



VNIVERSITAT
E VALÈNCIA

Facultad de Medicina i Odontologia

Programa de doctorado 3139 Medicina

APLICACIÓN DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE
DATOS FUNCIONALES AL ESTUDIO DEL PATRÓN
DE MOVIMIENTO DEL RAQUIS LUMBAR Y DE LA
PELVIS DURANTE LA FLEXIÓN Y LA EXTENSIÓN
DEL TRONCO EN PERSONAS SANAS

TESIS DOCTORAL

Presentada por: M^a Angeles Fuster Ortí

Dirigida por: Dra. M^a Angeles Sarti Martínez
Dra. M^a Rosa Peris Sanchis

Valencia, Junio 2021



AUTORIZACIÓN DE DIRECTOR/A DEPÓSITO DE TESIS DOCTORAL

Nombre Doctorando/a	M ^a ÁNGELES FUSTER ORTÍ
NIF/NIE/Pasaporte	22676216 X
Título de la Tesis	APLICACIÓN DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS FUNCIONALES AL ESTUDIO DEL PATRÓN DE MOVIMIENTO DEL RAQUIS LUMBAR Y DE LA PELVIS DURANTE LA FLEXIÓN Y LA EXTENSIÓN DEL TRONCO EN PERSONAS SANAS

AUTORIZACION DEL DIRECTOR/ES DE LA TESIS

Prof./as. Dr./Dras. **M^a Ángeles Sarti Martínez y M^a Rosa Peris Sanchis**
como director/as de la tesis del Programa de Doctorado en 3139 Medicina.

AUTORIZA el depósito y la presentación de la tesis arriba mencionada para su defensa ante el tribunal correspondiente de acuerdo con lo establecido en la Normativa de Estudios de Doctorado de la Universitat de València.

Valencia, a 4 de Marzo de 2021

El/la Director/as

Fdo.: M^a Angeles Sarti Martínez

Fdo: M^a Rosa Peris Sanchis

AGRADECIMIENTOS

A M^a Angeles Sartí por creer en mí, por su fuerza y su energía, por transmitirme confianza en que lo iba a lograr, por introducirme en el campo de la Cinesiología, por todo lo que me ha enseñado y, sobretodo, por su amistad.

A Rosa Peris, porque sin ella no habría sido posible llegar hasta aquí, por su gran apoyo tanto personal como profesional.

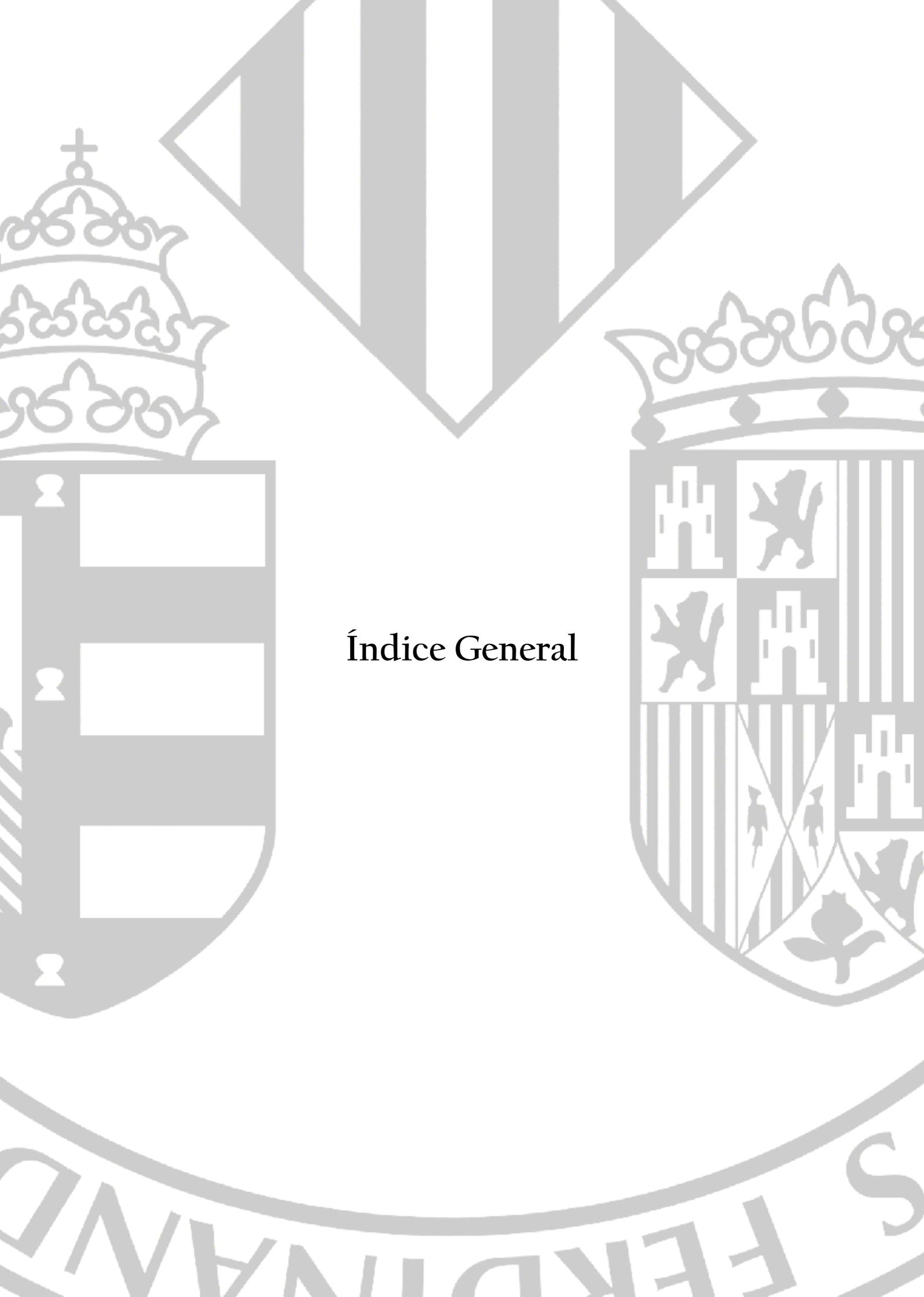
A Rut Expositor, por su ayuda en el planteamiento de este trabajo.

A Teresa León, por introducirme en el campo de los datos funcionales y por su apoyo incondicional siempre que lo he necesitado.

A Carlos, mi marido, mi compañero de vida, y a Carolina, mi hija, la luz de mi vida, si ellos todo esto no habría sido posible, por animarme, por su ayuda y paciencia pese a todas las horas que les ha quitado.

A mi hermana, Mari Carmen, por su alegría, por su actitud siempre positiva ante la vida y por su inmenso cariño.

A mis padres, Angeles y Miguel, por su sacrificio para que yo pudiera formarme en todos los sentidos, y por darme la oportunidad de hacer lo que más quería: estudiar Ciencias Matemáticas.

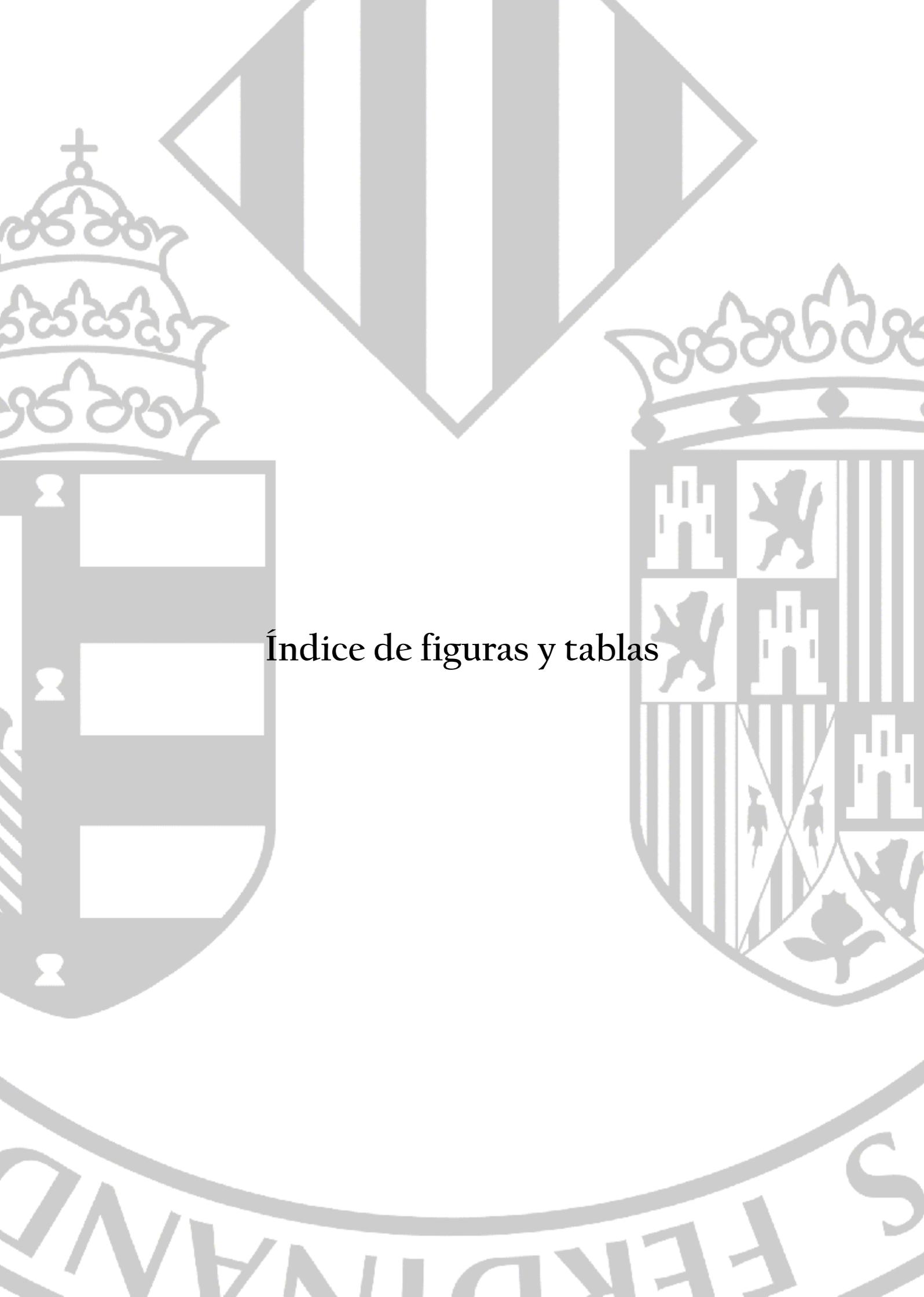


Índice General

ÍNDICE

1.- Introducción	1
2.- Análisis de datos funcionales	7
2.1.- Introducción.....	9
2.2.- Descripción de los datos funcionales	9
2.3.- Suavizado: Representación de funciones	10
2.3.1.- Bases de Funciones.....	10
2.3.2.- Construcción de datos funcionales.....	12
2.4.- Outliers de datos funcionales	13
2.4.1.- Medidas de profundidad	14
2.4.2.- Metodologías de R para detectar outliers de datos funcionales	15
2.5.- Estadísticos descriptivos para datos funcionales	19
2.5.1.- Estadísticos sobre una función.....	20
2.5.2.- Estadísticos de la muestra de una función.....	21
2.5.3.- Estadísticos de muestras de dos o más funciones.....	22
2.6.- Análisis en Componentes Principales	23
2.7 Análisis de la Varianza funcional (FANOVA)	27
2.7.1.- Propuesta de Ramsay and Silverman (2005).....	27
2.7.2.- Propuesta de Cuevas, Febrero and Fraiman (2004).....	29
2.7.3.- Prueba de Shen and Faraway (2004).....	30
2.7.4.- Propuesta de Cuesta-Albertos and Febrero-Bande (2007)	31
2.8.- Análisis de datos funcionales con R.....	32
3.- Hipótesis y Objetivos	37
4.- Material y Métodos	41
4.1.- Muestra.....	43
4.2.- Instrumentos de registro.....	43
4.3.- Procedimiento.....	44
4.4.- Tratamiento de los datos	47
4.5.- Cálculo de variables para la caracterización del patrón lumbopélvico	47
4.6.- Obtención de los datos funcionales.....	48
4.6.1.- Preparación de los datos	48

4.6.2.- Obtención de los datos funcionales.....	49
4.7.- Análisis Estadístico.....	51
5.- Resultados.....	53
5.1.- Fiabilidad del método.....	55
5.2.- Agrupación de los casos en función del patrón de movimiento.....	56
5.3.- Cinemática de la flexión y la extensión.....	58
5.3.1.- Movimiento de flexión.....	58
5.3.1.1.- Calidad del ajuste.....	58
5.3.1.2.- Determinación de outliers funcionales.....	59
5.3.1.3.- Estadísticos descriptivos funcionales.....	62
5.3.1.4.- Análisis de componentes principales funcional.....	65
5.3.1.5.- Análisis de la varianza funcional.....	77
5.3.2.- Movimiento de extensión.....	80
5.3.2.1.- Calidad del ajuste.....	80
5.3.2.2.- Determinación de outliers funcionales.....	81
5.3.2.3.- Estadísticos descriptivos funcionales.....	83
5.3.2.4.- Análisis de componentes principales funcional.....	86
5.3.2.5.- Análisis de la varianza funcional.....	95
6.- Discusión.....	103
7.- Conclusiones.....	109
BIBLIOGRAFÍA.....	113
ANEXOS.....	125
ANEXO 1 – Consentimiento.....	127
ANEXO II – Test PSLR (Passive Straight Leg Rarse).....	128
ANEXO III – Código R.....	129



Índice de figuras y tablas

INDICE DE FIGURAS

1.- Visión lateral. Cambio de posición del raquis lumbar y de la pelvis durante el movimiento de flexión y extensión del tronco, desde la postura erecta hasta la máxima amplitud en flexión	3
2.- Interacción de la pelvis y del raquis lumbar durante la flexión y extensión del tronco	4
3.- Patrón lumbopélvico durante la flexión y extensión del tronco.....	3
4.- B-spline.....	11
5.- Banda de profundidad determinada por dos curvas y una tercera contenida.....	14
6.- Cálculo de la profundidad por los 4 métodos expuestos	15
7.- Rainbow plot.....	17
8.- Boxplot funcional.....	18
9.- Bagplot funcional	19
10.- Ejemplos de correlación positiva y negativa entre dos funciones.....	21
11.- Gráfico de las componentes principales con perturbaciones de la media	26
12.- Gráfico de los coeficientes de las componentes principales	27
13.- Función P _{VALUE} de Ramsay and Silverman	29
14.- Instrumento. Registro del movimiento: electrogoniómetro 3 – Space Isotrak	44
15.- Representación de los ángulos α , β	45
16.- Sensores de movimiento a nivel de la primera vértebra lumbar (L1) y sacra (S1).....	45
17.- Ejercicio de flexión del tronco: a) postura inicial (erecta) en bipedestación., b) postura en máxima flexión.....	46
18.- Sistema de captura y tratamiento de datos.....	47
19.- Movimiento de flexión y extensión del tronco. Root Mean Square (RMS). Postura erecta (PE), inicio de la flexión (IF), máxma flexión (MF), inicio del movimiento de extensión (IE)y postura erecta (PE).....	48
20A.- Movimiento de flexión. Datos funcionales obtenidos para tronco, pelvis y raquis	50
20B.- Movimiento de extensión. Datos funcionales obtenidos para tronco, pelvis y raquis.....	50
21.- Agrupación inicial	56
22.- Agrupación Análisis Cluster	56
23.- Agrupación definitiva	57
24.- Ratio lumbopélvico en grupo 1 y 2. Flexión y extensión	57
25.- Trayectorias del movimiento del tronco, pelvis y raquis lumbar de una persona con patrón pelvis dominante (grupo 1) durante un movimiento de flexo-extensión del tronco.....	57
26.- Trayectorias del movimiento del tronco, pelvis y raquis lumbar de una persona con patrón raquis dominante (grupo 2) durante un movimiento de flexo-extensión del tronco.....	58
27.- Diagrama de cajas delos RMS residual de los 3 segmentos	59
28.- Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del tronco en el movimiento de flexión del tronco ..	60
29.- Rainbow plot, funcional bagplot y HDR de la pelvis en el movimiento de flexión del tronco 60	
30.- Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del raquis lumbar en el movimiento de flexión del tronco	61

31.- Función media y función desviación típica del tronco en la muestra total y en ambos grupos de movimiento	62
32.- Función media y función desviación típica de la pelvis en la muestra total y en ambos grupos de movimiento.....	63
33.- Función media y función desviación típica del raquis en la muestra total y en ambos grupos de movimiento	63
34.- Función media de cada uno de los segmentos en el grupo 1 y el grupo 2 durante la flexión del tronco	64
35.- Función media de cada uno de los segmentos, pelvis y raquis, en los dos grupos durante la flexión del tronco.....	64
36.- ACPF: Representación Scree Graph de las tres primeras componentes de cada segmento	65
37A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco en la muestra total	66
37B.- ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Muestra total	67
38A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes del tronco. Grupo 1	67
38B.- ACPF: Diagrama de dispersión que indica relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 1	68
39A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes del tronco. Grupo 2.....	68
39B.- ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 2.....	69
40A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Muestra total	70
40B.- ACPF: Diagrama de dispersión que indica relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Muestra total	70
41A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis.Grupo 1.	71
41B.- ACPF: Diagrama de dispersión que indica relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 1	71
42A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis.Grupo 2.	72
42B.- ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 2	73
43A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis lumbar. Muestra total	74
43B.- ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las 3 componentes 2 a 2. Muestra total.....	74
44A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis lumbar. Grupo 1	75
44B.- ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las 3 componentes 2 a 2. Grupo 1	76
45.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis lumbar. Grupo 2	76
46.- FANOVA con anova.onefactor del tronco en función del grupo	77
47.- FANOVA con anova.onefactor de la pelvis en función del grupo	78

48.- FANOVA con anova.onefactor del raquis en función del grupo	78
49.- FANOVA con Fanova.tests del tronco en función del grupo	79
50.- FANOVA con Fanova.tests de la pelvis en función del grupo	79
51.- FANOVA con Fanova.tests del raquis en función del grupo	79
52.- Diagrama de cajas de los RMS residual de los 3 segmentos	80
53.- Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del tronco en el movimiento de extensión	81
54.- Rainbow plot, funcional bagplot y HDR de la pelvis en el movimiento de extensión	82
55.- Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del raquis en el movimiento de extensión	82
56.- Función media y función desviación típica del tronco en la muestra total y en ambos grupos de movimiento	83
57.- Función media y función desviación típica de la pelvis en la muestra total y en ambos grupos de movimiento	84
58.- Función media y función desviación típica del raquis lumbar en la muestra total y en ambos grupos de movimiento	85
59.- Función media de cada uno de los segmentos en el grupo 1 y el grupo 2 durante la extensión del tronco	85
60.- Función media de cada uno de los segmentos, pelvis y raquis, en los dos grupos durante la extensión del tronco	86
61.- ACPF: Representación Scree Graph de las tres primeras componentes de cada segmento	86
62.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Muestra total	87
63A.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Grupo 1	88
63B.- ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 1	89
64.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Grupo 2	89
65.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Muestra total	91
66.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Grupo 1	91
67.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Grupo 2	92
68.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis. Muestra total	93
69.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis. Grupo 1	94
70.- ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis. Grupo 2	95
71.- FANOVA con anova.onefactor del tronco en función del grupo	96
72.- FANOVA con anova.onefactor de la pelvis en función del grupo	96
73.- FANOVA con anova.onefactor del raquis en función del grupo	97
74.- FANOVA con Fanova.tests del tronco en función del grupo	98
75.- FANOVA con Fanova.tests de la pelvis en función del grupo	98
76.- FANOVA con Fanova.tests del raquis en función del grupo	98

INDICE DE TABLAS

1.- Diferencias entre el análisis de componentes principales clásico y el funcional.....	25
2.- Características de los sujetos	43
3A.- Repetibilidad de las variables en el mismo día	55
3B.- Repetibilidad de las variables en días distintos	55
4.- Estadísticos descriptivos de los valores del RMS para tronco, pelvis y raquis en el movimiento de flexión	58
5.- Outliers funcionales encontrados en cada uno de los métodos utilizados	61
6.- Valores propios de las 3 componentes para el tronco	65
7.- Valores propios de las 3 componentes para la pelvis	69
8.- Valores propios de las 3 componentes para el raquis lumbar	73
9.- Estadísticos descriptivos de los valores del RMS para tronco, pelvis y raquis en el movimiento de extensión.....	80
10.- Outliers funcionales encontrados en cada uno de los métodos utilizados	83
11.- Valores propios de las 3 componentes para el tronco	87
12.- Valores propios de las 3 componentes para la pelvis	90
13.- Valores propios de las 3 componentes para el raquis lumbar	93



Resumen

RESUMEN

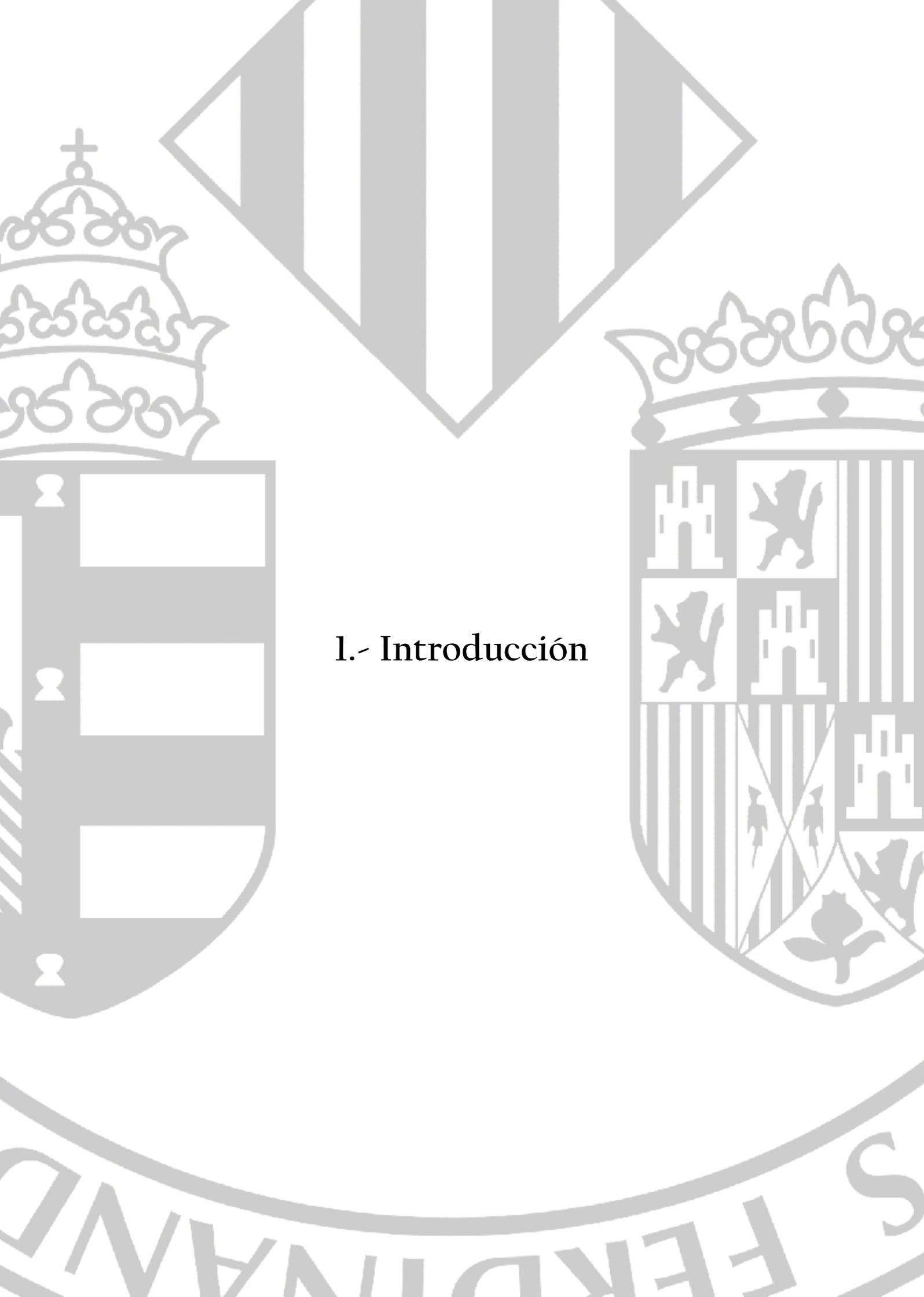
El objetivo de este trabajo es utilizar las herramientas del análisis de datos funcionales para estudiar el patrón de movimiento lumbopélvico en personas sanas. Los valores del rango de movimiento del raquis lumbar y de la pelvis a lo largo de la flexión y extensión del tronco, se consideran como funciones observadas como entidades únicas, no como una secuencia de observaciones, lo que va a permitir estudiar los movimientos de flexión y extensión completos como una unidad, es decir, un único dato para cada individuo (dato funcional). A veces trabajamos con funciones sin reparar en ello, y la estadística tradicional no responde bien a nuestras preguntas. El análisis de datos funcionales es la parte de la estadística que trabaja con muestras de funciones. Los datos son una muestra de n funciones definidas en un intervalo de \mathbb{R} donde cada observación es una curva que evoluciona con el tiempo.

Actualmente en el estudio de variables cinemáticas se puede disponer de una gran cantidad de datos debido a que en la mayoría de los casos la recolección se hace de manera automática; ajustar estos datos a una función o dato funcional permite que se pueda explicar de mejor manera los fenómenos del estudio.

Los resultados del presente estudio constatan la hipótesis planteada: el uso del análisis de datos funcionales proporciona una mejora en el estudio del patrón de movimiento lumbopélvico, durante la flexión y la extensión sagital del tronco, ya que hemos observado que su aplicación permite estudiar de una forma más profunda los movimientos de flexión y extensión durante la flexo-extensión del tronco. Hemos podido obtener un patrón de movimiento “medio” (función media) representativo de los sujetos, así como visualizar su variabilidad.

También hemos podido constatar la existencia de dos patrones de movimiento lumbopélvico (pelvis dominante y raquis dominante) que nos ha permitido dividir los sujetos en dos grupos y ver que conociendo el grupo al que pertenece un sujeto, se puede saber tiene más predisposición a sufrir patologías de espalda.

En resumen podemos concluir que, la utilización de técnicas de datos funcionales es la apropiada para el estudio del rango de movimiento tanto del raquis lumbar como de la pelvis en personas sanas, y que éstas exhiben patrones de movimiento lumbopélvico tanto lumbar dominante como pelvis dominante, con características significativamente diferentes.



1.- Introducción

1. INTRODUCCIÓN

A veces trabajamos con funciones sin reparar en ello y, la estadística tradicional no responde bien a nuestras preguntas. El análisis de datos funcionales es la parte de la estadística que trabaja con muestras de funciones. Ramsay y Silverman (1), entre otros, han introducido herramientas de análisis para este tipo de datos, (medidas de tendencia central, de dispersión y de relación). Los datos son una muestra de n funciones definidas en un intervalo de \mathbb{R} , que suelen ser continuos o bien discretos con alta frecuencia, donde cada observación es una curva que evoluciona con el tiempo.

Actualmente en el estudio de variables cinemáticas se puede disponer de una gran cantidad de datos debido a que en la mayoría de los casos la recolección se hace de manera automática; ajustar estos datos a una función o dato funcional permite que se pueda explicar de mejor manera los fenómenos del estudio.

El análisis de datos funcionales (FDA) se ha convertido en la última década, en un área de creciente impulso y desarrollo dentro de la estadística (2-4), por ello, en la presente monografía abordaremos el estudio del patrón de movimiento del raquis lumbar y de la pelvis durante los movimientos de flexión y extensión del tronco en personas sanas, utilizando para ello herramientas de datos funcionales.

La flexión y extensión del tronco son movimientos complejos que engloban, respectivamente, la flexión y extensión del raquis lumbar y la rotación anterior y posterior de la pelvis alrededor del eje femoral (5), **Figura 1**.

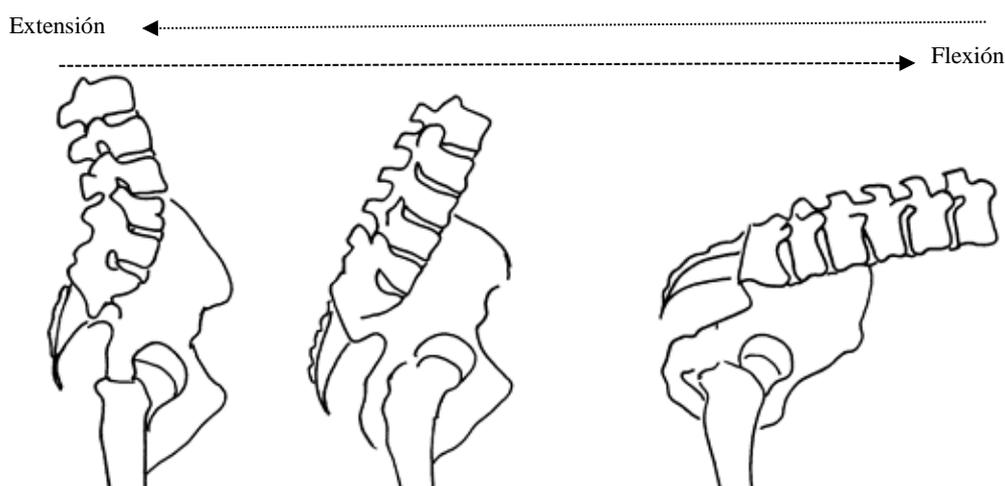


Figura 1. Visión lateral. Cambio de posición del raquis lumbar y de la pelvis durante el movimiento de flexión y extensión del tronco, desde la postura erecta hasta la máxima amplitud en flexión. Imagen cedida por Josefina Navarro

El patrón de movimiento del tronco ha sido definido (6-11) como la contribución relativa del movimiento del raquis lumbar en relación al de la pelvis **Figura 2**. Se expresa como el ratio entre los rangos del movimiento lumbar y pélvico (L/P) (10 , 12-18). Los ratios L/P calculados a ciertos grados de flexión del tronco durante el movimiento completo, proporcionan el conocido “ritmo lumbopélvico” (RL-P) (6 , 19-20). **Figura 3**.

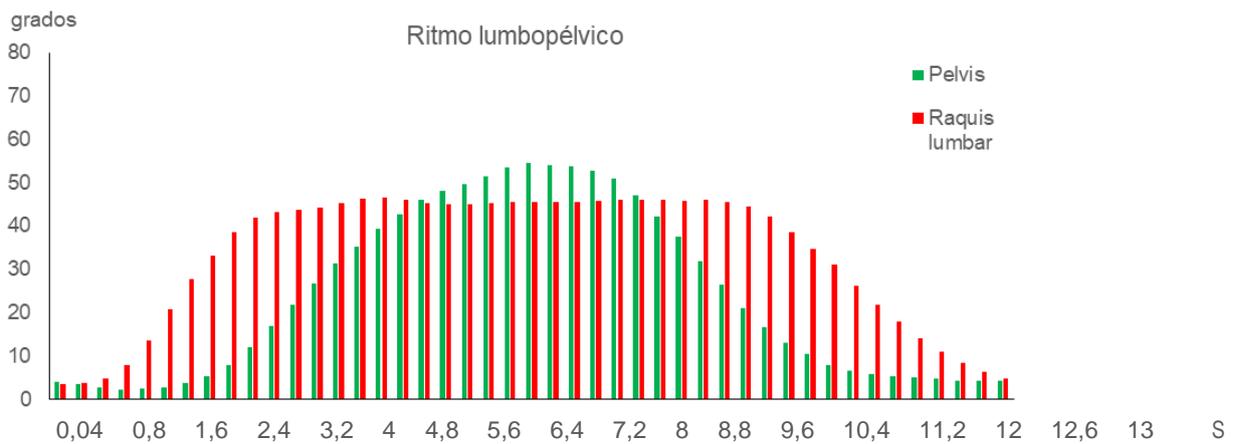


Figura 2. Interacción de la pelvis y del raquis lumbar durante la flexión y extensión del tronco. Cedido por la Profesora Sarti,

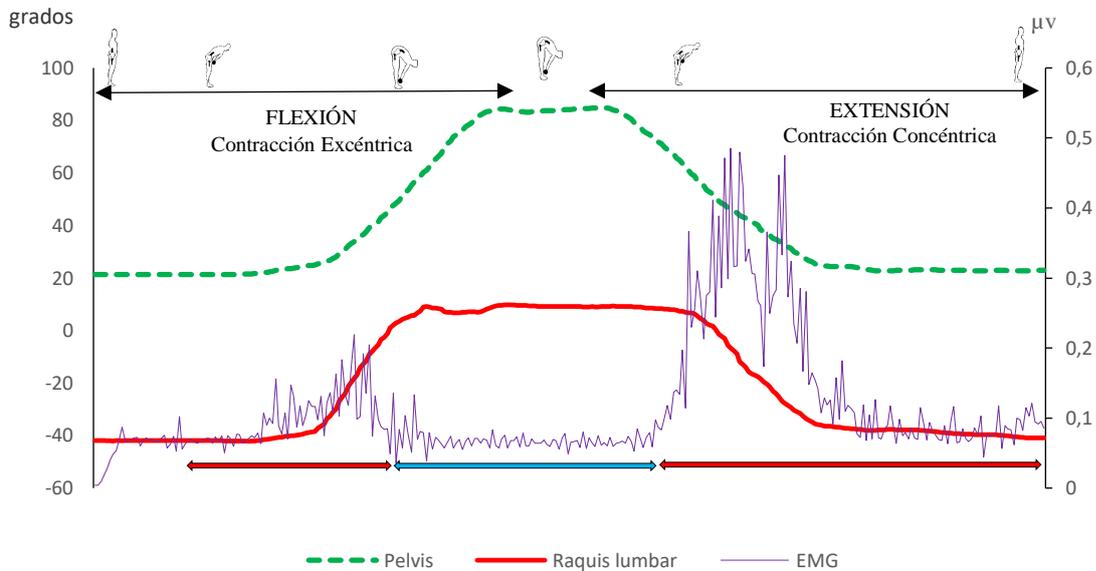


Figura 3. Patrón lumbopélvico durante la flexión y extensión del tronco.

Desde la perspectiva biológica, la Cinesiología (Kinesiology) es el título dado tradicionalmente al conocimiento de la anatomía y a las bases mecánicas del cuerpo humano en las distintas áreas del conocimiento relacionadas con el movimiento, siendo el anatomista Basmajian (21) el introductor de esta disciplina.

También existe el concepto de cinemática (kinematics), que es la categoría dinámica de la mecánica, que estudia específicamente los factores de tiempo, espacio y velocidad de movimiento de un sistema.

En personas sanas, es difícil encontrar uniformidad respecto al ritmo lumbopélvico ya que hay disparidad respecto a los distintos aspectos metodológicos empleados, tales como: la utilización de distinta **instrumentación de registro** como aparatos electromagnéticos 3-D (10-11, 17, 22-23), sistemas de infrarrojos con captación por cámara (12-13), vídeo-cámara (15) o inclinómetros (16), la **muestra**, incluyendo personas sanas, varones (10-11, 13-17, 22-23), mujeres (12, 14, 16, 22-23), o personas con dolor lumbar (12, 16-17, 22-23). También existen diferencias respecto al **ejercicio realizado** pudiéndose tratar de flexión del tronco (15-22), extensión (13-14, 23) o al estudio de ambos (10-12, 16-17), teniendo en cuenta la rotación de la pelvis (10-15, 17) o la flexión de la cadera (22). El **tratamiento de datos** también dista de unos autores a otros dividiendo el movimiento cada 10% (10), 5% (17, 24), 25% (23-24) o cada 30 grados de flexión (14, 22). Otros autores sin embargo, dividen el movimiento en dos partes iguales (11). Hay estudios que llegan a eliminar los últimos grados de flexión (8, 17). Así mismo, las distintas **variables calculadas** complican la comparación de los resultados obtenidos por diversos estudios. Algunos autores estudian el rango de movimiento (10-12, 16-17, 22) medido en grados, otros el rango relativo, normalizado al máximo rango de los segmentos estudiados o al tronco (13, 17) dando información sobre el porcentaje que el raquis lumbar y la pelvis han flexionado respecto a su rango total de flexión. Otros autores sin embargo, utilizan el ratio lumbopélvico o contribución (14, 16, 22), es decir, el movimiento del raquis lumbar y de la pelvis respecto al rango de flexión del tronco.

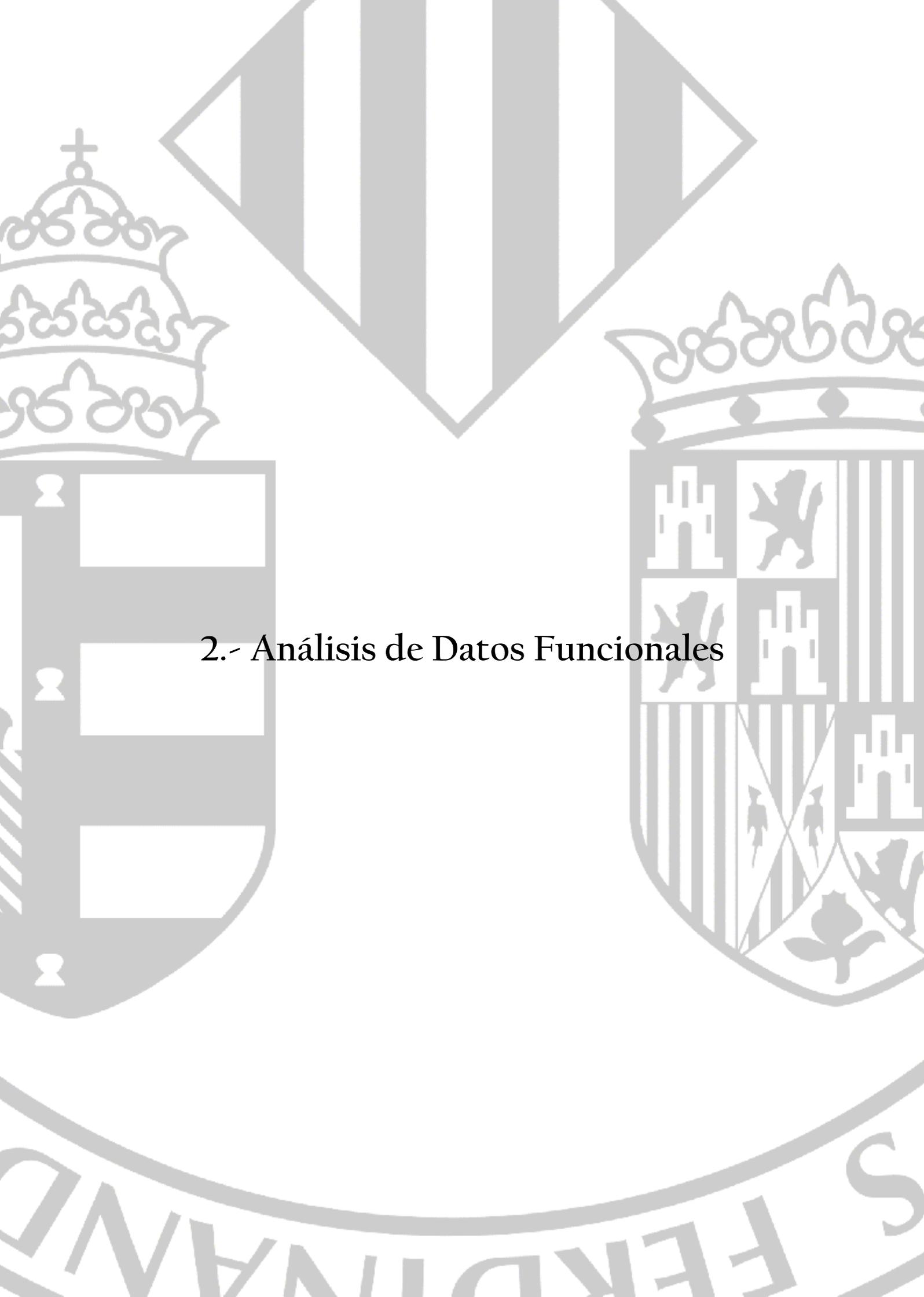
Se han realizado diversos estudios sobre el patrón de movimiento lumbopélvico en sanos (7, 24-26) con muestras compuestas tanto por hombres como por mujeres (7-8, 16-17, 22, 24, 26-30) unos mostraban patrones de movimiento raquis dominante (8, 28-30) y otros mostraban patrones de movimiento pelvis (7, 16, 30) / cadera dominante (22, 28-29, 31). Sin embargo, otros autores (24) observaron patrones de movimiento lumbar y pelvis dominante, a la vez, en una muestra compuesta por hombres. Por otra parte, hay autores (7, 32) que mostraron patrones de movimiento lumbopélvico tanto lumbar como pelvis dominante en una muestra compuesta por hombres y mujeres. Los estudios citados

revelan que los individuos sanos muestran patrones de movimiento lumbar y pelvis dominante.

En este sentido, durante los últimos años (7, 9, 24-27, 32-33) se han publicado y divulgado distintos aspectos sobre el tema referido.

El propósito de este trabajo, es utilizar las herramientas del análisis de datos funcionales para estudiar el patrón de movimiento lumbopélvico en personas sanas. Los valores del rango de movimiento del raquis lumbar y de la pelvis a lo largo de la flexión y extensión del tronco, se considerarán como funciones observadas como entidades únicas, no como una secuencia de observaciones (34), lo que va a permitir estudiar los movimientos de flexión y extensión completos como una unidad, es decir, será un único dato para cada individuo (dato funcional) (35-37). Además de evidenciar la existencia de patrones de movimiento raquis y pelvis/cadera dominante, estudiaremos sus principales características.

En función de la información previa podemos concluir que, la utilización de técnicas de datos funcionales es la apropiada para el estudio del rango de movimiento tanto del raquis lumbar como de la pelvis en personas sanas, y que éstas exhiben patrones de movimiento lumbopélvico tanto lumbar dominante como pelvis dominante.



2.- Análisis de Datos Funcionales

2. ANÁLISIS DE DATOS FUNCIONALES

2.1.- Introducción

Los grandes avances llevados a cabo en la ciencia y en la tecnología durante los últimos años, han permitido que en muchos campos científicos se almacenen grandes cantidades de datos, en concreto, gran volumen de información para un mismo individuo (38). Generalmente, la información es recogida de manera discreta. No obstante, el conjunto formado por estos datos se puede ver a menudo como una función continua de una variable a lo largo del tiempo. Como ya hemos visto en el capítulo anterior, este tipo de datos se conoce con el nombre de datos funcionales. (39)

El análisis de datos funcionales (FDA) es una parte de la Estadística relativamente nueva, el trabajo pionero fue realizado por Deville (40) y posteriormente por Ramsay & Dalzell (41). A partir de ellos, la comunidad estadística ha estado interesada en el FDA (2, 4, 42). Los profesores Ramsey y Silverman (1) introdujeron un nuevo concepto en el análisis de datos multivariado que consiste en hacer que los datos, en lugar de ser tratados como vectores, se los convierte en funciones (42). Se han propuesto versiones funcionales para métodos estadísticos tradicionales como, por ejemplo, regresión, análisis de la varianza, modelo lineal generalizado o componentes principales (2, 42-44).

El FDA permite estudiar y analizar la información contenida en funciones, curvas de superficie, o cualquier elemento que varíe en un continuo. Los objetivos de este tipo de análisis son esencialmente los mismos que en cualquier otra área de la Estadística (46), la obtención de una representación de los datos que, facilite su entendimiento y resalte las distintas características, el estudio de posibles patrones de variabilidad de los datos, la explicación del por qué de las variaciones de un resultado o bien, la comparación de conjuntos de datos con respecto a cierto tipo de variaciones (39, 46). En palabras de Ramsay, el FDA no es un mero conjunto de técnicas para extraer información, sino una manera de pensar y concebir el análisis estadístico (4).

2.2.- Descripción de los Datos Funcionales

En el FDA la idea básica consiste en tratar los datos observados como tan solo una observación, en lugar de como una sucesión de observaciones individuales (4, 35-37, 39, 42-43, 47). Se asume la existencia de una función que da lugar a los datos observados. Ferraty and Vieu (48) definen una variable aleatoria funcional X como una variable aleatoria que toma valores en un espacio de funciones, es decir, en un espacio infinito

dimensional (espacio funcional). Por lo tanto, un conjunto de datos funcionales es una muestra $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ extraída de una variable funcional X . Un dato funcional es la observación de la variable aleatoria a lo largo de un intervalo (comúnmente de tiempo) continuo fijo.

En la práctica, los datos funcionales son n pares ordenados (t_j, y_j) observados de manera discreta donde y_j es un valor de la función $x(t_j)$ en el tiempo t_j , usualmente afectado por un error ε_j . Esto se expresa de forma algebraica, como: $Y = x(t) + \varepsilon$, donde y , $x(t)$ y ε son vectores de longitud n .

2.3.- Suavizado: Representación de funciones

La primera dificultad que siempre tendremos al analizar datos funcionales, es encontrar una representación adecuada, puesto que en la práctica son obtenidos y registrados de un modo discreto y es necesario convertir los datos disponibles en bruto a funciones con las cuales trabajar.

2.3.1.- Bases de Funciones

Una base es un conjunto de funciones $\{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ conocidas que son linealmente independientes entre sí y tienen la propiedad de que cualquier función puede ser aproximada, tan bien como se quiera, mediante una combinación lineal de k de ellas, con k suficientemente grande. De esta forma, la observación funcional puede aproximarse como:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K c_k \Phi_k(t)$$

Debido a la alta dimensión de los datos funcionales, se elige un número K para representar los datos, convirtiendo el problema de dimensión infinita en un problema multidimensional. La elección del parámetro K y de la base más adecuada para los datos observados es crucial y, en principio, no hay ninguna regla que permita hacer una elección óptima de forma universal.

El parámetro K es, en cierto modo, un parámetro de suavización de los datos funcionales. Si K es bajo tendremos un modelo manejable pero posiblemente habremos perdido información relevante. Si K es alto representaremos muy bien los datos, pero el problema de la dimensión cobra importancia y se corre el riesgo de ajustar el ruido que puede distorsionar los resultados fácilmente. Para elegir el número de funciones base,

existen varios métodos basados en los datos, aunque ninguno es válido en todos los casos. A día de hoy todavía sigue siendo un campo de investigación activo. En general, se suele probar distinto número de bases y, en base a las gráficas de la función y sus derivadas, se decide.

Una estrategia razonable es calcular la media de la varianza de los residuos de todas las funciones de la muestra e ir añadiendo bases mientras la media de la varianza decrezca rápidamente.

Respecto a la elección de la base, para datos periódicos se suele emplear la base de Fourier y para datos no periódicos la base B-Spline o la wavelet. Las familias de sistemas base más comunes son:

- a) *Bases de B-Splines*: Un B-Spline está formado por trozos de polinomios conectados entre sí. El primer paso consiste en dividir el intervalo sobre el que se desea aproximar la función de interés en L subintervalos separados por valores p_l , $l = 1, \dots, L-1$. Estos valores p_l son conocidos como nodos. Un B-Spline de grado p , consiste en $p+1$ trozos de polinomios de orden p que se unen en p nodos internos y las derivadas hasta el orden $p-1$ son continuas en los puntos de unión. Para construir un B-Spline de grado p son necesarios $p+2$ nodos. Una función B-spline de grado k es una curva paramétrica, compuesta de una combinación lineal de bases B-Spline $B_{i,k}(t)$ de grado k , obtenida mediante:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{N+k} c_i B_{i,k}(t) \quad t \in [t_0, t_{N+1}]$$

Los c_i son llamados *puntos control* o *puntos de Boor* (49). Para un B-spline de grado k con N nodos interiores existen $M=N+k+1$ puntos control.

En la **Figura 4** se muestra siete funciones bases B-spline para una función B-spline de orden 3, definidas por tres nodos equiespaciados (2625, 3750 y 4875), y los puntos límites inferior y superior son 1500 y 6000, respectivamente. **Figura 4.**

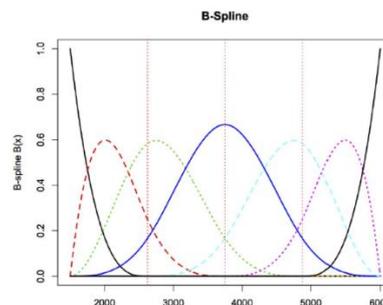


Figura 4: B-spline

- b) *Sistemas base de Fourier*: La transformada rápida de Fourier permite encontrar eficientemente todos los coeficientes cuando los argumentos son igualmente espaciados. Es especialmente útil para funciones estables, sin grandes variaciones y con curvatura más o menos estable. No será apropiada para funciones que tengan discontinuidades o que las presenten en sus derivadas de orden bajo.
- c) *Bases de wavelets*: Las wavelets se usan como funciones básicas para representar otras funciones, tal y como se hace con las funciones seno y coseno en la transformada de Fourier. La transformada wavelet es el más reciente de éstos métodos de representación. Una base de wavelets se puede adaptar fácilmente para trabajar con funciones discontinuas o no diferenciables.

Existen otras familias de bases menos utilizadas, como son las Bases de potencias exponenciales, Bases polinomiales, Bases de funciones constantes,...

2.3.2.- Construcción de datos funcionales

De la expresión dada en el apartado anterior para aproximar una observación funcional:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(t)$$

Se observa que el problema consiste en estimar el vector de constantes c_k que contiene el peso que tiene cada función de la base sobre la función de interés $x(t)$. Existen diferentes formas de aproximar los coeficientes básicos dependiendo del tipo de observaciones con que estemos trabajando. Si el predictor funcional es observado con error, podemos utilizar una aproximación suave, como la *aproximación de mínimos cuadrados ordinarios y ponderados* (1), después de elegir funciones base adecuadas. Si consideramos que las curvas muestrales son observadas sin error utilizaríamos algún método de interpolación, como por ejemplo la *interpolación Spline Cúbica*.

Ambos métodos, suavizado e interpolación, nos permiten obtener la forma funcional de trayectorias muestrales mediante la aproximación de coeficientes base a partir de observaciones de las curvas muestrales en tiempo discreto.

2.4.- Outliers en Datos Funcionales

Una de las ramas de estudio más importantes de la estadística es el análisis de la calidad de los datos, ya que los datos con problemas pueden conducir a decisiones erróneas con graves consecuencias. Entre los posibles problemas que pueden presentar los datos, se encuentran los conocidos como valores atípicos (outliers).

Para el análisis de datos funcionales, la detección de outliers es un campo todavía muy reciente. Las dos razones por las que pueden aparecer outliers en los datos funcionales:

- Pueden ser causados por errores de medición.
- Pueden ser observaciones correctas, que son sospechosas de ser erróneas, en el sentido que no siguen el mismo patrón que la mayoría de las curvas.

Las observaciones funcionales pueden desviarse de la mayoría de las curvas en diferentes formas:

- Outliers aislados: Presentan un comportamiento extraño durante un intervalo breve de tiempo.
- Outliers persistentes: Observaciones funcionales que presentan un comportamiento extraño durante la mayor parte de su dominio.
 - Outliers desplazados: Presentan la misma forma que la mayor parte de las curvas pero de manera desplazada.
 - Outliers en la forma: Presentan una forma distinta al resto de las curvas pero sin destacar necesariamente en ningún instante de tiempo.
 - Outliers en amplitud: Presentan la misma forma que el resto de las curvas pero difieren en su escala (rango, amplitud, etc.).

En un análisis estadístico multivariado de dimensión d , para cada individuo de la muestra tenemos un vector con d componentes que corresponden con las mediciones tomadas sobre las variables objeto de estudio. Si $d=1$ estamos ante el caso unidimensional y, para detectar valores anómalos, podemos usar el famoso diagrama de caja y bigotes de Tukey.

Esta sencilla representación gráfica además de dar información sobre la dispersión, asimetría... también sirve para detectar outliers. Pero en \mathbb{R}^d , con $d > 1$ y, en los espacios de funciones, no tiene sentido hablar de cuartiles al no ser un conjunto ordenado, por lo que necesitamos obligatoriamente medidas de centralidad que extiendan esta idea para construir los diagramas de caja.

Para generalizar el concepto de estadístico ordenado en conjuntos multivariados, existen diferentes versiones de un término conocido como *profundidad* o *depth*. La profundidad puede interpretarse como una medida de la centralidad del dato. Se entiende que si éste tiene un valor alto de profundidad, entonces es porque se encuentra próximo al centro de la nube de puntos, e irá disminuyendo a medida que nos alejemos de la zona central.

2.4.1.- Medidas de Profundidad

Bandas de Profundidad Funcional

En análisis de datos funcionales, cada observación realizada a lo largo del tiempo para cada individuo se corresponde con una curva. Nuestro objetivo se centra en encontrar un método con el que poder ordenar la muestra de mayor a menor profundidad.

Una banda de profundidad formada por J curvas de la muestra, siendo $2 \leq J \leq n$, no es más que la mayor región del plano que queda contenida entre las J funciones,

Figura 5.

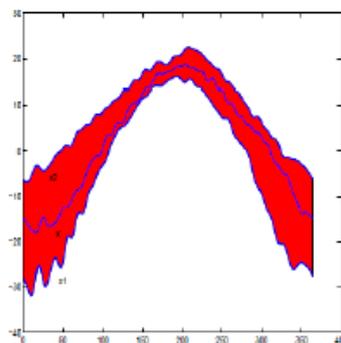


Figura 5: Banda de profundidad determinada por dos curvas y una tercera contenida (4)

Bandas de Profundidad Funcional Mejoradas

Como hemos visto, en el análisis estadístico funcional tenemos tres tipos de outliers, los relacionados con la forma, la amplitud, y los desplazados. La profundidad de banda sólo nos sirve para detectar los primeros. Necesitamos, por tanto, mejorar la definición de banda tradicional. Lopez Pintado y Romo (50) introducen las *generalized band depth* (bandas de profundidad mejoradas o MBD)

La propia definición de banda nos permite hallar curvas que sean representativas en cuanto a magnitud, es decir, las que quedan muy alejadas de la curva media. La versión mejorada, al tomar solamente la proporción de tiempo que el dato funcional

queda contenido, nos permite obtener curvas más representativas por su forma o patrón singular

Profundidad de Faiman-Muniz (FMD)

Dependiendo de la profundidad univariante elegida, la FMD puede tener interpretaciones de media, mediana o moda.

Profundidad Modal (MD)

Esta medida observa relaciones de cercanía entre las funciones para asignar la mayor profundidad al elemento que esté, de alguna manera, más rodeado. Su interpretación se asemeja a una moda.

Profundidad basada en proyecciones aleatorias (RPD)

Está basada en los trabajos de Cuesta-Albertos (51) y Fraiman (52), que introdujeron la idea de proyecciones aleatorias para funciones.

Profundidad basada en Tukey (RTD)

Es la RPD basada en la distancia de Tukey

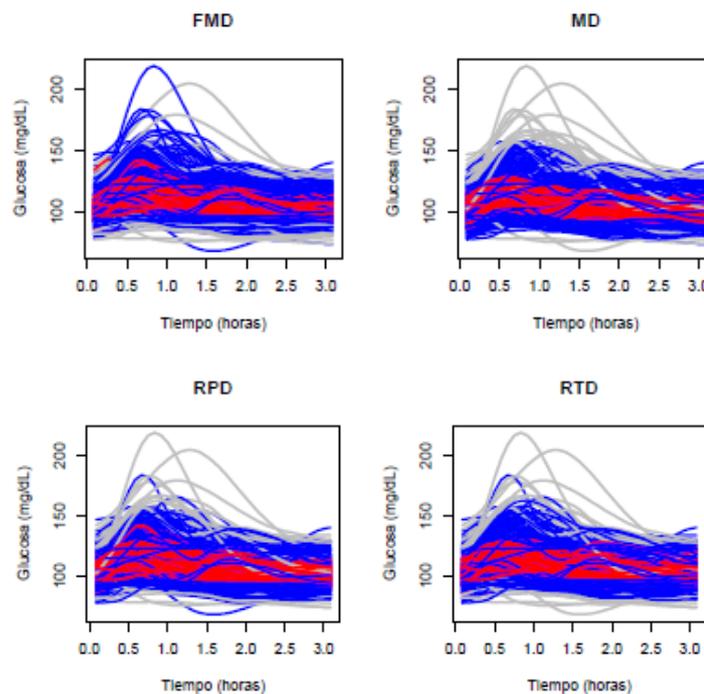


Figura 6: Cálculo de la Profundidad por los 4 métodos expuestos. Las líneas rojas son las curvas del 50% más profundas, las grises son el 5% de las menos profundas y las azules son el 95% del medio.

2.4.2.- Metodologías para detectar outliers de datos funcionales

Los métodos más utilizados para detectar atípicos en datos funcionales son:

1) Método basado en contraste de hipótesis

Está basado en la profundidad de los datos funcionales, asumiendo la independencia de los mismos y obteniendo un contraste de hipótesis para saber si cada una de las curvas de un conjunto de datos es atípica o no.

Se procede como sigue:

1. Se calcula la profundidad asociada a cada curva del conjunto de datos.
2. Las curvas cuya profundidad es menor o igual que el punto de corte son los atípicos detectados y se eliminan del conjunto de datos.
3. Se vuelve al paso 1 y se repite el proceso hasta que no se detecten más atípicos. (al eliminar las curvas atípicas cambia el conjunto de datos)

El punto de corte se calcula eligiendo el error de tipo I en el contraste que fija como hipótesis nula que un dato no es atípico (generalmente, el 1%). El proceso mediante el que se calcula es el siguiente:

1. Se calcula la profundidad asociada a cada curva del conjunto de datos.
2. Se limpia la muestra de posibles atípicos. Se utiliza el método gráfico del boxplot funcional (se explica al final del presente apartado) y se eliminan de la muestra los atípicos detectados.
3. Obtener remuestras bootstrap de tamaño n del conjunto de datos.
4. Para cada conjunto bootstrap obtener el percentil 1% de la distribución de las profundidades
5. Obtener la mediana de todos los percentiles obtenidos

El cálculo de la mediana se realiza solamente una vez, manteniendo el mismo valor en las distintas iteraciones del proceso. El cálculo del punto de corte podría actualizarse en cada iteración, pero esta opción se rechaza debido al incremento del coste computacional requerido.

2) Métodos basados en reducción de la dimensión

Esta clase de métodos se basa en transformar la serie de tiempo funcional en una serie de tiempo univariante. Una vez realizada la transformación, se modeliza la serie de tiempo univariante obtenida mediante un modelo ARIMA, ajustando los atípicos detectados mediante las técnicas habituales. Cada uno de los atípicos detectados en la serie de tiempo univariante se corresponde con un dato funcional, resultando ser el atípico funcional buscado.

El primero de los métodos propuestos utiliza para la transformación proyecciones aleatorias. Las proyecciones aleatorias permiten reducir la dimensión. Este método proporciona una herramienta exploratoria para ver qué datos funcionales son atípicos.

El segundo de los métodos propuestos tiene el mismo fundamento que el anterior. Se utiliza una descomposición en componentes principales funcionales robustas (se explica en punto 2.6 de este capítulo). Se toman las componentes principales necesarias para lograr una proporción de la varianza explicada de los datos suficiente para el análisis. Con cada una de las componentes principales se crea una serie de tiempo univariante. Las series de tiempo univariantes que resultan se estudian mediante un modelo ARIMA sobre el que se buscan los atípicos. Cada atípico detectado se asocia a un dato funcional, resultando el atípico funcional buscado.

3) Métodos gráficos

Los *rainbow plots* o diagramas de arco iris ofrecen una solución sencilla y gráfica para detectar datos anómalos, sobre todo cuando el tamaño muestral es elevado y se observa excesivo solapamiento. Su propuesta se basa en calcular los valores de profundidad para cada dato para luego asignarles un color dentro de la gama del arcoiris. Los tonos más cercanos al rojo serán los centrales mientras que los violáceos corresponderán a los de menor profundidad, **Figura 7**.

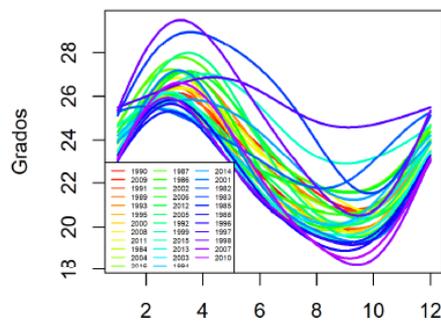


Figura 7: Rainbow plot (4)

Sun y Genton (53) extendieron la construcción de los gráficos boxplot al caso funcional, el *Boxplot funcional*. Para ordenar la muestra, se basaron en una medida de profundidad propuesta por López-Pintado y Romo (50) que se basa en la representación gráfica de los datos y de las bandas que determinan el plano.

Se construye siguiendo el procedimiento de un gráfico de cajas, pero considerando toda la curva, lo que supone una extensión del boxplot clásico de Tukey al caso funcional. En el boxplot clásico, la caja representa el 50% de los datos. En el boxplot

funcional se busca el 50% de las observaciones más profundas. Esta región central da una medida robusta de dispersión del 50% de las curvas más centrales.

La mediana, es la curva más central, la de mayor profundidad. La mediana funcional también es un estadístico robusto para medir centralidad. La idea de regiones centrales puede ampliarse para definir las regiones del 25 y 75%.

Los bigotes del gráfico boxplot son las líneas que se extienden desde la caja hasta la última observación que no es atípica. Se define la región exterior inflando la región central 1,5 veces su tamaño. Cualquier curva fuera de estos límites se clasifica como un potencial outlier, **Figura 8**.

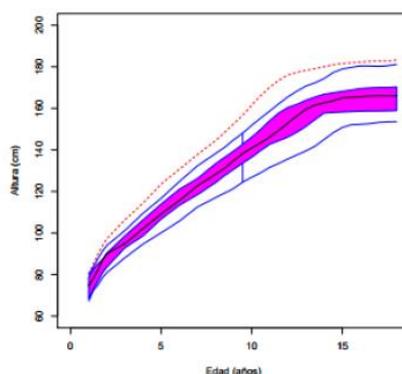


Figura 8: Boxplot funcional

La representación gráfica puede realizarse de dos modos diferentes, el primero, si optamos por suavizar la muestra previamente y hacer el boxplot después, entonces las curvas presentarán un error debido al método de reconstrucción empleado y por tanto, podría ocurrir que hubiese datos anómalos que se “suavizasen” pasando el filtro de anormalidad. El segundo, que es al contrario, si decidimos usar los datos en bruto, las regiones centrales podrían presentarse rugosas y poco definidas. Normalmente se realizan ambos para constatar sus limitaciones y fortalezas

Shang y Hyndman (54) presentan métodos gráficos para la representación de datos funcionales, que permite la detección de outliers.

Diagrama funcional basado en la profundidad (functional bagplot)

Los autores lo denominan *bivariate bagplot*. Está basado en la noción de bagplot introducida por Rousseeuw et al. (55).

Obtenido el bagplot, consta de tres partes:

- La mediana: punto con mayor profundidad o, en caso de no ser un único punto, el centro de la gravedad de la región más profunda.
- El saco (bag): aquella región comprendida entre dos regiones consecutivas y que se obtiene por interpolación lineal tomando como referencia la mediana.
- La corteza (fence): una región obtenida mediante una homotecia de factor ρ del saco, tomando siempre como referencia la mediana. En la literatura utilizan $\rho=3$ (55) y $\rho=2.58$ (54) para que la corteza contenga el 99% de las observaciones.

Puesto que cada punto representa una función, las gráficas de las funciones contenidas en el saco y la corteza dan lugar al funcional bagplot: una región del plano constituida por la curva mediana, la correspondiente al punto más profundo, una región interior definida por las gráficas de las curvas correspondientes a los puntos del saco, y que son el 50% del total, y una región exterior definida por las gráficas de las curvas correspondientes a los puntos de la corteza, **Figura 9**

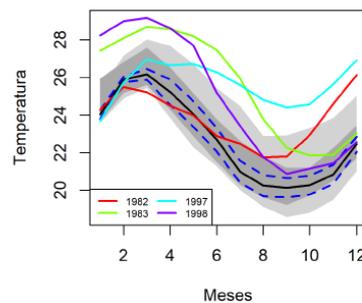


Figura 9: Bagplot funcional (4)

Diagrama funcional basado en la densidad (functional HDR boxplot)

Está basado en el diagrama bivalente de regiones de alta densidad (bivariate HDR boxplot), aplicado también a los scores de las dos primeras componentes principales de la familia de funciones. Estimada una densidad a partir del conjunto de los scores, la región de alta densidad (HDR) es aquella en cuyos puntos la densidad estimada es mayor que en cualquiera de los puntos de su complementario. En el bivariate HDR boxplot el punto de mayor densidad, equivalente al más profundo en el bivariate bagplot, es la moda.

2.5.- Estadísticos descriptivos para Datos Funcionales

Aunque probablemente cualquier estudio estadístico de un conjunto de datos debería empezar por un análisis descriptivo sin duda alguna este apartado no ha merecido demasiada atención. El libro de Ramsay y Silverman (56) solo recoge como herramientas

para resumir los datos: la media funcional, la varianza funcional, la función de covarianza y las componentes principales funcionales.

En el análisis de datos funcionales hay que hacer distinciones entre los diferentes estadísticos, en función de si se definen para estudiar la tendencia central y la dispersión dentro de un solo elemento (estadísticos sobre una función), o bien si se definen para estudiar una muestra de funciones (estadísticos de una muestra de una función aleatoria) o bien si se definen para estudiar muestras de dos o más funciones aleatorias. (43)

La primera clase de estadísticos resume la información de una función, la segunda clase de estadísticos caracteriza una muestra de funciones de una función aleatoria y la tercera clase estudia la relación en muestras de dos o más funciones aleatorias.

2.5.1.- Estadísticos sobre una función

- Media de una función / valor medio de una función $x(t)$. La media de $x(t)$ (\bar{x}) representa la tendencia central y el nivel medio de todos los valores de $x(t)$.
- Función valor medio de una función $x(t)$. Es aquella cuyo valor $\forall t \in T \subset \mathbb{R}$ es el de la media de $x(t) = \bar{x}$ (función constante). El área que encierra la función $x(t)$ es la misma que el área que encierra la función valor medio. Tiene sentido a la hora de expresar la varianza y la covarianza de una función.
- Varianza de una función $x(t)$. Se representa por $S_{x(t)}^2$. Representa la variación cuadrática media de todos los valores de la función respecto a su valor medio. Gráficamente una función con mucha variabilidad será aquella que englobe un área grande entre dicha función y la función valor medio.
- Covarianza entre dos funciones $x(t)$ e $y(t)$. Se representa por $S_{x(t),y(t)}$. Mide la relación entre dos funciones. Es el producto de dos áreas, por una parte, la comprendida entre una función $x(t)$ y su valor medio \bar{x} y, por otra, la comprendida entre una función $y(t)$ y su valor medio \bar{y} .
- Correlación entre dos funciones $x(t)$ e $y(t)$. Se representa por $r_{x(t),y(t)}$. Su valor se sitúa entre -1 y +1. Si vale $\cong +1$ indica que en el mismo rango de t , las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen el mismo signo. Cuando vale $\cong -1$ indica que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen signo distinto, y cuando vale $\cong 0$, indica que en unos

intervalos de t , la función $x(t)$ es 0 y en otros intervalos, la función $y(t)$ es 0,
Figura 10.

El valor medio, la varianza y la correlación nos van a servir para identificar bien el comportamiento particular de cada una de nuestras funciones y sus relaciones dos a dos.

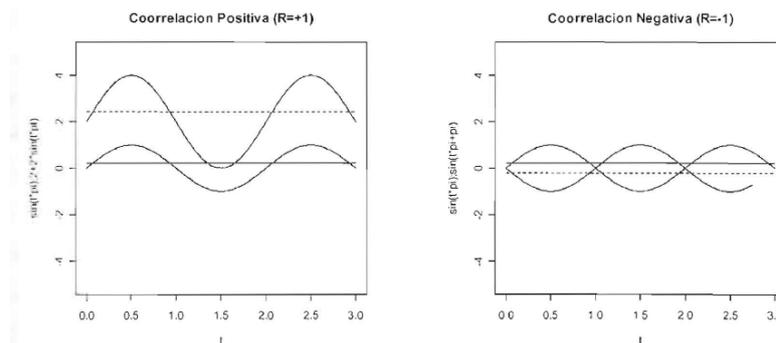


Figura 10: Ejemplos de correlación positiva y negativa entre dos funciones

2.5.2.- Estadísticos de la muestra de una función

Sea una muestra $X_1(t), \dots, X_n(t)$ extraída de una variable funcional X , definida en $t \in T \subset \mathbb{R}$. Definimos las siguientes funciones descriptivas generalizando las definiciones de los estadísticos para muestras multivariantes (1) :

- Función Media muestral. Es la media de los valores muestrales en cada valor de t , de forma explícita en una sola función. Se calcula mediante:

$$\bar{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i(t)}{N}$$

- Función Varianza muestral. Es el valor medio al cuadrado de las desviaciones respecto a la media en cada valor de t , de forma explícita en una sola función. Se calcula mediante:

$$\text{var}(X(t)) = \frac{\sum_{i=1}^N [x_i(t) - \bar{x}(t)]^2}{N - 1}$$

- Función Desviación estándar muestral. Es el valor medio de las desviaciones respecto a la media en cada valor de t , de forma explícita en una sola función. Se calcula mediante:

$$Stdev(X(t)) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N [x_i(t) - \bar{x}(t)]^2}{N-1}}$$

- Función Covarianza muestral: Es la covarianza muestral de $x(t)$ entre t_1 y t_2 . Se calcula mediante:

$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i(t_1) - \bar{x}(t_1))(x_i(t_2) - \bar{x}(t_2))}{N-1}$$

- Función Correlación muestral: Es la correlación muestral de $x(t)$ entre t_1 y t_2 . Se calcula mediante:

$$Corr(X(t_1), X(t_2)) = \frac{Cov(X(t_1), X(t_2))}{\sqrt{var(X(t_1))} \cdot \sqrt{var(X(t_2))}}$$

Los dos últimos estadísticos nos va a indicar la magnitud de la relación entre el comportamiento de la función $x(t)$ en el instante t_1 y el comportamiento de $x(t)$ en el instante t_2 .

2.5.3.- Estadísticos de muestras de dos o más funciones

Sea una muestra $X_1(t), \dots, X_n(t)$ extraída de una variable funcional X , y otra muestra $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ extraída de una variable funcional Y , definidas en $t \in T \subset \mathbb{R}$.

Definimos

- Función Covarianza cruzada: Es la covarianza cruzada de $x(t)$ e $y(t)$ en t_1 y t_2 . Se calcula mediante:

$$Cov(X(t_1), Y(t_2)) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i(t_1) - \bar{x}(t_1))(y_i(t_2) - \bar{y}(t_2))}{N-1}$$

- Función Correlación cruzada: Es la correlación cruzada de $x(t)$ e $y(t)$ en t_1 y t_2 . Se calcula mediante:

$$Corr(X(t_1), Y(t_2)) = \frac{Cov(x(t_1), y(t_2))}{\sqrt{var(x(t_1))} \cdot \sqrt{var(y(t_2))}}$$

Estos estadísticos nos dan magnitud de la dependencia entre una y otra función para t_1 y t_2 fijados. Observemos que si fijamos t_1 y t_2 , lo que estamos haciendo es calcular la relación entre la muestra $X_1(t_1), \dots, X_n(t_1)$ y la muestra $Y_1(t_1), \dots, Y_n(t_1)$.

2.6.- Análisis en Componentes Principales Funcionales

La idea fundamental del análisis de componentes principales (ACP) es encontrar una secuencia de vectores ortogonales que expliquen de la forma más eficiente la varianza de las observaciones, es decir, reducir la dimensión del conjunto de datos conservando tanto como sea posible la variación presente en los mismos. De esta forma se podrá sustituir el tratamiento estadístico de los datos originales con el vector correspondiente a las proyecciones. El objetivo es considerar la máxima información dentro de una combinación lineal de autofunciones, obteniendo de tal forma una base de menor dimensión. Se busca que la primera componente de dicha base contenga la mayor proporción posible de la variabilidad original, luego para la segunda componente se busca que contenga la máxima variabilidad restante y así sucesivamente para los otros componentes.

El ACP fue uno de los primeros métodos adaptados a datos funcionales. Este cambio a datos funcionales se puede ver simplemente como un reemplazo de los vectores por funciones, las matrices por operadores lineales, las matrices de covarianza por operadores de covarianza y los productos escalares en espacios vectoriales por productos escalares en espacios funcionales (1).

Los objetivos del Análisis en Componentes Principales Funcionales (ACPF) son los mismos del análisis ACP, es decir, encontrar los modos dominantes de variación y conocer cuántos de éstos son necesarios para lograr una aproximación satisfactoria a los datos originales. En el contexto funcional en general se trabaja con la función de covarianzas y no con la de correlación, porque los valores de las funciones están en la misma escala.

La gran ventaja que nos proporciona el ACPF es que nos permite reducir un problema infinito dimensional a un conjunto de curvas, resultado de realizar combinaciones lineales con las componentes principales, el cual nos da una visión resumida del mismo, pudiendo apreciarse características globales.

ACP para datos funcionales

La idea fundamental de esta extensión es la de conservar todas las bondades del ACP como herramienta para la reducción de la dimensión, acondicionándolas a este tipo de datos

La primera componente principal funcional $\alpha_1(t)$ de X está definida por:

$$\alpha_1(t) = \max_{\|\alpha\|^2} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\int \alpha_1(t) x_i(t) dt \right]^2$$

donde $x_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ son funciones y $\alpha_1(t)$ es la función de pesos del ACPF.

La k-ésima componente principal funcional $\alpha_k(t)$ se calcula de forma análoga sujeta a la restricción adicional:

$$\int \alpha_j(t) \alpha_k(t) = 0, \forall j < k$$

Operador covarianza y Análisis de valores y vectores propios

Sea $v(s,t)$ la función de covarianza de la muestra definida por:

$$v(s,t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n x_i(s)x_i(t)$$

Para una función arbitraria f sobre un intervalo I , el operador de covarianza de la muestra V está definido por:

$$(Vf)(s) = \int_I v(s,t)f(t)dt, s \in I$$

dicho operador extiende el concepto de matriz de covarianza de la muestra a los datos funcionales.

Existe una diferencia importante entre el problema del análisis de vectores y valores propios del caso multivariado y el del caso funcional. El rango de la matriz de covarianza en el caso multivariado está acotado superiormente por el número de variables, pero el caso funcional es infinito. No obstante, dado que las funciones no son linealmente dependientes, solo hay $n-1$ valores propios diferentes de cero.

En la **Tabla 1** se muestran las diferencias fundamentales entre el análisis de componentes principales clásico y el funcional. (2)

	ACP	ACPF
Variabes	$X = [x_1, x_2, \dots, x_p]$	$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)], x \in [x_1, x_p]$
Datos	Vectores en \mathbb{R}^p	Curvas en $L_2[x_1, x_p]$
Covarianza	Matriz $\Sigma = \text{Cov}(x)$	Operador $V: L_2[x_1, x_p] \rightarrow L_2[x_1, x_p]$
Vectores Propios	Vectores $\alpha_j \in \mathbb{R}^p$ $\Sigma \alpha_k = \lambda_k \alpha_k,$ $1 \leq k \leq \min(n, p)$	Funciones $\alpha_k(x) \in L_2[x_1, x_p],$ $(V \alpha_k)(x) = \lambda_k \alpha_k, 1 \leq k \leq n$
Componentes	Variables aleatorias en \mathbb{R}^p	Variables aleatorias en $L_2[x_1, x_p]$

Tabla 1. Diferencias entre el análisis de componentes principales clásico y el funcional

Elección del número óptimo de Componentes

Necesitamos encontrar algún criterio que nos ayude a elegir un número adecuado de componentes principales, ya que de esto dependerá en buena medida la cantidad y la calidad de la información recogida.

En el ACPF se define la varianza total como:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N \int_0^T x_i(t)^2 dt = \sum_{i=1}^N \lambda_i$$

De esta manera, se define la proporción de varianza total explicada por la j-ésima componente principal como:

$$V_j = \frac{\lambda_j}{\sum_i \lambda_i}$$

Finalmente, se define la proporción de varianza acumulada por las j primeras componentes como:

$$VA_j = \frac{\sum_{j=1}^N \lambda_j}{\sum_i \lambda_i}$$

En la literatura estadística existen dos grandes conjuntos de métodos para la elección del número óptimo de componentes:

- Criterios teóricos: consisten básicamente en contrastar si los valores propios son significativamente diferentes entre ellos a partir de uno dado. Si se rechaza la hipótesis, y se contrasta que su valor es pequeño, se eligen las componentes asociadas a los primeros valores propios. Estos criterios necesitan de distribuciones asintóticas.
- Criterios empíricos: son más intuitivos y son en realidad los únicos aplicables. Consideramos dos criterios muy sencillos:
 1. *Cut-off*: Consiste en elegir un corte (entre el 70% y el 90 %) y coger el entero más pequeño para el cual la varianza acumulada por las j primeras componentes (VA_j) sea mayor que el corte escogida.

2. *Scree graph*. Es similar a un gráfico de sedimentación. Realizamos un gráfico de los valores de las varianzas de las i componentes (λ_i) o $\log(\lambda_i)$ frente a i . Se unen los puntos mediante rectas y tomaremos como número de componentes el i a partir del cual el gráfico obtenido defina una línea recta.

Herramientas para la interpretación de resultados

Gráfico de las componentes como perturbaciones de la media

Este método propone examinar las gráficas de la media global y de las funciones que se obtienen al sumar y restar un múltiplo conveniente de cada una de las componentes. La elección del múltiplo de las componentes principales que debe seleccionarse, de manera general debe tratarse de un valor que se ajuste al comportamiento de la media y que permita analizar los gráficos, **Figura 11**

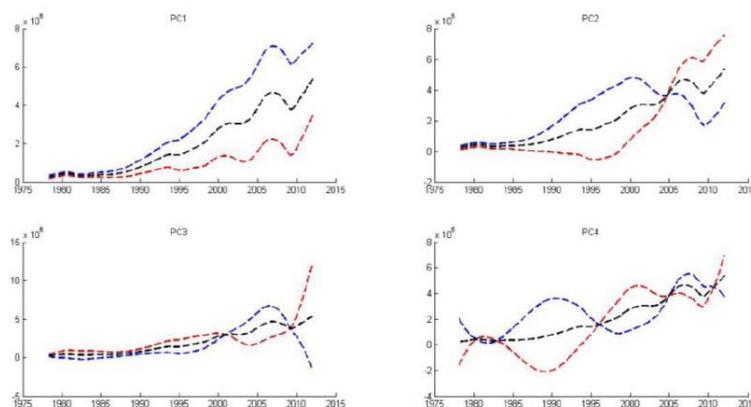


Figura 11: Gráfico de las componentes principales con perturbaciones de la media. La curva negra es la media, las curvas roja y azul el resultado de adicionar y sustraer un múltiplo de cada componente. (2)

Gráfico de los coeficientes de las componentes principales

La utilización de este gráfico es exactamente igual al del ACP, es decir, permite examinar el efecto de cada componente sobre el conjunto de datos, de manera que se puedan identificar grupos dentro del conjunto de datos, **Figura 12**.

El ACPF puede utilizarse únicamente para la visualización o estudio preliminar de los datos, pero a menudo es una herramienta para otros procesos posteriores como la clasificación o la detección de outliers.

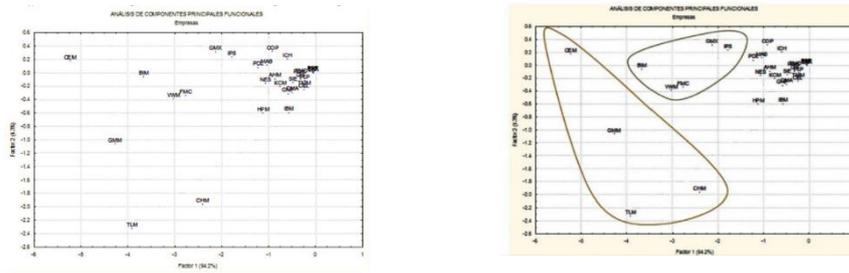


Figura 12: Gráfico los coeficientes de las componentes principales. (2)

2.7.- Análisis de la Varianza Funcional (FANOVA)

El Análisis de Varianza (ANOVA) es una de las herramientas más usadas en la estadística aplicada. Mientras ésta es muy útil cuando se trabaja con datos de pequeñas dimensiones, tiene sus limitaciones analizando variables de interés funcionales. En tales casos, el método de Análisis de Varianza Funcional (FANOVA) provee igual solución que el tradicional ANOVA cuando la variable dependiente es funcional sin dejar de lado su poder de explicación y facilidad de interpretación.

Dadas k muestras independientes de datos funcionales, se considera el problema de probar la hipótesis nula de igualdad de sus respectivas funciones medias. Se propone una simple prueba natural para este problema, se puede ver como una prueba asintótica de la conocida ANOVA F-test. (44).

2.7.1.- Propuesta de Ramsay and Silverman (1).

Si Y es la característica a medir y tenemos G valores para el factor, el modelo que explicaría la i-ésima observación funcional con valor de factor g, denotada por $y_{ig}(t)$ sería:

$$Y_{ig}(t) = \mu(t) + \alpha_g(t) + \epsilon_{ig}(t)$$

Donde $\mu(t)$ es la media general (función promedio de la característica de interés y sin el factor), $\alpha_g(t)$ es la función media de cada valor del factor y $\epsilon_{ig}(t)$ representa la función error, es decir, es la variación no explicada respecto a la i-ésima observación con valor g del factor

En términos matriciales, el modelo puede ser expresado por:

$$y_{ig}(t) = \sum_{j=1}^{G+1} x_{(ig)j} \beta_j(t) + \epsilon_{ig}(t)$$

La estimación de los parámetros funcionales por el criterio de mínimos cuadrados, se obtiene minimizando:

$$SSE(\beta) = \sum_g \sum_i \int_t [y_{ig}(t) - \sum_j^{G+1} x_{(ig),j} \beta_j(t)]^2 dt$$

Téngase en cuenta que la minimización en realidad es respecto al vector de coeficientes c , dado que los $\beta_j(t)$ son combinaciones lineales de los elementos del sistema base ϕ .

Bajo la restricción que $Z_{(pr),0} = 1$ se obtiene la estimación del vector de parámetros β por Mínimos Cuadrados, siendo la medida cuantitativa del error, el área bajo la curva de las funciones residuales al cuadrado.

Básicamente, la mayoría de los estadísticos del análisis de varianza univariado son aplicables al problema funcional, esencialmente, porque el problema del análisis de varianza funcional, se puede considerar como un análisis de varianza univariado (ANOVA) para cada valor específico t del dominio de la función.

Para la validación del modelo al igual que en el análisis de varianza común utilizamos en coeficiente de determinación R^2 y el Estadístico de prueba F de Fisher.

Al igual que en el modelo lineal múltiple, la fuente primaria de información para investigar la importancia de los tratamientos, es la función de suma de cuadrados residual:

$$SSE(t) = \sum_{ig} (y_{ig}(t) - X_{ig} \hat{\beta}(t))^2$$

Dicha función es comparada con la función de suma de cuadrados residual obtenida al utilizar solo la media general $\hat{\mu}(t)$ en el modelo:

$$SSY(t) = \sum_{ig} (y_{ig}(t) - \hat{\mu}(t))^2$$

La Potencia de Explicación del Modelo puede ser calculada por medio de la función del cuadrado de correlación múltiple, análoga del coeficiente R^2 usado en el Análisis de Varianza Simple:

$$R^2(t) = \frac{[SSY(t) - SSE(t)]}{SSY(t)}$$

La función análoga al estadístico F de Fisher, llamado en literatura funcional como F_{RATIO} , se calcula como

$$F_{RATIO}(T) = \frac{MSR(t)}{MSE(t)}$$

Y con ésto, hallar la función P_{VALUE} equivalente a p -valor correspondiente de la prueba F , la cual nos permitirá concluir si en algún instante de tiempo t durante el

experimento, existe algún efecto significativo sobre la variable de interés Y para alguno de los p valores del factor P.

La función P_{VALUE} es calculada como:

$$P(F_{(df_{(reg)}df_{(error)})} \geq F_{RATIO}(t))$$

Se destaca que bajo este enfoque, la prueba F (realizada en cada tiempo t) pierde alguna de sus propiedades, debido a que realizar una prueba F en cada tiempo t con un nivel de significación determinado, no implica el mismo nivel de significación en una prueba conjunta, **Figura 13**.

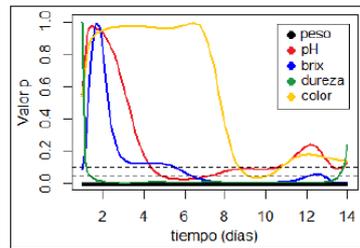


Figura 13: Función P_{VALUE} de Ramsay and Silverman. (34)

2.7.2.- Propuesta de Cuevas, Febrero and Fraiman (44).

Estos autores propusieron un test ANOVA para datos funcionales aplicable al caso de análisis de la varianza con un único factor como tratamiento. Se adapta al caso en el que las curvas se consideran independientes y homocedásticas (igualdad de funciones de covarianzas), sin embargo, puede ser extendido al caso heterocedástico.

Sea $y_{ig}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n_g$, $g = 1, 2, \dots, G$, $t \in [a,b]$, G muestras de trayectorias cuadrado-integrables independientes, tales que $\mu_g(t) = \mu(t) + \alpha_g(t)$ y que se quiere probar la hipótesis nula:

$$H_0 : \mu_1(t) = \mu_2(t) = \dots = \mu_G(t)$$

$$H_1 : \exists k,m / \mu_k(t) \neq \mu_m(t)$$

Para medir la variabilidad “entre grupos” definen el siguiente estadístico

$$V_n = \sum_{g>j} n_g \|\bar{y}_g - \bar{y}_j\|^2$$

Donde:

$$\bar{y}_g = \sum_{i=1}^{n_g} \frac{y_{ig}(t)}{n_g} \quad y$$

$\| \quad \|$ es la norma usual de los espacios cuadrado-integrables L^2

Procedimiento:

1. Calcular la función media para cada grupo o tratamiento \bar{y}_g .
2. Calcular la función media global \bar{y} .
3. Calcular el valor del estadístico de prueba V_n .
4. Establecer si el valor del estadístico de prueba cae en la región de rechazo. Esta región se establecerá mediante procedimientos de remuestreo (bootstrap) utilizados para aproximar la distribución del estadístico de prueba:
 - a. Generar w muestras de tamaño n con reemplazo a partir de los datos originales.
 - b. Calcular para cada una de las muestras el valor del estadístico de prueba.
 - c. Realizar un histograma de estas realizaciones y ubicar en éste, el valor del estadístico calculado con los datos originales. Establecer si éste cae dentro de la región de rechazo (extremo superior de la distribución).
5. Se rechaza la hipótesis nula si el valor observado de V_n de la muestra es mayor que la aproximación bootstrap del valor crítico calculado a partir de la distribución bootstrap.

2.7.3.- Prueba de Shen and Faraway (57).

Estos autores, propusieron una prueba tipo F para modelos lineales con respuesta funcional. Es una extensión de la prueba F multivariada al caso en que la cantidad de mediciones crece.

Se considera la comparación de dos modelos lineales ω y Ω , donde $\dim(\Omega)=p$ y $\dim(\omega)=q$, $p>q$. El modelo ω resulta de una restricción lineal de los parámetros de Ω

Así:

$$H_0: Y(t) = X_1\alpha_1(t) + \varepsilon(t)$$

$$H_1: Y(t) = X_1\alpha_1(t) + X_2\alpha_2(t) + \varepsilon(t)$$

Sea:

$$F = \frac{(rss_\omega - rss_\Omega)/(p - q)}{rss_\Omega/(n - p)}$$

$$\text{Donde: } rss = \sum_{i=1}^n \int_t (y_i(t) - \hat{y}_i(t))^2 dt$$

Los autores demuestran que el estadístico F tiene una distribución denominada distribución funcional F, así mismo, realizan la aproximación de esta distribución a la distribución F de Fisher con grados de libertad:

$$f_1 = \frac{(\sum_{i=1}^{\infty} r_i)^2}{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^2} (p - q)$$

$$f_2 = \frac{(\sum_{i=1}^{\infty} r_i)^2}{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^2} (n - p)$$

Procedimiento:

1. Establecer la matriz diseño para el modelo completo (Ω) y para el modelo reducido (ω).
2. Estimar los parámetros funcionales de cada uno de los modelos ($\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(t)$).
3. Calcular las matrices de sumas de cuadrados mediante:

$$\hat{\sum}_{\omega} = (y(t) - \hat{y}^{\omega}(t))'(y(t) - \hat{y}^{\omega}(t))$$

$$\hat{\sum}_{\Omega} = (y(t) - \hat{y}^{\Omega}(t))'(y(t) - \hat{y}^{\Omega}(t))$$

4. Calcular el estadístico de la prueba F y los respectivos grados de libertad f_1 y f_2 .
5. Determinar si el valor del estadístico de la prueba cae en la zona de rechazo o calcular el valor p para tomar una decisión acerca de la hipótesis enunciada.

2.7.4.- Propuesta de Cuesta-Albertos and Febrero-Bande (58).

La propuesta de estos autores es un test ANOVA para datos funcionales basado en proyecciones aleatorias. La prueba está diseñada para determinar si existe efecto de factores principales y de interacción, así como, para determinar efectos de covariables funcionales en un análisis de dos vías.

Sean R y $S \in \mathbb{N}$ y se asume que $\forall g=1, 2, \dots, G$ y $k=1, 2, \dots, S$ existen y_{igk} $i=1, 2, \dots, n_{gs} \in \mathbb{N}$, funciones aleatorias en un espacio Hilbert separable, tales que:

$$y_{igk}(t) = \mu(t) + \alpha_g(t) + \beta_k(t) + \rho_{gk}(t) + \gamma(t)Y_{igk} + \varepsilon_{igk}$$

Donde:

La función $\mu(t)$ es no aleatoria y describe la forma del proceso.

Las funciones no aleatorias $\alpha_g(t)$, $\beta_k(t)$ y $\rho_{gk}(t)$ pertenecen al espacio de Hilbert y toman en consideración del efecto de los factores principales y de la interacción entre éstos, respectivamente.

Y_{igk} son cantidades aleatorias conocidas que juegan el mismo rol de covariables en el caso unidimensional.

Las trayectorias aleatorias ε_{igk} se asumen independientes y centradas en la media

El interés es probar las hipótesis nulas:

$$H_0^A: \alpha_1(t) = \dots = \alpha_G(t) = 0$$

$$H_0^B: \beta_1(t) = \dots = \beta_S(t) = 0$$

$$H_0^I: \rho_{1,1}(t) = \dots = \rho_{GS}(t) = 0$$

$$H_0^C: \Upsilon = 0$$

En su artículo, los autores antes nombrados, proponen un procedimiento con el fin de probar cualquier de las hipótesis de interés. Consideremos la hipótesis nula:

$$H_0^f: \alpha_1(t) = \dots = \alpha_G(t)$$

Procedimiento:

1. Definir un movimiento browniano $v(t)$
2. Definir la proyección de la curva $y_{ig}(t)$ sobre el espacio generado por v . Los valores y_{ig} son valores de una variable aleatoria y con éstos es posible realizar análisis clásicos como pruebas t o F.
3. Se realiza un análisis de la varianza univariado en el que la respuesta es la proyección de cada una de las curvas sobre el espacio generado por el movimiento browniano y la matriz diseño está determinada por los tratamientos.

2.8.- Análisis de datos funcionales con R

Una vez conocidas las herramientas de forma teórica, necesitamos procedimientos para realizar los cálculos. Para ello se ha decidido utilizar el software de licencia gratuita R (proyecto CRAN). R posee tanto comandos propios de un lenguaje de programación como comandos estadísticos. Ésto permitirá crear una serie de objetos y de comandos con los que los cálculos serán más sencillos. R puede descargarse libremente del sitio llamado CRAN (Comprehensive R Archive Network) en la siguiente dirección: <http://cran.rproject.org/>

A continuación se detallan las librerías (“Package”) de R más usuales para el análisis de datos funcionales y sus funciones principales, en relación a nuestro trabajo:

1. The readr Package (<https://cran.r-project.org/web/packages/readr/index.html>). El objetivo de 'readr' es proporcionar una forma rápida y amigable de leer datos de tipo 'csv', 'tsv' y 'fwf'.

-
- *read.delim(sep='símbolo')*: lee archivos de datos con 'símbolo' como separador.
 - *read.csv*: lee archivos de datos con punto y coma (;) como separador
 - *read.csv2*: lee archivos de datos con coma (,) como separador
 - *read.tsv*: lee archivos de datos con tabulador como separador
2. The *fda* Package (<https://cran.r-project.org/web/packages/fda/index.html>): Implementa las técnicas de análisis de datos funcionales del libro de Ramsay y Silverman (1).
- *basisfd*: define un objeto funcional base.
 - *bsplineS*: evalúa un conjunto de funciones base de B-splines.
 - *cor.fd*: calcula la matriz de correlación para uno o dos objetos de datos funcionales.
 - *create.bspline.basis*: crea una base b-spline.
 - *create.exponential.basis*: crea una base exponencial.
 - *create.fourier.basis*: crea una base Fourier.
 - *create.polynomial.basis*: crea una base Polinomial.
 - *data2fd*: convierte un dato discreto en un dato funcional.
 - *deriv.fd*: calcula una derivada de un objeto de datos funcional.
 - *fd*: crea un objeto de datos funcional.
 - *fourier*: evalúa un conjunto de funciones de Fourier.
 - *is.fd*: confirma que un objeto tiene clase "fd".
 - *mean.fd*: evalúa la media de un conjunto de funciones en un objeto de datos funcional.
 - *pca.fd*: análisis de componentes principales funcional.
 - *plot.fd*: dibuja un objeto de datos funcional.
 - *plot.pca.fd*: dibuja componentes principales funcionales.
 - *plotfit.fd*: permite evaluar lo bien que se ajusta un objeto de datos funcional a los datos discretos reales.
 - *plotscores*: dibuja las puntuaciones de las componentes principales.
 - *project.basis*: aproxima un dato funcional utilizando una base.
 - *sd.fd*: evalúa la desviación estándar de un conjunto de funciones en un objeto de datos funcional.
 - *summary.basisfd*: proporciona un resumen de las características de un objeto de datos funcional.
-

- *summary.fd*: proporciona un resumen de las características de un objeto de datos funcional.
 - *var.fd*: calcula las funciones varianza, covarianza y correlación para datos funcionales.
 - *varmx.pca.fd*: rotación de las componentes principales funcionales utilizando el criterio VARIMAX.
3. The *fda.usc* Package (<https://cran.r-project.org/web/packages/fda.usc/index.html>): Integra y complementa la librería *fda* del punto anterior, con medidas de profundidad, detección de outliers funcionales, modelos de regresión funcional y métodos de clasificación de un conjunto de datos funcionales.
- *anova.onefactor*: modelo anova de una vía para datos funcionales.
 - *classif.depth*: clasificación de datos funcionales usando máxima *depth*.
 - *create.fdata.basis*: crear una base para datos funcionales de la clase *fdata*.
 - *depth for univariate fdata*: crear un conjunto base para datos funcionales de la clase *fdata* (FM, mode, RT, RP, RPD, FSD, KFSD).
 - *descriptive*: medidas descriptivas de datos funcionales (mean, var, mode).
 - *fdata*: Convierte datos originales u otras clases de datos funcionales en una clase *fdata*.
 - *fdata.bootstrap*: proporciona muestras bootstrap para datos funcionales.
 - *fdata.deriv*: calcula la derivada de un dato funcional.
 - *fdata2fd*: convierte objetos de clase *fdata* en objetos de clase *fd*.
 - *fdata2pc*: Componentes principales para datos funcionales.
 - *kmeans.fd*: realiza clusters k-means en datos funcionales.
 - *outliers.depth.trim*: procedimiento para detectar valores atípicos funcionales.
 - *outliers.fdata*: detecta outliers para un conjunto de datos funcional.
 - *plot.fdata*: dibuja un objeto funcional de clase *fdata*.
4. The *rainbow* Package (<https://cran.r-project.org/web/packages/rainbow/index.html>): Este paquete presenta los diagramas de arcoiris (*rainbow*), *bagplots* y diagramas de caja para datos funcionales (*boxplots*). Los dos últimos también se pueden usar para identificar valores atípicos (*outliers*), que tienen la profundidad más baja o la densidad más baja respectivamente.
- *fboxplot*: *bagplot* funcional y *boxplot* HDR funcional.

- *fdepth*: Calcula la profundidad funcional.
 - *fds*: Crea objetos funcionales.
 - *foutliers*: métodos de detección de outliers funcionales.
 - *plot.fdepth*: dibuja la profundidad funcional.
 - *plot.fds*: dibuja objetos funcionales.
5. The *fdANOVA* Package (<https://cran.r-project.org/web/packages/fdANOVA/index.html>): Este paquete realiza el análisis de la varianza, datos funcionales univariados y multivariados.
- *fanova.tests*: realiza las pruebas del análisis de varianza funcional.
 - *plotFANOVA*: dibuja datos univariantes funcionales.
 - *summary.fanovatests*: Imprime objetos ‘fanovatests’.
6. The *ggplot2* Package (<https://cran.r-project.org/web/packages/ggplot2/index.html>): Este paquete mejora las funciones habituales de R para gráficos.
- *qplot*: permite hacer gráficos y figuras de alta calidad.



3.- Hipótesis y Objetivos

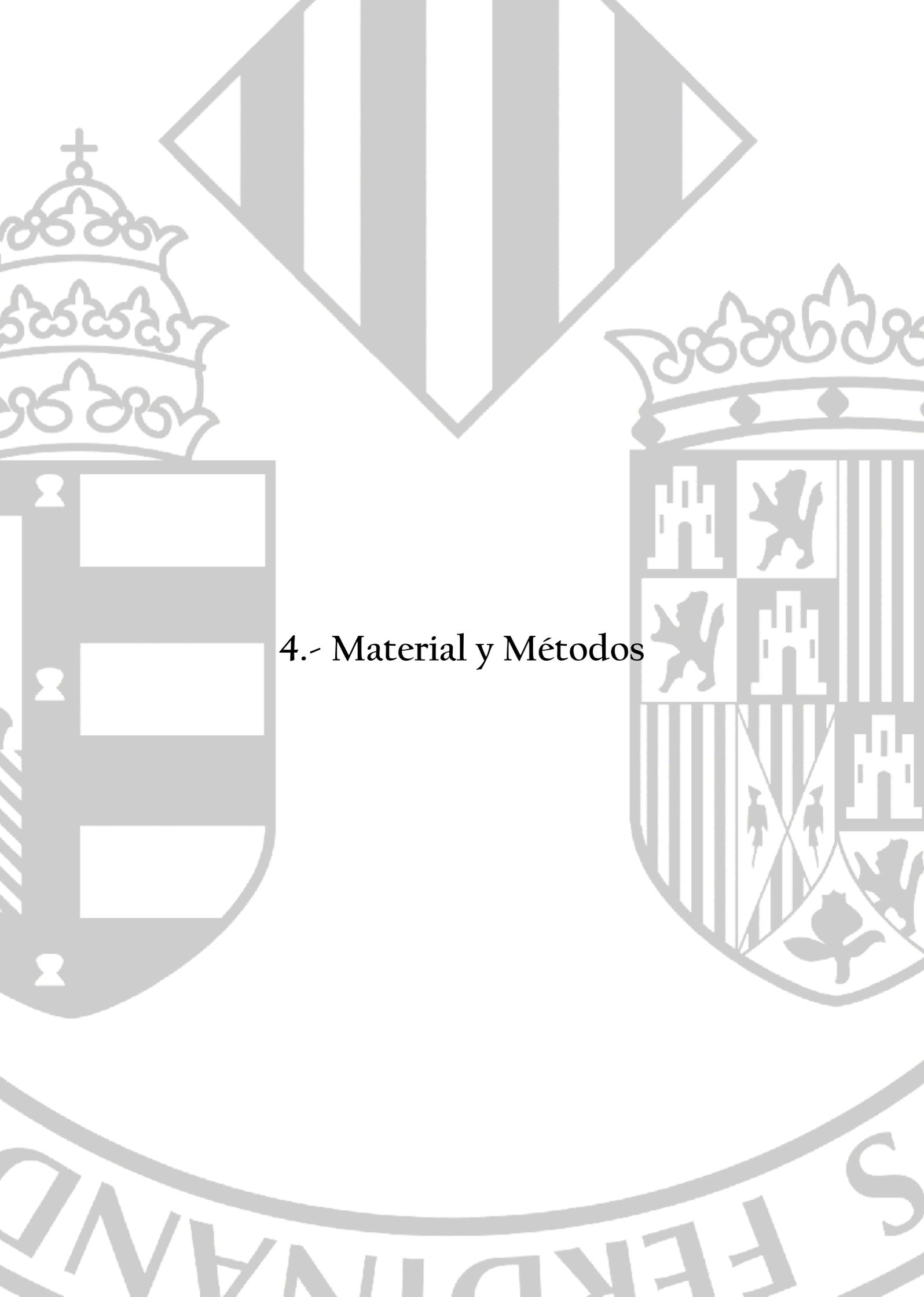
3. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

El uso del análisis de datos funcionales proporcionará una mejora en el estudio del patrón de movimiento lumbopélvico durante la flexión y extensión sagital del tronco. Con el fin de demostrar nuestra hipótesis, una muestra de personas sanas (asintomáticas) realizó ciclos de flexión y extensión sagital del tronco. Durante éstos, se registró el desplazamiento angular del raquis lumbar y el de la pelvis con un electrogoniómetro.

En particular, al patrón de movimiento lumbopélvico en personas sanas para caracterizar el patrón de dicho movimiento, le aplicaremos la teoría del análisis de datos funcionales: el análisis descriptivo funcional, el Análisis de Componentes Principales Funcionales (ACPF) y el Análisis de la Varianza Funcional (FANOVA),

Concretamente vamos a:

1. *Categorizar a los sujetos* en función del dominio del movimiento de la pelvis o del raquis lumbar.
2. *Obtener datos funcionales a partir de los datos obtenidos* transformando los datos discretos en funciones, y aplicando a estas funciones las técnicas necesarias para prepararlas para su posterior estudio.
3. *Analizar el patrón de movimiento mediante las funciones obtenidas* utilizando el cálculo de estadísticos descriptivos funcionales.
4. *Caracterizar la variabilidad del patrón de movimiento lumbopélvico*, tanto en la muestra total como en los grupos definidos anteriormente.
5. *Comparar la cinemática del raquis lumbar y de la pelvis* según la categoría asignada en función del dominio del movimiento de la pelvis o del raquis lumbar.
6. *Analizar las mejoras obtenidas con la utilización del análisis de datos funcionales* frente a la Estadística tradicional.



4.- Material y Métodos

4. MATERIAL Y MÉTODOS

4.1.- Muestra

Participaron 42 sujetos sanos de manera voluntaria no obteniendo ningún beneficio económico del estudio. Todos fueron informados sobre los objetivos del estudio, las aportaciones esperadas en el conocimiento de los mecanismos cinesiológicos de la región lumbopélvica, sus posibles aportaciones científicas, aplicaciones sociales y sanitarias. Se les explicó el procedimiento del estudio y se les informó de que en cualquier momento, sin necesidad de ninguna justificación, podrían abandonarlo. A continuación y de forma voluntaria dieron su consentimiento por escrito al estudio que se les había referido, **Anexo I**.

Se estableció como criterio que los participantes tuviesen unas condiciones mecánicas del raquis lumbar y pelvis similares en términos de edad y condición física (59). Se seleccionaron estudiantes de la Universidad de Valencia que practicaban ejercicio físico estructurado al menos tres días semanales durante hora y media (59), y que su edad estuviese comprendida en la misma década y fuesen menores de treinta años. Además se tuvo en cuenta que ninguno de ellos tuviese historia de dolor lumbar, deformaciones del raquis u otras estructuras, diferencias en la longitud de las extremidades inferiores, problemas genéticos, ni hubiesen sido sometidos a intervenciones quirúrgicas previas en el raquis o el abdomen. Adicionalmente se determinó la extensibilidad de los músculos isquiotibiales (bíceps femoris) mediante el test Passive Straight Leg Raise (PSLR), **Anexo II**. Las características de los participantes están descritas en la **tabla 2**.

	n	Sexo	%	Edad (años)	Peso (Kg)	Altura (m)	IMC
Grupo 1	19	(9h,10m)	35%; 65%	28.4±1.2	63.3±9.7	1.7±0.08	22.7±2.7
Grupo 2	23	(10h,13m)	55%; 45%	22.3±2.4	65.9±9.9	1.7±0.08	22.9±2.3

Hombres (h),
Mujeres (m)

Tabla 2. Características de los sujetos

4.2.- Instrumentos de registro

El registro de los ángulos de rotación (grados) del raquis lumbar y pelvis en los tres planos del espacio, se realizó a través del electrogoniómetro 3-Space Isotrak (Polhemus Inc., Colchester, VT 05446, EEUU). Este sistema consta de un transmisor que emite campos magnéticos de baja frecuencia que son detectados por dos sensores. Éste

tiene una unidad electrónica que calcula las posiciones y orientaciones tridimensionales de los sensores en relación al transmisor. La frecuencia de muestreo de las señales electromagnéticas es de 30Hz por sensor, mediante un interface RS-232, estas señales, se registran en un ordenador personal para posibles análisis subsecuentes. El transmisor se posiciona sobre una plataforma de madera ajustable que en el presente estudio se situó muy próxima al trocánter mayor del fémur (< 0.7 m) en cada sujeto, **Figura 14**.

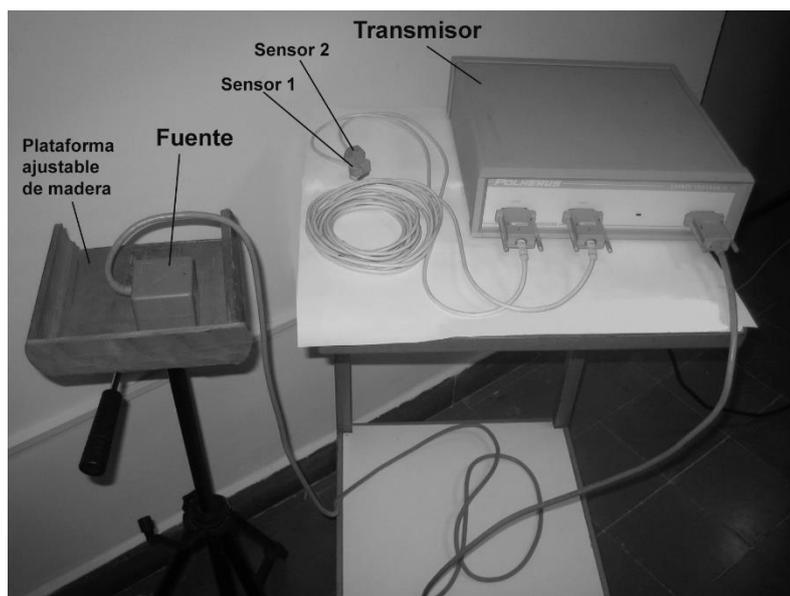


Figura 14. Instrumento: Registro de movimiento: electrogoniómetro 3- Space Isotrak

Con la finalidad de verificar el funcionamiento del sistema y descartar la presencia de artefactos que pudieran interferir con las señales electromagnéticas, antes de llevar a cabo los ejercicios, se colocaron los sensores sobre un listón de madera en varios ángulos conocidos respecto de la fuente.

4.3.- Procedimiento

Las referencias superficiales de niveles vertebrales fueron tomadas mediante una palpación cuidadosa y entrenada de la columna vertebral. Se marcaron todas las vértebras desde C7 a L5 con el sujeto en ligera flexión del tronco. Después se confirmó la exactitud de este marcaje mediante referencias anatómicas, en las cuales se asumió que el contorno superior de la cresta ilíaca se encuentra a la altura de la cuarta vértebra lumbar, el espacio entre la tercera y la cuarta vértebras lumbares. La espina ilíaca postero-superior y los

hoyuelos que la piel de la región lumbar presenta, marcan aproximadamente el nivel de la articulación sacroilíaca.

Se fijó un sensor de movimiento a la piel al nivel de la vértebra lumbar (L1), registrando el ángulo alfa (α). Este ángulo engloba la lordosis lumbar junto con la rotación de la pelvis alrededor del eje de la cadera en el plano sagital (60). El segundo sensor de movimiento se fijó a la piel al nivel de la primera vértebra sacra (S1) (ángulo beta (β)). Este ángulo proporciona información sobre la inclinación sacra. Se trata de una medida indirecta de la extensión de la cadera, y de la rotación de la pelvis alrededor del eje de las cabezas femorales, que mide en grados la inclinación pélvica en postura erecta en el plano sagital (5). El ángulo teta (θ), formado por los dos sensores (L1, S1) mide la curvatura lumbar en el plano sagital (28 , 60-62), **Figuras 15 y 16**.

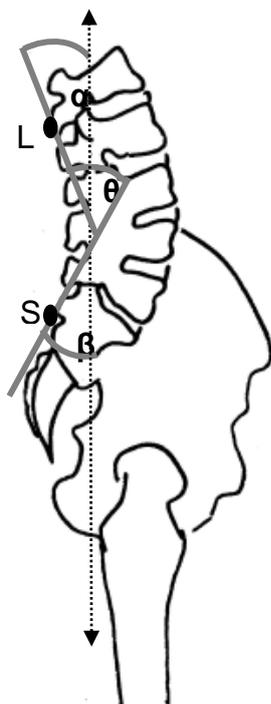


Figura 15. Representación de los ángulos: α , β

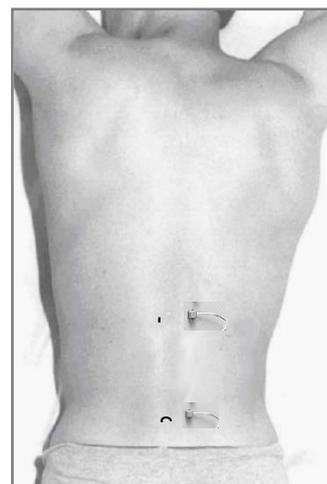


Figura 16. Sensores de movimiento a nivel de la primera vértebra lumbar (L1) y sacra (S1).

Los individuos permanecieron de pie y descalzos sobre dos marcas en el suelo que estaban separadas la distancia correspondiente a la anchura de la pelvis (cadera), con los pies en paralelo para no influir en la interacción lumbopélvica del movimiento (63), los brazos colgaban a los lados del tronco con las palmas de las manos dirigidas hacia dentro y las rodillas extendidas (tres segundos) en postura erecta inicial, **Figura 17**.

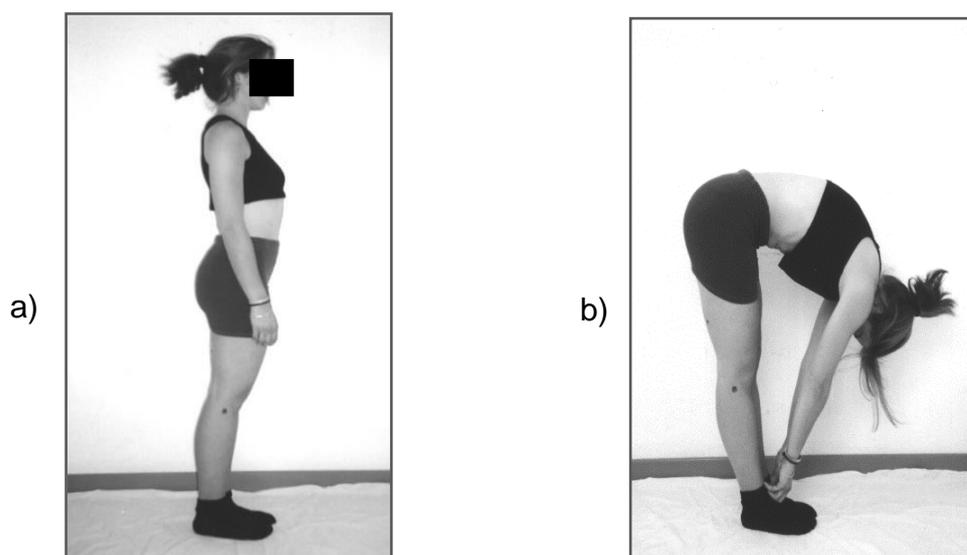


Figura 17. Ejercicio de flexión del tronco: a) postura inicial (erecta) en bipedestación b) postura en máxima flexión.

Se les pidió que flexionaran el tronco durante cuatro segundos, manteniendo las rodillas rectas y siguiendo las instrucciones que a continuación se detallan: doblar el cuello, colocar la barbilla en el pecho y flexionar hacia delante deslizando las manos hacia la parte delantera de las extremidades inferiores, llegando a la máxima flexión posible del tronco, permaneciendo en esa posición durante un segundo y después regresando a la posición inicial durante cuatro segundos. Este ejercicio se repitió tres veces.

La velocidad del movimiento se estableció mediante la cadencia medida por un metrónomo a 60 pulsos/min. Los individuos estuvieron ensayando con anterioridad varias veces para familiarizarse con el ejercicio. Todos los test se llevaron a cabo, por lo menos, dos horas después de levantarse, para minimizar las variaciones mecánicas que experimenta el raquis a lo largo del día (64-65). Mientras el test se llevó a cabo, la realización del movimiento fue monitorizada por dos observadores y se volvió a repetir si era necesario. Se recogieron en el mismo día las medidas de tres ejecuciones realizadas por diez participantes, los cuales repitieron el mismo procedimiento dos semanas después. Estos datos fueron utilizados para comprobar la fiabilidad y repetibilidad de las medidas.

4.4.- Tratamiento de datos

Los ordenadores fueron equipados con la Aplicación Médica Multimedia (AMM). Se trata de una herramienta de software desarrollada por nuestro equipo y el Grupo de Sincronización de Señales de la Escuela Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (66), que sincroniza datos capturados por diferentes ordenadores en un sistema distribuido. Un protocolo de sincronización de relojes (SNTP) proporciona con precisión de milisegundos una referencia temporal global a todos los ordenadores, **Figura 18**.

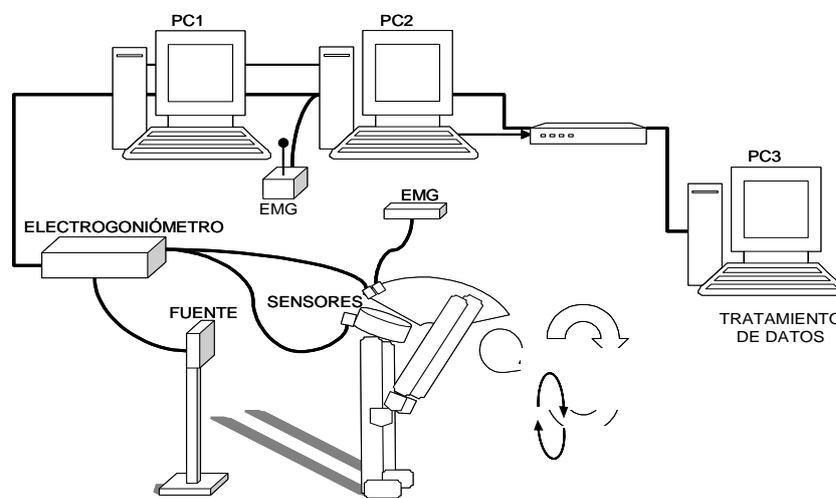


Figura 18. Sistema de captura y tratamiento de datos

4.5.- Cálculo de variables para la caracterización del patrón lumbopélvico.

El inicio del movimiento de flexión (IF) y extensión (IE) fueron considerados desde que los valores del desplazamiento angular del tronco aumentaron medio grado desde la postura erecta (PE) en la flexión y descendieron medio grado en la extensión desde la máxima flexión (MxFlex). La diferencia entre IF y MxFlex, proporcionaron el rango de flexión y de extensión (ROF y ROE en grados). Entonces se calculó la duración del movimiento (segundos) del tronco (T), pelvis (P) y raquis lumbar (RL) respectivamente durante la flexión y la extensión, **Figura 19**

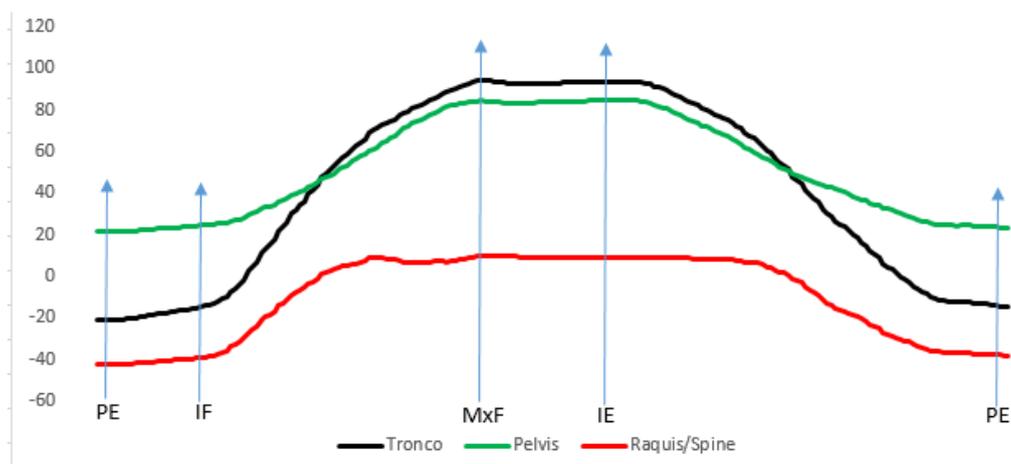


Figura 19. Movimiento de flexión y extensión del tronco. Root Mean Square (RMS). Postura erecta (PE), inicio de la flexión (IF), máxima flexión (MxF), inicio del movimiento de extensión (IE) y postura erecta (PE).

4.6.- Obtención de los datos funcionales

4.6.1.- Preparación de los datos

Los datos de los ángulos de rotación (grados) obtenidos mediante el electrogoniómetro y registrados en un ordenador personal, se trasladaron al programa Excel con el fin de prepararlos para el análisis estadístico funcional.

Se disponen de datos de 5 repeticiones, de las que inicialmente se escogen las tres centrales, y de éstas, la primera de las tres seleccionadas. La duración del ejercicio es de 12 segundos (Postura inicial: 3s, Movimiento de flexión: 4s, Parada: 1s y Movimiento de extensión: 4s). Recordamos que tenemos 25 datos por segundo, es decir, un dato cada 40 milisegundos. Por lo tanto, la postura inicial corresponde a los primeros 75 datos (desde $\text{time} = 0 \mu\text{s}$), el movimiento de flexión a los 100 siguientes (desde $\text{time} = 3.000 \mu\text{s}$), la parada a los 25 siguientes (desde $\text{time} = 7.000 \mu\text{s}$) y el movimiento de extensión a los 100 últimos (desde $\text{time} = 8.000 \mu\text{s}$). Estas divisiones son teóricas, es decir, no todos los sujetos comienzan el movimiento exactamente en el mismo instante de tiempo, por ello, se revisan todos los sujetos de forma individual y se marcan los inicios de los movimientos de flexión y extensión y de la parada utilizando el siguiente criterio:

- Inicio movimiento de flexión y de extensión: cuando los valores dejan de oscilar, es decir, cuando aumentan más de $0,5^\circ$ de forma continua.
- Inicio de la parada: cuando los valores dejan de crecer y se mantienen oscilando como máximo $0,5^\circ$.

A partir de este momento se preparan por separado los datos del movimiento de flexión y los de extensión.

Movimiento de flexión: Se analiza el número de datos para todos los sujetos, obteniendo una media de 94,27 datos (mínimo: 71, máximo: 131). Se ajustan todos a 100 datos manteniendo el inicio marcado y eliminando o añadiendo (de la parada) por el final. Se les asigna los instantes de tiempo 3.000 a 6960 μ s.

Movimiento de extensión: Análogamente se analiza el número de datos para todos los sujetos obteniendo una media de 113,34 datos (mínimo: 79, máximo: 162). Se observa que ajustar a 100 datos produce más pérdida de información que ajustar a 110 (más cercano al valor medio), por lo que se decide realizar esto último. Se les asigna los instantes de tiempo 8.000 a 12.960 μ s.

Una vez obtenidos los datos, se colocan con los sujetos por filas y los instantes de tiempo en columnas y se exportan en formato csv (comma separate values).

4.6.2.- Obtención de los datos funcionales

Para la obtención de los datos funcionales se utilizan las librerías `readr`, `fda` y `fda.usc` del software R, con la herramienta RStudio; esta obtención de datos las realizamos de la siguiente manera:

Los datos exportados en formato csv, se leen en RStudio con la función `read.csv2` y se transforman en una matriz de datos con la función `data.frame`. Se define el vector de los instantes de tiempo con la función `seq`. Posteriormente se realiza un suavizado con funciones B-Splines (se definen 50 funciones base, una cada dos nodos, en el caso del movimiento de flexión y 55 en el caso del movimiento de extensión) utilizando la función `create.bspline.basis`. Finalmente se obtienen los datos funcionales utilizando la función `Data2fd`, **Figuras 20A y 20B**

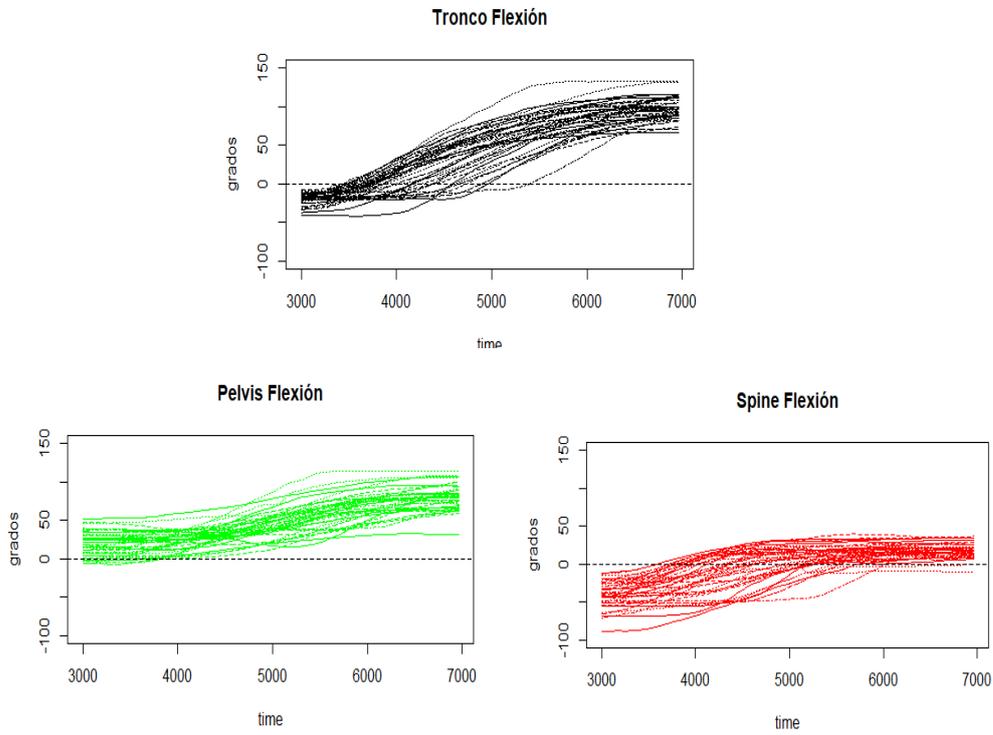


Figura 20A. Movimiento de flexión. Datos funcionales obtenidos para tronco, pelvis y spine

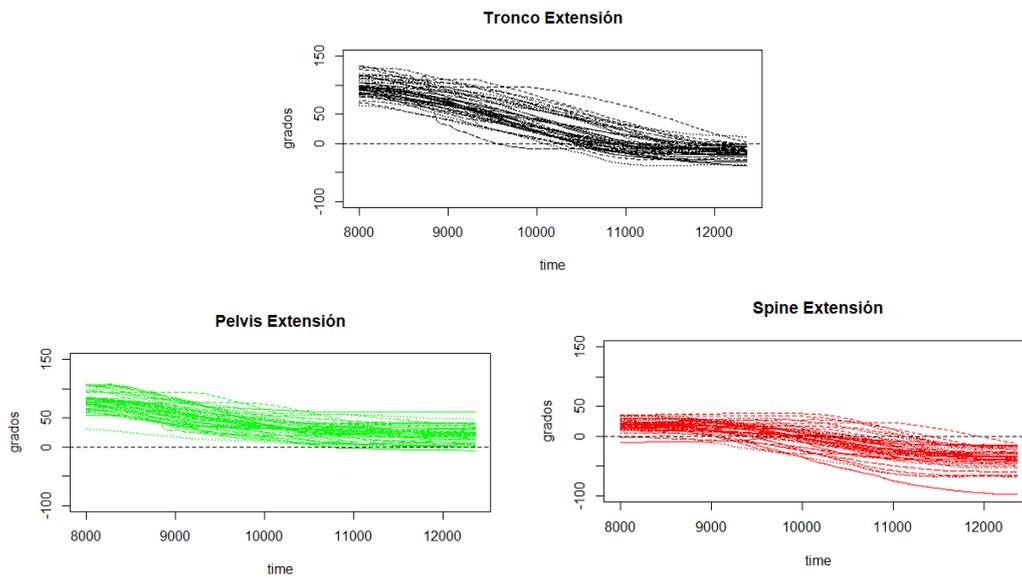


Figura 20B. Movimiento de extensión. Datos funcionales obtenidos para tronco, pelvis y spine.

4.7.- Análisis Estadístico

La fiabilidad del método se evaluó en un grupo de diez participantes que realizaron una serie de tres repeticiones en el mismo día y dos semanas después. Dos experimentadores, de nuestro grupo de investigación, llevaron a cabo el tratamiento de datos paralelamente. Para analizar la repetibilidad de las variables, se realizó el análisis de la varianza ANOVA de medidas repetidas para el cálculo del coeficiente de correlación (ICC) y el error estándar de medida (SEM) (67). Con el fin de valorar la reproducibilidad de las variables calculadas entre los dos observadores, se realizó un T-test de muestras emparejadas.

Para realizar nuestro estudio, a los individuos los clasificamos en dos grupos, según el criterio de, si mostraban un patrón de movimiento pelvis dominante, o raquis dominante durante los movimientos de flexión y extensión. Los individuos con un ratio lumbopélvico ROMS/ROMP < 1 , mostraron un patrón de movimiento pelvis dominante y se incluyeron en el grupo 1, mientras que los individuos con un ratio lumbopélvico ROMS/ROMP > 1 mostraron un patrón de movimiento raquis dominante y se incluyeron en el grupo 2. Se encontraron sujetos con ratios cercanos a 1, por lo que se decidió realizar un análisis cluster k-means, el cual clasifica los sujetos en un número de grupos determinado a priori, en función de la máxima proximidad entre las puntuaciones de un grupo y la máxima distancia entre las puntuaciones de distintos grupos y, maximizando el promedio de variación entre grupo y reduciendo la variación intra grupo, con el fin de comparar las agrupaciones obtenidas.

Se comprobó también la normalidad de las variables con el test Kolmogorov-Smirnov.

Así mismo realizamos un t-test de muestras relacionadas para buscar diferencias significativas entre el movimiento de raquis y pelvis en los grupos 1 y 2.

Igualmente utilizamos un t-test de muestras independientes para buscar diferencias significativas de los factores demográficos entre los participantes de los grupos 1 y 2.

También llevamos a cabo un análisis multivariante de la varianza (MANOVA), con el grupo y sexo como factores, para determinar la existencia de diferencias significativas entre los ratios L/P.

Para la realización del análisis de datos funcionales, inicialmente se realizó un proceso de suavizado por B-splines para convertir los datos puntuales en curvas; comprobándose la calidad de ajuste obtenido con la función `plotfot.fd`. Posteriormente se determinaron las curvas atípicas a través de técnicas gráficas de profundidad de datos

funcionales (Functional Bagplot y HDR Boxplot), las cuales fueron posteriormente eliminadas de la muestra y de los análisis subsecuentes, tanto en la muestra total como en los dos grupos de patrón de movimiento, así como en los movimientos de Flexión y Extensión.

Una vez obtenida la base de datos funcional, se llevó a cabo un análisis descriptivo y exploratorio funcional, calculando la media y la desviación típica funcional tanto de la muestra total como en los dos grupos de patrón de movimiento y en los movimientos de flexión y extensión.

Igualmente realizamos un análisis de componentes principales con el fin de estudiar la variabilidad del conjunto de funciones, tanto en la muestra total, como en los dos grupos de patrón de movimiento y en los movimientos de flexión y extensión.

Finalmente, se realizó un Análisis de la Varianza Funcional (FANOVA) para buscar posibles diferencias significativas en las variables según el grupo tanto en el movimiento total de flexión como en el de extensión.

El análisis estadístico tradicional se realizó utilizando la utilidad Real Statistics (<http://www.real-statistics.com/free-download/>) del programa Excel (v.2013) y la versión 26.0 del programa SPSS (IBM Corporation), ambos con licencia de la Universitat de Valencia. El nivel de significación utilizado fue alfa (α) = 0.05.

Para el análisis de datos funcionales se ha utilizado el software de licencia gratuita R (versión 64.3.4.2), que es un lenguaje de alto nivel y un entorno para el análisis de datos y gráficos. Para el desarrollo del código se utilizó RStudio (versión 1.2.5033) (RStudio, Inc), que es un entorno de desarrollo integrado para R.



5.- Resultados

5. RESULTADOS

5.1.- Fiabilidad del método

Tanto los valores altos obtenidos para el coeficiente de correlación intraclass (ICC), como los bajos para el error estándar de medida (SEM), al igual que en las repeticiones efectuadas en el mismo día (Flexión: ICC > 0.99, 0.001 < SEM < 0.11, Extensión: ICC > 0.99, 0.004 < SEM < 0.07) como, en las realizadas en días distintos (Flexión: ICC > 0.98, 0.05 < SEM < 1.10, Extensión: ICC > 0.99, 0.05 < SEM < 1.08) confirmaron la repetibilidad de las variables y la fiabilidad del método, **Tablas 3, A y B.**

		Repetición1	Repetición2	Repetición3	ICC _{1,2}	SEM
ROM Flexión (grados)	Tronco	111.0 (7.9)	109.9 (7.6)	110.2 (7.9)	0.99	0.05
	Pelvis	55.3 (9.6)	54.9 (9.4)	54.3 (8.8)	0.99	0.08
	Raquis Lumbar	55.7 (12.8)	55.0 (11.5)	55.8 (12.2)	0.99	0.10
ROM Extensión (grados)	Tronco	109.7 (7.4)	110.4 (7.9)	110.3 (9.0)	0.99	0.03
	Pelvis	54.3 (8.5)	54.5 (9.3)	54.8 (8.9)	0.99	0.04
	Raquis Lumbar	55.4 (11.6)	55.9 (12.4)	55.5 (12.5)	0.99	0.06
Patrón de movimiento Flexión	RL/P-ratio	1.1 (0.4)	1.1 (0.4)	1.1 (0.4)	0.99	0.01
Patrón de movimiento Extensión	RL/P-ratio	1.1 (0.4)	1.1 (0.4)	1.1 (0.4)	0.99	0.01

Tabla 3. A. Repetibilidad de las variables en el mismo día.

		Día1	Día2	ICC _{1,1}	SEM
ROM Flexión (grados)	Tronco	116.0 (9.1)	118.1 (10.8)	0.99	0.15
	Pelvis	57.2 (10.2)	53.5 (9.8)	0.99	0.58
	Raquis Lumbar	58.8 (13.2)	64.6 (13.6)	0.99	1.09
ROM Extensión (grados)	Tronco	109.7 (7.4)	113.3 (9.8)	0.99	0.24
	Pelvis	54.3 (8.5)	52.2 (9.3)	0.99	0.29
	Raquis Lumbar	55.4 (11.6)	61.0 (14.0)	0.99	1.07
Patrón de movimiento Flexión	RL/P-ratio	1.1 (0.4)	1.3 (0.4)	0.98	0.05
Patrón de movimiento Flexión	RL/P-ratio	1.1 (0.4)	1.2 (0.4)	0.99	0.05

Los valores son: media (DS)

Tabla 3. B. Repetibilidad de las variables en días distintos.

5.2.- Agrupación de los casos en función del patrón de movimiento

Para la realización del estudio, se clasificaron los individuos en dos grupos de acuerdo a si mostraban un patrón de movimiento pelvis dominante o raquis dominante durante los movimientos flexión y de extensión. De esta forma, los individuos con un ratio lumbopélvico $L/P < 1$ mostraron un patrón de movimiento pelvis dominante y se incluyeron en el grupo 1, mientras que los individuos con un ratio lumbopélvico $L/P > 1$ mostraron un patrón de movimiento raquis dominante y se incluyeron en el grupo 2, **Figura 21**. Al calcular el valor de los ratios, observamos que en algunos casos el valor es muy cercano a 1, por lo que se decide realizar un análisis cluster k-means, resultando que, en la flexión, 4 sujetos con ratio < 1 los asigna al grupo 2 y en la extensión, un sujeto con ratio < 1 lo asigna al grupo 2, **Figura 22**. Observando las figuras 21 y 22, vemos que no se advierten dos clusters claramente diferenciados, por lo que se decide eliminar del estudio los sujetos con asignación ‘dudosa’, **Figura 23**.

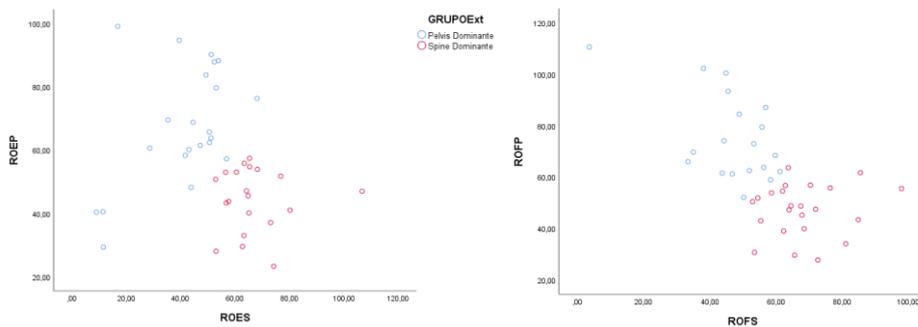


Figura 21. Agrupación inicial

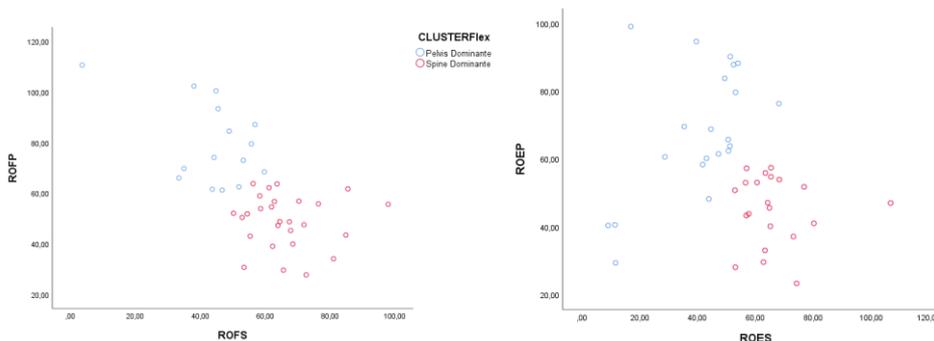


Figura 22. Agrupación Análisis Cluster

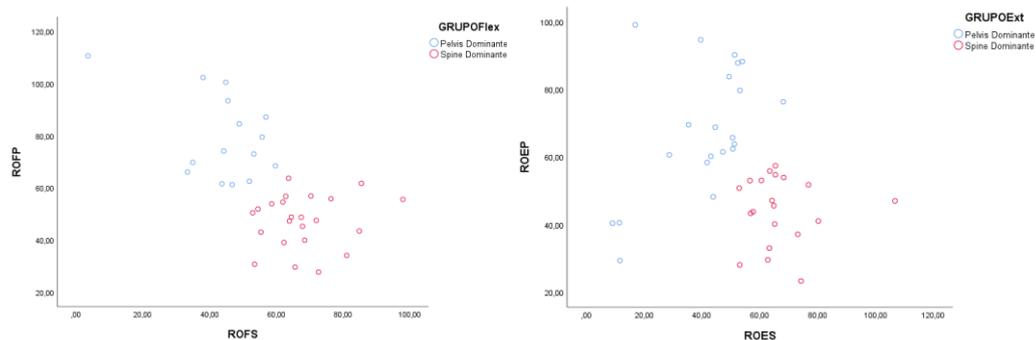


Figura 23. Agrupación Definitiva

El t-test de muestras independientes mostró que no existieron diferencias demográficas entre los dos grupos. El valor medio del ratio L/P fue significativamente ($p < 0.001$) mayor en el grupo 2 que en el grupo 1, tanto en la flexión como en la extensión, (Figura 24).



Figura 24. Ratio lumbopélvico en grupo 1 y 2. Flexión y extensión

Las Figuras 25 y 26 muestran las trayectorias de movimiento del tronco, pelvis y raquis lumbar durante un movimiento de flexo-extensión del tronco, para una persona con patrón pelvis dominante y raquis dominante, respectivamente.

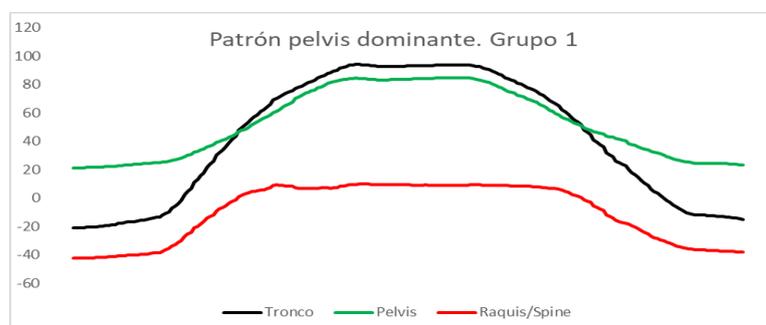


Figura 25. Trayectorias de movimiento del tronco, pelvis y raquis lumbar de una persona con patrón pelvis dominante (grupo 1) durante un movimiento de flexo-extensión del tronco

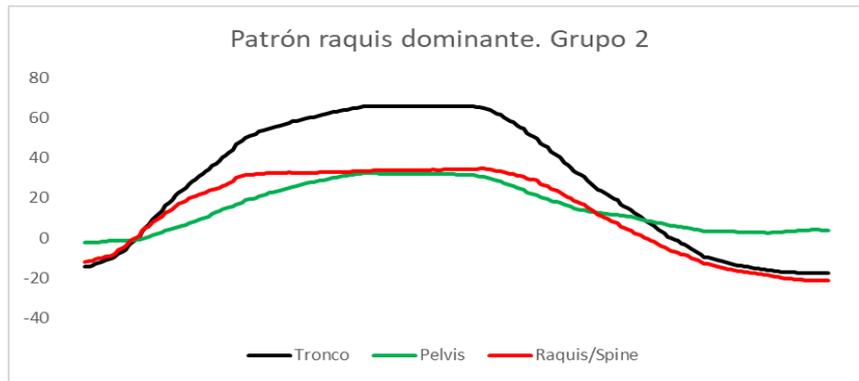


Figura 26. Trayectorias de movimiento del tronco, pelvis y raquis lumbar de una persona con patrón raquis dominante (grupo 2) durante un movimiento de flexo-extensión del tronco

5.3.- Cinemática de la flexión y la extensión

5.3.1.- Movimiento de flexión

5.3.1.1.- Calidad del ajuste

Una vez obtenidos los datos funcionales mediante un proceso suavizado por B-splines, se procedió a comprobar la calidad del ajuste obtenido. Para ello, mediante la función *plotfit.fd*, se calculó el root mean square (RMS) residual, que es una medida de las diferencias entre los valores predichos por un modelo y los valores observados. Es siempre positivo y un valor de 0 indicaría un ajuste perfecto. Los principales estadísticos (mínimo, máximo, media, desviación típica y coeficiente de variación) de los valores obtenidos se muestran en la **tabla 4**.

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típica	Coef.Var
Tronco	0.15	0.53	0.29	0.06	0.21
Pelvis	0.08	0.58	0.17	0.09	0.53
Spine	0.11	0.56	0.21	0.09	0.43

Tabla 4. Estadísticos descriptivos de los valores del RMS para tronco, pelvis y spine en el movimiento de flexión

En la **figura 27** se muestran los diagramas de cajas de los RMS residual de los 3 segmentos.

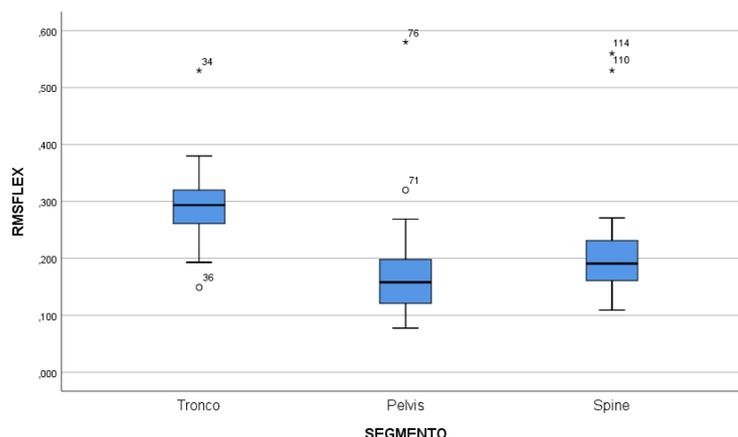


Figura 27. Diagrama de cajas de los RMS residual de los 3 segmentos

A partir de los resultados obtenidos y, a pesar de la existencia de valores outliers, se puede admitir que el ajuste es muy bueno ya que los valores del RMS residual son, en general, pequeños.

5.3.1.2.- Determinación de outliers funcionales

Para buscar posibles observaciones funcionales atípicas (outliers) se utilizaron métodos gráficos, en concreto, rainbow plot, funcional bagplot y funcional highest density region (HDR) boxplot, con el fin de comparar los resultados obtenidos en cada caso. También se utilizó la función outliers.depth.trim

Tronco

En el rainbow plot se muestra en color negro la curva central (mediana); las curvas más cercanas al centro se muestran en color rojo y las más periféricas en color violeta, que serían los outliers (en este caso el sujeto 44). En el funcional bagplot, se muestra en negro la curva central (mediana), en diferentes colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 9, 31, 33, 44) y en gris el resto de los datos funcionales; en gris oscuro la región interna (50%) y en gris claro la región externa. En el HDR boxplot se muestra en negro la curva más profunda (moda), en colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 9, 31, 44) y en gris el resto de datos funcionales; en gris oscuro la región interna (50%) y en gris claro la región externa, **Figura 28**. La función outliers.depth.trim identifica al sujeto 44 como outlier

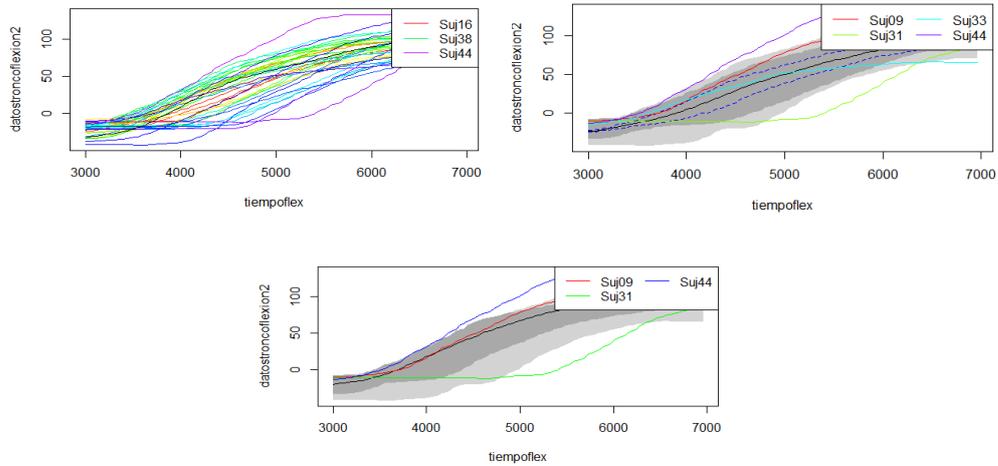


Figura 28. Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del tronco en el movimiento de flexión del tronco

Pelvis

En el rainbow plot se muestra en color negro la curva central (mediana) y en color violeta los outliers (en este caso el sujeto 44). En el funcional bagplot, se muestra en negro la curva central (mediana), en diferentes colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 2, 27, 33, 35, 44) y en gris el resto de los datos funcionales. En el HDR boxplot se muestra en negro la curva más profunda (moda), en colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 33, 44) y en gris el resto de datos funcionales, **Figura 29**. La función outliers.depth.trim identifica los sujetos 1 y 33 como outliers.

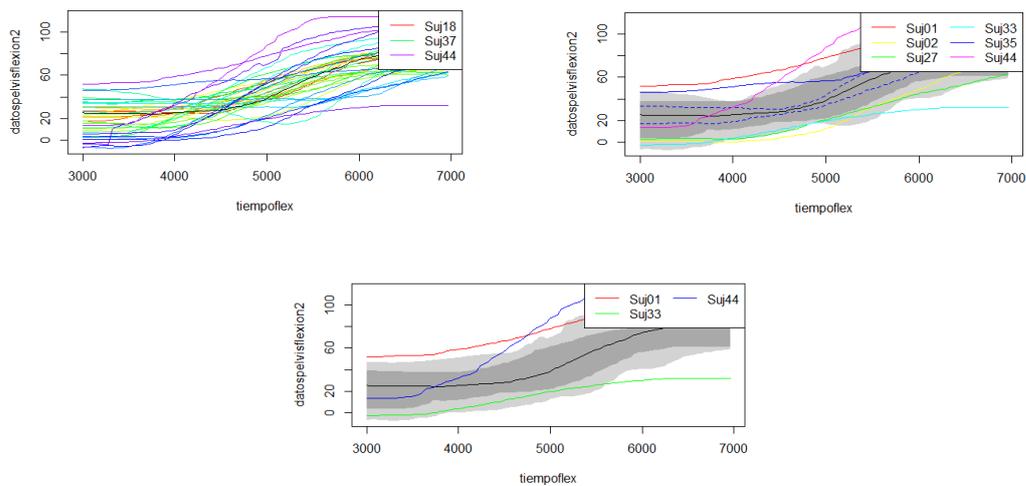


Figura 29. Rainbow plot, funcional bagplot y HDR la pelvis en el movimiento de flexión del tronco.

Raquis Lumbar

En el rainbow plot se muestra en color negro la curva central (mediana) y en color violeta los outliers (en este caso el sujeto 50). En el funcional bagplot, se muestra en negro la curva central (mediana), en diferentes colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 7, 24, 31, 50) y en gris el resto de los datos funcionales. En el HDR boxplot se muestra en negro la curva más profunda (moda), en colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 7, 31, 50) y en gris el resto de datos funcionales, **Figura 30**. La función `outliers.depth.trim` identifica el sujeto 31 como outlier.

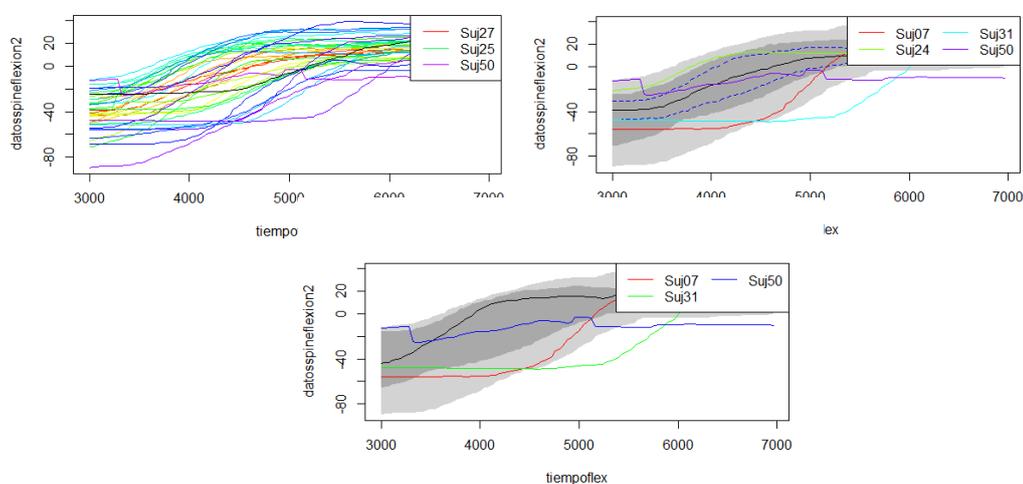


Figura 30. Rainbow plot, funcional bagplot y HDR en el raquis lumbar en el movimiento de flexión del tronco.

En la **tabla 5** mostramos un resumen de los outliers encontrados. Una vez observadas las gráficas y los resultados obtenidos, se decidió eliminar los outliers marcados en azul en dicha tabla.

	Tronco	Pelvis	Spine
rainbow plot	44	44	50
funcional bagplot	9, 31, 33, 44	1, 2, 27, 33, 35, 44	7, 24, 31, 50
HDR boxplot	9, 31, 44	1, 33, 44	7, 31, 50
outliers.depth.trim	44	1, 33	31

Tabla 5. Ouliers funcionales encontrados en cada uno de los métodos utilizados.

5.3.1.3.- Estadísticos descriptivos funcionales

Para realizar el estudio descriptivo de los datos funcionales obtenidos, se utilizaron la función media muestral y la función desviación estándar muestral. Se calcularon y dibujaron tanto para la muestra total como para los grupos definidos en función del dominio del movimiento de la pelvis o del raquis lumbar. (Grupo 1 = Pelvis dominante, Grupo 2 = Raquis dominante). Previamente se eliminaron los datos outliers.

Tronco

En la **figura 31** se muestran las funciones media y desviación típica del tronco obtenidas tanto en la muestra total como en los dos grupos en función del dominio del movimiento.

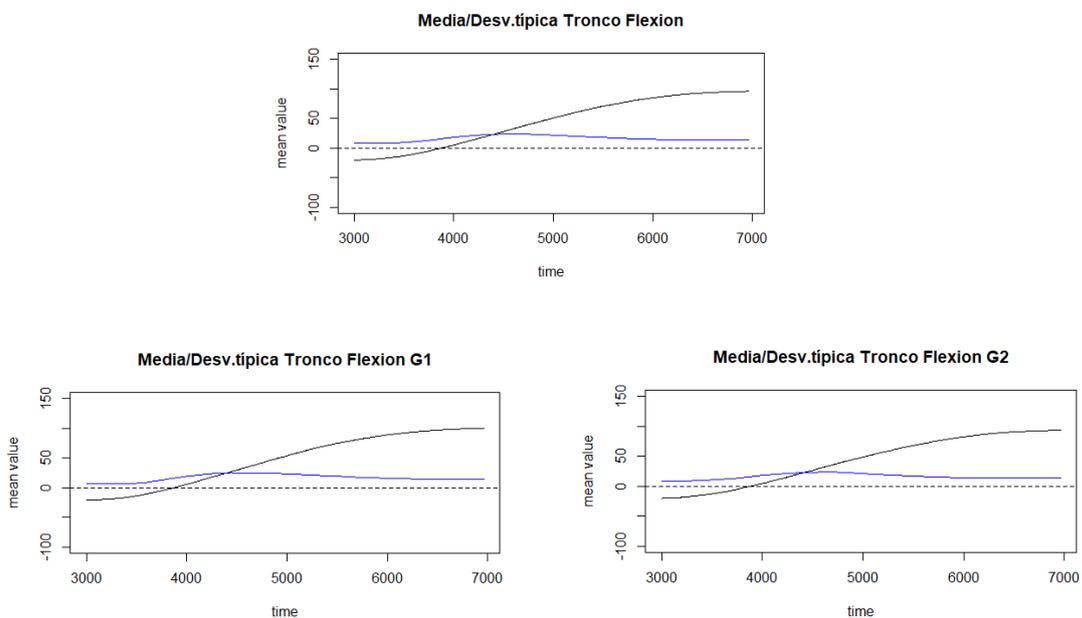


Figura 31. Función media (-) y función desviación típica (-) del tronco en la muestra total y en ambos grupos de movimiento

No se aprecian diferencias ni en la función media ni en la función desviación típica, tanto entre la muestra total y los dos grupos como, entre los dos grupos de movimiento. Respecto a la desviación típica no se aprecia apenas variabilidad en ninguno de los casos

Pelvis

En la **figura 32** se muestran las funciones media y desviación típica de la pelvis obtenidas tanto, en la muestra total como en los dos grupos, en función del dominio del movimiento.

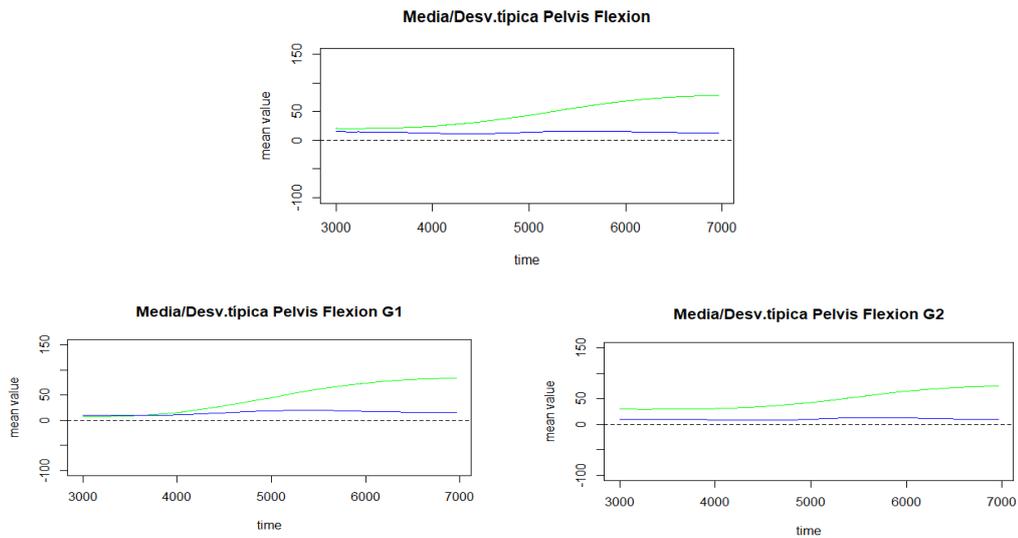


Figura 32. Función media (-) y función desviación típica (-) de la pelvis en la muestra total y en ambos grupos de movimiento.

Se aprecian diferencias en la función media tanto entre la muestra total y los dos grupos, como entre ambos, especialmente al principio del movimiento. Respecto a la desviación típica no se aprecia mucha variabilidad en ninguno de los casos.

Raquis Lumbar

En la **figura 33** se muestran las funciones media y desviación típica del raquis lumbar (spine) obtenidas tanto en la muestra total como en los dos grupos en función del dominio del movimiento.

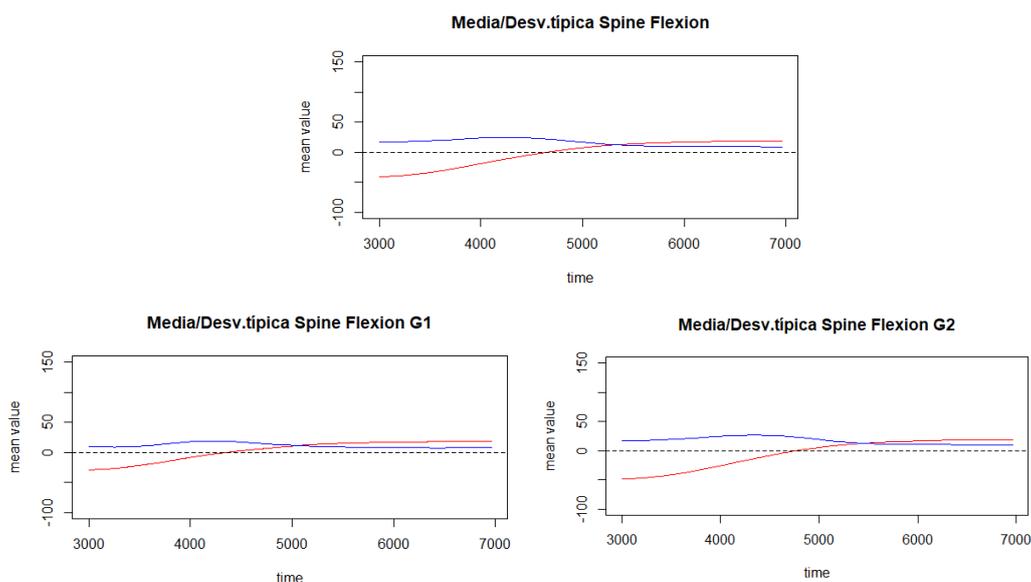


Figura 33. Función media (-) y función desviación típica (-) del raquis en la muestra total y en ambos grupos de movimiento.

Se aprecian diferencias en la función media tanto entre la muestra total y los dos grupos como entre ambos grupos, especialmente al principio del movimiento. Respecto a la desviación típica, se aprecia mayor variabilidad en el grupo 2 en la primera mitad de la flexión del tronco.

En la **figura 34** se muestran las medias de cada uno de los grupos en el mismo gráfico, para cada uno de los segmentos (tronco, pelvis y raquis)

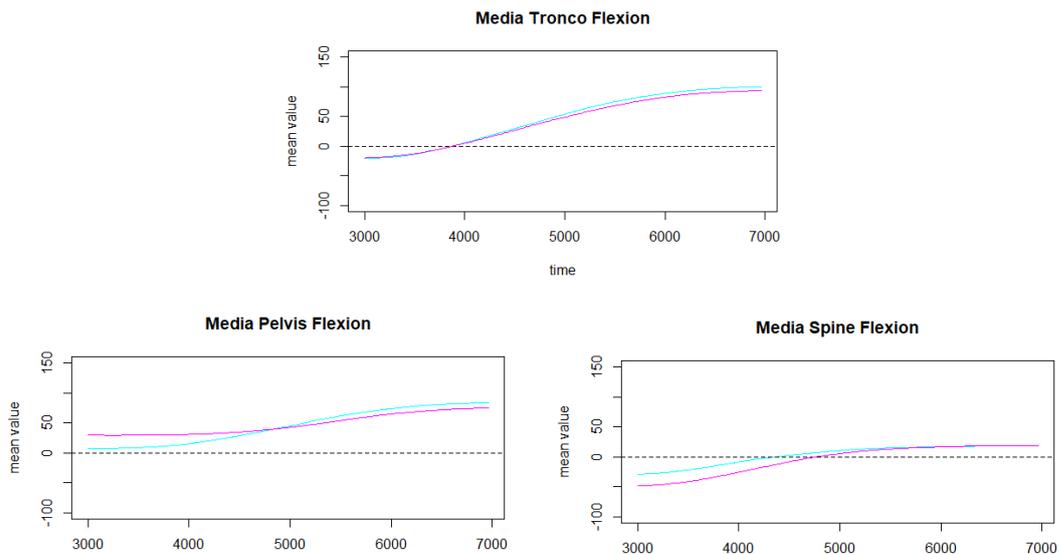


Figura 34. Función media de cada uno de los segmentos en el grupo 1 (-) y el grupo 2 (-) durante la flexión del tronco.

Se observa que en el tronco no hay diferencias entre los grupos de movimiento, mientras que en la pelvis se aprecia que el inicio, en el caso del grupo 2, tiene valores más bajos que en el grupo 1 y que las líneas se cruzan para finalizar con valores más altos. En el caso del raquis, es el grupo 2 en el que al inicio tiene valores más bajos para luego llegar a valores similares, lo que indica una mayor pendiente, es decir, mayor velocidad.

Finalmente, en la **figura 35**, se muestran las funciones medias de la pelvis y el raquis para cada uno de los grupos.

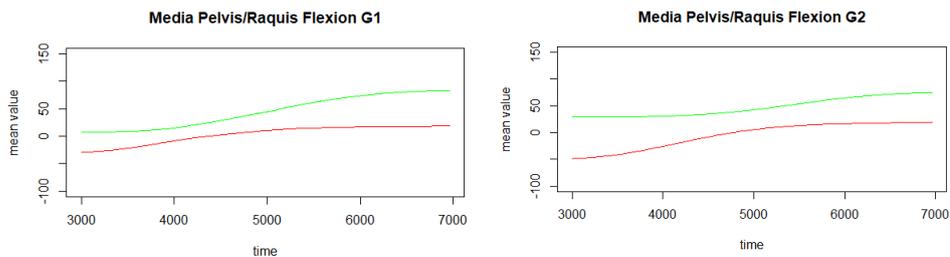


Figura 35. Función media de cada uno de los segmentos, pelvis (-) y raquis (-) en los dos grupos durante la flexión del tronco.

Se observa que los sujetos del grupo 2 mueven más y más rápido el raquis que la pelvis durante la flexión del tronco.

5.3.1.4.- Análisis de componentes principales funcional

Con el fin de profundizar en el estudio de la variabilidad de los datos, realizamos un análisis de componentes principales funcional en los tres segmentos, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

Utilizando el criterio cutt-off (corte en 97%) de elección del número óptimo de componentes y observando los gráficos Scree graph que se muestran en la **figura 36**, se decidió obtener 3 componentes principales por variable. Además, con el fin de mejorar la interpretación, se realizó una rotación Varimax.

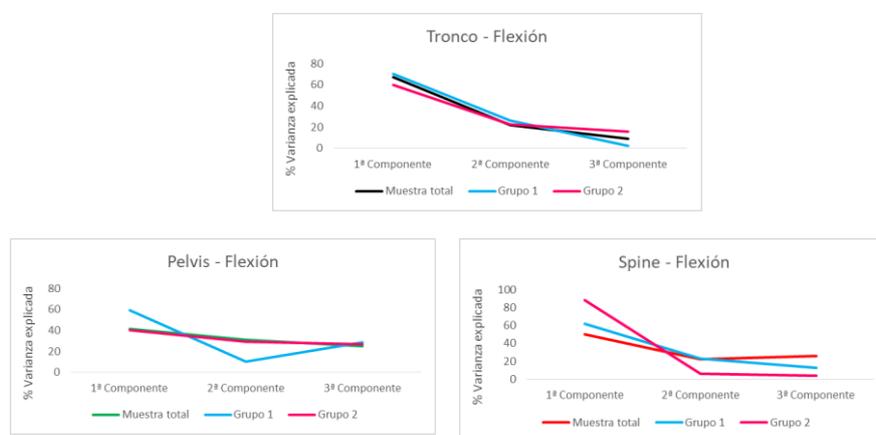


Figura 36. ACPF: Representación Scree Graph de las tres primeras componentes de cada segmento.

Tronco

Para conocer el porcentaje de la variabilidad explicada, en la **tabla 6** se muestran los valores propios de las 3 componentes para el tronco, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

	Muestra	Grupo 1	Grupo 2
1ª Componente	67,42%	70,67%	59,94%
2ª Componente	21,96%	25,99%	22,8%
3ª Componente	9,22%	2,56%	15,67%
Total	98,6%	99,22%	98,41%

Tabla 6. Valores propios de las 3 componentes para el tronco

Muestra total

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 37A**. En cada una de las imágenes se presenta la función media (línea

continua) y en líneas discontinuas perturbaciones respecto a la media. Las componentes representan la variación respecto a la media. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.200 μ s hasta el instante 5.600 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 5.600 μ s hasta el final) y en la tercera componente el alejamiento se observa al principio (desde el inicio hasta 4.200 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera, la variabilidad al principio. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en las otras dos.

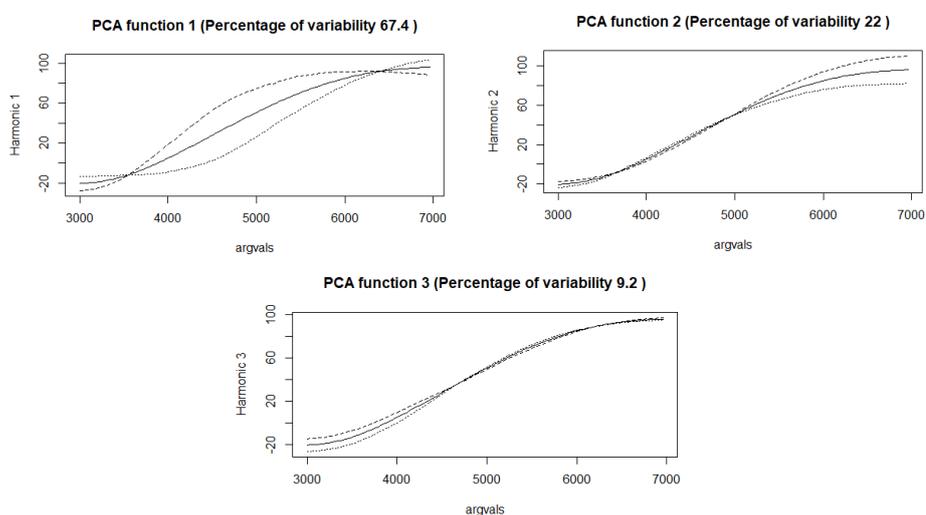


Figura 37A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Muestra total.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 37B** se muestran aquellos que indican existencia de relación. Se observa que la relación entre las componentes 1 y 2 ($r = 0,54$) indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona final; la relación entre las componentes 1 y 3 ($r = 0,64$) indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona inicial.

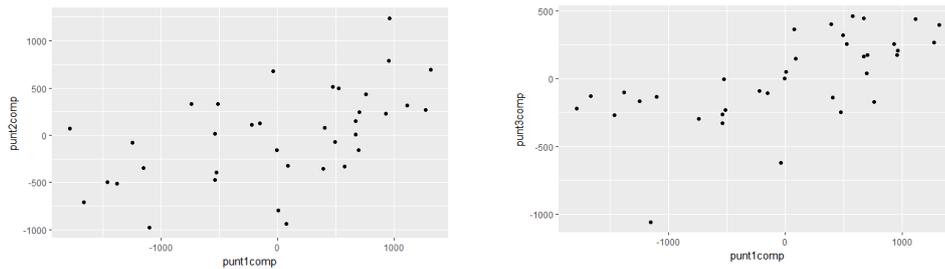


Figura 37B. ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Muestra total.

Grupo 1 (Pelvis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas (**Figura 38A**). En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.000 μ s hasta el instante 5.400 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 5.400 μ s hasta el final) y en la tercera componente el alejamiento se observa al principio (desde el inicio hasta 4.000 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera, la variabilidad al principio. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en las otras dos. Destacar que es muy similar al patrón observado en la muestra total.

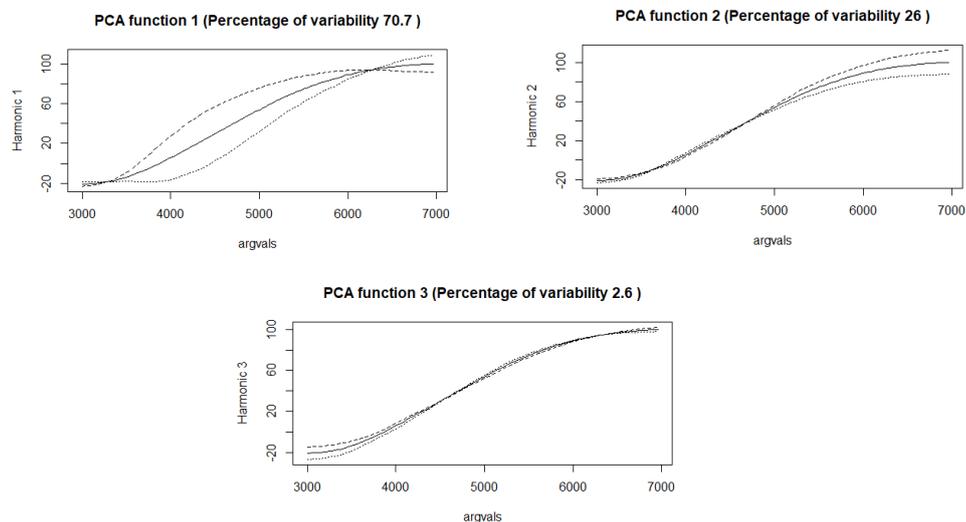


Figura 38A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes del tronco. Grupo 1.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 38B** se muestran aquellos que indican existencia de relación, resultando únicamente entre las

componentes 1 y 2 ($r = 0,62$), lo que indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona final.

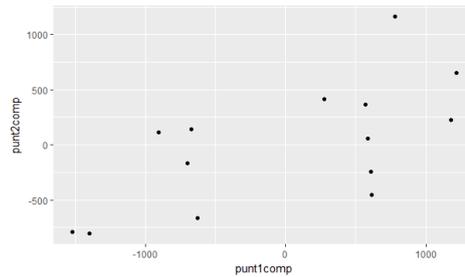


Figura 38B. ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes 1 y 2. Grupo 1.

Grupo 2 (Raquis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 39A**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.300 μ s hasta el instante 5.500 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 5.500 μ s hasta el final) y en la tercera componente, el alejamiento se observa al principio (desde el inicio hasta 4.300 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera la variabilidad al principio. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en las otras dos. Destacar que es muy similar al patrón observado en la muestra total.

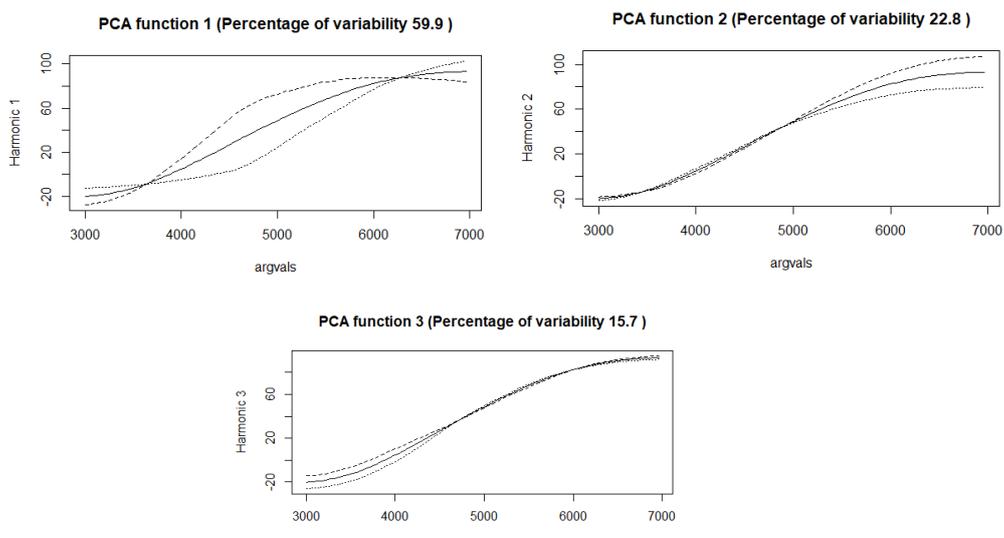


Figura 39A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes del tronco. Grupo 2.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 39B** se muestran aquellos que indican existencia de relación. Se observa que la relación entre las componentes 1 y 2 ($r = 0,48$) indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona final; la relación entre las componentes 1 y 3 ($r = 0,76$) indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona inicial.

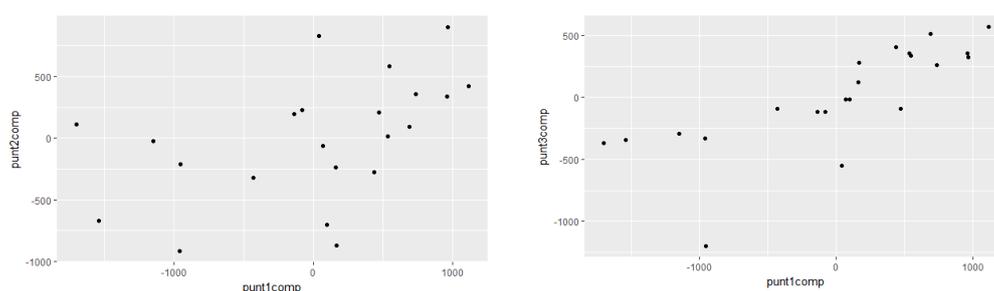


Figura 39B. ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 2.

Pelvis

Para conocer el porcentaje de la variabilidad explicada, en la **tabla 7** se muestran los valores propios de las 3 componentes para la pelvis, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

	Muestra	Grupo 1	Grupo 2
1ª Componente	41,33%	59,44%	40,58%
2ª Componente	30,87%	10,39%	29,18%
3ª Componente	25,16%	28,54%	27,12%
Total	97,36%	98,37%	96,88%

Tabla 7. Valores propios de las 3 componentes para la pelvis

Muestra total

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 40A**. En cada una de las imágenes se presenta la función media (línea continua) y en líneas discontinuas perturbaciones respecto a la media. Las componentes representan la variación respecto a la media. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.300 μ s hasta el instante 5.800 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones también notable, en la zona

inicial (desde el inicio hasta 4.300 μ s) y en la tercera componente, el alejamiento se observa al final (desde 5.800 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al principio y la tercera la variabilidad al final. También se observa que es bastante notable el alejamiento de las perturbaciones respecto a la media en todo el recorrido.

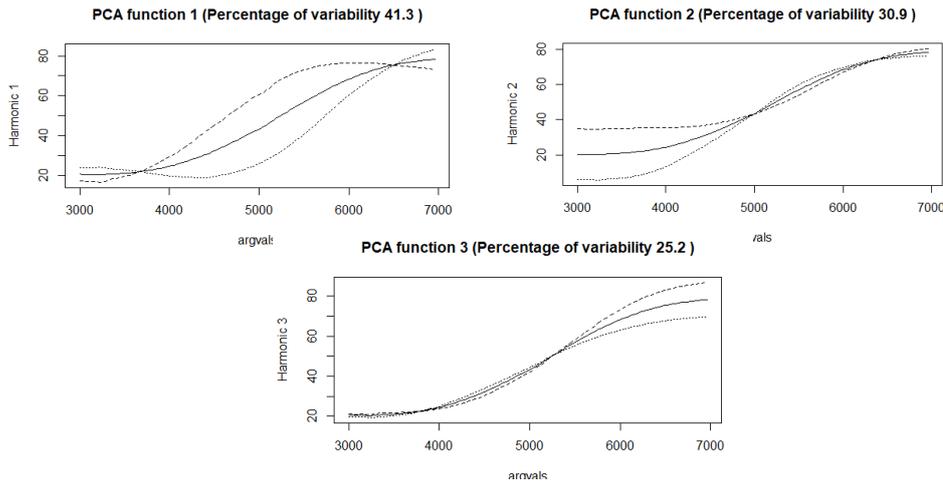


Figura 40A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la Pelvis. Muestra total.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 40B** se muestran aquellos que indican existencia de relación, resultando únicamente entre las componentes 1 y 3 ($r = 0,71$), lo que indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona final.

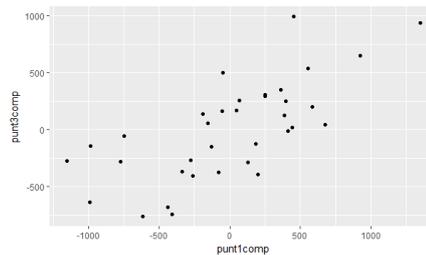


Figura 40B. ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes 1 y 3. Muestra total.

Grupo 1 (Pelvis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 41A**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan

de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.300 μ s hasta el instante 5.800 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el principio hasta 4.300 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al final (desde 5.800 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al principio y la tercera la variabilidad al final. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en las otras dos. Destacar que es muy similar al patrón observado en la muestra total, salvo en que la distancia de las perturbaciones a la función media al principio y al final, son menores.

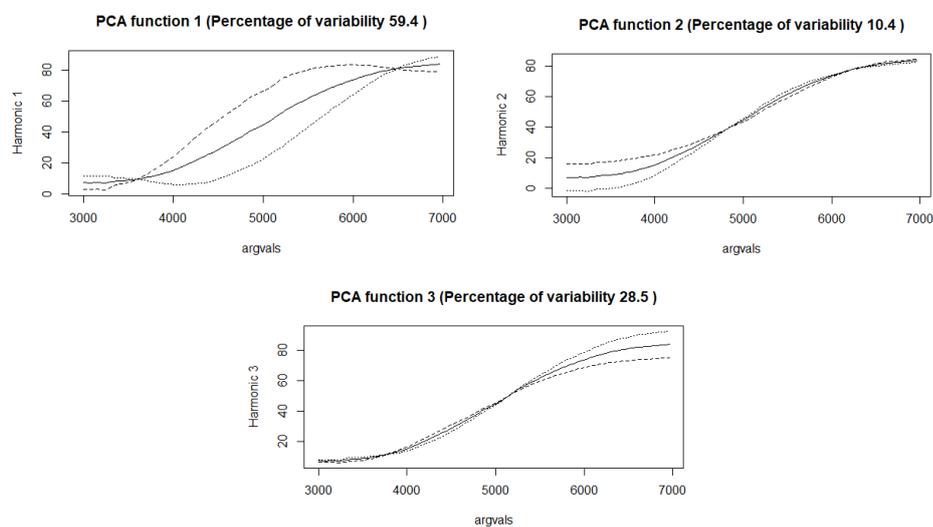


Figura 41A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Grupo 1.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 41B** se muestran aquellos que indican existencia de relación, resultando únicamente entre las componentes 1 y 3 ($r = -0,79$), lo que indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan menor/mayor variabilidad en la zona final.

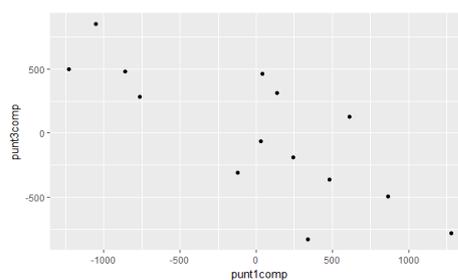


Figura 41B. ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes 1 y 3. Grupo 1.

Grupo 2 (Raquis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 42A**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.600 μ s hasta el instante 5.900 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el inicio hasta 4.600 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al final (desde 5.900 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al principio y la tercera, la variabilidad al final. Destacar que es muy similar al patrón observado en la muestra total.

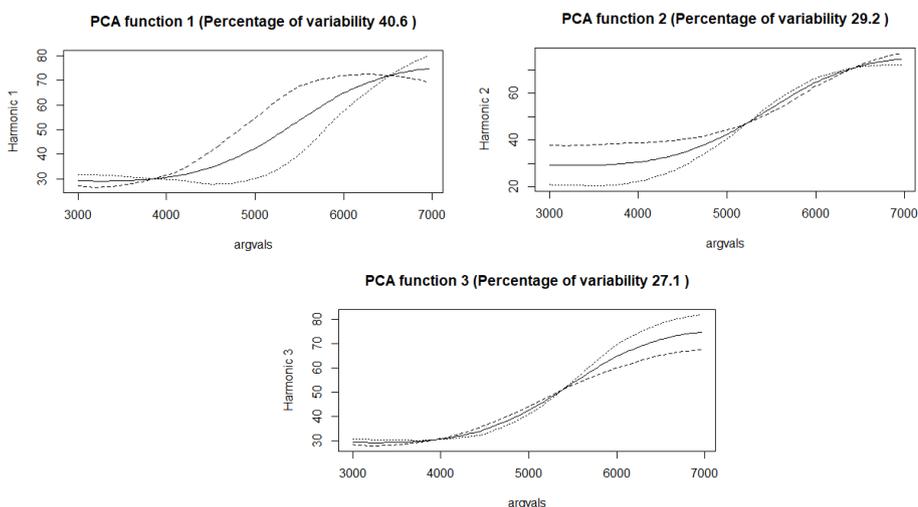


Figura 42A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Grupo 2.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 42B** se muestran aquellos que indican existencia de relación, resultando únicamente entre las componentes 1 y 3 ($r = -0,62$), lo que indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan menor/mayor variabilidad en la zona final.

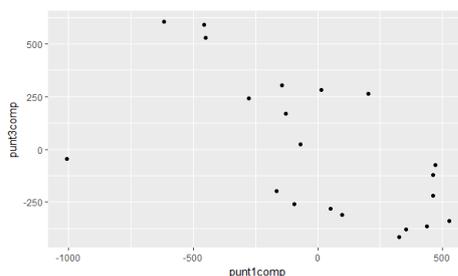


Figura 42B. ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes 1 y 3. Grupo 2.

Raquis Lumbar

Para conocer el porcentaje de la variabilidad explicada, en la **tabla 8** se muestran los valores propios de las 3 componentes para el raquis lumbar, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

	Muestra	Grupo 1	Grupo 2
1ª Componente	49,96%	61,89%	88,33%
2ª Componente	22,06%	22,97%	5,84%
3ª Componente	26,23%	13,08%	4,32%
Total	98,25%	97,94%	98,49%

Tabla 8. Valores propios de las 3 componentes para el raquis lumbar.

Muestra total

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 43A**. En cada una de las imágenes se presenta la función media (línea continua) y en líneas discontinuas perturbaciones respecto a la media. Las componentes representan la variación respecto a la media. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 4.000 μ s hasta el instante 5.000 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 5.000 μ s hasta el final) y en la tercera componente, el alejamiento se observa al inicio (desde el inicio hasta 4.000 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera, la variabilidad al inicio del ejercicio.

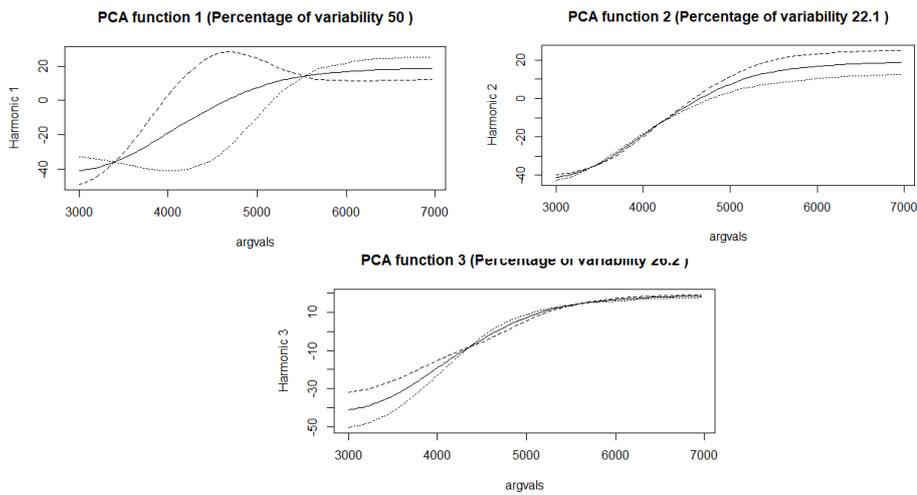


Figura 43A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis lumbar. Muestra total.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 42B** se muestran aquellos que indican existencia de relación. Se observa que existe una relación alta en todos los casos: entre las componentes 1 y 2 ($r = 0,77$), entre las componentes 1 y 3 ($r = 0,82$) y entre las componentes 2 y 3 ($r = 0,70$).

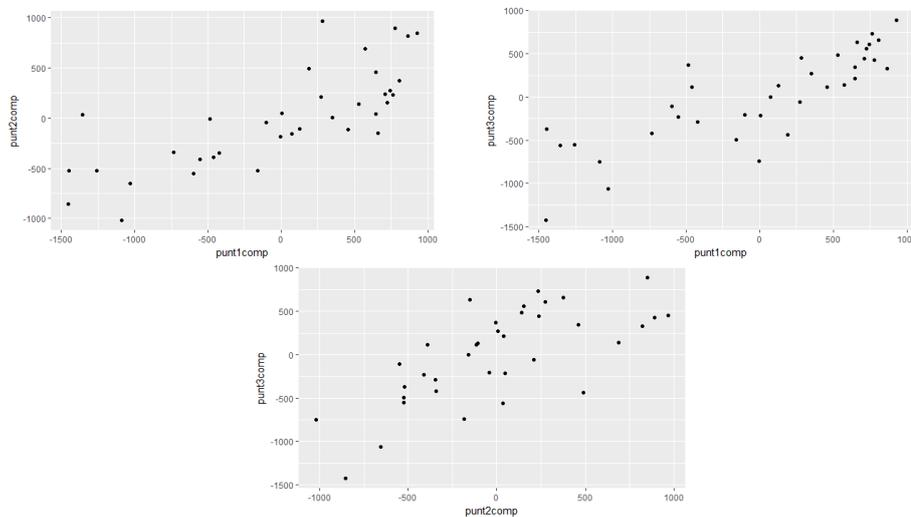


Figura 43B. ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las 3 componentes 2 a 2. Muestra total.

Grupo 1 (Pelvis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 44A**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la primera parte de la zona central (los coeficientes indican desde el

instante 3.700 μ s hasta el instante 4.800 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la segunda parte de la zona central (desde 4.800 μ s hasta 6.100 μ s) y en la tercera componente, el alejamiento se observa tanto al principio (inicio hasta 3.700 μ s) como al final (desde 6.100 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en la primera parte del tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad en la segunda parte del tramo central y la tercera la variabilidad tanto al principio como al final. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la primera parte de la zona central que en el resto. Destacar que la primera componente es similar a la de la muestra total, mientras que la segunda y la tercera difieren notablemente.

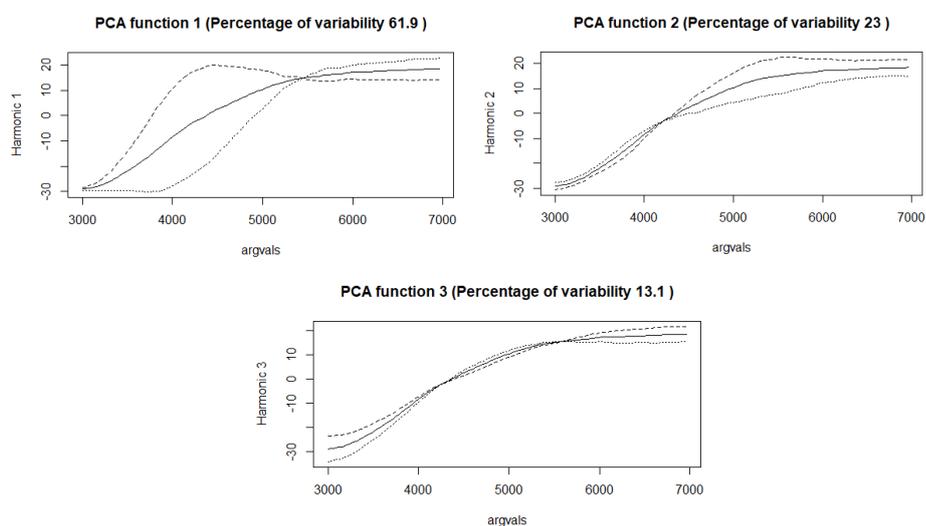


Figura 44A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis lumbar. Grupo 1

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 44B** se muestran aquellos que indican existencia de relación. Se observa que existe una relación alta en todos los casos: entre las componentes 1 y 2 ($r = 0,63$), entre las componentes 1 y 3 ($r = 0,61$) y entre las componentes 2 y 3 ($r = 0,73$).

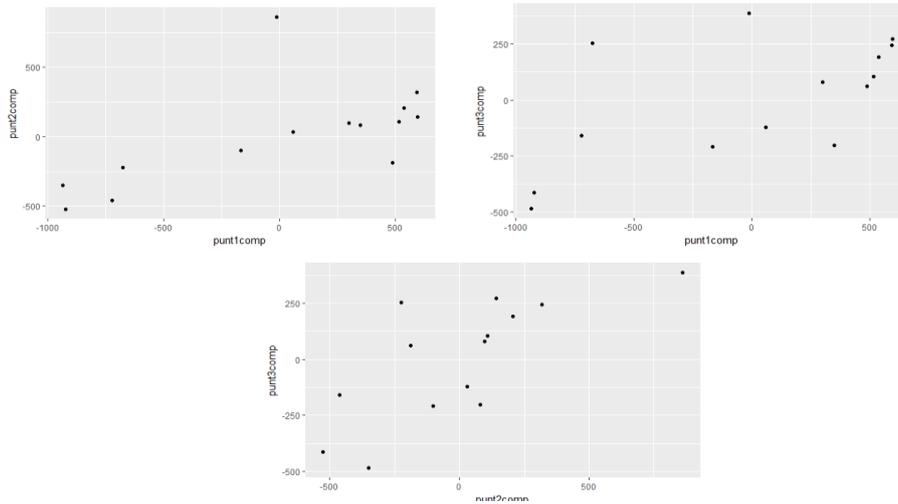


Figura 44B. ACPF: Diagrama de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las 3 componentes 2 a 2. Grupo 1.

Grupo 2 (Raquis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 45**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde 3.900 μ s hasta 5.100 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 5.200 μ s hasta el final) y en la tercera componente el alejamiento se observa al principio (desde el inicio hasta 3.900 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera la variabilidad al inicio. Destacar que el patrón es muy diferente al observado tanto en la muestra total como en el grupo

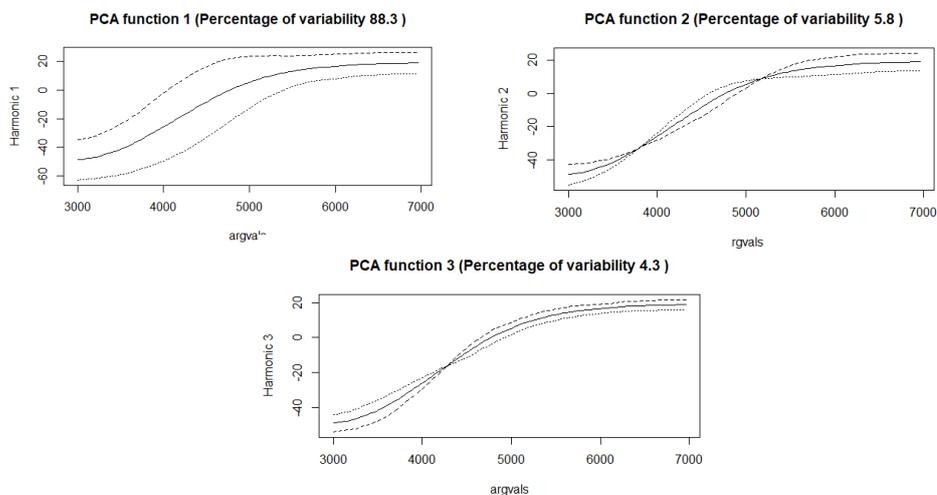


Figura 45. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis lumbar. Grupo 2

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso.

5.3.1.5.- Análisis de la varianza funcional

Con el fin de buscar posibles diferencias significativas en el rango de movimiento tanto del tronco, de la pelvis y del raquis de los sujetos según el grupo en función del dominio del movimiento al que pertenecen, realizamos un análisis de la varianza funcional, con el que probaremos la Hipotésis Nula de igualdad de sus respectivas funciones media. Se utilizaron las funciones *anova.onefactor* (package *fda.usc*) y *Fanova.tests* (package *fdANOVA*), dado que FANOVA solo presenta un factor con dos niveles.

FANOVA con *anova.onefactor*

En la **figura 46** se muestra el resultado del FANOVA para el tronco. Observamos que resulta un p-valor de 0,55 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que no existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

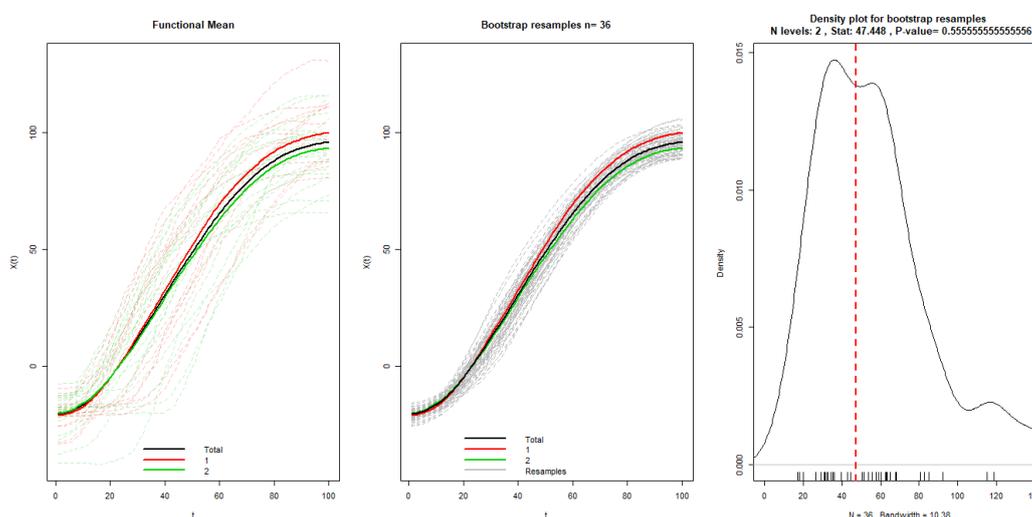


Figura 46. FANOVA con *anova.onefactor* del tronco en función del grupo

En la **figura 47** se muestra el resultado del FANOVA para la pelvis. Observamos que resulta un p-valor de 0 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

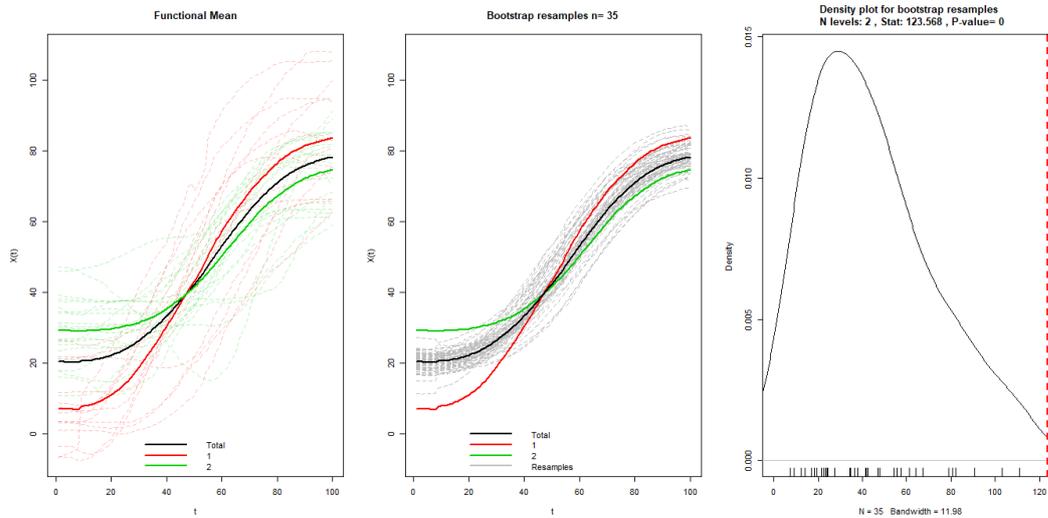


Figura 47. FANOVA con *anova.onefactor* de la pelvis en función del grupo.

En la **figura 48** se muestra el resultado del FANOVA para el raquis. Observamos que resulta un p-valor de 0 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

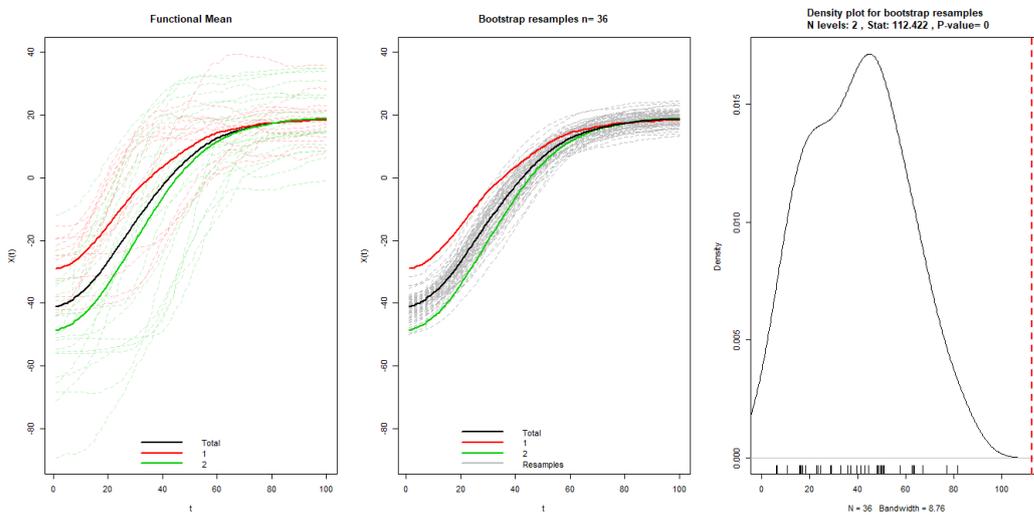


Figura 48. FANOVA con *anova.onefactor* del raquis en función del grupo

FANOVA con *Fanova.tests*

En las **figuras 49, 50 y 51** se muestran los gráficos que elabora *Fanova.tests* para el tronco, pelvis y raquis, respectivamente. En ellas se ven las funciones medias para cada grupo de movimiento. En el caso del tronco, el p-valor obtenido es de 0,8415 por lo que

se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que no existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

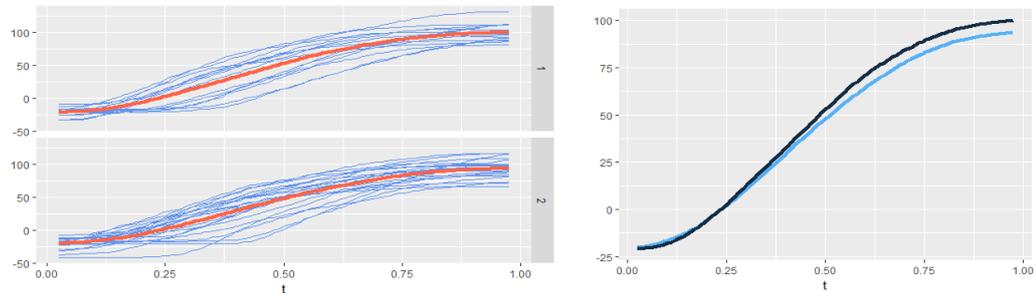


Figura 49. FANOVA con *Fanova.tests* del tronco en función del grupo
Izquierda: datos (-), función media (-); Derecha: función media grupo 1 (-) y grupo 2 (-).

Para la pelvis, resulta un p-valor de 0 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

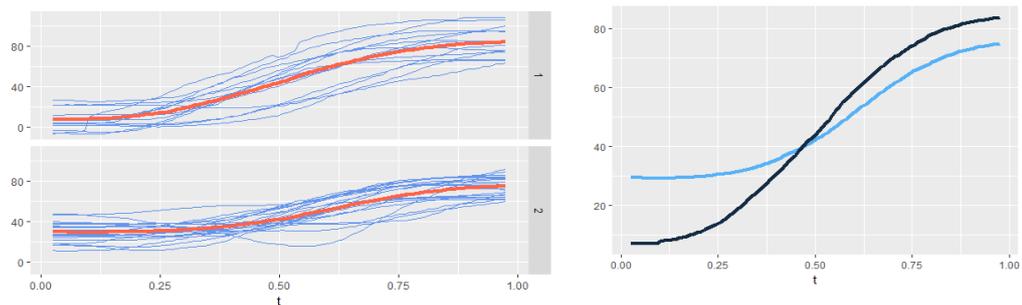


Figura 50. FANOVA con *Fanova.tests* de la pelvis en función del grupo
Izquierda: datos (-), función media (-); Derecha: función media grupo 1 (-) y grupo 2 (-).

Para el raquis, resulta un p-valor de 0,0004 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

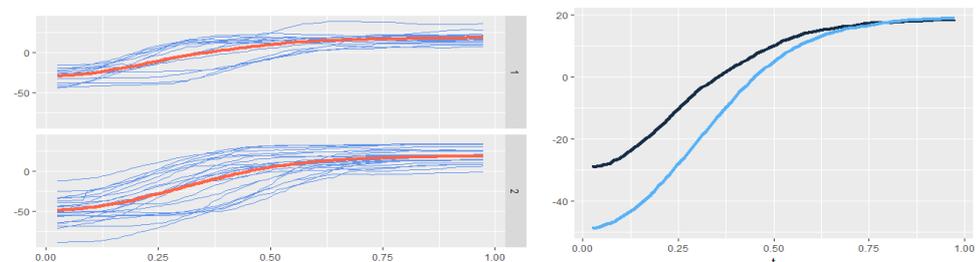


Figura 51. FANOVA con *Fanova.tests* del raquis en función del grupo
Izquierda: datos (-), función media (-); Derecha: función media grupo 1 (-) y grupo 2 (-).

5.3.2.- Movimiento de extensión

5.3.2.1.- Calidad del ajuste

Una vez obtenidos los datos funcionales mediante un proceso suavizado por B-splines, se procedió a comprobar la calidad del ajuste obtenido. Para ello, mediante la función *plotfit.fd*, se calculó el root mean square (RMS) residual, que es una medida de las diferencias entre los valores predichos por un modelo y los valores observados. Es siempre positivo y un valor de 0 indicaría un ajuste perfecto. Los principales estadísticos (mínimo, máximo, media, desviación típica y coeficiente de variación) de los valores obtenidos se muestran en la **tabla 9**.

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. Típica	Coef.Var
Tronco	0.17	2.5	0.31	0.36	1.16
Pelvis	0.07	2.2	0.21	0.35	1.67
Spine	0.07	1.1	0.21	0.18	0.86

Tabla 9. Estadísticos descriptivos de los valores del RMS para tronco, pelvis y spine en el movimiento de extensión

En la **figura 52** se muestran los diagramas de cajas de los RMS residual de los 3 segmentos.

A partir de los resultados obtenidos y, a pesar de la existencia de valores outliers, se puede admitir que el ajuste es muy bueno ya que los valores del RMS residual son, en general, pequeños.

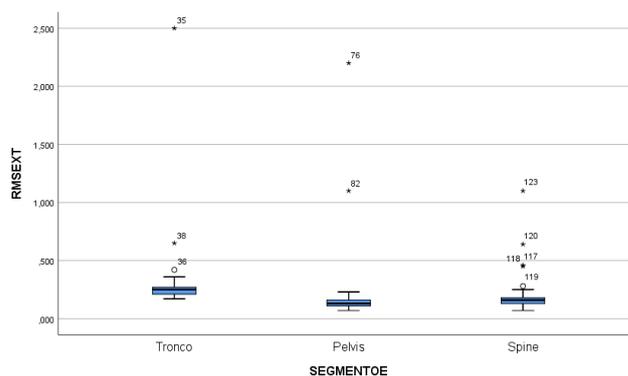


Figura 52. Diagrama de cajas de los RMS residual de los 3 segmentos.

5.3.2.2.- Determinación de outliers funcionales

Al igual que en el movimiento de flexión, para buscar posibles observaciones funcionales atípicas se utilizó rainbow plot, funcional bagplot, HDR boxplot y la función `outliers.depth.trim`

Tronco

En el rainbow plot se muestra en color negro la curva central (mediana) y en color violeta los outliers (en este caso el sujeto 25). En el funcional bagplot, se muestra en negro la curva central (mediana), en diferentes colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 33, 25) y en gris el resto de los datos funcionales. En el HDR boxplot se muestra en negro la curva más profunda (moda), en colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 13, 25) y en gris el resto de datos funcionales, **Figura 53**. La función `outliers.depth.trim` identifica el sujeto 13 como outlier.

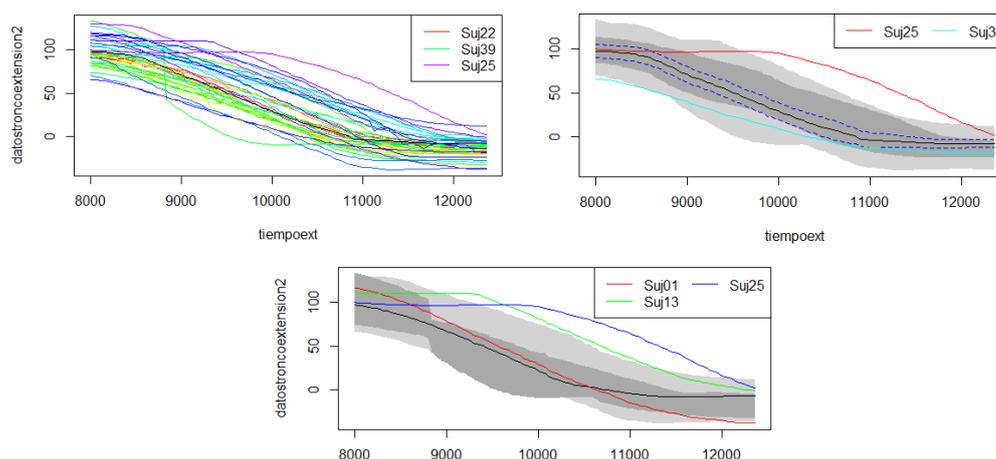


Figura 53. Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del tronco en el movimiento de extensión

Pelvis

En el rainbow plot se muestra en color negro la curva central (mediana) y en color violeta los outliers (en este caso el sujeto 33). En el funcional bagplot, se muestra en negro la curva central (mediana), en diferentes colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 33, 50) y en gris el resto de los datos funcionales. En el HDR boxplot se muestra en negro la curva más profunda (moda), en colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 13, 33) y en gris el resto de datos funcionales, **Figura 54**. La función `outliers.depth.trim` no identifica ningún sujeto como outlier.

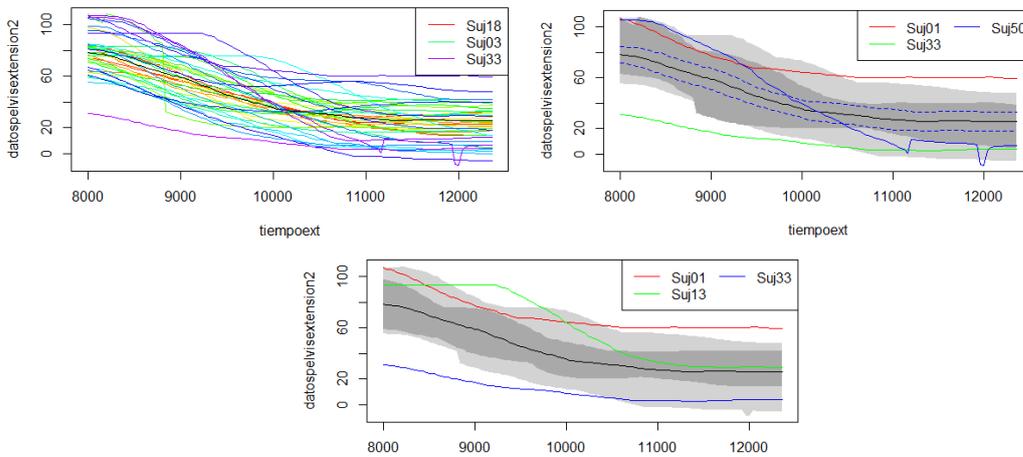


Figura 54. Rainbow plot, funcional bagplot y HDR de la pelvis en el movimiento de extensión

Raquis Lumbar

En el rainbow plot se muestra en color negro la curva central (mediana) y en color violeta los outliers (en este caso el sujeto 50). En el funcional bagplot, se muestra en negro la curva central (mediana), en diferentes colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 2, 16, 19, 25, 26, 37, 50) y en gris el resto de los datos funcionales. En el HDR boxplot se muestra en negro la curva más profunda (moda), en colores las curvas atípicas encontradas (sujetos 1, 25, 50) y en gris el resto de datos funcionales, **Figura 55**. La función `outliers.depth.trim` identifica a los sujetos 2 y 19 como outliers.

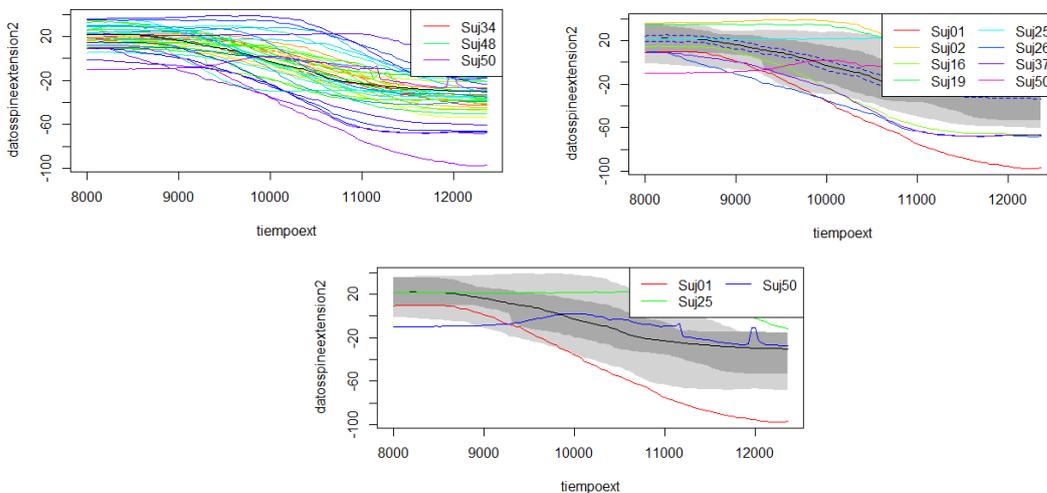


Figura 55. Rainbow plot, funcional bagplot y HDR del raquis lumbar en el movimiento de extensión

En la **tabla 10** se muestra un resumen de los outliers encontrados. Una vez observadas las gráficas y los resultados obtenidos, se decidió eliminar los outliers marcados en azul en dicha tabla.

	Tronco	Pelvis	Spine
rainbow plot	25	33	50
functional bagplot	33,25	1,33,50	1,2,16,19 25,26,37,50
HDR boxplot	1,13,25	1,13,33	1,25,50
outliers.depth.trim	13	-	2,19

Tabla 10. Ouliers funcionales encontrados en cada uno de los métodos utilizados

5.3.2.3.- Estadísticos descriptivos funcionales

Para realizar el estudio descriptivo de los datos funcionales obtenidos, se utilizaron la función media muestral y la función desviación estándar muestral. Se calcularon y dibujaron tanto para la muestra total como para los grupos definidos en función del dominio del movimiento de la pelvis o del raquis lumbar. (Grupo 1 = Pelvis dominante, Grupo 2 = Raquis dominante). Previamente se eliminaron los datos outliers.

Tronco

En la **figura 56** se muestran las funciones media y desviación típica del tronco obtenidas tanto en la muestra total como en los dos grupos en función del dominio del movimiento.

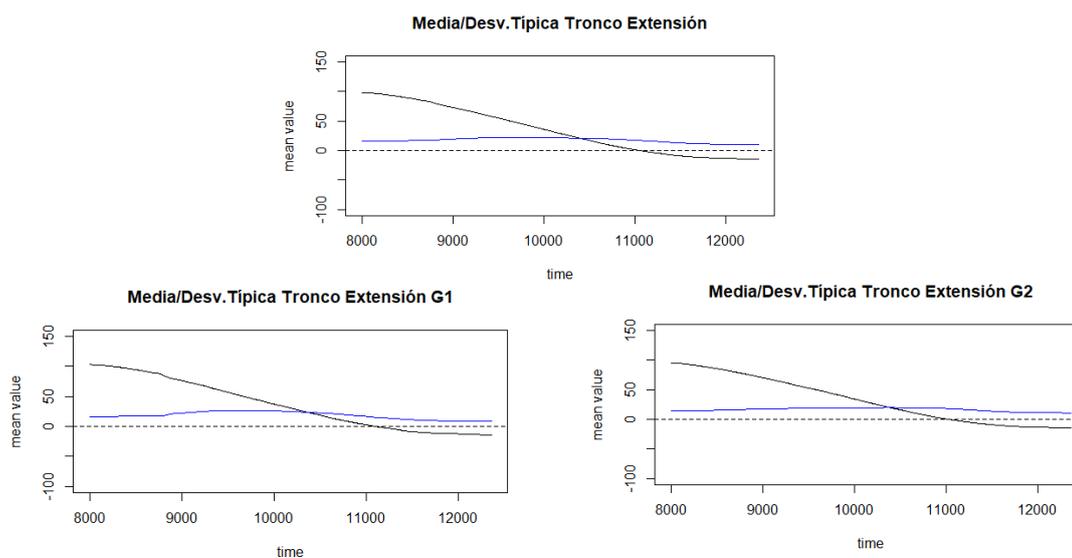


Figura 56. Función media (-) y función desviación típica (-) del tronco en la muestra total y en ambos grupos de movimiento

No se aprecian diferencias tanto en la función media como en la función desviación típica tanto entre la muestra total y los dos grupos, como entre los dos grupos de movimiento. Respecto a la desviación típica no se aprecia apenas variabilidad en ninguno de los casos.

Pelvis

En la **figura 57** se muestran las funciones media y desviación típica de la pelvis obtenidas tanto en la muestra total como en los dos grupos en función del dominio del movimiento.

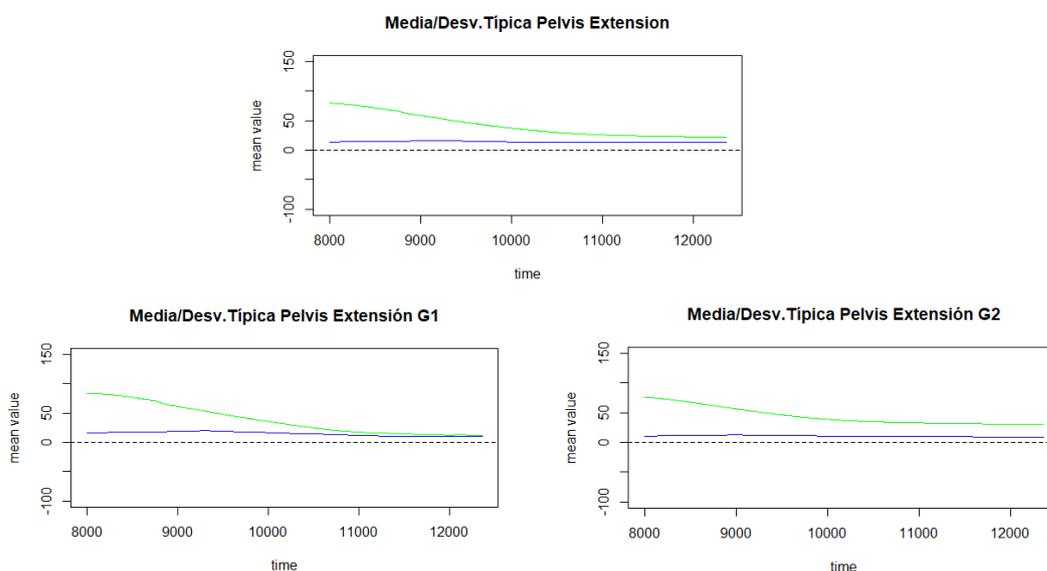


Figura 57. Función media (-) y función desviación típica (-) de la pelvis en la muestra total y en ambos grupos de movimiento

Se aprecian diferencias en la función media tanto entre la muestra total y los dos grupos, como entre ambos grupos, concretamente al final del movimiento. Respecto a la desviación típica no se aprecia mucha variabilidad en ninguno de los casos.

Raquis Lumbar

En la **figura 58** se muestran las funciones media y desviación típica del raquis lumbar obtenidas tanto en la muestra total como en los dos grupos en función del dominio del movimiento.

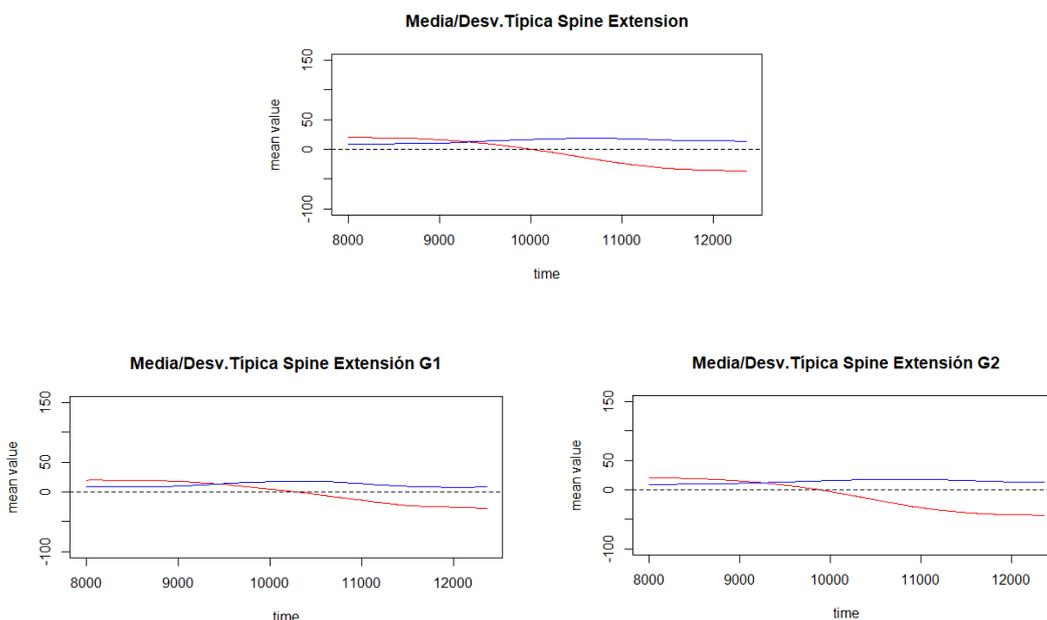


Figura 58. Función media (-) y función desviación típica (-) del raquis lumbar en la muestra total y en ambos grupos de movimiento.

Se aprecian diferencias en la función media tanto entre la muestra total y los dos grupos como entre ambos grupos, especialmente al final del movimiento. Respecto a la desviación típica se aprecia poca variabilidad.

En la **figura 59** se muestran las medias de cada uno de los grupos en el mismo gráfico, para cada uno de los segmentos (tronco, pelvis y raquis)

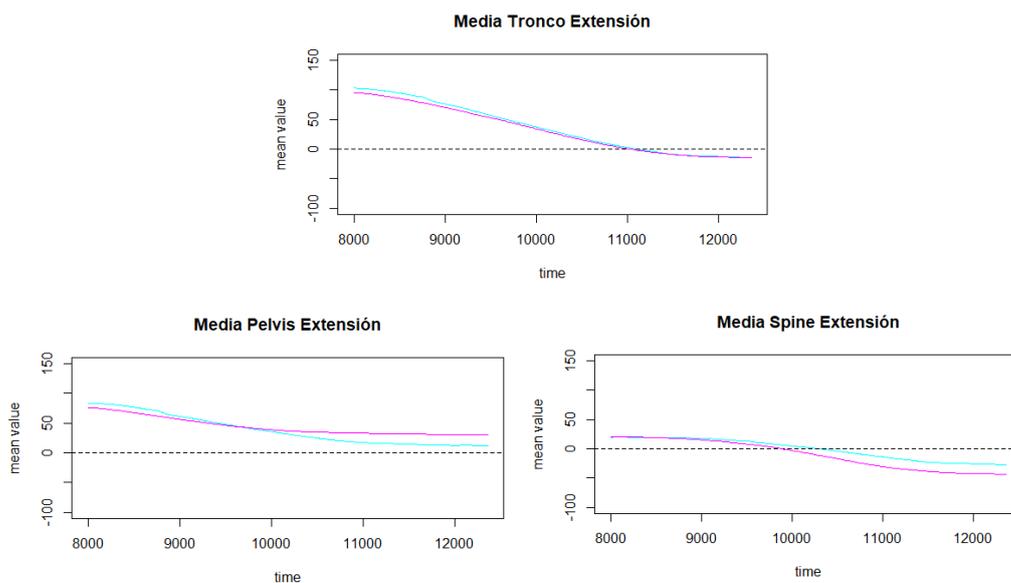


Figura 59. Función media de cada uno de los segmentos en el grupo 1 (-) y el grupo 2 (-) durante la extensión del tronco

Se observa que en el tronco no hay diferencias entre los grupos de movimiento, mientras que en la pelvis se aprecia que el inicio en el caso del grupo 2 tiene valores más bajos que en el grupo 1 y que las líneas se cruzan para finalizar con valores más altos. En el caso del raquis, es el grupo 2 el que al final tiene valores más bajos siendo al inicio valores similares, lo que indica una mayor pendiente, es decir, mayor velocidad.

Finalmente, en la **figura 60**, se muestran las funciones medias de la pelvis y el raquis para cada uno de los grupos. Se observa que los sujetos del grupo 2 mueven más y más rápido el raquis que la pelvis durante la extensión del tronco.

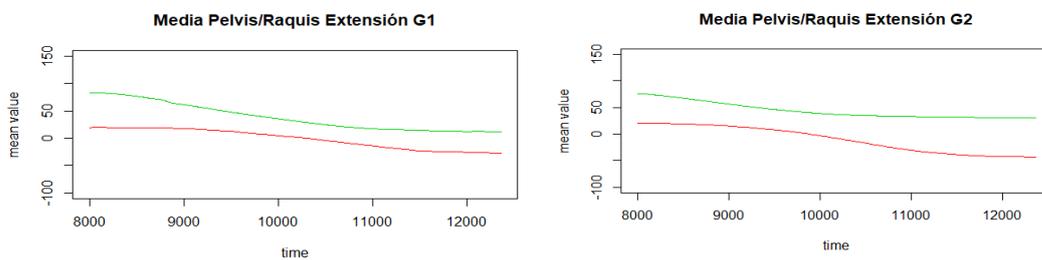


Figura 60. Función media de cada uno de los segmentos, pelvis (-) y raquis (-) en los dos grupos durante la extensión del tronco

5.3.2.4.- Análisis de componentes principales funcional.

Con el fin de profundizar en el estudio de la variabilidad de los datos, se realiza un análisis de componentes principales funcional en los tres segmentos tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

Utilizando el criterio cutt-off (corte en 97%) de elección del número óptimo de componentes y observando los gráficos Scree graph que se muestran en la **figura 61**, se decidió obtener 3 componentes principales por variable. Además, con el fin de mejorar la interpretación, se realizó una rotación Varimax.

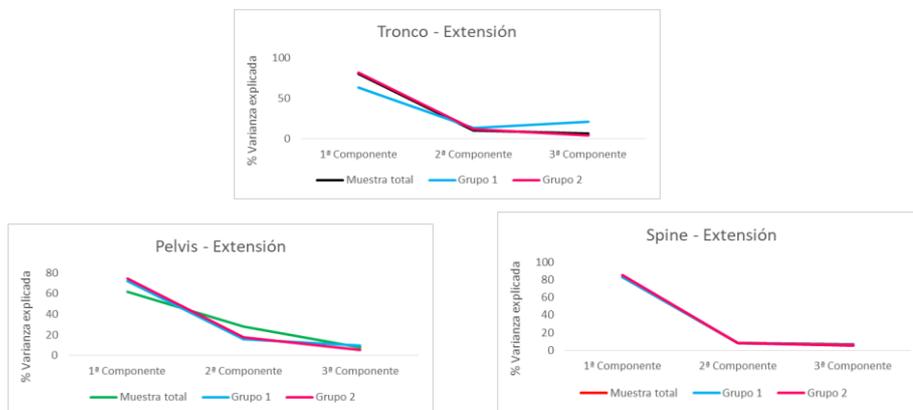


Figura 61. ACPF: Representación Scree Graph de las tres primeras componentes de cada segmento

Tronco

Para conocer el porcentaje de la variabilidad explicada, en la **tabla 11** se muestran los valores propios de las 3 componentes para el tronco, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

	Muestra	Grupo 1	Grupo 2
1ª Componente	80,36%	63,75%	82,00%
2ª Componente	10,89%	13,67%	12,39%
3ª Componente	9,22%	21,22%	4,25%
Total	98,04%	97,51%	98,64%

Tabla 11. Valores propios de las 3 componentes para el tronco

Muestra total

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 62**. En cada una de las imágenes se presenta la función media (línea continua) y en líneas discontinuas perturbaciones respecto a la media. Las componentes representan la variación respecto a la media. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 8.900 μ s hasta el instante 11.000 μ s); en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el principio hasta 8.900 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al final (desde el 11.000 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al inicio y la tercera la variabilidad al final.

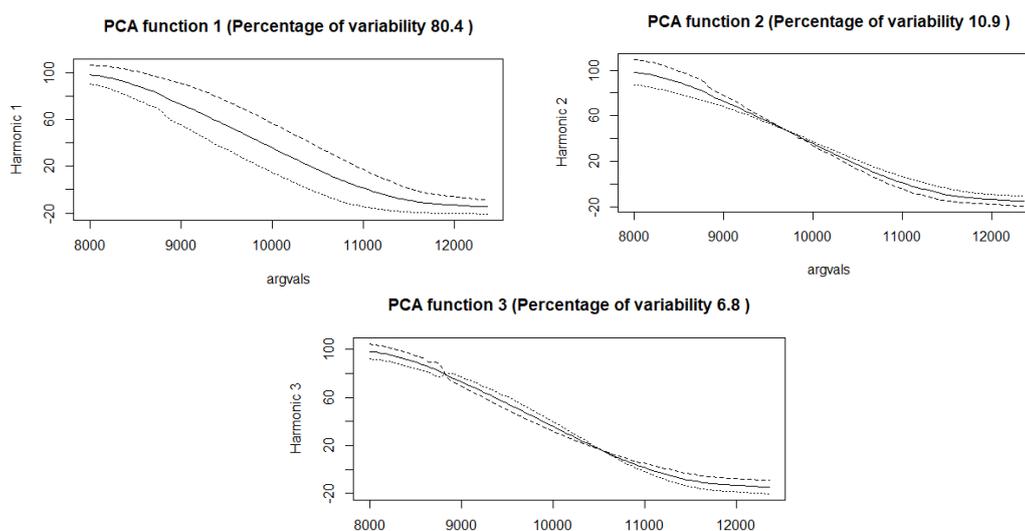


Figura 62. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Muestra total.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso.

Grupo 1 (Pelvis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 63A**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 8.800 μ s hasta el instante 10.400 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el inicio hasta 8.800 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al principio (desde 10.400 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al principio y la tercera la variabilidad al final. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en las otras dos.

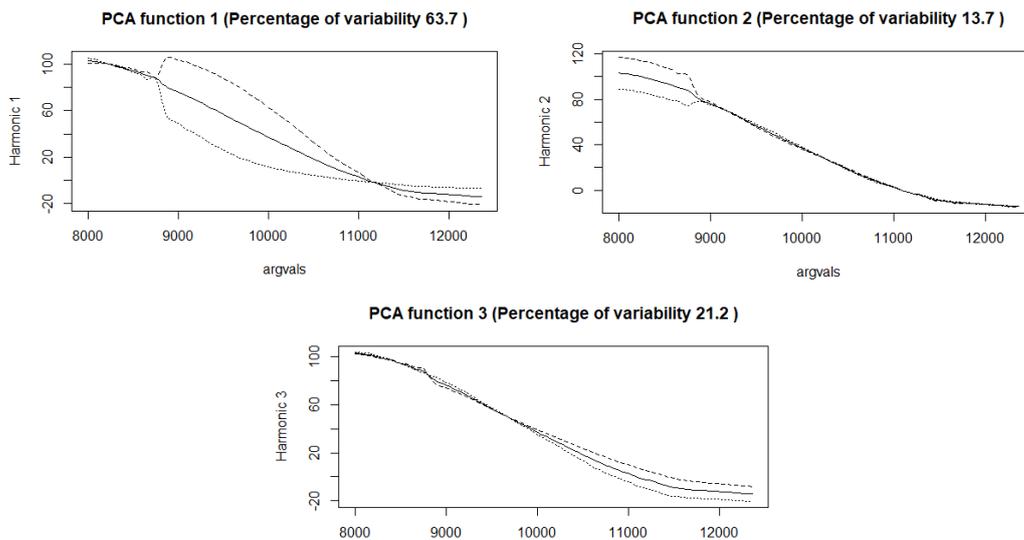


Figura 63A. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Grupo 1.

Finalmente estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2. En la **figura 63B** se muestran aquellos que indican existencia de relación. Se observa que la relación entre las componentes 1 y 2 ($r = 0,48$) indica que los sujetos con mayor/menor variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona inicial; la relación entre las componentes 1 y 3 ($r = 0,79$) indica que los sujetos con mayor/menor

variabilidad en la zona central, también presentan mayor/menor variabilidad en la zona final.

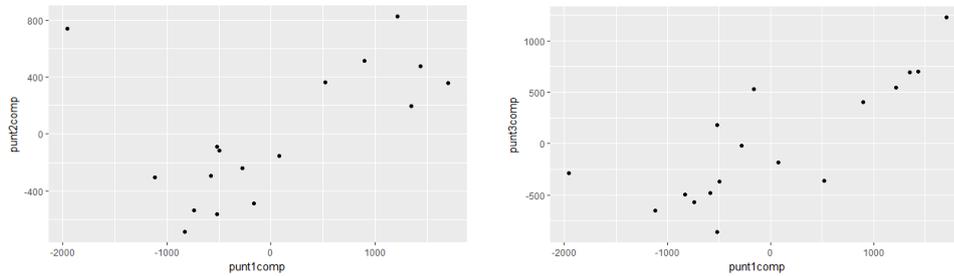


Figura 63B. ACPF: Diagramas de dispersión que indican relación entre las puntuaciones de cada sujeto en las componentes. Grupo 1.

Grupo 2 (Raquis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 64**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 9.200 μ s hasta el instante 11.000 μ s); en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el inicio hasta 9.200 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al final (desde 11.000 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al inicio y la tercera la variabilidad al final. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en las otras dos. Destacar que es muy similar al patrón observado en la muestra total.

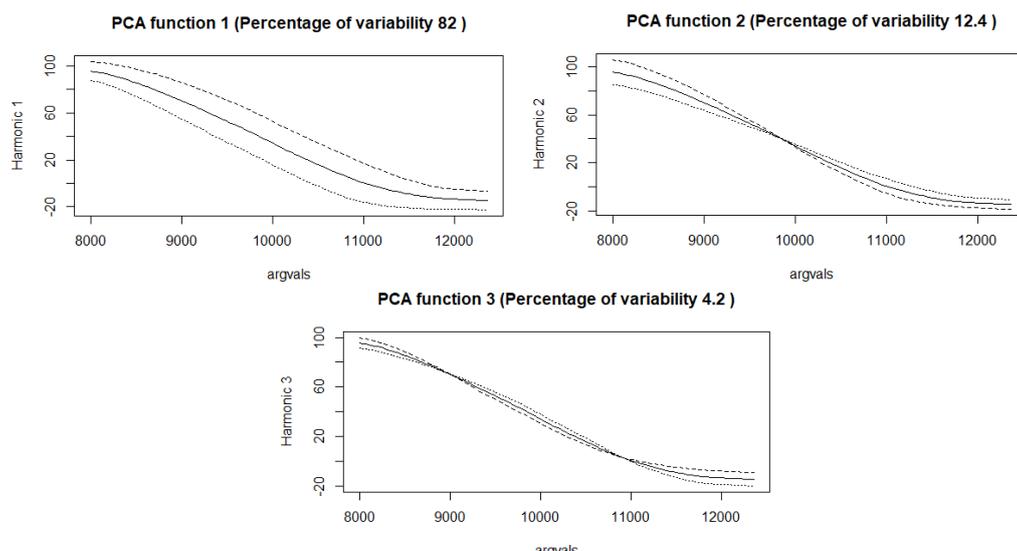


Figura 64. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del tronco. Grupo 2.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso.

Pelvis

Para conocer el porcentaje de la variabilidad explicada, en la **tabla 12** se muestran los valores propios de las 3 componentes para la pelvis, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

	Muestra	Grupo 1	Grupo 2
1ª Componente	62,05%	71,94%	74,67%
2ª Componente	27,83%	15,70%	17,54%
3ª Componente	7,60%	9,87%	5,63%
Total	97,48%	97,51%	97,84%

Tabla 12. Valores propios de las 3 componentes para la pelvis.

Muestra total

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 65**. En cada una de las imágenes se presenta la función media (línea continua) y en líneas discontinuas perturbaciones respecto a la media. Las componentes representan la variación respecto a la media. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 9.000 μ s hasta el instante 10.800 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones, también notable, en la zona final (desde 10.800 μ s al final) y en la tercera componente el alejamiento se observa al inicio (desde el inicio hasta 9.000 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera la variabilidad al inicio.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso.

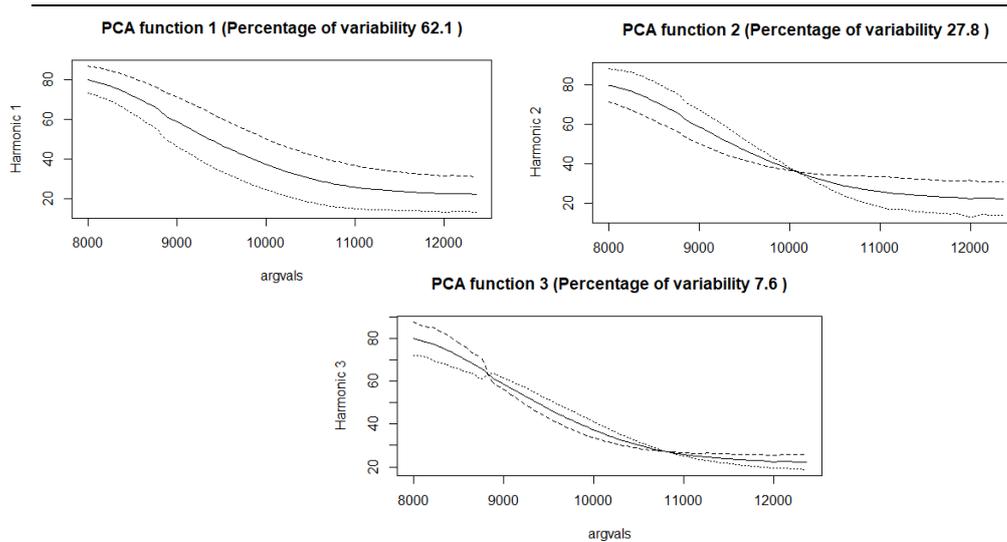


Figura 65. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Muestra total.

Grupo 1 (Pelvis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 66**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 9.000 μ s hasta el instante 10.400 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en dos zonas: inicial (desde el inicio hasta 9.000 μ s) y entre 10.400 μ s y 11.200 μ s. En la tercera componente el alejamiento se observa en la zona final (desde 11.200 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al principio en la segunda parte de la zona central, y la tercera la variabilidad al final.

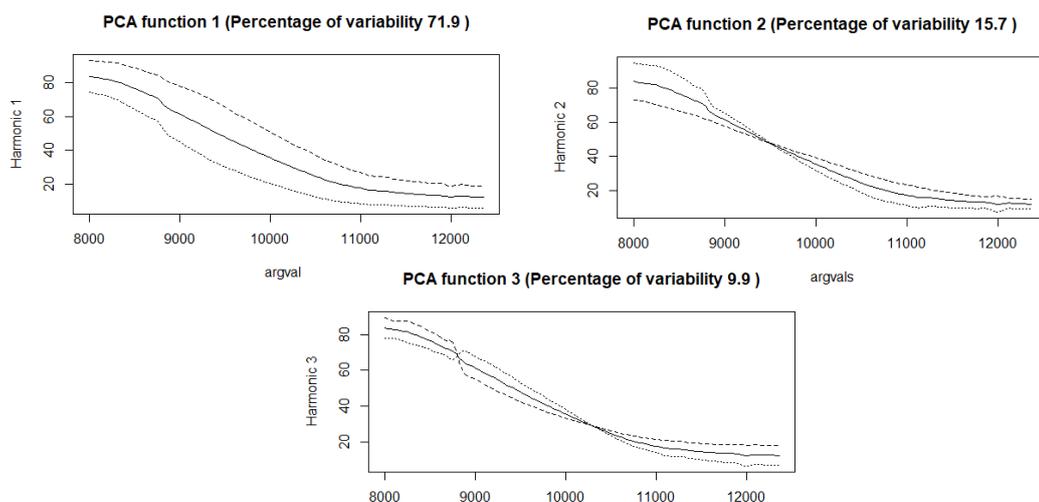


Figura 66. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Grupo 1.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso

Grupo 2 (Raquis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 67**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media prácticamente en todo el movimiento pero, según los coeficientes, especialmente en la zona central (desde el instante 8.600 μ s hasta el instante 10.800 μ s); en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 10.800 μ s hasta el final) y en la tercera componente el alejamiento se observa al inicio (desde el inicio hasta 8.600 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera la variabilidad al inicio. Destacar que es similar al patrón observado en la muestra total.

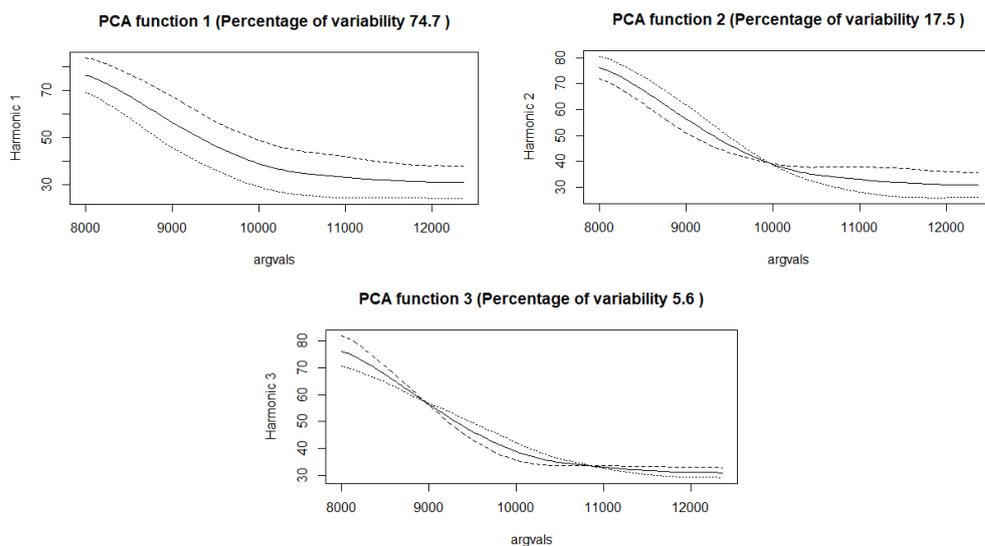


Figura 67. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales de la pelvis. Grupo 2.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso.

Raquis Lumbar

Para conocer el porcentaje de la variabilidad explicada, en la **tabla 13** se muestran los valores propios de las 3 componentes para el raquis lumbar, tanto en la muestra total como en los grupos definidos en función del dominio del movimiento.

	Muestra	Grupo 1	Grupo 2
1ª Componente	82,97%	83,15%	85,51%
2ª Componente	8,30%	8,21%	8,25%
3ª Componente	7,08%	6,46%	5,10%
Total	98,35%	97,82%	98,86%

Tabla 13. Valores propios de las 3 componentes para el raquis lumbar

Muestra total

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 68**. En cada una de las imágenes se presenta la función media (línea continua) y en líneas discontinuas perturbaciones respecto a la media. Las componentes representan la variación respecto a la media. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 9.100 μ s hasta el instante 11.300 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona final (desde 11.300 μ s hasta el final) y en la tercera componente, el alejamiento se observa al inicio (desde el inicio hasta 9.100 μ s); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al final y la tercera la variabilidad al inicio del ejercicio.

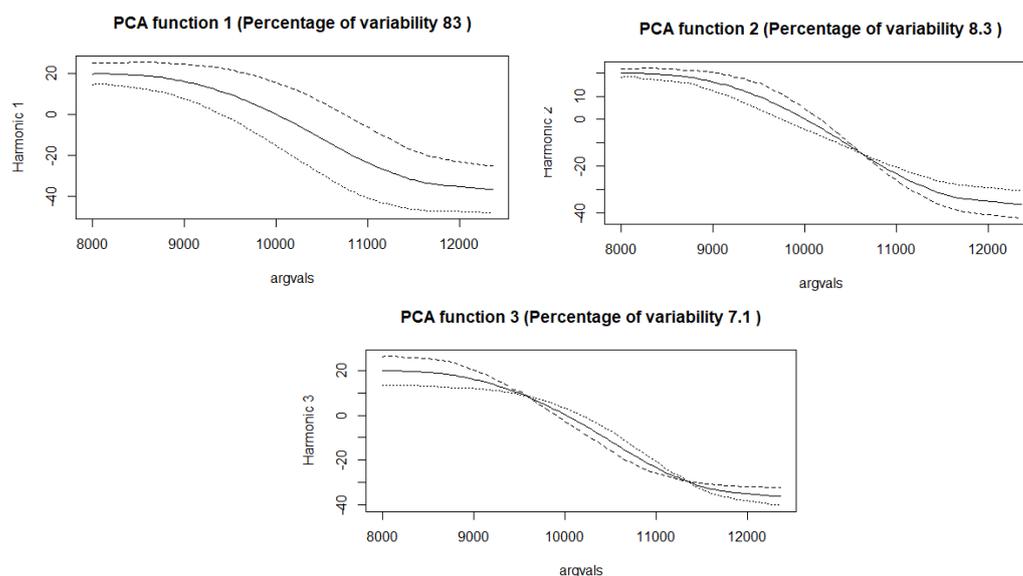


Figura 68. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis. Muestra total.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso

Grupo 1 (Pelvis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 69**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan de la media en la zona central (los coeficientes indican desde el instante 9.600 μ s hasta el instante 11.100 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el inicio hasta 9.600 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al final (desde 11.100 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en la zona central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad en la zona inicial y la tercera la variabilidad al final. También se observa que es mucho mayor la variabilidad en la zona central que en el resto.

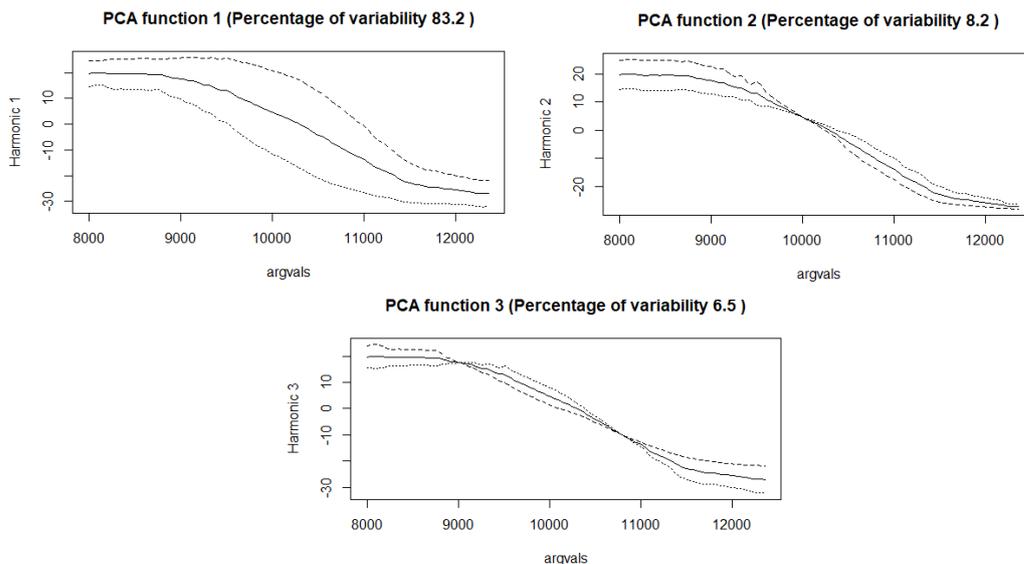


Figura 69. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis. Grupo 1.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso

Grupo 2 (Raquis Dominante)

Analizamos las gráficas de las 3 componentes principales obtenidas. Se muestran en la **figura 70**. En la primera componente observamos que las perturbaciones se alejan

de la media en la zona central (los coeficientes indican desde 9.000 μ s hasta 11.400 μ s) de una forma notable; en la segunda componente observamos un alejamiento de las perturbaciones en la zona inicial (desde el principio hasta 9.000 μ s) y en la tercera componente el alejamiento se observa al final (desde 11.400 μ s hasta el final); por lo tanto, la primera componente muestra la variabilidad en el tramo central del ejercicio, la segunda muestra la variabilidad al inicio y la tercera la variabilidad al final. Destacar que la primera componente es muy similar a la de la muestra total y que las otras dos están cruzadas, es decir, la primera es similar a la segunda de la muestra total y la segunda es similar a la primera de la muestra total.

Estudiamos la relación entre las puntuaciones de cada sujeto en cada componente; para ello realizamos un diagrama de dispersión 2 a 2, obteniendo que no existe relación en ningún caso

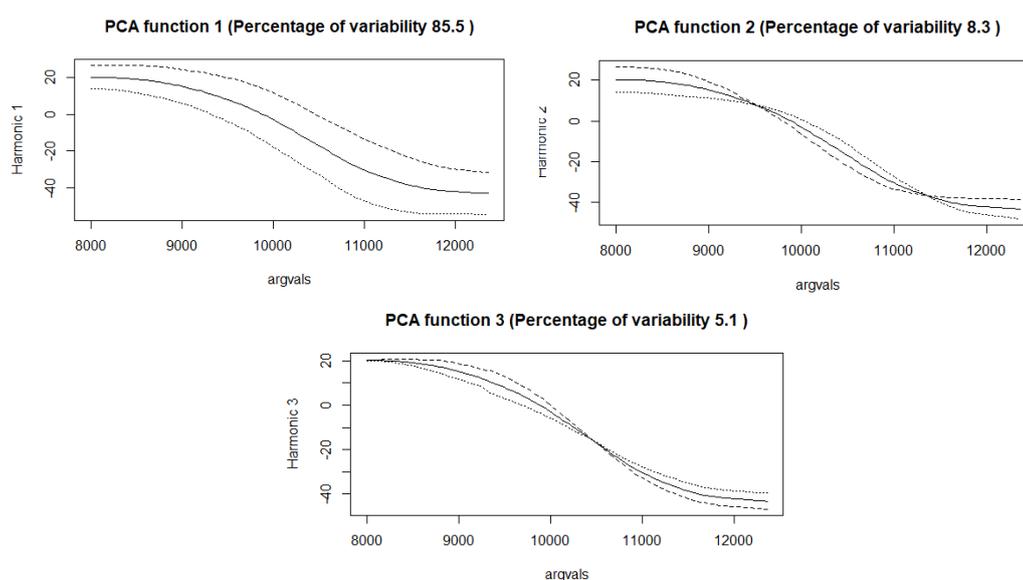


Figura 70. ACPF: Representación de las tres primeras componentes principales del raquis. Grupo 2.

5.3.2.5.- Análisis de la varianza funcional

Con el fin de buscar posibles diferencias significativas en el rango de movimiento tanto del tronco, de la pelvis y del raquis de los sujetos según el grupo en función del dominio del movimiento al que pertenecen, realizamos un análisis de la varianza funcional, con el que probaremos la Hipótesis Nula de igualdad de sus respectivas funciones media. Se utilizaron las funciones *anova.onefactor* (package *fda.usc*) y *Fanova.tests* (package *fdANOVA*), dado que FANOVA solo presenta un factor con dos niveles.

FANOVA con *anova.onefactor*

En la **figura 71** se muestra el resultado del FANOVA para el tronco. Observamos que resulta un p-valor de 0,53 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que no existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

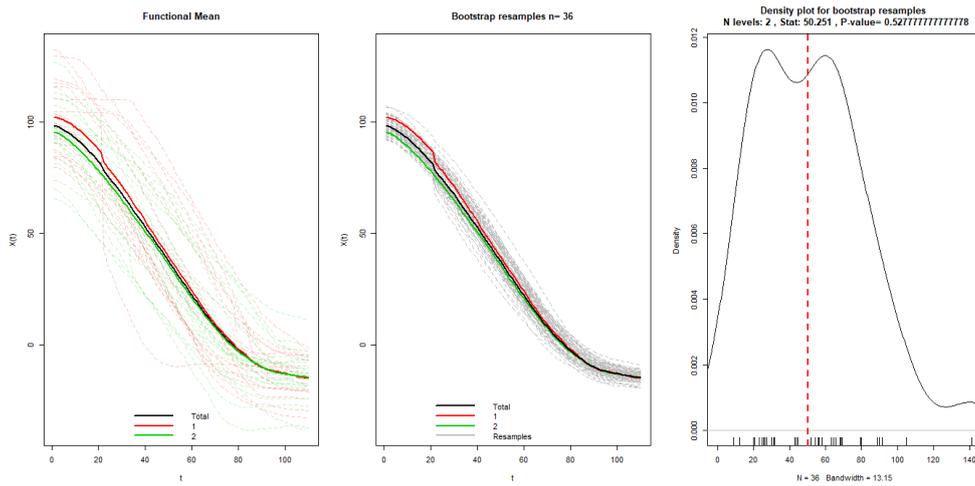


Figura 71. FANOVA con *anova.onefactor* del tronco en función del grupo

En la **figura 72** se muestra el resultado del FANOVA para la pelvis. Observamos que resulta un p-valor de 0 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

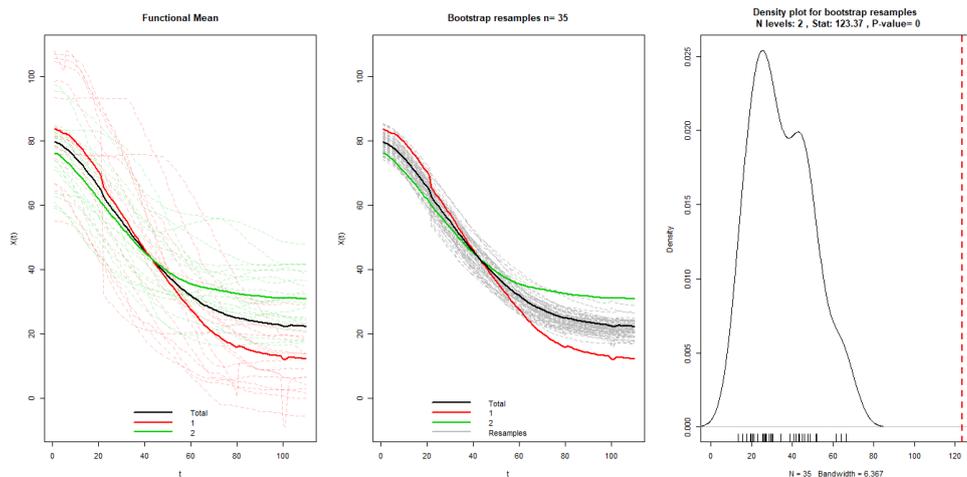


Figura 72. FANOVA con *anova.onefactor* de la pelvis en función del grupo

En la **figura 73** se muestra el resultado del FANOVA para el raquis lumbar. Observamos que resulta un p-valor de 0,11 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que no existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

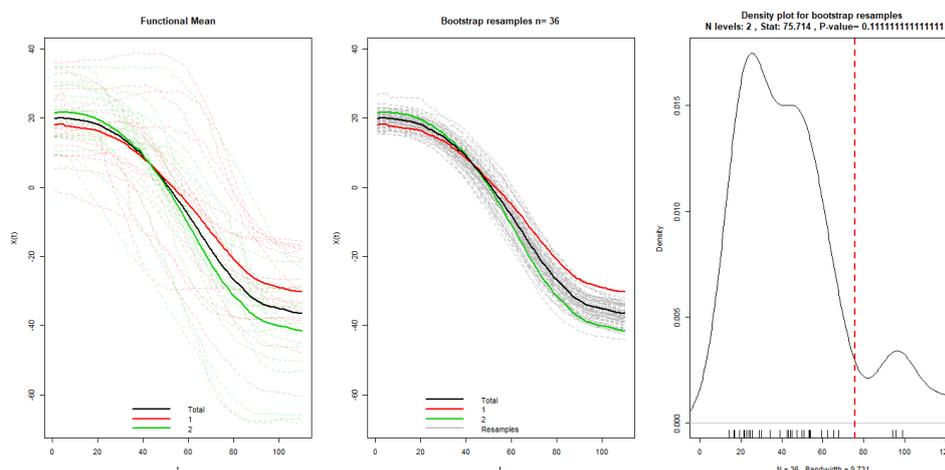


Figura 73. FANOVA con *anova.onefactor* del raquis en función del grupo

FANOVA con *Fanova.tests*

En la **figuras 74, 75 y 76** se muestran los gráficos que elabora *Fanova.tests* para el tronco, pelvis y raquis, respectivamente. En ellas se ven las funciones medias para cada grupo de movimiento.

En el caso del tronco, el p-valor obtenido es de 0,7390 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que no existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

En el caso de la pelvis, el p-valor obtenido es de 0 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

Para el raquis, el p-valor obtenido es de 0,0018 por lo que se puede concluir, con un nivel de significación de 0.05, que existen diferencias significativas entre las funciones medias en función del grupo de dominio de movimiento.

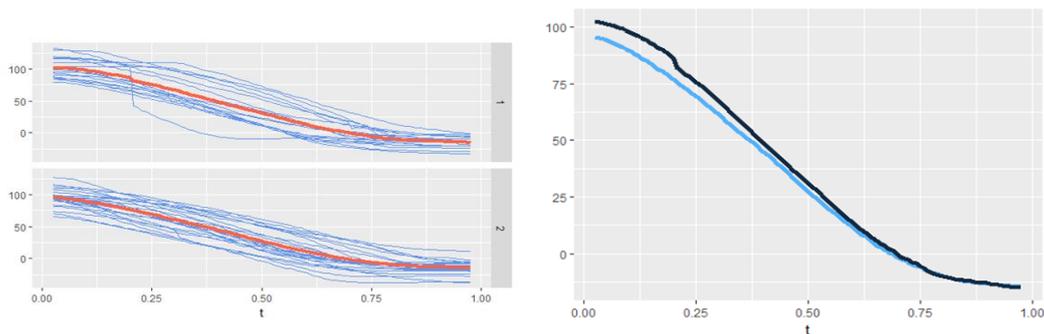


Figura 74 FANOVA con *Fanova.tests* del tronco en función del grupo
Izquierda: datos (-), función media (-); Derecha: función media grupo 1 (-) y grupo 2 (-).

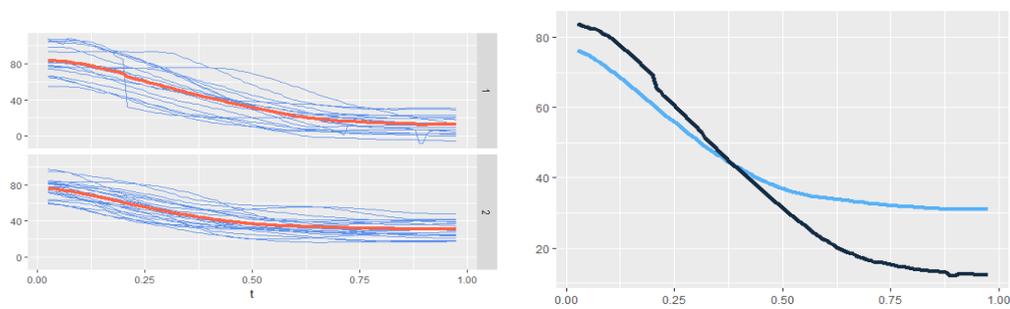


Figura 75. FANOVA con *Fanova.tests* de la pelvis en función del grupo
Izquierda: datos (-), función media (-); Derecha: función media grupo 1 (-) y grupo 2 (-).

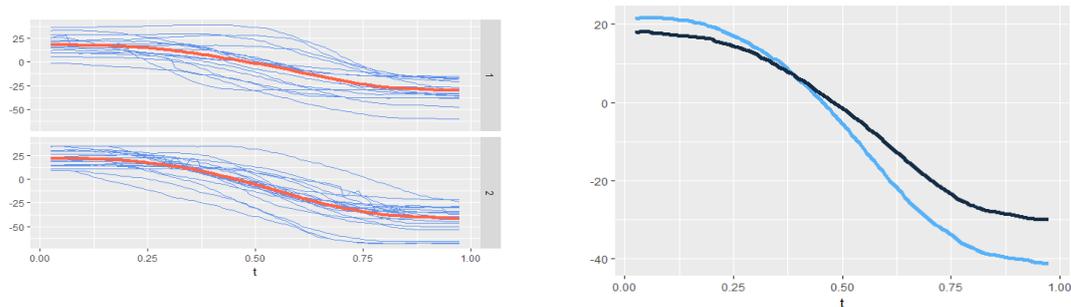


Figura 76. FANOVA con *Fanova.tests* del raquis en función del grupo
Izquierda: datos (-), función media (-); Derecha: función media grupo 1 (-) y grupo 2 (-).

Resumen de los Resultados

Tanto los valores altos obtenidos para el coeficiente de correlación intraclase (ICC), como los bajos para el error estándar de medida (SEM), al igual que en las repeticiones efectuadas en el mismo día, como en las realizadas en días distintos confirmaron la repetibilidad de las variables y la fiabilidad del método

La muestra de nuestro estudio estuvo formada por hombres y mujeres, pero el *patrón de movimiento no estuvo influido por el sexo* (L/P = 1.2 en hombres y L/P = 1.1 en mujeres). Se clasificaron los individuos en dos grupos de acuerdo a si mostraban un patrón de movimiento pelvis dominante o raquis dominante durante los movimientos flexión y de extensión. Al calcular el valor de los ratios, observamos que en algunos casos el valor es muy cercano a 1, por lo que se realiza un análisis cluster k-means, resultando que, en la flexión, 4 sujetos con ratio <1 los asigna al grupo 2, y en la extensión, un sujeto con ratio <1 lo asigna al grupo 2, por lo que se decide eliminar del estudio los sujetos con asignación 'dudosa'. Una vez definidos los *dos grupos en función del patrón de movimiento*: Grupo 1- patrón pelvis dominante y Grupo 2 – patrón raquis dominante, *resultaron estadísticamente diferentes*. Se valoró la extensibilidad de los isquiotibiales con el Passive Straight Leg Raise (PSLR) obteniendo valores dentro del rango de personas muy extensibles (69-70).

Una vez obtenidos los datos funcionales mediante un proceso suavizado por B-splines, se comprueba la buena calidad del ajuste obtenido, tanto para el movimiento de flexión como para el de extensión.

Hemos tratado los valores del rango de movimiento de la pelvis y el raquis lumbar a lo largo de la flexión-extensión del tronco como funciones únicas, es decir, *un único dato funcional para cada individuo*; se ha podido comprobar que los ajustes mediante las funciones base b-splines han sido muy buenos. Se han determinado curvas outliers, que han sido eliminados posteriormente del estudio..

En el **movimiento de flexión**, el análisis descriptivo funcional mostró que la función media en el tronco es similar tanto en la muestra total como en los dos grupos definidos en función del patrón de movimiento. En el caso de *la pelvis*, *sí que se aprecian diferencias en la función media entre los dos grupos*, especialmente al inicio del movimiento de flexión, observándose que *la pelvis se mueve más y más rápido en el grupo 1 que en el grupo 2*. En el *raquis* también *se aprecian diferencias en la función media entre los dos grupos* al inicio del movimiento, observándose que *el raquis lumbar se mueve más y más rápido en el grupo 2 que en el grupo 1*. Respecto a la función

desviación típica, solo se aprecia una variabilidad notable en la zona central de movimiento de flexión. Asimismo se observa que los sujetos del grupo 2 mueven más y más rápido el raquis que la pelvis durante la flexión del tronco,

El análisis de componentes principales funcional profundizó en el estudio de la variabilidad de los datos. En el tronco, tanto en el grupo 1 como en el grupo 2, el mayor porcentaje de variabilidad se produce en la parte central del movimiento (71% y 60%, respectivamente). En la pelvis, tanto en el grupo 1 como en el grupo 2, el mayor porcentaje de variabilidad (59%) se produce en la parte central del movimiento (59% y 41%, respectivamente). En el raquis lumbar, en el grupo 1, el mayor porcentaje de variabilidad (62%) se produce en el principio de la parte central; en el grupo 2, el mayor porcentaje de variabilidad se produce en la parte central (88%). En resumen, *en todos los casos, la mayor variabilidad se encuentra en la parte central del movimiento de flexión, destacando que en el caso del movimiento del raquis lumbar, esa parte central comienza antes y termina después < que en el tronco y la pelvis, es decir, la zona de máxima variabilidad es más extensa y los porcentajes son los más elevados tanto en el grupo 1 como en el grupo 2 (85% y 88% respectivamente). El análisis de correlación de las componentes principales obtenidas, muestra, en el grupo 1, que los sujetos que presentan mayor/menor variabilidad respecto al grupo en la parte central, también la presentan en la final, tanto en el tronco como en la pelvis; mientras que en el raquis la presentan en todo el movimiento. En el grupo 2, los sujetos que presentan mayor/menor variabilidad respecto al grupo en la parte central, la presentan en todo el movimiento en el tronco y al final en la pelvis (en el raquis no hay relación).*

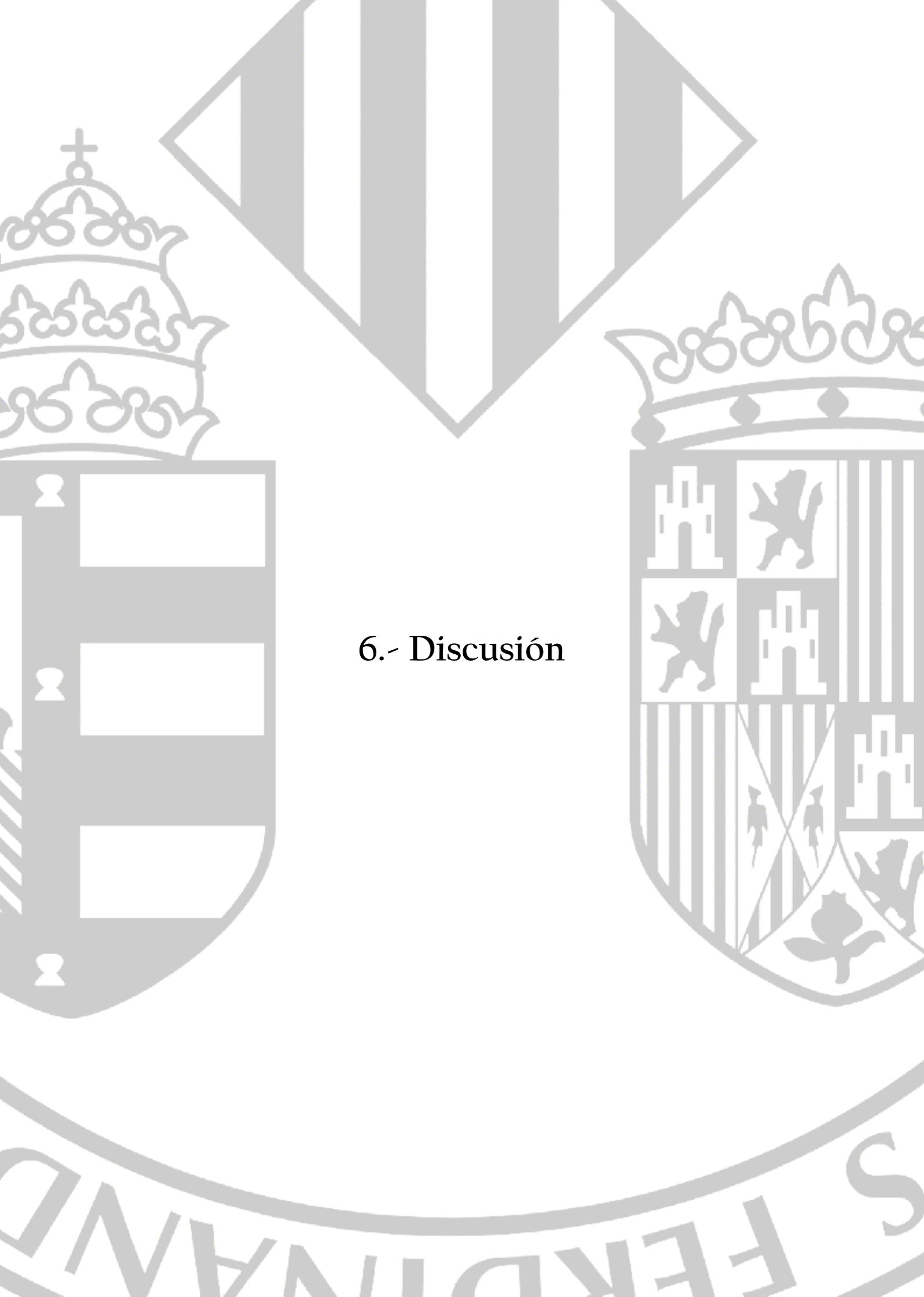
En los análisis de la varianza funcional realizados, en el caso del tronco, no se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre las funciones medias de ambos grupos; tanto en la pelvis como en el raquis lumbar, *ambos análisis encontraron diferencias estadísticamente significativas entre las funciones medias de ambos grupos* ($p < 0.001$).

En el **movimiento de extensión**, el análisis descriptivo funcional mostró que la función media en el tronco es similar tanto en la muestra total como en los dos grupos. En el caso de la pelvis, sí se aprecian diferencias en la función media entre los dos grupos, especialmente al final del movimiento de extensión, observándose que la pelvis se mueve más y más rápido en el grupo 1 que en el 2. En el raquis también se aprecian diferencias en la función media entre los dos grupos al final del movimiento, observándose que el

raquis lumbar se mueve más y más rápido en el grupo 2 que en el 1. Respecto a la función desviación típica, solo se aprecia cierta variabilidad en la zona central del movimiento de extensión. Asimismo se observa que los sujetos del grupo 2 mueven más y más rápido el raquis que la pelvis durante la extensión del tronco

El análisis de componentes principales funcional profundizó en el estudio de la variabilidad de los datos. En el tronco, tanto en el grupo 1 como en el grupo 2, el mayor porcentaje de variabilidad (64%) se produce en la parte central del movimiento (64% y 82%, respectivamente). En la pelvis, tanto en el grupo 1 como en el grupo 2, el mayor porcentaje de variabilidad (72%) se produce en la parte central del movimiento (72% y 75% respectivamente). En el raquis lumbar, tanto en el grupo 1 como en el grupo 2, el mayor porcentaje de variabilidad (83%) se produce en la parte central del movimiento (83% y 86% respectivamente). En resumen, *en todos los casos, la mayor variabilidad se produce en la parte central del movimiento de extensión.* El análisis de correlación de las componentes principales obtenidas *no mostró relación* en ninguno de los dos grupos tanto para la pelvis como para el raquis lumbar.

En los análisis de la varianza funcional realizados, en el caso del tronco, no se encontraron diferencias estadísticamente significativas entre las funciones medias de ambos grupos; tanto en la pelvis como en el raquis lumbar, el análisis realizado con *Fanova.tests* encontró *diferencias estadísticamente significativas* entre las funciones medias de *ambos grupos* ($p < 0.01$). En el caso del análisis realizado con *anova.onefactor* sólo encontró *diferencias estadísticamente significativas para la pelvis* ($p < 0.05$).



6.- Discusión

6. DISCUSIÓN

El propósito de este trabajo es utilizar las herramientas del análisis de datos funcionales para estudiar el patrón de movimiento lumbopélvico en personas sanas. Los valores del rango de movimiento del raquis lumbar y de la pelvis a lo largo de la flexión y extensión del tronco se han considerado como funciones, es decir, como entidades únicas, lo que nos ha permitido estudiar los movimientos de flexión y extensión completos como un único dato para cada individuo, según evidencian Aguilera et al (35), Aguilera Morillo (36) y Guerrón Valera (37). Además de mostrar la existencia de patrones de movimiento raquis y pelvis dominante, hemos estudiado sus principales características tanto de forma conjunta como por separado.

En nuestro estudio el patrón de movimiento no se ha visto influido por el sexo, lo que está en concordancia con los resultados de Esola et al (22) y Expositor Rodriguez (26). Durante el ciclo de flexo-extensión del tronco, se distinguen dos grupos en función del patrón de movimiento: pelvis dominante y raquis dominante. Estudios previos, como el de Hasebe et al (68) asocian el patrón pelvis dominante a personas sanas y el raquis dominante a personas con isquiotibiales cortos, sin embargo en nuestro estudio se obtuvieron valores dentro del rango de personas flexibles, según los criterios de Gajdosik et al (69) y Göeken et al (70); *por lo tanto pensamos que la existencia de un patrón de movimiento pelvis o raquis dominante es independiente del sexo y de la extensibilidad de los isquiotibiales.*

Los resultados del presente estudio constatan la hipótesis planteada. *El uso del análisis de datos funcionales proporciona una mejora en el estudio del patrón de movimiento lumbopélvico, durante la flexión y la extensión sagital del tronco, ya que hemos observado que la aplicación del análisis de datos funcionales permite estudiar de una forma más profunda los movimientos de flexión y extensión durante la flexo-extensión del tronco. Entre otras ventajas, en el inicio del estudio, permite determinar de forma más clara los posibles outliers de la muestra, que podrían enmascarar resultados importantes. Asimismo, Pal et al (24) evidencian que en los estudios que describen los patrones de movimiento, realizados hasta ese momento, presentan resultados contradictorios, y apuntan que podría deberse a características de la muestra, problemas metodológicos y métodos descriptivos; con el análisis de datos funcionales se puede considerar todo el rango de movimiento como un único dato, y evitar tener que dividir el movimiento cada 5% , 10% , 25% como Taffazol et al (10), Nelson et al (17), McClure et*

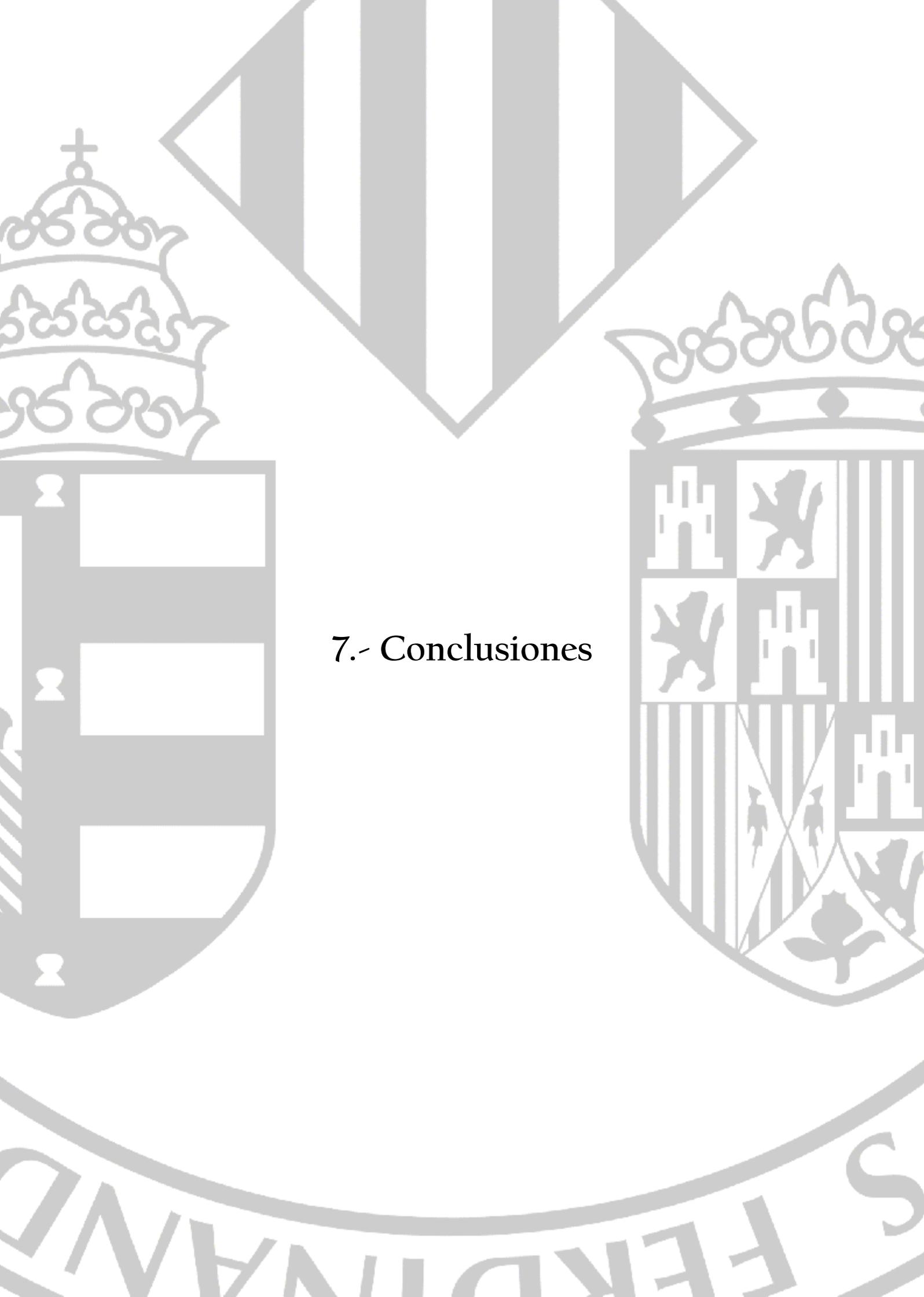
al (23) o Pal et al (24); o cada 30 grados de flexión como Granata et al (14) o Esola et al (22); incluso en dos partes iguales como Zhou et al (11) o eliminar los últimos grados de flexión como Farfan (8) o Nelson et al (17), con lo que se subsanaría un posible error metodológico. Respecto al análisis estadístico, en la mayoría de los estudios, los valores de las variables consideradas se miden en grados, pero en otros, se normalizan al máximo rango de los segmentos estudiados o al tronco como Arjmand et al (13) o Nelson et al (17), con el FDA esto no es necesario y con ello se subsanarían problemas de análisis estadístico. Además en nuestro estudio participaron tanto hombres como mujeres sanos, similares tanto en edad como en condición física.

Además hemos *podido obtener un patrón de movimiento “medio”* (función media) representativo de los sujetos, en cada uno de los grupos, así como visualizar su variabilidad. La obtención de esta función media permitiría, asimismo, compararla con rangos de movimiento de sujetos con dolor lumbar para poder determinar si pueden presentar algún desorden músculo-esquelético y estudiar su comportamiento a lo largo del tiempo del movimiento de flexo-extensión.

Gracias al análisis de componentes principales funcional se ha podido ver que la mayor parte de la variabilidad, tanto en la *flexión como en la extensión* y, tanto en la *pelvis como en el raquis lumbar* está en la *parte central del movimiento*. Además, aplicando el análisis de varianza funcional hemos podido *comparar los patrones de movimiento* de cada uno de los grupos obtenidos, como una única entidad y evidenciar diferencias entre ellos.

También hemos podido constatar, con el análisis de datos funcionales, la existencia de *dos patrones de movimiento lumbopélvico* (pelvis dominante y raquis dominante); así como que *los sujetos del grupo 2 (raquis dominante) mueven más y más rápido el raquis que la pelvis tanto en la flexión como en la extensión del tronco*, lo cual es importante ya que *varía las condiciones biomecánicas que actúan sobre el mismo y, como consecuencia, aumentan las cargas espinales*, lo que estaría de acuerdo con los trabajos de Granata et al (14), McGill et al (31) y Van Wingerden et al (63), que conllevaría *un aumento del riesgo de lesión*; por tanto, los *individuos con cierto patrón de movimiento lumbopélvico (Grupo 2) estarán más predispuestos a padecer desórdenes músculo-esqueléticos de la espalda*. Es decir, que conociendo el grupo al que pertenece un sujeto, se puede realizar un seguimiento con el fin de poder prevenir problemas en la espalda.

En los trabajos de Carrillo et al (47) y Aristizabal (38) observamos cómo estos autores aplican el análisis de datos funcionales al estudio de electroencefalogramas; lo cual nos indica que, al ser señales eléctricas similares, también se pueden aplicar a la electromiografía, con el fin de estudiar, entre otras cosas, la posible influencia de la cinemática de los grupos con patrón pelvis y lumbar dominante en el fenómeno de flexión-relajación (*El fenómeno de flexión relajación consiste en la activación del Erector Spinae y la caída brusca de la actividad muscular, o relajación muscular, entre el 40% y el 60% de la flexión del tronco, llegando en ocasiones a la aparición del silencio mioeléctrico (SM) hasta la máxima flexión del mismo; al inicio del movimiento de extensión se observa la reaparición de la actividad muscular* – Expositor (26)), tema sobre el que versan también los trabajos de McGill et al (31) y Sarti et al (32) utilizando para su análisis la estadística tradicional, tanto univariante como multivariante.

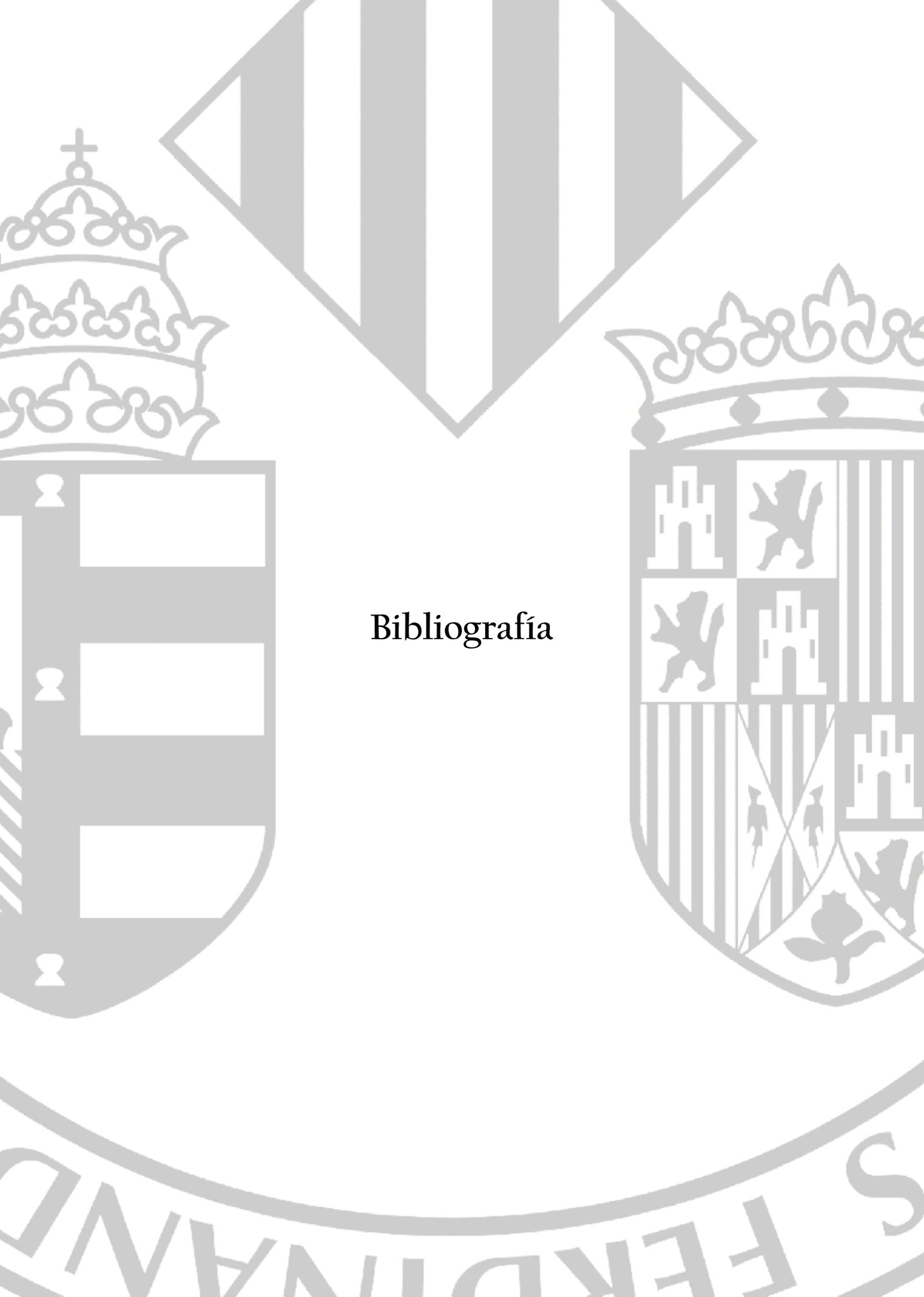


7.- Conclusiones

7. CONCLUSIONES

Después de los resultados obtenidos y analizados éstos en la discusión, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1. Que hemos observado que, durante el ciclo de flexión-extensión del tronco, se distinguen dos grupos en función del patrón de movimiento en los sujetos de la muestra, unos tienen un dominio de la pelvis (Grupo 1) y otros, un dominio del raquis (Grupo 2).
2. Que un patrón de movimiento pelvis o raquis dominante es independiente del sexo y de la extensibilidad de los músculos isquiotibiales.
3. Que hemos obtenido datos funcionales a partir de los datos obtenidos, transformando éstos en funciones, una para cada sujeto representando todo el movimiento de flexo-extensión.
4. Que hemos caracterizado el movimiento lumbopélvico observando que, tanto para la pelvis como para el raquis lumbar, las funciones medias son diferentes, registrándose la máxima variabilidad en la parte central del movimiento tanto de flexión como de extensión.
5. Que la pelvis se mueve más y más rápido en el grupo 1 que en el grupo 2 y el raquis lumbar se mueve más y más rápido en el grupo 2 que en el grupo 1, tanto para el movimiento de flexión como para el de extensión.
6. Que hemos encontrado estadísticamente diferentes las funciones media de los dos grupos estudiados, tanto para el movimiento de flexión como para el de extensión.
7. Que los individuos con patrón de movimiento lumbopélvico raquis dominante están más predispuestos a padecer desórdenes músculo-esqueléticos de la espalda.
8. Que el uso del análisis de datos funcionales proporciona una mejora en el estudio del patrón de movimiento lumbopélvico durante la flexión y la extensión sagital del tronco. Entre otras cosas, permite, a partir de la función media, obtener una 'función tipo' para los sujetos según el grupo al que pertenezcan, tanto para el movimiento de flexión como para el de extensión.



Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA

1. Ramsay J, Silverman B. *Functional Data Analysis*, Springer (Second edition). Springer-Verlag. 2005. 428p. ISBN: 978-0-387-40080-8.
2. Chávez Chong CO, Sánchez García JE, De la Cerda Gastélum J. Análisis de componentes principales funcionales en series de tiempo económicas. (Analysis of Main Functional Components in Economic Time Series). *Gecontec: Revista Internacional de Gestión del Conocimiento y la Tecnología*. 2015; 3 (2): 13-25.
3. Febrero Bande M. A present overview on functional data analysis. *Artículos de Estadística*. BEIO, 2008; 24: 7-14.
4. Pérez Montilla A, Fernández Palacin F (dir). *Métodos Avanzados de Análisis de Datos Funcionales*. Trabajo de fin de Máster. Facultad de Ciencias. Universidad de Cádiz. 2018.
5. Jackson RP, McManus AC. Radiographic analysis of sagittal plane alignment and balance in standing volunteers and patients with low back pain matched for age, sex, and size: a prospective controlled clinical study. *Spine [Internet]*. 1994 [cited 2014 Apr 27]; 19(14): 1611–1618. DOI: 10.1097/00007632-199407001-00010.
6. Caillet R. *Low Back Pain Syndrome*. 5th ed. Arch Street, Philadelphia, Pennsylvania: F.A. Davis Company, 1995.
7. Expositor-Rodríguez R. *Región lumbopélvica. Análisis cinemático y respuesta neuromuscular del erector spinae [TFM]. Implicaciones en el guitarrista clásico*. Valencia. Universidad Católica de Valencia; 2014.
8. Farfan HF. Muscular mechanism of the lumbar spine and the position of power and efficiency. *Orthop Clin N Am*. 1975; 6:135–144. <https://ci.nii.ac.jp/naid/10018451387/en/>
9. Sarti M, Ybáñez-García MD, Fuster-Ortí MA, Villaplana- Sarti LJ, Expositor-Rodríguez R, Barrios C. AB1057 Risk factors associated with different lumbopelvic patterns of movement: *Ann Rheum Dis* 2016; 75: 1263. doi:<http://dx.doi.org/10.1136/annrheumdis-2016-eular.4929>.
10. Taffazol A, Arjmand N, Shirazi-Adl A, Parnianpour M. Lumbopelvic rhythm during forward and backward sagittal trunk rotations: Combined vivo measurement with inertial tracking device and biomechanical modeling. *Clin Biomech (Bristol, Avon)*, 2014; 29 (1): 7-13. DOI:10.1016/j.clinbiomech.2013.10.021
11. Zhou J, Ning X, Fathallah F. Differences in lumbopelvic rhythm between trunk flexion and extension. *Clin Biomech (Bristol, Avon)*, 2015; 32: 274-279. DOI:10.1016/j.clinbiomech.2015.10.012
12. Al-Eisa E, Egan D, Deluzio K, Wassersug R. Effects of pelvic skeletal asymmetry on trunk movement: three-dimensional analysis in healthy individuals versus

- patients with mechanical low back pain. *Spine*. 2006 Feb 1; 31(3): E71–79. DOI: 10.1097/01.brs.0000197665.93559.04.
13. Arjmand N, Shirazi-Adl A. Biomechanics of changes in lumbar posture in static lifting. *Spine*. 2005 Dec 1; 30(23): 2637–2648. doi: 10.1097/01.brs.0000187907.02910.4f
 14. Granata KP, England SA. Stability of dynamic trunk movement. *Spine*. 2006; 31: E271-E276. DOI: 10.1097/01.brs.0000216445.28943.d1.
 15. Kippers Y, Parker A W. Posture related myoelectric silence of erector spinae during trunk flexion. *Spine*. 1984; 9: 740-745. DOI: 10.1097/00007632-198410000-00015.
 16. Mayer TG, Tencer AF, Kristoferson S et al. Use of Noninvasive Techniques for Quantification of spinal Range-of-Motion in Normal Subjects and Chronic Low-Back Dysfunction Patients. *Spine*, 1984; 9: 588-595. DOI: 10.1097/00007632-198409000-00009.
 17. Nelson JM, Walmsley RP, Stevenson JM. Relative Lumbar and Pelvic Motion During Loaded Spinal Flexion/Extension. *Spine*, 1995; 20(2): 199-204. DOI: 10.1097/00007632-199501150-00013
 18. Yamashita T, Cavanaugh JM, el-Bohy AA, Getchell TV, King AI. Mechanosensitive afferent units in the lumbar facet joint. *J Bone Joint Surg Am*. 1990 Jul; 72(6): 865–870.
 19. Gracovetsky S, Kary M, Levy S, Said RB, Pitchen I, Helie J. Analysis of spinal and muscular activity during flexion/extension and free lifts. *Spine* 1990; 15(12): 1333-1339. DOI: 10.1097/00007632-199012000-00018.
 20. Sihvonen T. Flexion Relaxation of the hamstrings muscles during lumbar-pelvic rhythm. *Archives of Physical Medicine and Rehabilitation* 1997; 8: 486-490. [https://doi.org/10.1016/S0003-9993\(97\)90161-1](https://doi.org/10.1016/S0003-9993(97)90161-1).
 21. Basmajian JV. Muscles Alive. Their functions revealed by electromyography. *Postgrad Med J.*, 1963;39 (449): 162.
 22. Esola MA, McClure PW, Fitzgerald GK, Siegler S. Analysis of Lumbar Spine and Hip Motion During Forward Bending in Subjects With and Without a History of Low Back Pain. *Spine*, 1996; 21 (1): 71-78. DOI: 10.1097/00007632-199601010-00017.
 23. McClure PW, Esola M, Schreier et al. Kinematic Analysis of Lumbar and Hip Motion While Rising From a Forward, Flexed Position in Patients With and Without a History of Low Back Pain. *Spine*, 1997; 1: 22(5): 552-558.
 24. Pal P, Milosavijevic S, Sole G et al. Hip and lumbar continuous motion characteristics during flexion and return in young healthy males. *Eur Spine J*, 2007; 16: 741-747. DOI: 10.1007/s00586-006-0200-2.

-
25. Barrios C, Expositor-Rodríguez R, Sarti MA. Risk factors associated with differences in lumbopelvic patterns of movement during lifting tasks. *Eur Spine J* (2016) 25 (Suppl 6):S377-S451. DOI:10.1007/s00586-016-4725-8
 26. Expositor Rodríguez R, Sarti Martínez MA (dir), Barrios Pitarque C (dir). Caracterización del patrón de movimiento lumbopélvico y activación del erector spinae en sujetos sanos. Tesis Doctoral. Universidad Católica de Valencia San Vicente Martir. 2017.
 27. Barrios C, Expositor-Rodríguez R, Sarti MA. To what extent lumbopelvic posture influences the myoelectric silence of the erector spinae during trunk flexion. *Eur Spine J* (2015) 24 (Suppl 6): S743–S800. DOI:10.1007/s00586-015-4131-7.
 28. Lee RY, Wong TKT. Relationship between the movements of the lumbar spine and hip Raymond . *Hum Mov Sci.* 2002; 21(4): 481-494. DOI: 10.1016/S0167-9457(02)00117-3.
 29. Nakayama T, Yamamoto I, Fujiwara T et al. Sagittal Kinematics and Muscular Activities of Torso and Hip during Trunk Flexion and Extension. *J Phys Ther Sci*, 2006; 18: 165-173. DOI: 10.1589/jpts.18. 165.
 30. Sarti MA, Lisón JF, Monfort M, Fuster MA. Response of the Flexion-Relaxation Phenomenon Relative to the Lumbar Motion to Load and Speed. *Spine*, 2001; 26; E421-E426.
 31. McGill SM, Kippers V. Transfer of loads between lumbar tissues during Flexion-Relaxation Phenomenon. *Spine* 1994; 19(19): 2190-2196. DOI: 10.1097/00007632-199410000-00013.
 32. Sarti-Martinez MA, Fuster-Ortí MA, Barrios-Pitarque C. Sacrum Orientation, influences Lumbar Spine and Pelvis Motion. *J Bone Joint Surg Br.* 2009; 91 (Sup III): 463-463.
 33. Sarti M, Ybáñez-García MD, Expositor-Rodríguez R, Barrios C. AB1197 Changes in lumbar spinopelvic pattern of movement influence the flexion relaxation of the erector spinae. *Ann Rheum Dis.* 2015 Jun 9; 74(Suppl 2): 1303.
 34. Galarza Morales C., Vera Alcívar F. Análisis de Varianza Funcional para medir el efecto de recubrimientos revestibles de almidón en características físico-químicas de papayas durante las dos primeras semanas del período de maduración post-cosecha. Tesis de Grado. Escuela Superior Politécnica del Litoral. Ecuador. 2013. URL: <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/24485>
 35. Aguilera AM, Aguilera-Morillo MC. Comparative study of different B-spline approaches for functional data. *Math Comput Model*, 2013; 58; (7-8): 1568-1579. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2013.04.007>.
 36. Aguilera Morillo MC. Estimación penalizada con datos funcionales. Trabajo fin de Máster. Universidad de Granada. 2009.
-

37. Guerrón Varela ER. Análisis de Datos Meteorológicos del Valle de los Chillos usando Datos Funcionales. Test de Grado. Universidad San Francisco de Quito. 2015.
38. Aristizabal Rodríguez JP. Metodología estadística para el análisis de datos funcionales cerebrales: Una aproximación con potenciales evocados. Trabajo Fin de Grado. Universidad Nacional de Colombia. 2011.
39. Millán Roures L, Epifanio López I (tut), Martínez García V (tut). Outliers de datos funcionales para la detección de caudales anómalos en el sector hidráulico. Proyecto Final de Master. Universitat Jaume I. 2017.
40. Deville J. Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique, *Ann. Insee*, 1974; 15; 3–104. <https://doi.org/10.2307/20075177>.
41. Ramsay JO, Dalzell CJ. 1991. Some tools for functional data analysis (with discussion). *J R Stat Soc Series B Stat Methodol*. 1991; 53 (3): 539–572.
42. Giraldo R. Análisis exploratorio de variables regionalizadas con métodos funcionales. *Rev Colomb Est*. 2007; 30 (1): 115-127. DOI: 10.15446/rce.
43. Navarro Pérez V, Delicado Useros P (dir). Análisis de datos funcionales. Implementación y aplicaciones. Proyecto fin de Carrera. Universitat Politècnica de Catalunya. 2004.-
44. Cuevas A, Febrero M, Fraiman R. An anova test for functional data. *Comput Stat Data Anal*. 2004; 47: 111-222. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2003.10.021>.
45. Febrero-Bande M, Galeano P, González-Manteiga W. Outlier Detection in Functional Data by Depth Measures, with application to identify abnormal NOx levels. *Environmetrics*, 2008; 19 (4); 331-345. doi: 10.1002/env.878.
46. Plazola Ortiz R. Monitoreo de Datos Funcionales. Tesis de Grado. Centro de Investigación en Matemáticas A.C. Guanajuato, México. 2013.
47. Carrillo Ramírez AE, Garalejo Escobar OC. Análisis de datos funcionales aplicado en electroencefalogramas: agrupamiento por K-medias funcional. Fundación Universitaria Los Libertadores. Bogotá. 2016. URL: <http://hdl.handle.net/11371/721>.
48. Ferraty F, Vieu P. Nonparametric Functional Data Analysis. Theory and Practice. Springer-Verlag. New York. 2006.
49. De Boor C. Package for calculating with B-splines. *J Numer Anal*. 1977; 14: 441-472. <https://doi.org/10.1137/0714026>.
50. López-Pintado S, Romo R. Depth-based inference for functional data. *Comput. Stat. Data Anal*, 2007; 51: 4957-4968. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2006.10.029>
51. Cuesta-Albertos J, Nieto-Reyes A. The random tukey depth. *Comput Stat Data Anal*. 2008; 52(11): 4979-4988. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2008.04.021>.

-
52. Fraiman R, Muniz G. Trimmed Means for Functional Data. *Test*, 2001; 10 (2): 419-440. <https://doi.org/10.1007/BF02595706>.
 53. Sun Y, Genton MG. Functional Boxplots. *J Comput Graphical Stat*, 2011; 20: 316-334. <https://doi.org/10.1198/jcgs.2011.09224>.
 54. Shang HL, Hyndman RJ. Bagplots, boxplots and outlier detection for functional data. *Functional and Operatorial Statistics. Contributions to Statistics*. Physica-Verlag HD. https://doi.org/10.1007/978-3-7908-2062-1_31
 55. Rousseeuw PJ, Ida Ruts I, Tukey JW. The Bagplot: A Bivariate Boxplot. *The Am Statistician*. 1999; 53(4): 382-387. DOI: 10.1080 / 00031305.1999. 10474494.
 56. Ramsay JO, Silverman BW. *Applied Functional Data Analysis: Methods and Case studies*. Springer-Verlag. New York – USA. 2002. <http://www.amazon.com/dp/038795414724>
 57. Shen Q, Faraway J. An F test for linear models with functional responses. *Stat Sin*. 2004; 14: 1239–1257. URL: <https://www.jstor.org/stable/24307230>.
 58. Cuesta-Albertos J, Febrero-Bande M. A simple multiway ANOVA for functional data. *Test: An official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, 2010; 19 (3): 537-557. <https://doi.org/10.1007/s11749-010-0185-3>.
 59. Sarti MA, Monfort M, Fuster MA, Villaplana LA. Muscle Activity in Upper and Lower Rectus Abdominus During Abdominal Exercises. *Arch Phys Med Rehabil*. 1996; 77(12): 1293-1297. [https://doi.org/10.1016/S0003-9993\(96\)90195-1](https://doi.org/10.1016/S0003-9993(96)90195-1).
 60. Adams MA, Dolan P. A technique for quantifying the bending moment acting on the lumbar spine in vivo. *J Biomech*.1991; 24: 117-116. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(91\)90356-R](https://doi.org/10.1016/0021-9290(91)90356-R).
 61. Adams MA, Hutton WC, Stott JR. The resistance to flexion of the lumbar intervertebral joint. *Spine*. 1980; 5: 245-253. DOI: 10.1097/00007632198005000-00007.
 62. Van Wingerden JP, Vleeming A, Snijders CJ, Stoeckart R. A functional-anatomical approach to the spine-pelvis mechanism: interaction between the biceps femoris muscle and the sacrotuberous ligament. *Eur Spine J*. 1993; 2: 140-144. DOI: 10.1007/BF00301411.
 63. Zhou J, Ning X, Hu B, Dai B. The influences of foot placement on lumbopelvic rhythm during trunk flexion motion. *J Biomech*. 2016 Jun 14; 49(9): 1692–1697. DOI: 10.1016 /j.jbiomech.2016.03.048
 64. Adams MA, Burton AK, Dolan P, Bogduk N. *The biomechanics of back pain*. Churchill Livingstone. 2007.
 65. Adams MA, Dolan P, Hutton, WC. Diurnal Changes in Spinal Mechanics and their Clinical Significance. *J Bone Joint Surg Br.*, 1990; 72: 266-270. <https://doi.org/10.1302/0301-620X.72B2.2138156>.
-

66. Vera-Garcia FJ, Flores-Parodi B, Elvira JLL, Sarti MA. Influence of trunk curl-up speed on muscular recruitment. *J Strength Cond Res.* 2008; 22: 684-690. DOI: 10.1519/JSC.0b013e31816d5578.
67. Sleivert GG, Wenger HA. Reliability of Measuring Isometric and Isokinetic Peak Torque, Rate of Torque Development, Integrated Electromyography, and Tibial Nerve Conduction Velocity. *Arch Phys Med Rehabil,* 1994; 75: 1315-1321. [https://doi.org/10.1016/0003-9993\(94\)90279-8](https://doi.org/10.1016/0003-9993(94)90279-8).
68. Hasebe K, Sairyo K, Hada Y, Dezawa A, Okubo Y, Kaneoka K, et al. Spino-pelvic-rhythm with forward trunk bending in normal subjects without low back pain. *Eur J Orthop Surg Traumatol.* 2014 Jul; 24(Suppl 1): 193–199. DOI:10.1007/s00590-013-1303-1.
69. Gajdosik RL, Albert CR, Mitman JJ. Influence of hamstring length on the standing position and flexion range of motion of the pelvic angle, lumbar angle, and thoracic angle. *J Orthop Sports Phys Ther.* 1994; 20: 213-219. DOI: 10.2519/jospt.1994.20.4.213.
70. Göeken LN, Hof AL. Instrumental straight-leg raising: a new approach to Lasègue's test. *Arch Phys Med Rehabil.* 1991; 72: 959-66. <https://doi.org/10.5555/uri:pii:0003999391901356>

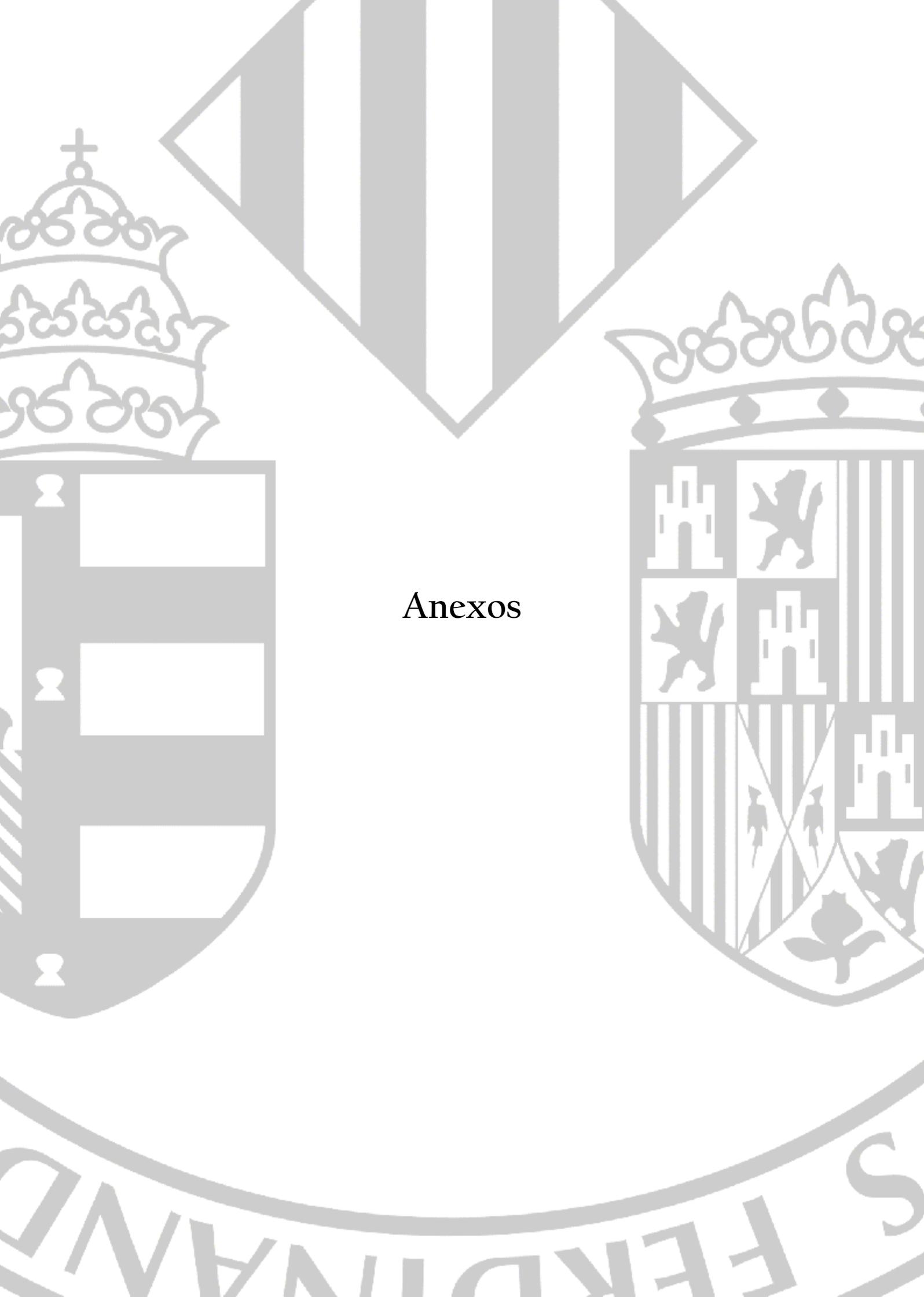
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

71. Abramovich F , Antoniadis A, Sapatinas T, Vidakovic B. Optimal testing in functional analysis of variance models. Georgia Institute of Technology ISYE Statistics Technical Report. 2002. URL: <http://hdl.handle.net/1853/25917>.
72. Biblioteca de la Universidad Pública de Navarra. Oficina de Referencia. Guía para citar y referenciar. Estilo Vancouver [Internet]. 2016. Recuperado a partir de <https://goo.gl/LaUj46>
73. Blaconá MT, Andreozzi L. Análisis de la mortalidad por edad y sexo mediante modelos para datos funcionales. *Estadística*, 2014; 66 (186,187): 65-89. Instituto Interamericano de Estadística. 2014.
74. Brennan P, Silman A. Statistical Methods for assessing observer variability in clinical measures. *BMJ*, 1992; 304; (6840): 1491-1494. doi: 10.1136/bmj.304.6840.1491
75. Capson AC, Nashed J, Mclean L. The role of lumbopelvic posture in pelvic floor muscle activation in continent women. *J Electromyogr Kinesiol*. 2011. 21 (1): 166-177. <https://doi.org/10.1016/j.jelekin.2010.07.017>.
76. Colloca CJ, Hinrichs RN. The biomechanical and clinical significance of the lumbar erector spinae flexion-relaxation phenomenon: a review of literature. *J Manipulative Physiol Ther*. 2005; 28: 623-631. DOI: 10.1016/j.jmpt.2005.08.005.
77. Cuevas A. A partial overview of the theory of statistics with functional data. *J Stat Plan Inference*, 2014; 147: 1-23. <https://doi.org/10.1016/j.jspi.2013.04.002>.
78. Delicado PF, Febrero M. Introducción al Análisis de Datos Funcionales con R. Curso. Servei d'Estadística. Universitat Autònoma de Barcelona. 2018.
79. Dolan P, Adams MA. Influence of lumbar and hip mobility on the bending stresses acting on the lumbar spine. *Clin Biomech*. 1993; 8: 185-192. DOI: 10.1016/0268-0033(93)90013-8.
80. Fan J, Lin SK, Test of significance when the data are curves. *Journal of American Statistical Association*, 1998; 93:1007–1021. <https://doi.org/10.1080/01621459.1998.10473763>.
81. Febrero-Bande M, Oviedo de la Fuente M. fda.usc: Functional Data Analysis and Utilities for Statistical Computing (fda.usc), R package version 0.9.5. 2011.
82. Febrero-Bande M, Oviedo de la Fuente M. Statistical Computing in Functional Data Analysis. The R Package fda.usc. *J Stat Softw*. 2012; 51 (4). <http://dx.doi.org/10.18637/jss.v051.i04>.
83. Ferraty F, Romain Y. The oxford handbook of functional data analysis. Oxford University Press, 2010.

84. Flores Sanchez M, Naya Fernández S (dir), Tarrío Saavedra J (dir). Nuevas Aportaciones del Análisis de Datos Funcionales en el Control Estadístico de Procesos. Tesis Doctoral. Universidad de La Coruña. 2018.
85. Functional Data Analysis website. Recuperado a partir de <http://www.functionaldata.org>.
86. Giraldo R, Molina Villarreal A, Torres León JL, Acosta MC y Martínez S. Estudio de firmas espectrales de palmas de aceite afectadas con la Marchitez letal, usando análisis estadísticos de datos funcionales. *Revista Palmas*, 2016; 37 (I) 131-139. 2016. Recuperado a partir de <https://publicaciones.fedepalma.org/index.php/palmas/article/view/11897>.
87. González Manteiga W, Vieu P. Statistics for functional data. *Comput. Stat. Data Anal.*, 2007; 51; 4788-4792. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2006.10.017>.
88. Górecki T, Smaga L. fdANOVA: an R software package for analysis of variance for univariate and multivariate functional data. *Comput Stat.* 2019. 34: 571-597. <https://doi.org/10.1007/s00180-018-0842-7>.
89. Graves S, Hooker G, Ramsay JO. *Functional Data Analysis with R and Matlab*. Springer, 2009.
90. Guerri JC, Esteve M, Palau C, Monfort M, Angeles Sarti M. A software tool to acquire, synchronise and playback multimedia data: an application in kinesiology. *Comput Methods Programs Biomed.* 2000 May; 62(1): 51–58. [https://doi.org/10.1016/S0169-2607\(99\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0169-2607(99)00053-X).
91. Hopkins W. Measures of Reliability in Sports Medicine and Science. *Sports Med* 30, 1–15 (2000). <https://doi.org/10.2165/00007256-200030010-00001>
92. Hooker G. *Introduction to Functional Data Analysis*. International Workshop on Statistical Modeling. Cornell University, Ithaca NY – USA. 2010.
93. Hyndman RJ., Shang HL. Rainbow Plots, Bagplots, and Boxplots for Functional Data. *J Comput Graph Stat.* 2010; 19 (1): 29-45. URL <http://pubs.amstat.org/doi/pdf/10.1198/jcgs.2009.08158>
94. Kapandji, IA. *Cuadernos de fisiología articular*. Tomo III. Barcelona: Masson. 1990.
95. Kokoszka P, Reimherr M. *Introduction to Functional Data Analysis*. CRC Press. 2017.
96. Krebs DE. Interclass Correlation coefficients. Use and Calculation. *Phys Ther.* 1984; 64: 1581-1589.
97. Lin RM, Yu CY, Chang ZJ et al. Flexion-Extension Rhythm in the Lumbosacral Spine. *Spine*, 1994; 19 (19): 2204-2209. DOI: 10.1097/00007632-199410000-00015.

-
98. Manteiga WG, Vieu P. Statistics for functional data. *Comput Stat Data Anal.* 2007; 51(10): 4788–4792. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2006.10.017>.
 99. Ocaña FA, Aguilera AM, Escabias M. Computational considerations in functional principal component analysis. *Comp Stat.* 2007; 22: 449-466. <https://doi.org/10.1007/s00180-007-0051-2>.
 100. Oviedo M. Utilities for Statistical Computing in Functional Data Analysis. The R Package *fda.usc*. Proyecto Fin de Máster. Universidad de Santiago de Compostela. 2011.
 101. Oviedo de la Fuente M. Functional Data Analysis using *fda.usc* package. 2019. Recuperado a partir de http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/550062_c019156fc931462791facaba4d8bc74b.html.
 102. Pérez Montilla A, Fernández Palacín F (dir). *Análisis de Datos Funcionales: una aplicación usando Componentes Principales*. Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas, Universidad de Cádiz. 2016. <http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/18510/TFGPrincipal.pdf?sequence=1>.
 103. Porter J, Wilkison A. Lumbar-Hip Flexion Motion: A Comparative Study Between Asymptomatic and Chronic Low Back Pain in 18- to 36-year-old Men. *Spine*, 1997. 22; 13: 1508-1513.
 104. R Development Core Team (2008). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
 105. Ramsay JO. When the data are functions. *Psychometrika*, 1982; 47(4):379-396. <https://doi.org/10.1007/BF02293704>
 106. Ramsay JO. *fda: Functional Data Analysis*, R Package version 2.3.2, URL <http://CRAN.R-project.org/package=fda>. 2012.
 107. Ramsay JO, Hooker G, Graves S. *Functional Data Analysis with R and Matlab*. Editorial Springer. 2009.
 108. Ramsay JO, Silverman BW. *Functional Data Analysis*. 2nd edition. Editorial Springer-Verlag. New York – USA. 2005
 109. Shang HL. *rainbow: An R Package for Visualizing Functional Time Series*. *The R Journal*. 3 (2): 54-59.
 110. Shang HL, Hyndman RJ. *Rainbow: Rainbow Plots, Bagplots and Boxplots for Functional Data*. R Package versión 3.0. URL <http://CRAN.R-project.org/package=rainbow>. 2012.
 111. Shrout PE, Fleiss JL. Intraclass Correlations: Uses in Assessing Rater Reliability. *Psychological Bulletin*, 1979. 86; (2): 420-428. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.86.2.420>

112. Silverman BW, Ramsay JO. Applied Functional Data Analysis: Methods and Case Studies. Springer, 2002.
113. Torrecilla Nogueras JR, Cuevas González A (dir), Santa Cruz Fernández (dir). Análisis de Datos Funcionales, clasificación y selección de variables. Trabajo de Fin de Máster. Universidad Autónoma de Madrid. 2010.
114. Voinea GC. Estudio sobre fallecimientos por enfermedades pulmonares en UK (1974-1979) mediante Análisis de Datos Funcionales. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada. 2013.
115. Wang JL, Chiou JM, Müller HG. Functional data analysis. Annu. Rev. Stat. Appl., 2016; 3: 257–295. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-041715-033624>
116. Wang JL, Chiou JM, Müller HG. Review of functional data analysis. Annu. Rev. Statist.; 2015; 1-41. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-041715-033624>.
117. Zhang, J-T. Analysis of Variance for functional data. CRC Press. 2014.



Anexos

ANEXO I. Informe de consentimiento de los participantes voluntarios en el proyecto de investigación titulado:

“Caracterización del patrón de movimiento lumbopélvico y activación del erector spinae en sujetos sanos”.

Por favor, conteste las siguientes preguntas, trazando un círculo sobre la respuesta apropiada:

¿Ha leído la hoja informativa para el participante? SI NO
¿Ha tenido usted oportunidad de preguntar sus dudas y discutir sobre el estudio? SI NO
¿Ha recibido usted respuestas satisfactorias a todas sus preguntas? SI NO
¿Ha recibido usted suficiente información sobre el estudio? SI NO
¿Con quién ha hablado usted?

¿Entiende usted que es libre de abandonar este estudio:

- en cualquier momento SI NO
- sin tener que dar una razón para abandonar
- y sin que ello afecte a sus cuidados médicos en un futuro?

¿Consiente usted en tomar parte de este estudio? SI NO

Firmado..... Fecha.....

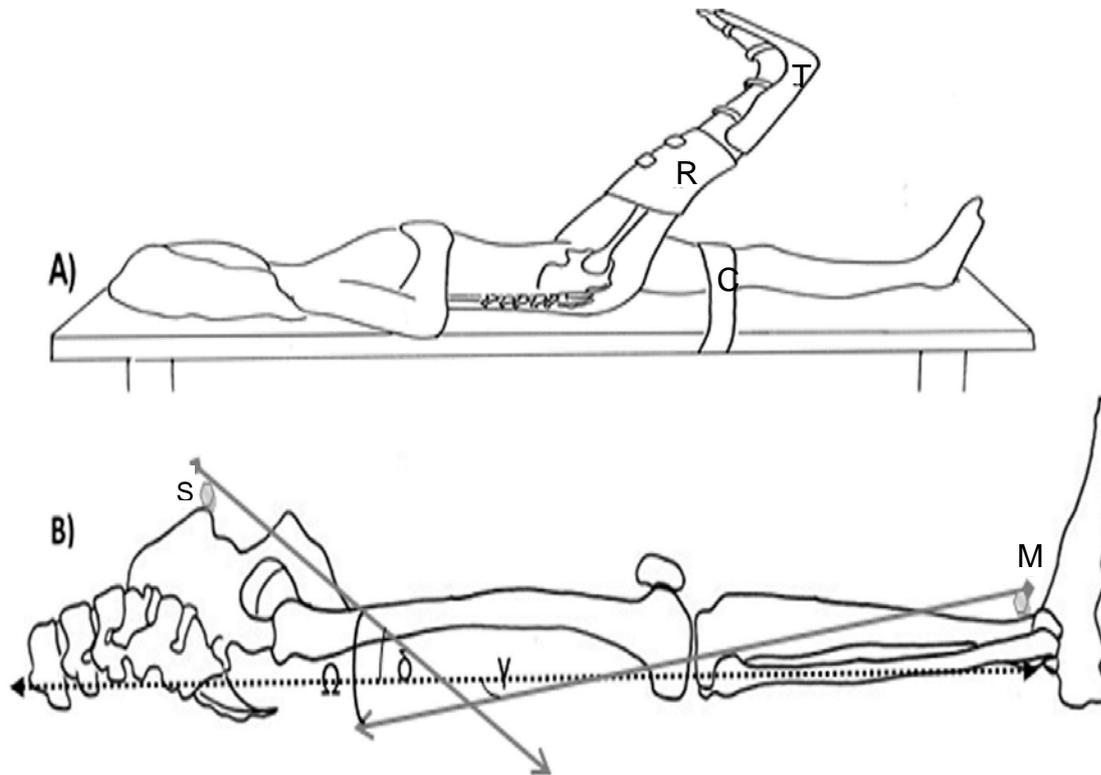
Nombre y apellidos (mayúsculas).....

Dirección.....

Teléfono.....

Firmado (Investigador)..... Fecha

ANEXO II. Passive Straight Leg Raise Test (PSLR)



- A) Ortesis en la rodilla (R) y tobillo (T). Cinta (C) para fijar la pierna a la mesa. B) Posición inicial. Sensor en la espina ilíaca anterior superior (S) y en el maléolo (M). Ángulos y línea de referencia (línea discontinua) de la pierna (γ), pelvis (δ) y cadera (Ω).

ANEXO III. Código R

A. Flexión

```
#####
## DATOS FUNCIONALES FLEXION ##
#####
## LIBRERIAS NECESARIAS ##
library(readr)
library(fda)
library(fda.usc)
library(rainbow)
library(fdANOVA)

## LECTURA DE DATOS ##
## MUESTRA TOTAL ##
datostroncoflexion<-read.csv2("DATOS  TESIS  TRONCO  PARA  R  FLEXION.csv",
header=FALSE)
datostroncoflexion<-data.frame(lapply(datostroncoflexion, as.numeric),stringsAsFactors = FALSE)
FLEXTRK<-as.matrix(datostroncoflexion)
datospelvisflexion<-read.csv2("DATOS  TESIS  PELVIS  PARA  R  FLEXION.csv",header=FALSE)
datospelvisflexion<-data.frame(lapply(datospelvisflexion, as.numeric),stringsAsFactors = FALSE)
FLEXPEL<-as.matrix(datospelvisflexion)
datospineflexion<-read.csv2("DATOS  TESIS  SPINE  PARA  R  FLEXION.csv",header=FALSE)
datospineflexion<-data.frame(lapply(datospineflexion, as.numeric),stringsAsFactors = FALSE)
FLEXSPN<-as.matrix(datospineflexion)

## GRUPO G1 ##
datostroncoflexionG1<-read.csv2("DATOS  TESIS  TRONCO  PARA  R  FLEXION-
G1.csv",header=FALSE)
datostroncoflexionG1<-data.frame(lapply(datostroncoflexionG1,  as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
FLEXTRKG1<-as.matrix(datostroncoflexionG1)
datospelvisflexionG1<-read.csv2("DATOS  TESIS  PELVIS  PARA  R  FLEXION-
G1.csv",header=FALSE)
datospelvisflexionG1<-data.frame(lapply(datospelvisflexionG1,  as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
FLEXPELG1<-as.matrix(datospelvisflexionG1)
datospineflexionG1<-read.csv2("DATOS  TESIS  SPINE  PARA  R  FLEXION-
G1.csv",header=FALSE)
datospineflexionG1<-data.frame(lapply(datospineflexionG1,  as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
FLEXSPNG1<-as.matrix(datospineflexionG1)

## GRUPO G2 ##
datostroncoflexionG2<-read.csv2("DATOS  TESIS  TRONCO  PARA  R  FLEXION-
G2.csv",header=FALSE)
datostroncoflexionG2<-data.frame(lapply(datostroncoflexionG2,  as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
FLEXTRKG2<-as.matrix(datostroncoflexionG2)
datospelvisflexionG2<-read.csv2("DATOS  TESIS  PELVIS  PARA  R  FLEXION-
G2.csv",header=FALSE)
datospelvisflexionG2<-data.frame(lapply(datospelvisflexionG2,  as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
FLEXPELG2<-as.matrix(datospelvisflexionG2)
```

```
datospineflexionG2<-read.csv2("DATOS TESIS SPINE PARA R FLEXION-
G2.csv",header=FALSE)
datospineflexionG2<-data.frame(lapply(datospineflexionG2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
FLEXSPNG2<-as.matrix(datospineflexionG2)

## VECTOR CON LOS INSTANTES DE TIEMPO ##
tiempoflex<-seq(3000,6960,40)

## CREACIÓN DE LAS FUNCIONES BSPLINE Y REPRESENTACIÓN ##
basisobjflex<-create.bspline.basis(c(min(tiempoflex),max(tiempoflex)),nbasis = 50)
plot(basisobjflex,main = "Funciones B-spline")

## OBTENCIÓN DE LOS DATOS FUNCIONALES Y REPRESENTACIÓN ##
## MUESTRA TOTAL ##
troncoflexion=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXTRK),basisobjflex)
plot.fd(troncoflexion,col="black",main="Tronco Flexión",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
pelvisflexion=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXPEL),basisobjflex)
plot.fd(pelvisflexion,col="green",main="Pelvis Flexión",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
spineflexion=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXSPN),basisobjflex)
plot.fd(spineflexion,col="red",main="Spine Flexión",ylab="grados",ylim = c(-100,150))

## GRUPO G1 ##
troncoflexionG1=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXTRKG1),basisobjflex)
plot.fd(troncoflexionG1,col="black",main="Tronco Flexión GRUPO PELVIS",ylab="grados",ylim
= c(-100,150))
pelvisflexionG1=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXPELG1),basisobjflex)
plot.fd(pelvisflexionG1,col="green",main="Pelvis Flexión GRUPO PELVIS",ylab="grados",ylim =
c(-100,150))
spineflexionG1=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXSPNG1),basisobjflex)
plot.fd(spineflexionG1,col="red",main="Spine Flexión GRUPO PELVIS",ylab="grados",ylim = c(-
100,150))

## GRUPO G2 ##
troncoflexionG2=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXTRKG2),basisobjflex)
plot.fd(troncoflexionG2,col="black",main="Tronco Flexión GRUPO SPINE",ylab="grados",ylim =
c(-100,150))
pelvisflexionG2=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXPELG2),basisobjflex)
plot.fd(pelvisflexionG2,col="green",main="Pelvis Flexión GRUPO SPINE",ylab="grados",ylim =
c(-100,150))
spineflexionG2=Data2fd(tiempoflex,t(FLEXSPNG2),basisobjflex)
plot.fd(spineflexionG2,col="red",main="Spine Flexión GRUPO SPINE",ylab="grados",ylim = c(-
100,150))

#####
## CALIDAD DEL AJUSTE ##
#####
## CALIDAD DEL AJUSTE MEDIANTE FNS BASE B-SPLINES ##
for (i in 1:38) {
  plotfit.fd(FLEXTRK[i,],argvals=tiempoflex,fdobj=troncoflexion[i],lty=1,lwd=1,col=2)
}
for (i in 1:38) {
  plotfit.fd(FLEXPEL[i,],argvals=tiempoflex,fdobj=pelvisflexion[i],lty=1,lwd=1,col=2)
}
}
```

```

for (i in 1:38) {
  plotfit.fd(FLEXSPN[i,],argvals=tiempoflex,fdobj=spineflexion[i],lty=1,lwd=1,col=2)
}

#####
## OUTLIERS FLEXION ##
#####
## OBTENCIÓN DE OUTLIERS DE FORMA GRÁFICA ##
## LECTURA DE LOS DATOS PARA LOS GRÁFICOS
datostroncoflexion2<-read.csv2("DATOS TESIS TRONCO PARA R FLEXION2.csv"
,header=TRUE)
datostroncoflexion2<-data.frame(lapply(datostroncoflexion2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospelvisflexion2<-read.csv2("DATOS TESIS PELVIS PARA R FLEXION2.csv",
header=TRUE)
datospelvisflexion2<-data.frame(lapply(datospelvisflexion2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospineflexion2<-read.csv2("DATOS TESIS SPINE PARA R FLEXION2.csv",header=TRUE)
datospineflexion2<-data.frame(lapply(datospineflexion2, as.numeric),stringsAsFactors = FALSE)

## PREPARACIÓN DE LOS DATOS PARA LOS GRAFICOS ##
datostroncoflexionfds=fds(tiempoflex,datostroncoflexion2)
datospelvisflexionfds=fds(tiempoflex,datospelvisflexion2)
datospineflexionfds=fds(tiempoflex,datospineflexion2)

## RAINBOW ##
plot(datostroncoflexionfds,plot.type="depth",plotlegend=TRUE)
plot(datospelvisflexionfds,plot.type="depth",plotlegend=TRUE)
plot(datospineflexionfds,plot.type="depth",plotlegend=TRUE)

## FUNCTIONAL BAGPLOT ##
fboxplot(datostroncoflexionfds,plot.type="functional",type="bag")
fboxplot(datospelvisflexionfds,plot.type="functional",type="bag")
fboxplot(datospineflexionfds,plot.type="functional",type="bag")

## FUNCTIONAL HIGHEST DENSITY REGION (HDR) BOXPLOT ##
fboxplot(datostroncoflexionfds,plot.type="functional",type="hdr",alpha=c(0.07,0.5))
fboxplot(datospelvisflexionfds,plot.type="functional",type="hdr",alpha=c(0.07,0.5))
fboxplot(datospineflexionfds,plot.type="functional",type="hdr",alpha=c(0.07,0.5))

## OUTLIERS NO GRAFICOS ##
outtroncoflexion<-
outliers.depth.trim(datostroncoflexionfds,dfunc=depth.FM,nb=38,smo=0.1,trim=0.06)
outpelvisflexion<-
outliers.depth.trim(datospelvisflexionfds,dfunc=depth.FM,nb=38,smo=0.1,trim=0.06)
outspineflexion<-
outliers.depth.trim(datospineflexionfds,dfunc=depth.FM,nb=38,smo=0.1,trim=0.06)

#####
## ESTADISTICOS DESCRIPTIVOS ##
#####
## CALCULO DE LAS MEDIAS Y DESVIACIONES TIPICAS FUNCIONALES ##
## MUESTRA TOTAL ##
mediatroncoflex=mean.fd(troncoflexion)
mediapelvisflex=mean.fd(pelvisflexion)

```

```
mediaspineflex=mean.fd(spineflexion)
desvtiptroncoflex=sd.fd(troncoflexion)
desvtippelvisflex=sd.fd(pelvisflexion)
desvtipspineflex=sd.fd(spineflexion)
```

```
## GRUPO G1 ##
```

```
mediatroncoflexG1=mean.fd(troncoflexionG1)
mediapelvisflexG1=mean.fd(pelvisflexionG1)
mediaspineflexG1=mean.fd(spineflexionG1)
desvtiptroncoflexG1=sd.fd(troncoflexionG1)
desvtippelvisflexG1=sd.fd(pelvisflexionG1)
desvtipspineflexG1=sd.fd(spineflexionG1)
```

```
## GRUPO G2 ##
```

```
mediatroncoflexG2=mean.fd(troncoflexionG2)
mediapelvisflexG2=mean.fd(pelvisflexionG2)
mediaspineflexG2=mean.fd(spineflexionG2)
desvtiptroncoflexG2=sd.fd(troncoflexionG2)
desvtippelvisflexG2=sd.fd(pelvisflexionG2)
desvtipspineflexG2=sd.fd(spineflexionG2)
```

```
## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE CADA
SEGMENTO EN LA MISMA GRÁFICA ##
```

```
## MUESTRA TOTAL ##
```

```
ejes<-c(-100,150)
plot.fd(mediatroncoflex,col="black",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Tronco Flexion")
lines(desvtiptroncoflex,col=4)
plot.fd(mediapelvisflex,col="green",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Pelvis Flexion")
lines(desvtippelvisflex,col=4)
abline(h=0,ly=2,col=1)
plot.fd(mediaspineflex,col="red",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Spine Flexion")
lines(desvtipspineflex,col=4)
```

```
## GRUPO G1 ##
```

```
ejes<-c(-100,150)
plot.fd(mediatroncoflexG1,col="black",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Tronco Flexion G1")
lines(desvtiptroncoflexG1,col=4)
plot.fd(mediapelvisflexG1,href=TRUE,col="green",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Pelvis Flexion G1")
lines(desvtippelvisflexG1,href=TRUE,col=4)
abline(h=0,ly=2,col=1)
plot.fd(mediaspineflexG1,col="red",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Spine Flexion G1")
lines(desvtipspineflexG1,col=4)
```

```
## GRUPO G2 ##
```

```
ejes<-c(-100,150)
plot.fd(mediatroncoflexG2,col="black",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Tronco Flexion G2")
lines(desvtiptroncoflexG2,col=4)
plot.fd(mediapelvisflexG2,href=TRUE,col="green",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Pelvis Flexion G2")
lines(desvtippelvisflexG2,href=TRUE,col=4)
abline(h=0,ly=2,col=1)
plot.fd(mediaspineflexG2,col="red",ylim = ejes, main="Media/Desv.típica Spine Flexion G2")
lines(desvtipspineflexG2,col=4)
```

```

## REPRESENTACIÓN DE CADA SEGMENTO PARA G1 Y G2 EN LA MISMA GRÁFICA
##
ejes<-c(-100,150)
plot.fd(mediatroncoflexG1,col=5,ylim = ejes, main="Media Tronco Flexion")
lines(mediatroncoflexG2,col=6)
plot.fd(mediapelvisflexG1,col=5,ylim = ejes, main="Media Pelvis Flexion")
lines(mediapelvisflexG2,col=6)
abline(h=0,lty=2,col=1)
plot.fd(mediaspineflexG1,col=5,ylim = ejes, main="Media Spine Flexion")
lines(mediaspineflexG2,col=6)

#####
## COMP PPALES FUNCIONALES VARIMAX FLEXION ##
#####
## COMPONENTES PRINCIPALES-VARIMAX ##
## MUESTRA TOTAL ##
## DEFINICION COMPONENTES PRINCIPALES ##
pcaobjtrkflex<-pca.fd(troncoflexion,nharm = 3)
pcaobjpelflex<-pca.fd(pelvisflexion,nharm = 3)
pcaobjspnflex<-pca.fd(spineflexion,nharm = 3)
## ROTACION VARIMAX ##
pcaobjvarmxtrkflex<-varmx.pca.fd(pcaobjtrkflex,nharm = 3)
pcaobjvarmxpelflex<-varmx.pca.fd(pcaobjpelflex,nharm = 3)
pcaobjvarmxspnflex<-varmx.pca.fd(pcaobjspnflex,nharm = 3)

## GRUPO G1 ##
## DEFINICION COMPONENTES PRINCIPALES ##
PcaobjtrkflexG1<-pca.fd(troncoflexionG1,nharm = 3)
PcaobjpelflexG1<-pca.fd(pelvisflexionG1,nharm = 3)
pcaobjspnflexG1<-pca.fd(spineflexionG1,nharm = 3)
## ROTACION VARIMAX ##
pcaobjvarmxtrkflexG1<-varmx.pca.fd(PcaobjtrkflexG1,nharm = 3)
pcaobjvarmxpelflexG1<-varmx.pca.fd(PcaobjpelflexG1,nharm = 3)
pcaobjvarmxspnflexG1<-varmx.pca.fd(pcaobjspnflexG1,nharm = 3)

## GRUPO G2 ##
## DEFINICION COMPONENTES PRINCIPALES ##
PcaobjtrkflexG2<-pca.fd(troncoflexionG2,nharm = 3)
PcaobjpelflexG2<-pca.fd(pelvisflexionG2,nharm = 3)
PcaobjspnflexG2<-pca.fd(spineflexionG2,nharm = 3)
## ROTACION VARIMAX ##
PcaobjvarmxtrkflexG2<-varmx.pca.fd(PcaobjtrkflexG2,nharm = 3)
PcaobjvarmxpelflexG2<-varmx.pca.fd(PcaobjpelflexG2,nharm = 3)
PcaobjvarmxspnflexG2<-varmx.pca.fd(PcaobjspnflexG2,nharm = 3)

## AUTOVALORES, PROPORCION VARIANZA EXPLICADA POR CADA AUTOVALOR ##
## AUTOFUNCIONES Y PUNTUACIONES DE LAS COMPONENTES##
## MUESTRA TOTAL ##
pcaobjvarmxtrkflex$values
pcaobjvarmxtrkflex$varprop
pcaobjvarmxtrkflex$harmonics
pcaobjvarmxtrkflex$scores
pcaobjvarmxpelflex$values
pcaobjvarmxpelflex$varprop

```

```
pcaobjvarmxpelflex$harmonics
pcaobjvarmxpelflex$scores
pcaobjvarmxspnflex$values
pcaobjvarmxspnflex$varprop
pcaobjvarmxspnflex$harmonics
pcaobjvarmxspnflex$scores
```

```
## GRUPO G1 ##
```

```
pcaobjvarmxtrkflexG1$values
pcaobjvarmxtrkflexG1$varprop
pcaobjvarmxtrkflexG1$harmonics
pcaobjvarmxtrkflexG1$scores
pcaobjvarmxpelflexG1$values
pcaobjvarmxpelflexG1$varprop
pcaobjvarmxpelflexG1$harmonics
pcaobjvarmxpelflexG1$scores
pcaobjvarmxspnflexG1$values
pcaobjvarmxspnflexG1$varprop
pcaobjvarmxspnflexG1$harmonics
pcaobjvarmxspnflexG1$scores
```

```
## GRUPO G2 ##
```

```
PcaobjvarmxtrkflexG2$values
PcaobjvarmxtrkflexG2$varprop
PcaobjvarmxtrkflexG2$harmonics
PcaobjvarmxtrkflexG2$scores
PcaobjvarmxpelflexG2$values
PcaobjvarmxpelflexG2$varprop
PcaobjvarmxpelflexG2$harmonics
PcaobjvarmxpelflexG2$scores
PcaobjvarmxspnflexG2$values
PcaobjvarmxspnflexG2$varprop
PcaobjvarmxspnflexG2$harmonics
PcaobjvarmxspnflexG2$scores
```

```
## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS COMPONENTES PRINCIPALES ##
```

```
## MUESTRA TOTAL ##
```

```
plot.pca.fd(pcaobjvarmxtrkflex,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
plot.pca.fd(pcaobjvarmxpelflex,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
plot.pca.fd(pcaobjvarmxspnflex,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
```

```
## GRUPO G1 ##
```

```
plot.pca.fd(pcaobjvarmxtrkflexG1,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
plot.pca.fd(pcaobjvarmxpelflexG1,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
plot.pca.fd(pcaobjvarmxspnflexG1,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
```

```
## GRUPO G2 ##
```

```
plot.pca.fd(PcaobjvarmxtrkflexG2,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
plot.pca.fd(PcaobjvarmxpelflexG2,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
plot.pca.fd(PcaobjvarmxspnflexG2,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
```

```
## NUBE DE PUNTOS DE LAS DOS PRIMERAS COMPONENTES ##
```

```
## MUESTRA TOTAL ##
```

```
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkflex$scores
```

```
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelflex$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnflex$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)

## GRUPO G1 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkflexG1$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelflexG1$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnflexG1$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)

## GRUPO G2 ##
puntuaciones <- PcaobjvarmxtrkflexG2$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- PcaobjvarmxpelflexG2$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- PcaobjvarmxspnflexG2$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)

## NUBE DE PUNTOS DE 1 Y 3 COMPONENTES ##
## MUESTRA TOTAL ##
aciones <- pcaobjvarmxtrkflex$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelflex$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnflex$Scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
```

```
## GRUPO G1 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkflexG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelflexG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnflexG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)

## GRUPO G2 ##
puntuaciones <- PcaobjvarmxtrkflexG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- PcaobjvarmxpelflexG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- PcaobjvarmxspnflexG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)

## NUBE DE PUNTOS DE 2 Y 3 COMPONENTES ##
## MUESTRA TOTAL ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkflex$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelflex$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnflex$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)

## GRUPO G1 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkflexG1$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelflexG1$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnflexG1$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
```

```

punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
## GRUPO G2 ##
puntuaciones <- PcaobjvarmxtrkflexG2$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- PcaobjvarmxpelflexG2$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- PcaobjvarmxspnflexG2$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)

#####
## ANOVA FUNCIONAL FLEXION ##
#####
## DEFINICIÓN DEL VECTOR CON EL GRUPO DE CADA SUJETO EN CADA
SEGMENTO ##
grupotronco<-c(2,1,2,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,1,1,1,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,1)
grupopelvis<-c(1,2,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,1,1,1,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,1)
grupospine<-c(2,1,2,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,1,1,1,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,1,2,1,2,2)

## FANOVA ##
## FANOVA CON ANOVA.ONEFACTOR (GRUPO) ##
datosanovatronco=fdata(datostroncoflexion,argvs = NULL,fdata2d = FALSE)
datosanovapelvis=fdata(datospelvisflexion,argvs = NULL,fdata2d = FALSE)
datosanovaspine=fdata(datospineflexion,argvs = NULL,fdata2d = FALSE)
resultanovatroncogrupo=anova.onefactor(datosanovatronco,grupotronco,nboot=36,plot =
TRUE,verbose = TRUE)
resultanovapelvisgrupo=anova.onefactor(datosanovapelvis,grupopelvis,nboot=35,plot =
TRUE,verbose = TRUE)
resultanovaspinegrupo=anova.onefactor(datosanovaspine,grupospine,nboot=36,plot =
TRUE,verbose = TRUE)

## ANOVA CON FANOVA.TESTS (GRUPO) ##
## PREPARACIÓN (DATOS TRANSPUESTOS) ##
datostroncoflexion2<-read.csv2("DATOS TESIS TRONCO PARA R FLEXION2
(SINOUT).csv",header=TRUE)
datostroncoflexion2<-data.frame(lapply(datostroncoflexion2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospelvisflexion2<-read.csv2("DATOS TESIS PELVIS PARA R FLEXION2
(SINOUT).csv",header=TRUE)
datospelvisflexion2<-data.frame(lapply(datospelvisflexion2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospineflexion2<-read.csv2("DATOS TESIS SPINE PARA R FLEXION2
(SINOUT).csv",header=TRUE)
datospineflexion2<-data.frame(lapply(datospineflexion2, as.numeric),stringsAsFactors = FALSE)

## FANOVA GRUPO ##
fanovatroncogrupo<-fanova.tests(datostroncoflexion2,grupotronco)
fanovapelvisgrupo<-fanova.tests(datospelvisflexion2,grupopelvis)
fanovaspinegrupo<-fanova.tests(datospineflexion2,grupospine)

```

```
plotFANOVA(datostroncoflexion2,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datostroncoflexion2,grupotronco,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datostroncoflexion2,grupotronco,int=c(0.025,0.975),separately=TRUE)
plotFANOVA(datostroncoflexion2,grupotronco,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE,means =
TRUE)
plotFANOVA(datospelvisflexion2,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datospelvisflexion2,grupopelvis,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datospelvisflexion2,grupopelvis,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE)
plotFANOVA(datospelvisflexion2,grupopelvis,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE,means =
TRUE)
plotFANOVA(datosspineflexion2,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datosspineflexion2,grupospine,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datosspineflexion2,grupospine,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE)
plotFANOVA(datosspineflexion2,grupospine,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE,means =
TRUE)
summary.fanovatests(fanovatroncogrupo)
summary.fanovatests(fanovapelvisgrupo)
summary.fanovatests(fanovaspinegrupo)
```

B. Extensión.

```
#####
## DATOS FUNCIONALES EXTENSIÓN ##
#####
## LIBRERIAS NECESARIAS ##
library(readr)
library(fda)
library(fda.usc)
library(rainbow)
library(fdANOVA)

## LECTURA DE DATOS ##
## MUESTRA TOTAL ##
datostroncoextension<-read.csv2("DATOS      TESIS      TRONCO      PARA      R
EXTENSION.csv",header=FALSE)
datostroncoextension<-data.frame(lapply(datostroncoextension, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
EXTTRK<-as.matrix(datostroncoextension)
datospelvisextension<-read.csv2("DATOS      TESIS      PELVIS      PARA      R
EXTENSION.csv",header=FALSE)
datospelvisextension<-data.frame(lapply(datospelvisextension, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
EXTPEL<-as.matrix(datospelvisextension)
datosspineextension<-read.csv2("DATOS      TESIS      SPINE      PARA      R
EXTENSION.csv",header=FALSE)
datosspineextension<-data.frame(lapply(datosspineextension, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
EXTSPN<-as.matrix(datosspineextension)

## GRUPO G1 ##
datostroncoextensionG1<-read.csv2("DATOS TESIS TRONCO PARA R EXTENSION-
G1.csv",header=FALSE)
datostroncoextensionG1<-data.frame(lapply(datostroncoextensionG1, as.numeric),stringsAsFactors
= FALSE)
EXTTRKG1<-as.matrix(datostroncoextensionG1)
datospelvisextensionG1<-read.csv2("DATOS TESIS PELVIS PARA R EXTENSION-
G1.csv",header=FALSE)
datospelvisextensionG1<-data.frame(lapply(datospelvisextensionG1, as.numeric),stringsAsFactors
= FALSE)
EXTPELG1<-as.matrix(datospelvisextensionG1)
datosspineextensionG1<-read.csv2("DATOS TESIS SPINE PARA R EXTENSION-
G1.csv",header=FALSE)
datosspineextensionG1<-data.frame(lapply(datosspineextensionG1, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
EXTSPNG1<-as.matrix(datosspineextensionG1)

## GRUPO G2 ##
datostroncoextensionG2<-read.csv2("DATOS TESIS TRONCO PARA R EXTENSION-
G2.csv",header=FALSE)
datostroncoextensionG2<-data.frame(lapply(datostroncoextensionG2, as.numeric),stringsAsFactors
= FALSE)
EXTTRKG2<-as.matrix(datostroncoextensionG2)
datospelvisextensionG2<-read.csv2("DATOS TESIS PELVIS PARA R EXTENSION-
G2.csv",header=FALSE)
```

```

datospelvisextensionG2<-data.frame(lapply(datospelvisextensionG2, as.numeric),stringsAsFactors
= FALSE)
EXTPELG2<-as.matrix(datospelvisextensionG2)
datospineextensionG2<-read.csv2("DATOS TESIS SPINE PARA R EXTENSION-
G2.csv",header=FALSE)
datospineextensionG2<-data.frame(lapply(datospineextensionG2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
EXTSPNG2<-as.matrix(datospineextensionG2)

## VECTOR CON LOS INSTANTES DE TIEMPO ##
tiempoext<-seq(8000,12360,40)

## CREACIÓN DE LAS FUNCIONES BSPLINE Y REPRESENTACIÓN ##
basisobjext<-create.bspline.basis(c(min(tiempoext),max(tiempoext)),nbasis = 55)
plot(basisobjext,main = "Funciones B-spline")

## OBTENCIÓN DE LOS DATOS FUNCIONALES Y REPRESENTACIÓN ##
## MUESTRA TOTAL ##
troncoextension=Data2fd(tiempoext,t(EXTTRK),basisobjext)
plot.fd(troncoextension,col="black",main="Tronco ExtensiÃ³n",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
pelvisextension=Data2fd(tiempoext,t(EXTPEL),basisobjext)
plot.fd(pelvisextension,col="green",main="Pelvis ExtensiÃ³n",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
spineextension=Data2fd(tiempoext,t(EXTSPN),basisobjext)
plot.fd(spineextension,col="red",main="Spine ExtensiÃ³n",ylab="grados",ylim = c(-100,150))

## GRUPO G1 ##
troncoextensionG1=Data2fd(tiempoext,t(EXTTRKG1),basisobjext)
plot.fd(troncoextensionG1,col="black",main="Tronco ExtensiÃ³n GRUPO
PELVIS",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
pelvisextensionG1=Data2fd(tiempoext,t(EXTPELG1),basisobjext)
plot.fd(pelvisextensionG1,col="green",main="Pelvis ExtensiÃ³n GRUPO
PELVIS",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
spineextensionG1=Data2fd(tiempoext,t(EXTSPNG1),basisobjext)
plot.fd(spineextensionG1,col="red",main="Spine ExtensiÃ³n GRUPO PELVIS",ylab="grados",ylim
= c(-100,150))

## GRUPO G2 ##
troncoextensionG2=Data2fd(tiempoext,t(EXTTRKG2),basisobjext)
plot.fd(troncoextensionG2,col="black",main="Tronco ExtensiÃ³n GRUPO
SPINE",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
pelvisextensionG2=Data2fd(tiempoext,t(EXTPELG2),basisobjext)
plot.fd(pelvisextensionG2,col="green",main="Pelvis ExtensiÃ³n GRUPO
SPINE",ylab="grados",ylim = c(-100,150))
spineextensionG2=Data2fd(tiempoext,t(EXTSPNG2),basisobjext)
plot.fd(spineextensionG2,col="red",main="Spine ExtensiÃ³n GRUPO SPINE",ylab="grados",ylim
= c(-100,150))

#####
## CALIDAD DEL AJUSTE ##
#####
## CALIDAD DEL AJUSTE MEDIANTE FNS BASE B-SPLINES ##
for (i in 1:41) {
  plotfit.fd(EXTTRK[i,],argvals=tiempoext,fdobj=troncoextension[i],lty=1,lwd=1,col=2)
}

```

```

for (i in 1:41) {
  plotfit.fd(EXTPEL[i,],argvals=tiempoext,fdobj=pelvisextension[i],lty=1,lwd=1,col=2)
}
for (i in 1:41) {
  plotfit.fd(EXTSPN[i,],argvals=tiempoext,fdobj=spineextension[i],lty=1,lwd=1,col=2)
}

#####
## OUTLIERS EXTENSIÓN ##
#####
## OBTENCIÓN DE OUTLIERS DE FORMA GRÁFICA ##
## LECTURA DE LOS DATOS PARA LOS GRÁFICOS
datostroncoextension2<-read.csv2("DATOS      TESIS      TRONCO      PARA      R
EXTENSION2.csv",header=TRUE)
datostroncoextension2<-data.frame(lapply(datostroncoextension2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospelvisextension2<-read.csv2("DATOS      TESIS      PELVIS      PARA      R
EXTENSION2.csv",header=TRUE)
datospelvisextension2<-data.frame(lapply(datospelvisextension2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospineextension2<-read.csv2("DATOS      TESIS      SPINE      PARA      R
EXTENSION2.csv",header=TRUE)
datospineextension2<-data.frame(lapply(datospineextension2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)

## PREPARACIÓN DE LOS DATOS PARA LOS GRAFICOS ##
datostroncoextensionfds=fds(tiempoext,datostroncoextension2)
datospelvisextensionfds=fds(tiempoext,datospelvisextension2)
datospineextensionfds=fds(tiempoext,datospineextension2)

## RAINBOW ##
plot(datostroncoextensionfds,plot.type="depth",plotlegend=TRUE)
plot(datospelvisextensionfds,plot.type="depth",plotlegend=TRUE)
plot(datospineextensionfds,plot.type="depth",plotlegend=TRUE)

## FUNCTIONAL BAGPLOT ##
fboxplot(datostroncoextensionfds,plot.type="functional",type="bag")
fboxplot(datospelvisextensionfds,plot.type="functional",type="bag")
fboxplot(datospineextensionfds,plot.type="functional",type="bag")

## FUNCTIONAL HIGHEST DENSITY REGION (HDR) BOXPLOT ##
fboxplot(datostroncoextensionfds,plot.type="functional",type="hdr",alpha=c(0.07,0.5))
fboxplot(datospelvisextensionfds,plot.type="functional",type="hdr",alpha=c(0.07,0.5))
fboxplot(datospineextensionfds,plot.type="functional",type="hdr",alpha=c(0.07,0.5))

## OUTLIERS NO GRAFICOS ##
outtroncoextension<-
outliers.depth.trim(datostroncoextensionfds,dfunc=depth.FM,nb=38,smo=0.1,trim=0.06)
outpelvisextension<-
outliers.depth.trim(datospelvisextensionfds,dfunc=depth.FM,nb=38,smo=0.1,trim=0.06)
outspineextension<-
outliers.depth.trim(datospineextensionfds,dfunc=depth.FM,nb=38,smo=0.1,trim=0.06)

#####
## ESTADISTICOS DESCRIPTIVOS ##

```

```
#####  
## CALCULO DE LAS MEDIAS Y DESVIACIONES TIPICAS FUNCIONALES ##  
## MUESTRA TOTAL ##  
mediatroncoext=mean.fd(troncoextension)  
mediapelvisext=mean.fd(pelvisextension)  
mediaspineext=mean.fd(spineextension)  
desvtiptroncoext=sd.fd(troncoextension)  
desvtippelvisext=sd.fd(pelvisextension)  
desvtipspineext=sd.fd(spineextension)  
  
## GRUPO G1 ##  
mediatroncoextG1=mean.fd(troncoextensionG1)  
mediapelvisextG1=mean.fd(pelvisextensionG1)  
mediaspineextG1=mean.fd(spineextensionG1)  
desvtiptroncoextG1=sd.fd(troncoextensionG1)  
desvtippelvisextG1=sd.fd(pelvisextensionG1)  
desvtipspineextG1=sd.fd(spineextensionG1)  
  
## GRUPO G2 ##  
mediatroncoextG2=mean.fd(troncoextensionG2)  
mediapelvisextG2=mean.fd(pelvisextensionG2)  
mediaspineextG2=mean.fd(spineextensionG2)  
desvtiptroncoextG2=sd.fd(troncoextensionG2)  
desvtippelvisextG2=sd.fd(pelvisextensionG2)  
desvtipspineextG2=sd.fd(spineextensionG2)  
  
## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE CADA  
SEGMENTO EN LA MISMA GRÁFICA ##  
## MUESTRA TOTAL ##  
ejes<-c(-100,150)  
plot.fd(mediatroncoext,col="black",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Tronco Extensión")  
lines(desvtiptroncoext,col=4)  
plot.fd(mediapelvisext,href=TRUE,col="green",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Pelvis  
Extension")  
lines(desvtippelvisext,col=4)  
abline(h=0,ly=2,col=1)  
plot.fd(mediaspineext,col="red",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Spine Extension")  
lines(desvtipspineext,col=4)  
  
## GRUPO G1 ##  
ejes<-c(-100,150)  
plot.fd(mediatroncoextG1,col="black",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Tronco Extensión  
G1")  
lines(desvtiptroncoextG1,col=4)  
plot.fd(mediapelvisextG1,href=TRUE,col="green",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Pelvis  
Extensión G1")  
lines(desvtippelvisextG1,col=4)  
abline(h=0,ly=2,col=1)  
plot.fd(mediaspineextG1,col="red",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Spine Extensión G1")  
lines(desvtipspineextG1,col=4)  
  
## GRUPO G2 ##  
ejes<-c(-100,150)
```

```

plot.fd(mediatroncoextG2,col="black",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Tronco Extensión
G2")
lines(desvtiptroncoextG2,col=4)
plot.fd(mediapelvisextG2,href=TRUE,col="green",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Pelvis
Extensión G2")
lines(desvtippelvisextG2,col=4)
abline(h=0,lty=2,col=1)
plot.fd(mediaspineextG2,col="red",ylim = ejes, main="Media/Desv.Típica Spine Extensión G2")
lines(desvtipspineextG2,col=4)

## REPRESENTACIÓN DE CADA SEGMENTO PARA G1 Y G2 EN LA MISMA GRÁFICA
ejes<-c(-100,150)
plot.fd(mediatroncoextG1,col=5,ylim = ejes, main="Media Tronco Extensión")
lines(mediatroncoextG2,col=6)
plot.fd(mediapelvisextG1,col=5,ylim = ejes, main="Media Pelvis Extensión")
lines(mediapelvisextG2,col=6)
abline(h=0,lty=2,col=1)
plot.fd(mediaspineextG1,col=5,ylim = ejes, main="Media Spine Extensión")
lines(mediaspineextG2,col=6)

#####
## COMP PPALES FUNCIONALES VARIMAX FLEXION ##
#####
## COMPONENTES PRINCIPALES-VARIMAX ##
## MUESTRA TOTAL ##
## DEFINICION COMPONENTES PRINCIPALES ##
pcaobjtrkext<-pca.fd(troncoextension,nharm = 3)
pcaobjpelext<-pca.fd(pelvisextension,nharm = 3)
pcaobjspnext<-pca.fd(spineextension,nharm = 3)
## ROTACION VARIMAX
pcaobjvarmxtrkext<-varmx.pca.fd(pcaobjtrkext,nharm = 3)
pcaobjvarmxpelext<-varmx.pca.fd(pcaobjpelext,nharm = 3)
pcaobjvarmxspnext<-varmx.pca.fd(pcaobjspnext,nharm = 3)

## GRUPO G1 ##
## DEFINICION COMPONENTES PRINCIPALES ##
pcaobjtrkextG1<-pca.fd(troncoextensionG1,nharm = 3)
pcaobjpelextG1<-pca.fd(pelvisextensionG1,nharm = 3)
pcaobjspnextG1<-pca.fd(spineextensionG1,nharm = 3)
## ROTACION VARIMAX
pcaobjvarmxtrkextG1<-varmx.pca.fd(pcaobjtrkextG1,nharm = 3)
pcaobjvarmxpelextG1<-varmx.pca.fd(pcaobjpelextG1,nharm = 3)
pcaobjvarmxspnextG1<-varmx.pca.fd(pcaobjspnextG1,nharm = 3)

## GRUPO G2 ##
## DEFINICION COMPONENTES PRINCIPALES ##
pcaobjtrkextG2<-pca.fd(troncoextensionG2,nharm = 3)
pcaobjpelextG2<-pca.fd(pelvisextensionG2,nharm = 3)
pcaobjspnextG2<-pca.fd(spineextensionG2,nharm = 3)
## ROTACION VARIMAX
pcaobjvarmxtrkextG2<-varmx.pca.fd(pcaobjtrkextG2,nharm = 3)
pcaobjvarmxpelextG2<-varmx.pca.fd(pcaobjpelextG2,nharm = 3)
pcaobjvarmxspnextG2<-varmx.pca.fd(pcaobjspnextG2,nharm = 3)

## AUTOVALORES, PROPORCION VARIANZA EXPLICADA POR CADA AUTOVALOR ##

```

```
## AUTOFUNCIONES Y PUNTUACIONES DE LAS COMPONENTES##
```

```
## MUESTRA TOTAL ##
```

```
pcaobjvarmxtrkext$values  
pcaobjvarmxtrkext$varprop  
pcaobjvarmxtrkext$harmonics  
pcaobjvarmxtrkext$scores  
pcaobjvarmxpelext$values  
pcaobjvarmxpelext$varprop  
pcaobjvarmxpelext$harmonics  
pcaobjvarmxpelext$scores  
pcaobjvarmxspnext$values  
pcaobjvarmxspnext$varprop  
pcaobjvarmxspnext$harmonics  
pcaobjvarmxspnext$scores
```

```
## GRUPO G1 ##
```

```
pcaobjvarmxtrkextG1$values  
pcaobjvarmxtrkextG1$varprop  
pcaobjvarmxtrkextG1$harmonics  
pcaobjvarmxtrkextG1$scores  
pcaobjvarmxpelextG1$values  
pcaobjvarmxpelextG1$varprop  
pcaobjvarmxpelextG1$harmonics  
pcaobjvarmxpelextG1$scores  
pcaobjvarmxspnextG1$values  
pcaobjvarmxspnextG1$varprop  
pcaobjvarmxspnextG1$harmonics  
pcaobjvarmxspnextG1$scores
```

```
## GRUPO G2 ##
```

```
pcaobjtrkextG2<-pca.fd(troncoextensionG2,nharm = 3)  
pcaobjpelextG2<-pca.fd(pelvisextensionG2,nharm = 3)  
pcaobjspnextG2<-pca.fd(spineextensionG2,nharm = 3)  
## ROTACION VARIMAX  
pcaobjvarmxtrkextG2<-varmx.pca.fd(pcaobjtrkextG2,nharm = 3)  
pcaobjvarmxpelextG2<-varmx.pca.fd(pcaobjpelextG2,nharm = 3)  
pcaobjvarmxspnextG2<-varmx.pca.fd(pcaobjspnextG2,nharm = 3)
```

```
## REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS COMPONENTES PRINCIPALES ##
```

```
## MUESTRA TOTAL ##
```

```
plot.pca.fd(pcaobjvarmxtrkext,pointplot = F,harm = 0,expand=0)  
plot.pca.fd(pcaobjvarmxpelext,pointplot = F,harm = 0,expand=0)  
plot.pca.fd(pcaobjvarmxspnext,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
```

```
## GRUPO G1 ##
```

```
plot.pca.fd(pcaobjvarmxtrkextG1,pointplot = F,harm = 0,expand=0)  
plot.pca.fd(pcaobjvarmxpelextG1,pointplot = F,harm = 0,expand=0)  
plot.pca.fd(pcaobjvarmxspnextG1,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
```

```
## GRUPO G2 ##
```

```
plot.pca.fd(pcaobjvarmxtrkextG2,pointplot = F,harm = 0,expand=0)  
plot.pca.fd(pcaobjvarmxpelextG2,pointplot = F,harm = 0,expand=0)  
plot.pca.fd(pcaobjvarmxspnextG2,pointplot = F,harm = 0,expand=0)
```

```
## NUBE DE PUNTOS DE LAS DOS PRIMERAS COMPONENTES ##
## MUESTRA TOTAL ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkext$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelext$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnext$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)

## GRUPO G1 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkextG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelextG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnextG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)

## GRUPO G2 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkextG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelextG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnextG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
qplot(punt1comp,punt2comp)

## NUBE DE PUNTOS DE 1 Y 3 COMPONENTES ##
## MUESTRA TOTAL ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkext$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelext$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnext$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
```

```
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)

## GRUPO G1 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkextG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelextG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnextG1$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)

## GRUPO G2 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkextG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelextG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnextG2$scores
punt1comp <- puntuaciones[,1:1]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt1comp,punt3comp)

## NUBE DE PUNTOS DE 2 Y 3 COMPONENTES ##
## MUESTRA TOTAL ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkext$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelext$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnext$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)

## GRUPO G1 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkextG1$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelextG1$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
```

```

qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnextG1$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)

## GRUPO G2 ##
puntuaciones <- pcaobjvarmxtrkextG2$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxpelextG2$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)
puntuaciones <- pcaobjvarmxspnextG2$scores
punt2comp <- puntuaciones[,2:2]
punt3comp <- puntuaciones[,3:3]
qplot(punt2comp,punt3comp)

#####
## ANOVA FUNCIONAL FLEXION ##
#####
## DEFINICIÓN DEL VECTOR CON EL GRUPO DE CADA SUJETO EN CADA
SEGMENTO ##
grupotronco<-c(2,1,2,1,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,2,2,2,1,2,1,1,2,1,2,2,2,2,2,1,2,2,2,1,1,2,1,2,2,1)
grupopelvis<-c(1,2,1,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,2,2,2,1,2,1,1,1,2,1,2,2,2,2,2,1,2,2,2,1,1,2,1,2,2,1)
grupospine<-c(1,2,1,2,1,2,2,1,1,1,1,1,2,2,2,2,1,2,1,1,2,1,2,2,2,2,2,1,2,2,2,1,1,2,1,2,2,1)

## FANOVA ##
## FANOVA CON ANOVA.ONEFACTOR (GRUPO) ##
datosanovatronco=fdata(datostroncoextension,argvals = NULL,fdata2d = FALSE)
datosanovapelvis=fdata(datospelvisextension,argvals = NULL,fdata2d = FALSE)
datosanovaspine=fdata(datosspineextension,argvals = NULL,fdata2d = FALSE)

resultanovatroncogrupo=anova.onefactor(datosanovatronco,grupotronco,nboot=36,plot =
TRUE,verbose = TRUE)
resultanovapelvisgrupo=anova.onefactor(datosanovapelvis,grupopelvis,nboot=35,plot =
TRUE,verbose = TRUE)
resultanovaspinegrupo=anova.onefactor(datosanovaspine,grupospine,nboot=36,plot =
TRUE,verbose = TRUE)

## ANOVA CON FANOVA.TESTS (GRUPO) ##
## PREPARACIÓN (DATOS TRANSPUESTOS) ##
datostroncoextension2<-read.csv2("DATOS TESIS TRONCO PARA R EXTENSION2
(SINOUT).csv",header=TRUE)
datostroncoextension2<-data.frame(lapply(datostroncoextension2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datospelvisextension2<-read.csv2("DATOS TESIS PELVIS PARA R EXTENSION2
(SINOUT).csv",header=TRUE)
datospelvisextension2<-data.frame(lapply(datospelvisextension2, as.numeric),stringsAsFactors =
FALSE)
datosspineextension2<-read.csv2("DATOS TESIS SPINE PARA R EXTENSION2
(SINOUT).csv",header=TRUE)

```

```
datospineextension2<-data.frame(lapply(datospineextension2, as.numeric),stringsAsFactors = FALSE)

## FANOVA GRUPO ##
fanovatroncogrup<-fanova.tests(datostroncoextension2,grupotronco)
fanovapelvisgrupo<-fanova.tests(datospelvisextension2,grupopelvis)
fanovaspinegrupo<-fanova.tests(datospineextension2,grupospine)
plotFANOVA(datostroncoextension2,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datostroncoextension2,grupotronco,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datostroncoextension2,grupotronco,int=c(0.025,0.975),separately=TRUE)
plotFANOVA(datostroncoextension2,grupotronco,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE,means = TRUE)
plotFANOVA(datospelvisextension2,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datospelvisextension2,grupopelvis,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datospelvisextension2,grupopelvis,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE)
plotFANOVA(datospelvisextension2,grupopelvis,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE,means = TRUE)
plotFANOVA(datospineextension2,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datospineextension2,grupospine,int=c(0.025,0.975))
plotFANOVA(datospineextension2,grupospine,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE)
plotFANOVA(datospineextension2,grupospine,int=c(0.025,0.975),separately = TRUE,means = TRUE)
summary.fanovatests(fanovatroncogrup)
summary.fanovatests(fanovapelvisgrupo)
summary.fanovatests(fanovaspinegrupo)
```