de los sólidos mediante diferentes procedimientos. A partir de una determinada situación, se pueden estudiar los contenidos geométricos y analizar las diferentes estrategias que se llevan acaba para la resolución de problemas. Aplicar los contenidos geométricos a la resolución de problemas en áreas como la física, la química, la tecnología...

Este estudio ha constado también la necesidad de desarrollar cursos de formación para profesores de secundaria en los que se les prepare para dirigir experiencias de descubrimiento, a explorar los contenidos geométricos mediante las construcciones, a trabajar ideas prácticas utilizando diversos materiales, a mostrar los aspectos creativos de la materia, a organizar la enseñanza de la geometría en torno a los procesos matemáticos, a establecer relaciones entre los contenidos geométricos, a enseñar geometría mediante la resolución de problemas…

Cabe destacarse la adecuación de los diferentes cursos que hemos impartido para la toma de datos en este estudio. Por un lado, los profesores que han colaborado en la investigación han subrayado la importancia de los mismos para su formación en esta materia para su enseñanza en la ESO pues permitieron mostrar diferentes formas de llevar a cabo la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos. Por otro lado, se han revelado muy adecuados para la toma de datos en nuestra investigación por las características de los mismos. El curso en comunidad se ha visto muy apropiado para que los participantes interactúen entre ellos/as y de esta forma se debata, evalúe y reflexione sobre los contenidos geométricos. Se contempla que las personas participantes de la comunidad trabajan y aprenden juntas para obtener un significado común, construyen conocimientos, y desarrollan el pensamiento y actitudes positivas hacia los profesores y posiblemente su autoestima. Además, tienen una identidad común caracterizada por sus formas de actuación, herramientas, etc. El curso presencial basado en la enseñanza profesor/alumno se ha considerado muy adecuado para que el/la profesor/a transmita a los/as participantes hechos, contenidos y procedimientos. El profesorado plantea tareas y cuestiones en relación con los contenidos geométricos tratados para que las personas participantes de forma individual, en grupos o de forma colectiva se resuelvan y expliquen. Todos/as los participantes avanzan a la misma velocidad. El profesorado controla el proceso de aprendizaje. El curso online se ha estimado muy conveniente en procesos de enseñanza/aprendizaje en los que hay problemas de desplazamiento y tiempo en el proceso de formación de las personas. El profesor ha de tener un papel organizativo y coordinativo del curso, diseñando el currículum, elaborando los contenidos, facilitando y tutorando el aprendizaje, evaluando el proceso de aprendizaje de los participantes, así como el proceso formativo y su actuación. Además, el/la profesor/a ha de tener un papel intelectual haciendo preguntas y respondiendo cuestiones a los/as participantes. También un papel técnico ayudando a los/as participantes a utilizar todos los recursos del entorno virtual. El/La profesor/a ha de ayudar a los/as participantes a ser autosuficientes.

Si nos centramos en las limitaciones que puede haber tenido nuestro trabajo señalamos la generalidad de algunos resultados, debido a la brevedad y/o dificultad de registrar y/o interpretar algunas respuestas de los/as profesores/as participantes. En la encuesta las respuestas solían ser breves, limitándose el profesorado a contestar escuetamente la cuestión planteada. En el curso en comunidad fue difícil registrar en algunas tareas intervenciones individuales que no estuvieran influidas por las intervenciones de otros/as compañeros/as del curso. En el curso presencial algunos/as profesores/as mostraron una actitud negativa al uso de grabadoras de voz para la toma de datos, ello condujo a respuestas breves y en algunos casos no querer contestar. En el curso online, el profesorado a veces no hacía uso de las nuevas tecnologías que disponía para realizar las tareas planteadas, prefiriendo en algunos casos dejarlas en blanco o contestar brevemente. En general, los/as profesores/as participantes evitaban dar respuestas por escrito, a excepción del curso online que fue principalmente la forma de registrar las respuestas.

Otro aspecto que ha limitado nuestro trabajo ha sido centrar los resultados en las respuestas del profesorado sin observar directamente los contenidos geométricos que se enseñan en clase y el uso que se hace de ellos. Consideramos que la observación en el aula del profesorado podría darnos información más veraz sobre algunos aspectos tratados.

Asimismo, se podría haber profundizado más en el estudio de los contenidos geométricos, establecimiento de relaciones y representación mediante la resolución de problemas en contexto. Si bien los objetivos de nuestro estudio iban encaminados a obtener la información sobre los aspectos señalados mediante diferentes subtareas, el tiempo dedicado a cada una de ellas por la implicación del profesorado hizo que no se les pudiera prestar a otras subtareas toda la atención que nos hubiera gustado.

Igualmente, consideramos que sería interesante profundizar más en los perfiles de profesores. Debido a la estructura de los diferentes cursos y al tiempo de que se disponía para su realización, no se han podido abordar por igual los cuatro grupos en todos los cursos. Consideramos que se ha dado una visión de los perfiles del profesorado que abarca las cuatro secciones de nuestro estudio, sin embargo, pensamos que se podría profundizar en aspectos como el aprendizaje del alumnado, así como en los errores y dificultades que se detectan en ellos/as.

El estudio realizado nos ha llevado a plantearnos cuestiones que podrían dar continuidad a este trabajo:

- Reelaborar los modelos de enseñanza de este estudio a partir de las observaciones de los participantes de forma que se pueda continuar el estudio con estos nuevos modelos de enseñanza.

- Analizar presencialmente el uso que el profesorado hace de los contenidos geométricos, establecimiento de las relaciones y representaciones en el aula.

- Investigar cómo se lleva a cabo la enseñanza/aprendizaje de la geometría en relación con los procesos matemáticos, el establecimiento de las relaciones y las representaciones, en otros niveles educativos como infantil y primaria.

- Contemplar la enseñanza/aprendizaje de los contenidos geométricos a través de la resolución de problemas geométricos en tres dimensiones presentados en diferentes contextos.

- Profundizar en los diferentes perfiles de profesores/as que podemos encontrar en la enseñanza de las formas geométricas, así como, en la parte de medición.

- Examinar y comparar el aprendizaje de la geometría en el alumnado de secundaria mostrada a partir de las diferentes tendencias del profesorado: tradicionalista, tecnológica, espontaneísta e investigativa.

No nos gustaría acabar sin decir que, aunque se han cumplido las expectativas del trabajo, todavía queda bastante por realizar. Pensábamos que finalizando esta tesis pondríamos fin a un estudio, sin embargo, hemos contemplado que, hemos llevado a cabo aportaciones importantes en un campo en el que futuras investigaciones continuarán trabajando.

REFERENCIAS

Adell, J. y Sales, A. (2000). Enseñanza online: elementos para la definición del rol del profesor. En J. Cabero, M. Gisbert et al. (Coords), *Las Nuevas tecnologías para la mejora educativa* (pp. 351-372). Sevilla: Kronos.

Álvarez, G. (2010). Educación online: relaciones entre estructura de los cursos e intervenciones de apertura en los foros. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 10*(2), 1-23. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44717910007

Alsina, C., Burgués, C y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Fotuny, J. M. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué la geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Álvarez, M.ª D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.ª R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.ª T., Santos, T. y Esteban, S. (2007a). *Matemáticas 1 ESO*. Madrid: Santillana.

Álvarez, M.ª D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.ª R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.ª T., Santos, T. y Esteban, S. (2007b). *Matemáticas 3 ESO*. Madrid: Santillana.

Álvarez, M.ª D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M.ª R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.ª T., Santos, T. y Esteban, S. (2008). *Matemáticas 2 ESO*. Madrid: Santillana.

Anderson, T. y Dron, J. (2011). Three generations of distance education pedagogy. *International Review of Research in Open and Distributed Learning*, *12*(3), 80-97.

Anzola, M., Bujanda, M.ª P., Mansilla, S. y Vizmanos, J. R. (2007). *Matemáticas 1 ESO Esfera*. Alcobendas (Madrid): SM.

Anzola, M., Bujanda, M.ª P., Mansilla, S. y Vizmanos, J. R. (2008). *Matemáticas 2 ESO Esfera*. Alcobendas (Madrid): SM.

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada Editora.

Azcárate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado, 32*, 129-142.

Ball, D., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Banzato, M. (2002). Il tutoring in rete. En M. Banzato (Ed.), *Apprendere in rete. Modelli e strumenti per l e-learning* (pp. 263-328). Torino: UTET.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (2), 241-250.

Bartolomé, A. (2002). Universidades en la Red. ¿Universidad presencial o virtual? *Crítica, LII* (896) pp. 34-38. Recuperado de http://www.lmi.ub.es/personal/bartolome/articuloshtml/bartolomeSPcritica02.pdf

Batesteza, B. y Patetta, N. (2003). Capacitación de instructores que migran de los cursos tradicionales hacia los cursos online. *Virtual Educa 2003. IV Conferencia Internacional sobre Educación, Formación y Nuevas Tecnologías.* Recuperado de http://www.virtualeduca.info/encuentros/encuentros/miami2003/es/actas/11/11_01.pdf

Bernaza, G. y Lee, F. (2005). El aprendizaje colaborativo: una vía para la educación de postgrado. *Revista Iberoamericana de Educación, 37*(3), 1-18.

Blanco, H. y Crespo, C. (2007). Representaciones geométricas y argumentaciones en el aula de matemática, *Premisa, 32*, 15-23.

Bromme, R. (1988). Conocimientos profesionales de los profesores. *Enseñanza de las ciencias, 6*(1), 19-29.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit x*, (57), 5-30.

Calzadilla, M. E. (2002). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de educación*, *29*(1), 1-10.

Canché, J. F., Farfán, R. M. y Montiel, G. (2009). Creencias y concepciones de los profesores: un estudio en un escenario virtual. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (1997). El papel de la Didáctica de la Matemática en el desarrollo del conocimiento práctico de los profesores. *Actas de las VIII JAEM* (pp. 171-175). Salamanca: Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años*. (Tesis doctoral). Sevilla: Universidad de Sevilla.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. Metodología de investigación y relaciones*. Huelva: Publicaciones Universidad de Huelva.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Huelva: Universidad de Huelva.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliviera, M.ª J. (2007). *Educación Secundaria Matemáticas 3*. Madrid: Anaya.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2007). *Educación Secundaria Matemáticas 1*. Madrid: Anaya.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2008). *Educación Secundaria Matemáticas 2*. Madrid: Anaya.

Collazos, C. A. y Mendoza, J. (2006). Cómo aprovechar el "aprendizaje colaborativo" en el aula. *Educación y educadores, 9*(2), 61-76.

Crespo, C. (2012). *La importancia de las diferentes formas de comunicación en el aula. Una experiencia orientada a su comprensión*. Buenos Aires: Instituto del Profesorado del Consudec.

De Prada, M.ª D., Alvalde, J. L. y Martínez, I. (1990). *El comentario de textos matemáticos: una experiencia de aprendizaje significativo*. Málaga: Ágora.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research.* Oxford: Holt, Rinehart y Winston. [Trad. castellana: El aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 1991].

Dodera, G., Burroni, E., Lázaro, P. y Piacentini, B. (2008). Concepciones y creencias de profesores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista Premisa de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, 10*(39), 5-26.

Esteve, J. M. (2009). La formación de profesores: bases teóricas para el desarrollo de programas de formación inicial. *Revista de educación, 350*, 15-29.

Fernández, S. (1994). Investigando en geometría. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2*, pp. 57-63.

Fernández, J. y Elortegui, N. (1996). Qué piensan los profesores acerca de cómo se debe enseñar. *Enseñanza de las ciencias, 14*(3), 331-342.

Fielker, D. S. (1987a). *Rompiendo las cadenas de Euclides*. Madrid: MEC.

Fielker, D. S. (1987b). Hexágonos, *Epsilon, 8*, 5-10.

Figueras, O; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y Sáiz, M. (2001). Diseño del proyecto *"Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en* matemáticas. Proyecto de investigación, modalidad grupal, co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) (con clave G37301-S).

Flores, A. H. (2007). La importancia de las definiciones: el caso de la geometría [Sesión de conferencia]. *Conferencia dada en el marco del Seminario de los Jueves en el Departamento de Educación Matemática del CINVESTAV-IPN*, febrero 2007. México: Ciudad de México. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/importancia%20de%20las%20definiciones.pdf

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada: Comares. Recuperado de http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Tesis/Tesis.pdf

Franchi, L. y Hernández, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, *8*(24), 63-71.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Gallego, A. y Martínez, E. (2003). Estilos de aprendizaje y e-learning: hacia un mayor rendimiento académico. *RED. Revista de Educación a Distancia, 7.* Recuperado de https://revistas.um.es/red/article/view/25411/24671

García, M. A. (2009). *Modelo para categorizar el contenido de la geometría de los sólidos en la ESO. Su aplicación a tres manuales escolares*. (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(*1), 85-116.

García, B. y Pineda, V. J. (2011). Evaluar la docencia en línea: retos y complejidades. *RIED. Revista iberoamericana de educación a distancia*, *14*(2), 63-76.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *21*(1), 27-47.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20,* 13-31.

Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico y J. Roldán (Eds.), *Congreso Nacional de Didácticas Específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258). Granada: Grupo Editorial Universitario.

González, E. (2006). *Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría de los sólidos a profesores de primaria en formación*. (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

Green, T.F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw Hill.

Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. (Tesis Doctoral). Valencia: Universidad de Valencia.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in threedimensional geometry. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 43-50). Valencia: Universitat de València.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. (Tesis doctoral). Valencia: Universitat de València. (Publicada en 1999. Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Valencia: Universitat de València).

Guillén, G. (1999). Una clasificación inclusiva de prismas cuadrangulares. Dificultades. *Actas de las IX as JAEM* (pp. 535-537). Lugo.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de magisterio. *Enseñanza de las ciencias*, *19*(3), 415-431.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, *16*(3), 103-125.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática, 17*(2), 117-152.

Guillén, G. (2006). *Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas*. Recuperado de http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM

Guillén, G., Corberán, R. M., Sáiz, M. y Figueras, O. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría al aula, en E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 247-255). Granada: Universidad de Granada.

Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta, En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 219-228). A Coruña: Universidade da Coruña,

Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso taller como técnica para la obtención de datos, En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), Investigación *en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 227-234). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Guillén, G., Figueras, O. y Corberán, R. M. (2004). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio. *Actas del XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática*. Universitat Jaume I. Castellón, 15-15 de septiembre de 2004.

Guillén, G., Figueras, O. y Corberán, R. M. (2006). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio. En J. V. Aymerich y S. M. Vives (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI. Actas del XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática* (pp. 215- 224). Castellón: Universitat Jaume I.

Guillén, G. y Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudio de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En F. Gil, J. D. Godino, M. F. Moreno y M. Socas (Eds), *Investigación en Educación Matemática. Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 183-188). Almeria.

Guillén, G. y Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. *Educación Matemática, 18*(3), 65-102.

Guillén, G. y Siñeriz, L. (2004). La enseñanza de resolución de problemas y de contenidos geométricos a partir de la construcción de triángulos. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 191-258). Valencia: PUV.

Guitert, M. y Pérez-Mateo, M. (2013). La colaboración en la red: hacia una definición de aprendizaje colaborativo en entornos virtuales. *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 14*(1), pp. 10-31.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En: J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 70-95). Cambridge, G.B: Cambridge U.P.

Hevia, A. S., Daroca, G. I. y De Lobato, C. B. (2007). *Cuaderno de estudio 1: Matemática*. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación.

Holmberg, B. (1989). *Theory and Practice of Distance Education*. Londres: Routledge.

Keegan, D. (1988). Theories of distance education, En D. Sewart, D. Keegan y G. B. Holmber (Eds.), *Distance Education: International Perspectives* (pp. 6-33). Londres: Routledge.

Kindt, M. (1993). Enfoque realista de la educación matemática. En A. Salar, F. Alayo, M. Kindt y L. Puig (1993), *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 4 (pp. 67-91). Zaragoza: ICE Universidad de Zaragoza.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lebrija, A., Flores, R. C. y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación matemática*, *22*(1), 31-55.

Lerman, S. (2006). Socio-Cultural Research in PME. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbokk of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 347-366). Sense Publisher : UK.

Levinson, P. (1989): Media relations: Integrating computer telecommunications with educational media. En R. Mason y A. Kaye (Eds.), *Mindweave: Communication, computer, and distance education* (pp. 40-49). Oxford: Pergamon Press.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.

Llinares, S. (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria. En J. Jiménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática* (pp. 13-36). Granada: Mathema.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao 1999* (pp.109-132). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Recuperado de http://hdl.handle.net/10045/857

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (Student) Teachiers and Teacher Educators as Learneres. En A. Gutiérrez y P. Boero, P. (Eds.), *Handbokk of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 429-160). Sense Publisher : UK.

Llorente, M. del C. (2006). El tutor en E-learning: aspectos a tener en cuenta. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 20*. Recuperado de https://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/517/250

López, L. (2009). *La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria*. (Trabajo de investigación para obtener el Diploma de Estudios Avanzados). Valencia: Universitat de València.

López, L. y Guillén, G. (2009). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre Competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. Estudio Exploratorio. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 273- 283). Santander: SEIEM.

Maldonado, M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus, 13*(23), 263-278.

Martínez, O. J. (2013). Las creencias en la educación matemática. *Educere, 17*(57), 235-243.

Martínez, M. y Gorgorió, N. (2004). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista electrónica de investigación educativa, 6(*1). Recuperado de https://redie.uabc.mx/redie/article/view/93

Mason, R. (1991). Moderating educational computer conferencing. *Deosnews*, *1*(19). Recuperado de http://www.emoderators.com/papers/mason.html

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Mochón, S. y Morales, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación matemática, 22*(1), 87-113.

Mora, J. A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 3*, 101-115.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G. y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de psicología, XXVI*(2), 299-334.

Moreno M. y Azcárate C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las ciencias, 21*(2), 265 – 280.

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, *15(1)*, 5-19.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2013). Identificación de figuras geométricas en fotografías de objetos reales. Un estudio con maestros en formación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 105-122.

Olvera, F. J. (2013). Comunidad de profesores. Un estudio de desarrollo profesional para aprender geometría de los sólidos a partir de la práctica. (Tesis doctoral). México: Distrito Federal: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Ordoñez, C. L. (2004). Pensar pedagógicamente desde el constructivismo. De las concepciones a las prácticas pedagógicas. *Revista de Estudios Sociales, 19*, 7-12.

Pajares, M. F. (1992). Teacher`s beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Park, S. y Oliver J. S. (2008). Revisiting the Conceptualisation of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a Conceptual Tool to Understand Teachers as Professionals. *Research in Sciences Education*, *38*, 261-284.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of Space and Students' conceptions at High School Level. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 575-593.

Perera, V. H., y Torres, J. J. (2005). Una aproximación al estado actual de las investigaciones sobre la comunicación mediada por ordenador en el ámbito educativo. V Congreso Internacional Virtual de Educación, Facultad Ciencias de la Educación. Sevilla Universidad de Sevilla. Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/24572/Documento_completo.pdf ?sequence=1&isAllowed=y

Perez, R. (1994). Construir la geometría. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2*, 65-80.

Pérez, S. (2006). *Algunos resultados sobre la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Estudio exploratorio* (Trabajo de investigación del Programa de Doctorado). Valencia: Universitat de València.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En Bolea, P.; Camacho, M. y Flores, P. (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 295-305). Tenerife: Universidad de La Laguna.

Pérez, S. y Guillén, G. (2008). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho,

M. y Blanco, L. J. (eds). *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) (*pp. 307-319). Badajoz: SEIEM.

Piaget, J. (1970). Piaget's Theory. En P. H. Mussen (Ed.), *Carmichael's Manual of Child Psychology, 1* (pp. 703-732). New York: Wiley.

Pinto, J. E. y González, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática, 20*(3), 83-100.

Pinto, J. E. y González, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática, 20*(3), 83-100.

Ponte J. P. (1994). Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (Ed.), *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth internacional conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education* (pp. 169-177). Pavia: University of Pavia.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. En J. P. Ponte, A. Boavida, M. Graça, y P. Abrantes, Didáctica da matemática. (P. Flores, Trad., pp. 1-25). Lisboa - Portugal: Ministerio da Educação. Departamento do Ensino Secundario. Recuperado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-sp/Dinamica.pdf

Porlán, R. (1993). *Constructivismo y escuela: hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*. Sevilla: Díada.

Porlán, R. y Martín, J. (1994). El saber práctico de los profesores especialistas. Aportaciones desde las didácticas específicas. *Investigación en la Escuela, 24*, 49-58.

Porlán, R., Rivero, A. y Matín, R. (1998). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores, II: Estudios empíricos y conclusiones. *Enseñanza de las ciencias, 16*(2), 271-288.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for the Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172.

Rey, J. L. (2004). Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuando los modelos ayudan, pero no tanto. *Premisa, 6*(22), 3-12.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de curriculum y formación de profesorado, 8*(1), 1-15.

Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori y el ICE de la Universidad de Barcelona.

Rico, L. y Flores, P. (1997). Didáctica de la matemática y formación del profesorado. En M. Fernández y C. Moral (Eds.), *Formación y desarrollo de los profesores de Educación Secundaria en el marco curricular de la reforma. Los retos profesionales de la nueva etapa* (pp. 63-75). Granada FORCE y Grupo Editorial Universitario.

Ribeiro, C. M., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación matemática, 22*(2), 123-138.

Romaguera, E. (1996). Matemàtiques: Ensenyament Secundari Obligatori (E.S.O.). Picassent (Valencia): El autor, D. L.

Rubio, M. J. (2003). Enfoques y modelos de evaluación del e-learning. RELIEVE, v. 9, n. 2, p. 101-120. Recuperado de http://www.uv.es/RELIEVE/v9n2/RELIEVEv9n2_1.htm

Russell, B. (1983). *El conocimiento humano*. Barcelona: Orbis.

Sánchez, J. A. M. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas, 3*, 101-115.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (pp. 321-354)*. Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Smith, D. C. y Neale, D. C. (1989). The construction of subject matter knowledge in primary science teaching. *Teaching and teacher Education, 5*(1), 1-20.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori y el ICE de la Universidad de Barcelona.

Thompson, A. G. (1992). Theacher´s beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws, (ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Traver, J. A., Sales, A., Doménech, F. y Moliner, O. (2005). Caracterización de las perspectivas docentes del profesorado de secundaria a partir del análisis de las variables educativas relacionadas con la acción y el pensamiento docente. *Revista Iberoamericana de Educación, 36*(8), 1-18. Recuperado de https://doi.org/10.35362/rie3682781

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project)*. Dordrecht: D. Reidel.

Vicente, L. (1995). *Palabras y creencias*. Murcia: Universidad de Murcia.

Vila, A. (2001). Resolució de Problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemas. (Tesis doctoral). Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Vinner, S. (1976). The naive concept of definition in mathemetics. *Educatíonal Studies in Mathematics*, 7(4), 413-429.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65- 81). Dordrecht: Kluwer,

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 83*(1), 20-25.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Bellón. M. y Hervás, J. C. (2007). *Matemáticas 3 ESO Esfera*. Alcobendas (Madrid): SM.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity. Cambridge. Cambridge University Press*. [Edición en español: Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad. Barcelona. Paidós (1998)]

Woods, P., Jeffrey, B., Troman, G. y Boyle, M. (1997). *Restructuring Schools, Reconstructing Teachers*. Buckingham: Open University Press.

Zapata, M. A., Blanco, L. J. y Contreras, L. C. (2008). Los estudiantes para profesores y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 12*(4), 109-122. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/2170/217014941010.pdf

ANEXOS

ANEXO 1

PROBLEMAS EN CONTEXTO DESARROLLADOS EN LOS CURSOS

En este anexo mostramos los problemas en contexto señalados el subapartado 1.6.2.3 del capítulo 1 que se han llevado a cabo en los cursos de nuestra investigación. Cabe señalarse que en los cursos presencial y online se han realizado los cinco problemas mientras que en el curso en comunidad solo los problemas P1 y P5. Estos problemas se han planteado para estudiar las estrategias aplicadas por cada uno de los/as docentes participantes, analizar cómo se finaliza el problema y si se discute el sentido que se le da a la solución.

S-TCg1- P1

Una caja como las que se usan con frecuencia para envasar alimentos o artículos de tocador o de farmacia es la representación o el "modelo" de uno de los poliedros más "conocidos": el prisma recto rectangular. Responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Es un poliedro? ¿Por qué?
b) ¿Qué tienen en común la base y una de las caras laterales?
c) ¿Cómo son entre sí dos caras laterales no consecutivas?
d) ¿Qué tienen en común la base y dos caras laterales consecutivas?
e) ¿Cuántos ángulos diedros se distinguen en la caja? Explique brevemente cuales son.
f) ¿Y cuántos ángulos triedros? Explique brevemente cuales son.
g) ¿Por qué al nombre de "prisma" se agregan los calificativos "recto" y "rectangular"?

Figura A1.1. Tomado de Hevia et al. (2007, p. 200).

S-TCg1-P2/S-TEcg2-P2

Con motivo del quincuagésimo aniversario del Colegio los alumnos han decido realizar diversas exposiciones. Ya que el director del Centro es un amante de las formas regulares, los alumnos de 3º de la ESO han pensado que podían poner en la exposición todos los prismas y pirámides de caras regulares que hay, pero resulta que no se pueden de acuerdo ¿Les podría usted echar una ayuda?

Conteste a las siguientes preguntas:

1) a) ¿Cuántos prismas de caras regulares hay? ¿Cuáles?
   b) ¿Cuántas pirámides de caras regulares hay? ¿Cuáles?
2) ¿Cómo les explicaría a sus alumnos/as los pasos a seguir para llevar a cabo la resolución de las preguntas anteriores? Explíquelas por separado.

Figura A1.2. Adaptado de Guillén (1997)

S-TCg1- P3/S-TEcg2-P3

Una fábrica de cosméticos pretende lanzar al mercado una nueva marca de sales de baño. La imagen de la marca del producto tiene como fuente de inspiración el Oriente. Así, la forma del embalaje deberá combinar el exotismo de la fragancia y el propio nombre que la identifica. La fábrica ha sacado a concurso el proyecto del embalaje el cual debe de cumplir los siguientes requisitos:

- El embalaje, que tiene que ser de vidrio delicado, deberá tener un formato adecuado a las características exóticas del perfume de las sales de baño.
- La forma del embalaje deberá permitir un empaquetamiento fácil de varias unidades en cajas, teniendo en cuenta las perspectivas de envío del producto en grandes cantidades.
- Cada embalaje deberá tener una capacidad comprendida entre 270 y 540 centímetros cúbicos.
- El coste del material ha de intentar que sea el mínimo posible.

Conteste a las siguientes preguntas:

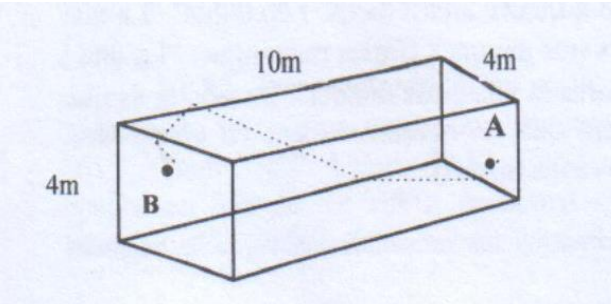
1) Elabore un breve informe en que presente a la fábrica de cosméticos el embalaje que considere más adecuado y el nombre que le pondría, de modo que convenza al cliente de las ventajas de la solución que propone con base a los estudios realizados y que cumpla los requisitos planteados.

2) ¿Cómo les explicaría a sus alumnos los pasos a seguir para llevar a cabo el diseño del embalaje presentado cumpliendo las condiciones planteadas?

Figura A1.3. Tomado de Ponte et al. (1997, p.79)

S-TCg1- P4/S-TEcg2-P4

Una habitación tiene 10 m de longitud, 4 m de anchura y 4 m de altura. En el punto A, a medio metro del piso, hay un enchufe. Si es preciso conectar el enchufe a una bombilla situada en B, que está a medio metro del techo y en la pared de frente, ¿Cuál es la mínima cantidad de cable que se utilizará? (El cable no se puede colocar por el aire).



Conteste a las siguientes preguntas:

1) ¿Cuál es la mínima cantidad de cable que se utilizará si el cable no se puede colocar nada por el aire? Explique cómo lo halla.

2) ¿Cómo les explicaría a sus alumnos los pasos a seguir para llevar a cabo la resolución de este problema?

Figura A1.4. Tomado de Romaguera (1996, p. 50)

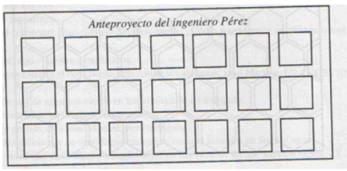
S-TCg1- P5/S-TEcg2-P5

Los paneles de cera de las colmenas, cuya forma es tan celebre, han maravillado durante mucho tiempo a los hombres por su perfecta regularidad geométrica y por todas las ventajas prácticas que presentan.

Se pregunta uno como las abejas, que no han estudiado geometría, pueden realizar este trabajo. Los que los biólogos no dicen nunca (sin duda porque no lo saben) es que las abejas dudaron mucho tiempo antes de decidirse a adoptar para sus celdillas la forma hexagonal.

Pues bien, hace mucho tiempo antes de hacer construir sus celdillas, y no sabiendo cómo hacerlo, la Reina hizo llamar al ingeniero Pérez y le expuso el problema.
Es muy simple dijo Pérez, después de haber reflexionado largo tiempo, yo os haré un plano.

El hizo el siguiente plano:



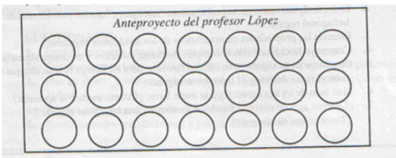
El ingeniero esperaba verse felicitado por su obra, pero fue todo lo contrario.
¿Qué vamos a hacer con todo ese espacio entre las celdillas? Dijo la Reina muy descontenta. ¿No os dais cuenta de la cantidad de cera que mis obreras van a verse obligadas a desperdiciar para fabricar los muros?

El ingeniero se marchó muy disgustado y la Reina dio órdenes para que mandaran llamar al profesor López, un sabio muy célebre, porque había descubierto que, mezclando agua caliente y agua fría, se obtenía el agua tibia, un hallazgo sensacional, empleado todavía en nuestro tiempo.

Cuando la Reina le hubo explicado su deseo, el profesor López frunció el ceño y dijo:

¡Ajá! Esto no es demasiado complicado. Os haré un plano.

Y dibujo el siguiente plano:



Creía orgullosamente que todas las abejas iban a extraviarse, pero... ¡profundo error!

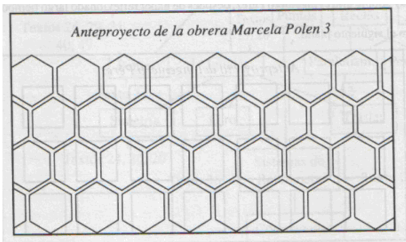
La Reina, visiblemente contraída, le dijo:

¿No os dais cuenta del espacio vacío dentro de las celdillas? Estos ángulos muertos no servirán para nada. Yo quiero una cosa más funcional. Y, además ¡no es por contrariaros!, pero no es estético.

El profesor se alejó disgustado y la Reina se apresuraba a llamar a…., cuando una obrera se levantó y dijo:

Un momento, majestad, creo que he encontrado la solución.

La obrera acababa de inventar la celdilla hexagonal.



Y la Reina encontró el panal muy bonito, muy apropiado a su función y muy económico.

Había suficiente lugar para las larvas y, sin embargo, pocos o ningún ángulo muerto. Las paredes resultarían sólidas sin necesitar demasiada cera.
Bien era realmente un triunfo.

Y este fue el invento de las abejas que todos los profesores y todos los ingenieros del mundo copian a falta de poder hacerlo mejor.

1) ¿Se ha preguntado alguna vez por qué las abejas construyen sus panales con la característica forma hexagonal? Explique alguna razón por la cual le parece "inteligente" que los paneles sean de forma hexagonal.
2) ¿Cómo les explicaría a sus alumnos que la abeja obrera tenía razón sobre los proyectos de Pérez y López?

Figura A1.5. Problema de la colmena. Tomado de De Prada, Alvalde y Martínez (1990, pp. 59-60)

Los problemas P2, P3, P4 y P5 fueron complementados con las siguientes preguntas en los cursos presencial y online.

3) ¿Cómo le ha parecido este problema para llevarlo al aula de secundaria? ¿Por qué?
4) ¿Lo llevaría a partir de ahora al aula? ¿Por qué?
5) ¿Qué contenidos de geometría cree usted que se podrían tratar con este problema? ¿Por qué?
6) ¿Qué piensa que sería más conveniente explicar antes los contenidos geométricos y después llevar a cabo el problema o plantear el problema y a partir de él explicar los contenidos geométricos? ¿Por qué?
7) ¿Qué preguntas le haría usted a los alumnos a partir de este problema?
8) ¿Qué le ha llamado la atención de este problema?

Figura A1.6. Preguntas para los problemas P2, P3, P4, P5

ANEXO 2

TAREAS GUILLÉN (1997) DESARROLLADAS EN EL CURSO EN COMUNIDAD

En el apartado 1.6.3.1 del capítulo 1 hacemos referencia a que Guillén (1997) propone una serie de tareas para que los estudiantes amplíen los objetos mentales que constituyen para los objetos geométricos relativos a los sólidos y desarrollen su nivel de razonamiento. En este anexo mostramos las tareas que hemos planteado en el curso en comunidad como soporte para que los/as profesores/as participantes informaran sobre cómo llevan a cabo la enseñanza de la descripción, la clasificación y el establecimiento de relaciones en sus clases.

1. Tareas sobre la enseñanza de la descripción y el establecimiento de relaciones

- Tarea T-0d: Introducción al estudio

  T-0d-1 **(**Guillén 1997, pp. 148-149 (T-1))

  Se dispone de una gran variedad de objetos del entorno del estudiante (pelotas, cajas de cerillas, cubos de pintura, botes de conserva, cajas de refrescos, lápices, cucuruchos, tambores, etc.).

  a) Se pide que se nombre cada uno de esos objetos.

  b) Se centra la atención sobre una familia de sólidos y se pide que se separen todos los objetos que tengan la forma de la familia considerada.

  c) Se centra la atención sobre los objetos que no corresponden a determinadas familias de sólidos. Después se pide que, si son ejemplos de otra familia conocida, se nombre la familia de la que son ejemplos.

  d) Centrar la atención en edificios y objetos del entorno del estudiante y pedir que se busquen entre ellos los que pueden ser ejemplos de las familias de sólidos tratadas en las actividades anteriores.

  T-0d-2 (Guillén 1997, p. 149 (T-2))

  a) Presentar pares de ejemplos de una familia de sólidos dada (puede ser el cubo, la pirámide, la esfera, el cilindro, el cono, el ortoedro, el romboedro u otro prisma) y después pares de modelos formados por un ejemplo y un no ejemplo. Pedir que se comente lo que tienen de parecido y lo que los diferencia.

  b) Presentar ejemplos y no ejemplos de una familia de sólidos de las indicadas en la actividad T-0d-2a. En primer lugar, se muestran pares de modelos. Después se muestran más de dos modelos. Pedir a los estudiantes que nos cuenten cuándo un modelo es un ejemplo de la familia considerada.

T-0d-3 (Guillén 1997, pp.149-150 (T-3))

a) Los estudiantes disponen de troquelados, de polydron de plastilina y de varillas. Mostrar cómo utilizar los materiales para construir modelos o armazones de sólidos. Pedir a los estudiantes que utilicen estos materiales para hacer construcciones o modelos de sólidos.

b) Cuestionar el tipo de polígonos que se tienen que seleccionar para construir un modelo dado (ejemplo de alguna de las familias de sólidos de las indicadas en la actividad T-0d-2a) y cuántos se han necesitado de cada tipo.

c) Después de haber construido varios modelos o armazones de varios ejemplos de una familia de sólidos dada, pedir a los estudiantes que expresen una "idea" de esta familia.

d) Se dispone de varios cubos multilink. Pedir que se construyan formas sólidas utilizando ese material. Luego pedir que se construyan modelos de ortoedros concretos de los que los estudiantes disponen del modelo para observarlo.

e) Pedir que utilizando plastilina se modele un tubo (un cilindro) y que se explique cómo se tienen que hacer cortes en él para obtener un prisma.

f) Se dispone de cubos de estyropor. El profesor hace un corte en uno de ellos, utiliza témperas para pintar la cara del sólido que se obtiene con el corte, y hace estampaciones en papel con la cara que ha pintado (la que ha obtenido con el corte). Luego cuestiona: ¿Qué forma tiene la cara del cubo que he pintado? ¿Qué forma se obtiene al estampar la cara en papel?

Pedir que se intente repetir la actividad: hacer cortes en el modelo, pintura de la cara obtenida, estampaciones en el papel, descubrir el nombre de la figura plana que se obtiene.

T-0d-4 (Guillén, 1997, p. 156 (T-1))

a) Presentar ejemplos y no ejemplos para introducir la familia de sólidos considerada (cubo, ortoedro, romboedro o pirámide).

b) Pedir que se busquen objetos en el entorno que sean ejemplos de la familia introducida.

c) Pedir que se construyan varios ejemplos de la familia introducida utilizando diferentes materiales (troquelados, polydron, varillas, plastilina).

d) Pedir que se determine la forma de las caras de ejemplos de la familia introducida y que se cuente el número de caras, vértices y aristas. Apuntar que, para hallar estos números, se pueden deshacer los modelos o armazones de los sólidos considerados.

Pedir que se rellene la tabla siguiente y que se expliquen los nombres que hemos dado a las pirámides en ella.

	Forma base	Nº de caras	Nº de Vértices	Nº de aristas
Pirámide triangular				
Pirámide triangular				
…				

e) Pedir que se determinen analogías y diferencias entre varios modelos construidos con diferentes materiales que corresponden a un mismo ejemplo de una familia de sólidos.

f) Pedir que se determinen las analogías y diferencias de ejemplos de la familia introducida con ejemplos de familias estudiadas previamente. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes:

¿Qué te llama la atención de un modelo y no del otro? ¿Qué polígonos tienes que seleccionar para construirlos? ¿Cuántos en cada caso? ¿Cuántas varillas necesitas para construir el armazón en cada caso? ¿Y cuántas bolitas? ¿Puedes construirlos con cubos multilink? ¿Qué tienen en común los sólidos seleccionados? ¿En qué se diferencian?

Para las pirámides pedir también que se enumeren analogías y diferencias entre pares de ejemplos de pirámides.

g) Se introduce el concepto de desarrollo (la red) de un sólido y se pide que se construyan varios desarrollos de ejemplos de las familias de sólidos tratadas, deshaciendo los modelos correspondientes.

h) Repartir un cubo en el que se han señalado los puntos sólo en algunas caras y varios desarrollos de él. Pedir que se complete la numeración del cubo y la numeración en su desarrollo. Apuntar que se pueden doblar los desarrollos para responder a esta actividad.

T-0d-5 (Guillén, 1997, p. 158 (T-2))

a) Pedir que se clasifiquen una gran variedad de modelos de sólidos, entre los cuales hay varios ejemplos de cada una de las siguientes familias: poliedros, cilindros, conos y esferas.

Pedir que se clasifique una colección de sólidos por el número de vértices y cuestionar en qué familia de las establecidas hay que incluir los cubos, ortoedros, las pirámides, los cilindros, conos y esferas. Apuntar que para responder se pueden desmontar los modelos y los armazones de los sólidos.

Pedir que se clasifiquen también los sólidos por el número de aristas.

b) Pedir que se recojan los resultados de la actividad T-0d-5a en la tabla siguiente.

	Sólido	Varias aristas	Varios vértices	Dos aristas	Una arista	Un vértice	Sin aristas	Ningún vértice
Cubos								
Ortoedros								
Pirámides								
Cilindros								
Conos								
Esferas								

c) Al igual que en la tarea T-0d-4, para las familias del cilindro, el cono y la esfera, plantear actividades de búsqueda de ejemplos en el entorno; de identificación de ejemplos y no ejemplos de algunos modelos con caras planas y curvas y de modelado de algunos ejemplos.

T-0d-6 (Guillén, 1997, pp. 158-160 (T-3))

a) Para pares de ejemplos de las diferentes familias de sólidos curvos, pedir que se enumeren analogías y diferencias funcionales o basadas en su percepción global, en atributos visuales o en los tipos de caras que los forman. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes.

   Explica las ventajas e inconvenientes que tienen el cucurucho y el vasito como moldes para presentar los helados. Trata de dar una explicación al hecho de que las canicas tengan forma de esfera en vez de tener forma de cilindro o cono, y al hecho de que los botes de leche pueden tener forma de los bricks y de cilindro, pero no tienen forma de esfera. Explica si sería una buena idea que los rodillos de cocina tuvieran forma de esfera, o de cono, en vez de cilindro.

   Explica cómo puedes cortar un cilindro para obtener dos, cuatro, o más cilindros. ¿Cuántos conos obtienes si en uno de ellos haces lo mismo que en el cilindro? ¿Qué ocurre si haces lo mismo con la esfera?

b) Transformar sólidos con caras curvas en poliedros. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes:

   Pedir que se modelen cilindros y esferas con plastilina, que se remodelen los bordes, o que se hagan los cortes necesarios para conseguir ejemplos de las familias consideradas en la tarea T-0d-4.

   Cuestionar cómo han de quedar las caras de estos ejemplos y si en el proceso tienen que aparecer vértices o aristas nuevos o desaparecer alguno(a) de los(as) que tenía el sólido de partida.

c) Pedir que se indiquen analogías y diferencias de los sólidos redondos con ejemplos de las familias tratadas en la tarea T-0d-4. Dirigir la actividad con cuestiones como las siguientes.

Trata de explicar por qué un cilindro o un cono ruedan mejor que un cubo o una pirámide y por qué una esfera rueda mejor que un cilindro o un cono.

Para ejemplos de pares de las familias tratadas discutir si éstos serían buenos como ladrillos para hacer una pared y si con ellos se podría rellenar completamente una caja (sin dejar ningún hueco).

Centrar la atención en que con troquelados y polydron se pueden construir ortoedros y pirámides, pero no se dispone de piezas adecuadas para construir esferas, cilindros o conos. Pedir que se establezcan diferencias entre pares de sólidos, relativas al tipo de caras (planas o curvas, que son polígonos o no) o de aristas (rectas o curvas).

d) Establecer las familias de sólidos con caras o aristas curvas y los poliedros. Al igual que en la tarea T-0d-4, para los sólidos que tienen superficies planas y los que tienen alguna cara curva, así como para los que tienen aristas rectas y los que tienen alguna arista curva, plantear actividades de búsqueda de ejemplos del entorno y de identificación de ejemplos y no ejemplos.

T-0d-7 (Guillén, 1997, p. 160 (T-4))

a) Presentar ejemplos y no ejemplos de "sólido" y pedir que se precise una idea de sólido y de sus elementos. Plantear también la actividad para "poliedro". Apuntar que se pueden apoyar en la construcción y pueden hacer dibujos para expresar las ideas.

b) Dar una idea de sólido y de los elementos que lo componen y pedir que se compare esta idea con la que han indicado en T-0d-4a.

   Plantear también la actividad para "poliedro".

c) Pedir que se recopile en una tabla (en la que se dan los encabezamientos) el tipo de caras (si son planas o curvas y si son círculos o no) y el número de caras, vértices y aristas del cilindro, cono y esfera.

T-0d-8 (Guillén, 1997, pp. 160-161 (T-5))

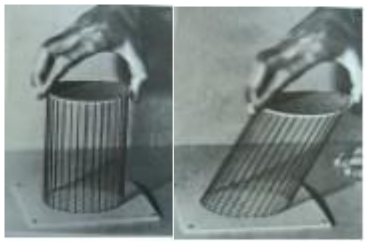
a) Mostrar ejemplos y contraejemplos de prismas (antiprismas) en la posición estándar y en otras posiciones y pedir que se busquen objetos en el entorno que sean ejemplos de la familia introducida. Pedir también que se identifiquen el cubo, el ortoedro y el romboedro (el octaedro y otras bipirámides de caras iguales) como ejemplo o no ejemplo de prisma (antiprisma).

b) Pedir que de entre una gran variedad de modelos de sólidos (de prismas, antiprismas, pirámides, bipirámides...) se seleccionen los modelos de la familia introducida y dentro de estos los ejemplos que se pueden construir utilizando material comercializado formado por polígonos.

c) Para alguno de los modelos que se han seleccionado en T-0d-8 como ejemplo de la familia introducida que se pueden construir con material comercializado, pedir que se construyan y que se indiquen los polígonos que se tienen que seleccionar para ello.

d) Presentar el procedimiento que describe Castelnuovo (1979) para obtener *prismas oblicuos* a partir de prismas rectos.

A partir de la unidad base que sugiere Castelnuovo (1979, p. 214)., esto es, utilizando gomitas (liguillas) y dos círculos iguales de cartulina dura podemos obtener cilindros oblicuos a partir de cilindros rectos. La figura ilustra el proceso.



Presentar también un experimento análogo para introducir los antiprismas oblicuos y las pirámides oblicuas.

e) Mostrar polígonos y cuestionar si pueden ser caras de un prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) y cuántos como mucho se tendrían que elegir como ellos para construir el modelo. Plantear también cuestiones como las siguientes.

Un prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) ¿puede tener sólo 1 cara triangular (cuadrada, rectangular)? ¿Y puede tener sólo 2 caras triangulares (cuadradas, rectangulares)? ¿Y más de dos?

Un prisma (antiprisma, pirámide o bipirámide) ¿puede tener sólo 1 cara como la de la figura ? ¿Y puede tener dos caras como ésta? ¿Y más de dos caras?

Para las bipirámides remarcar que sus caras son todas ellas triángulos.

- Tarea T-1d: Descripción de los poliedros a partir de construcciones (Guillén, 1997, pp. 211-212 (T-1))

Dar a los estudiantes materiales comercializados (polydron o creator, troquelados y varillas). Pedir que con ellos hagan construcciones. Seleccionar ejemplos del prismas (antiprismas, pirámides o bipirámides) y para ellos plantear cuestiones como las que siguen:

a) ¿Qué polígonos tenemos que elegir para construir este modelo?

b) Fíjate en una cara ¿Qué caras la bordean? Elige otra cara de este modelo ¿Qué caras la bordean?

c) ¿Cuántas caras se juntan en un vértice de este modelo? ¿Qué polígonos se juntan en él? Elige otro vértice ¿Se juntan en él los mismos polígonos que en el otro?

d) Plantear la actividad anterior para una arista.

- Tarea T-2d: La utilización de modelos y ejemplos para la descripción (Guillén, 1997, pp. 211-212 (T-3))

  Poner a disposición de los estudiantes una variedad de modelos de poliedros y de no poliedros.

  a) Mostrar un ejemplo de una familia de sólidos (los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides) y pedir que se seleccionen otros ejemplos de la misma familia. Pedir también que se explique que los modelos pertenecen a la familia en cuestión.

  b) Mostrar modelos de familias muy específicas (que pertenecen además a otras familias incluidas en la familia considerada), colocados en la posición estándar y en otras posiciones. Para cada modelo cuestionar si pertenece o no a una familia dada y pedir también que se explique la respuesta. Por ejemplo, el cubo (o un prisma de caras regulares) se cuestiona si es o no ejemplo de prisma.

     Para el cono, el cilindro, la esfera y para poliedros que no sean familiares a los niños, que tengan por caras polígonos irregulares, preguntar si son poliedros.

  c) Mostrar modelos de las siguientes familias: prisma oblicuo, prisma de caras regulares, cubo, antiprisma, octaedro, romboedro. Colocarlos en la posición estándar y en otras posiciones y pedir que se identifiquen en cada caso las familias a la que pertenece el modelo y que se explique la respuesta. Apuntar que el modelo puede pertenecer a varias familias y que si esto ocurre se indiquen todas las familias a las que pertenece.

  d) Pedir que se enumere todas las familias de poliedros que se conozcan.

- Tarea T-3d: Asociar figuras a familias (Guillén, 1997, p. 213 (T-4))

  Dar una hoja con figuras de varios ejemplos de poliedros y no poliedros, de manera que cada dibujo tenga asociado un número y debajo de él haya un recuadro en el que el estudiante puede escribir. Indicar también las abreviaturas que se asocian a cada una de las familias de sólidos que se tienen que considerar.

  a) Pedir que en el recuadro que corresponde a cada dibujo se pongan las abreviaturas de las familias de las que son ejemplos. Indicar que en el recuadro se pueden escribir varias letras, porque la figura puede corresponder a ejemplos de varias familias, y que, si las figuras son ejemplos de prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides, se marque(n) la(s) cara(s) que corresponde(n) a la(s) base(s).

  b) Pedir que se escriban los números de las figuras que corresponden a una familia de sólidos dada y que se explique su respuesta.

  c) Seleccionar algunos dibujos de las láminas y cuestionar, por turno, si corresponden a ejemplos de una familia de sólidos dada.

- Tarea T-4d: Indicar familias y enumerar propiedades (Guillén, 1997, p. 213 (T-5))

a) Pedir que se indiquen familias de sólidos que tienen todas las caras planas y familias de sólidos que tienen alguna cara curva.

b) Pedir que se indiquen familias de sólidos que tienen todas sus aristas rectas, familias de sólidos que tienen alguna arista curva y sólidos que no tienen aristas.

c) Plantear las siguientes preguntas:
¿Qué sólidos tienen vértices en los que se juntan varias caras? ¿Qué sólidos tienen un vértice en el que concurre sólo una cara? ¿Qué sólidos no tienen vértices?

d) Pedir que se enumeren propiedades que tienen que tener todos los poliedros.

e) Pedir que se enumeren propiedades de los conos, de los cilindros y de la esfera.

f) Pedir que se intente expresar lo que es una cara, una arista y un vértice de un poliedro.

- Tarea T-5d: Construcciones y secciones de poliedros (Guillén, 1997, p. 214 (T-6))

a) Seleccionar una familia de sólidos dada, por ejemplo, la familia de los prismas, y para ella plantear cuestiones como las que siguen: Para construir un prisma, ¿se pueden utilizar hexágonos (cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos)? ¿Cuántos? ¿Qué polígonos se pueden utilizar? ¿Cómo hay que juntarlos para que se obtenga un prisma?

b) Seleccionar una familia de sólidos. Pedir a los estudiantes que nos indiquen las instrucciones que le darían a un amigo para que éste pueda construir diferentes ejemplos de la familia señalada. Hacer notar que el amigo no conoce la familia que estamos considerando, pero tiene material comercializado y sabe cómo utilizarlo. Apuntar también que para dar las instrucciones que envían al amigo pueden apoyarse en los modelos que son ejemplos de la familia señalada.

c) Cuestionar cómo hay que hacer los cortes en un modelo de cilindro, del que se muestra el modelo, para conseguir un prisma recto (oblicuo o cóncavo) a partir de él.

Preguntar por la forma del polígono obtenido como sección, y la forma de los sólidos que obtenemos, al truncar prismas y cilindros con cortes paralelos a las bases.

Cuestionar cómo hay que hacer los cortes en los prismas para obtener otros prismas que tengan las mismas bases pero que su altura sea menor.

d) Repartir varios polígonos congruentes y pedir que con ellos se construyan prismas rectos con la misma base y diferente altura. Ídem para los prismas oblicuos.

Seleccionar varios prismas que tienen la misma base pero que son rectos u oblicuos o tienen diferente altura. Pedir que peguen unos con otros de manera que las bases ajusten completamente. Preguntar si en todos los casos se obtienen nuevos prismas. Pedir que se señalen qué casos llevan a modelos resultantes que sí son ejemplos de prisma y cuál es la altura de ellos.

e) Pedir que se explique cómo le contarían a un amigo lo que es un prisma. Y lo mismo para otras familias de sólidos (por ejemplo, un antiprisma, una pirámide o para una bipirámide).

- Tarea T-6d: Elementos, paralelismo y perpendicularidad en los sólidos (Guillén, 1997, p. 212 (T-2))

a) Para un prisma recto colocado en la posición estándar (apoyado sobre la cara base) pedir que se señalen dos caras (aristas) paralelas. Pedir que se seleccione otra cara (arista) y se muestren todas las caras (aristas) que sean paralelas a ella.

b) Repetir la actividad T-6d-a cuando el prisma recto se coloca en posiciones no-estándar y para prismas oblicuos que se colocan en diferentes posiciones.

c) Repetir la actividad T-6d-a y T-6d-b preguntando sobre la perpendicularidad de las caras (aristas).

- Tarea T-7d: Elementos figuras planas y poliedros (Guillén, 1997, pp. 214-216 (T-7))

Dar una hoja con figuras de varios ejemplos de polígonos de manera que cada dibujo tenga asociado un número.

a) Pedir que señalen los ángulos de las figuras de la hoja.

Pedir que se dibujen las diagonales de las figuras.

b) Seleccionar algunos polígonos de la lámina cuyos ángulos midan 60°, 90° o un múltiplo de éstos. Para ellos pedir la medida de sus ángulos.

c) Pedir que se indique la idea que se tiene sobre ángulo de un polígono y sobre diagonal de un polígono.

d) Dar como idea de ángulo de un polígono la que los ve como "el espacio comprendido entre dos lados que forman un vértice". Apuntar también que usualmente consideramos como ángulo de un polígono el que queda sobre él y al que queda fuera de él se le llama ángulo exterior del polígono. Y dar como idea de diagonal de un polígono la que la ve como "segmento que une vértices que no son vecinos".

Pedir que respondan de nuevo a las actividades T-7d-a y T-7d-b

e) Indicar que, en los poliedros, como están formados por polígonos, tenemos los ángulos de estos polígonos, que usualmente se llaman ángulos de las caras. Utilizar material comercializado para introducir los ángulos diedros y los ángulos de los vértices. Pedir que bien utilizando modelos del entorno (por ejemplo, la puerta y la pared, la esquina de la clase), o material comercializado, se muestren diferentes ángulos diedros y diferentes ángulos de los vértices.

Pedir que se den ideas sobre los diferentes tipos de ángulos de los sólidos.

f) Apuntar que los sólidos, además de diagonales de las caras, tienen otro tipo de diagonales, que llamamos diagonales del espacio. Pedir que en un modelo abierto de un sólido se introduzcan las varillas que según ellos representan las diagonales del espacio.

   Si es necesario poner un ejemplo y un no ejemplo de diagonal del espacio del modelo considerado. Pedir que se indique una idea sobre diagonal del espacio.

g) Pedir que se dé una idea sobre caras iguales y sobre vértices iguales. Apuntar que pueden utilizar material comercializado o dibujos y apoyarse en ellos al explicar las respuestas.

   Cuestionar si son iguales o no diferentes tipos de rectángulos (triángulos).

   Para cada uno de los modelos siguientes, cuestionar si sus vértices son iguales o no: el cubo, un prisma de caras regulares, el romboedro y un prisma cóncavo.

- Tarea T-8d: Descripción de sólidos y poliedros. Propiedades (ahondando en la descripción y clasificación) (Guillén, 1997, p. 234 (T-1))

a) Utilizar modelos y armazones de sólidos para centrar la atención sobre las aristas y los vértices. Preguntar que cuántos polígonos los forman, si los vértices de los poliedros pueden formarse con 3, 4, 5 o más polígonos y si una arista la forman siempre dos caras.

b) Remarcar que para formar el modelo de un poliedro se necesitan por lo menos 4 caras y que para formar el armazón se necesitan por lo menos 6 aristas y 4 mecanismos de engarce. Para ello preguntar si se puede formar un vértice con 2, (3) polígonos, si se puede formar un poliedro con 3 (4) polígonos y si se puede formar el armazón de un poliedro con 3 varillas. Cuestionar también cuántas varillas se necesitan para construir el armazón de un sólido que tiene 4 caras que son triángulos y cuántos vértices tiene ese sólido.

c) Pedir que se haga una lista lo más larga posible con propiedades de los poliedros.

d) Dar una lista de propiedades de los poliedros y pedir que se compare con la lista que se ha elaborado en T-8d-c.

e) Pedir que en la lista de propiedades que se ha dado en T-8d-c se señalen las que además de ser propiedades de los poliedros también lo son de todos los sólidos.

f) Cuestionar si en los sólidos que tienen caras curvas puede haber vértices en los que se juntan menos de 3 caras y si es esto posible en los poliedros.

- Tarea T-9d: Analogía, diferencias, propiedades comunes entre poliedros. (análisis local de familias de sólidos) (Guillén, 1997, pp. 234-236 (T-2))

  a) Introducir la idea de caras vecinas como las que se unen mediante una arista. Dar un modelo de prisma (antiprisma, pirámide, bipirámide) y preguntar por las caras que bordean a la(s) base(s) y por las caras que bordean a una de sus caras laterales.

     Preguntar también que cuántas caras vecinas tienen.

  b) Seleccionar varios modelos de prismas. Para cada modelo, colocado en diferentes posiciones, señalar las bases. Preguntar por el tipo de caras que las bordean y resaltar que las bases de cualquier prisma siempre están bordeadas por paralelogramos (cuadrados, rectángulos, rombos o paralelogramos). Señalar que a estas caras las llamamos caras laterales del prisma.

     Repetir la actividad para los antiprismas, pirámides y bipirámides.

  c) Pedir que se comparen los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y se establezcan analogías y diferencias respecto al tipo de caras laterales que tienen.

  d) Repetir la actividad anterior pero ahora centrando la atención en las bases. Señalar que el vértice de las pirámides donde se juntan todas las caras laterales, suele llamarse ápice (o cúspide).

     Remarcar que las bipirámides tienen una base que está perfectamente delimitada por los lados que forman el polígono, pero que no es cara de ella y no está materializada en el interior (para que el modelo resultante sea poliedro).

     Remarcar además que en las bipirámides todas las caras son triángulos y que como la base no es cara de ellas, no cabe hablar de caras laterales, pues éstas corresponden a las caras.

  e) Seleccionar varios modelos de prismas y pedir que se señalen propiedades que cumplen todos ellos relativas a sus bases. Preguntar si la propiedad(es) señalada(s) se verifica(n) en los otros modelos de prisma.

     Pedir que se compruebe si la propiedad también la cumplen los antiprismas y que se intente enunciar la propiedad de las bases que diferencia un prisma de un antiprisma.

  f) Para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, introducir el concepto de aristas de la(s) base(s) como las aristas de este(os) polígono(s) y las aristas laterales como las aristas que juntan las bases, o que salen de la base para juntarse todas ellas en un punto.

     Seleccionar varios modelos de prismas rectos y pedir que se muestren propiedades de ellos relativas a las aristas laterales. Cuestionar si también la cumplen otros prismas rectos y los prismas oblicuos.

Pedir que se compruebe si la propiedad, o parte de ella, también la cumplen los antiprismas, las pirámides y las bipirámides.

g) Recordar la idea de orden de un vértice (número de caras o de aristas que se juntan en él). Cuestionar si los prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides) tienen todos los vértices del mismo orden y si en todos ellos se juntan los mismos tipos de caras o de aristas. Aclarar con un ejemplo que por un mismo tipo de caras se entiende que las caras pertenecen a la misma familia.

- Tarea T-10d: Número de caras, vértices, aristas, nº de ángulos diedros, nº ángulos de los vértices, nº de ángulos de las caras, nº de diagonales de las caras y nº de diagonales del espacio poliedro n-agonal. (Descripción de prismas, antiprismas, y…).

T-10d-1 (Guillén, 1997, pp. 237-238 (T-5))

Presentar modelos de prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides).

a) Cuestionar el número de caras, de vértices y de aristas. Pedir que se señale la estrategia que se ha utilizado para hallar estos números y mostrar con un ejemplo que una buena manera de contar es separando el modelo en pisos y contar los elementos de cada piso.

   Para los antiprismas, pedir que vuelvan a hallar estos números utilizando una manera de contar basada en otra estrategia de construcción.

b) Indicar el número de lados del polígono de la(s) base(s) y la familia a la que pertenece (se tienen modelos de alguno de ellos, pero no de otros), y cuestionar el número de elementos (caras, vértices y aristas) que tiene el modelo correspondiente. Pedir también que se explique cómo se ha llegado al resultado.

c) Pedir que se determine el número de caras, vértices y aristas de un prisma, un antiprisma, una pirámide y una bipirámide, n-agonal. Pedir también que se explique cómo se ha contado para llegar al resultado y que se simbolice la relación encontrada.

T-10d-2 (Guillén, 1997, pp. 238-239 (T-6))

a) Mostrar un prisma hexagonal y pedir que se halle el número de ángulos de las caras que tiene, el número de ángulos diedros y el número de ángulos de los vértices.

b) Pedir que se complete la tabla siguiente para prismas triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

Nº de lados del polígono de las bases	Nº de aristas del prisma	Nº de vértices del Prisma	Nº de Ángulos diedros del Prisma	Nº Ángulos de los vértices del Prisma
3				
4				
5				

.				

c) Pedir que se comparen los números que hay en las diferentes columnas de la tabla y que se establezcan y formulen relaciones entre ellos.

d) Pedir que se utilicen varios antiprismas, pirámides y bipirámides para verificar si la relación encontrada para los prismas entre el número de ángulos diedros y el número de aristas, y entre el número de ángulos de los vértices y el número de vértices, se verifica también en estas familias de poliedros.

e) Pedir que se rellene la siguiente tabla y que se enuncien y simbolicen las relaciones que hay entre el número de ángulos diedros, o el número de ángulos de los vértices, y el número de lados del polígono de las bases de la familia correspondiente.

Familia de sólidos	Nº de aristas	Nº de vértices	Nº de ángulos diedros	Nº de ángulos de los vértices
Prisma n-agonal				
Antiprisma n-agonal				
Pirámide n-agonal				
Bipirámide n-agonal				

T-10d-3 (Guillén, 1997, pp. 239-240 (T-7))

a) Pedir que se complete la tabla siguiente. Apuntar que para hallar el número de ángulos de las caras de los diferentes ejemplos de estas familias se descomponga el ejemplo en pisos o en "trozos" y que se cuente los ángulos de las caras por trozos o por pisos.

b) Preguntar de qué depende el número de ángulos de las caras de un prisma (antiprisma, pirámide, bipirámide) y pedir que expresen y simbolicen las relaciones correspondientes. Apuntar que para hallar el número de ángulos de las caras de un prisma n-agonal cuenten los ángulos de las caras por trozos o por pisos y que luego generalicen los elementos de cada nivel.

Nº de lados del polígono de la(s) base(s)	Nº de ángulos de las caras del prisma	Nº de ángulos de las caras de un antiprisma	Nº de ángulos de las caras de una pirámide	Nº de ángulos de las caras de una bipirámide
3				
4				
5				
…				

20				

c) Pedir que se utilicen otros procedimientos para determinar el número de ángulos de las caras de un prisma (antiprisma, pirámide, bipirámide) n-agonal. Mostrar con un ejemplo que nos podemos fijar en los vértices y en los ángulos de las caras que se juntan en cada uno de ellos, podemos separar los vértices por pisos y así contar los ángulos de las caras de cada piso.

T-10d-4 (Guillén, 1997, pp. 240-241 (T-8))

a) Pedir que se dibujen todas las diagonales de los polígonos de las bases de dos prismas hexagonales, uno cóncavo y otro convexo. Luego pedir que se dibujen las diagonales de las caras laterales.
Para cada prisma pedir que se cuenten todas las diagonales de las caras que tiene.

b) Pedir que se rellene la tabla siguiente:

Nº de lados del polígono de la(s) base(s)	Nº de diagonales de las caras del prisma	Nº de diagonales de las caras de un antiprisma	Nº de diagonales de las caras de una pirámide	Nº de diagonales de las caras de una bipirámide
3				
4				
5				
…				
20				

c) En un modelo abierto de un cubo (ortoedro, romboedro) pedir que se introduzcan las varillas que pueden representar las diagonales del espacio de ese modelo. Cuestionar cuántas diagonales del espacio salen de cada uno de los vértices y cuántas diagonales del espacio tiene el cubo (ortoedro, romboedro). Preguntar también si las diagonales del espacio del sólido correspondiente son iguales o no y cuántas medidas diferentes encontramos para ellas.

d) Pedir que en modelos abiertos se introduzcan todas las varillas que pueden representar las diagonales del espacio de los modelos considerados y que se rellene la tabla siguiente:

Nº de lados del polígono de la(s) base(s)	Nº de diagonales del espacio del prisma	Nº de diagonales del espacio de un antiprisma	Nº de diagonales del espacio de una pirámide	Nº de diagonales del espacio de una bipirámide
3				
4				
5				
…				

20				

e) Pedir que en modelos abiertos de ejemplos de prismas (antiprismas) se ajusten varillas que representen las diagonales del espacio del sólido correspondiente, que se midan y se compare su tamaño con la de la diagonal de la base con la que se corresponde (se forma un triángulo con ambas diagonales y una arista lateral del sólido).

2. Tareas sobre la enseñanza de la clasificación y el establecimiento de relaciones

- Tarea T-1cl: Clasificaciones con criterios visuales

T-1cl-1 (Guillén, 1997, pp. 242-243 (T-10))

Indicar que se va a hacer una partición en el mundo de los prismas. Que se va a incluir en un grupo los modelos que son rectos y en otro grupo los que son oblicuos.

a) Pedir que se precise lo que se entiende por prisma *recto* y por prisma *oblicuo* en términos de propiedades visuales y de propiedades geométricas.

   Pedir que se explique también si todos los prismas se pueden incluir en una de las familias establecidas y si hay prismas que pueden incluirse en ambas.

b) Centrar la atención sobre las características de este tipo de clasificación (llamada dicotomía) y sobre los modelos que pueden representarla.

   Pedir que se clasifique la familia de los antiprismas con este criterio de clasificación; que se establezca y se nombre las familias obtenidas; que se represente la clasificación en un diagrama y se precise una idea de antiprisma *recto* y de antiprisma *oblicuo.*

c) Pedir que se repita la actividad T-1cl-1b para las pirámides y para las bipirámides.

d) Pedir que se repita la actividad T-1cl-1b cuando se considera como universo de clasificación el formado por los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides. Y cuando se considera como universo de clasificación la familia de los poliedros.

   Utilizar algunos modelos para centrar la atención sobre los problemas que se pueden tener para precisar lo que se entiende por *sólido recto* y *sólido oblicuo,* y de ahí para determinar la subfamilia a la que se tienen que asignar.

   Pedir que con material comercializado se construyan otros modelos que presenten problemas para incluirlos como rectos u oblicuos.

e) Pedir que se intente expresar cómo se halla la altura de dos prismas, uno recto y otro oblicuo y de pirámides rectas y oblicuas.

f) Pedir que se compare lo que ocurre en los prismas (antiprismas, pirámides, bipirámides) *rectos* y *oblicuos* respecto a la altura, cuando se dibuja desde el centro de una base (o desde el ápice) y que se enuncien propiedades, relativas a este elemento, para estas familias.

g) Pedir que en algunos prismas rectos y oblicuos dados se compare la longitud de la altura con la de las aristas laterales y que se enuncien propiedades de los prismas rectos y oblicuos en términos de la longitud de la altura y de la arista lateral.

Cuestionar si la propiedad enunciada para los prismas rectos, o para los prismas oblicuos, se puede extender a la familia correspondiente de los antiprismas, (pirámides, bipirámides).

h) Pedir que se precise una idea de *prisma, antiprisma, pirámide y bipirámide, recta* y *oblicua,* en términos de la altura.

T-1cl-2 (Guillén, 1997, pp. 243-244 (T-11))

a) Pedir que se señale la relación que hay entre las caras laterales (las aristas laterales) y las bases de un prisma recto dado. Cuestionar si esta relación ocurre en todos los prismas rectos, y si también la cumplen los prismas oblicuos.

Cuestionar también si la relación encontrada en los prismas rectos puede extenderse a los antiprismas (pirámides, bipirámides) *rectos.*

b) Plantear actividades análogas a la anterior para las siguientes propiedades: las caras laterales son rectángulos (que pueden ser cuadrados); los ángulos de las caras laterales son rectos. Pedir también que se indique si un prisma oblicuo puede tener alguna cara que sea rectángulo o cuadrado y que se explique la respuesta.

c) Introducir el concepto de ángulo diedro con material comercializado. Apuntar que los ángulos diedros podemos hallar los porque coinciden con los que forman dos segmentos. Dirigir la actividad para que se llegue a delimitar que los segmentos que hay que seleccionar para hallar un ángulo diedro son uno de cada cara (de las dos que forman un ángulo diedro), se juntan en un punto de la arista y son perpendiculares a ella.

d) Plantear una actividad análoga a T-lcl-2a para las siguientes propiedades: los ángulos diedros que forman las caras laterales con la base son de 90°; los ángulos diedros que forman las caras laterales entre ellas coinciden con los ángulos correspondientes del polígono de la base.

e) Presentar dos prismas, uno de ellos está formado por dos rombos que no son cuadrados y 4 cuadrados y el otro está formado por dos paralelogramos iguales que no son rectángulos y 4 rectángulos. Cuestionar si estos modelos son rectos u oblicuos y que se explique la respuesta.

T-1cl-3 (Guillén, 1997, pp. 244-245 (T-12))

Indicar que se va a hacer otra partición en el mundo de los prismas a partir de otro criterio que tiene también características visuales. Separar en un grupo los prismas cóncavos y en otro los prismas convexos.

a) Para la clasificación establecida con este criterio, plantear actividades análogas a T-lcl-1a a T-lcl-1d.

b) Presentar varios modelos de prismas cóncavos y de prismas convexos y pedir que para cada una de estas familias se especifiquen propiedades relativas a los diferentes tipos de ángulos: los ángulos de las caras, los ángulos diedros y los ángulos de los vértices.

   Pedir que se compruebe si las propiedades señaladas para los prismas convexos también las verifican los antiprismas (pirámides, bipirámides) convexos.

c) Pedir que se repita la actividad anterior para propiedades relativas a los diferentes tipos de diagonales: diagonales de las caras y diagonales del espacio.

d) Pedir que se utilicen modelos de prismas cóncavos y de prismas convexos para determinar algunas propiedades de estas familias que reflejen lo que ocurre cuando se intenta apoyar los modelos en cualquiera de sus caras.

e) Pedir que se repita la actividad anterior pero la propiedad tiene que reflejar lo que ocurre con los ejemplos de la familia considerada cuando se prolonga cualquiera de sus caras.

f) Pedir que se explique si la lista de propiedades de los prismas convexos contendrá todas las propiedades de los prismas. Apuntar que, si la respuesta es afirmativa, estas se pueden indicar de golpe, sin decirlas explícitamente, indicando sólo "propiedades de los prismas".

- Tarea T-2cl: Clasificaciones con criterios relativos a las bases (Guillén, 1997, p. 245 (T-13)

  Recopilar las características que tienen las clasificaciones-particiones.

a) Pedir que se delimiten otros criterios de clasificación e indicar como posibles el criterio que centra la atención sobre si los ejemplos tienen bases o no, o criterios que centran la atención en la base (en el número de lados, la igualdad de los lados o de los ángulos, o en la regularidad de este polígono).

b) Para cada uno de los criterios que se delimiten, pedir que se establezcan clasificaciones que sean particiones, que se nombren las familias obtenidas y se incluyan los ejemplos del universo que se clasifica en las subfarnilias a las que pertenecen.

c) Pedir que se represente en un modelo la clasificación fijada, que se especifique cuál es el universo que se clasifica y si el criterio que se considera sólo tiene sentido para un "trocito" de mundo de los poliedros o se puede extender al universo de los poliedros en general.

- Tarea T-3cl: La clasificación con criterios que centran la atención en la regularidad, la igualdad de todas las caras, la regularidad solo de la(s) base(s) o la regularidad solo de las caras laterales

  T-3cl-1 (Guillén, 1997, pp. 245-246 (T-14))

  Indicar que vamos a fijarnos en la regularidad, o en la igualdad, de todas las caras y que de esa manera establecernos las familias de los prismas, antiprisrnas, pirámides, bipirámides, de caras regulares (PCR, ACR, PiCR y BiCR) y las familias de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides, de caras iguales (PCI, ACI, PiCI y BiCI).

  a) Para cada subfarnilia de caras regulares de las separadas, pedir que, con material comercializado, se construyan ejemplos de ella y cuestionar cuántos ejemplos pueden construir.

  b) Centrar la atención en que el nombre de estas subfarnilias es un nombre compuesto (arbitrario) formado por un sustantivo que hace referencia a la familia a la que pertenece (prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides) y un adjetivo que hace referencia a que en los ejemplos de estas familias todas sus caras son regulares.

     Apuntar también que los modelos que no son ejemplos de ellas porque sólo la(s) base(s) es(son) regular(es), al igual que los ejemplos de ellas, pertenecen a las subfamilia de los prismas, antiprismas, pirámides o bipirámides de base(s) regular(es) (PBR, ABR, PiBR y BiBR); y que si no pertenecen a ellas porque sólo las caras laterales son regulares, al igual que los ejemplos de ellas, pertenecen a las subfamilias de los prismas, antiprismas o pirámides de caras laterales regulares (PCLR, ACLR, PiCLR).

     Para cada subfamilia mencionada en el párrafo anterior, pedir que con material comercializado se construyan algunos ejemplos.

  c) Plantear T-3cl-1a para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides de caras iguales (PCI, ACI, PiCI y BiCI). Preguntar que si han construido ejemplos en los que las caras son regulares y ejemplos en los que no lo son.

  T-3cl-2 (Guillén, 1997, p. 246 (T-15))

  a) Pedir que con material comercializado se construyan varios ejemplos diferentes de las familias de los prismas de bases regulares (PBR) y de los prismas de bases irregulares (PBIr).

  b) Pedir que se haga una lista con propiedades de los prismas de bases regulares (PBR).

     Indicar que pueden fijarse en si los prismas de bases regulares están incluidos en alguna otra familia de los prismas, por lo que verificarán sus propiedades; y que como consecuencia las propiedades de la familia que contiene a los PBR se pueden indicar de golpe como propiedades de esta.

Apuntar que la igualdad de lados del polígono de las bases no conlleva siempre a que las caras laterales lo sean.

Sugerir también que una vez que se ha indicado una propiedad, se fijen en si ya está incluida englobada como propiedad de alguna familia que contiene a los PBR; que si es así, no es necesario incluirla de nuevo explícitamente y por tanto pueden tacharla.

c) Pedir que se repita la actividad T-3cl-2b para los antiprismas, pirámides y bipirámides de base(s) regular(es).

- Tarea T-4cl: Clasificaciones en las que las particiones se solapan (Guillén, 1997, pp. 246-247 (T-16))

Indicar las características de las clasificaciones particiones que se hacen en el mismo universo de partida considerando varios criterios conjuntamente (1, 2, etc.) y los modelos que pueden representarlas. Para ello, como ejemplo, establecer la clasificación considerando como universo de clasificación el mundo de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides y como criterios de clasificación el de la regularidad de las caras (X), la igualdad de las caras (Y) y la igualdad de los vértices (Z).

a) Pedir que clasifiquen los poliedros considerando conjuntamente los dos criterios siguientes, el de regularidad de caras y el de igualdad de caras, que se nombren las 4 subfamilias disjuntas que se establecen y que se enumeren ejemplos de ellas, tomados del mundo de los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides.

b) Pedir que se fijen en otros dos criterios (apuntar algunos pares como posibles, como, por ejemplo, regularidad de caras e igualdad de orden de los vértices, o igualdad de caras y de vértices), y que se responda a las cuestiones planteadas en la actividad T-16a.

c) Pedir que delimiten los criterios que llevan a establecer los prismas rectos de bases regulares (PRBR) y las restantes familias disjuntas con ella.

d) Plantear la actividad T-4cl-a para una clasificación en la que haya que considerar conjuntamente tres criterios, por lo que se establecen 8 subfamilias disjuntas.

e) Pedir que se repita la actividad anterior considerando otros tres criterios para clasificar.

- Tarea T-5cl: Clasificaciones de prismas rectos de bases regulares, de caras laterales regulares, de caras regulares, de caras iguales (Guillén, 1997, p. 247 (T-17))

a) Pedir que se muestren varios ejemplos diferentes de la familia de los prismas rectos de bases regulares (PRBR).

b) Pedir que se haga una lista con propiedades de los prismas rectos de bases regulares (PRBR).

c) Pedir que se repitan las actividades T-5cl-a y T-5cl-b para los antiprismas, pirámides y bipirámides rectos de bases regulares.

d) Pedir que se repitan las actividades T-5cl-a y T-5cl-b para los prismas de caras laterales regulares (PCLR) y para las correspondientes familias de los antiprismas, pirámides y bipirámides.

e) Pedir que se repitan las actividades T-5cl-a y T-5cl-b para los prismas de caras regulares (PCR) y para los antiprismas, pirámides y bipirámides de caras regulares. Cuestionar la subfamilia en la que se incluiría un prisma que tiene 2 rombos iguales y opuestos que no son cuadrados y cuatro cuadrados; preguntar si es ejemplo de los PCR o de su familia dicotómica (P¬CR).

f) Pedir que se repita la actividad T-5cl-e para los prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides de caras iguales.

- Tarea T-6cl: Clasificaciones particiones disjuntas pero superpuestas con menos criterios (Guillén, 1997, p. 248 (T-18))

  Centrar la atención en que en las clasificaciones donde se superponen las particiones las clases resultantes son disjuntas, pero también se pueden considerar las clases que corresponden a uno sólo de los criterios y entonces aparecen relaciones de inclusión entre unas y otras.

  Mostrar con un ejemplo que al considerar 3 criterios conjuntamente, las 8 familias disjuntas que se establecen podemos representarlas mediante un diagrama de árbol como el de la figura A2.1; subrayar también que este diagrama refleja las relaciones de inclusión que existen entre las diferentes familias que hay en los tramos de cada rama.

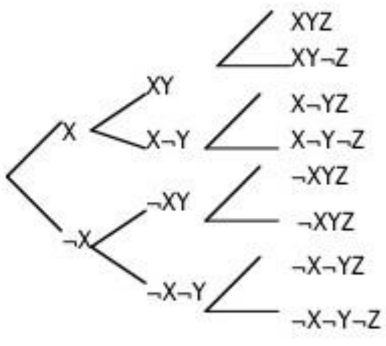


Figura A2.1

a) Pedir que se consideren los criterios de clasificación en otro orden, se dibuje el árbol correspondiente y se establezcan todas las inclusiones que se pueda de los prismas de caras regulares e iguales con vértices iguales en otras familias.

b) Pedir que se consideren los criterios de ser prisma (X), ser recto (Y) y tener las bases regulares (Z), y que se dibuje el árbol que permite delimitar las 8 familias disjuntas.

   Pedir que se establezcan todas las inclusiones que hay de los prismas rectos de bases regulares en otras familias.

c) Pedir que se repita la actividad T -6cl-b considerando los criterios de ser prisma (X), ser convexo (Y) y tener las bases regulares (Z). Cuestionar además si todas las familias que se pueden establecer tienen algún ejemplo y centrar la atención sobre la familia X¬YZ.

d) Pedir que se repita la actividad T-6cl-c considerado los criterios de ser prisma (X), ser recto (Y) y tener las caras laterales regulares (Z).

e) Explicar que el diagrama de árbol muestra que las clasificaciones en las que se solapan las particiones también pueden verse de la siguiente manera: como un proceso en el que los criterios de clasificación se van considerando por turno y las familias establecidas con un criterio son las que se consideran como universos de clasificación para establecer las clasificaciones con el otro criterio. Y así sucesivamente.

   Cuestionar si todas las subfamilias se pueden considerar como nuevos universos de clasificación con cualquiera de los criterios delimitados. Después reparar en los prismas cóncavos y el criterio que centra la atención en la regularidad de la base, y en los prismas oblicuos con el criterio relativo a la regularidad de las caras laterales.

- Tarea T-7cl: Clasificaciones inclusivas

  T-7cl-1 (Guillén, 1997, pp. 249-250 (T-19))

  Indicar las características de las clasificaciones inclusivas y los modelos (diagramas con forma de red como los de la figura A2.2) que pueden representarlas.

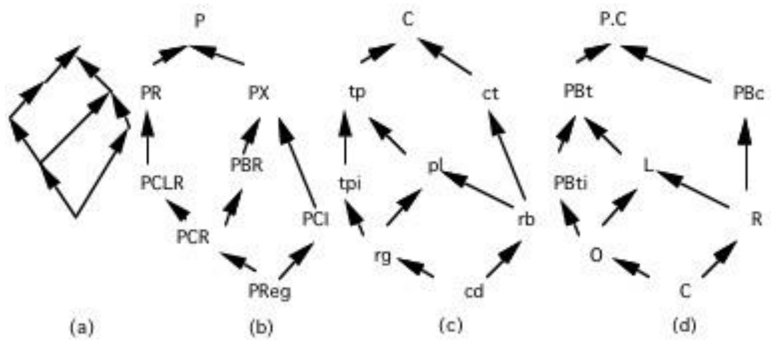


Figura A2.2

El diagrama de la figura A2.2(b) se puede utilizar como ejemplo para aclarar que en los diagramas que representan estas clasificaciones sólo se incluyen las familias que verifican alguna, varias o todas las propiedades que utilizamos como criterios de clasificación; que no se reflejan en ellos las familias complementarias.

a) Pedir que se expliquen las razones por las que algunas familias de las que hay en el diagrama de la figura A2.2(b) están conectadas mientras que otras no lo están.

b) Para el diagrama de la figura A2.2(b), cuestionar la relación que existe entre los pares de familias que están conectadas con una flecha; preguntar también sobre qué familia tiene el origen y qué familia tiene el extremo.

c) Para el diagrama de la figura A2.2(b), centrar la atención sobre que en el primer nivel está la familia de los prismas; en el segundo nivel las familias establecidas con criterios visuales; en el tercer nivel las familias establecidas con criterios que centran la atención en la regularidad de parte de las caras; en el cuarto nivel…

Pedir que se continúen indicando las familias que corresponden al 4° y 5° nivel.

d) Apuntar que, si dos familias tienen relación de inclusión, en el diagrama que representa la clasificación inclusiva, éstas están conectadas con una flecha que va desde la familia contenida (ahí está el origen) hasta la familia que la contiene (ahí está el extremo). Pedir que revisen las respuestas a T-7cl-1a y a T-7cl-1b.

Cuestionar si en el diagrama de la figura A2.2(b) hay que introducir más flechas porque hay relación de inclusión entre familias que no están conectadas con ellas. Para los pares de familias que podrían seleccionarse remarcar que están conectadas por un camino que tiene el origen en la familia contenida en todas las demás del camino, sigue este esquema →→→→ y el extremo está en la familia que contiene a todas las implicadas en el camino.

e) Recopilar las instrucciones que se han dado en T-7cl-1c y T-7-cl-1d para construir un diagrama con forma de red y pedir que se construya razonadamente el diagrama de la figura A2.2(b).

f) Pedir que se repita la actividad T-7cl-1e para otras familias de prismas.

g) Pedir que se repita la actividad T-7cl-1e para familias de antiprismas, para familias de pirámides y para familias de bipirámides.

T-7cl-2 (Guillén, 1997, pp. 250-252 (T-20))

a) Señalar que el universo de clasificación que vamos a considerar son los prismas cuadrangulares y que al fijarnos en las bases vamos a abordar una clasificación de los cuadriláteros. En esta familia separar el cuadrado, cd, el rectángulo, rg, el rombo, rb, el paralelogramo, pl, el trapecio isósceles, tpi, la cometa, ct, y el trapecio, tp. Resaltar que estos cuadriláteros tienen relación de inclusión entre ellos, por lo que un diagrama con forma de red puede representar una clasificación de ellos.

Utilizar como ejemplo pares de cuadriláteros de los que en el diagrama de la figura A2.2(c) de la tarea T-7cl-1 están conectados con una flecha para mostrar cómo se puede interpretar la información que refleja un diagrama y cómo se formulan las relaciones entre las familias implicadas

Utilizar varillas (que tienen agujeros distribuidos a la misma distancia) para representar las diagonales de los cuadriláteros (o los lados) y chinchetas (que se utilizan como mecanismos de unión) para explicar, mediante la construcción, que los cuadriláteros seleccionados tienen relación de inclusión (el cuadrilátero contenido surge como un caso particular de la construcción del cuadrilátero que lo contiene) y para establecer las propiedades de ellos relativas a las diagonales.

Pedir que se intenten explicar las relaciones de inclusión que refleja el diagrama de la figura A2.2(c) de la tarea T-7cl-1 entre algunos tipos de cuadriláteros.

b) Considerando como universo los prismas cuadrangulares separar las siguientes familias: cubo, C, ortoedro, O, romboedro, R, paralelepípedo, L, prisma de bases cometas, PBc, prisma de bases trapecios isósceles, PBti, prisma de bases trapecios, PBt.

Indicar lo que Polya (1957, p. 58) señala con respecto a por qué un rectángulo es análogo a un ortoedro (paralelepípedo recto rectangular):

> De hecho, las relaciones entre los lados del rectángulo son semejantes a las que existen entre las caras del ortoedro. Cada lado del rectángulo es paralelo a uno solo de los otros lados y perpendicular a los lados restantes. Cada cara del ortoedro es paralelo a una sola de las otras caras y perpendicular a las caras restantes. Si se considera como "elemento límite" el lado del rectángulo y la cara del paralelepípedo respectivamente, se pueden reducir las dos consideraciones anteriores a una sola que se aplique a ambas figuras: cada elemento límite es paralelo a uno solo y perpendicular a los restantes elementos límites.

Pedir que se especifiquen las relaciones que comparten los diferentes tipos de cuadriláteros que hemos separado en T-7cl-2a con los prismas rectos correspondientes (los que tienen por bases esos cuadriláteros).

c) Cuestionar si se rompen algunas relaciones de las que existen entre un cuadrilátero y su prisma recto análogo al considerar los prismas con bases el cuadrilátero.

Pedir que establezcan analogías entre los cuadriláteros que hemos separado en la actividad T-7cl-2a y los prismas que hemos separado en la actividad T-7cl-2b.

d) Pedir que se averigüe si entre el ortoedro y el cubo, el ortoedro y el romboedro, el paralelepípedo y el prisma de base cometa, hay relación de inclusión, exclusión, o tienen elementos comunes, pero no están incluidos en ningún sentido. Indicar que para responder se pueden apoyar en las relaciones que existen entre los elementos del plano análogos a estos.

e) Pedir que se construya razonadamente el diagrama de la figura A2.2(d) de la tarea T-7cl-1

- Tarea T-8cl: Enumeración de ejemplos y descripción de subfamilias

T-8cl-1 (Guillén, 1997, pp. 252-253 (T-21))

a) Cuestionar si puede haber paralelepípedos en los que alguna cara sea cuadrado, pero no todas ellas, y paralelepípedos en los que todas sus caras sean cuadrados.

   Plantear la misma actividad considerando el rectángulo o el rombo en vez del cuadrado.

   Cuestionar también si puede haber paralelepípedos cuyas caras sean rombos y paralelogramos (o rombos y rectángulos) y paralelepípedos formados por rombos, rectángulos y paralelogramos.

   Pedir que se delimiten diferentes tipos de paralelepípedos (según el tipo de polígonos de sus caras).

b) Pedir que se repita la actividad anterior para otras familias de prismas cuadrangulares de las que consideramos en la tarea T-7cl-2.

c) Pedir que se pongan ejemplos de paralelepípedos que no sean cubos ni ortoedros.

   Cuestionar por turno si en las caras de los paralelepípedos que cumplen estas condiciones (no son cubos ni ortoedros) puede haber cuadrados, rectángulos, rombos, paralelogramos, trapecios, cometas. Después cuestionar si todas sus caras pueden ser de cada uno de los cuadriláteros señalados.

   Cuestionar si los paralelepípedos que cumplen las condiciones impuestas (no son cubos ni ortoedros) pueden ser romboedros (ortoedros) y si todos ellos lo son.

d) Pedir que se repita la actividad anterior para los ejemplos de prismas de base cometa que no son romboedros.

e) Pedir que se repita la actividad T-8cl-1a para los ortoedros que no son romboedros y para los prismas de bases trapecios que no son prismas de bases cometas.

f) Pedir que se pongan ejemplos de paralelepípedos que sean además ortoedros. Plantear cuestiones como en T-8cl-1c.

g) Pedir que se repita la actividad anterior para los ejemplos de prisma de base cometa que son romboedros y cubos, y para los prismas de bases trapecios que son además prismas de bases cometas.

T-8cl-2 (Guillén, 1997, p. 253 (T-22))

a) Explicar que cuando se describe un prisma cuadrangular se puede tener en cuenta que las propiedades de los cuadriláteros de las bases relativas a paralelismo de pares de lados se convierten en los prismas en paralelismo de pares de caras laterales. Explicar que en los paralelepípedos la propiedad se convierte en paralelismo de pares de caras.

   Cuestionar si las propiedades de los cuadriláteros de las bases relativas a perpendicularidad de lados (igualdad de lados) se convierten en los prismas en perpendicularidad de caras laterales (igualdad de caras laterales). Pedir que se indiquen las familias de prismas cuadrangulares para los que ocurre esto, las que verifican que las caras están bordeadas de caras perpendiculares a ella, las que verifican que las caras son iguales dos a dos y las que cumplen que las caras son iguales.

b) Centrar la atención en que cuando se describe un prisma cuadrangular, las propiedades del cuadrilátero de las bases relativas a medidas distintas para los ángulos o las diagonales, o respecto a cómo se cortan estas, se pueden enunciar como propiedades de las bases del prisma correspondiente, pero no como propiedades de las caras. Pedir que se señalen las familias de prismas cuadrangulares para las que no hay que preocuparse con ello.

   Para el ortoedro, pedir que se delimiten las propiedades del rectángulo que se pueden extender como propiedades de elementos de las caras.

c) Pedir que para cada una de las familias de prismas cuadrangulares se haga una lista que incluya todas las propiedades de la familia correspondiente. Dar como sugerencia que para delimitar las familias de prismas cuadrangulares que contienen a la que se considera, y así indicar de golpe un bloque de propiedades de la familia, se pueden apoyar en el diagrama de la tarea T-7cl-2.

ANEXO 3

TAREAS GUILLÉN (1997) DESARROLLADAS EN EL CURSO PRESENCIAL

En este anexo mostramos las tareas tomadas de Guillén (1997) que hemos planteado en el curso presencial para poder determinar conocimientos que tienen los/as profesores/as de los contenidos geométricos implicados en ellas, así como sobre las dificultades que enfrentan en su resolución.

S-TCg1-G1

a) Proceder de manera sistemática para enumerar las propiedades de los prismas relativas a tipos de caras, orden de los vértices y relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos.

   Para descubrir las propiedades de los antiprismas, pirámides y bipirámides fijaos en si estas familias verifican o no las propiedades de los prismas y/o de las familias analizadas antes que la que se está describiendo. Expresar parecidos y diferencias entre pares de estas familias de sólidos.

b) Contar el número de caras, vértices y aristas de un prisma n-agonal por pisos y aplicar el mismo procedimiento para determinar estos elementos en los antiprismas, en las pirámides y en las bipirámides.

c) Hallar la fórmula que da el número de ángulos de las caras de un prisma n-agonal. ¿Qué modificaciones hay que hacer en este procedimiento si queremos determinar la fórmula para los antiprismas (las pirámides, las bipirámides)?

d) Hallar el número de ángulos diedros y de los vértices de cada una de las familias tratadas.

e) Recopilar las propiedades que se han descubierto en las actividades previas para los prismas y hacer una lista lo más larga posible con las propiedades de esta familia.

f) Repetir el apartado e para los antiprismas, las pirámides y las bipirámides.

Figura A3.1. Tomada de Guillén (1997, pp. 319-320)

S-TCg1-G2

Considerar cada una de las familias de prismas para las que a continuación indicamos abreviatura para el nombre y las propiedades que enumeramos. Para cada propiedad y cada familia explicar si la familia cumple la propiedad o no.

P: prismas. PR: prismas rectos. PX: prismas convexos. PBR: prismas de bases regulares. PRBR: prismas rectos de bases regulares. PCLR: prismas de caras laterales regulares. PCR: prismas de caras regulares. PCI: prismas de caras iguales. P. Reg.: prismas regulares.

a) Las aristas laterales tienen la misma longitud.
b) Tienen n(n-1) diagonales de las caras.
c) Las diagonales del sólido caen dentro del sólido.
d) La longitud de la altura coincide con la de las aristas laterales.
e) Las caras laterales son iguales.
f) Sus aristas son iguales.
g) Sus caras son paralelas dos a dos.
h) Sus ángulos diedros son iguales.
i) Sus vértices son de orden 4.

Figura A3.2. Tomada de Guillén (1997, p. 306)

S-TCg1-G3

Las propiedades que en la tabla hemos nombrado como 1, 2, 3... son: 1) tiene caras paralelas dos a dos, 2) los vértices son iguales, 3) las aristas son iguales, 4) los ángulos diedros de las caras laterales son iguales al correspondiente de la base y 5) los ángulos diedros son menores de 180°.

Las familias que indicamos en el encabezamiento de la tabla corresponden a las de las abreviaturas siguientes: prismas rectos, PR; prismas convexos, PX; prismas de bases regulares, PBR; prismas rectos de bases regulares, PRBR; prismas de caras laterales regulares, PCLR; prismas de caras regulares, PCR; prismas de caras iguales PCI; paralelepípedos, L; romboedros, R; cubo, C.

Si una familia verifica una propiedad, poner una cruz en la casilla correspondiente y explicar la respuesta para cada propiedad y cada familia, tanto si la propiedad se ha asociado a ésta como sí no se ha hecho.

Prop.	PR	PX	PBR	PRBR	PCLR	PCR	PCI	L	R	C
1) Tiene caras paralelas dos a dos										
2) Los vértices son iguales										
3) Las aristas son iguales										
4) Los ángulos diedros de las caras laterales son iguales al correspondiente de la base										
5) Los ángulos diedros son menores de 180°.										

Figura A3.3. Tomada de Guillén (1997, p. 321)

S-TCg1-G4

Para cada propiedad de la lista que se presenta, responder a las cuestiones que se plantean para ella.

Las propiedades se consideran por turno y cuando se fija la atención en una propiedad hay que descubrir las familias de sólidos que verifican la propiedad y todas las anteriores, o las familias que verificando todas las propiedades anteriores no verifican esa. Esto es, preguntas que nos planteamos ante cada una de las propiedades son:

¿Añade información? ¿Descartamos alguna familia de sólidos? ¿En qué familias o familia específicas podemos estar pensando?

a) Sus caras son polígonos.
b) Tiene varios vértices y aristas.
c) Es un modelo cerrado.
d) Tiene dos caras iguales.
e) Tiene dos caras paralelas.
f) Tiene todos sus vértices de orden 3.
g) Tiene todas las aristas laterales de la misma longitud.
h) Tiene las aristas laterales paralelas.
i) Tiene las aristas laterales perpendiculares a la base.
j) Las caras laterales son rectángulos.
k) La altura dibujada desde un punto de la base cae en el interior del sólido.
l) La altura tiene la misma longitud que las aristas laterales.

m) Los ángulos diedros de las caras laterales coinciden con el correspondiente ángulo del polígono de la base.
n) Los ángulos que forman las caras son menores que 180°.
o) Las diagonales del espacio quedan completamente en el interior del sólido.
p) Tiene todos los vértices iguales.
q) Tiene todas las caras laterales iguales.
r) Tiene todas sus caras regulares.
s) Todas sus aristas tienen la misma longitud.
t) Tiene 24 aristas.
u) Tiene 16 vértices.
v) Tiene 10 caras.

Figura A3.4. Tomada de Guillén (1997, pp. 322-323)