Revista Internacional De Sistemas (2006-2007), 15, 29-35 *http://doi.org/10.5281/zenodo.1137584*

Martínez De Lejarza, I., Montoro, J., & Hernandez-Carrion, J.R. (2007). "Teoría del Caos en SistemasEconómicos". "Chaos Theory in Economic Systems". *Revista Internacional de Sistemas, 15, 29–35.* http://doi.org/10.5281/zenodo.1137584

Teoría del Caos en Sistemas Económicos

IGNACIO MARTÍNEZ DE LEJARZA ESPARDUCER
JUAN DE DIOS MONTORO PONS
JOSÉ RODOLFO HERNÁNDEZ CARRIÓN

Departamento de Economía Aplicada, Universidad de València (España)

Abstract:
This paper discusses the possibility of complex dyamics and chaos in a standard Keynesian economic system. Departing from the dynamic evolution of income, capital and interest rates, as the essential variables of our system, and under specific assumptions, under certain parametric conditions the system loses its stability and undergoes a bifurcation process which leads to complex dynamics and chaos.

Keywords: Keynesian macroeconomic model, chaos, complex dynamics, kaldorian investment function.

Resumen:
En este artículo se discute la posibilidad de aparición de dinámica compleja y caos en un sistema económico que cumple las condiciones de un modelo estandard de tipo keynesiano. Partiendo de la consideración de la evolución de la renta, el capital y el interés como variables esenciales del sistema y supuestas algunas especificaciones particulares, en determinadas condiciones paramétricas, el sistema puede dejar de ser estable y sería posible la aparición de comportamientos asociados con la dinámica compleja, e incluso de generación de caos.

Palabras clave: Modelo macroeconómico keynesiano, caos, dinámica compleja, función de inversión kaldoriana.

INTRODUCCIÓN:

El trabajo se plantea revisar un modelo keynesiano convencional para poder abordar fenómenos inherentes a aspectos de tipo económico como la financiación de mercados, evolución de precios de activos, producción o nivel de empleo.

Inicialmente, por tanto, hemos buscado una modelización que se apartara de la especificación lineal, habitualmente utilizada por razones de facilidad de tratamiento y simplicidad teórica. Normalmente se prefiere usar una aproximación de tipo lineal, pero es sabido que, ésta, tiene serias limitaciones a la hora de explicar la evolución real de los sistemas económicos.

Nos hemos planteado la elaboración de un modelo que incorporara planteamientos tanto de tipo keynesiano como kaldoriano, tal como plantea Fernández-Díaz (1994), sin llegar a explicitarlo así. Este planteamiento permite la obtención de procesos dinámicos endógenos de carácter cíclico que, para determinados conjuntos paramétricos, pueden adoptar un comportamiento caótico. Una línea de trabajo similar ha sido desarrollada por Boldrin (1988), Day y Schafer (1985), Jarsullic (1989), etc.

El común denominador de este tipo de planteamientos es la evolución conjunta de capital, renta e interés. El carácter kaldoriano al que hacíamos alusión vendría determinado por la inclusión del capital; y la consideración de renta e interés, están en la esencia de los modelos de corte keynesiano. La clave de esta conjunción global se halla en la función de inversión que se postula dependiente de renta, capital e interés, e interviene como factor explicativo de la evolución de la renta y el capital.

Precisamente por este doble juego de la función de inversión, determinada por y determinante del sistema, puede originarse un comportamiento dinámico complejo; abriéndose así la posibilidad de que aparezcan comportamientos de tipo caótico en la evolución temporal del sistema.

Como especificación concreta de un modelo con estas características hemos optado por una vía que no sólo pudiera dar cuenta de las oscilaciones de las variables sino que también pudiera modelar una situación de crecimiento con ciclo, en línea con los trabajos de Goodwin (1993), Pohjola (1981), Dana y Malgrange (1983). La clave de ello estará en la consideración de que la evolución temporal de la inversión puede descomponerse en una componente autónoma y en otra dependiente de las variables del sistema.

Se ha ensayado, por lo tanto, un modelo con estas características, conduciéndonos a un comportamiento caótico para determinados conjuntos paramétricos.

De comportarse los sistemas económicos reales según esquemas como el propuesto, las implicaciones prácticas que ello tendría podrían resumirse en los tres siguientes apartados:

1. - Las medidas de política económica de corte keynesiano para estabilizar la economía serían de dudosa efectividad por dos motivos fundamentales: Por un lado, si las series económicas son caóticas las acciones del sector público carecerían de sentido al no existir un estado estacionario de convergencia; las desviaciones del equilibrio estarían motivadas por la propia evolución del sistema y no por la superposición de perturbaciones o shocks de carácter aleatorio. Por otro lado, la propia intervención pública podría acabar introduciendo más inestabilidad, ya que amplificaría las oscilaciones y desequilibrios con los que nos encontrábamos.

2. - Existe, sin embargo, un margen de actuación para la política económica. De hecho, sería todavía factible la posibilidad de una acción exitosa de política económica que incidiera en la modificación de parámetros estructurales, de forma que, al cambiar la estructura de la evolución del sistema, ésta se viera notablemente modificada.

3. - Por último, existe una vía adicional de estabilización. Ello se podría plantear a través de la implementación, de los resultados obtenidos a partir de los modelos de control de caos ensayados con éxito en los campos de las ciencias naturales (Iglesias y Gutiérrez, 1995). En esencia se trataría de efectuar intervenciones en alguna variable, de tal manera que ello se traduzca en la emisión de señales de carácter periódico por parte de ésta al sistema, tal que éstas reconduzcan su evolución hacia comportamientos de menor periodicidad e incluso hacia la estabilidad.

UN MODELO CON DINÁMICA CAÓTICA DE INSPIRACIÓN KEYNESIANA.

Como se ha comentado, el modelo propuesto, parte de la consideración de la evolución de la renta y el interés según un esquema de corte keynesiano. De esta forma suponemos que las variaciones de renta se producen como una respuesta proporcional al exceso de demanda en el mercado de bienes y que las variaciones en el tipo de interés obedecen a una respuesta también proporcional al exceso de demanda de dinero para transacciones. Añadiendo a estos dos esquemas de variación el de la evolución del stock de capital generado por la adición de la inversión y la sustracción de la depreciación del capital, podemos contar con una estructura básica para la evolución del sistema S={Renta, Interés, Capital} que simplificadamente podría expresarse como:

$$\Delta Y = \alpha\left(I - S\right)$$
$$\Delta r = \beta(L - M)$$
$$\Delta K = I - \delta\, K_t$$

modelo 1

Donde *Y* es la renta, *I* ,la inversión, *K*, el capital, *S*, el ahorro, *L* la demanda de dinero y *M* la oferta monetaria; siendo α , el parámetro que da cuenta de la velocidad de reacción del mercado de bienes, y β , el correspondiente parámetro para el mercado de dinero; por último δ se correspondería con la tasa de depreciación del capital.

Como ya se ha comentado, sobre este modelo se hace el supuesto adicional de que la Inversión puede considerarse como el agregado de dos componentes: una componente autónoma, que no depende en su evolución del resto del sistema y otra componente que sí evoluciona de acuerdo con la evolución de las otras variables del modelo. Esta hipótesis adicional ha sido sugerida en diversos modelos económetricos de la función de inversión, en los que , a menudo se consideraba una componente tendencial (Lintner, 1967; Anderson, 1964; Hickman, 1965) o una especificación autorregresiva o ambas cosas (Barten y Carrin, 1972).

Con todo nosotros consideraremos adicionalmente que la componente autónoma de la inversión es cuantitativamente más importante que su componente no autónoma.

Así pues, el modelo inicial podría re-escribirse de la siguiente manera:

$$\Delta Y = \alpha\left(\hat{I} + I^* - sY_t\right)$$
$$\Delta r = \beta(L - M)$$
$$\Delta K = \hat{I} + I^* - \delta K_t$$

modelo 2

Donde la inversión, *I*, queda sustituida por su equivalente descomposición en inversión autónoma, $\hat{I}$, más inversión no autónoma, I^*. Supondríamos, además, un comportamiento de tipo lineal para la función de ahorro respecto de la renta: $S=sY$.

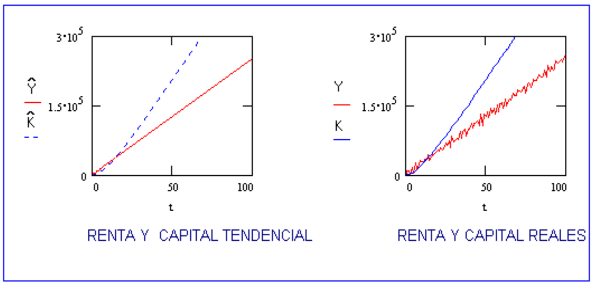
Con estas consideraciones, las variables renta y capital podrían reconsiderarse a su vez constituidas por dos componentes cada una de ellas. La primera componente sería tendencial, sólo dependiente de la inversión autónoma y de su evolución temporal; y la otra componente, podría considerarse como las desviaciones de estas variables respecto de su evolución tendencial; así quedaría:

$$Y = \hat{Y} + y$$
$$K = \hat{K} + k$$

Con :

$$\hat{Y} = \hat{Y}(\hat{I}(t))$$
$$\hat{K} = \hat{K}(\hat{I}(t))$$
$$y = y(y(t), k(t), r(t))$$
$$k = k(y(t), k(t), r(t))$$

A modo de ejemplo, representamos la evolución de las variables *Y*, *K* y las de sus componentes tendenciales:



De esta forma el modelo de evolución del sistema se podría re-escribir como:

$$\Delta Y = \alpha\left(\hat{I}(t) + I^*(y,k,r) - s(\hat{Y}_t + y_t)\right) =$$
$$\ldots = \Delta\hat{Y} + \Delta y = \Delta\hat{Y} + \alpha.\left(I^*(y,k,r) - sy_t\right)$$
$$\Delta r = \beta(L - M)$$
$$\Delta K = \hat{I}(t) + I^*(y,k,r) - \delta(\hat{K}_t + k_t) =$$
$$\ldots = \Delta\hat{K} + \Delta k = \Delta\hat{K} + I^*(y,k,r) - \delta k_t$$

Interesados sólo en la componente no autónoma del modelo, consideraremos como sistema a estudiar el integrado por las variables {y,k,r}, cuya evolución obedecería a una modelo como:

$$\Delta y = \alpha.(I^*(y,k,r) - sy_t)$$
$$\Delta r = \beta.(L - M)$$
$$\Delta k = I^*(y,k,r) - \delta.k_t$$

modelo 3

Finalmente, para la especificación total del modelo propuesto nos faltaría concretar una adecuada función de inversión "no autónoma", así como las correspondientes funciones de oferta y demanda de dinero.

Por lo que respecta a la inversión, suponemos, al igual que hacen otros autores (Lintner, 1967; Anderson, 1964; Kuh, 1963) que ésta sería dependiente del llamado "Índice de intensidad de capital" (Kuh, 1963) o ratio renta/capital, pero aquí considerado obviamente en términos de desviaciones de renta y capital respecto de los niveles tendenciales:

Postulamos, por tanto, una dependencia de esta ratio, ponderada por el tipo de interés (Sraffa, 1960), de tipo lineal, junto con un factor amortiguador de tipo armónico; quedando la función de inversión no autónoma como:

$$I^*(y,k,r) = a.\frac{y}{rk} + b.\cos\left(\frac{y}{k}\right)$$

En cuanto a la evolución de la demanda y la oferta monetarias, las supondríamos dependientes de los niveles tendenciales de la renta y de las desviaciones de estos niveles, según un esquema como el siguiente:

$$L(\hat{Y}, y, r) = \mu.\hat{Y} + \frac{y}{r}$$

$$M(\hat{Y}, y, r) = \sigma.\hat{Y} + e.y$$

Haciendo el supuesto de que la política monetaria fuera totalmente acomodante e intentara igualar siempre la oferta a la demanda de dinero previsible, según el nivel tendencial de renta ($\mu = \sigma$), es fácil comprobar cómo el modelo final de la evolución de nuestro sistema quedaría especificado como se expone a continuación:

$$\Delta y = \alpha.(a.\frac{y}{rk} + b.\cos(\frac{y}{k}) - sy_t)$$

$$\Delta r = \beta.(\frac{y}{r} - e.y)$$

$$\Delta k = a.\frac{y}{rk} + b.\cos(\frac{y}{k}) - \delta.k_t$$

modelo 4

SIMULACIÓN DEL MODELO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Ante la imposibilidad de obtener soluciones de equilibrio {*y**, *k**, *r**} de las variables del sistema y analizar la estabilidad del mismo en su entorno, debido a la presencia de funciones transcendentales, se ha procedido a la simulación numérica del mismo. Adicionalmente cabría indicar que, en los modelos dinámicos no lineales, los comportamientos dinámicos más interesantes ocurren cuando nos alejamos de las soluciones de equilibrio. Por ello, se propone el análisis del comportamiento del sistema en base a esos planteamientos.

La simulación del modelo ha puesto de manifiesto comportamiento complejo para diversos conjuntos paramétricos. De todos ellos se ha seleccionado el siguiente:

a = 0.1, b = 1000, e = 0.1, β=0.001, δ=0.1, dejando α como “parámetro de selección” *(tunning parameter)* en la simulación.

Estudiando el comportamiento del sistema, a partir de los gráficos de bifurcaciones del capital, se pueden apreciar cuatro zonas claramente diferenciadas (en la figura 1 se pueden observar claramente las propiedades dinámicas del sistema), que analizamos a continuación:

- Para valores relativamente bajos del parámetro de selección, α<7.05, se aprecia que el sistema converge a un equilibrio dinámico estable, como se puede observar en la figura 2.

- A partir de este valor de α el comportamiento del sistema deviene caótico; luego se estabiliza a distintas periodicidades. Para valores de α comprendidos entre 7.28 y 7.57, aproximadamente, el sistema se asienta en un equilibrio periódico de orden 3; lo cual confirma la existencia de “caos” (Li y Yorke, 1975).

- Para valores menores de 7.28 se inicia un proceso de duplicación de período en cascada (ver detalle figura 3), que conduce a zonas de elevada periodicidad y aperiodicidad, entre las cuales vuelven a aparecer algunas ventanas o “intermitencias” de menor periodicidad.

- La cuarta zona, que sería para valores superiores a 7.57, dejaría patente la aparición de caos (lo que se apreciaba claramente en la figura 1) que progresivamente degenera en un proceso divergente.

Una vez comprobada la presencia de caos, se ha procedido a analizar el espacio de fases del sistema para α=7.07 y α=7.6, valores paramétricos que se corresponden con las dos zonas caóticas detectadas a partir de la inspección del diagrama de bifurcaciones.

Las figuras 4–6 muestran el atractor extraño para α=7.07, en el espacio de fases de las distintas variables del sistema; mientras que la figura 7 representa este mismo atractor extraño en el espacio tridimensional.

Las figuras 8–13 muestran el atractor extraño para α=7.6, en el espacio de fases de las distintas variables del sistema; mientras que la figura 14 representa este mismo atractor extraño en el espacio tridimensional.

Obviamente, para otros conjuntos paramétricos tendríamos otros comportamientos diferentes. Por ejemplo, cabría señalar que para valores de b más bajos (decenas) el comportamiento del sistema sigue siendo caótico, si bien el tipo de interés permanece estable en un cierto valor de equilibrio, en un entorno alrededor del 10%.

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

A partir de la simulación con el modelo que se ha planteado, hemos visto que el sistema puede dejar de ser estable y sería posible la aparición de comportamientos asociados con la dinámica compleja, e incluso de generación de caos.

Todo ello tendría evidentes consecuencias que no conviene olvidar para los decisores de la política económica. De hecho, en este caso, las medidas de política económica de corte keynesiano que busquen estabilizar la economía podrían no tener los efectos deseados y, en consecuencia, serían de dudosa utilidad; las intervenciones gubernamentales a partir de la Demanda Agregada, como proponen estos tipos de modelos, no tendrían las consecuencias deseadas.

Las políticas de demanda perderían su fundamentación en un mundo de dinámica compleja donde apareciese caos. En cualquier caso, siempre se podría justificar la intervención pública en base a planteamientos que impliquen reformas estructurales; o bien, a partir de una profundización en la aplicación al campo económico-social que pudiera originarse desde los estudios de control de caos que se están llevando a cabo en otras disciplinas.

Evidentemente, el análisis cabría extenderlo en próximas investigaciones en base a la inclusión de series temporales de carácter económico que permitieran contrastar la validez empírica de los planteamientos expuestos. Igualmente, cabría incidir en futuros proyectos en el estudio de la viabilidad de la aplicación de los modelos de "control de caos"; por un lado, su diseño y análisis teórico, y por otro, la posible validación de su utilidad en el campo económico.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, W.H.L. (1964): *Corporate Finance and Fixed Investment. An Econometric Study*. Harvard University Press.

Barten, A.P. y Carrin, G.J. (1972): "A medium-term model for the European Economic Community: Some first results". *European Econometrics Congress, Budapest, Sept. 1972*.

Boldrin, M. (1988): "Persistent oscillations and chaos in dynamic economic models: Notes for a survey", en Anderson, P.W.; Arrow, K.J. y Pines, D.: *The Economy as an Evolving Complex System*, pp. 52-53. Addison-Wesley Publishing Company.

Creedy, J. Y Martin, V. (1994) : *Chaos and Non-Linear Models in Economics*. Edward Elgar.

Dana, R.A. y Malgrange, P. (1983): "The dynamics of a discrete version of a growth cycle model", en Ancot, J.P. (ed.): *Analysing the Structure of Econometric Models*, capítulo 7, pp. 115-142. Martinus Nijhoff.

Day, R.H. y Shafer, W. (1985): "Keynesian chaos", *Journal of Macroeconomics*, 7 (3), summer, pp. 277-295.

Fernández-Díaz, A. (1994): *La economía de la complejidad. Economía dinámica caótica*. McGraw-Hill.

Goodwin, R.M. (1993): "A Marx–Keynes–Schumpeter model of economic growth and fluctuation", en Day, R.H. y Chen, P.: *Nonlinear dynamics and evolutionary economics*, capítulo 4, pp. 45-57. Oxford University Press.

Hickman, B.G. (1965): *Investment Demand and U.S. Economic Growth*. Brooking Institution.

Iglesias, A.; Matías, M.; Güémez, J. y Gutiérrez, J. (1995): "Controlling chaos with Mathematica", en Keranen, V. y Mitic, P.: *Mathematics with Vision*, pp. 207-214. Computational Mechanical Publications.

Jarsullic, M. (1989): "Endogenous credit and endogenous business cycles", *Journal of Post Keynesian Economics*, 12 (1), fall, pp. 35-48.

Kuh, E. (1963): *Capital Stock Growth: A Microeconomic Approach*. North Holland.

Li, T. y Yorke, J. (1975): Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82; pp. 985-992.

Lintner, J. (1967): "Corporation Finance: Risk and Investment", en Ferber, R: *Determinants of Investment behavior. Universities National Bureau Conference Series, 18*. Columbia University Press.

Lorenz, H-W (1993): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer-Verlag.

Pohjola, M.T. (1981): "Stable, cyclic and chaotic growth: The dynamics of a discrete-time version of Goodwin's growth cycle model", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 41 (1-2), pp. 27-38.

Sraffa, P. (1960): *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Oikos–Tau.

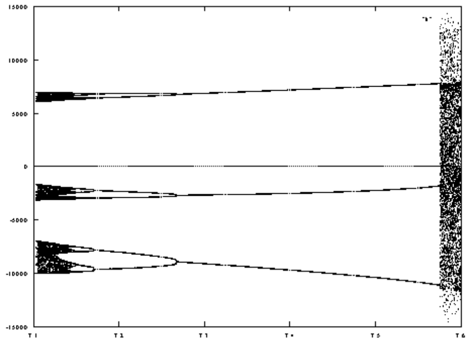


figura 1

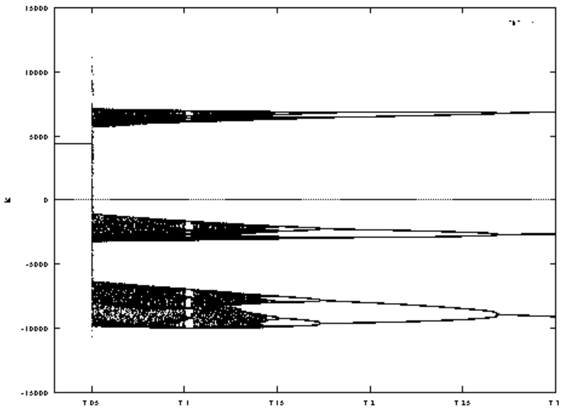


figura 2

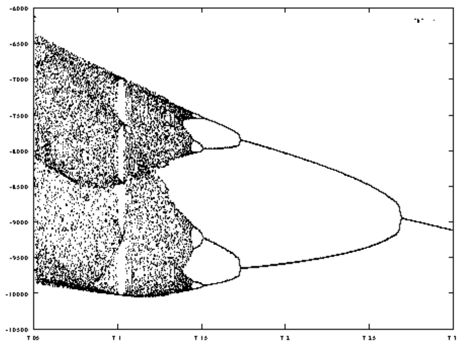


figura 3

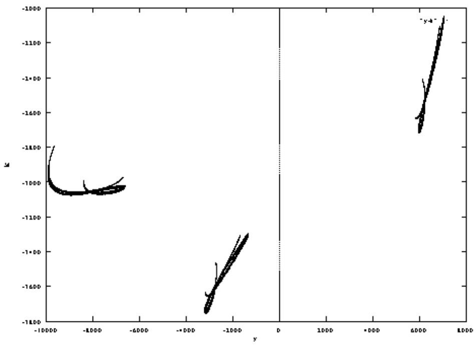


figura 4

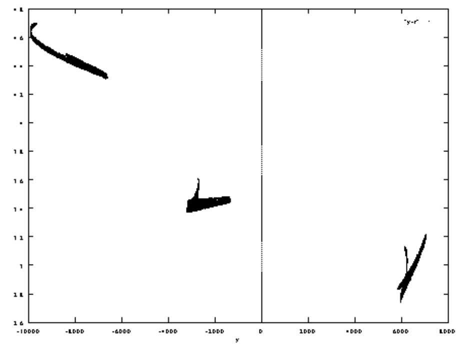


figura 5

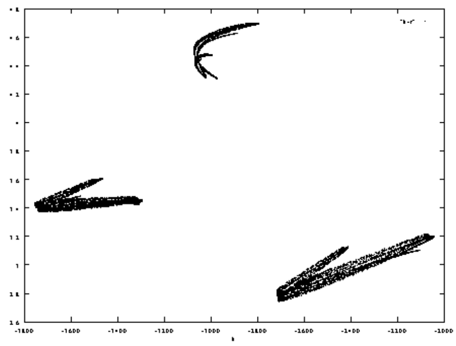


figura 6

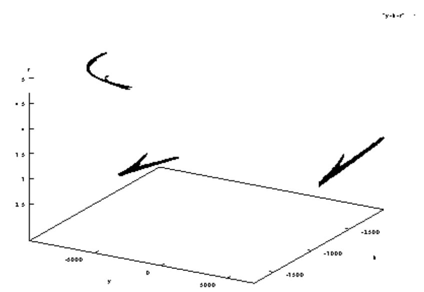


figura 7

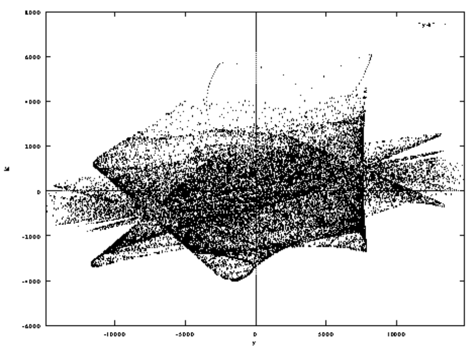


figura 8

Martínez de Lejarza, I., Montoro, J. & Hernandez-Carrion, J.R. (2007). Teoría del Caos en Sistemas Económicos. Chaos Theory in Economic Systems. *Revista Internacional de Sistemas, 15, 29–35.*
http://doi.org/10.5281/zenodo.1137584

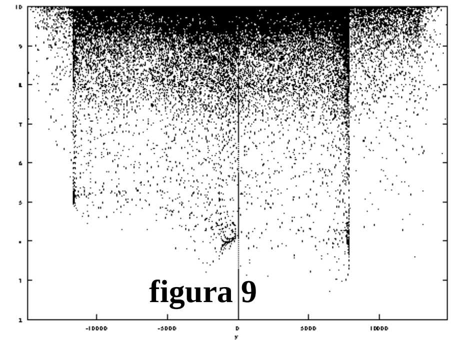


figura 9

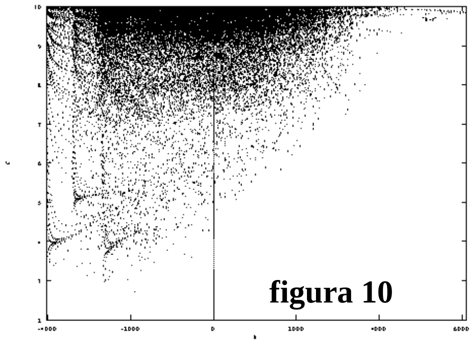


figura 10

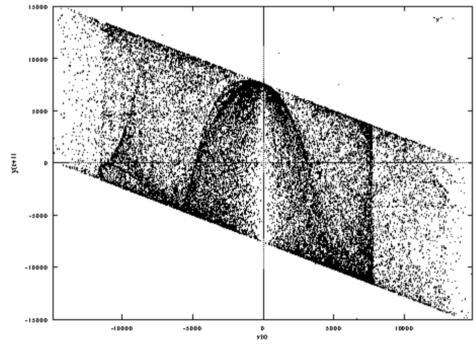


figura 11

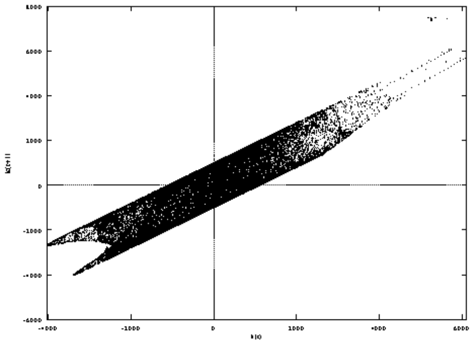


figura 12

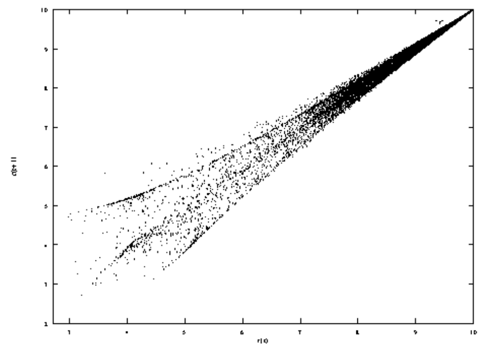


figura 13

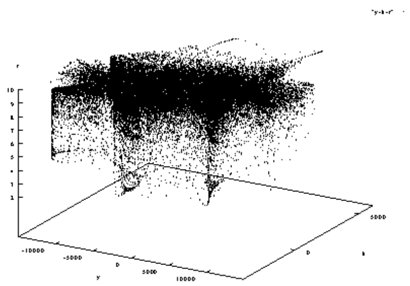


figura 14