Didáctica de la Geometría, la Medida y la Probabilidad y la Estadística

Grado en Maestro/a en Educación Primaria

Prof. Marta Pla i Castells

Grupos 4B y 4E - Curso 2021/2022

Primera impresión, abril 2020
Segunda impresión, septiembre 2021

Índice general

Introducción

0.1 Introducción a la asignatura Didáctica de la Geometría, la Medida y la Probabilidad y la Estadística

Los contenidos de la asignatura vienen fijados de manera general por la memoria de verificación del Grado de Maestro/a en Educación Primaria y se concretan en la Guía Docente de la asignatura.

Los tres bloques de contenido (Geometría, Medida y Probabilidad y Estadística) de la asignatura están divididos en los siguientes apartados:

- Contenido teórico del bloque
- Contenido didáctico del bloque
- Análisis de situaciones y recursos didácticos específicos del bloque
- Conflictos en el aprendizaje específicos del bloque
- Laboratorio de herramientas TIC del bloque
- Análisis de libros de texto específicos del bloque

Didáctica de la Geometría

1. Elementos de geometría y razonamiento geométrico

1.1 ¿Qué es la geometría?

La palabra geometría significa en griego «medida de la tierra». Esta designación hacer referencia al origen práctico de esta disciplina que surgió por la necesidad de parcelar el terreno en el antiguo Egipto con fines agrícolas. Pero la geometría dejó hace ya hace mucho tiempo de ocuparse de la medida de la tierra. Con los griegos la geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes.

La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro, etc. Tales términos y expresiones designan «figuras geométricas», las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Por tanto, hay que tener en cuenta que la naturaleza de los entes geométricos es esencialmente distinta de los objetos perceptibles, como un ordenador, una mesa o un árbol. Un punto, una línea, un plano, un círculo, etc. no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad, etc. La geometría estudia las formas de las figuras y los cuerpos geométricos. En la vida cotidiana encontramos modelos y ejemplificaciones físicas de esos objetos ideales de los que se ocupa la geometría, siendo muchas y variadas las aplicaciones de esta parte de las matemáticas.

Una de las principales fuentes de estos objetos físicos que evocan figuras y cuerpos geométricos está en la propia naturaleza. Multitud de elementos naturales de distinta especie comparten la misma forma, como ocurre con las espirales (conchas marinas, caracoles, galaxias, las hojas de los helechos, la disposición de las semillas de los girasoles, etc.). Igualmente encontramos semejanzas entre las ramificaciones de los árboles, el sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos o entre los cristales, las pompas de jabón y las placas de los caparazones de las tortugas. La naturaleza, en contextos diferentes, utiliza un número reducido de formas parecidas y parece que tuviese predilección por las formas serpenteantes, las espirales y las uniones de 120º. Pensemos en la disposición hexagonal perfecta de las celdillas de los panales de las abejas. Su interior está formado por formas que recubren el espacio, como el rombododecaedro.

El ser humano refleja en su quehacer diario y en sus obras de arte esas imágenes ideales que obtiene de la observación de la naturaleza: realiza objetos de cerámica, dibujos, edificios y los más diversos utensilios proyectando en ellos las figuras geométricas que ha perfeccionado en la mente. El entorno artístico y arquitectónico ha sido un importante factor de desarrollo de la geometría. Así desde la construcción de viviendas o monumentos funerarios (pirámides de Egipto), hasta templos de los más diversos estilos han impulsado constantemente el descubrimiento de nuevas formas y propiedades geométricas.

1.2 La geometría en el currículo de primaria

Los contenidos del currículo de la última ley de educación (LOMCE) se organizan en cinco grandes bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; Números; Medida; Geometría y Estadística y probabilidad. El primero de ellos tiene una estructura diferenciada pues se formula de tal forma que es la columna vertebral del resto de bloques. De esta manera, permite trabajar el resto de contenidos para conseguir que los alumnos, al acabar la Educación Primaria, sean capaces de describir y analizar situaciones de cambio y encontrar patrones y regularidades en contextos numéricos, valorando la utilidad de las matemáticas para hacer predicciones.

Consideramos fundamental, en línea con las competencias establecidas por Niss (2006), que como futuros maestros de primaria seáis capaces de analizar didácticamente los programas educativos en vigor. Así, en cada uno de los temas, propondremos leer detenidamente el currículo de matemáticas y que se identifiquen los contenidos correspondientes al contenido de cada tema. Este análisis se enriquecerá además con la comparación de las orientaciones curriculares establecidas por el gobierno local con las establecidas en el Common Core State Stardars y aprobadas por el NCTM.

Los Common Core Sate Stardards in Mathematics, conocidos por las siglas CCSS-M, han sido desarrollados bajo la dirección del Consejo de Jefes de Escuelas Estatales de EE. UU. (conocidos como CCSSO y NGA por su siglas en inglés) y recogen los estándares de contenido y prácticas matemáticas (estándares de procesos) que describen lo que cada alumno debe saber y poder hacer al final de cada curso (grado en inglés). Los estándares definen las habilidades y conocimientos que todos los alumnos necesitan desde la perspectiva estadounidense.

Es por ello que iniciamos este tema con una actividad en la que se compararán las orientaciones curriculares locales (Consellería d'Educació, Cultura i Esport, 2014)
Decreto 108/2014
con las orientaciones establecidas en los Common Core Stardards (*Principles and standards for school mathematics*, 2000) CCSS-M publicadas en EEUU.

Actividad 1.1

Accede a la web de los Common Core Sate Stardards in Mathematics en Español y extrae, por curso, los contenidos relativos al bloque de geometría. Compara estas orientaciones con las publicadas en el currículo de la LOMCE en el anexo I del DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell.

En la Tabla 1.1 se recoge un breve resumen de las orientaciones, en cuanto a las habilidades que se espera que alcancen los alumnos, establecidas por el CCSS-M.

1º	Distinguen entre los atributos que definen las figuras geométricas y los atributos que no las definen; construyen, componen y dibujan figuras geométricas que tienen atributos definidos.
2º	Reconocen y dibujan figuras que tengan atributos específicos, tales como un número dado de ángulos o un número dado de lados iguales. Dividen círculos y rectángulos en dos, tres o cuatro partes iguales.

Sigue en la página siguiente…

3º	Comprenden que las figuras geométricas en diferentes categorías (por ejemplo, rombos, rectángulos y otros) pueden compartir atributos (por ejemplo, tener cuatro lados) y que los atributos compartidos pueden definir una categoría más amplia (por ejemplo, cuadriláteros).
4º	Dibujan puntos, rectas, segmentos de rectas, semirrectas, ángulos (rectos, agudos, obtusos) y rectas perpendiculares y paralelas. Identifican estos elementos en las figuras bidimensionales. Clasifican las figuras bidimensionales basándose en la presencia o ausencia de rectas paralelas o perpendiculares o en la presencia o ausencia de ángulos de un tamaño especificado. Reconocen que los triángulos rectángulos forman una categoría en sí, e identifican triángulos rectángulos.
5º	Representan puntos gráficos en un plano de coordenadas para resolver problemas matemáticos y del mundo real. Clasifican las figuras bidimensionales dentro de una jerarquía, según sus propiedades.
6º	Hallan el área de triángulos rectángulos, otros triángulos, cuadriláteros especiales y polígonos mediante su composición en rectángulos o su descomposición en triángulos y otras figuras geométricas; aplican estas técnicas al contexto de la resolución de problemas matemáticos y del mundo real. Hallan el volumen de un prisma rectangular. Dibujan polígonos en un plano de coordenadas dadas las coordenadas para los vértices. Representan figuras tridimensionales utilizando modelos planos compuestos de rectángulos y triángulos.

Tabla 1.1: Orientaciones CCSS-M por curso relativas al bloque de geometría.

La intención de esta tarea de análisis curricular es que, al iniciar el tema, conozcamos exactamente cuáles son los contenidos de matemáticas que deben enseñarse y aprenderse en cada curso para, de esta forma, abordar con seguridad el desarrollo de los sucesivos análisis didácticos. Así, la siguiente actividad que proponemos será analizar libros de texto de diferentes editoriales para identificar cuáles son los contenidos relativos a la geometría que aparecen en ellos y cómo se presentan tanto a los alumnos como a los maestros en los libros del profesor.

Actividad 1.2

Identificad, en los libros de texto que tenéis a vuestra disposición, los contenidos relativos a la geometría. Observad si los contenidos se ajustan a las orientaciones curriculares y tomad nota del tratamiento que se hace de éstos.

1.3 El desarrollo de los conceptos geométricos

Freudenthal (1971, 1973) planteó tres cuestiones filosóficas (qué son las matemáticas, qué es la educación y si se deberían enseñar las matemáticas como un sistema deductivo). Además, encontramos otra pregunta (¿qué es la geometría?) y una fundamentación teórica de la geometría como ciencia que parte del espacio (del espacio en el que el niño vive y se relaciona) y que sirve como vehículo para desarrollar el razonamiento lógico.

Para Freudenthal, los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como *medios de organización* de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones.

Este análisis fenomenológico de los conceptos matemáticos Freudenthal lo hizo con intención didáctica o al servicio de la didáctica, en la medida en que es el análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular: la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos. Esta idea la recoge Luis Puig en las *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal* (Freundental, 2001) bajo el nombre de *toma de partido didáctica*.

La enseñanza debería tener como propósito que se constituyan objetos mentales que sean suficientemente ricos para poder interpretar adecuadamente una gran variedad de situaciones en las que están implicados los conceptos geométricos correspondientes. Además, Freudenthal (1983) señala que se puede trabajar con los objetos mentales aunque no se llegue nunca al concepto tal y como pasa en la geometría; se puede avanzar mucho sin conceptos ya que en la geometría elemental los objetos mentales bastan para organizar los fenómenos. Es por ello que para la adquisición de un concepto por parte de los alumnos es necesario integrar diferentes objetos mentales en un único objeto mental y ese será un momento clave en la enseñanza de ese concepto (Puig, 1997).

Otros estudios teóricos sobre la formación de conceptos en geometría afirman que el proceso de construcción tiene lugar cuando, una vez se ha adquirido un concepto, se pide a los estudiantes que se identifiquen o se construyan ejemplos y contraejemplos de él (Hershkowitz, 1990; Vinner y Hershkowitz, 1983).

Vinner y Hershkowitz (1983), introducen la terminología de *imagen del concepto* y de *definición del concepto*. La imagen del concepto se refiere al concepto como se refleja en la mente del alumno. Incluye todo lo que puede venir a la mente relacionado con el concepto (todo lo que se evoca cuando, por ejemplo, se escucha la palabra o se ve un dibujo asociado al concepto). La definición del concepto se refiere a la definición verbal que se tiene para una cierta noción que no tiene por qué ser la definición matemática. Es por esto que Vinner (1991) ha tratado de explicar lo que ocurre en la mente de los estudiantes cuando, una vez que se supone que el concepto ya se ha adquirido, se pide a los estudiantes que identifiquen o construyan ejemplos de él.

En este contexto, el aprendizaje de un concepto matemático consiste en formar una imagen conceptual y una definición conceptual lo más completas posible y en aprender a utilizarlas una y otra, de forma combinada y adaptada a las circunstancias de cada actividad. El profesor juega un papel fundamental en el aprendizaje de sus alumnos, pues es el encargado de preparar y organizar actividades ricas que ayuden a formar imágenes y definiciones conceptuales adecuadas.

Este modelo de análisis del aprendizaje de conceptos geométricos es coherente y compatible con el modelo de los niveles de razonamiento de van Hiele que presentamos en la próxima sección. En general, el progreso en el nivel de razonamiento de un estudiante es paralelo a su progreso en la construcción de imágenes conceptuales más ricas y completas y en el establecimiento de vínculos más complejos entre las imágenes conceptuales y las definiciones de los conceptos.

Para que una imagen conceptual de un concepto geométrico sea completa debe incluir una amplia variedad de ejemplos gráficos del concepto, con diversidad de formas, posiciones, tamaños, etc. de manera que el estudiante pueda identificar correctamente si cualquier figura es o no un ejemplo de ese concepto.

Actividad 1.3

Analiza los temas de geometría de libros de texto de varios cursos de primaria para observar la variedad de formas, tamaños y posiciones de los triángulos dibujados y valora la abundancia de *ejemplos prototípicos*. Haz el mismo tipo de análisis para los cuadriláteros, polígonos regulares, prismas, pirámides, conos y cilindros.

1.4 Organización de la enseñanza de la geometría según el modelo de van Hiele

El conocimiento por parte del profesor de las características del razonamiento matemático típico de cada momento del período de escolarización posibilita una mejora en el aprendizaje de los alumnos. En el aprendizaje de la geometría ha tenido una fuerte influencia el trabajo desarrollado por Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof para comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos. Estos autores elaboraron un modelo que muestra las características de las diferentes formas de razonamiento habituales en las clases de geometría y dan pautas para organizar la enseñanza de la geometría de manera que se ayude a los estudiantes a mejorar sus formas de razonamiento.

El modelo teórico conocido como modelo de «los niveles de van Hiele» comenzó a proponerse en 1959 y ha sido objeto de abundantes experimentaciones e investigaciones que han llevado a introducir diversas matizaciones, pero que aún continúa siendo útil para organizar el currículo de geometría en la Educación Primaria y secundaria y para ayudar a los profesores a organizar mejor la enseñanza (*Principles and standards for school mathematics*, 2000).

van Hiele observó que hay distintas formas de razonar al resolver problemas de geometría, unas, más simples y otras, más sofisticadas y que los estudiantes pueden mejorar su forma de razonamiento geométrico si sus profesores les proporcionan oportunidades para ello que les permitan adquirir la experiencia suficiente.

A partir de sus observaciones, el matrimonio van Hiele-Geldof definió un *modelo de razonamiento geométrico* que lleva su nombre. Este modelo está integrado por dos componentes: las diferentes formas de razonamiento, que conocemos como los *niveles de razonamiento* en geometría y una propuesta metodológica para los profesores, conocida como las *fases de aprendizaje*, que da indicaciones sobre cómo organizar los contenidos, actividades, problemas, etc. del tema que se va a trabajar.

1.4.1 Los niveles de van Hiele de razonamiento en geometría

El modelo de van Hiele describe cinco *niveles de razonamiento* en geometría. El primer nivel lo encontramos en Educación Infantil y primeros cursos de Primaria mientras que el quinto nivel sólo se encuentra en algunos matemáticos expertos. A continuación se describen las características principales de los cinco niveles con ejemplos de cada uno de ellos tomando como referencia el trabajo de Jaime y Gutiérrez (1990).

Nivel 1: Visualización

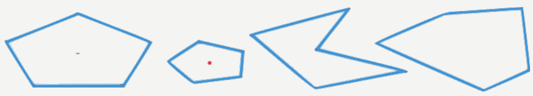
El tipo de razonamiento que corresponde a este nivel es fundamentalmente visual y táctil, basado en la experiencia física. Las principales características del razonamiento de nivel 1 son:

Se tiene una *percepción global* de las figuras geométricas en las que no se identifican explícitamente sus partes o elementos matemáticos.
Las descripciones o comparaciones de figuras u objetos se basan en *propiedades físicas* como posición, tamaño, etc.
Se consideran los objetos geométricos de manera *individual*. Aquello que se observa en una figura no se suele generalizar a otras figuras diferentes de la misma familia.
Al describir objetos geométricos se utilizan con frecuencia referencias a objetos físicos como «se parece a...», «tiene forma de...», etc.

Tabla 1.2: Características del razonamiento de nivel 1 de van Hiele. Extraído de (Carrillo y cols., 2016, Capítulo 7).

Para un alumno que se encuentra en el primer nivel de van Hiele las cuatro figuras de la imagen del ejemplo 1.1 no pertenecen a la misma categoría ya que se encuentran en posiciones y orientaciones diferentes.

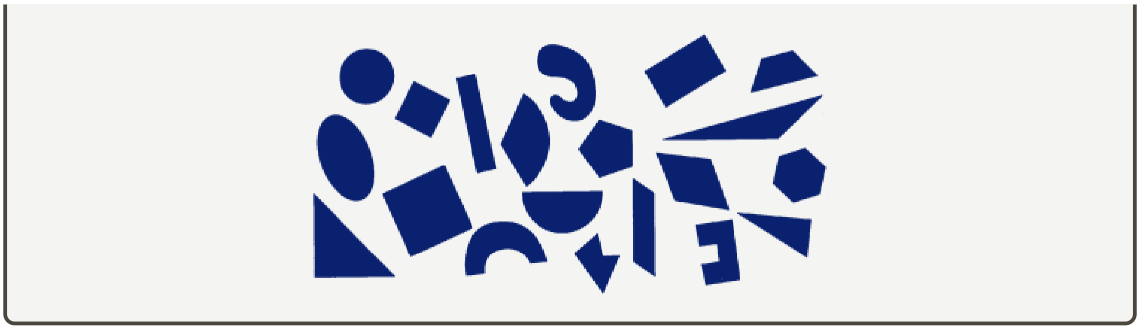
Ejemplo 1.1



Otra actividad propia del nivel 1 de razonamiento de van Hiele la encontramos en el ejemplo 1.2 extraído de Godino, Batanero, y Font (2004). Actividades como ésta evitará que, por ejemplo, muchos alumnos piensen que sólo los triángulos equiláteros son realmente triángulos o que un cuadrado girado 45º deja de ser un cuadrado. Proporcionar a los alumnos una variedad de ejemplos no prototípicos refuerza la idea de Vinner y Hershkowitz (1983) en la creación de imágenes mentales y de conceptos acertados en los alumnos.

Ejemplo 1.2

Clasificación de formas.
Preparar una amplia variedad de formas recortadas en cartulina, como se muestra en la figura. Pedir a los alumnos que seleccionen una forma al azar y después encuentren otras formas que sean parecidas a la primera en algún aspecto. Si se pide formar un subconjunto de figuras cada vez, se evita el problema de intentar poner cada forma en una categoría. Los alumnos deben describir qué rasgo tienen las formas para considerarlas similares, bien oralmente o por escrito. Pedir finalmente que dibujen una nueva forma que se ajuste a la categoría y explicar por qué es de esa clase.



Nivel 2: Análisis

Los alumnos que razonan según este nivel son capaces de considerar todas las formas incluidas en una clase en lugar de una forma singular. Pensemos por ejemplo en los rectángulos. Los alumnos que estén en el nivel 2 serán capaces de hablar sobre todos los rectángulos y serán capaces de hablar sobre las características que los definen como rectángulos (cuatro lados, lados opuestos paralelos, lados opuestos de la misma longitud, cuatro ángulos rectos, diagonales congruentes, etc.). De esta forma, las características irrelevantes (como el tamaño o la orientación) pasan a un segundo plano. Los alumnos comienzan a darse cuenta de que una colección de formas pertenece a la misma clase debido a sus propiedades.

Además, los alumnos que razonen en el nivel 2 pueden ser capaces de listar todas las propiedades de los cuadrados, rectángulos y paralelogramos, pero no ver las relaciones de inclusión entre estas clases. Por ejemplo, no ven que todos los cuadrados son rectángulos y todos los rectángulos son paralelogramos.

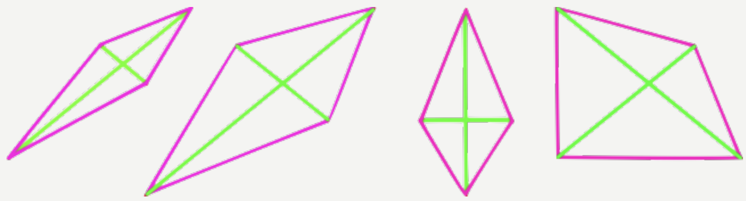
Las principales características del nivel 2 de razonamiento son:

Se reconoce de forma explícita que las figuras y cuerpos geométricos están formados por partes, propiedades y elementos matemáticos, pero no se establecen relaciones matemáticas entre ellos.
La definición de un objeto geométrico consiste en una lista con muchas de las propiedades aprendidas.
Es un razonamiento empírico, basado en la *manipulación de ejemplos* concretos. Las propiedades matemáticas se pueden descubrir mediante ejemplos y la demostración de dichas propiedades consiste en verificarlas en algunos ejemplos particulares.
Se tiene capacidad para generalizar las propiedades observadas en unas pocas figuras u objetos a todos los de la misma familia.
Solo se pueden comprender las estructuras lógicas sencillas, pues hay dificultad para manejar correctamente partículas lógicas como *y, o, a veces, por los menos/al menos, no,* etc.

Tabla 1.3: Características del razonamiento de nivel 2 de van Hiele. Extraído de (Carrillo y cols., 2016, Capítulo 7).

Un alumno que se encuentre en el nivel 2 de razonamiento de van Hiele, será capaz de decir que todas las figuras de la imagen del ejemplo 1.3 son cuadriláteros porque son polígonos de cuatro lados.

Ejemplo 1.3



Otro ejemplo de actividad propia del nivel 2 de razonamiento de van Hiele (extraído de Godino y cols. (2004)) lo encontramos en el ejemplo 1.4. En él se pretende comenzar a centrar la atención más sobre las propiedades de las figuras que en la simple identificación de las mismas. De esta forma los alumnos tendrán que resolver problemas en los que las propiedades de las formas sean aspectos importantes a tener en cuenta. En este tipo de actividades los alumnos pueden seguir utilizando modelos concretos, como en las actividades del nivel 1, pero usando aquéllos que permitan la exploración de diversas propiedades de las figuras.

Ejemplo 1.4

Clasificar las formas por nombres de propiedades y no por nombres de las formas.
Dado un conjunto de formas geométricas, clasificarlas por distintas propiedades. Cuando se combinan dos o más propiedades, clasificar por una propiedad cada vez.

- «Encontrar todas las formas que tienen lados opuestos paralelos» (Una vez separadas)
- «Y ahora encontrar las que también tienen un ángulo recto» (Ese grupo debería incluir los cuadrados y los rectángulos que no sean cuadrados).

Después de obtenido este grupo de formas, discutir cuál es el nombre de esta clase de figuras. Intentar clasificar las formas por la misma combinación de propiedades pero en un orden diferente.

Nivel 3: Deducción informal

A medida que los alumnos comienzan a ser capaces de pensar sobre propiedades de los objetos geométricos sin las restricciones de un objeto particular, son capaces de desarrollar relaciones entre estas propiedades. Tomemos el ejemplo del cuadrado y del rectángulo de nuevo. «*Si los cuatros ángulos son rectos, la figura es un rectángulo. Si es un cuadrado, todos los ángulos son rectos. Si es un cuadrado, entonces debe ser un rectángulo*». De esta manera, las figuras se pueden clasificar usando sólo un mínimo de características. Por ejemplo, cuatro lados congruentes y al menos un ángulo recto puede ser suficiente para definir un cuadrado.

Además, los alumnos que estén en el nivel 3 serán capaces de seguir y apreciar un argumento deductivo informal sobre las formas y sus propiedades, es decir, «*las demostraciones*» serán más de tipo intuitivo que rigurosamente deductivas.

Las principales características del nivel 3 de razonamiento son:

Se reconoce que las partes, propiedades y elementos matemáticos que integran las figuras y cuerpos geométricos están ligados mediante relaciones matemáticas. Se realizan implicaciones lógicas simples en un contexto matemático abstracto.
Se hacen clasificaciones lógicas de familias de objetos matemáticos, siendo éstas clasificaciones inclusivas o disjuntas según las definiciones usadas.
Se usan correctamente las partículas lógicas habituales. Esto permite definir objetos geométricos correctamente mediante listas de propiedades necesarias y suficientes.
Se pueden deducir propiedades de objetos geométricos mediante la manipulación de ejemplos y también de manera deductiva abstracta. La demostración de estas propiedades se hace mediante argumentos abstractos deductivos informales.
Imposibilidad de realizar demostraciones formales de manera autónoma, pero se pueden entender sus pasos con la guía del profesor.

Tabla 1.4: Características del razonamiento de nivel 3 de van Hiele. Extraído de (Carrillo y cols., 2016, Capítulo 7).

Nivel 4: Deducción

En este nivel los alumnos son capaces de examinar algo más que las propiedades de las formas. Su pensamiento anterior ha producido conjeturas sobre relaciones entre propiedades. Estos alumnos son capaces de trabajar con enunciados abstractos sobre propiedades geométricas y llegar a conclusiones basadas más sobre la lógica que sobre la intuición. Por ejemplo, un alumno operando en el nivel 4 puede observar claramente que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio. En el nivel 4 se aprecia la necesidad de probar esta proposición a partir de una serie de argumentos deductivos mientras que un alumno del nivel 3 puede seguir el argumento pero no reconoce la necesidad de hacer la demostración deductiva. Las principales características del nivel 4 de razonamiento son:

Es un razonamiento deductivo formal. Se comprende la estructura axiomática de las matemáticas (términos no definidos, axiomas, definiciones, hipótesis, tesis, etc).
Se realizan demostraciones formales de manera autónoma, planteando un encadenamiento de implicaciones que constituye el proceso de demostración.
Se comprende la posibilidad de que existan varias definiciones (equivalentes o no) de un mismo concepto.
Se admite la existencia de distintas demostraciones de la misma propiedad.

Tabla 1.5: Características del razonamiento de nivel 4 de van Hiele. Extraído de (Carrillo y cols., 2016, Capítulo 7).

Nivel 5: Rigor

El quinto nivel de razonamiento se distingue por la capacidad para comprender que la geometría es un mundo basado en un conjunto de axiomas arbitrarios y que, con conjuntos diferentes de axiomas, se pueden crear mundos distintos.

Las principales características del nivel 5 de razonamiento son:

Se comprende la necesidad de un razonamiento formal riguroso que base las demostraciones en un determinado conjunto de axiomas.
Se puede operar con sistemas axiomáticos diferentes y se es capaz de realizar demostraciones formales en cada uno de ellos.
Se pueden analizar y comparar geometrías basadas en distintos sistemas axiomáticos.

Tabla 1.6: Características del razonamiento de nivel 5 de van Hiele. Extraído de (Carrillo y cols., 2016, Capítulo 7).

En la Tabla 1.7 (adaptada de Gutiérrez y Jaime (1998)) podemos encontrar un resumen esquemático de los cuatro primeros niveles de razonamiento.

Procesos de razonamiento	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento	Propiedades físicas	Propiedades matemáticas	–	–
Uso de definiciones	–	Se usan definiciones con estructura simple	Se utiliza cualquier definición	Se admiten definiciones equivalentes
Formulación de definiciones	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se demuestra la equivalencia entre definiciones
Clasificación	Disjunta, basada en propiedades físicas	Disjunta, basada en propiedades matemáticas	Puede oscilar entre inclusiva y disjunta	–
Demostración	–	Verificación con ejemplos	Deductivas informales abstractas	Deductivas formales

Tabla 1.7: Distintos atributos del proceso de razonamiento en cada nivel de van Hiele.

1.4.2 Propiedades del modelo de van Hiele

Para comprender mejor el modelo de van Hiele, es necesario analizar y tomar en cuenta las siguientes características (Beltrametti, Esquivel, y Ferrari, 2005; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1994; Vargas y Araya, 2013):

Recursividad: El éxito en un nivel depende del grado de asimilación que tenga el estudiante de las estrategias del nivel anterior. Los objetos de un nivel se convierten en los objetos de estudio del siguiente, es decir, se hacen explícitos aquellos conocimientos que eran implícitos en el nivel anterior. Van Hiele (1986), citado por Jaime (1993, p. 14), afirma que «(...) *el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel*».

Secuencialidad: No se puede alcanzar un nivel sin haber superado de forma ordenada todos los niveles inferiores, ya que cada nivel de razonamiento se apoya en el nivel anterior. Hay que tener cuidado ya que una mala instrucción o aprendizaje en un nivel anterior puede llevar a aparentar que ya están preparados para pasar al siguiente nivel, cuando no es así. No obstante, se debe tener en cuenta también que, de acuerdo con van Hiele, la edad no es un factor determinante para el paso de los niveles.

Especificidad del lenguaje: Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de van Hiele no solo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje y un significado específico del vocabulario matemático. Por tanto, el docente debe ajustarse al nivel en que están sus estudiantes.

Continuidad: Se refiere a la forma en cómo el individuo pasa de un nivel a otro. El progreso a través de los niveles de van Hiele se produce de forma continua y pausada, pudiendo durar varios años en los niveles 4 y 5, e incluso se puede dar el caso de que un individuo no llegue a alcanzar el nivel 5.

Localidad: Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento. Una vez alcanzado un nivel en algún concepto o campo de la geometría, será más fácil para el individuo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas.

1.5 Situaciones y recursos didácticos para el aprendizaje de la geometría

1.5.1 El material en el estudio de la geometría

Una vez analizado el papel del material manipulativo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sus características más relevantes, nos centraremos en describir brevemente aquellos que principalmente se usan en el estudio de la geometría y los elementos geométricos.

El material en el estudio de los polígonos

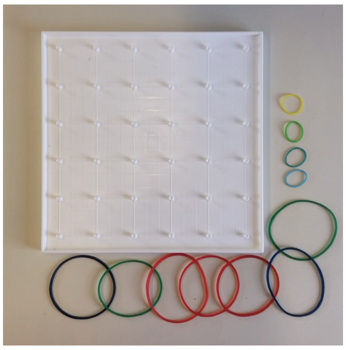
➢ El geoplano

El geoplano original diseñado por Caleb Gattegno (1911–1988), consistía en una plancha de madera con pivotes o clavos formando una trama ortométrica en la que, con gomas elásticas, se representan diferentes figuras geométricas. Gattegno presentó el geoplano en la primera publicación conjunta de la Comisión Internacional para la mejora de la enseñanza de las matemáticas y fue introducido en España por el profesor Puig Adam. Se utilizaron preferentemente los de 5 x 5. Actualmente en el mercado están disponibles en material plástico, aunque es muy interesante la actividad de construcción del geoplano por el propio alumnado, utilizando tableros de madera y clavos.

El geoplano es un recurso manipulativo muy útil para la introducción de los conceptos geométricos. Permite a los niños una mejor comprensión de términos abstractos, que muchas veces o no entienden o se han formado ideas erróneas en torno a ellos.

Hay tres tipos distintos de geoplanos:

- **El geoplano cuadrado u ortométrico**: De trama cuadrada donde los pivotes o clavos van situados en los vértices de los cuadrados. El tamaño del tablero así como el número de cuadrículas es variable, desde 3×3 hasta $n \times n$ (Figura 1.1a).



(a) geoplano cuadrado u ortométrico.

(b) geoplano circular.

Figura 1.1: Ejemplos de geoplanos ortométrico y circular.

- **El geoplano circular**: Tiene el mismo sistema que el anterior pero los clavos tienen que estar situados de tal manera que, al pasar una goma elástica por todos los pivotes exteriores, se forme una «circunferencia». La forma de construirlo es haciendo un polígono de 12 ó 24 lados con un pivote central. Este tipo de geoplano nos permite trabajar elementos de la circunferencia (radios, cuerdas, diámetros, perímetro) ángulos y polígonos (Figura 1.1b).

- **El geoplano isométrico**: De trama triangular, con los pivotes situados en vértices de triángulos equiláteros, hace que la distancia entre cada punto y todos los puntos contiguos a él sea la misma. Nos permite hacer lo que no es posible con el geoplano ortogonal; trabajar con ángulos de 60º para la construcción de triángulos equiláteros y hexágonos regulares (Figura 1.2).

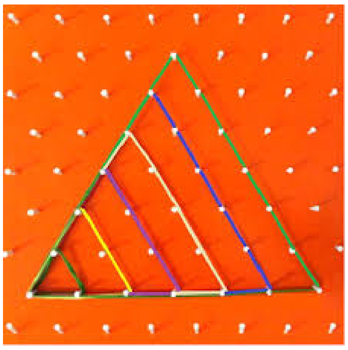
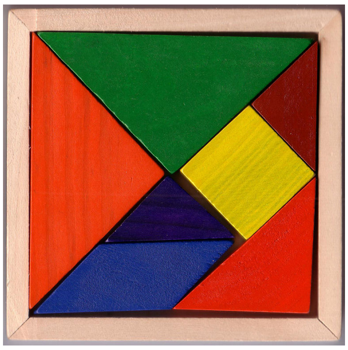


Figura 1.2: Ejemplo de geoplano isométrico.

El geoplano tiene un buen número de ventajas como objeto manipulativo. Permite presentar la geometría de una forma atractiva y lúdica para los estudiantes. Además, permite crear figuras geométricas precisas incluso antes de que los niños tengan destreza manual suficiente como para dibujarlas. Por medio de un geoplano, los estudiantes pueden experimentar de forma autónoma y crear figuras libremente o realizar ejercicios guiados siguiendo las pautas marcadas por el profesor. Otra ventaja es que el geoplano no sólo puede usarse para hacer figuras geométricas básicas, sino que con él los niños pueden construir estructuras complejas, como laberintos y otros juegos o experimentar con transformaciones de figuras. Como se ha indicado, es común el error por el que los estudiantes asocian a una figura su posición, afirmando que dos figuras iguales son diferentes tras una transformación rígida. Con el geoplano los estudiantes pueden observar una misma figura desde diferentes posiciones, girando el geoplano, evitando este error.

⊳ El Tangram

Es un juego de origen chino, del que se desconoce cuándo y quién lo inventó, llamado «*Chi Chiao Pan*». El significado de su nombre es juego de los siete elementos o tabla de la sabiduría o de la sagacidad, haciendo referencia a las muchas cualidades del juego.



Este juego representa un excelente recurso para la enseñanza de la geometría, con posibilidades de programar actividades en tres niveles de dificultad:

1. Composición de figuras libremente, empleando la imaginación.
2. Composición de figuras dadas previamente.
3. Resolución de una gran diversidad de problemas de geometría con las distintas combinaciones que se pueden hacer con las piezas.

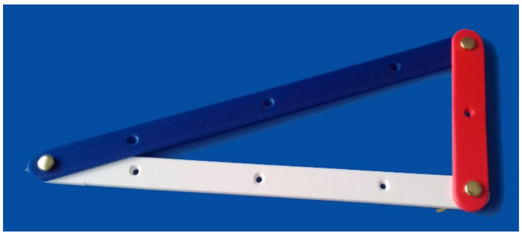
El Tangram es un juego planimétrico, es decir, todas las figuras deben estar contenidas en un mismo plano. Tiene como regla básica utilizar en cada figura todas las piezas y no superponerlas. Sin embargo, con los alumnos no es necesario que las utilicen todas a la vez, aumentando las posibilidades de las actividades y disminuyendo su dificultad.

Este juego favorece la creatividad de los alumnos por las múltiples posibilidades que ofrecen las combinaciones de las piezas. El Tangram es una gran herramienta para el aprendizaje de la geometría que utilizaremos para desarrollar habilidades como el reconocimiento de formas geométricas; la medida, descripción y clasificación de ángulos; la composición y descomposición de figuras geométricas; la realización de giros y desplazamientos para observar los cambios de las distintas figuras geométricas; la noción de perímetro y área de polígonos; el desarrollo de la percepción mediante la copia de figuras; la asimilación del concepto de figuras equivalentes; la diferenciación entre concavidad y convexidad de las figuras o la diferenciación entre paralelismo y perpendicularidad entre otras.

⋗ El mecano o varillas articuladas

El mecano consiste en unas tiras alargadas, metálicas, de plástico o de madera (denominadas varillas), de distintas longitudes, con una serie de agujeros equidistantes que pueden unirse con tornillos o encuadernadores y permiten formar líneas abiertas, cerradas, rectas o quebradas.

El mecano, aunque es sencillo en su composición, es un material con muchas posibilidades para el estudio de la geometría de manera manipulativa. Las varillas proporcionan una visión dinámica de las figuras geométricas, con las que no pueden competir las imágenes estáticas del libro o la pizarra.



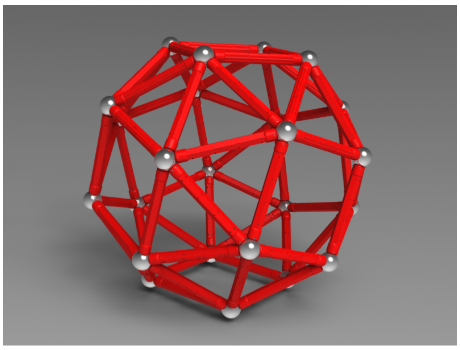
Este material permite el estudio de líneas poligonales abiertas o cerradas, la construcción y reconocimiento de polígonos, el cálculo de perímetros, el estudio de ángulos y diagonales, observar los elementos de los polígonos, transformar polígonos, la composición y descomposición de figuras y la construcción de figuras semejantes.

Materiales para la construcción de poliedros

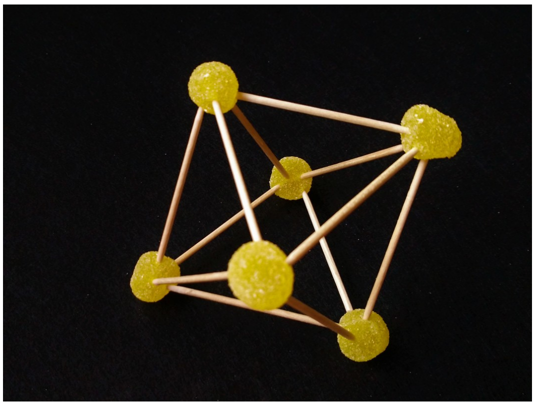
Pasamos ahora a enumerar brevemente los materiales para la la construcción de poliedros o cuerpos geométricos.

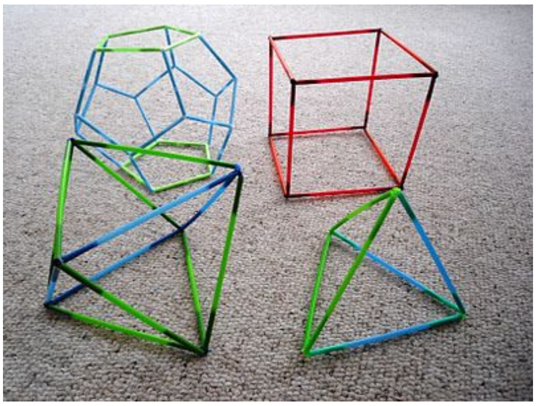
⋗ Sólidos vacíos: Geomag, palillos con plastilina o pajitas con limpiapipas

El **Geomag** es un material fácil de usar, rápido y colorido. El único inconveniente es que solo permite trabajar poliedros de caras regulares ya que todas las aristas miden lo mismo.



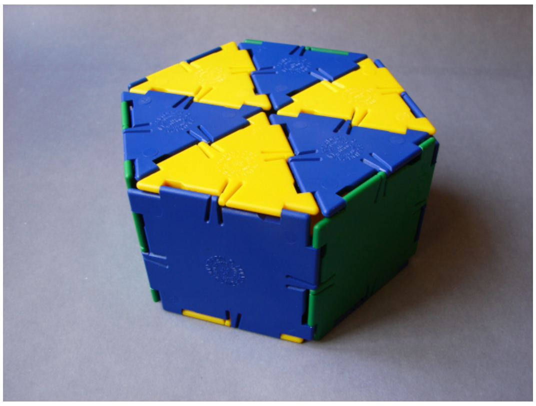
Por otra parte, con **palillos de dientes o de pincho** para las aristas y **plastilina o gominolas** para construir las uniones entre aristas o bien con **pajitas y limpiapipas**, pueden realizarse poliedros con caras no regulares





⋗ Poliedros sólidos: El polydron y material troquelado y gomas

Polydron es un conjunto de formas resistentes, de colores rojo, azul, verde y amarillo, que pueden interconectarse por los bordes por medio de una articulación única con clip. Este material permite construir diferentes poliedros siempre que sus caras puedan formarse utilizando las formas básicas disponibles. Con **cartulina troquelada y gomas** se tiene también un magnifico material para enseñar geometría. En este caso, se dispone de mayor libertad para la construcción de poliedros irregulares, al permitir la utilización de caras con forma arbitraria, pero tiene como inconveniente que requiere más tiempo de elaboración para preparar los troquelados.



1.5.2 Actividades de descripción, construcción y exploración de polígonos

En las primeras actividades se debe partir del propio vocabulario que usan los niños para describir las formas geométricas, introduciendo nuevas palabras a medida que sea apropiado. La realización de actividades como las siguientes puede ser una buena ocasión para introducir los nombres usuales de los cuerpos geométricos.

Uno de los primeros tipos de actividades y de las más importantes que se pueden proponer a los alumnos es ofrecerles la oportunidad de encontrar semejanzas y diferencias entre una gran variedad de formas. Muchos alumnos se centrarán en características no estándares como «puntiagudo» o «curvado» o «se parece a una casa». Otros observarán cosas que realmente no son parte de las formas como «señala hacia arriba» o «está cerca del borde la mesa».

En la Actividad 1.4 vamos a empezar con una actividad de nivel muy básico para los alumnos de primaria de manera que se trabaje la aparición de múltiples formas geométricas en un geoplano en dónde se les pide que estas formas tengan forma de triángulo.

Actividad 1.4

Contenido: Representación de triángulos en el geoplano

Tareas
Analiza la siguiente actividad

1. *Representa diferentes triángulos con ayuda de un geoplano*
2. *Una vez lo tengas construido, explica al resto de tus compañeros por qué crees que es un triángulo.*

¿A qué nivel de van Hiele pertenece? ¿Cómo resolverías un error de un alumno que representa un cuadrilátero en el geoplano afirmando que es un triángulo? ¿En qué nivel de van Hiele crees que está este alumno?

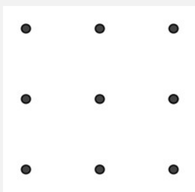
En la Actividad 1.5 vamos a analizar una actividad en la que se pone de manifiesto la palabra *diferente* en geometría y en donde los alumnos deberán reflexionar sobre por qué creen que los triángulos no son *iguales*.

Actividad 1.5

Contenido: Representación de triángulos en el geoplano

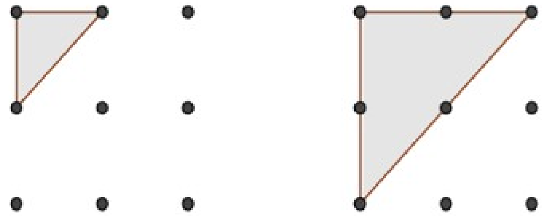
Tareas
Analiza la siguiente actividad

Dibuja sobre un geoplano 3×3 de papel todos los triángulos «diferentes» que se te ocurran. Clasifícalos tanto por sus lados como por sus ángulos y razona por qué crees que son diferentes.



En la Actividad 1.5 puede surgir la duda entre los alumnos de si dos triángulos que se han dibujado son «*diferentes*» o no. En este punto deberemos introducir el concepto de semejanza entre figuras geométricas, especialmente la semejanza entre triángulos.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma medida angular interna y los lados que se oponen son proporcionales.



Podemos utilizar, además, los siguientes criterios para la semejanza de triángulos.

- Dos triángulos son semejantes si dos ángulos interiores del primer triángulo son de igual medida que dos ángulos interiores del segundo triángulo, respectivamente.
- Dos triángulos son semejantes si un ángulo del primer triángulo es de igual medida que un ángulo del segundo y los lados que lo determinan son respectivamente proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primer triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados del segundo triángulo.

Antes de embarcarse en un trabajo más profundo con los polígonos conviene trabajar (con geoplano u otro material) las líneas poligonales. Así, los polígonos aparecen como líneas poligonales cerradas. Es por tanto muy natural que aparezcan tanto polígonos convexos como cóncavos. Además, no conviene eliminar los cóncavos ya que tienen propiedades geométricas interesantes y se contribuye a la creación de objetos mentales más ricos en los alumnos.

En la Actividad 1.6 vamos a diseñar una actividad para alumnos de primer y segundo ciclo en la que se trabajen algunas subactividades relacionadas con las lineas poligonales y los polígonos.

Las primeras subactividades conectan con las líneas poligonales y se orientan hacia el afianzamiento de conceptos. Las primeras (hasta la sexta) corresponden al primer ciclo.

Las subactividades 4, 5 y 6 sirven para afianzar el vocabulario y los conceptos. Su objetivo inicial es familiarizar a los niños con las formas y los tamaños de los polígonos, no sólo con los regulares.

Las subactividades de la 7 en adelante están destinadas a introducir las diagonales de los polígonos en segundo ciclo y conviene trabajarlas en el geoplano 5x5 o circular.

Actividad 1.6

Contenido: Diseño de actividades para primer o segundo ciclo

Tareas

Diseña una actividad para alumnos de primer o segundo ciclo que trabaje al menos 6 de las siguientes subactividades

1. En el geoplano 5x5 construye líneas poligonales cerradas. Recuerda que las llamamos polígonos. Cuenta el número de lados que tienen los polígonos que has construido.
2. De los polígonos de la actividad anterior señala los triángulos (tienen tres lados). Señala ahora los cuadriláteros (tienen cuatro lados) y después los pentágonos (cinco lados).
3. Repite las dos actividades anteriores en el geoplano circular.
4. Construye triángulos en el geoplano 3x3, ve pasando los triángulos a un papel. ¿Cuántos diferentes hay? (véase Actividad 1.5).
5. Repite la actividad anterior pero construyendo cuadriláteros.
6. Repítelo ahora construyendo pentágonos.
7. Construye un pentágono. Une con una goma de otro color dos vértices que no sean adyacentes (es decir, que no estén seguidos). Repite esto varias veces en el mismo polígono. Estas líneas se llaman diagonales. Construye las diagonales de varios polígonos.
8. ¿Qué diferencias ves entre las diagonales y los lados?
9. Construye cuadriláteros y sus diagonales. Construye ahora un triángulo y busca sus diagonales.
10. Construye ahora cuadriláteros y pentágonos, representa las diagonales y cuéntalas.
11. ¿Están siempre las diagonales dentro del polígono?
12. De los polígonos de la actividad 10 separa lo que tienen alguna diagonal fuera. A estos los llamaremos cóncavos, a los que tienen todas las diagonales dentro los llamaremos convexos.
13. Construye polígonos convexos.
14. Construye polígonos cóncavos.
15. Compara la forma de los polígonos cóncavos y la de los convexos. Saca alguna consecuencia de sus diferencias.
16. ¿Has construido algún triángulo en la pregunta 14? ¿Hay triángulos cóncavos?

En la actividad anterior, deberemos prestar atención en el diseño de nuestras actividades a los posibles problemas cognitivos que puedan tener los alumnos por no encontrarse en el nivel de van Hiele correcto en alguno de los conceptos que se trabajan. Deberemos proporcionar al final de la actividad un espacio para que los alumnos reflexionen y discutan entre ellos así como hacerles preguntas para asegurarnos que todos los alumnos han entendido la actividad y su propósito.

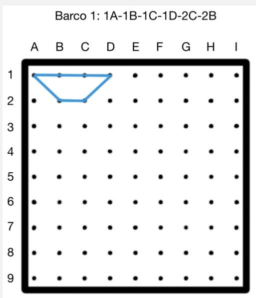
Otra manera de trabajar las propiedades de los polígonos es mediante el clásico juego *Hundir la flota*. Se puede trabajar con geoplanos añadiéndoles unos códigos alfa-numéricos para situar las coordenadas en los pivotes del geoplano o trabajar con una malla punteada en papel donde ya estén codificados cada uno de los puntos de la malla. En la Actividad 1.7 vamos a analizar esta actividad haciendo hincapié en las preguntas que haremos a los alumnos una vez hayan terminado la actividad.

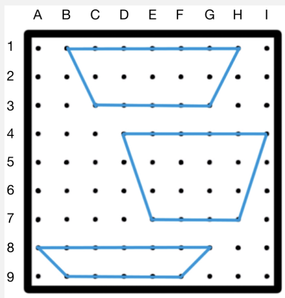
Actividad 1.7

Contenido: Hundir la flota

Tareas
Analiza la siguiente actividad propuesta para alumnos de segundo de primaria.

1. *En un geoplano con coordenadas alfa-numéricas se representa una figura. El primer paso será aprender a dar correctamente las coordenadas de la situación de cada figura. Después añadiremos más figuras para que también escriban sus coordenadas.*
2. *A continuación les daremos las coordenadas correspondientes a una figura determinada para que los alumnos la representen en sus geoplanos. Por ejemplo 3E-3F-3G-3H-4G-4F.*
3. *Una vez que han aprendido a identificar las coordenadas de una figura plana y a representarla en el geoplano dadas sus coordenadas ya están preparados para jugar por parejas al juego de «Hundir la flota». En este caso no sólo tienen que hundir el barco de sus compañeros sino que también tienen de describir la forma que tiene el barco que han hundido.*





¿A qué nivel de van Hiele pertenece la actividad? ¿Crees que se complicaría la actividad si le pedimos a los alumnos que digan el número de lados y vértices que tiene la figura? ¿O que tengan que decir qué tipo de polígono es el que han *hundido*?

La Actividad 1.8 tiene dos partes bien diferenciadas. En la primera parte se pide a los alumnos que construyan diversos polígonos utilizando dos, tres y cuatro piezas de Tangram respectivamente. En esta primera parte, los alumnos tienen que recurrir a sus imágenes mentales de cómo son los polígonos para representarlos. En la segunda parte, se les pide a los alumnos que construyan diversos polígonos utilizando desde una sola pieza hasta todas las piezas del Tangram. En esta segunda parte, los alumnos tienen una imagen del polígono que tienen que construir aunque el ejercicio no especifica en ningún momento que tenga que tener esa forma. Además, no todas las casillas de las tablas proporcionadas son posibles.

Actividad 1.8

Contenido: Exploración de polígonos con Tangram

Tareas
Analiza la siguiente actividad

Construye con el número correspondiente de piezas de un sólo Tangram los polígonos indicados en las tablas siguientes

2 piezas		3 piezas		4 piezas	
Triángulo	Cuadrado	Triángulo	Cuadrado	Triángulo	Cuadrado
Paralelogramo	Trapecio	Paralelogramo	Pentágono	Paralelogramo	Trapezoide

Núm. piezas	1	2	3	4	5	6	7
Cuadrado							
Triángulo							
Trapecio							
Paralelogramo							
Pentágono							

¿A qué nivel de van Hiele pertenece la actividad? Piensa en la forma de organizar a los alumnos en clase y cómo podríamos solucionar los problemas que tuvieran los alumnos para construir polígonos *no prototípicos* con las piezas del Tangram.

En la Actividad 1.9 analizaremos una actividad de creación de polígonos un poco diferente a las que hemos visto anteriormente. Los alumnos deberán crear triángulos con un determinado número de palillos en cada lado para posteriormente clasificarlos, primero por sus ángulos y luego por sus lados.

Actividad 1.9

Contenido: Construcción de polígonos con palillos

Tareas
Analiza la siguiente actividad

Completa la siguiente tabla construyendo cada uno de los triángulos que se indican con palillos y gominolas.

Núm. Triángulo	Palillos por lado	Dibujo del triángulo	¿Agudo, recto u obtuso?	¿Isósceles, escaleno o equilátero?
1	3,4,5			
2	3,3,3			
3	2,1,2			
4	2,3,4			
5	2,2,2			
6	2,3,2			
7	1,1,1			
8	4,5,6			

¿A qué nivel de van Hiele pertenece? ¿En qué curso la trabajarías? ¿Crees que los alumnos tendrán dificultades para clasificar un mismo triángulo en dos clasificaciones diferentes? ¿Qué crees que deberían haber trabajado antes los alumnos para no tener problemas en la resolución de esta tarea?

1.5.3 Actividades de clasificación de polígonos

Pasamos ahora a ver algunas actividades que se corresponden con la clasificación de polígonos. En la Actividad 1.10 tenemos una tarea de clasificación de formas recortadas en cartulina. Dependiendo del nivel de van Hiele que tengan los alumnos y de si el conjunto de formas tiene varios ejemplos de una forma de la cual conocen el nombre (rectángulo o rombo), es posible que algunos alumnos las clasifiquen según ese nombre. Si los alumnos están en un nivel de van Hiele inferior, se puede pedir que clasifiquen formas «*que se parezcan*».

Con esta actividad, el concepto que define la forma de un polígono surge naturalmente sin definición explícita y podemos etiquetar el nuevo concepto. Este tipo de clasificación también puede hacerse con formas tridimensionales.

Actividad 1.10

Contenido: Actividad de clasificación de formas

Tareas
Analiza la siguiente actividad

1. *Preparamos formas recortadas en cartulina*
2. *Un alumno selecciona una al azar*
3. *El resto de compañeros tiene que encontrar formas «que se parezcan»*
4. *Cada vez formamos un subconjunto de figuras (para evitar poner una forma en cada categoría)*
5. *Los alumnos describen la característica identificada*
6. *Después les pedimos a los alumnos que dibujen una figura que se ajuste a la nueva categoría*

¿A qué nivel de van Hiele crees que pertenece la actividad? ¿Cómo modificarías la actividad para subirla de nivel? ¿En qué curso la situarías antes y después de variar el nivel de van Hiele?

Pasamos ahora a ver una actividad relacionada con la Actividad 1.9. En ella introdujimos la idea de que un triángulo puede clasificarse de dos maneras distintas, por sus lados y por sus ángulos. Retomamos en la Actividad 1.11 esta idea con el fin de que los alumnos intenten construir un ejemplo de todos los triángulos que surgen cuando cruzamos las dos clasificaciones.

Actividad 1.11

Contenido: Clasificación de los triángulos

Tareas
Analiza la siguiente actividad

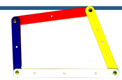
Escribe la clasificación de los triángulos en forma de árbol (por lados y por ángulos) y construye un ejemplo de cada uno de ellos con varillas articuladas. Teniendo en cuenta que hay 9 combinaciones en la clasificación anterior ¿existen los 9 tipos de triángulos? Utiliza la cuadrícula siguiente e intenta construir un triángulo para cada uno de los 9 tipos.

	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

¿A qué nivel de van Hiele pertenece la actividad? ¿Como podrías demostrarle formalmente a los alumnos que no existen todos los tipos de triángulos?

De la misma forma que en la actividad anterior, en la Actividad 1.12 les pedimos a los alumnos que construyan un ejemplo de cada uno de los tipos de cuadriláteros. De esta manera, además de trabajar las propiedades durante la clasificación, los alumnos generan un conjunto de ejemplos que les ayudarán a ampliar su banco de imágenes del concepto de cuadrilátero.

Actividad 1.12



Contenido: Clasificación de los cuadriláteros

Tareas

Amplia el diseño de la siguiente actividad indicando el curso al que iría dirigida, la forma de trabajo de los alumnos y la forma de presentar el resultado a toda la clase.

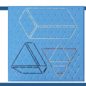
> *Escribe la clasificación de los cuadriláteros en forma de árbol y construye cada uno de ellos con varillas articuladas.*

Piensa además en los posibles problemas que pudieran tener los alumnos a la hora de realizar la actividad.

1.5.4 Actividades para trabajar las propiedades de los polígonos

Una buena manera de trabajar las propiedades de los polígonos es mediante la construcción de formas poligonales en un geoplano que cumplan ciertas condiciones. En la Actividad 1.13 los alumnos deberán construir una serie de cuadriláteros que cumplan las propiedades que aleatoriamente les vengan proporcionadas al lanzar dos dados cúbicos.

Actividad 1.13



Contenido: Propiedades de las figuras planas

Tareas

Analiza la siguiente actividad.

Material necesario: un geoplano y gomas elásticas, dos dados cúbicos y papel y lápiz para anotar las puntuaciones.

Instrucciones

- *Coloca la goma en el centro del geoplano formando un paralelogramo*
- *Cuando comienza un turno se lanzan los dos dados. Estos dos números darán las coordenadas de la celda de la figura siguiente que contiene las condiciones que tienen que cumplir la nueva figura que has de construir partiendo de la que tienes en el geoplano. Has de intentar pasar de una a otra cambiando el menor número de vértices. Si la figura que tienes en el geoplano ya cumple las condiciones, también tienes que modificarla.*

1	4 ángulos rectos					
2	Exactamente 1 pareja de lados opuestos iguales	No hay ningún lado igual o paralelo				
3	No hay ningún eje de simetría	Exactamente 2 parejas de lados paralelos	Una pareja de ángulos opuestos iguales			
4	Exactamente una pareja de lados paralelos	Una diagonal es un eje de simetría	Exactamente hay un ángulo mayor a 180º	Exactamente hay un ángulo recto		
5	No hay lados paralelos	Exactamente dos parejas de ángulos opuestos son iguales	No hay ningún lado igual	Exactamente una pareja de lados consecutivos son iguales	Exactamente 2 ángulos rectos	
6	Dos parejas de lados consecutivos son iguales	Un ángulo mayor a 180º	Los cuatro lados son iguales	No hay ningún ángulo igual	La diagonal divide la figura en dos partes iguales	2 parejas de lados opuestos son iguales
	1	2	3	4	5	6

Puntuación

- *Cuatro puntos si sólo mueves un vértice*
- *Tres puntos si mueves dos*
- *Dos puntos si mueves tres*
- *Un punto si mueves cuatro (equivale a quitar la goma y volverla a poner)*

Cuando se acaba de construir, se anotan los puntos y pasa al jugador siguiente. Se recomienda hacer cinco rondas.

¿A qué nivel de van Hiele pertenece la actividad? ¿Crees que sería interesante que los alumnos crearan su propia tabla de propiedades para generar otro juego? ¿Cuáles crees que serían las mayores dificultades que encontrarían los alumnos? ¿Y si trabajaran con polígonos de un número libre de lados?

Actividad extraída de www *PuntMat. Juego del geoplano: definiciones y propiedades*

1.5.5 Actividades para trabajar los poliedros

Los alumnos necesitan una amplia variedad de actividades espaciales y con formas durante sus años intermedios. Necesitan ampliar y desarrollar su comprensión de las propiedades de las formas bidimensionales, las familias de formas tridimensionales y sus desarrollos planos. Gran parte de los mejores ejemplos comienzan con una actividad dirigida por el profesor como la que encontramos en la Actividad 1.14.

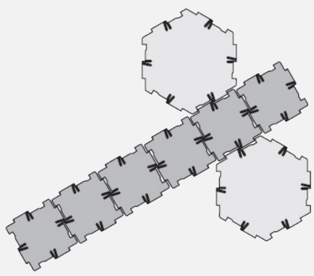
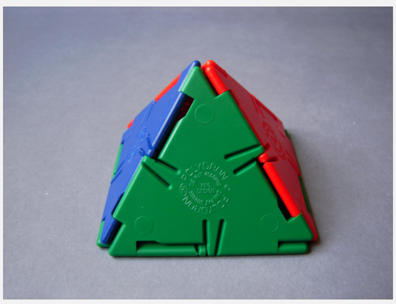
En el estudio del razonamiento geométrico nuestro objetivo será que los alumnos se familiaricen con cierto tipo de poliedros, que aprendan a distinguir sus elementos y que los clasifiquen de acuerdo a ciertas propiedades presentes en el currículum de primaria.

Actividad 1.14

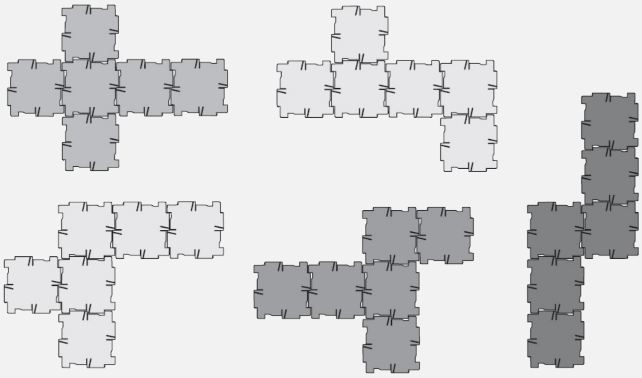
Contenido: Trabajando con desarrollos planos de poliedros

Tareas
Analiza la siguiente actividad

1. *¿En qué cuerpo sólido se convertirá el desarrollo plano de la figura izquierda cuando lo doblemos?*
2. *Construye el desarrollo plano del sólido de la figura derecha sin desmontarlo y comprueba después que efectivamente se corresponden*

3. *¿Cuál de estos desarrollos planos formará un cubo al ser doblado? Construyelos todos y compruébalo*



Realizar actividades como la del laboratorio 1.15 nos permite explorar la la relación de Euler entre el número de caras, vértices y aristas de un cuerpo sólido. Además, construir cuerpos sólidos propios para conseguir razonar y justificar la fórmula por la que se rigen es una actividad de descubrimiento de propiedades interesante para nuestros alumnos.

Actividad 1.15

Contenido: Sólidos platónicos y la fórmula de Euler

Tareas
Analiza la siguiente actividad

1. *Construye los siguientes sólidos platónicos*

2. *Rellena la siguiente tabla e intenta obtener la fórmula de Euler que relaciona el número de caras, vértices y aristas de un poliedro.*

Nombre del Cuerpo Sólido	*Número de Caras (C)*	*Número de Vértices (V)*	*Número de Aristas (A)*
Tetraedro	*4*	*4*	*6*
Cubo			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

En la Actividad 1.16, extraída de Guillén (1997), se enuncian varias características y se nombran diferentes familias de sólidos y se pide que se relacionen las características visuales con las clases de sólidos que las tienen. Este tipo de actividades entrarían dentro del nivel 1 de van Hiele que definió Guillén en su tesis doctoral (1997).

La clasificación en niveles de van Hiele de los sólidos se queda fuera del ámbito de esta asignatura pero se puede encontrar literatura al respecto en diferentes publicaciones (Guillén, 1997, 2000, 2004).

Actividad 1.16

Contenido: Clasificamos los cuerpos sólidos

Tareas
Analiza la siguiente actividad

> *Se consideran las siguientes familias de sólidos: poliedros, cilindros, conos y esferas. Para cada una de las propiedades que se indican en la tabla siguiente, indicad en la columna de la derecha las familias de sólidos que las cumplen.*

Propiedad	*Familias de sólidos*
1. No tiene caras curvas	
2. Tiene dos caras planas que no son polígonos	
3. Tiene una sola cara y es curva	
4. Tiene tres caras que no son polígonos	
5. Tiene varios vértices	
6. Sólo tiene un vértice	
7. No tiene vértices ni aristas	
8. Tiene dos aristas que no son rectas	
9. Sólo tiene una arista	
10. Tiene varias aristas y todas ellas son rectas	
11. No tiene vértices	
12. Tiene más de cinco aristas	
13. Tiene más de tres vértices	

¿En qué curso propondrías esta actividad? ¿Crees que los estudiantes necesitarán un modelo ya construido de cada una de las familias para poder rellenar la tabla? ¿Crees que es importante que no se les proporcione de partida el modelo?

En la Actividad 1.17 volvemos a encontrar una actividad extraída de la tesis doctoral de Guillén (1997). En ella se centra la atención sobre una clasificación en el mundo de los sólidos: la que separa los sólidos que son poliedros de los que no lo son. Con esta actividad se pretende evaluar si los estudiantes disponen ya de un cierto objeto mental de los cuerpos redondos que permite discriminarlos de los poliedros. Permite, además, averiguar los atributos críticos del concepto de poliedro –por ejemplo, que las caras tienen que ser planas, las caras tienen que ser polígonos, las aristas tienen que ser rectas– de cilindro, de cono o de esfera que se enuncian de manera precisa y los atributos críticos del concepto de cada una de estas familias que no están todavía en el objeto mental que los estudiantes se han formado de la familia correspondiente.

Actividad 1.17

Contenido: Clasificamos los cuerpos sólidos (II)

Tareas
Analiza la siguiente actividad

Se les pide a los alumnos que contesten a las siguientes preguntas

- *Identificad familias de sólidos que tienen todas las caras planas y familias de sólidos que tienen alguna cara curva.*
- *Identificad familias de sólidos que tienen todas sus aristas rectas, familias de sólidos que tienen alguna arista curva y sólidos que no tienen aristas.*
- *¿Qué solidos tienen vértices en los que se juntan varias caras? ¿Qué solidos tienen un vértice en el que concurre una sola cara? ¿Qué solidos no tienen vértices?*
- *Enumerad propiedades que tienen que tener todos los poliedros.*
- *Enumerad propiedades de los conos, de los cilindros y de la esfera.*
- *Intenta expresar lo que es una cara, una arista y un vértice de un poliedro.*

¿Cómo trabajarías esta actividad con los alumnos? ¿Crees conveniente que se les proporcione material manipulativo?

1.6 Conflictos en el aprendizaje de la geometría

De acuerdo con Barrantes y Blanco (2004), el personal docente, debido a las concepciones y experiencias adquiridas en su formación, planea las lecciones y utiliza los mismos recursos que experimentó en su momento como estudiante. Muchas veces su vivencia personal le impide llevar a cabo una experiencia de aprendizaje que guíe al estudiante al descubrimiento de la geometría como generadora de conocimiento.

Como ya hemos comentado en la sección 1.3, los alumnos deben ser capaces de construir imágenes conceptuales completas y saber relacionarlas con los conceptos correspondientes. Pero este proceso no se realizará correctamente si, tal y como afirman Barrantes y Blanco (2004), los futuros profesores de Matemáticas se inclinan hacia aquellos temas considerados más asequibles y también más importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas como puede ser la aritmética. Así, los temas de geometría se ven relegados al ser considerados poco importantes.

Es habitual encontrar entre los alumnos determinados conceptos geométricos mal aprendidos. La constatación de estos errores muestra la importancia del estudio de la definición y la comprensión en el estudio de los conceptos que relacionan distintos elementos. Es necesario que estas relaciones se trabajen desde el principio de la enseñanza.

La representación de figuras geométricas planas puede inducir a error debido a la persistencia de la realización de dicha representación en una determinada orientación. Así, los polígonos suelen representarse de forma que uno de sus lados haga de base y sea, además, paralelo con el borde del papel. Esto lleva a que, cuando en la representación no se cumple este «requisito», no se reconozca la figura o que una figura incorrecta parezca correcta. Esto sucede para todos los polígonos excepto para el rombo, que suele representarse con sus vértices orientados hacia los bordes del papel que lo contiene, por lo que sólo se identifica cuando tiene esa posición y si no, se confunde con un romboide y, a veces, con un cuadrado. Del mismo modo, cuando se representa un cuadrado apoyado sobre uno de sus vértices, suele confundirse con un rombo.

Los errores sobre figuras geométricas, su representación y sus posiciones fijas suelen disminuir con la edad de los alumnos, aunque no tienen porqué desaparecer. En otros estudios (Gutiérrez y Jaime, 1996) se han detectado otros errores como la no identificación de las tres alturas de un triángulo. Normalmente se asocia la altura con una línea perpendicular a la base del triángulo y la base se representa horizontalmente, lo que da ocasión a este error. Otro error relacionado consiste en creer que la altura tiene que estar contenida en el triángulo.

Para evitar estos errores se considera adecuado que sean los alumnos los que construyan sus propias definiciones de los conceptos mediante una adecuada batería de ejemplos y contraejemplos tal y como ya comentamos en el Apartado 1.3 de este mismo capítulo.

Charles (1980) citado por Serrano (2001, p. 386–387) recomiendan las siguientes directrices para seleccionar ejemplos y contraejemplos:

- Identificar las características relevantes del concepto que se va a estudiar así como las que son poco importantes. Por ejemplo, para el caso de una circunferencia serán relevantes: ser línea curva, ser plana, ser cerrada y que todos sus puntos son equidistantes del centro.

- En los ejemplos se ha de tener en cuenta que las características irrelevantes que aparecen habitualmente sean variadas. Para el caso del polígonos: es irrelevante que sea regular o irregular, también lo es el número de lados o ser cóncavo o convexo. Por tanto, para resaltar la variabilidad de estas características deberíamos presentar como ejemplos triángulos de diferentes tipos, trapecios o polígonos cóncavos.

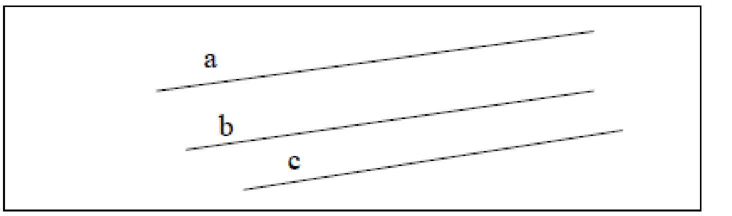
- Presentar contraejemplos que destacadamente infrinjan alguna de las características relevantes. Como, por ejemplo, presentar como contraejemplo de una circunferencia una elipse.
- Proponer preguntas a los alumnos en las que se resalten las características relevantes e irrelevantes.

A continuación presentamos una selección de preguntas usadas en diversas investigaciones (Dickson, Brown, y Gibson, 1991) que pueden permitir evaluar los conocimientos geométricos de los alumnos o identificar errores habituales.

Fielker (1973) refiere el caso de una clase de niños de 11 años, a quienes se les proporcionó la figura del Ejemplo 1.5.

Ejemplo 1.5

La recta a es paralela a b y la b es paralela a c. ¿Es cierto que a será paralela a c?



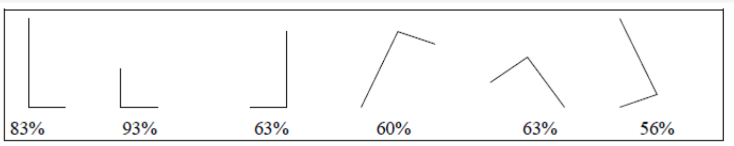
La clase le dijo a Fielker que:

> *«a es paralela a b y b es paralela a c». «Entonces a será paralela a c», dijo él. «No -replicaron-, porque b está en medio».*

Los Ejemplos 1.6 y 1.7 hacen referencia a estudios de Kerslake (1977).

Ejemplo 1.6

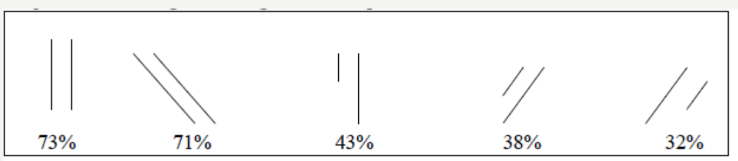
¿Cuáles de las siguientes figuras son ángulos rectos?



En el Ejemplo 1.6 los porcentajes indicados corresponden a las respuestas dadas por niños de 10 años afirmando que tales figuras son ángulos rectos. En ese mismo ejemplo vemos cómo cambian los porcentajes de éxito según la orientación de la figura y el tamaño de los segmentos trazados.

Ejemplo 1.7

¿Cuáles de los siguientes segmentos son paralelos?

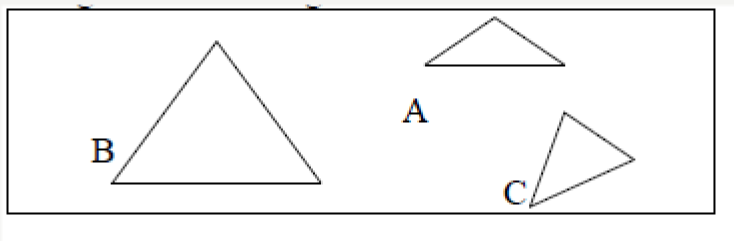


En el Ejemplo 1.7 los porcentajes indicados corresponden a las respuestas dadas por niños de 10 años afirmando que tales rectas son paralelas. En él vemos cómo cambian los porcentajes de éxito según la orientación de la figura y el tamaño de los segmentos trazados como lados.

Greenes (1979) señala que frecuentemente, cuando una forma geométrica cambia de posición, el niño cree que su carácter (forma, tamaño, etc.) ha cambiado también. Greenes, en su estudio, cita el caso de Robbie, de nueve años de edad al que le mostraron tres triángulos como los del Ejemplo 1.8.

Ejemplo 1.8

¿Cuáles de las figuras no es un triángulo?

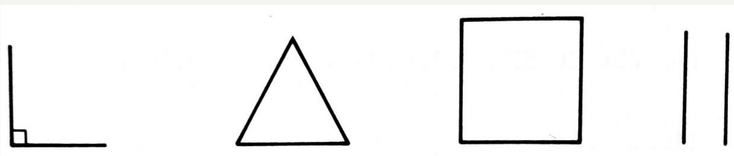


Robbie seleccionó B como el más parecido a A. Dijo que A y B eran triángulos. Cuando la entrevistadora le señaló C y preguntó «*¿Y éste? ¿Es un triángulo?*», el niño replicó «*No, porque se ha caído*». Greenes sostiene que Robbie tiene un error de concepto aprendido (Greenes, 1979).

> *Robbie solamente había visto triángulos situados en la posición habitual, es decir, con la base horizontal. Al objeto de reconocer la figura, él utilizó la línea de base como uno de los rasgos identificadores.*

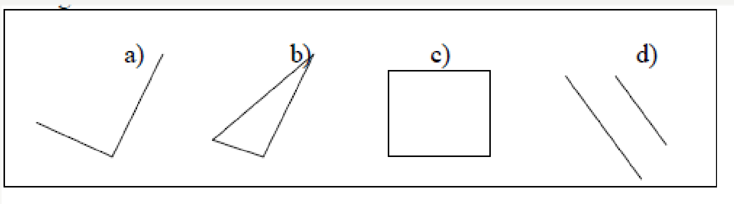
Kerslake (1979) explica que la forma habitual de presentar las figuras geométricas es la que aparece en el Ejemplo 1.9. En estudios efectuados sobre niños de cinco a once años de edad el porcentaje de alumnos que reconocieron que la tercera figura es un cuadrado fue el 54 % en el caso de alumnos de 5 años, el 56 % en alumnos de 6 años y el 80 % en alumnos de 7 años.

Ejemplo 1.9



Kerslake (1979) afirma también que a los alumnos les resulta difícil generalizar los conceptos representados en ellas en las raras ocasiones en que se tropiezan con ilustraciones poco habituales como las del Ejemplo 1.10. En dicho ejemplo, entrevistados alumnos entre 5 y 10 años, el porcentaje que reconoció que la segunda figura es un triángulo no superó el 38 % en los más pequeños y el 67 % en los alumnos más mayores.

Ejemplo 1.10



1.7 Herramientas TIC para el aprendizaje de la geometría

La primera actividad que encontramos en el laboratorio TIC sirve de introducción para que los alumnos se familiaricen con los distintos tipos de geoplanos. En ella deberemos diseñar una actividad para poner en relieve las diferencias entre ellos.

Actividad 1.18

Contenido: Trabajando con geoplanos

Tareas

En el enlace Trabajo con geoplanos Treball en un geoplà » Geoplans encontrarás un micro-programa interactivo de Geogebra donde los alumnos pueden familiarizarse con los diferentes tipos de geoplanos (circular, isométrico y ortogonal). Diseña una actividad para los cursos intermedios de primaria para trabajar las diferencias entre los distintos geoplanos y que los alumnos descubran las ventajas e inconvenientes de trabajar con cada uno de ellos en la representación de figuras regulares o irregulares.
Piensa además en las preguntas que les harás a los alumnos para asegurarte de que han entendido el objetivo de la actividad.

La actividad tecnológica 1.19 está relacionada con la actividad de laboratorio 1.5 en la que los alumnos debían construir e identificar todos los triángulos *diferentes* posibles en un geoplano 3×3. Se puede aprovechar el micro-programa interactivo proporcionado para completar la actividad y comprobar la clasificación de triángulos realizada anteriormente.

Actividad 1.19

Contenido: Triángulos en un geoplano

Tareas
Utiliza el micro-programa interactivo de Geogebra

Trabajo con geoplanos › Treball en un geoplà › Triangles en un geoplà de fins a 5 x 5

para volver sobre la actividad del laboratorio 1.5 y que los alumnos comprueben que la clasificación que hicieron de los triángulos producidos era correcta.
Aprovecha, además, para que usando el micro-programa interactivo proporcionado comprueben si pueden realizarse todos los tipos de triángulos en un geoplano 3×3, 4×4 y 5×5.

La siguiente actividad interactiva consiste en ampliar la Actividad 1.12 de clasificación de cuadriláteros de manera que los alumnos, ayudados por un micro-programa interactivo de geogebra puedan comprobar la clasificación que hicieron y añadir más ejemplos de cuadriláteros a los ya construidos con varillas articuladas.

Actividad 1.20

Contenido: Cuadriláteros convexos en un geoplano 5×5

Tareas
Utiliza el micro-programa interactivo de Geogebra

Trabajo con geoplanos › Treball en un geoplà › Quadrilàters convexos en un geoplà de 5 x 5

para volver sobre la actividad del laboratorio 1.12 y que los alumnos comprueben que la clasificación que hicieron de los cuadriláteros era correcta.
Aprovecha, además, para que, usando el micro-programa interactivo proporcionado, generen más ejemplos de cuadriláteros en cada una de las categorías.

Una vez trabajada la clasificación de los cuadriláteros, es interesante proponerle a los alumnos la construcción de un cuadrilátero dadas sus propiedades. Esto puede generar diversos errores por parte de los alumnos si no tienen bien adquiridas las principales propiedades que separan la clasificación y puede que necesiten ayuda de material manipulativo para superarlas.

Actividad 1.21

Contenido: Construcción de cuadriláteros

Tareas
El siguiente micro-programa interactivo de Geogebra

Construcción de cuadriláteros

proporciona una serie de ejercicios en los que el alumno tiene que construir diferentes cuadriláteros según unas características dadas.
Analiza los posibles problemas que puedan tener los alumnos a la hora de resolver los distintos ejercicios, en qué nivel de van Hiele necesitan estar para resolverlo y piensa cómo podrías trabajar la misma actividad en clase con tus alumnos.

En la siguiente actividad tecnológica, se proporcionará un micro-programa interactivo de Geogebra a los alumnos para ayudarles en la comprensión de la demostración de que la suma de los ángulos exteriores de los polígonos siempre es 360º.

Actividad 1.22

Contenido: Ángulos exteriores de un polígono

Tareas
Utiliza el siguiente micro-programa interactivo de Geogebra

Ángulos exteriores de un polígono

para trabajar con los alumnos de los últimos cursos de primaria la demostración de que los ángulos exteriores de un polígono suman 360º. Piensa además, como podrías trabajar la demostración de que el resultado es válido para cualquier polígono de n lados.
Diseña por último una actividad para trabajarlo con figuras poligonales recortables para afrontar los posibles problemas de comprensión que puedan tener los alumnos.

1.8 Análisis de libros de texto sobre tareas de figuras geométricas en primaria

Para el análisis de actividades de geometría de los libros de texto nos centraremos en analizar los conceptos y procedimientos que se ponen en juego en cada actividad así como analizar en qué nivel de van Hiele deberían encontrarse los alumnos para poder resolverlas adecuadamente. Así, analizaremos los contenidos previos que deberían tener los alumnos, si serán capaces de entender el enunciado de la actividad a resolver y la posible necesidad de utilizar material manipulativo.

Actividad 1.23

Contenido: Análisis de ejercicios y propuestas de geometría en los libros de texto de primaria.

Tareas
Busca 5 enunciados de ejercicios y propuestas de geometría en libros de texto de primaria de distintas editoriales. Para cada uno:

1. Resuelve los problemas propuestos.
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la resolución.
3. ¿A qué nivel de van Hiele corresponden?
4. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
5. Si es posible, propón una actividad para trabajar el mismo concepto con material manipulativo.

1.9 Bibliografia del Tema 1

Barrantes, M., y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *22*(2), 241–250.

Beltrametti, M., Esquivel, M., y Ferrari, E. (2005). *Evolución de los niveles de pensamiento geométrico de estudiantes de Profesorado en Matemática.*

Carrillo, L., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. I., y Flores, E. (Eds.). (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Ediciones Paraninfo, SA.

Charles, R. I. (1980). Some guidelines for teaching geometry concepts. *Arithmetic Teacher*, *27*(8), 18–20.

Consellería d'Educació, Cultura i Esport. (2014). *Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana* (Vol. 7311).

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor Madrid, MEC.

Fielker, D. (1973). A structural approach to primary school geometry. *Mathematics teaching*, *63*, 12–16.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. En *The teaching of geometry at the pre-college level* (pp. 137–159). Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freundental, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (*Textos seleccionados*). México: CINVESTAV.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Greenes, C. E. (1979). The learning disabled child in mathematics. *Focus-On Learning problems in mathematics*.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje* (Tesis Doctoral, Universitat de València, Valencia). Roderic. Universitat de València.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(1), 035–53.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación matemática*, *16*(3), 103–125.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, 143–170.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, *20*, 27–46.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70–95.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis Doctoral, Universidad de Valencia). Roderic. Universitat de València.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295–384).

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. En *Proceedings of the 18th pme conference* (Vol. 3, pp. 41–48).

Kerslake, D. (1977). The understanding of graphs. *Mathematics in school*, *6*(2), 22–25.

Kerslake, D. (1979). Visual mathematics. *Mathematics in school*, *8*(2), 34–35.

Niss, M. (2006). What does it mean to be a Competent Mathematics Teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. En *Pracktika, 23º panellenio synedrio mathematiks paidaias* (pp. 39–47). Patras, Grecia: Elleniki Mathematiki Etaireia.

Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). (2000). National Council of Teachers of Mathematics.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61–94). Barcelona: Horsori/ICE.

Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 379–398). Síntesis.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic press Orlando, FL.

Vargas, G. V., y Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74–94.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Springer, Dordrecht.

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik*, *83*(1), 20–25.

2. Transformaciones geométricas en el plano y orientación espacial

2.1 Introducción

Considerando la enseñanza de las transformaciones geométricas dentro de la enseñanza de la geometría, el PMME-UNISON (2001) recuerda que hay una urgente necesidad de estudios cuyo propósito principal, entre otros, sea *discutir las metas de la enseñanza de la geometría para los diferentes niveles escolares de acuerdo a los diferentes ambientes y tradiciones culturales*.

Un primer motivo para estudiar las transformaciones geométricas es curricular puesto que «*las transformaciones son aplicaciones de las funciones en geometría, y este tratamiento es fundamental para toda la matemática*» (Jackson, 1975). Un segundo motivo es que las transformaciones proporcionan tareas geométricas de forma dinámica.

Geddes (1992) destaca la ventaja del estudio de las transformaciones geométricas para desarrollar los aspectos intuitivos e informales, justificando que la naturaleza dinámica de las transformaciones favorece que los alumnos investiguen las ideas geométricas a través de un acercamiento informal e intuitivo.

A pesar de estas razones y de las ventajas que ofrece la enseñanza de las transformaciones, en general sabemos que los alumnos muestran un bajo nivel de aprendizaje de éstas (*Trends in International Mathematics and Science Study*, 1998).

Aunque las recomendaciones que da Leitzel (1991, p. 12) de que los *conceptos y propiedades básicas sobre las transformaciones geométricas* deben ser incluidos en la formación matemática de todos los maestros de primaria, la realidad no es ésta, ya que muchos maestros no los tienen en su currículo. Por lo que, si los maestros no han estudiado las transformaciones en sus programas de formación, es posible que tengan más dificultades para enseñarlas (Fennema y Franke, 1992).

Las orientaciones curriculares españolas (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), las orientaciones de la Comunitat Valenciana (Consellería d'Educació, Cultura i Esport, 2014), así como, las orientaciones del *Principles and standards for school mathematics* (2000), sugieren empezar a trabajar el tema de «Orientación Espacial» considerando las orientaciones de cuerpos y objetos en el mundo real, seguir con la interpretación y la elaboración de representaciones espaciales elementales (croquis de mapas, planos y maquetas) y terminar con la construcción y uso de sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias.

Podemos observar que las Orientaciones Curriculares sugieren plantear situaciones para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y aconsejan educar a través del entorno, lo que se puede abordar con diferentes situaciones de orientación espacial. Por otra parte, en los objetivos relacionados con la orientación de objetos y cuerpos en el espacio físico y con el uso de representaciones se tratan sobre todo formas y objetos geométricos donde las situaciones reales y cotidianas son menos habituales.

Sería interesante reconstruir tipos de situaciones que permitieron desarrollar el conocimiento cartográfico a lo largo de la historia, como la exploración de lugares desconocidos, con el objetivo de trazar mapas que orientarán a otros niños exploradores, la organización del espacio (por ejemplo del aula), la discusión de las diferentes simbologías utilizadas y de los errores cometidos.

Situaciones de orientación espacial podrían ser presentadas no sólo en el ámbito matemático, sino también en otras asignaturas, como pueden ser la geografía, el dibujo técnico y la educación física. En matemáticas el niño se enfrentará a la organización del espacio, a la lectura de mapas y planos y a la introducción de sistemas de referencia para especificar lugares en los mapas y en geografía el niño se enfrentará a situaciones relacionadas con la lectura y elaboración de materiales cartográficos, que podrán ser incentivadas yendo al descubrimiento de nuevos espacios.

2.2 Orientaciones curriculares

Tal y como ya hicimos en los temas anteriores, se compararán las orientaciones curriculares locales (Consellería d'Educació, Cultura i Esport, 2014) Decreto 108/2014, con las orientaciones establecidas en los Common Core Stardards (*Principles and standards for school mathematics*, 2000) CCSS-M publicadas en EEUU.

En la Tabla 2.1 se resumen los objetivos relativos a los contenidos de transformaciones geométricas y orientación espacial en los estándares CCSS-M. En la tabla se indica, para cada curso, el conjunto de habilidades que el docente debe procurar que adquieran los alumnos.

Actividad 2.1

Analiza los contenidos, por curso, establecidos en en el currículo de la LOMCE en el anexo I del DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell relativos a las transformaciones geométricas y orientación.

En la siguiente actividad se analizarán libros de texto de diferentes editoriales para identificar cuáles son los contenidos relativos al bloque de medida y como éstos se presentan tanto a los alumnos como a los maestros en los libros del profesor.

Actividad 2.2

Identificad, en los libros de texto que tenéis a vuestra disposición, los contenidos relativos a las transformaciones geométricas y la orientación y observad si los contenidos se ajustan a las orientaciones curriculares y tomad nota del tratamiento que se hace de éstos.

Objetivos generales	Infantil a 2º curso	3º a 5º curso
Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas	- reconocer y aplicar traslaciones, giros y simetrías - reconocer y crear formas que tengan simetría.	- predecir y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales - describir un movimiento o una serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes - identificar y describir las simetrías en formas y figuras bidimensionales o tridimensionales.
Especificación de posiciones, descripción de relaciones espaciales usando sistemas de representación	- describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa - describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia - encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples, como «cerca de» y en sistemas de coordenadas tales como mapas.	- describir posiciones y movimientos usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico - construir y usar sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias - encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistema de coordenadas.

Tabla 2.1: Objetivos de los CCSS-M con respecto a las transformaciones geométricas y orientación espacial.

2.3 Transformaciones geométricas en el plano

Para entender las transformaciones geométricas en el plano, imaginemos que cada punto P del plano se "mueve"hasta una nueva posición P′ sobre el mismo plano. P′ es la imagen de P y éste el original o pre-imagen de P′. Si a puntos P y Q distintos les corresponden imágenes P′ y Q′ distintas y todo punto tiene una única pre-imagen decimos que la correspondencia establecida entre los puntos del plano es una *transformación del plano*.

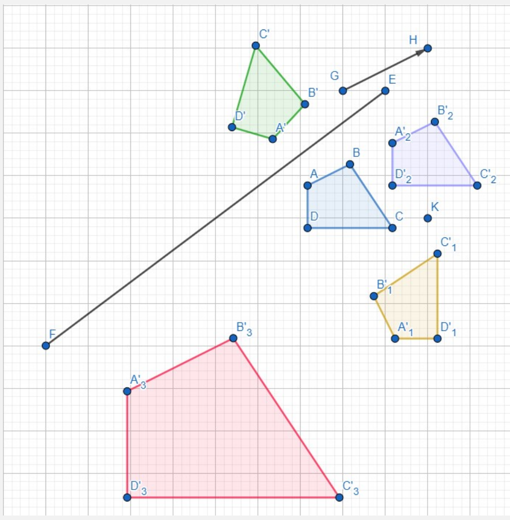
Las transformaciones del plano pueden separarse entre aquellas que mantienen la forma de la figura sobre la que se está realizando el movimiento y las que no. Veamos aquellas que se encuentran en el currículum de primaria.

2.3.1 Movimientos rígidos

Una transformación del plano se dice que es un movimiento rígido si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes P′ y Q′ en dicha transformación, esto es, PQ=P′Q′ para todo par de puntos P y Q. Se denominan también isometrías, del griego *iso* (prefijo que significa igual o mismo) y *metria* (que significa medir). No alteran ni la forma ni el tamaño de la figura en cuestión y sólo involucran un cambio de posición de ella (en la orientación o en el sentido).

Actividad 2.3

¿Qué transformaciones se han realizado sobre el la figura ABCD para obtener las otras figuras? ¿Cuáles de ellos son isometrías?



Actividad 2.4

¿Cómo le explicarías a un niño cómo realizar cada uno de los movimientos anteriores? En cada caso, apóyate en un ejemplo.

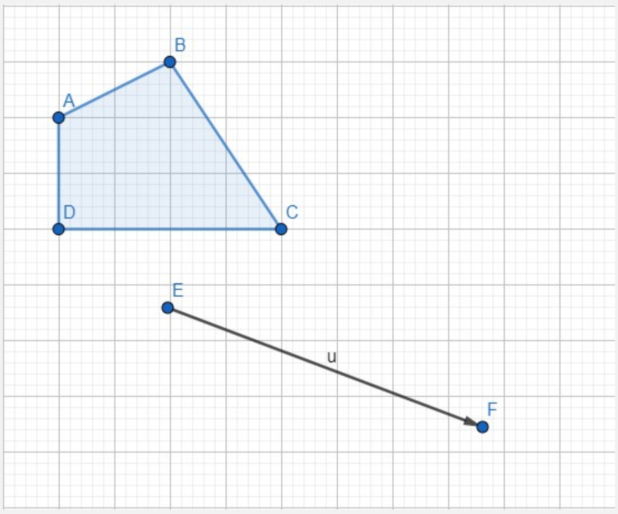
Las isometrías se forman mediante traslaciones, simetrías, giros y composición de los 3 movimientos anteriores. Veamos cada uno de ellos brevemente.

Traslaciones

Son movimientos rígidos en los que todos los puntos del plano se mueven en la misma dirección y la misma distancia. La dirección y la distancia vienen determinadas por un vector.

Actividad 2.5

Si le aplicamos al cuadrilátero ABCD la traslación definida por el vector EF, ¿dónde irá a parar el cuadrilátero A'B'C'D'? ¿Cómo lo dibujamos?

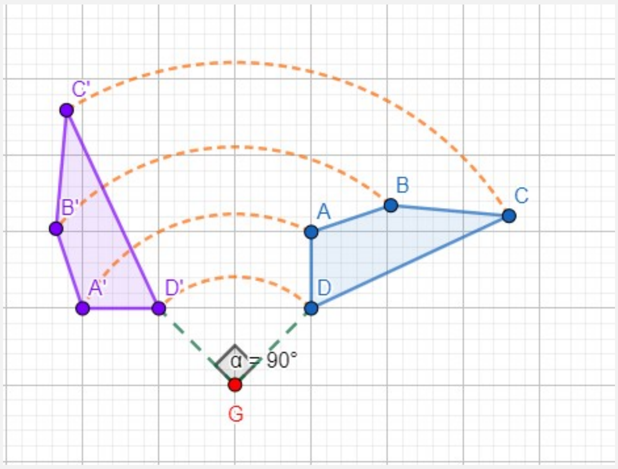


Giros

Consisten en girar todos los puntos del plano alrededor de un punto fijo (centro de giro) un cierto ángulo (ángulo de giro). Un giro queda determinado al dar el centro de giro G y la amplitud del ángulo orientado correspondiente. Se consideran giros positivos aquellos realizados en el sentido contrario a las agujas del reloj y negativos los realizados en el sentido de las agujas del reloj.

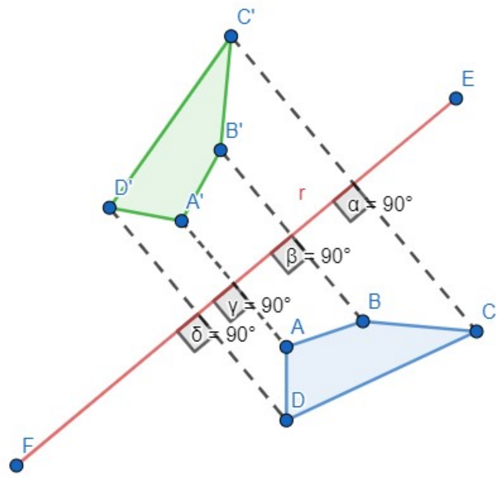
Actividad 2.6

Explica a un alumno cómo realizar el giro de una figura respecto de un punto. Ayúdate del siguiente ejemplo: giro de -90º del cuadrilátero ABCD.



Simetrías

La simetría axial o reflexión respecto de una recta r es el movimiento rígido que se produce hallando para cada punto P de la figura otro punto P′ de tal manera que la recta r es mediatriz del segmento PP′. Ésto quiere decir que se tienen que verificar 2 propiedades: que r es perpendicular a PP′ y r pasa por el punto medio del segmento PP′. En la siguiente figura puede encontrarse el esquema para calcular la simetría axial de un cuadrilátero.

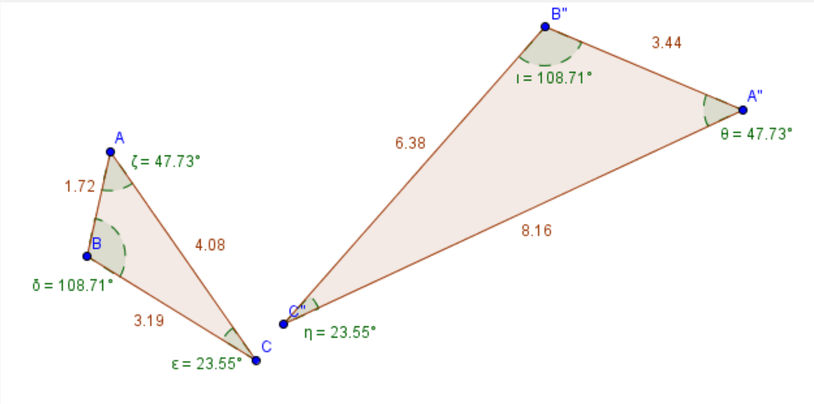


2.3.2 Semejanzas

Dos figuras son semejantes si los ángulos correspondientes son iguales y sus lados son proporcionales. Es decir, una semejanza entre dos figuras geométricas viene definida exclusivamente por la condición de que la distancia entre cualquier par de puntos de la primera figura A y B dividida entre la distancia de sus correspondientes puntos de la segunda figura A' y B' es constante. A este valor se llama razón de semejanza.

Actividad 2.7

¿Cuál es la razón de semejanza entre los siguientes triángulos?



2.3.3 Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje de las transformaciones geométricas

De acuerdo con Dickson, Brown, y Gibson (1991), en los últimos años, gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de las figuras geométricas desde una posición a otra. También hay otros movimientos que comportan, además, cambios de forma y de tamaño en las figuras (transformaciones no isométricas).

El estudio de las transformaciones se puede basar en acciones fáciles de realizar por los alumnos y puede servir para generar descubrimientos relativos a éstas mediante las predicciones e inferencias de los alumnos.

Esta comprensión por parte de los alumnos de primaria ha sido evaluada en distintas investigaciones como las de Thomas (1978) (citado en el trabajo de Dickson y cols. (1991)). Thomas propuso el siguiente test de conservación de la longitud de segmentos a un grupo de 30 niños, 10 de cada una de las edades 6, 9 y 12 años de la siguiente manera: se presentan dos varillas de la misma longitud (ver Figura 2.1).

Se pregunta al niño si una vez desplazada una de las varillas son de la misma longitud o si, al contrario, una es más larga que la otra. Los resultados de Thomas para esta experiencia indicaron que a la edad de 6 años, 8 de cada 10 niños no tienen sentido de conservación de la longitud ante la traslación, a la edad de 9 años son 7 de cada 10 y a la de 12 todos los niños comprendían la invariancia de los segmentos.

Esta misma autora propuso a los niños tareas relativas a la transformación de un triángulo al aplicarle traslaciones, giros y simetrías. Los niños tenían que comparar la longitud de un lado del triángulo antes y después de cada movimiento, diciendo si era «más corto», «más largo» o «igual» que antes. Casi todos los alumnos de Thomas consideraron

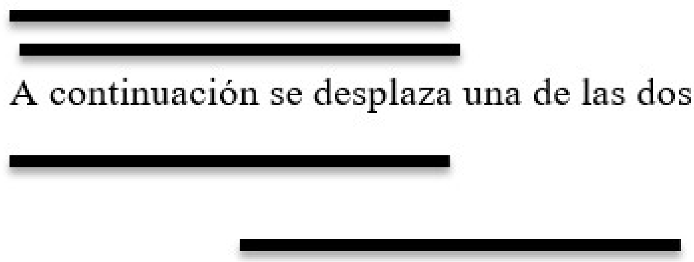


Figura 2.1: Ilustración del trabajo de Thomas (1978) para la conservación de la longitud.

que la longitud permanecía invariante en las rotaciones y en las simetrías, pero en el caso de la traslación, los niños con un sentido insuficiente de la conservación opinaron que las longitudes de los lados de la figura geométrica cambiaban.

Siguiendo con los tests de invarianza de las figuras geométricas cuando se les aplicaba una transformación, Thomas preparó una experiencia dirigida a descubrir si los niños comprendían que un punto particular del lado de un triángulo conservaría la misma posición sobre ese mismo lado al aplicar cierta transformación de la figura. Thomas utilizó dos cuadrados de plástico transparente en los cuales había dibujado un triángulo rectángulo.

Thomas le propuso la tarea a cada niño con los triángulos superpuestos y ejecutaba la transformación geométrica sobre la copia superior. Situaba una moneda en el triángulo inferior (el que no se había movido) y pedía a cada alumno que situara otra moneda en el triángulo superior (el que había sufrido la transformación) de manera que las dos monedas quedaran en el mismo lugar del triángulo. Prácticamente todos los alumnos de 12 años situaron el punto en la posición correcta, pero los de 6 y 9 años tuvieron importantes dificultades. Por ejemplo, en el caso del giro de 90º en sentido horario, el 60 % de los niños de 6 años y el 50 % de los de 9 años fallaban al colocar la moneda en el triángulo transformado. Para las preguntas sobre el efecto de la simetría los resultados se indican en la Figura 2.2[1].

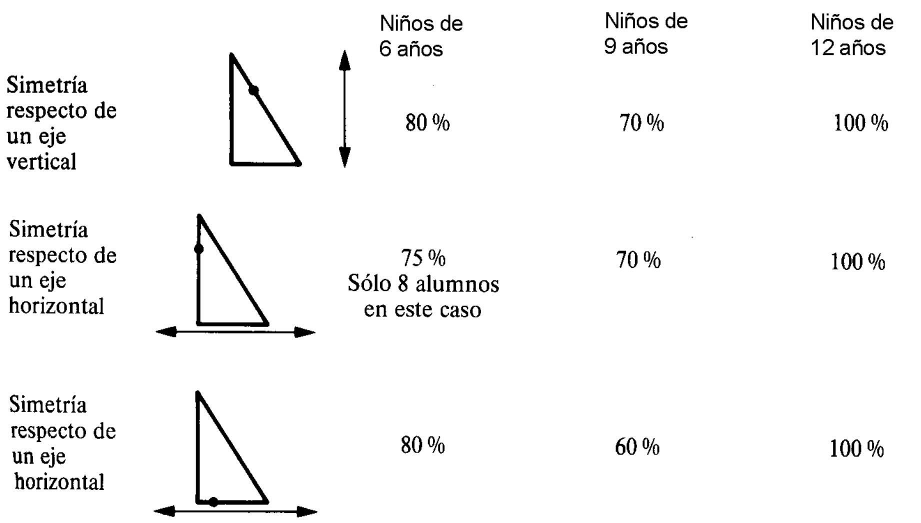


Figura 2.2: Test de Thomas (1978) sobre la conservación de la posición en un triángulo.

[1] Imagen extraída de Dickson y cols. (1991)

Otro investigador que ha estudiado el desarrollo de la comprensión de los movimientos por niños de edades entre ocho, nueve y diez años ha sido Kidder (1978) (la descripción de su trabajo puede encontrarse en Dickson y cols. (1991)). Kidder propuso a los niños el test clásico de Piaget de conservación de longitudes, proporcionándoles definiciones operativas de las traslaciones, simetrías y giros.

En las pruebas se utilizaron listones de unos 10 centímetros de longitud y flechas hechas con alambres para indicar los diversos movimientos. Cada movimiento se repetía varias veces y a continuación lo hacía el niño por sí solo (ver Figura 2.3) [2].

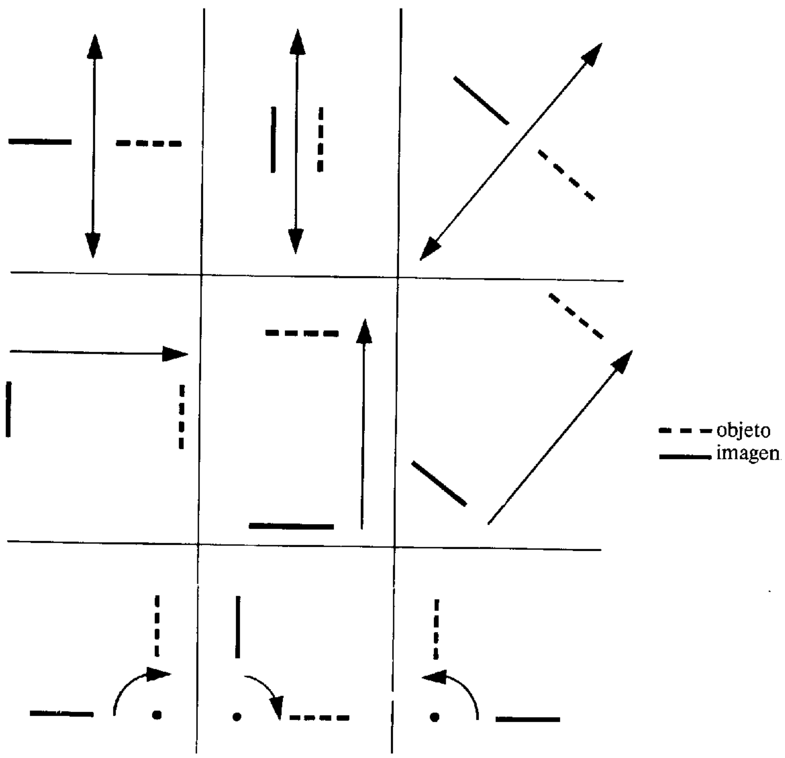


Figura 2.3: Test de Kidder (1978) sobre traslaciones, simetrías y giros.

Los niños que tuvieron éxito en la ejecución de estas transformaciones prosiguieron con la segunda fase del estudio de manera que se pudiera comprobar si eran capaces de reconocer la invarianza de la longitud del listón tras la aplicación de los movimientos. Para ello se utilizaba un listón objeto, un movimiento indicado (similar a los mostrados en la figura 2.3) y otros cinco listones, de los cuales solamente uno tenía la misma longitud que el listón objeto. Se le pedía a cada niño que eligiera uno de los listones para mostrar el movimiento indicado y se les permitía medir los listones si lo consideraban necesario.

Los resultados indicaron que solamente el 31 % de los niños reconocieron la conservación de longitud en el sentido clásico durante la primera etapa de la investigación; concretamente tuvieron éxito el 40 % de los niños de ocho años, el 55 % de los niños de 9 años y el 60 % de los de 10. Además, en la segunda etapa solamente el 23 % de los niños eligieron coherentemente el listón imagen de longitud correcta correspondiente a la traslación.

[2]Imagen extraída de Dickson y cols. (1991)

Todas estas investigaciones nos muestran que no es suficiente con que los alumnos adquieran los conceptos de conservación del tamaño de los objetos geométricos al aplicarles una transformación en el plano, sino que se deben trabajar cada una de las transformaciones por separado de manera que se adquiera un conocimiento más profundo del significado de cada una de ellas.

2.3.4 Situaciones y recursos didácticos para el aprendizaje de las transformaciones geométricas

Las actividades que se pueden proponer para investigar las distintas propiedades geométricas que se ponen en juego al realizar una transformación en el plano pueden requerir diversos niveles de desarrollo del pensamiento geométrico por parte de los alumnos. Gutiérrez y Jaime en su trabajo *Traslaciones, giros y simetrías en el plano* (1986) escribieron una monografía en la que, por medio de actividades, presentan las propiedades de los movimientos del plano para afianzar y profundizar en el conocimiento de los mismos. Las actividades fueron desarrolladas pensando en los alumnos de las Escuelas de Magisterio y parte de ellas abordan la teoría de los movimientos del plano y otra parte propone métodos o técnicas de realización de movimientos de manera que sean útiles para aplicar en las aulas de primaria. Basaremos algunas actividades de este apartado en ese trabajo.

Los alumnos que estén en el nivel 1 de van Hiele pueden ser capaces de trabajar con algunas actividades aunque puede que no apliquen las propiedades de los movimientos a clases completas de formas geométricas. Reconocerán que al hacer movimientos rígidos sobre figuras geométricas, éstas conservan su tamaño y su forma. Los alumnos del nivel 2 de van Hiele serán capaces de descubrir y utilizar experimentalmente, verificando casos concretos, las principales características de cada uno de los movimientos. Además, serán capaces de realizar sobre figuras concretas, a través de la manipulación o el dibujo, los movimientos requeridos en cada transformación. Además, los alumnos del nivel 2 serán capaces de emplear notación y vocabulario matemático asociado a cada una de las transformaciones.

Materiales para trabajar las transformaciones geométricas

Describimos en primer lugar los materiales más comunes que se utilizan para trabajar las transformaciones geométricas en el laboratorio de matemáticas.

⊳ La mira o reflex

La mira es un rectángulo semitransparente de metacrilato de color rojo, verde o azul (Figura 2.4) que se mantiene completamente vertical sobre el plano del papel mediante dos piezas laterales, que pueden ser del mismo material o de madera. Al colocar la mira sobre un eje de simetría de una figura se reflejará sobre el metacrilato, de manera visible, la otra mitad simétrica de la figura. Con estas características, la mira se convierte en un instrumento que, a la hora de trabajar la simetría, complementa a los espejos y nos permite hacer cosas que no podemos hacer con éstos.

La mira se puede usar como material para buscar el eje de simetría de las figuras bidimensionales o como ayuda para dibujar figuras simétricas cuando se sitúa en el eje de simetría (Figura 2.5).

En el ejemplo 2.1 encontramos una actividad en la que los alumnos deberán completar varias figuras suponiendo que son simétricas.

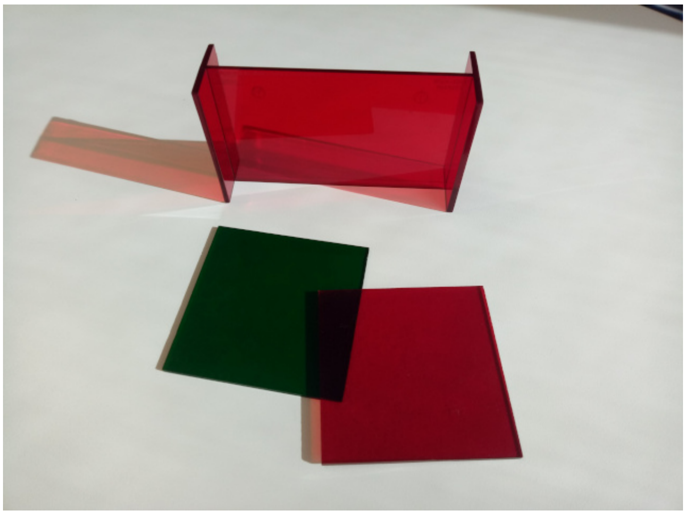


Figura 2.4: Ejemplos de miras de metacrilato.

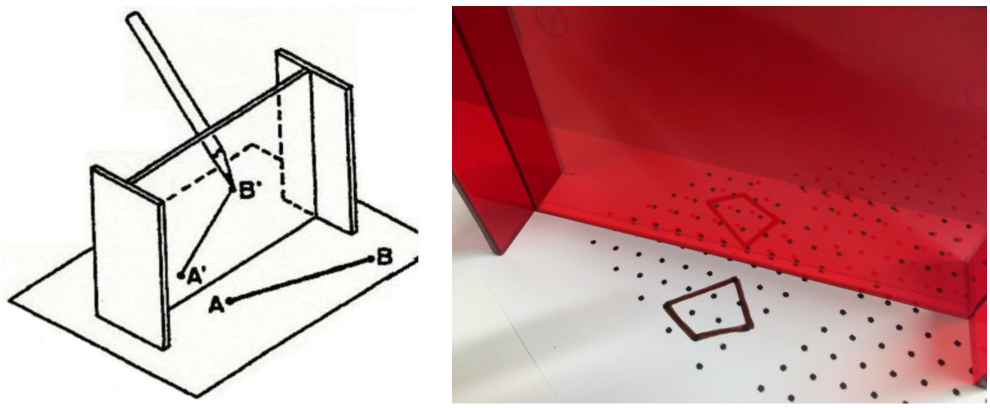
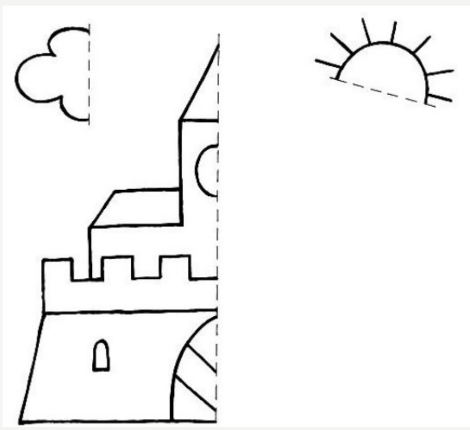


Figura 2.5: Ejemplos de uso de la mira para crear figuras simétricas.

Ejemplo 2.1

Dibuja las partes simétricas que faltan en este paisaje.



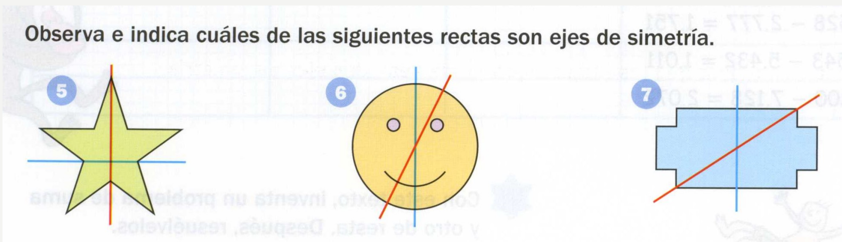
⊳ El espejo

El espejo se ha utilizado ampliamente en los primeros cursos de primaria para ayudar en la comprensión de la definición de eje de simetría en figuras planas como puede observarse en el ejemplo 2.2.

Ejemplo 2.2

En el ejemplo 2.3 extraído de *Matemáticas 3: Un paso más* (2005) encontramos un ejercicio en el que el espejo podría ayudar a que los niños comprobaran si, al colocar el espejo en el eje correspondiente, la figura resultante es igual o diferente de la figura original.

Ejemplo 2.3



Pasemos a continuación a describir y a analizar algunas actividades para trabajar las traslaciones, los giros, las simetrías axiales o especulares, las figuras simétricas, la simetría rotacional y la semejanza.

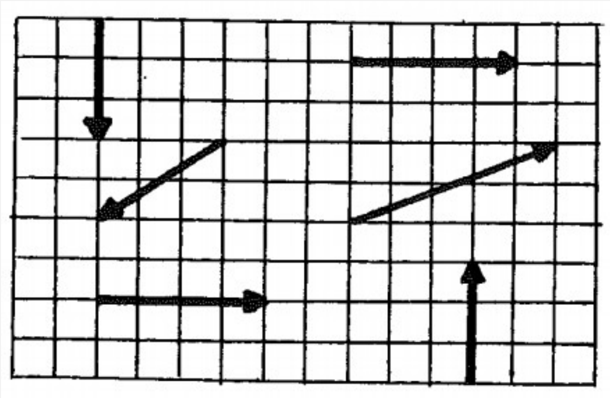
Actividades para trabajar las traslaciones

Para empezar a trabajar las traslaciones es conveniente que los alumnos dispongan de material manipulativo así como de papel cuadriculado para entender mejor el significado de *módulo* y *sentido* de un vector. Veámoslo en la Actividad 2.8.

Actividad 2.8

Analiza la siguiente actividad extraída de Gutiérrez y Jaime (1986).

Coge un rectángulo y pégalo en una hoja de papel cuadriculado. Aplícale cada una de las traslaciones cuyos vectores se ven en la figura.



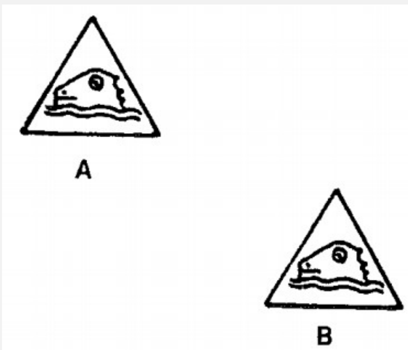
Diseña una sesión de clase en donde se trabaje esta actividad, la forma de trabajo de los alumnos y analiza los posibles errores que se puedan cometer.

Como veremos posteriormente en el Apartado 2.3.5, los errores que más se cometen en la realización de traslaciones son debidos a la mala interpretación del vector de traslación y su ubicación dentro del esquema que marca el movimiento. Veamos en la Actividad 2.9 un ejemplo de actividad que puede poner de relieve este error.

Actividad 2.9

Analiza la siguiente actividad extraída de Gutiérrez y Jaime (1986).

¿Puedes dibujar el vector que traslada la figura A hasta la figura B?



¿Crees que se podría aumentar o disminuir la dificultad del ejercicio si colocáramos las figuras A y B en otras posiciones?

Actividades para trabajar los giros

Para poder analizar los diferentes tipos de giros encontrados en el entorno, ya sean giros con o sin desplazamiento, una de las actividades que se puede proponer es la que encontramos en la Actividad 2.10.

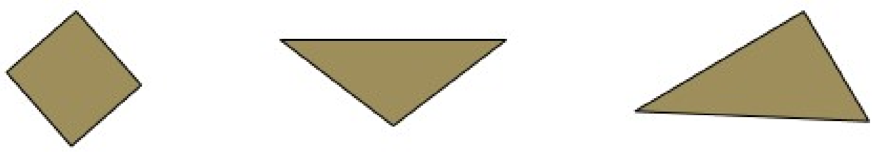
Actividad 2.10

Analiza la siguiente actividades

1. *Dibuja un punto en la base de un cilindro y trata de determinar su posición al girar verticalmente el cilindro un cuarto de vuelta.*
2. *Dibuja un punto en un cilindro e indicar qué figura dibuja el punto cuando rotamos el cilindro 360º respecto del centro de la base.*

Explica las diferencias entre los dos apartados y propón una sesión de clase en donde puedas trabajarlas. ¿Qué dificultades crees que encontrarán los alumnos al realizarlas?

A veces los niños no identifican ciertas figuras geométricas cuando se les aplica un giro. Por ejemplo, pueden no identificar un cuadrado (a), un triángulo (b) o un triángulo rectángulo (c) cuando están girados.



a) b) c)

Actividad 2.11

Diseña una actividad utilizando geoplanos o figuras geométricas de plástico de manera que tengan que aplicar giros sobre ellas.

Añade preguntas para el final de la clase para comprobar si los alumnos han entendido que la figura rotada mantiene las propiedades de la figura inicial.

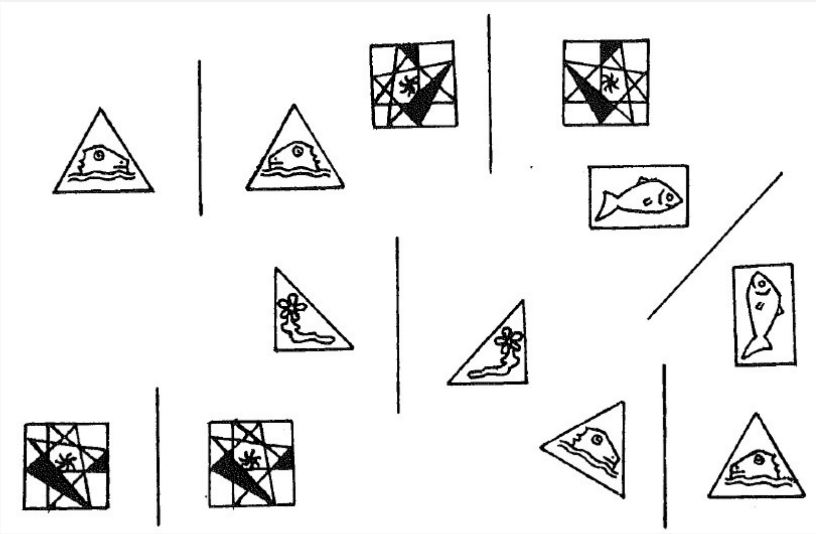
Actividades para trabajar la simetría axial o especular

Volviendo a las actividades propuestas por Gutiérrez y Jaime (1986), encontramos algunas destinadas a trabajar la imagen que proporciona un espejo al reflejar los objetos puestos delante de él. En este caso encontramos dos objetos que se corresponden punto por punto uno con el otro. En el caso de la Actividad 2.12 nos basaremos en una de sus actividades para que los alumnos distingan las simetrías de los demás movimientos rígidos.

Actividad 2.12

Analiza la siguiente actividad extraída de Gutiérrez y Jaime (1986).

Observa los movimientos representados en la figura siguiente. Indica cuáles corresponden a simetrías y cuáles no, explicando el motivo en cada caso.



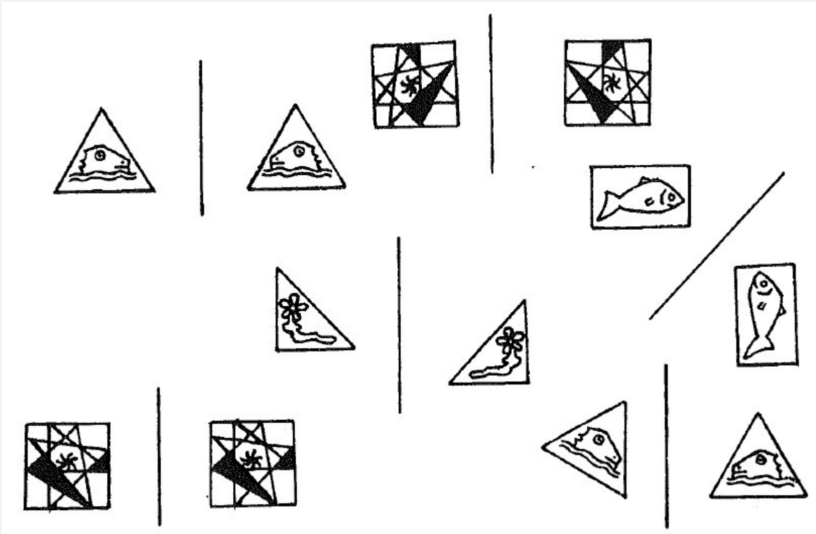
Piensa en los materiales que podrías utilizar para ayudar a los alumnos a realizar esta actividad y si sería mejor utilizar un espejo o una mira.

A parte de comprobar los movimientos, Gutiérrez y Jaime (1986) proponen actividades como la siguiente en la que los alumnos deberán realizar ellos mismos el movimiento de simetría.

Actividad 2.13

Analiza la siguiente actividad extraída de Gutiérrez y Jaime (1986).

> *En la figura siguiente vemos varios polígonos y rectas. Realiza la simetría de cada polígono respecto de su eje.*



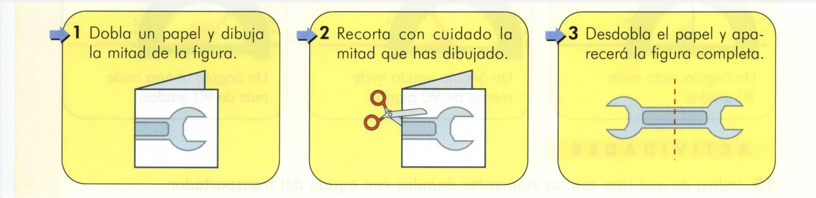
Piensa de nuevo en los materiales que podrías utilizar para ayudar a los alumnos a realizar esta actividad y si sería mejor utilizar un espejo o una mira. ¿Crees que esta actividad puede realizarse mediante el plegado de papel?

Actividades para trabajar las figuras y cuerpos simétricos

Es importante que los niños vean la simetría en los objetos que les rodean; es conveniente mostrar en clase dibujos o fotografías de objetos que tengan simetrías y que los niños dibujen o construyan formas simétricas.

Actividad 2.14

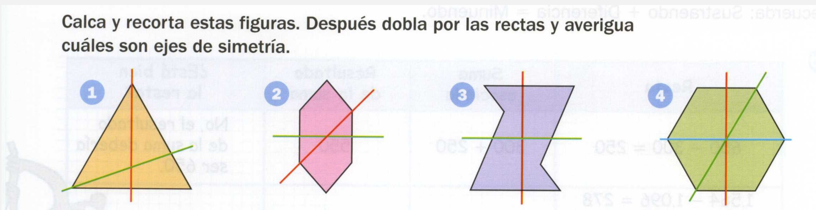
Diseña una actividad para los que alumnos trabajen la simetría como propiedad de las figuras doblando una hoja de papel sobre una línea dibujada previamente y haciendo diversos recortes por los bordes. Puedes tomar como ejemplo la actividad extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Trotamundos. La emoción de descubrir* (2005) que se muestra en la imagen siguiente.



Otra posible actividad es recortar la silueta de diferentes formas geométricas planas para, mediante dobleces, hallar el eje de simetría como las que se muestran en la Actividad 2.15.

Actividad 2.15

Inspírate en la imagen siguiente extraída de *Matemáticas 3: Un paso más* (2005) para diseñar una actividad en la que los alumnos tengan que hallar los ejes de simetría de diversas formas geométricas mediante dobleces.



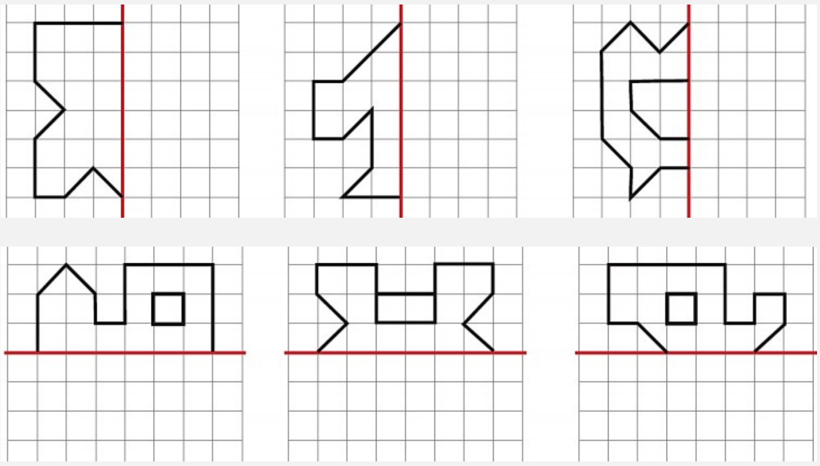
Plantea, además, una discusión en gran grupo para solucionar los posibles problemas que puedan tener los alumnos.

⊳ Simetría usando papel cuadriculado o geoplano

Un tipo de actividades que suele dar mucho juego y ayuda a la comprensión de la propiedad de simetría de las figuras planas son las actividades diseñadas con papel cuadriculado al igual que vimos con las traslaciones.

Actividad 2.16

Diseña una actividad para que los alumnos trabajen la simetría de las figuras planas utilizando papel cuadriculado. Puedes basarte en figuras como las que se muestran en las siguientes imágenes.



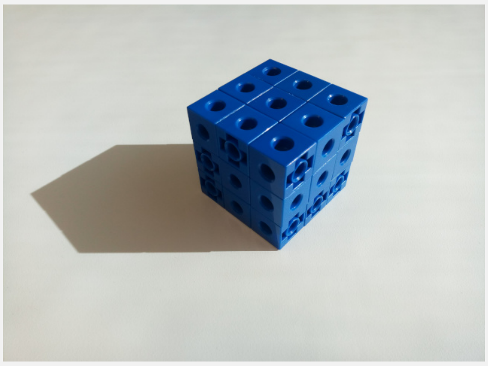
¿Crees que será necesario utilizar material manipulativo en este tipo de actividades?

⊳ Simetría de figuras tridimensionales

Usando los cubos encajables (multilink) se pueden hacer construcciones que tengan un plano de simetría. Este tipo de actividades requieren un nivel de abstracción más avanzado y pueden proponerse en los últimos cursos de primaria.

Actividad 2.17

¿Cuantos planos de simetría tiene un cubo?



Trata de construir sólidos que contengan más de un plano de simetría.

Actividades para trabajar la simetría rotacional

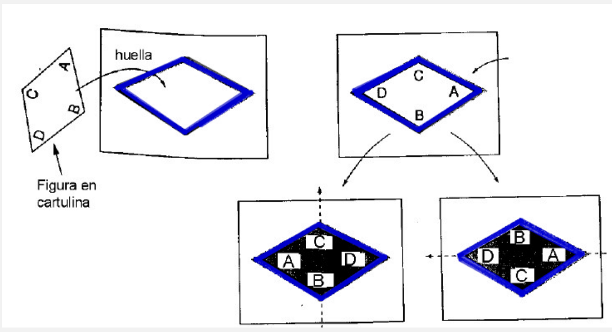
El alumno debe ser capaz de reconocer la simetría rotacional en la naturaleza y en algunas figuras geométricas. El orden de una simetría rotacional se define como *el número de veces que una figura se puede hacer coincidir consigo misma mediante giros sin voltearla*. Si una figura se ajusta a su huella de más de una manera sin que se levante del plano (sin voltearla) tiene simetría rotacional.

⋗ Movimientos sobre la huella

Actividad 2.18

Analiza la siguiente actividad extraída de Godino y Ruíz (2002).

> *Recortar en cartulina una forma poligonal, por ejemplo un rombo, como se muestra en la figura adjunta. Identificar los vértices con letras por ambas caras, de manera que se ponga la misma letra en cada vértice en las dos caras en que se puede mostrar. Sobre una hoja de papel trazar el contorno de la figura; obtenemos lo que podemos denominar la «huella» de la figura sobre la hoja. ¿De cuántas maneras diferentes se puede voltear la pieza de tal manera que tras el movimiento vuelva a coincidir con la huella?*



Actividades para trabajar la semejanza

Tanto en dos como en tres dimensiones dos figuras pueden tener la misma forma pero dimensiones diferentes. En el nivel 1 de razonamiento de van Hiele el concepto de «semejanza» es estrictamente visual y posiblemente no será preciso. En el nivel 2, los alumnos pueden comenzar a hacer medidas de ángulos, longitudes de lados, calcular áreas y volúmenes (de los sólidos) que sean semejantes tal y como vimos en la Figura 147 de la página 147 del Tema 3.

Una primera definición de figuras semejantes que se puede dar a los alumnos es que son figuras que «tienen el mismo aspecto» pero tamaños diferentes. Antes de proporcionar la definición de figuras semejantes podemos trabajar una actividad como la que se muestra en la actividad, extraída de Godino y Ruíz (2002).

Actividad 2.19

Dibujar o construir al menos tres figuras semejantes a una forma dada (rectángulos, triángulos o círculos o cualquier polígono; en tres dimensiones pueden ser prismas rectangulares o cilindros circulares). Después de hacer las figuras, los alumnos medirán al menos tres longitudes en cada figura.

Diseña un conjunto de preguntas que puedes hacerles a los alumnos de manera que se llegue entre todos a la definición de figuras o cuerpos semejantes y se calcule la razón de semejanza.

2.3.5 Conflictos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas

Conflictos en el aprendizaje de las traslaciones

Jaime y Gutiérrez (1996) en su trabajo afirman que las traslaciones presentan menos dificultades que los giros y las simetrías. Las dificultades que suelen surgir se refieren, por una parte a la comprensión del concepto de vector libre como vector asociado a una traslación y por otra parte, a la realización de traslaciones cuando la figura tiene forma poligonal (especialmente si es rectangular) y el vector de la traslación es paralelo a uno de sus lados. Es muy frecuente el error consistente en dibujar el vector empezando en un extremo del lado inicial y terminando en el otro extremo del lado imagen. Unos ejemplos de estos errores pueden verse en la Figura 2.6 extraída de Jaime y Gutiérrez (1996).

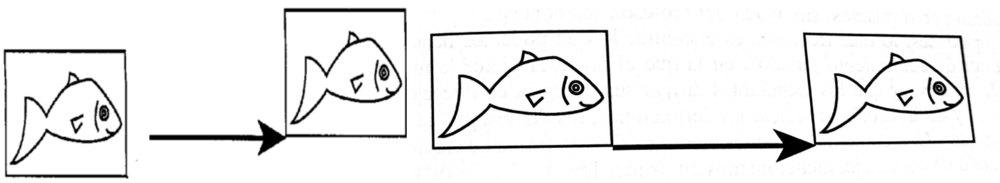


Figura 2.6: Errores típicos de los alumnos en realizar una traslación.

Conflictos en el aprendizaje de los giros

Jaime y Gutiérrez (1996) también tratan los errores cometidos cuando se realizan giros sobre una figura plana. Los autores afirman que para comprender y usar correctamente el concepto de rotación de una figura, es necesario que los alumnos apliquen bien las siguientes cuatro características de esta transformación geométrica: ángulo de giro, que debe ser el mismo entre todos los puntos y sus imágenes, sentido de giro, equidistancia al centro y congruencia de las figuras.

En la Figura 2.7 extraída de Jaime y Gutiérrez (1996) se muestran cuatro errores típicos al aplicar un giro de 90º a la figura A sobre el punto marcado en donde en el apartado (a) se produce un fallo en el ángulo de giro, en el apartado (b) se produce un error de falta de equidistancia al centro, en el apartado (c) se produce un error en la perpendicularidad entre el objeto y su imagen y en el apartado (d) se produce un error en congruencia de las figuras.

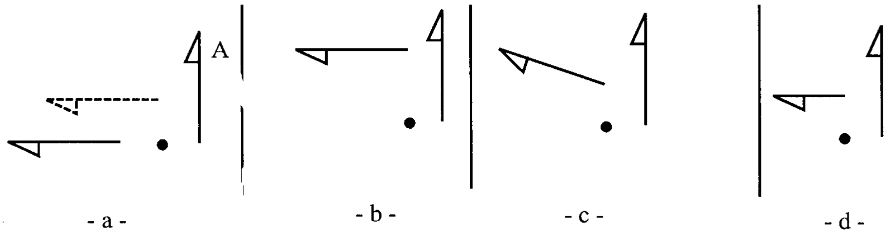


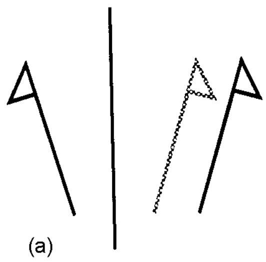
Figura 2.7: Errores al aplicar un giro de 90º a una figura sobre un punto exterior a la misma.

Conflictos en el aprendizaje de las simetrías

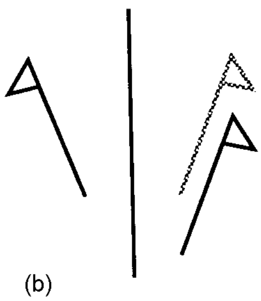
Jaime y Gutiérrez (1996) clasifican los errores de los alumnos sobre las simetrías en dos grupos. Veamos ejemplos con imágenes extraídas de Jaime y Gutiérrez (1996).

1. Errores cuyo origen está en el concepto de simetría, ya que surgen cuando los alumnos no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen:

   Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen, como se muestra en la figura (a), donde la imagen correcta aparece punteada.

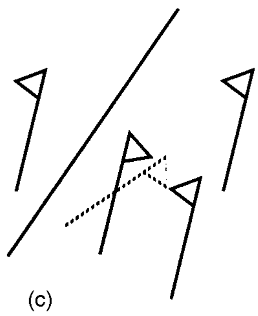
   Falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto y su imagen (b).

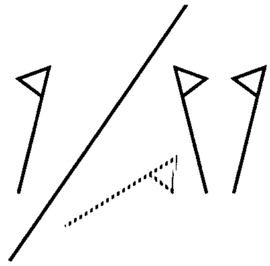
   Combinaciones de los dos errores anteriores. En todos los casos, los alumnos olvidan alguna de las dos características de las simetrías o ambas.

2. Errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría, que surgen cuando los alumnos utilizan concepciones erróneas de tipo visual:

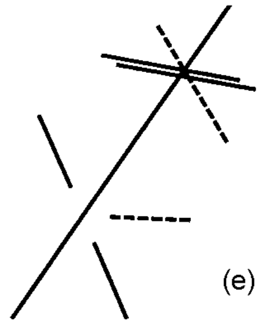
   Dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje (c).

Desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría esté inclinado (d).

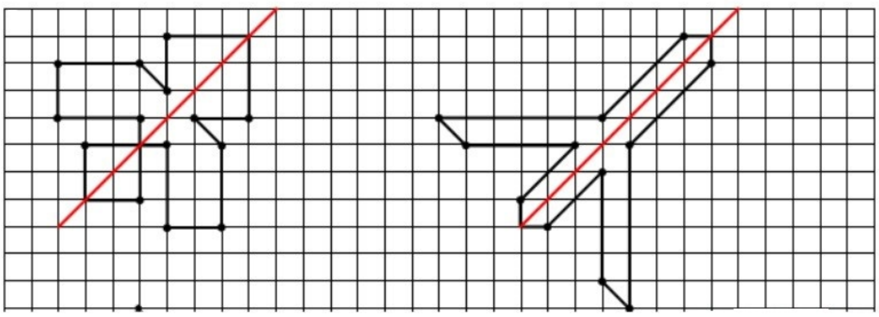

(d)

Combinaciones de los dos errores anteriores y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica (e).


(e)

Diversos estudios realizados han puesto de manifiesto que la construcción de la imagen de una figura mediante una simetría o realizar una simetría respecto a un eje resulta más difícil si el eje no es vertical. Un estudio presentado en el libro de Dickson y cols. (1991) muestra que alrededor del 80 % de los niños de 11 años dibujan la figura simétrica cuando el eje es vertical. Sin embargo, sólo el 14 % tuvieron éxito cuando el eje era oblicuo.

Para ayudar a superar estas dificultades, se puede proponer a los alumnos trabajar con tramas rectangulares y con la ayuda de la mira para dibujar la imagen simétrica de una figura dada como se ha mencionado anteriormente.



Conflictos en el aprendizaje de las semejanzas

En Gualdrón y Gutiérrez (2006) encontramos un trabajo con el objetivo de estudiar las ideas previas, en cuanto a conocimiento y razonamiento, que poseen dichos alumnos sobre la semejanza de figuras planas. Algunos de los conflictos que tienen los alumnos y que aparecen en dicho trabajo fueron que con frecuencia los alumnos no reconocen la semejanza cuando el valor de los lados no son medidas enteras, que los alumnos a menudo utilizan una relación de tipo aditivo para la ampliación en lugar de multiplicativo y que a veces no se guarda una razón constante entre los lados de una figura y su imagen. Además, cuando la razón de semejanza no es un número natural se suelen producir más errores.

Con el diseño de una secuencia de actividades adecuada, el uso de estrategias incorrectas por parte de los alumnos se redujo casi en su totalidad, según afirman los autores.

2.3.6 Laboratorio de herramientas TIC para el aprendizaje de las transformaciones en el plano

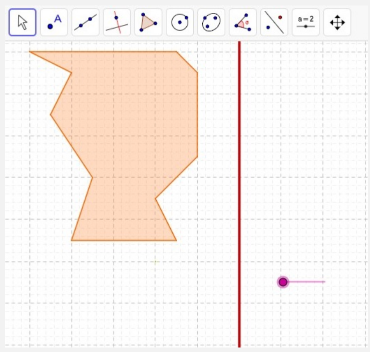
En la primera actividad se pretende diseñar una actividad teniendo como base unos micro-programas interactivos ya diseñados en Geogebra para posteriormente, pedirles que los modifiquen para que incluyan los ejes de simetría oblicuos y así poder diseñar tareas con este tipo de simetrías axiales.

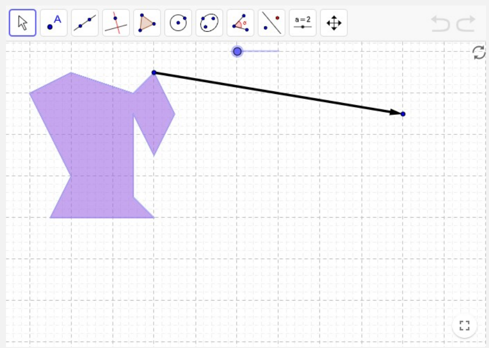
Actividad 2.20

Contenido: Traslaciones y simetrías con Geogebra

Tareas

En Simetrías y traslaciones podrás encontrar unos micro-programas interactivos de Geogebra en los cuales se pide que se dibuje el resultado de varias traslaciones y simetrías.





1. Diseña una actividad para trabajar en una clase de primaria con estos micro-programas interactivos.
2. Modifica el micro-programa interactivo de las simetrías para trabajar con ejes oblicuos y diseña una actividad con él.

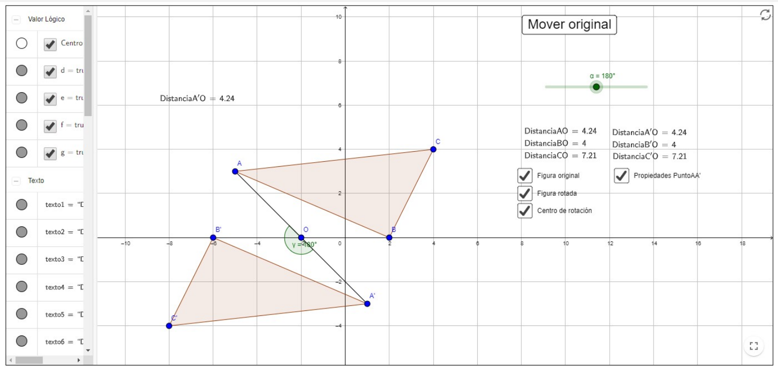
La siguiente actividad va dirigida a preparar, utilizando un micro-programa interactivo ya construido con Geogebra, una actividad para trabajar las rotaciones de un triángulo en el plano. Las distinciones más importantes que se deberán hacer será cuando el centro de giro varíe de dentro a fuera de la figura y con distintos ángulos (negativos, positivos y el caso particular de 180º) ya que suelen ser situaciones que producen errores y conflictos en el aprendizaje de los alumnos de primaria.

Actividad 2.21

Contenido: Rotaciones con geogebra

Tareas

En Transformación isométrica: Rotación podrás encontrar un micro-programa interactivo de Geogebra en el cual se puede ver el resultado de aplicar una rotación a un triángulo respecto a un punto. Tanto el centro de giro como el ángulo pueden variarse.



Diseña una actividad para trabajar en una clase de primaria con este micro-programa interactivo de manera que se distingan los casos en los que el punto de giro esté en algunas ocasiones fuera del triángulo y en otras dentro del triángulo. Considera también ángulos positivos, negativos y el caso particular del giro de 180º.

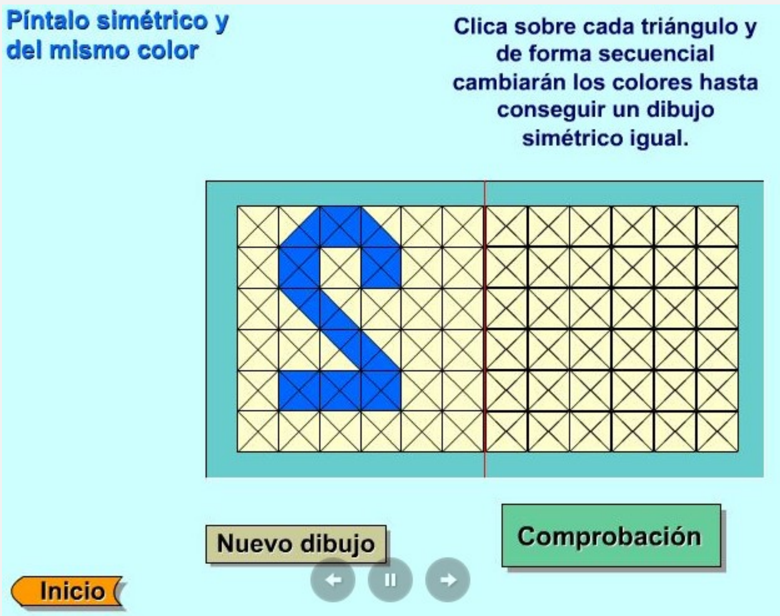
En los primeros cursos de primaria, tal y como hemos visto en las secciones anteriores, es conveniente que los alumnos practiquen las isometrías ayudándose de papel cuadriculado de manera que se produzcan los menos errores posibles. La siguiente actividad está pensada reflexionar sobre los tipos de dificultades que pueden encontrar los alumnos a la hora de hacer esta actividad mediante un recurso interactivo sin tener la ayuda de material manipulativo como puede ser el espejo o la mira.

Actividad 2.22

Contenido: Dibujar figuras simétricas utilizando una trama triangular

Tareas

En Dibujar figuras – Simetrías encontrarás un micro-programa interactivo para trabajar las simetrías axiales con eje vertical sobre una trama triangular.



Diseña una actividad para trabajar en los primeros cursos de primaria de manera que los niños sean capaces de visualizar la figura simétrica sin ayuda de miras reflex o espejos. Piensa en las dificultades que pueden tener los niños al realizar la actividad sin ayuda de material manipulativo.

2.3.7 Análisis de libros de texto sobre tareas de transformaciones en el plano en primaria

Para el análisis de actividades de transformaciones en el plano de los libros de texto nos centraremos en analizar los conceptos y procedimientos que se ponen en juego en cada actividad. Las traslaciones y los giros se encuentran escasamente en los libros de texto y su tratamiento suele reducirse a ejercicios muy simples. Además, analizaremos los contenidos previos que deberían tener los alumnos, si serán capaces de entender el enunciado de la actividad a resolver y la posible necesidad de utilizar material manipulativo.

Actividad 2.23

Contenido: Análisis de ejercicios y propuestas de transformaciones geométricas en los libros de texto de primaria.

Tareas
Busca actividades de transformaciones en el plano que se encuentren en los libros de texto de primaria. Para cada una ellas:

1. Resuélvela.
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
4. ¿Se te ocurre cómo trabajarlos con material manipulativo?
5. Diseña una actividad alternativa para adaptar la actividad del libro de texto si lo consideras necesario.

2.4 Orientación espacial

Para Piaget, el pensamiento geométrico de los niños en edades de hasta 7-8 años es un pensamiento que puede catalogarse como topológico, atendiendo a las categorías conceptuales o preconceptuales que son capaces de usar, tales como las de cierre, interioridad, separación, etc. Esta organización del espacio por parte de los niños más pequeños se organiza en torno al *yo* y a la orientación del *yo* en ese espacio que progresivamente se va organizando.

2.4.1 Desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje de la orientación espacial

Según Godino y Ruíz (2002), las primeras nociones de posición relativa que aprenden los niños pequeños son las de encima, debajo, detrás, delante y entre. Como ya hemos visto cuando hemos tratado con el movimiento de traslación en el plano, los alumnos pueden usar cuadrículas para localizar objetos y medir la distancia entre puntos según direcciones horizontales y verticales. Más tarde, en los niveles superiores de primaria y en secundaria, el sistema de coordenadas puede ser útil para explorar y descubrir propiedades de las figuras, así como para representarlas y encontrar distancias entre puntos del plano usando escalas en mapas.

Veamos a continuación la importancia de los sistemas de referencia a la hora de realizar movimientos en el espacio.

El desarrollo de sistemas de referencia

Para poder realizar los movimientos en el espacio necesitamos puntos de referencia respecto a los cuales se pueda localizar la dirección de este movimiento y la posición respecto a la que nos movemos. Según Godino y Ruíz (2002), la esencia de un sistema de referencia es la relación de las partes móviles con algún aspecto invariable y estacionario del espacio; por ejemplo, una superficie horizontal, los ejes de una gráfica o la noción de dirección norte.

Según Piaget e Inhelder (1948), el desarrollo de sistemas de referencia se funda en la capacidad natural de utilizar un marco de referencia natural, el correspondiente a la horizontal y la vertical. Según Greenes (referenciado por Godino y Ruíz (2002)), las relaciones espaciales en el eje vertical resultan de mayor facilidad y se desarrollan primero que las del horizontal porque «la relativa facilidad del movimiento del propio cuerpo sobre un plano horizontal confunde la orientación» (Godino y Ruíz, 2002).

Una de las cosas que se debe tener en cuenta en el proceso de adquisición del dominio de las relaciones con el espacio es la dimensión física en la que se realizan los movimientos. Las investigaciones muestran que el niño va estructurando sectores más amplios del espacio a medida que incrementa la magnitud de sus propios desplazamientos.

Nociones de situación

Tal y como podemos encontrar en el trabajo de Recio y Rivaya (1991), las nociones de situación incluyen las nociones de orientación, proximidad, interioridad y direccionalidad.

Estas nociones están expresadas por los vocablos *delante-detrás, arriba-abajo y derecha-izquierda* para el caso de la orientación, *cerca-lejos* para el caso de la proximidad, *dentro-fuera, abierto-cerrado* para la interioridad y *hacia, desde, hasta* para la direccionalidad.

En general, estas nociones son muy primarias y tienen mucha significación afectiva para los niños. Algunas de ellas están relacionadas con la marcha (delante-detrás, hacía, hasta, desde), otras con la posibilidad de acercar o no a objetos (cerca, lejos), otras con la posibilidad de esconderse o de proteger algo (dentro, fuera, abierto, cerrado). Sin embargo otras como izquierda-derecha no tienen referencia corporal precisa (por la simetría del cuerpo), esto la hace más compleja.

El proceso de construcción de estas nociones sigue un proceso de descentración del «yo» tal y como puede verse en la Figura 2.2.

Etapa	Nivel de orientación
1	Organización del yo corporal, construcción del esquema corporal propio (se percibe, por ejemplo, qué partes del cuerpo se tienen delante, detrás, arriba, abajo… al tiempo que se construye un esquema corporal propio -fundamental para la afirmación de la identidad personal-)
2	Etapa de referencia de los objetos exteriores respecto al yo (se interioriza que algunos objetos están detrás, delante, arriba… respecto al propio cuerpo)
3	Se descubre que los otros seres también tienen su propio sistema de referencia (también tienen un delante, detrás,… que no tienen por qué coincidir con el propio) respecto al cual también me puedo situar
4	Se aprende a considerar las orientaciones relativas de los demás y, por extensión, de los objetos entre sí

Tabla 2.2: Etapas del proceso de construcción de las nociones de situación.

Por tanto las nociones de situación parecen, inicialmente, muy simples, pero la consideración de asociaciones entre ellas pueden añadir complejidad y significación para el desarrollo de un pensamiento geométrico. Así, los juegos con las nociones de proximidad pueden corresponder a situaciones elementales como las de situarse cerca o lejos de algo, pero se pueden complicar relacionándolas con otras nociones –moverse cerca de un aro, pero fuera de él– o introduciendo matices –moverse fuera de los aros y más cerca del rojo que del azul. Estos matices conducen a la idea de distancia –ponerse a igual distancia del aro rojo que del aro azul. Los matices en la direccional introducen el orden lineal –ir desde la puerta a la estantería pero pasando por el perchero. La profundización en estas nociones de interioridad dará lugar a nociones geométricas más complejas como figura, cuerpo, región, etc. Por ejemplo, jugando con la igualdad de distancias entre dos puntos puede surgir la noción de mediatriz. Jugando con la igualdad entre distancias a dos rectas secantes, surgirá la noción de bisectriz. Con la igualdad de distancias a un punto, surge la noción de circunferencia.

Observamos por tanto que las nociones de situación, aparentemente simples, pueden ser profundizadas hasta niveles de cierta potencia geométrica por lo que se les debe prestar la atención pedagógica que merecen.

2.4.2 Situaciones y recursos didácticos para el aprendizaje de la orientación espacial

Presentamos en este apartado diversas tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial.

Según Berthelot y Salin (1992), existen tres grandes categorías de acciones que permiten que un sujeto tenga un control de sus relaciones con el espacio: las acciones que permiten reconocer, describir y transformar objetos, las acciones que permiten desplazar, encontrar y comunicar la posición de objetos y las acciones que permiten reconocer, describir, construir o transformar un espacio.

Basándose en esta categorización de acciones y centrándose en el contexto tridimensional, Gonzato, Fernández, y Díaz (2011) diferencian tres grandes familias de actividades, según el tópico específico tratado:

1. Orientación estática del sujeto y de los objetos (Tipo 1)

2. Interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales (Tipo 2)

3. Orientación del sujeto en espacios reales (Tipo 3)

La primera familia es una ampliación de la categoría de acciones de Berthelot y Salin (1992) «desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos» donde se incluyen las tareas que tratan el problema de la orientación del cuerpo del sujeto, del sujeto con relación a otros objetos y la eventual orientación de objetos (orientaciones que involucran el conocimiento del esquema corporal y la posible proyección de este esquema en el objeto).

La segunda familia de actividades está relacionada con la categoría de acciones, identificada por Berthelot y Salin como «reconocer, describir, fabricar o transformar objetos», en las cuales se incluyen también las tareas de representación (bi o tridimensional) de objetos tridimensionales (materiales o representados en el plano).

En la tercera familia incluimos las actividades de reconocimiento, descripción, construcción, transformación, interpretación y representación de espacios de vida (espacio reales) o de desplazamientos.

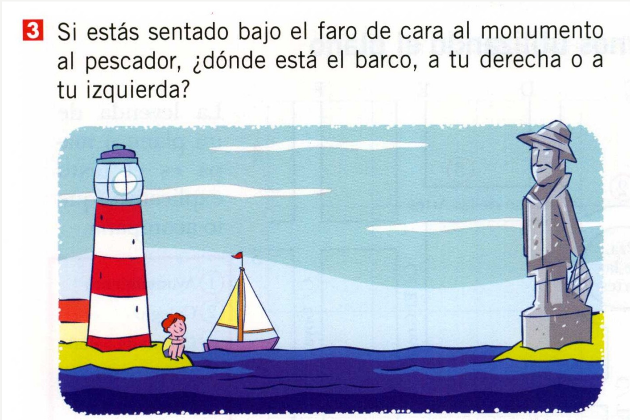
Una importante diferencia entre las tareas de la familia 2 y 3 es que las actividades de «interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales» requieren que el sujeto cambie su punto de vista de manera «discreta», es decir, se requiere que el sujeto se imagine o se ponga en una determinada posición con respecto a una composición de objetos, sin dar importancia al movimiento que tiene que hacer para cambiar su posición, sino solo al punto de vista final. Mientras que en las actividades de «orientación del sujeto en espacio reales» el punto de vista del sujeto cambia de manera continua a lo largo de su desplazamiento, es decir, su visión del espacio está vinculada a un movimiento continuo. Otra diferencia importante es el tamaño del espacio. Si en la familia 2 se trabaja con objetos aislados o composiciones de objetos (la composición es considerada como un todo) y la atención no se fija en el espacio donde están, sino sobre su estructura y su composición, en la familia 3 se consideran espacios más grandes, que puedan ser recorridos (físicamente o mentalmente) por el sujeto.

Tipo 1: Tareas de orientación estática del sujeto y de los objetos

Veamos algunos ejemplos de actividades de orientación estática del sujeto y de los objetos.

Ejemplo 2.4

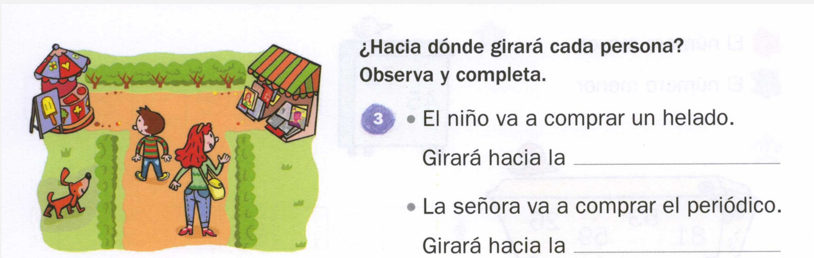
Actividad extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 191)

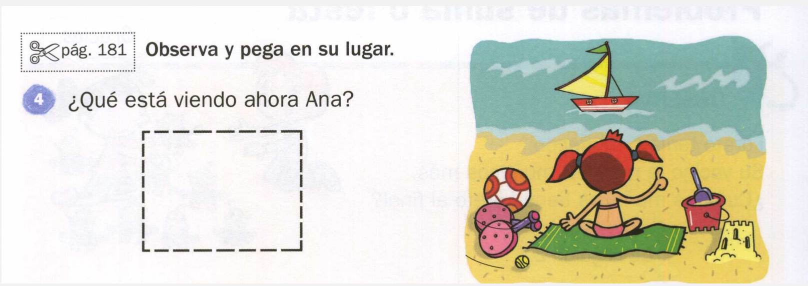


En el ejemplo 2.4, el niño tiene que imaginarse el sistema de referencia que supone el personaje que se encuentra en la ilustración de la actividad. De esta manera tiene que ser consciente de que otros sujetos tienen sus propios sistemas de referencia y por tanto, debe estar en la Etapa 2 de la clasificación que encontramos en la Tabla 2.2.

Actividad 2.24

Analiza las siguientes actividades extraídas de *Matemáticas 1: Un paso más* (2004, p. 128) y *Matemáticas 1: Un paso más* (2004, p. 129) respectivamente.





¿En qué etapa de la Tabla 2.2 tiene que encontrase el alumno para poder realizar las dos actividades?

En las situaciones anteriores se han evitado poner tareas de descripción de posiciones relativas de objetos que no tienen, por su estructura o su uso, una determinada y clara orientación (por ejemplo, en un dibujo, no tiene sentido pedir que se pinten los objetos que están a la derecha de una botella). Así podremos evitar los conflictos de referencias que pueden aparecer según que el objeto sea visto como tal en el espacio o bien considerado a partir de su estructura posiblemente ambigua.

Tipo 2: Tareas de interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales

En esta familia de tareas incluimos las actividades que requieren reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales (perspectivas o vistas), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones planas, etc. Observamos que en estas tareas se construyen técnicas para representar un objeto o un espacio y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.

—∘ *¿Cómo representar un objeto 3D en el papel?*

Existen diferentes formas de representar en el plano la perspectiva de un objeto 3D, entre ellas, las perspectivas caballera, isométrica y cónica.

La perspectiva caballera (ver Figura 2.8) es un sistema de representación que utiliza la proyección paralela oblicua, en el que las dimensiones del plano proyectante frontal, como las de los elementos paralelos a él, están en verdadera magnitud.

Los ejes X y Z forman un ángulo de 90º y el eje Y suele tener 45º (o 135º) respecto a ambos. Se adoptan, por convención, ángulos iguales o múltiplos de 30º y 45º, dejando de lado 90º, 180º, 270º y 360º por razones obvias.

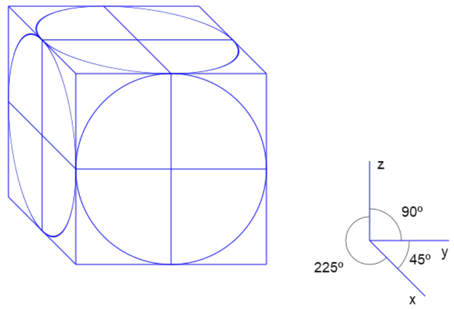


Figura 2.8: Perspectiva caballera.

La proyección isométrica constituye en una representación visual de un objeto tridimensional que se reduce en dos dimensiones, en la que los tres ejes ortogonales principales, al proyectarse, forman ángulos de 120º (ver Figura 2.9) y las dimensiones paralelas a dichos ejes se miden en una misma escala.

El término isométrico proviene del idioma griego: «igual al tiempo» y al castellano «igual medida» ya que la escala de medición es la misma en los tres ejes principales (x, y, z).

La isometría es una de las formas de proyección utilizadas en dibujo técnico que tiene la ventaja de permitir la representación a escala y la desventaja de no reflejar la disminución aparente de tamaño –proporcional a la distancia– que percibe el ojo humano.

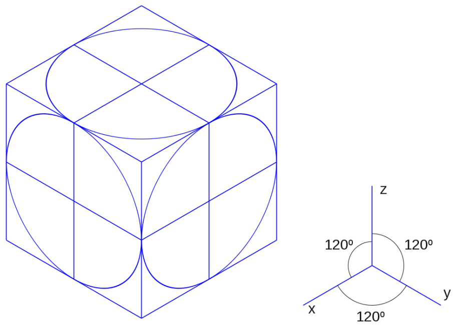


Figura 2.9: Perspectiva isométrica.

La perspectiva cónica es un sistema de representación gráfico basado en la proyección de un cuerpo tridimensional sobre un plano, mediante rectas proyectantes que pasan por un punto; lugar desde el cual se supone que mira el observador. El resultado final es una representación en el plano de la visión realista obtenida cuando el ojo está en dicho punto, lugar desde el cual aumenta la sensación de estar dentro de la imagen representada.

Filippo Brunelleschi (1377–1446) fue el primero que formuló las leyes de la perspectiva cónica, mostrando en sus dibujos las construcciones en planta y alzado, indicando las líneas que se dirigen al punto de fuga (ver Figura 2.10).

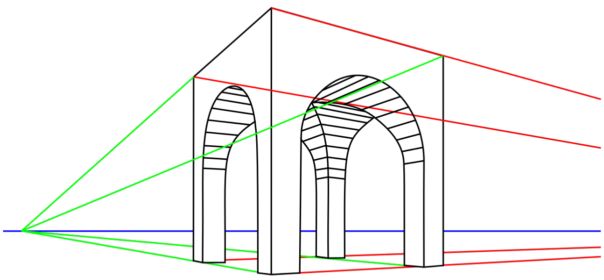


Figura 2.10: Perspectiva cónica.

También se utilizan las vistas o proyecciones ortogonales. Una proyección ortogonal es aquella que se crea a partir del trazado de la totalidad de las rectas proyectantes perpendiculares a un cierto plano. De este modo, existe un vínculo entre los puntos de aquello que se proyecta con los puntos proyectados (ver Figura 2.11).

Para facilitar el dibujo de la perspectiva isométrica (también llamada en ocasiones proyección isométrica), se puede utilizar el papel isométrico (Figura 2.12).

En cambio, para las vistas o proyecciones ortogonales podemos usar el papel cuadriculado tal y como se puede observar en la Figura 2.13.

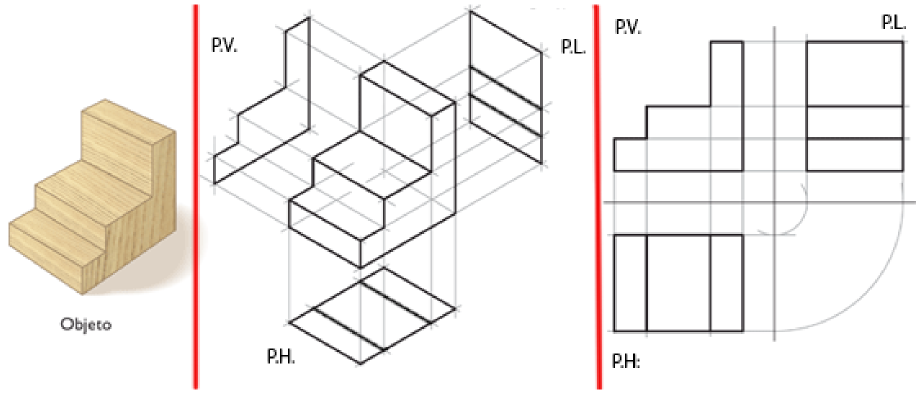


Figura 2.11: Vistas o proyecciones ortogonales.

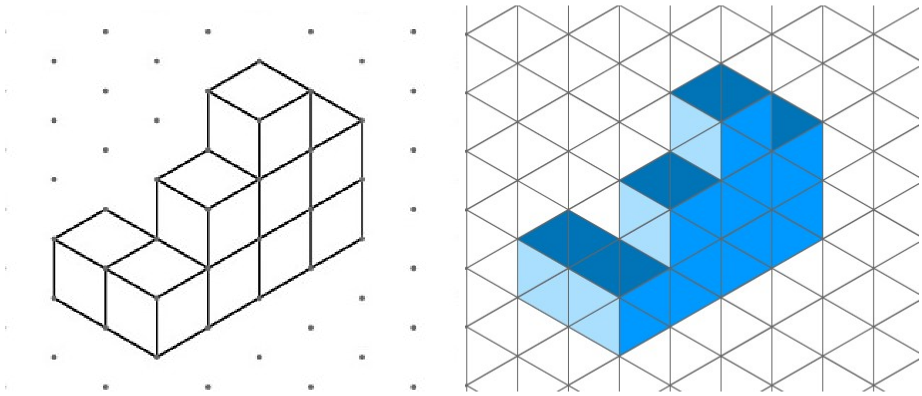


Figura 2.12: Vistas isométricas con papel isométrico.

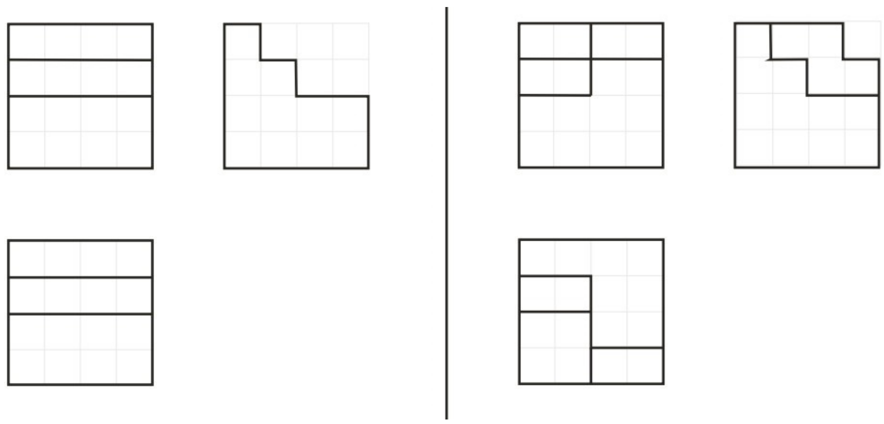


Figura 2.13: Vistas ortogonales con papel cuadriculado.

⊳ Materiales para facilitar la representación de perspectivas de objetos

Los *Policubos, cubos encajables o cubos multilink* (Figura 2.14) son unos pequeños cubos que se enganchan unos con otros. Son un material muy versátil que permite trabajar muchas áreas distintas de matemáticas: geometría, lógica, aritmética, sistema binario, etc. En el Tema 3 *Magnitudes y medida de magnitudes* veremos algunos ejemplos de cálculo de volúmenes utilizando el policubo como unidad de volumen.

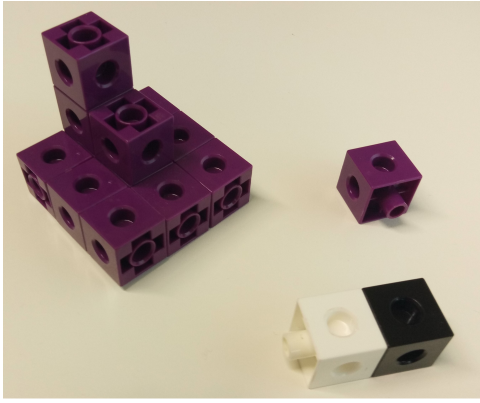


Figura 2.14: Figuras formadas con policubos.

En las actividades de cambio de representación de figuras tridimensionales son muy útiles, ya que proporcionan la posibilidad de construir el modelo físico en figuras como las mostradas en la Figura 2.12.

⩾ Clasificación de tareas de interpretación de perspectivas de objetos

En el trabajo de Gonzato y cols. (2011) se presenta una clasificación de este tipo de tareas en base a 3 parámetros: el estímulo inicial presentado, la acción principal requerida para resolver la tarea y el tipo de repuesta solicitada.

El estímulo inicial se refiere a la presencia o no, en la descripción de la tarea, del objeto físico o de una de sus representaciones.

Las acciones principales requeridas para resolver las tareas que se plantean son:

- Cambiar el tipo de representación (plana o tridimensional): representar un objeto físico con una representación plana, construir un objeto tridimensional a partir de su representación plana o convertir representaciones planas de tipos diferentes (perspectiva/proyección isométrica/vistas/vistas codificadas/ fotografías). En este caso, el cambio de representación puede implicar también una rotación del objeto, un cambio de punto de vista.

- Rotar: rotar el objeto o partes del objeto o de manera equivalente cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). En este caso no hay cambio de tipo de representación plana.

- Plegar y desplegar: plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado) o, viceversa, desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos.

- Componer y descomponer en partes: dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes.

- Contar elementos: dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).

Estas acciones pueden aparecer de forma explícita o implícita en el enunciado de la tarea. En cuanto al tipo de respuesta solicitada diferencian entre:

- Construcción: si se requiere la construcción del objeto tridimensional.

- Dibujo: si se requiere una representación plana del objeto tridimensional.
- Identificación: si se requiere identificar la repuesta correcta entre más opciones.
- Verbal: si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguno de los anteriores tipos de repuestas).

Observamos que Gorgorió (1996), centrándose en actividades de rotación (tipo de acción), clasificó las tareas en dos categorías: tareas de «construcción», si la respuesta requiere la construcción del objeto o su dibujo y tareas «de interpretación», que requieren que el alumno reaccione ante una acción geométrica ya cumplida. Con respecto a nuestra clasificación del tipo de respuesta, separamos las tareas de «construcción» de Gorgorió en construcción del objeto físico y dibujo como representación plana del objeto tridimensional, mientras que las tareas «de interpretación» de la autora corresponden al tipo de respuesta que nosotros llamamos de identificación.

<table>
<tr><th colspan="2">Estimulo inicial</th><th>Acción (ejecutar/imaginar)</th><th>Tipo de respuesta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Presencia del objeto físico</td><td>Objeto (y/o sujeto) móvil</td><td rowspan="4">· Convertir entre representaciones (plana o 3D)
· Rotar
· Plegar o desplegar
· Composición y descomposición en partes
· Conteo de partes</td><td rowspan="4">· Construcción
· Dibujo
· Identificación
· Verbal
· Otras</td></tr>
<tr><td>Objeto (y sujeto) fijo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ausencia del objeto físico</td><td>Objeto observado previamente</td></tr>
<tr><td>Objeto presentado en el plano</td></tr>
</table>

Tabla 2.3: Clasificación de las tareas de interpretación de objetos tridimensionales.

Podríamos también considerar el tipo de objeto: geométricos, multicubos, cotidiano, el tipo de representación plana utilizado (perspectiva, por proyecciones ortogonales codificadas, etc.) y el tamaño del espacio: micro (objeto solo), meso (composición de objetos). Observamos que cuando se trabaja con un objeto fijo, ausente o representado en dos dimensiones, sin posibilidad de manipularlo, las acciones requeridas serían «mentales», como, por ejemplo, imaginar la rotación de un objeto o cambiar el punto de vista. Además hacemos constatar que una tarea puede involucrar más acciones y si la respuesta es de dibujo puede necesitar de diferentes técnicas (dibujo en perspectiva caballera, en proyección, etc.).

El interés de distinguir los estímulos, las acciones y el tipo de respuestas está en poder analizar y buscar variaciones de tareas dadas.

A continuación presentamos un ejemplo de actividad para cada una de las acciones.

⋗ Tarea que implica convertir representaciones

Gutiérrez (1996) distingue tres tipos de actividades que pueden realizarse usando los multicubos para representar los módulos físicos y distintas representaciones planas:

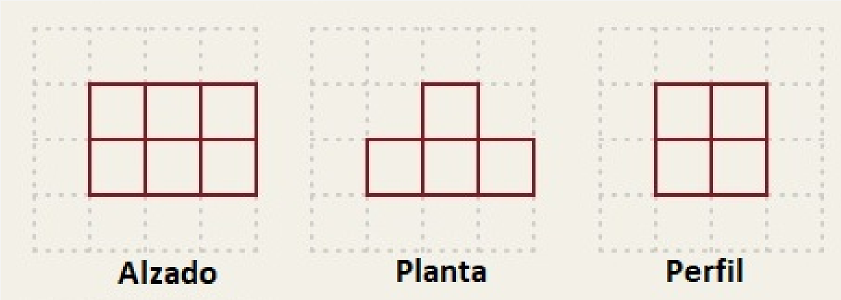
- A partir de una representación plana del módulo, el alumno tiene que construir el respectivo módulo físico.
- A partir del módulo (físico o presentado en perspectiva en el ordenador con la posibilidad de girarlo libremente), tiene que dibujar diferentes tipos de sus representaciones planas.

- El alumno tiene que relacionar dos tipos de representaciones planas del módulo, sin construirlo físicamente.

Observamos que las representaciones planas que Gutiérrez considera en este trabajo son la perspectiva (no tratada en el análisis del experimento), la representación por plantas, las vistas ortogonales, las vistas ortogonales codificadas y la proyección isométrica.

Ejemplo 2.5

Construye, usando cubos multilink, una composición de cubos que tenga las vistas ilustradas en la siguiente figura (proyecciones ortogonales)(ejemplo extraído de Pittalis, Mousoulides, y Christou (2009)).



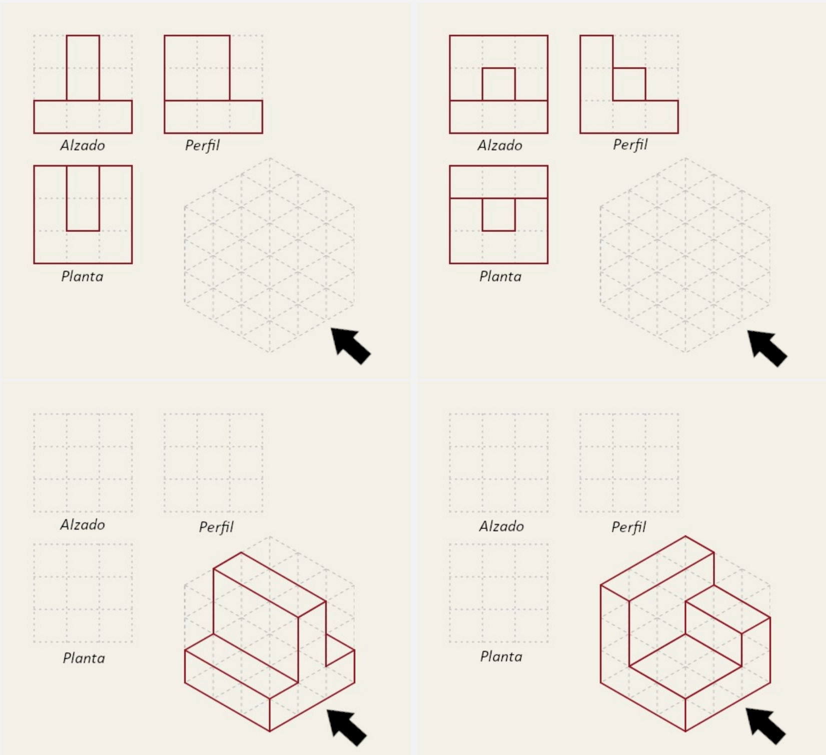
Para resolver la tarea del ejemplo 2.5 el alumno tiene que conocer un determinado lenguaje gráfico para interpretar las representaciones planas del objeto, que en este caso son proyecciones ortogonales, llamadas vistas. El conocimiento de las propiedades de dichas representaciones (por ejemplo que conservan la forma, tamaño y posición relativa de los cuerpos proyectados y en consecuencia las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente) permite coordinarlas e integrarlas para construir el objeto tridimensional.

Observamos que el estímulo inicial de esta tarea se compone de las representaciones planas (proyecciones ortogonales) y el tipo de respuesta es de construcción. Variando el estímulo inicial (poniendo un objeto físico u otro tipo de representación plana) o bien el tipo de respuesta que se pide se pueden obtener interesantes variaciones de la tarea.

Sin embargo, al resolver la Actividad 2.25, no se pide que el alumno se apoye en la construcción mediante policubos para trabajar la visión espacial de los alumnos directamente de una representación a otra.

Actividad 2.25

Cambia el tipo de representación plana de los siguientes objetos. ¿Cuál es el estímulo inicial? ¿Y el tipo de respuesta?:



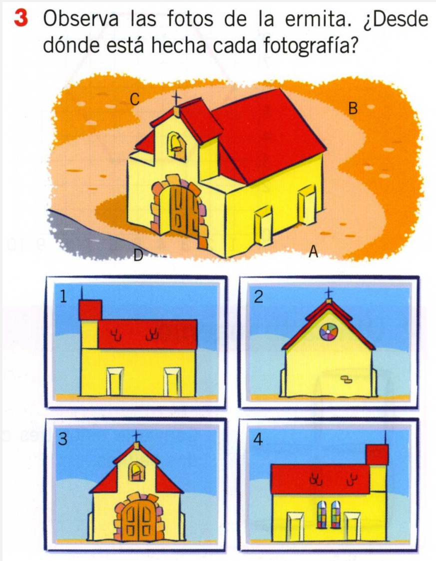
En la actividad presentada en el ejemplo 2.6, el alumno, además de situarse en un sistema de referencia distinto al propio, debe interpretar las distintas vistas planas del objeto tridimensional (la casa) representada en la ilustración de la actividad.

Ejemplo 2.6

Actividad extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 189):

Actividad 2.26

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 196):



¿Crees que el proceso de abstracción que debe realizar el alumno en esta actividad es mayor que el de los ejemplos vistos anteriormente? ¿Por qué?

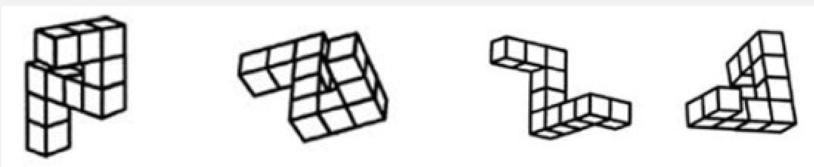
⊳ Tarea que implica rotar objetos

En la resolución de una tarea de este tipo se requiere leer una representación plana (perspectiva paralela) de un cuerpo tridimensional e imaginarlo en otra posición distinta a la original. Se ponen en juego conocimientos tales como: eje de rotación, rotación de un cuerpo alrededor de un eje y las propiedades derivadas de la rotación como isometría.

Actividad 2.27

Analiza y resuelve la siguiente actividad extraída del estudio de Shepard y Metzler (1971) sobre rotación mental de objetos tridimensionales.

> *¿Pertenecen todas las representaciones a la misma construcción? ¿Son el mismo objeto?*



Diseña una nueva tarea variando la estructura del cuerpo (estímulo inicial), combinando varios ejes de rotación y cambiando el tipo de respuesta (por ejemplo, de dibujo o construcción) para generar actividades con distintos grados de complejidad.

⊳ Tarea que implica plegar y desplegar

Son actividades relacionadas con el desarrollo de cuerpos geométricos, tales como:

- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico.
- Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano.
- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido.

Para empezar a trabajar estas actividades nos podemos ayudar del *polydron* (ver Apartado 1.5.1), aunque es conveniente que con posterioridad los alumnos sean capaces de visualizar mentalmente las acciones de pliegue y despliegue sin ayuda de ningún material manipulable.

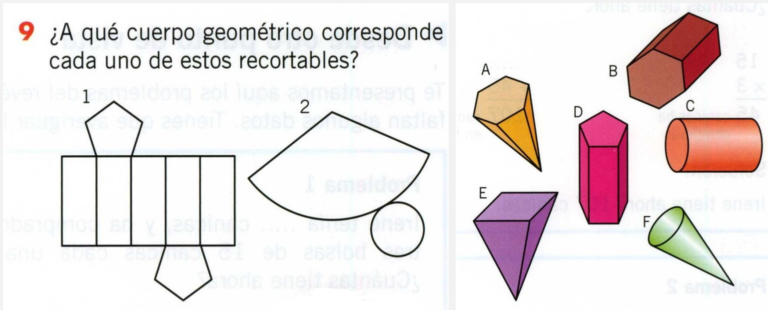
Además del polydron, los libros de texto suelen contener propuestas para trabajar este tipo de actividades con recortables de cartulina o de papel como se puede observar en el ejemplo 2.7.

Ejemplo 2.7

Tarea extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 119)

Actividad 2.28

Analiza la siguiente tarea extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 121))



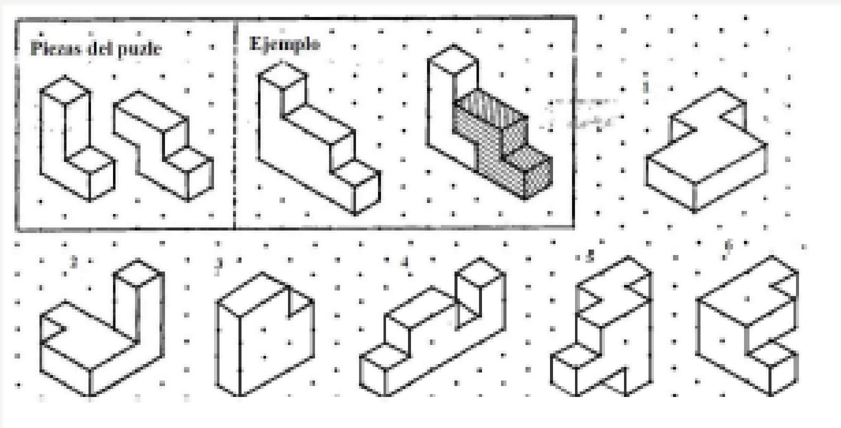
Ten en cuenta que para resolver esta tarea es necesario conocer qué es un desarrollo y las propiedades que conserva con respecto al objeto geométrico, por ejemplo, el paralelismo de las aristas de las caras, la forma y el tamaño de las caras.

⊳ Tarea que implica componer y descomponer en partes

Tal y como se muestra en el ejemplo 2.8, juntando dos piezas de puzle se pueden construir nuevos sólidos.

Ejemplo 2.8

Muestra, pintando cada una de las piezas, cómo se componen cada uno de los siguientes sólidos formados por las dos piezas. (Variación de la tarea presentada por Lappan, Phillips, y Winter (1984, p. 622)).

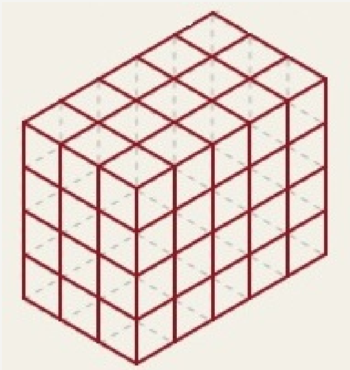


En la resolución de esta actividad se tienen que interpretar representaciones isométricas de objetos y conocer sus convenios. La partición del sólido en las dos piezas dadas supone la identificación de dichas piezas en la figura, que se hace a través de movimientos isométricos de las piezas. Las posiciones relativas de las piezas permitirán obtener las diferentes construcciones.

⪢ Tarea que implica contar partes

Ejemplo 2.9

El objeto representado en la figura está formado por cubos. Supongamos que pintamos toda su superficie exterior de azul y después lo desmontamos totalmente. ¿Cuántos cubitos tendrían exactamente tres caras azules? ¿Y cuántos tendrían exactamente dos caras azules? ¿Y una cara azul? ¿Y ninguna cara azul? (Bishop, 1983, p. 187)

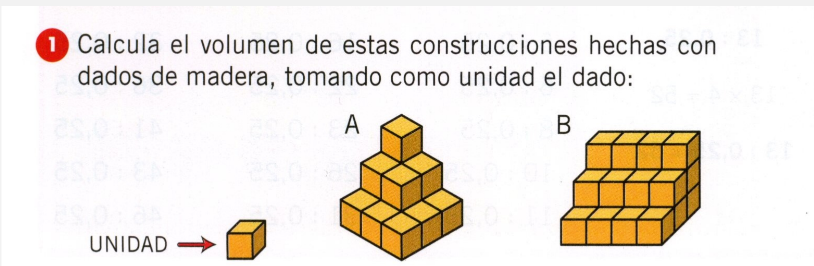


En el ejemplo 2.9 se tiene que interpretar la representación del objeto y sus partes (los cubitos), se tiene que conocer la estructura del ortoedro y coordinar las diferentes caras que pertenecen al mismo cubito (las vistas ortogonales de las caras del cubitos).

Otro tipo de actividad que podemos encontrar en los libros de texto relacionada con contar partes de un objeto son como la que encontramos en la Actividad 2.29.

Actividad 2.29

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 6: Primaria. Dejar huella* (2008, p. 184).


1 Calcula el volumen de estas construcciones hechas con dados de madera, tomando como unidad el dado:

¿Crees que tendrán los alumnos dificultades para tener en cuenta los cubitos que no se ven en la figura? Diseña varios cuerpos con policubos de manera que puedas practicar con los alumnos el proceso de contar los cubos que los componen.

Tipo 3: Tareas de orientación del sujeto en espacios reales

Incluimos en esta familia aquellas tareas que requieren que el sujeto comprenda el espacio donde se sitúa (o donde se sitúa otra persona u objeto), su ubicación y orientación en el espacio.

«Orientarse en el espacio» puede significar leer un mapa, un plano o comprender una maqueta de espacios de diferentes tamaños (ciudad, barrio, escuela, aula), describir verbalmente un itinerario entre dos lugares conocidos, dibujar un plano, un mapa o construir una maqueta de un espacio conocido, orientar un mapa con respecto a puntos de referencia fijos en la realidad o con respecto a los puntos cardinales. También incluimos las situaciones que requieren que el alumno lea, construya o utilice un sistema de coordenadas para estudiar las diferentes características de un espacio. Por ejemplo, incluimos tareas donde se requiere que el alumno defina un lugar en un mapa por medio de coordenadas cartesianas o polares o de dibujar un itinerario descrito verbalmente a través del uso de coordenadas.

Observamos que al abordar algunas situaciones de «Orientación del sujeto en espacios reales» se requiere conectar el esquema corporal al espacio físico circundante, trabajando otro aspecto de dicho conocimiento. Por ejemplo, en la descripción de un itinerario dibujado en un mapa (sin el uso de los puntos cardinales) es necesario conocer el propio esquema corporal (izquierda-derecha, arriba-abajo, delante-detrás), proyectarlo en el personaje imaginario que recorre el itinerario representado y conectarlo con los puntos de referencia presentes en el mapa (edificios, cruces, etc.).

De forma similar a la realizada para las tareas de interpretaciones de perspectivas, Gonzato y cols. (2011) proponen una clasificación de las tareas de orientación del sujeto en base a estímulos, acciones y tipo de respuesta.

Distinguen tres estímulos iniciales:

- Espacio real: tareas donde la acción del sujeto transcurre en el presente o ya ha sido realizada en el espacio real sin el apoyo de ningún tipo de representación del espacio.
- Representación espacial: tareas donde el sujeto no realiza físicamente una acción sino que sólo interpreta la información contenida en el mapa sin navegación física del espacio y sin tener una referencia física al espacio representado.
- Espacio real y representación del espacio físico: tareas donde el sujeto realiza o ha realizado la acción en un espacio físico y dispone de una representación de dicho espacio.

En este caso, las acciones iniciales requeridas para resolver la tarea están asociadas al estímulo inicial (ver Tabla 2.4).

Se distinguen cuatro tipos de respuesta, independientes del estímulo inicial:

- De representación: el sujeto tiene que representar un espacio y/o un trayecto en dos o tres dimensiones.
- De localización de objetos y personas: el sujeto debe localizar un objeto o una persona en mapas, planos con o sin el uso de un sistema de coordenadas.
- De descripción (verbal) de trayectos o posiciones.
- Física: orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad), ejecutar físicamente trayectos, ubicar físicamente objetos o personas en el espacio.

<table>
<tr><th>Estimulo inicial</th><th>Acción inicial</th><th>Tipo de respuesta</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Espacio real</td><td>Explorar el espacio (con movimiento)</td><td rowspan="4">· De representación: del espacio: construir maquetas, dibujar mapas/planos o de trayectos
· De localización de objetos y personas: en un mapa/plano/maquetas o con coordenadas
· De descripción (verbalmente): trayectos o posiciones
· Física: orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad), ejecutar trayectos o ubicar objetos o personas en el espacio</td></tr>
<tr><td>Obervar espacios, trayectos... (sin movimiento)</td></tr>
<tr><td>Representación Espacial</td><td>Interpretar información gráfica (localizar elementos, leer trayectos, interpretar sistemas de coordenadas, etc.)</td></tr>
<tr><td>Espacio real + representación del espacio</td><td>Relacionar el espacio con su representación espacial</td></tr>
</table>

Tabla 2.4: Clasificación de las tareas de orientación del sujeto en espacios reales.

Se podría considerar también como variables de las tareas el tipo de representación del espacio: 2D (planos, mapas, fotos, etc.), 3D (maqueta) y el tamaño del espacio real. Observamos que en muchos casos la respuesta a la tarea involucra también una acción y que para resolver una tarea se pueden necesitar varias acciones.

A continuación, se presentan ejemplos prototípicos de tareas pertenecientes a esta familia de actividades encontrados en la literatura, en libros de texto o en otro material instruccional. Estos ejemplos serán clasificados según la acción inicial requerida para su resolución, es decir: explorar el espacio (con movimiento físico), observar espacios, trayectos, etc. (sin movimiento físico), interpretar información gráfica, relacionar el espacio con su representación espacial. También analizaremos brevemente los conocimientos principales puestos en juego en la resolución de las tareas.

Algunos autores (Gonzato y cols., 2011) han observado que en los libros de texto de primaria se encuentran exclusivamente tareas de interpretación de información gráfica, sin un referente físico. Se trabaja entonces una orientación puramente «mental».

⊳ Tarea que implica explorar el espacio

Ejemplo 2.10

El maestro lleva a los niños de visita al parque de bomberos. Por el camino hablan acerca de las casas y las tiendas por las que pasan. Al volver a la escuela crean una maqueta de la ciudad utilizando bloques. (Wiegand, 2006)

En la tarea del ejemplo 2.10 se requiere que el alumno organice la información de un espacio que se ha recorrido previamente para construir con bloques una representación tridimensional. Observamos que el tipo de repuesta requerida es de representación (construcción de maqueta). Se podría variar la tarea pidiendo la representación plana sin la ayuda de los bloques o señalar en la representación el recorrido seguido durante el paseo. Estas variaciones supondrían un nivel superior de dificultad al perderse una de las dimensiones.

⋗ Tarea que implica observar espacios, trayectos, etc. (sin movimiento)

Ejemplo 2.11

Se presentan 16 cajas de cerillas sobre una mesa grande cuadrada colocada en el centro del aula y puesta de manera que sus lados estén inclinados 45 grados con respecto a las paredes de la sala. Se disponen las cajas, cuatro por cada lado, paralelas a los bordes de la mesa. El profesor pone un bloque formado por policubos en cada caja y las deja abiertas. Los alumnos observan el contenido de cada caja y tienen que recoger información (dibujar planos, escribir, etc.) para que el día siguiente, una vez que las cajas han sido cerradas, puedan describir el contenido de tres cajas señaladas por el profesor (Berthelot y Salin, 1992, pp. 96–97).

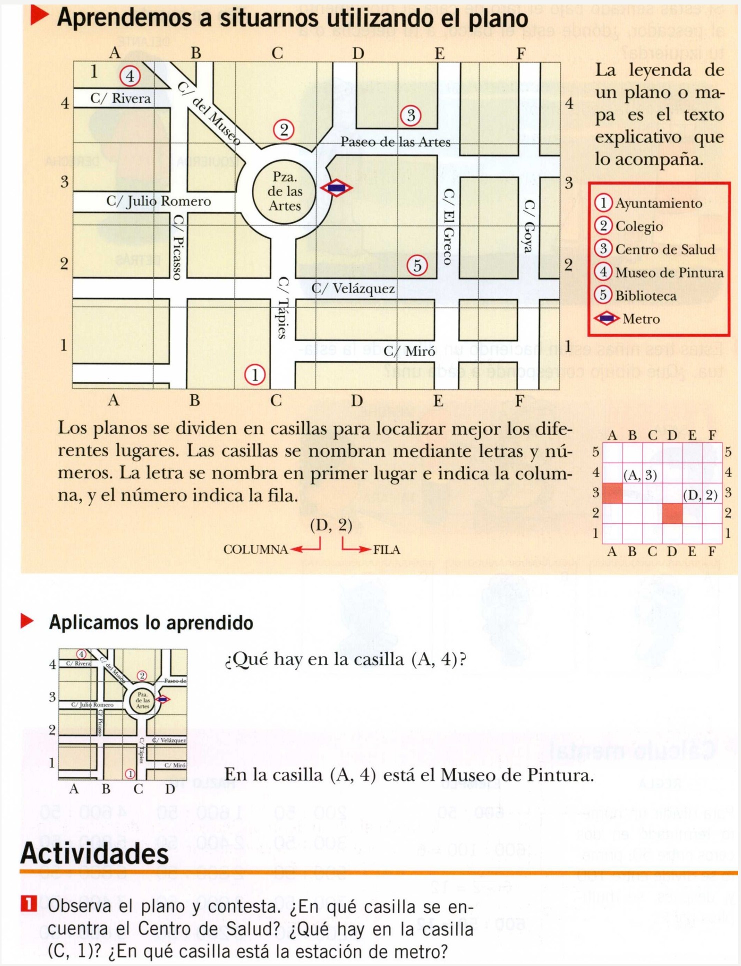
La situación del ejemplo 2.11 ha sido construida para que los chicos tengan la necesidad de considerar (y representar) un elemento externo a la situación (por ejemplo las ventanas, la puerta, un cuadro,..) para poder orientar correctamente su plano y poder localizar los elementos y su posición el día siguiente. Una dificultad asociada a la interpretación del mapa es la puesta en congruencia del espacio físico con el espacio representado.

⋗ Tarea que implica interpretar información gráfica

Los ejemplos que encontramos en los libros de texto usualmente contienen actividades relacionadas en saber interpretar un mapa y sus símbolos tal y como podemos ver en el ejemplo 2.12.

Ejemplo 2.12

Actividad extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 192))



Aprendemos a situarnos utilizando el plano

La leyenda de un plano o mapa es el texto explicativo que lo acompaña.

1 Ayuntamiento
2 Colegio
3 Centro de Salud
4 Museo de Pintura
5 Biblioteca
Metro

Los planos se dividen en casillas para localizar mejor los diferentes lugares. Las casillas se nombran mediante letras y números. La letra se nombra en primer lugar e indica la columna, y el número indica la fila.

(D, 2)
COLUMNA FILA

Aplicamos lo aprendido

¿Qué hay en la casilla (A, 4)?

En la casilla (A, 4) está el Museo de Pintura.

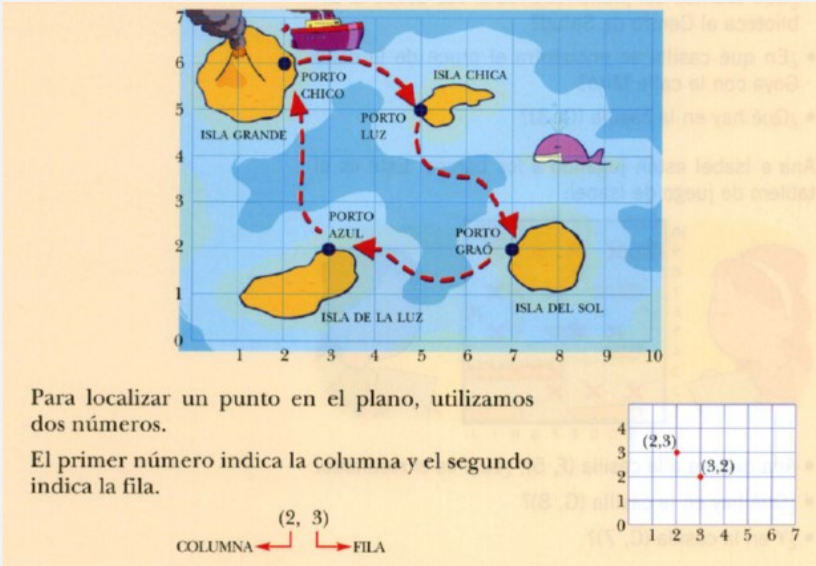
Actividades

1 Observa el plano y contesta. ¿En qué casilla se encuentra el Centro de Salud? ¿Qué hay en la casilla (C, 1)? ¿En qué casilla está la estación de metro?

¿Cuál es el recorrido que has de hacer para ir desde la Biblioteca hasta el Museo de Pintura?

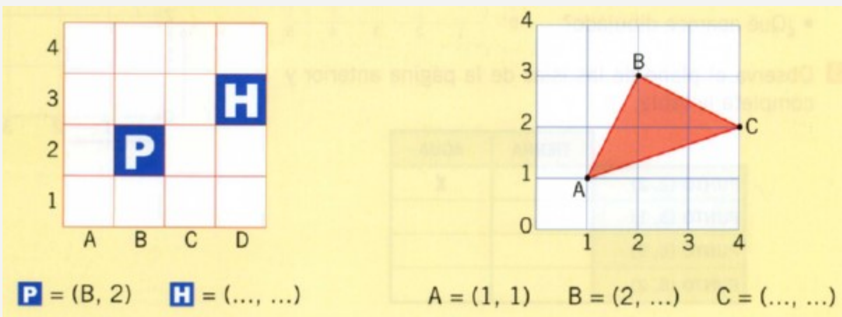
Actividad 2.30

Una pregunta que podríamos hacerles a los alumnos a la vista de la imagen es la siguiente ¿Qué hay en el punto $(3, 2)$ del plano? Plantea más preguntas para que los alumnos trabajen los sistemas de coordenadas numéricos.



En ocasiones y tal y como muestra la actividad del ejemplo 2.13 (*Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella*, 2007, p. 196), encontramos los dos sistemas de coordenadas vistos anteriormente. En el primer ejemplo se utiliza un sistema de intervalos alfa-numérico, donde cada letra y cada número designa un intervalo y el par «letra-número» designa una región. Por otra parte, el segundo ejemplo utiliza el clásico sistema cartesiano de representación de puntos en un plano, de forma que cada punto del plano viene determinado por un par de números (abscisa y ordenada). Por lo tanto, en el primer caso un elemento se sitúa en una (o más) regiones, mientras que en el segundo un elemento viene localizado por un punto (dos coordenadas). Conocer las diferencias entre los dos sistemas es fundamental a la hora de planificar las tareas.

Ejemplo 2.13



Actividad 2.31

Analiza la siguiente actividad extraída de (*Matemáticas 6: Primaria. Dejar huella*, 2008, p. 209)

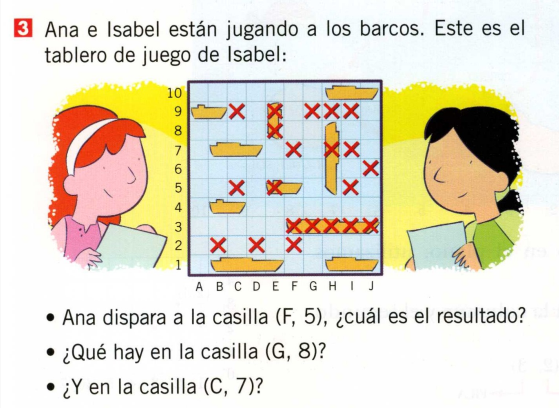
> *Almudena sale de su casa en la C/ Gato, va hasta el cruce con la C/ Delfín y gira a la derecha en dirección a la plaza. En la plaza coge la C/ Foca hasta el cruce con la C/ Oso, donde está la casa de su amiga Begoña. ¿Qué número corresponde a la casa de Almudena? ¿Y a la casa de Begoña?*

Observa que en esta actividad es importante la coordinación de la orientación del sujeto (su derecha, su izquierda,...) y del espacio representado en el dibujo (las calles, los números,...). El alumno deberá recorrer mentalmente el espacio e ir cambiando dinámicamente el sistema de referencia para poder responder a las preguntas que plantea el ejercicio. ¿Cómo solucionarías los posibles problemas que tuvieran los alumnos?

En la siguiente actividad se puede trabajar la orientación espacial y los sistemas de coordenadas mediante el juego «*hundir la flota*».

Actividad 2.32

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 193)



3 Ana e Isabel están jugando a los barcos. Este es el tablero de juego de Isabel:

- Ana dispara a la casilla (F, 5), ¿cuál es el resultado?
- ¿Qué hay en la casilla (G, 8)?
- ¿Y en la casilla (C, 7)?

y piensa una modificación del juego «hundir la flota» para trabajar el sistema de coordenadas en el aula. ¿Se te ocurre una modificación en la que, además de trabajar las coordenadas, puedas trabajar las propiedades de las figuras geométricas básicas? ¿Qué material utilizarías?

⊳ Tareas que implica relacionar el espacio con una representación espacial

Ejemplo 2.14

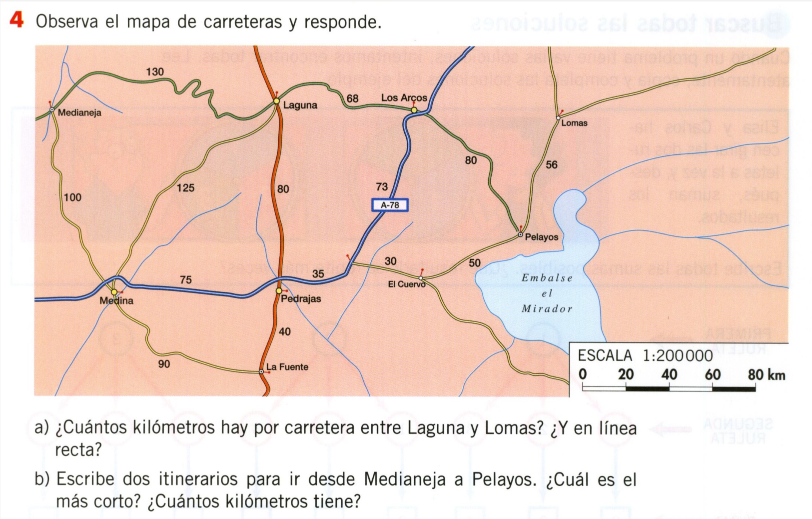
«Búsqueda de un objeto escondido en una mesa usando un registro hecho en un plano del aula». Mientras un alumno sale del aula otro esconde un objeto en una mesa y marca dicha mesa sobre un plano del aula que el maestro ha reproducido en una hoja de papel (que tiene cada niño). Entra el alumno que estaba fuera e interpretando el plano tiene que encontrar el objeto escondido (Galvez, 1985, pp. 64–65).

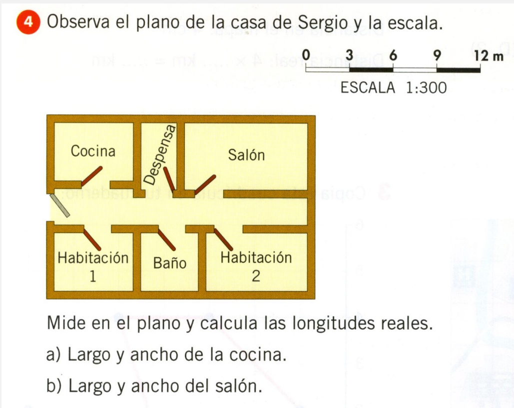
Fijando la atención en el alumno que estaba fuera en el ejemplo 2.14, el tipo de respuesta sería de localización física (respuesta física, ubicar objetos, ver Tabla 2.4). Variando el tipo de respuesta, el número de caja y/o su disposición se pueden obtener otras tareas.

Otro tipo de tareas que se sitúan en esta categoría son la interpretación de mapas a escala ya que en ellas se debe relacionar la representación gráfica con una magnitud (longitud, area, etc.) de la realidad.

Actividad 2.33

Analiza las siguientes actividades extraídas de (*Matemáticas 6: Primaria. Dejar huella*, 2008, p. 213) y *Matemáticas 6: Primaria. Dejar huella* (2008, p. 211) respectivamente,





en las que se muestran dos ejemplos de lectura de mapas a escala.

Berthelot y Salin (1992) describen los conocimientos principales implicados en la lectura de un plano: poner en relación los elementos del plano con sus correspondientes en la realidad (se necesita conocer el código utilizado por el autor del plano) y orientar el plano materialmente o mentalmente.

2.4.3 Conflictos en el aprendizaje de la orientación espacial

Siguiendo con la clasificación de Gonzato y cols. (2011), veamos los conflictos que pueden producirse en las tareas de cada uno de los tipos mencionados en el apartado anterior.

Conflictos en la tareas de Tipo 1

Un estudio muy interesante que trata diferentes problemáticas relacionadas con dichas actividades es presentado por Lurcat (1979). En particular, en este trabajo se establece una distinción entre objetos que, por su estructura o su función, poseen una parte anterior y una posterior (y por tanto derecha/izquierda) y los que no las poseen. También se diferencia entre referentes subjetivos (dependientes de la posición del sujeto) y objetivos (independiente de la posición del sujeto). Para explorar las diferentes modalidades de la proyección del esquema corporal se proponen interesantes situaciones experimentales.

En Alberti (2004) se afirma que las relaciones con las cuales se estructura el espacio están relacionadas con las propiedades de nuestro cuerpo, que le dan un significado preciso. La distinción entre delante/detrás de una persona se define por el hecho de que el cuerpo está orientado, es decir, tiene una parte considerada como delante por su forma y funciones y otra como detrás. La orientación de la forma es, por tanto, una condición necesaria para poder usar un objeto como referencia para identificar la combinación delante/detrás. La distinción de izquierda/derecha asume que el objeto de referencia tenga un plano de simetría, como el cuerpo humano que se caracteriza por su lateralidad, es decir, dos partes iguales de forma y función, pero cuyos movimientos tienen sentido contrario. La distinción cerca/lejos es una relación que involucra al menos a tres cuerpos, uno de los cuales sirve de referencia para establecerse y comparar las distancias de los otros. Es, por tanto, una noción de tipo métrico que se necesita para evaluar las distancias entre objetos y ponerle un orden, aunque no estén alineados en el plano o en el espacio. Implica entonces la capacidad de reconocer la conservación de las longitudes al variar la orientación de la referencia o de los objetos.

En el plano, por ejemplo, el binomio arriba/abajo no puede tener el significado del lenguaje común, ya que se refiere a las características del espacio físico que tiene la dirección vertical como dirección de referencia; por tanto, el sentido de estos términos debe ser aclarado por el profesor, de acuerdo a las convenciones en uso. Incluso la distinción delante/detrás hecha sobre la hoja puede dar lugar a ambigüedad, por lo que parece oportuno evitar proponer a los niños fichas con estos temas.

Observamos que estas problemáticas están tratadas mayormente en edad preescolar (educación infantil) siendo estos conocimientos considerados en las escuelas primarias como previos. Es por esta razón que centraremos más la atención en las otras dos otras familias de tareas relacionadas con la visualización y orientación espacial.

Conflictos en la tareas de Tipo 2

En Gutiérrez (1998), el autor afirma que *los profesores (sobre todo los de primaria) deben ser conscientes de cuándo sus alumnos tienen dificultades para dibujar representaciones planas y deben reaccionar de manera adecuada para tratar de evitar que una acumulación de dificultades de origen diverso dé como resultado el bloqueo de los alumnos a la geometría*. Es por ello, que Gutiérrez sugiere plantear actividades de aprendizaje para mejorar las capacidades de visión espacial de los alumnos por una parte y, por otra parte, cuando los alumnos todavía no son capaces de realizar representaciones planas suficientemente correctas, *evitar que tengan que basarse* *en sus propios dibujos para entender y aprender los conceptos y propiedades geométricas, buscando procedimientos alternativos, como el uso de modelos físicos, proporcionarles fotocopias para pegar, trabajar con ordenadores u otros.*

Algunos autores han utilizado un tipo particular de módulos multicubo, formados por varias columnas de cubos apoyadas todas ellas en el suelo (ver, por ejemplo, Izard (1990) y Winter (1986)). Estos módulos tienen la ventaja de que se pueden representar unívocamente dibujando sólo la proyección ortogonal codificada superior (ver Figura 2.15[3]).

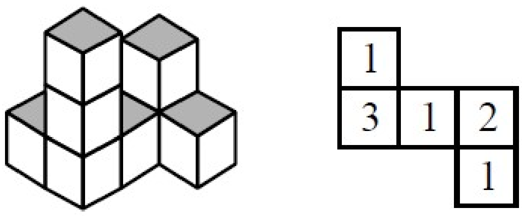


Figura 2.15: Vista isométrica y codificación superior de módulos multicubo.

Por tanto, al construir los módulos, sólo se tiene que utilizar una proyección ortogonal y, de esta manera, se evita el problema de los alumnos que no son capaces de coordinar varias proyecciones. Según Gutiérrez (1998), constituyen un tipo de sólido muy interesante para iniciar el estudio de estos tipos de representaciones planas.

⊳ Convertir representaciones

Para resolver este tipo de tareas, el alumno tiene que conocer un determinado lenguaje gráfico para interpretar las representaciones planas del objeto, que en este caso son proyecciones ortogonales, llamadas vistas. El conocimiento de las propiedades de dichas representaciones (por ejemplo que conservan la forma, tamaño y posición relativa de los cuerpos proyectados y en consecuencia las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente) permite coordinarlas e integrarlas para construir el objeto tridimensional. Esta coordinación de las vistas constituye una de las mayores dificultades para los alumnos (Battista y Clements, 1996; Gutiérrez, 1996).

⊳ Rotar objetos

En el estudio de Gorgorió (1998) donde se les presenta a los alumnos diversas tareas de rotación mental de objetos tridimensionales se observan diversos errores por parte de los alumnos referidos a la interpretación errónea de la tarea pedida y a conceptos geométricos erróneos.

Entre los errores de interpretación, el más frecuente fue el relacionado con el uso de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y en cuanto a los errores geométricos el más común es la confusión entre la rotación de 180 grados y la simetría.

La autora clasifica las estrategias utilizadas por los alumnos a la hora de resolver las tareas de rotación de objetos en *visuales* y *no-visuales*. Las estrategias *visuales* se caracteriza cuando el alumno ha usado imágenes visuales como parte esencial del proceso de resolución. Por el contrario, una estrategia *no-visual* se produce cuando el alumno hace uso de la argumentación y no se ha apoyado en imágenes visuales para resolver la tarea.

[3] Imagen extraída de Gutiérrez (1998)

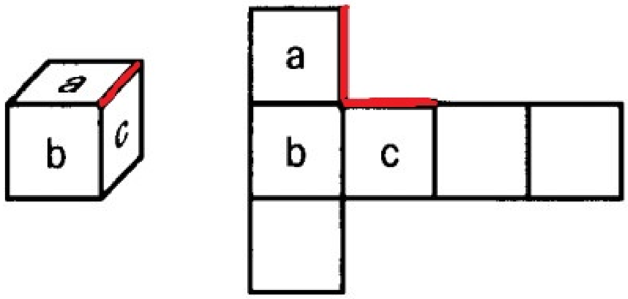


Figura 2.16: La misma arista de un cubo en varias posiciones en su desarrollo plano.

Estas dos estrategias necesitan de un razonamiento lógico y se usan para resolver tareas espaciales cuando se tiene un soporte visual.

Además de esta categorización, las estrategias utilizadas por los alumnos pueden separarse en otras dos categorías: *global* o *particular*. La autora define la estrategia *global* cuando la estrategia cognitiva de los alumnos se centra en el objeto considerado como un todo. Por otra parte, la estrategia *parcial* se da cuando el alumno se centra sólo en una parte del objeto.

Según la autora, desde el punto de vista docente deben enseñarse estas categorías a los alumnos y proporcionarles ejemplos de cada una de ellas de manera que los alumnos sean capaces de desarrollar mejor su visión espacial. De hecho, la habilidad de orientación espacial de cada individuo depende de su capacidad de hacer un uso correcto a la hora de estructurar, procesar y utilizar estrategias.

⊳ Plegar y desplegar

Una de las dificultades para resolver tareas de desarrollo proviene del hecho de que, a diferencia de las proyecciones, en estas representaciones se produce una duplicidad de algunos elementos del cuerpo tridimensional.

El despliegue de un sólido es una especie de representación externa que respeta la forma y la magnitud de las caras y los bordes manteniendo al mismo tiempo las relaciones métricas (tomadas en dos dimensiones). Por otro lado, no se preserva la apariencia general del sólido; también se descuidan ciertas relaciones topológicas y las relaciones métricas, consideradas como relaciones tridimensionales (Mesquita, 1992). Por ejemplo, una arista del cubo puede ser representada por dos aristas en el desarrollo (a un punto del cubo le puede corresponder puntos del plano). Estas aristas corresponden a aquellas que se unen al plegar el desarrollo.

Dadas las características de este tipo de representación, el despliegue presenta una especificidad en relación con las dificultades habituales de la geometría espacial: varios puntos del plano pueden ser las imágenes de un mismo punto en el espacio como se puede ver en la Figura 2.16[4].

[4]Imagen extraída de Mesquita (1992)

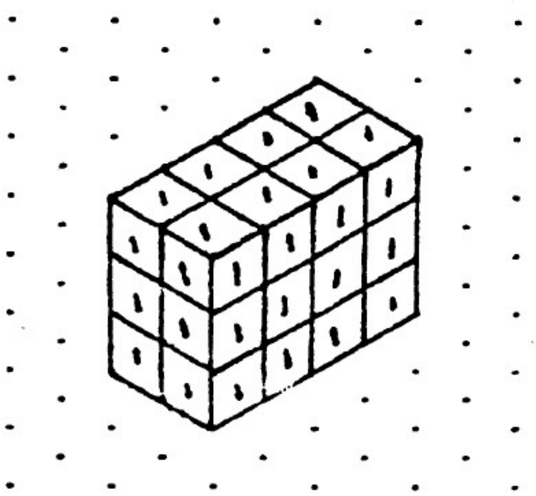


Figura 2.17: Imagen extraída de Ben-Chaim y cols. (1985) donde los alumnos marcan las caras visibles.

⩥ Contar partes

Durante un estudio piloto realizado por Ben-Chaim, Lappan, y Houang (1985) para desarrollar actividades de visualización espacial apropiadas para alumnos de grados 5 a 8 [5], se encontraron dificultades en la visualización de partes ocultas de objetos presentados pictóricamente.

Las actividades estaban todas relacionadas con la pregunta "¿Cuántos cubos se necesitan para construir un sólido rectangular determinado (presentado en forma pictórica)? El objetivo era determinar si el desempeño de los alumnos se vería afectado por la instrucción en actividades de visualización espacial.

Ta y como se muestra en la Figura 2.17, en el estudio, los alumnos marcaron las caras de los cubos pequeños visibles que se mostraban en la figura de tal manera que su estrategia de conteo era obvia. Las respuestas que dieron tendían a relacionarse con el número de caras o con el número de cubos pequeños visibles.

Los errores cometidos por los alumnos pueden clasificarse en 4 grandes grupos, teniendo en cuenta que todas las figuras del estudio tenían forma de tetraedros.

1. contando el número real de caras que se muestran,
2. contando el número real de caras que se muestran y duplicando ese número,
3. contando el número real de cubos que se muestran y
4. contando el número real de cubos que se muestran y duplicando ese número

Los resultados de este estudio sugieren que entre los alumnos de secundaria, de 5º a 8º grado hay un aumento en el rendimiento de elementos del tipo «¿Cuántos cubos hacen falta para construir...?» El nivel de rendimiento para los alumnos de quinto grado fue de aproximadamente el 25 %, para los de sexto y séptimo grado del 40 % al 45 % y para los

[5] en España 5º EP hasta 2º Ed. Secundaria

de octavo grado de aproximadamente el 50 %. Esto se esperaba debido al aumento de la madurez y la experiencia. Además, los errores cometidos por los alumnos están claramente relacionados con su capacidad de visualización.

Los autores sugieren que las experiencias concretas con cubos multilink –construir, representar en dibujos bidimensionales y leerlos– son de gran ayuda para mejorar el rendimiento de los alumnos.

Conflictos en las tareas de Tipo 3

Berthelot y Salin (1992) describen los conocimientos necesarios para la realización de un plano: la determinación de un sistema de referencia pertinente, la necesidad de articular los diferentes planos obtenidos por la representación de los espacios locales situados alrededor de los puntos de referencia y, por último, la representación de los desplazamientos y su coordinación en el espacio considerado. Observan que en la realización de un plano local o un mapa global, el control de la orientación relativa entre los diferentes elementos representados es esencial. También hacen remarcar que los conocimientos que se ponen en juego dependen de la naturaleza del problema (por ejemplo, si queremos representar un plano para orientar a un amigo tenemos que respetar por lo menos las propiedades topológicas y afines del espacio) y de las características del espacio considerado. No pueden faltar las informaciones que permitan al lector del plano orientarlo con respecto a la realidad.

⊳ Tareas que implican interpretar información gráfica

Por lo que se refiere a los sistemas de referencia, en la descripción de un itinerario de acuerdo a un mapa el sujeto debe ser capaz de disociar al menos dos sistemas de referencia (Galvez, 1985):

- el sistema ligado a su propio esquema corporal y proyectado por traslación sobre el papel y
- el sistema correspondiente a la proyección del esquema corporal de un móvil que se desplazaría a lo largo del itinerario que se trata de describir

Observamos que, en la tarea propuesta en el ejemplo 2.31, Almudena representa un móvil con su esquema corporal que se desplaza siguiendo el itinerario descrito (la derecha y la izquierda dependen del sentido del trayecto seguido) de manera que el sistema de referencia corporal va cambiando con cada movimiento mental que se hace. Tareas de recorrido de laberintos tanto físicos utilizando el mobiliario de la clase, como interactivos como los que se verán en el Apartado 2.4.4 pueden resultar de ayuda.

⊳ Tareas que implican relacionar el espacio con una representación espacial

Observamos que en las tareas donde se requiere la interpretación o el uso de una representación gráfica de la realidad (plana o tridimensional) es necesario hacer una correspondencia entre el objeto (o la situación) representado y la representación (modelización). Esta correspondencia realidad-modelo requiere la habilidad de interpretar, comprender y crear relaciones y analogías entre la representación de la realidad y la realidad o entre dos representaciones diferentes de la realidad.

Algunos autores (Clements, 2004; Weill-Fassina y Rachedi, 1993) identifican dos grandes dificultades relacionadas con la interpretación de planos y mapas:

- Dificultad para orientar un mapa a través de elementos en la realidad (dificultad para considerar y poner en congruencia dos sistemas de referencia diferentes).

- Dificultad para comprender el lenguaje simbólico (dificultad para entender que un mapa representa sólo algunos aspectos de la realidad y no es la realidad en miniatura).

Observamos que esta familia de actividades tiene evidentes relaciones con situaciones diarias. Por lo tanto, sería una fuerte limitación restringir el tema únicamente a las actividades de interpretación de información gráfica presentadas usualmente en los libros de texto y olvidar la importancia y el interés de trabajar con un referente real, en un espacio que los alumnos puedan recorrer y explorar.

2.4.4 Laboratorio de herramientas TIC para el aprendizaje de la orientación espacial

En la primera actividad que se propone, se tendrá que diseñar una actividad de evaluación y diagnóstico para los primeros cursos de primaria. De esta forma seremos capaces de discernir si los alumnos de cursos inferiores han adquirido las nociones de orientación y en qué nivel se encuentran.

Actividad 2.34

Contenido: Orientación espacial Tipo 1[a].

[a]según la clasificación de Gonzato y cols. (2011)

Tareas

En Orientación espacial puedes encontrar diversos micro-programas interactivos para trabajar la orientación espacial en los primeros cursos de primaria.

Diseña una actividad para trabajar en 1º de primaria, utilizando este micro-programa interactivo, de manera que puedas evaluar en qué fase de las que vimos en la Tabla 2.2 se encuentran los alumnos.

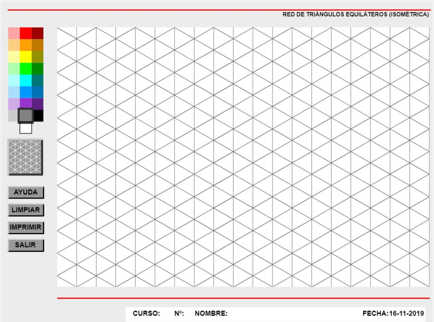
En la siguiente actividad se deberá preparar una actividad para que, usando los recursos interactivos disponibles, se creen ejercicios de cambio de perspectiva ortogonal a perspectiva isométrica. Aunque la actividad está pensada para que los alumnos cambien de una perspectiva a otra, puede que haya que diseñar un paso intermedio donde se tenga que construir físicamente la figura con policubos para ayudar con los posibles errores y conflictos cognitivos.

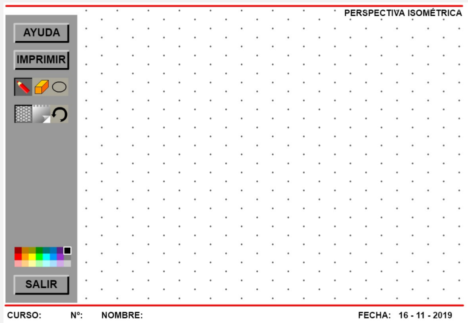
Actividad 2.35

Contenido: Dibujo de figuras con perspectiva isométrica

Tareas

En la Red de triángulos equiláteros: Isométrica puedes encontrar un micro-programa interactivo que te permite dibujar figuras con perspectiva isométrica y sombreado de cada una de sus proyecciones y en Perspectiva Isométrica, otro micro-programa interactivo para dibujar con perspectiva isométrica pero sólo las líneas.





Diseña una actividad para trabajar en 6º de primaria, utilizando este micro-programa interactivo, de manera que dadas las vistas ortogonales de un objeto tridimensional construido con cubos multilink, los alumnos tengan que dibujar la perspectiva isométrica en cualquiera de estos dos micro-programas interactivos.

Las dos actividades tecnológicas siguientes están enfocadas a trabajar la interpretación de mapas y laberintos de manera que se conjuguen las nociones de orientación con la interpretación de gráficos bidimensionales del espacio. Además del trabajo de orientación espacial, se pretende que se diseñen actividades que potencien la comunicación oral y escrita de indicaciones espaciales.

Actividad 2.36

Contenido: Caminos sobre cuadrícula I

Tareas

En Dentro del laberinto con la familia Pig puedes encontrar un micro-programa interactivo para trabajar la interpretación gráfica de mapas mediante el recorrido de un laberinto.

Diseña una actividad para trabajar con alumnos de cuarto de primaria de manera que, utilizando este micro-programa interactivo, los alumnos tengan que dar por escrito a un compañero el camino que han de recorrer para recorrer el laberinto satisfactoriamente. Ten en cuenta todos los posibles problemas cognitivos que puedan tener los alumnos.

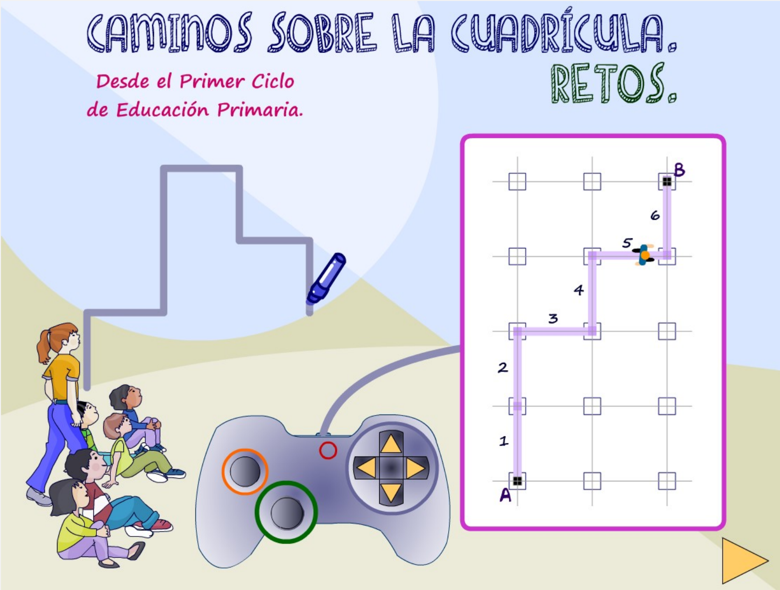
La particularidad de la Actividad 2.37 es que se pide diseñar diferentes actividades destinadas a distintos cursos de primaria. De esta forma, lo que se refuerza es la idea de tener que adaptar una misma actividad al nivel cognitivo de los alumnos de primaria.

Actividad 2.37

Contenido: Caminos sobre cuadrícula II

Tareas

En Caminos sobre la cuadrícula puedes encontrar un micro-programa interactivo para trabajar la interpretación gráfica de mapas.



1. Diseña una actividad para trabajar con alumnos de primaria de diferentes niveles utilizando este micro-programa interactivo. (Puede que para cursos distintos tengas de diseñar tareas distintas).
2. Diseña una actividad en tu clase donde crees una tarea tipo 3 de Gonzato y cols. (2011) en los alumnos tengan que hacer un recorrido usando un mapa de la misma forma que se trabaja en el apartado anterior.

2.4.5 Análisis de libros de texto sobre tareas de orientación espacial en primaria

Para el análisis de actividades de orientación espacial de los libros de texto nos centraremos en analizar los conceptos y procedimientos que se ponen en juego en cada actividad así como analizarlos en base a la tipología que propone Gonzato y cols. (2011) y que estudiamos en el Apartado 2.4.2. Además, analizaremos los contenidos previos que deberían tener los alumnos, si serán capaces de entender el enunciado de la actividad a resolver y la posible necesidad de utilizar material manipulativo.

Actividad 2.38

Contenido: Análisis de ejercicios y propuestas de orientación en los libros de texto de primaria.

Tareas

A continuación presentamos algunas actividades que se pueden encontrar en los libros de texto. Para cada una:

1. Resuélvela
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3. Clasifica la actividad en alguno de los tipos propuestos por Gonzato y cols. (2011) indicando para el caso de las tareas de tipo 2 y 3 el estímulo inicial, la acción y el tipo de respuesta.
4. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
5. ¿Se te ocurre cómo trabajarlos con material manipulativo?
6. Diseña una actividad alternativa para adaptar la actividad del libro de texto si lo crees necesario.

2.5 Bibliografia del Tema 2

Alberti, C. (2004). L'organizzazione dello spazio fisico rispetto al soggetto. En *Nel mondo della geometria, vol. 1. l'orientamento spaziale.* C. C. Bozzolo y A. Costa (Eds.).

Battista, M. T., y Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 258–292.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., y Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in Mathematics*, *16*(4), 389–409.

Berthelot, R., y Salin, M. H. (1992). *L'einsegnement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Tesis Doctoral, Université de Bordeaux I). Université de Bordeaux I.

Bishop, A. J. (1983). *Space and geometry*. Academic Press.

Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 267–297.

Consellería d'Educació, Cultura i Esport. (2014). *Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana* (Vol. 7311).

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor Madrid, MEC.

Fennema, E., y Franke, M. L. (1992). *Teachers' knowledge and its impact.* Macmillan Publishing Co, Inc.

Galvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* (Tesis Doctoral, Centro de Investigación del IPN, México). Centro de Investigación del IPN, México.

Geddes, D. (1992). *Geometry in the middle grades. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Addenda Series. Grades 5-8.* ERIC.

Godino, J., y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Gonzato, M., Fernández, M., y Díaz, J. J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *77*, 99–117.

Gorgorió, N. (1996). Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. En *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 3–19).

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 207–231.

Gualdrón, E. P., y Gutiérrez, A. R. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. En *Memoria del x simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 63–82).

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3–19).

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, *3*(3), 193–220.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1986). Traslaciones, giros y simetrías en el plano. *Monografía de"Papeles de Enseñanza de las Matemáticas*(2).

Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three-dimensional puzzles. *The Arithmetic Teacher*, *37*(6), 44.
Jackson, S. B. (1975). Applications of transformations to topics in elementary Geometry: Part I. *The Mathematics Teacher*, *68*(7), 554–562.
Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Síntesis.
Kidder, F. R. (1978). Conservation of length: A function of the mental operation involved. *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis Center*.
Lappan, G., Phillips, E. D., y Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *Mathematics Teacher*, *77*(618-623).
Leitzel, J. R. C. (1991). *A call for change: Recommendations for the Mathematical preparation of teachers of Mathematics. An MAA report.* ERIC.
Lurcat, L. (1979). *El ninõ y el espacio; la función del cuerpo*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.
Matemáticas 1: Un paso más. (2004). Madrid. Santillana.
Matemáticas 3: Un paso más. (2005). Madrid. Santillana.
Matemáticas 4: Primaria. Dejar huella. (2007). Madrid. Anaya.
Matemáticas 4: Primaria. Trotamundos. La emoción de descubrir. (2005). Editorial SM.
Matemáticas 6: Primaria. Dejar huella. (2008). Madrid. Anaya.
Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology*, *18*(19-30).
Ministerio de Educación y Ciencia. (2006, diciembre). *Real Decreto 1513/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* BOE núm. 293, 8 de diciembre de 2006.
Piaget, J., y Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Press. Univ. de France. París.
Pittalis, M., Mousoulides, N., y Christou, C. (2009). Levels of sophistication in representing 3D shapes. En *Proceedings of the 33rd pme international conference* (Vol. 4, pp. 385–392).
PMME-UNISON. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI.*
Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). (2000). National Council of Teachers of Mathematics.
Recio, A. M., y Rivaya, F. J. (1991). *Una metodologia activa y ludica para la enseñanza de la geometria*. Sintesis.
Shepard, R. N., y Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, *171*(3972), 701–703.
Thomas, D. (1978). Students' understanding of selected transformation geometry concepts. *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, 177–184.
Trends in International Mathematics and Science Study. (1998).
Weill-Fassina, A., y Rachedi, Y. (1993). Mise en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation. *Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Editions La Pensée Sauvage, Grenoble*, 57–86.
Wiegand, P. (2006). *Learning and teaching with maps*. Routledge.
Winter, M. J. (1986). *Spatial Visualization*. Addison Wesley.

II Didáctica de la Medida

3. Magnitudes y medida de magnitudes

La medida de magnitudes constituye un bloque tradicionalmente tratado tanto en primaria como en secundaria y se considera un contenido de gran utilidad práctica en la vida de cualquier ciudadano. Sin embargo, es justamente la consideración de que se trata de de un conocimiento social (casi todos los adultos saben o creen que saben medir correctamente), lo que genera no pocas paradojas en su enseñanza. Así, la escuela abandona parte de esa enseñanza asumiendo que el alumno acabará aprendiendo por su cuenta ciertas cosas, en sus experiencias familiares y sociales, lo que luego resulta ser falso. De este modo, la escuela convierte en objetos didácticamente invisibles a saberes y conocimientos que el alumno seguro que tendrá necesidad de utilizar, bien para adquirir nuevos conocimientos o bien para su vida personal.

La medida de magnitudes es un tema considerado difícil por alumnos y por maestros. Así, los maestros se suelen limitar al trabajo formal de cambio de unidades del S.I. y éste es presentado de forma algorítmica; de lo que se trata es de manejar una regla para dominar de manera rápida la equivalencia entre unidades. Visto así parece normal que este tema sea considerado por profesores y alumnos como abstracto y poco práctico. Esta práctica está encaminada, en la mayoría de los casos, a entrenar a los alumnos en la resolución de ejercicios de los manuales escolares, enseñándoles procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente que, por su propia naturaleza, encierran una pérdida del sentido que tiene el cambio de unidades. Se confunde así el aprendizaje con la resolución mecánica de ejercicios del libro de texto.

Los alumnos encuentran grandes dificultades para encontrar sentido a esas actividades, actividades que nunca realizan fuera de la escuela. ¿Quién, en su vida cotidiana, ha necesitado pasar de metros a decímetros o de kilos a hectogramos?

Otra paradoja presente en la enseñanza de las medidas de magnitudes es que, a pesar de tratarse de un saber antiguo y que, por tanto, debería estar bien estudiado desde el punto de vista didáctico, no hay relación entre las demandas sociales y culturales relativas a la medida y el uso didáctico que se hace de ella. Se suelen evitar prácticas de medición efectivas, lo que convierte la enseñanza de la medida en un discurso casi teórico que versa más bien sobre cuestiones aritméticas. El resultado de esto es que los ciudadanos hacen, habitualmente, una mala utilización de los instrumentos de medida.

El conocimiento de la medida de magnitudes es fundamental para que el alumno conozca y comprenda lo que pasa a su alrededor. La medida es el medio de control por excelencia que le permitirá interpretar la realidad (lectura de la prensa, relaciones comerciales, etc.) y criticarla a partir de datos (interpretación de presupuestos, tasas de empleo o de paro, porcentajes, etc.).

3.1 Magnitud y cantidad de magnitud

Entendemos por magnitud cualquier cualidad de los objetos, cuerpos o fenómenos que pueda cuantificarse como, por ejemplo, la longitud de un objeto, la temperatura de un cuerpo o el precio de un producto. Frente a estas cualidades, otras, como el color de ojos de una persona, no son cuantificables. La longitud, la superficie, el volumen, la capacidad, la masa, la amplitud angular, el tiempo y el valor monetario son ejemplos de magnitudes que se trabajan en Educación Primaria.

La longitud es la extensión lineal entre dos puntos, pudiendo diferenciarse entre extensión ocupada (largo de un lápiz) y extensión no ocupada (distancia entre dos ciudades). La superficie es la extensión plana de un cuerpo u objeto (por ejemplo, la extensión de una hoja de papel). Con esta acepción de superficie, los términos superficie y área se emplean a menudo como sinónimos. El volumen y la capacidad son considerados en ocasiones como magnitudes equivalentes, pero son conceptos diferentes. Capacidad es la cualidad de un objeto de contener a otros o de servirles como recipiente (una botella contiene cierta cantidad de leche) y volumen es el espacio ocupado por un objeto (una tostadora ocupa un cierto espacio en un armario).

También la masa y el peso son magnitudes diferentes. La masa de un cuerpo es la cantidad de materia de este cuerpo, mientras que el peso es la fuerza que hace la gravedad sobre una masa en un lugar determinado. Un astronauta tiene la misma cantidad de masa en la Tierra y en el espacio pero pesa menos en el espacio. Los instrumentos empleados para medir la masa en realidad miden peso. La diferenciación entre peso y masa queda fuera de los contenidos de Educación Primaria, por lo tanto de aquí en delante hablaremos de peso en lugar de masa.

La amplitud de ángulos puede estar asociada a cambios de dirección en contextos reales, como girar a la derecha en una esquina y la magnitud tiempo está vinculada a la duración o separación de acontecimientos como, por ejemplo, la duración de una serie de televisión.

El valor monetario está asociado a contextos familiares de precios y compras. A diferencia de las demás magnitudes, el valor monetario de un objeto depende del contexto en el que se mida en mayor medida que las demás magnitudes. Respecto al tratamiento escolar del dinero, Dickson, Brown, y Gibson (1991) insisten en que ha de tenerse muy presente que existen diferencias entre el sistema monetario y los demás sistemas de medida:

- No existe, en general, un *proceso de medición* del «valor económico» que sea análogo al de medir un área contando número de unidades de centímetros cuadrados o la temperatura mediante una escala. El «valor económico» está determinado por una persona o un grupo de personas, por lo que la forma de averiguar el precio de algo se limita a leer un rótulo o, simplemente, preguntarlo.

- El dinero es *discreto* (o *discontinuo*); en el sistema del euro no existen fracciones menores que el céntimo. Esto conlleva que la idea de aproximación resulte, en general, inadecuada.

- El dinero supone un *sistema de intercambios fundado en símbolos materiales*. Es cierto que 1 cm equivale a 10 mm, pero no representamos estas unidades mediante símbolos similares a los utilizados con el dinero (piezas de metal o de papel).

(Dickson y cols., 1991)

Pese a estas diferencias el dinero constituye, junto al tiempo, el sistema de medida que más frecuentemente encontramos en la vida cotidiana.

De un conjunto de objetos con una cualidad cuantificable en particular, se puede distinguir un subconjunto de ellos que tenga exactamente la misma cantidad de esa magnitud. Denominaremos, por lo tanto, *cantidad de magnitud* a la característica común a un conjunto de objetos respecto a una magnitud (Luengo y Beta, 1990). Por ejemplo, de una colección de objetos del aula (lápiz, carpetas, rotuladores, estuche, etc.) podemos distinguir aquellos objetos que tienen la misma cantidad de longitud o aquellos con la misma cantidad de peso.

En algunas magnitudes, la cantidad de magnitud de la unión de varios objetos puede obtenerse sumando las cantidades de magnitud de cada uno de los objetos. A estas magnitudes las denominamos *extensivas*. Por ejemplo, la cantidad de superficie de una pizza seccionada en trozos es igual a la suma de las cantidades de superficie de cada uno de sus trozos. En caso contrario, se denomina *intensiva*. Por ejemplo, si mezclamos en una jarra agua a la 10º centígrados y agua a 50º centígrados la temperatura del agua en la jarra no se corresponde con la suma de ambas magnitudes.

En este tema se hará referencia a las magnitudes de longitud, superficie, amplitud en ángulos, volumen, capacidad, tiempo y valor monetario, que normalmente se trabajan en Educación Primaria. Todas ellas son magnitudes extensivas.

3.2 Orientaciones curriculares

Tal y como ya hicimos en los temas anteriores, se compararán las orientaciones curriculares locales (Consellería d'Educació, Cultura i Esport, 2014) Decreto 108/2014, con las orientaciones establecidas en los Common Core Stardards (*Principles and standards for school mathematics*, 2000) CCSS-M publicadas en EEUU.

En la Tabla 3.1 se recoge un breve resumen de las orientaciones establecidas por el CCSS-M. En la tabla se indica, para cada curso, el conjunto de habilidades que el docente debe procurar que adquieran los alumnos.

1º	Ordenan tres objetos según su longitud; comparan las longitudes de dos objetos indirectamente utilizando un tercer objeto. Expresan la longitud de un objeto como un número entero de unidades de longitud, colocando copias de un objeto más corto (la unidad de longitud) de punta a punta; comprenden que la medida de la longitud de un objeto es la cantidad de unidades de una misma longitud que cubre al objeto sin espacios ni superposiciones. Dicen y escriben la hora en medias horas utilizando relojes análogos y digitales.
2º	Miden la longitud de un objeto seleccionando y usando herramientas apropiadas tales como reglas, yardas, reglas métricas y cintas de medir. Miden la longitud de un objeto dos veces, usando unidades de longitud de diferentes longitudes cada vez; describen cómo ambas medidas se relacionan al tamaño de la unidad escogida. Estiman longitudes usando unidades de pulgadas, pies, centímetros y metros. Miden para determinar cuanto más largo es un objeto que otro y expresan la diferencia entre ambas longitudes usando una unidad de longitud estándar. Dicen y escriben la hora utilizando relojes análogos y digitales a los cinco minutos más cercanos, usando a.m. y p.m.

Sigue en la página siguiente…

3º	Dicen y escriben la hora al minuto más cercano y miden intervalos de tiempo en minutos. Resuelven problemas verbales de suma y resta sobre intervalos de tiempo en minutos. Miden y estiman volúmenes líquidos y las masas de los objetos utilizando las unidades estándares de gramos (g), kilogramos (kg) y litros (l). Suman, restan, multiplican o dividen para resolver problemas verbales de un solo paso relacionados con masas o volúmenes dados en las mismas unidades.
4º	Reconocen los tamaños relativos de las unidades de medición dentro de un sistema de unidades, incluyendo km, m, cm; kg, g; lb, oz.; L, mL; h, min, s. Dentro de un mismo sistema de medición, expresan las medidas en una unidad más grande en términos de una unidad más pequeña. Anotan las medidas equivalentes en una tabla de dos columnas. Utilizan las cuatro operaciones para resolver problemas verbales sobre distancias, intervalos de tiempo, volúmenes líquidos, masas de objetos y dinero, incluyendo problemas con fracciones simples o decimales y problemas que requieren expresar las medidas dadas en una unidad más grande en términos de una unidad más pequeña. Representan cantidades medidas utilizando diagramas tales como rectas numéricas con escalas de medición. Aplican fórmulas de área y perímetro de rectángulos para resolver problemas matemáticos y del mundo real.
5º	Convierten unidades de medición estándar de diferentes tamaños dentro de un sistema de medición dado y utilizan estas conversiones en la solución de problemas de varios pasos y del mundo real. Hacen un diagrama de puntos para mostrar un conjunto de medidas en unidades fraccionarias (1/2, 1/4, 1/8). Efectúan operaciones con fracciones apropiadas a este grado, para resolver problemas relacionados con la información presentada en los diagramas de puntos.
6º	Resuelven problemas matemáticos y del mundo real relacionados al área, el área total y el volumen.

Tabla 3.1: Orientaciones CCSS-M por curso relativas al bloque de medida.

La siguiente actividad que proponemos consiste en analizar libros de texto de diferentes editoriales para identificar cuáles son los contenidos relativos al bloque de medida y cómo éstos se presentan tanto a los alumnos como a los maestros en los libros del profesor.

Actividad 3.1

Identificad, en los libros de texto que tenéis a vuestra disposición, los contenidos relativos a la medida de magnitudes. Observad si los contenidos se ajustan a las orientaciones curriculares y tomad nota del tratamiento que se hace de éstos.

3.3 Medida de una cantidad de magnitud, unidad de medida y sistema de medida

La idea más simple de medida de una cantidad de magnitud está relacionada con la comparación. La comparación se suele hacer mediante los sentidos, generalmente con la vista. En el caso de la longitud podemos comparar la altura de dos niños colocándolos uno junto al otro. Para comparar la superficie de dos figuras se pueden superponer. Cuando no hay posibilidad de desplazar los objetos para su comparación o bien, cuando la diferencia entre los dos objetos es pequeña o inapreciable, se puede hacer uso de un referente o de un elemento intermediario. Por ejemplo, para saber si la fachada de una casa es más larga que la de otra se puede emplear una cuerda y ver el número a veces que la cuerda se reitera en la fachada. En este caso la cuerda nos sirve como intermediario para establecer la comparación.

La unidad de medida se define como la cantidad de magnitud que se toma como referencia o patrón de comparación reiterada. De esta forma, medir es asignar un número a una cantidad de magnitud referido a cuántas veces está contenida la unidad de medida y este número es su medida. En el ejemplo anterior, si la cuerda está contenida 7 veces en la fachada, podemos decir que la fachada tiene una medida de 7 cuerdas.

Las primeras unidades de medida surgen de forma natural, empleando partes de nuestro cuerpo (p. ej., pie o mano) u objetos cotidianos (p. ej., lápiz u hoja). La elección de una unidad de medida es arbitraria, aunque conviene que se ajuste al objeto que se quiere medir. Si la unidad seleccionada es muy pequeña, tiene que repetirse muchas veces sobre el objeto que queremos medir y esto puede resultar preciso pero poco práctico. No es práctico, por ejemplo, medir el largo de una habitación empleando clips. Veamos cómo puede construirse un sistema de medidas basándonos en la propuesta de Chamorro y Belmonte (1988).

3.3.1 El problema de la elección de la unidad. Encuadramientos.

Elegir una unidad supone entre otras cosas una adecuación entre lo que se quiere medir y el objeto elegido como unidad. Si queremos encontrar el peso de un tambor de detergente lleno, es evidente que podemos tratar de equilibrarlo en una balanza poniendo en el otro lado granitos de arroz (esto supone emplear el grano de arroz como unidad). Pero la cuestión que planteamos es ¿debemos hacerlo?

Si el peso no da un número entero de granitos se encontraría un encuadre de la forma:

$$n \cdot a < m < (n+1) \cdot a$$

donde m es el peso del tambor de detergente, a es el peso de un grano de arroz y n y $n+1$ es el número de granos utilizados.

Cuando «no llego» o «me paso», respectivamente y la diferencia de peso de n granos y $n+1$ granos sea inapreciable en comparación con el tambor de detergente, podemos decir que el grado de aproximación con el que se ha medido el peso es excelente. Sólo que... ¿quién cuenta los granos de arroz que hay en la balanza?

Es evidente que es más cómodo emplear, en lugar de granos de arroz, trozos de plomo de las dimensiones de una caja de cerillas puesto que tendremos que emplear menos objetos en la balanza y resultará más fácil contarlos. Si la medida no es entera, volveremos a tener un encuadre para m;

$$h \cdot t < m < (h+1) \cdot t$$

donde t es el peso de cada trozo de plomo. Ha sido más cómodo y podemos afirmar que el peso está entre h y $h+1$ trozos. Es más fácil contarlos pero hemos perdido precisión a la aproximación del peso.

Puede ser interesante ejercitar a los alumnos en los encuadres porque normalmente se les acostumbra a resultados enteros y, cuando obtienen uno que no lo es, tienen grandes dificultades para expresarlo.

Cuando la medida de un objeto no se corresponde con un número entero, se puede recurrir a un refinamiento de esta medida. Por ejemplo, si la altura de una botella es más pequeña que dos bolígrafos, podemos decir que su altura está entre uno y dos bolígrafos. Pero también podemos medirla con un bolígrafo y dos clips (Figura 3.1).

Figura 3.1: Altura de una botella medida con bolígrafos y clips.

3.3.2 Relaciones entre diferentes unidades. Cambios

Consideremos un ejercicio en el que los alumnos deben medir el peso del libro de matemáticas y, para calcularlo, disponen de balanzas, monedas y tuercas. Si a un grupo de niños se les indica que empleen las monedas y al otro las tuercas, ¿cómo sabremos si las medidas efectuadas por los dos grupos son correctas? Responder a esta pregunta pasa necesariamente por encontrar la equivalencia entre monedas y tuercas y hacer un cambio de unidades.

En el caso más infrecuente se obtendrá que hay una equivalencia entera del tipo 1 moneda = 2 tuercas. Cuando esto no sucede, los alumnos pasan por instantes de desconcierto y creen que no se pueden encontrar las equivalencias entre las dos unidades. Después de muchas discusiones, llegan a la conclusión de que deben poner a los dos lados de la balanza las monedas y las tuercas hasta que se equilibren. Esto nos lleva a un tipo de representación muy difícil para hacer conversiones y aparece la necesidad de hacer un sistema con cambios más simples.

3.3.3 Necesidad de un sistema de medida. Sistemas irregulares

Ya hemos visto que cuando la medida no es entera hay que recurrir a un encuadre para dar la medida exacta y que estos encuadres pueden ser más o menos finos (arroz/ trozos de plomo), según la unidad escogida, pero que suponen incomodidad en los cambios. Una solución es emplear varias unidades de medida, lo que habitualmente se denomina como *sistema de medida*.

Si para pesar un tambor de detergente disponemos de trozos de plomo, tuercas y granos de arroz, se podría proceder de la siguiente forma:

a) Utilizar trozos de plomo (unidad u_1) hasta pasarse. Retirar el último trozo de plomo utilizado.

b) Utilizar a continuación tuercas (unidad u_2) hasta pasarse. Retirar entonces la última tuerca utilizada.

c) Completar con granos de arroz (unidad u_3) hasta conseguir el equilibrio.

Es de suponer que obtener el equilibrio de esta forma sea bastante probable. Se han empleado ahora las unidades u_1, u_2 y u_3, que constituyen un sistema de medida. El peso de un objeto vendría dado por expresiones del tipo:

$$3u_1 4u_2 6u_3$$

lo que quiere decir que ese objeto se equilibra con 3 trozos de plomo, 4 tuercas y 6 granos de arroz. Pero con este sistema todavía nos resulta difícil encontrar la equivalencia entre las diferentes unidades de medida y, por lo tanto, tendremos que recurrir a los sistemas regulares.

3.3.4 Sistemas regulares

La necesidad de facilitar y agilizar los cálculos hace aconsejable la constitución de sistemas regulares. Formamos por ejemplo un sistema regular que sustituya al formado por los trozos de plomo, las tuercas y los granos de arroz. Tomamos como u_1 un policubo, como u_2 el conjunto de 3 policubos y como u_3 el conjunto de tres conjuntos u_2.

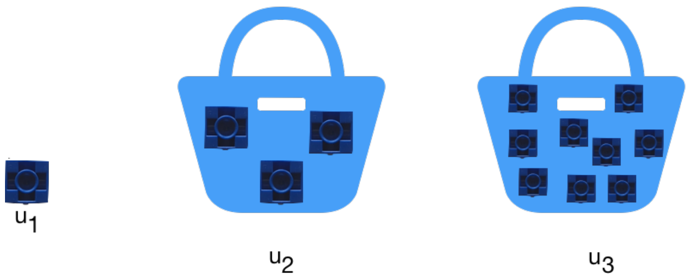


Figura 3.2: Construcción del sistema regular con policubos.

Es evidente que $1u_3 = 3u_2$ y que $1u_2 = 3u_1$. En este sistema arbitrario no tiene sentido emplear más de dos veces cualquiera de las unidades, ya que con tres unidades conseguimos una unidad de orden superior. De esta forma, en las escrituras complejas solo aparecerían las cifras 0, 1 y 2.

Actividad 3.2

Construye un sistema regular de unidades de peso con policubos en base 3 y utilízalo para diseñar una actividad en la que los alumnos tengan que

1. Calcular el peso de diversos objetos de la clase con el nuevo sistema.

2. Escribir del peso de los objetos con la nomenclatura del nuevo sistema regular en base 3.

3. Comparar y sumar pesos de diversos objetos con el nuevo sistema en base 3.

3.3.5 El problema de la comunicación. Sistemas legales. El sistema métrico decimal y el Sistema Internacional

En principio cualquier sistema regular sería perfectamente válido y cómodo para expresar las medidas, pero hay razones que justifican el uso de un sistema común de medidas. Decir que el peso de un objeto es $3u_3 1u_1$ no da información si no conocemos el significado de u_3 y u_1. De esta forma se impone la utilización de un sistema común de medida previamente acordado. Estos sistemas reciben el nombre de *sistemas legales*.

La importancia que tiene para la humanidad medir las distintas magnitudes se observa al estudiar los diversos sistemas de medida que han utilizado los diferentes pueblos a través de su historia.

Las unidades de medida de longitudes aparecen en un principio totalmente ligadas con las partes del cuerpo humano, como el brazo, la mano, el paso, el pie, el codo, etc.; después, las comparaciones serían con objetos al alcance de los hombres, piedras, ramas, etc. Para la superficie se utilizaban unidades de medida dependientes del tiempo que se tardaba en arar o en sembrar una tierra. Para la capacidad de líquidos y sólidos (cereales, frutas, etc.) se utilizaban vasijas de diversos tamaños y formas. Para los pesos, dependiente su medida de distintas balanzas, se utilizaban pesas de muy distintos materiales. La medida del tiempo depende totalmente de los movimientos de los astros observables desde la Tierra. Además, hay que tener en cuenta que el tiempo es una magnitud sin sustrato físico manejable; la sucesión de días y noches, las estaciones del año, venían determinadas por la naturaleza y no por el hombre; el fraccionamiento del día viene determinado por necesidades sociales, construyéndose distintos objetos (relojes) para determinar el momento del día (local) en que se vivía.

Cuando el hombre se organiza socialmente ve la necesidad de encontrar unidades de medida que le permitan comparar con más precisión que las mediciones efectuadas por estimaciones personales. De este modo, en cada país, en cada comarca, aparecen distintos sistemas de medida dependiendo de los materiales de que disponían y de sus propios sistemas de numeración (muchas veces no regulares). Sería casi imposible considerar la cantidad enorme de medidas usadas por los pueblos de distintas regiones, países o naciones y hasta de comarcas, sistemas con fraccionamientos propios sin regularidad alguna y muy incómodos para los cálculos, no sólo entre distintos sistemas, sino dentro de ellos mismos. Conocer todos los sistemas en uso en una misma época resultaba difícil y esto originaba conflictos en el comercio. Por tanto, al establecerse un comercio entre pueblos alejados, las unidades de medida tienden a ser menos locales, tienden a universalizarse.

En 1960 se instauró el Sistema Internacional de Unidades (S.I.), compartido por todos los países del mundo como sistema prioritario salvo Birmania, Liberia y Estados Unidos. Este sistema es la evolución de diferentes intentos de estandarizar las unidades de medida. El sistema anterior fue el Sistema Métrico Decimal (SMD), propuesto en 1875 e implantado en 1889. El S.I. contempla 7 unidades básicas (International Bureau of Weights and Measures, Taylor, y Thompson, 2001): el metro (para la magnitud longitud), el kilogramo (masa), el segundo (tiempo), el amperio (intensidad de corriente eléctrica), el kelvin (temperatura), el mol (cantidad de sustancia) y la candela (intensidad lumínica). El resto de unidades existentes se pueden obtener a partir de combinaciones de estas (por ejemplo, el metro cuadrado para la superficie).

Actividad 3.3

Consulta en el diccionario las palabras siguientes: milla, pie, celemín, fanega, toesa, yarda, onza, pulgada, pipa, libra, nudo, arroba.
Construye con estas palabras (y otras que te sepas de la misma intención) una tabla de doble entrada, consignando la magnitud, el origen y la equivalencia con el Sistema Internacional de cada una de ellas.

3.4 Propiedades de la medida

La comprensión de la medida de magnitudes y por tanto la asimilación de la idea de cantidad de magnitud, es un proceso complejo en el que están involucrados diferentes conceptos. Stephan y Clements (2003) consideran que hay seis conceptos fundamentales que tienen que ser dominados por el alumno.

a) Equipartición

b) Iteración de unidades

c) Transitividad

d) Conservación

e) Acumulación de distancia

f) Relación entre el número y la medida

La equipartición consiste en el proceso o actividad, puramente mental, de dividir un objeto en partes de la misma cantidad de magnitud. Esto requiere la aceptación de que un objeto puede ser descompuesto, hecho que no es trivial para los alumnos. Cuando la comprensión del alumno avanza y llega a comprender que el resultado de una partición puede volver a ser objeto de una equipartición (y de tantas como se quiera), puede inducir a la continuidad de la medida.

La iteración de unidades es la habilidad de repetir la unidad de medida de forma sucesiva para cubrir la cantidad de magnitud del objeto medido. Esta iteración debe ser exhaustiva, cubriendo toda la cantidad de magnitud del objeto y realizada con un referente (unidad de medida) fijado y único. El ejemplo de las botellas medidas con bolígrafos y clips es un precursor del tratamiento de la medida empleando unidades y sub-unidades, aunque en dicho ejemplo no tenga por qué existir una relación explícita entre ambas unidades.

La transitividad de la medida se refiere a que si un objeto A tiene la misma cantidad de magnitud de un objeto B y el objeto B tiene la misma cantidad de magnitud que un objeto C, entonces el objeto A tiene la misma cantidad de magnitud que el objeto C. Por ejemplo, si un lápiz cuesta la misma cantidad de euros que una goma de borrar y esta cuesta la misma cantidad que un rotulador, se concluye que el lápiz cuesta la misma cantidad que el rotulador.

La propiedad de conservación afirma que la medida de la cantidad de magnitud de un objeto no cambia aunque este sufra determinadas transformaciones o se realicen cambios en el proceso de medida. Los objetos pueden sufrir transformaciones de descomposición/recomposición, posición y forma, transformaciones que se denominan «rígidas». Un ejemplo para la transformación descomposición/recomposición en la magnitud peso es el siguiente: el peso de media docena de manzanas es el mismo si las pesamos todas juntas que si pesamos cada una de ellas por separado y después sumamos sus pesos. Un ejemplo para la transformación posición en la magnitud longitud es el siguiente: un lápiz conserva su longitud aunque lo cambies de posición (Figura 3.3).

Un ejemplo para la transformación de la forma en la magnitud volumen es el siguiente: las figuras A y B de la Figura 3.3 son diferentes en su forma; pero representan la misma cantidad de volumen (5 policubos). Hay que tener en cuenta, no obstante, que pueden existir otras magnitudes que sí sufran cambios. Por ejemplo, las figuras A y B no tienen la misma superficie.

Figura 3.3: Lápices en diferentes posiciones y figuras con distinta forma pero el mismo volumen.

La acumulación de distancia y aditividad recoge que, según se va iterando la unidad de medida y se va realizando un conteo de dicha iteración, la cantidad de iteraciones indica la medida de la cantidad de magnitud. Por ejemplo, si afirmamos «la clase mide 20 pasos», significa que, para medir la clase tiene que repetirse veinte veces, una detrás la otra, el proceso de dar un paso desde donde acabó el paso anterior.

La relación entre el número y la medida expresa la relación entre el proceso de medida y el número obtenido en este proceso. Esta propiedad implica entender que, si medimos una cantidad de magnitud con dos unidades diferentes, obtenemos números diferentes (la medida de la cantidad de magnitud asociada a cada unidad), aunque esa cantidad de magnitud no varía. Por ejemplo, si queremos medir dos ventanas iguales con palmos, la medida dada por la mano del profesor será un número menor que la medida por un alumno, por ser la mano del profesor mayor que la del alumno.

Actividad 3.4

Elige una magnitud y diseña una sesión para 3º de Educación Primaria, con material manipulativo, en la que se ponga de relieve algunas de las seis propiedades anteriores.

3.5 Medida directa, indirecta y estimación

La medida **directa** consiste en reiterar sucesivamente las unidades de medida hasta cubrir la cantidad de magnitud que se quiere medir. Realizamos, por ejemplo, una medida directa cuando contamos el número de postits que necesitamos para cubrir una carpeta (Figura 3.4 izquierda) o cuando contamos el número de grados que hemos girado un objeto. Se puede medir la capacidad de una caja contando el número de policubos que caben dentro (Figura 3.4 derecha).

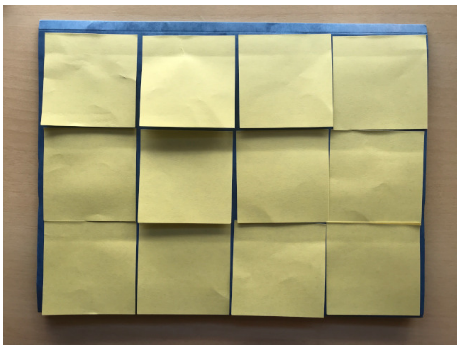


Figura 3.4: Medida de la superficie de una carpeta cubierta con postits y medida de la capacidad de una caja contando los cubos.

La medida **indirecta** se hace necesaria cuando el objeto no puede medirse directamente, bien por su tamaño, por su forma o por su inaccesibilidad. En este caso se calcula la medida mediante operaciones aritméticas que pueden involucrar magnitudes diferentes a las que queremos medir. En algunos casos en los que la medida directa es posible, se elige una medida indirecta si esta es más ágil. Por ejemplo, para medir la longitud de la diagonal de una pizarra, puede ser más fácil medir la longitud de sus lados y aplicar el teorema de Pitágoras. La superficie de las figuras planas se puede calcular mediante algunas de sus longitudes. En el caso del rectángulo, su superficie puede obtenerse a partir del producto de la medida de dos lados consecutivos. Esta relación es sencilla de ver al cuadricular un rectángulo. De la misma forma, el volumen del prisma se puede obtener mediante el producto de sus tres dimensiones: largo, ancho y alto. Se puede ver fácilmente esta relación al llenar con cubos unidad un prisma de base rectangular. En el ejemplo de la Figura 3.5 se tienen 2 placas de 3 unidades de ancho y 4 de largo. El volumen del prisma es el número total de unidades (24), que se obtienen indirectamente de multiplicar la superficie de la base por su altura (2x3x4). La medida del volumen de este prisma también podría obtenerse de manera directa contando del número de policubos unidad contenidos en él. En el caso de esta medida directa, la unidad de medida es un referente de la misma magnitud que se está midiendo (en este caso, volumen). En el caso indirecto, la unidad de medida es de longitud, no de volumen.

En la vida real surgen situaciones en las que no es necesario dar una medida exacta de un objeto. Por ejemplo, al hacer la comida es habitual ponerle sal con un pellizco o calcular la cantidad de arroz de un plato a ojo. Para esto es suficiente con una estimación aproximada de la cantidad de estos ingredientes. Otro ejemplo cotidiano es cuando queremos colocar un libro en una estantería con varios libros y no recurrimos a una regla para medir el grosor, sino que estimamos la cantidad de longitud para ver si cabe. En otras ocasiones, la cantidad de medida que hay que calcular es muy difícil de medir con las herramientas que se disponen, como la altura de un árbol y por eso se realiza una estimación.

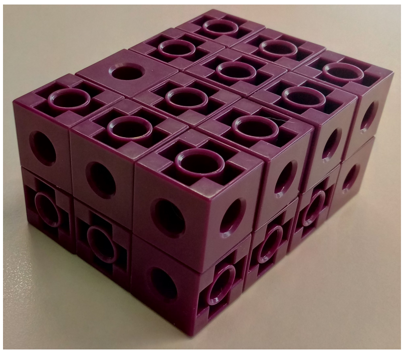


Figura 3.5: Inducción de la fórmula del volumen del prisma.

Según Segovia y Rico (1996), la **estimación** se define comúnmente como el «*juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias individuales del que lo emite*» (Segovia, Castro, Castro, y Rico, 1989, p. 18). Si tuviésemos que resumir aún más el concepto diríamos que estimar es «valorar de manera aproximada» y esta valoración puede referirse al resultado de una operación aritmética o a la medida de una cantidad. Bright (1976) define la estimación en medida como un proceso mental con aspectos manipulativos o visuales y sin el empleo de ningún instrumento de medida.

La estimación suele basarse en la percepción de la cantidad de magnitud y el uso de referentes, lo que resulta en una asignación subjetiva de un valor numérico a la medida de esta cantidad de magnitud. La estimación, en la mayoría de situaciones cotidianas, está estrechamente ligada a nuestros sentidos, en particular a la vista. Por ejemplo, estimamos la altura de una puerta o si en un lugar podemos aparcar el coche simplemente con un vistazo (sin que sea necesario en este segundo caso llegar a la medida de este lugar). Se trataría de una comparación de cantidades de longitud por estimación.

En la estimación de cantidades de magnitudes continuas, como la longitud o la superficie, existe la necesidad de una «interiorización» previa de unidades de medida como puede ser el metro, en el caso de la longitud. Así, los procesos de estimación se hacen más complejos cuando se necesita la interiorización previa de la unidad de medida.

3.6 Enseñanza de la estimación en medida

El desarrollo de las habilidades de estimación debe realizarse por medio de la interacción con el entorno y con la exposición repetida a situaciones en las que sea necesaria esta habilidad. En consecuencia, para que las actividades que se propongan a los alumnos sean efectivas es importante que sean diseñadas adecuadamente. Lott y Harrell (2003) proponen seis principios básicos a tener en cuenta a la hora de diseñar tareas en las que se trabaje la estimación que resumimos a continuación. En el libro de Carrillo y cols. (2016) puede encontrarse una descripción más detallada.

Desarrollar la habilidad. La estimación es una habilidad que se adquiere con la práctica. Además, es importante que sean capaces de evaluar la calidad de sus propias estimaciones. Por tanto es necesario que los alumnos se enfrenten a varias situaciones en las que sea necesaria.

Utilizar varios sentidos. De forma natural, el sentido que tendemos a usar para hacer estimaciones es la vista. Sin embargo, también podemos aprovechar sentidos como el tacto (para estimar distancias o volúmenes) o el oído (para estimar distancia a una fuente de sonido) a la hora de hacer estimaciones. Es conveniente proponer actividades en las que no sólo se emplee la vista, favoreciendo así que el alumno genere referencias que le ayudarán a mejorar su capacidad de estimación.

Utilización de fuentes externas y conocimientos previos. El proceso de estimación se basa, en gran medida, en nuestras referencias o experiencias previas. Es conveniente, por tanto, que los ejercicios se basen en situaciones en las que el contexto sea familiar para los alumnos. De esta forma, favoreceremos que puedan emplear experiencias previas como referencia y que sean capaces de evaluar la calidad de su estimación. Por ejemplo, si se quiere trabajar la estimación del peso, se puede proponer que se haga con un objeto familiar para los alumnos, como una silla de la clase. Así, si se produce una estimación muy desacertada, ésta podrá evaluarse comparándola con un objeto de peso próximo a dicha estimación: una estimación de unos 200 gramos puede compararse con un estuche de lápices y una estimación muy por arriba puede compararse con el peso de una persona.

La estimación como proceso. Es recomendable que los alumnos se enfrenten a problemas en los que deban llevar a cabo la estimación de forma gradual, empleando diferentes características del objeto que se estima.

Adecuación de la estimación. Una habilidad que también es importante desarrollar es la capacidad para decidir en qué situaciones es conveniente estimar una cantidad de forma aproximada y en cuales no. Por ejemplo, durante la elaboración de una receta es conveniente estimar pero puede no serlo al poner azulejos en el suelo, porque las distancias deben ser exactas.

Uso de estimaciones en contextos profesionales. La utilización en el aula de juegos de rol permite que los estudiantes puedan practicar el uso de la estimación en diferentes profesiones y la habilidad para decidir cuándo estimar y cuándo no. Esto hace que los alumnos adquieran conciencia de la necesidad de la estimación precisa a la vez que desarrollan sus habilidades.

Según Segovia y Rico (1996), en niveles superiores de primaria se deben realizar actividades que permitan interiorizar las unidades de medida estándar de cada una de las magnitudes. Una actividad puede consistir en pedir a los alumnos que digan objetos que tengan medidas próximas a las unidades; otro tipo consiste en que, dados los objetos, se pide a los alumnos que indiquen qué unidad de medida es la adecuada a las dimensiones de cada uno de ellos. De igual forma y con actividades similares los alumnos deben conseguir manejar una buena colección de «referentes», es decir, conocer la medida de cantidades que les resulten próximas como por ejemplo su peso y su altura. No es difícil que los alumnos dispongan de una colección de referentes que les permitan la realización de estimaciones por comparación en la mayor parte de las situaciones.

Bright (1976) propone la realización de actividades de estimación de cantidades que combinen la presencia o ausencia del objeto que se pretende medir y la presencia o ausencia de la unidad de medida. De esta manera existen ocho tipos de actividades distintas (Figura 3.6). Por ejemplo, la estimación de la superficie del tablero de una mesa, estando la unidad de medida, el decímetro cuadrado, presente (es decir, que el niño pueda verlo) o que dicha unidad no esté presente. Otro grupo de actividades consistiría en asociar objetos, ausentes o presentes, a una medida dada, estando presente o ausente la unidad de medida; por ejemplo, dada la medida de 2 metros cuadrados buscar superficies que tengan una medida aproximada.

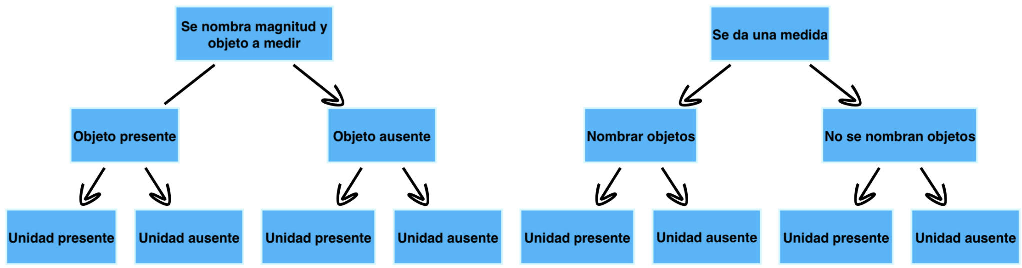


Figura 3.6: Tipos de actividades según Bright (1976). *Imagen extraída de Segovia y Rico (1996)*.

Actividad 3.5

Elige un curso intermedio de Primaria y, atendiendo a las indicaciones anteriores, diseña una actividad sobre estimación para ese curso, justificando las decisiones tomadas. Después, adapta la actividad a un curso anterior y un posterior y justifica qué aspectos diferencian las tres actividades.

3.7 Situaciones y recursos didácticos para el aprendizaje de la medida de magnitudes

En la línea de lo afirmado por Frías, Gil, y Moreno (2001) dentro del tratamiento curricular deberían destacarse, especialmente por la incidencia que pueden tener en el trabajo en el aula, los siguientes aspectos:

- La necesidad de realizar mediciones efectivas, utilizando diferentes unidades e instrumentos de medida.
- La superación de la práctica escolar, muy extendida, en la que precisión de las medidas prima de forma casi absoluta. Esto no sucede casi nunca en el mundo real, donde el proceso de medición es, por su propia naturaleza, de carácter aproximado. Además, esto implica la necesidad de utilizar la unidad adecuada según el grado de aproximación requerida por la situación.
- La potenciación de la estimación como una de las habilidades que resultan más útiles desde el punto de vista práctico.

En base a estas recomendaciones vamos a ver distintas actividades orientadas al aprendizaje de la medida de magnitudes, haciendo primero un breve repaso al material que se puede utilizar en ellas.

3.7.1 El material en la enseñanza-aprendizaje de la medida de magnitudes

⊳ La longitud

Existen varios instrumentos para medir las magnitudes de forma directa. La regla graduada o metro de carpintero son ejemplos de instrumentos que se emplean para medir la longitud. El contorno de un objeto curvo se puede medir mediante un hilo, haciendo que recorra ese contorno y, después, estirándolo encima de una regla graduada (Figura 3.7) o mediante una cinta de medir como las que se usan en los talleres de costura.

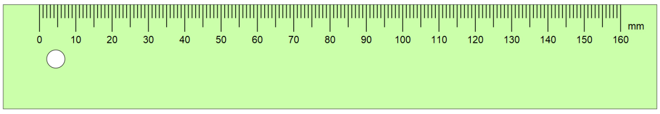


Figura 3.7: La regla graduada suele ser de un material semitransparente para poder ver la distancia que se va a medir más fácilmente.

⊳ La amplitud angular

La amplitud angular se mide con el transportador o sextante (Figura 3.8). Estos instrumentos, junto con los que se emplean para medir la longitud, se utilizan superponiéndolos encima del objeto que se quiere medir.

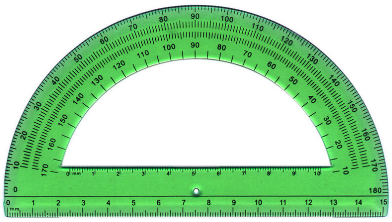


Figura 3.8: Ejemplo de transportador de ángulos.

⊳ La capacidad

Para medir la capacidad se pueden emplear distintos tipos de jarras o recipientes graduados (Figura 3.9), probetas o pipetas y cualquier material no estructurado como vasos, tazas de distintos tamaños y jeringuillas que permitan medir, con mayor o menor exactitud, la capacidad de líquido o de arena con la que se está trabajando.

Figura 3.9: Ejemplo de jarra medidora.

⊳ El peso

El peso se mide con una balanza o una báscula. Una balanza es una palanca de brazos iguales que, mediante el equilibrio entre los pesos de dos cuerpos, permite comparar masas (Figura 3.10). Para realizar las mediciones se utilizan patrones de masa cuyo grado de exactitud depende de la precisión del instrumento. Una báscula tiene una plataforma horizontal sobre la que se coloca el objeto que se quiere pesar.

Figura 3.10: Ejemplo de balanza que se usa en las actividades escolares.

⊳ El tiempo

El tiempo se mide mediante relojes analógicos, digitales, de sol o de arena (Figura 3.11). A diferencia de los relojes analógicos, digitales o de sol, los relojes de arena son un instrumento mecánico que sirve para medir un determinado periodo de tiempo y no para indicar el momento del día en el que nos encontramos. Para medir el transcurso de tiempo que ha pasado entre dos eventos determinados podemos utilizar el cronómetro.

Figura 3.11: Ejemplos de reloj analógico y de arena.

⊳ La temperatura

La temperatura se mide con termómetros. Desde su invención han evolucionado mucho, principalmente a partir del desarrollo de los termómetros electrónicos digitales (Figura 3.12). Inicialmente, los termómetros se fabricaron aprovechando el fenómeno de la dilatación. Por ello, se prefería el uso de materiales con elevado coeficiente de dilatación, de modo que, al aumentar la temperatura, su estiramiento fuera fácilmente visible. El metal base que se utiliza en este tipo de termómetros es el mercurio, encerrado en un tubo de vidrio que incorpora una escala graduada. Actualmente y para uso escolar se utilizan los termómetro digitales que utilizan circuitos electrónicos para convertir en números las pequeñas variaciones de tensión obtenidas, mostrando la temperatura en una pantalla.

Figura 3.12: Ejemplo de termómetro digital.

3.7.2 Actividades para la enseñanza-aprendizaje de la medida de magnitudes

Actividades para trabajar la capacidad

Para trabajar la capacidad es necesario disponer en clase de agua o arena así como de recipientes de formas variadas, de plástico o algún otro material seguro. El objetivo básico de los primeros cursos (infantil y primer ciclo) es proporcionar a los niños la ocasión de adquirir la conservación de las capacidades a través de la experiencia por la manipulación del trasvasado de líquido o de otros materiales continuos (como arena). Una actividad interesante que permite trabajar la conservación y la estimación es la elaboración de recetas de cocina como la que encontramos en la actividad de laboratorio 3.6

Actividad 3.6

Contenido: Recetas de cocina con unidades no convencionales

Tareas
Analiza la siguiente actividad:

> *Vamos a hacer un bizcocho de yogur cuyos ingredientes se miden a partir de una unidad de capacidad, el recipiente de yogur. Los ingredientes son:*
>
> - *2 yogures*
> - *3 huevos*
> - *4 medidas de azúcar*
> - *4 medidas de harina*
> - *Media medida de aceite*
> - *Medio paquete de levadura*

Incluye además, preguntas para que los niños entiendan que la unidad de capacidad es el vaso del yogur y piensa cómo podías trabajarla con alumnos de cursos superiores para que trabajen las conversiones al Sistema Internacional tanto en capacidad como en peso.

Para los cursos intermedios de primaria, se propone una actividad cuya finalidad sea construir un sistema regular con unidades del S.I. y hacer comparaciones con distintas graduaciones. Con la siguiente actividad se puede continuar con el estudio de la capacidad empleando diferentes elementos: graduaciones, comparación directa o indirecta o comparación con un elemento arbitrario. A continuación puede emplearse un sistema de unidades, no necesariamente regular. Con todo ello los estudiantes verán la necesidad de medir y llegar a un resultado numérico.

Actividad 3.7

Contenido: Recipientes con distintas graduaciones

Tareas

Diseña una actividad para los cursos intermedios de primaria que incluya los siguientes elementos

- Construir una graduación regular de un recipiente
- Completar y continuar graduaciones
- Relacionar graduaciones de recipientes iguales utilizando distintas unidades

En los últimos cursos se puede empezar a trabajar con números decimales y por tanto hacer un refinamiento del S.I. de forma que podamos medir con cierta precisión las capacidades de hasta 5 litros.

Actividad 3.8

Contenido: Trabajamos con decimales la capacidad

Tareas

Diseña una actividad para los cursos superiores de primaria que implique el trabajo con capacidades de hasta varios litros y en la que los alumnos tengan que trabajar tanto las subunidades del S.I. como la expresión con decimales de la capacidad del recipiente expresada en litros.

Las actividades de laboratorio 3.9 y 3.10 están pensadas para analizar cómo se llevarían estas propuestas a un aula de primaria y cómo se trabajaría tanto la estimación de capacidades como la propiedad de conservación de la capacidad.

Actividad 3.9

Contenido: Clasificación de capacidades

Tareas

Analiza la siguiente actividad extraída de Godino, Batanero, y Font (2004) e indica en qué curso de primaria la llevarías a cabo, la forma de trabajarla en clase y las preguntas que les haríamos a los alumnos para asegurarnos de que han entendido la actividad.

> *Dar a los niños una colección de recipientes etiquetados y elegir uno de ellos como patrón de comparación. La tarea de los niños será clasificar la colección según que tengan más, menos o igual capacidad que el patrón. Preparar una hoja de registro como la siguiente. Comprobar las previsiones llenando los recipientes con algún material suelto (arroz, etc.)*

	Previsión			*Después de la medida*		
Recipiente	*Más*	*Menos*	*Igual*	*Más*	*Menos*	*Igual*
Bote 1						
Bote 2						
...						

Actividad 3.10

Contenido: Ordenación de capacidades

Tareas

Analiza la siguiente actividad extraída de Godino y cols. (2004) e indica en qué curso de primaria la llevarías a cabo, la forma de trabajarla en clase y las preguntas que les haríamos a los alumnos para asegurarnos que han entendido la actividad.

> *Dando una serie de cinco o seis recipientes etiquetados de formas y tamaños diferentes; la tarea consiste en ordenarlos de menor a mayor volumen.*

Actividades para trabajar la masa

Para trabajar esta magnitud es imprescindible disponer de balanzas en clase, bien de platillos o bien de lectura directa. Hay que tener en cuenta que la sencillez del aparato de medida debe ajustarse a la edad de los niños. Se necesitan también materiales con los que construir pesas patrón o unidades de medidas, tales como arena, plastilina, tuercas, monedas, canicas, etc.

En el primer ciclo se pretende que los alumnos aprendan el manejo de la balanza y de la báscula si lleva escala además de su lectura para usarla en comparaciones directas o indirectas, habituándolos al uso de masas patrón. A continuación se propone una actividad de laboratorio para que se diseñen actividades destinadas tanto al manejo de la balanza y la báscula como a trabajar el peso de distintos objetos en los primeros cursos de primaria.

Actividad 3.11

Contenido: Nos familiarizamos con los pesos y los instrumentos de medida de peso

Tareas
Diseña actividades para los primeros cursos de primaria teniendo en cuenta las siguientes indicaciones. Puedes agrupar diversos ítem en una misma actividad o preparar actividades individuales. Indica además en qué curso de primaria la llevarías a cabo, la forma de trabajarla en clase y las preguntas que les haríamos a los alumnos para asegurarnos que han entendido la actividad.

- *Ordenar objetos de masas diferentes haciendo uso de la balanza. Las masas han de ser lo suficientemente próximas para que la estimación no sea un recurso óptimo.*
- *Clasificar objetos de igual masa.*
- *Verificar ordenaciones de objetos usando la balanza.*
- *Comparar objetos usando masas patrones, ordenando del más ligero al más pesado.*
- *Asociar a distintos objetos la expresión de su medida en base a una unidad patrón.*

En los cursos medios y superiores se retoman las comparaciones de objetos y se amplía el dominio de instrumentos de medida de masa. Se introducen ya las unidades del gramo al kilogramo y se busca la estimación del orden de magnitud.

Actividad 3.12

Contenido: Profundizamos en el significado de la magnitud peso

Tareas
Diseña actividades para los cursos intermedios y superiores de primaria teniendo en cuenta las siguientes indicaciones. Puedes agrupar diversos ítem en una misma actividad o preparar actividades individuales. Indica además en qué curso de primaria la llevarías a cabo, la forma de trabajarla en clase y las preguntas que les haríamos a los alumnos para asegurarnos que han entendido la actividad.

- *Comparar objetos con el mismo aspecto exterior y masa diferente.*
- *Fabricar, con plastilina o policubos, objetos más o menos pesados que otro dado (el doble, el triple, la mitad...) y comprobarlo con una balanza o báscula.*
- *Fabricar un sistema regular de pesas, marcándolas convenientemente.*
- *Buscar equivalencias entre las unidades de un sistema dado.*
- *Estimar el peso de objetos que no podemos pesar.*
- *Estimar cuántas piezas de fruta caben en un kilo según se trate de naranjas, melocotones, cerezas...*

⊳ Construcción de una balanza de resorte

Otra de las actividades que puede realizarse en clase es la construcción de una balanza de resorte con un muelle metálico. El tramo de extensión del muelle funciona como una medida para el peso de objetos.

En primer lugar, el maestro debe fijar el muelle a una tabla de madera. Bajo el muelle se coloca una pequeña bolsa o plato donde se colocarán los objetos que se quieran pesar. Los alumnos observarán cómo el maestro realiza este montaje. Lo primero que deben observar es que cuanto más pesado sea el objeto en la bolsa, mayor es la longitud resultante del muelle.

Para comparar los pesos pueden, por tanto, poner señales en una hoja de papel colocada tras el muelle. La marca más baja indicará el objeto más pesado. Al tratar esta idea junto a los alumnos, tendrán una primera visión de cómo se crea la cantidad física peso y cómo ésta puede transformarse en una forma de medir la longitud: la «longitud del estiramiento» puede funcionar como una medida para el peso.

En un primer momento se trata de que los alumnos observen la necesidad de «regularizar» la balanza construida. Se introduce entonces una unidad determinada, partiendo de un objeto que pese, exactamente, 100 g. Un alumno debe pesar el objeto en la balanza y pondrá una marca en el papel tras el muelle. A continuación se añade otro objeto de 100g y se señala una nueva marca y así sucesivamente. De este modo los alumnos verán cómo se crea una escala, desde 0 hasta 1000g, de 100g en 100g. Obviamente este instrumento de medida no es muy preciso pero el experimento muestra claramente cómo funcionan los instrumentos de medida de masa: transforman la masa en otra magnitud que se puede medir directamente. En la Figura 3.13 se puede ver un esquema de cómo funciona este mecanismo.

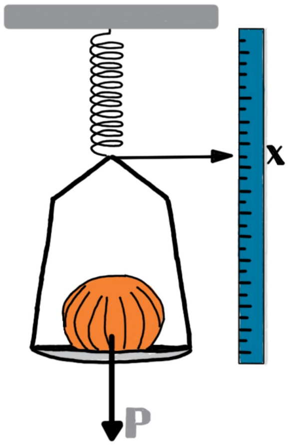


Figura 3.13: Esquema de una balanza de resorte.

Actividades para trabajar el área

Ya en infantil y en los primeros cursos de primaria los alumnos se han enfrentado a situaciones reales donde la magnitud área tiene cierta importancia. Pensemos en un niño que quiere saber cuánto papel de regalo necesita para embalar un paquete o cuánta tela hará falta para vestir a su muñeco. En estas actividades, el objetivo central es observar si una pieza de papel o de tela es lo suficientemente grande para cubrir una superficie. Sin embargo el área es una magnitud algo más complicada que la masa o la longitud, no se pueden comparar dos áreas «directamente» usando términos como «más largo» o «menos pesado».

La estrategia más elemental para comparar áreas es superponer las figuras, la que más sobresalga tendrá un área mayor. Pero llegará un momento en que las áreas no se podrán superponer y sería conveniente poder medirlas de igual forma que obtenemos un peso o una longitud.

Para comparar por ejemplo el área de dos parterres, podemos intentar ir poniendo plantas iguales en uno y otro y ver en cuál caben más plantas. De esta forma sabremos, indirectamente, cuál es más grande en superficie. El hecho de usar una pieza como unidad no sólo refuerza la idea de la noción de área sino que ayuda a relacionar este concepto con otras magnitudes trabajadas previamente ya que se trabaja de forma directa.

Se plantean a continuación actividades en las que los alumnos tengan que comparar áreas de figuras que no difieran demasiado.

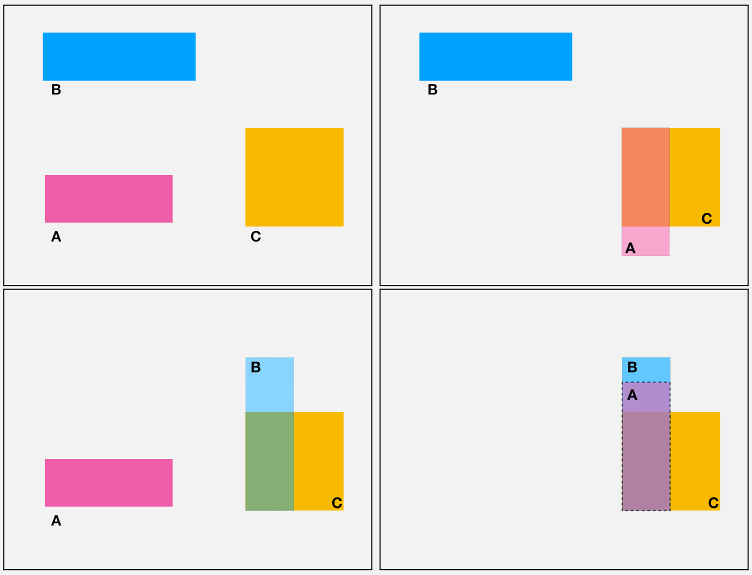
Actividad 3.13

Contenido: Compramos áreas por superposición

Tareas

Analiza la siguiente actividad de manera que se trabaje con los alumnos la idea de conservación del área al *cortar y pegar* las tartas.

> *Vamos a comparar el área de las tartas que vemos en la figura. En este caso la estrategia de superponer objetos no es muy práctica, aunque sí que permite observar que la primera «tarta A» es un poco más grande que la «tarta B» pero… ¿cómo comparamos con la tarta C?*



En la siguiente actividad de laboratorio nos encontramos con una situación interesante. Se trata de ver cuál de las dos bandejas es más grande pero en este caso no utilizaremos la técnica de superposición sino la de calcular el área de manera directa. A través de esta experiencia los alumnos usan una unidad de medida natural (el pastel). Es importante trabajar mucho este tipo de problemas y, simultáneamente, trabajar la multiplicación y la división a través de modelo de áreas.

Actividad 3.14

Contenido: Calculamos áreas de manera directa

Tareas

Analiza la siguiente actividad de manera que se trabaje con los alumnos la medida de áreas de manera directa utilizando como unidad de medida los pasteles que caben en cada bandeja.

> *Queremos averiguar cuál de las dos bandejas de pasteles que aparece en la imagen es más grande. Una parece más larga y la otra más ancha. Una forma de resolverlo sería copiar el dibujo en el cuaderno y superponerlas. Pero es más fácil si intentamos determinar cuántos pasteles caben en cada bandeja.*

Esta idea de entender el área como el número de unidades que recubren la superficie que se quiere «medir» puede trabajarse mediante materiales manipulables y también mediante situaciones como las que encontramos en la actividad de laboratorio 3.15

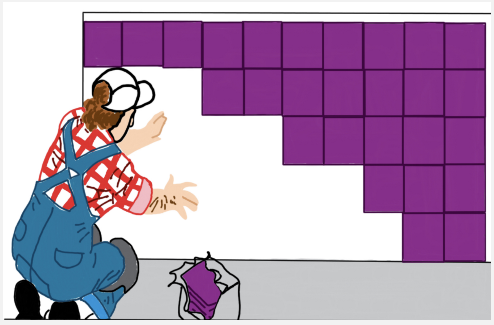
Actividad 3.15

Contenido: Calculamos áreas de manera directa II

Tareas

Analiza la siguiente actividad de manera que se trabaje con los alumnos la medida de áreas de manera directa utilizando como unidad de medida los azulejos que coloca el albañil.

> *¿Cuántos azulejos debe poner el albañil para cubrir toda la pared?*



Analiza también los posibles problemas que pueden encontrar los alumnos cuando no se les permita hacer un recuento de azulejos en cada una de las dimensiones para después multiplicar.

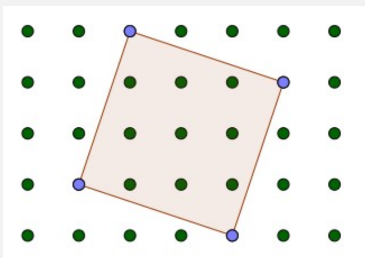
Una forma de introducir el área de figuras no cuadrangulares a través de cuadrículas es utilizando el geoplano como veremos a continuación.

⊳ Cálculo de áreas con geoplano

Resolvemos primero la siguiente actividad.

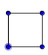
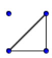
Actividad 3.16

Calcula al menos de dos formas distintas, sin emplear fórmulas, el área de la siguiente figura.



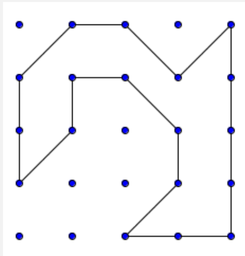
Una primera decisión se refiere a la elección de la unidad de medida. Tomamos como unidad de superficie el cuadrado básico de la trama (que denominaremos u^2) y como unidad de longitud el lado de este cuadrado (que denominaremos u). El geoplano es una herramienta idónea para enseñar métodos diferentes para encontrar el área de regiones planas. Mediante una serie de actividades se pueden proponer cinco métodos de complejidad creciente para calcular estas áreas. Pasamos a describir cada uno de ellos.

—∘ *Método entero-mitad*

Si  es una unidad de área, entonces  es media unidad de área. Podemos calcular el área de ciertas figuras contando cuadrados enteros y sumando mitades.

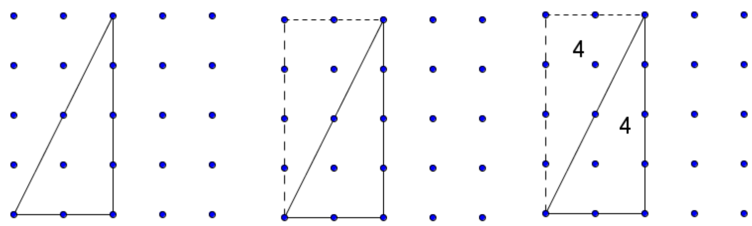
Actividad 3.17

Calcula el área de la siguiente figura.



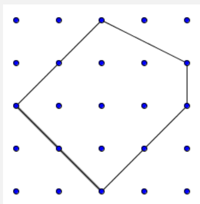
⊸ *Método de reducción a la mitad*

Si una región triangular puede ser «rodeada» por un rectángulo el doble de grande, entonces el área del triángulo es la mitad que el área del rectángulo.



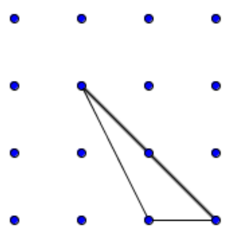
Actividad 3.18

Calcula el área de la siguiente figura.

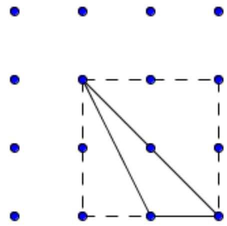


⊸ *El no-método*

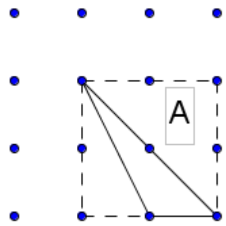
El «no-método» es una alternativa para los dos métodos anteriores. Vamos a describirlo con un ejemplo. Queremos calcular el área de la siguiente figura:



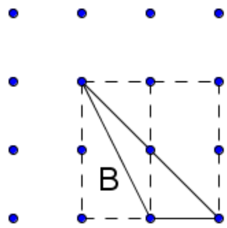
En primer lugar enmarcamos nuestra figura en un rectángulo que, en este caso, tendrá un área de 4 unidades.



El triángulo A ocupa la mitad de rectángulo marco y, por lo tanto, tendrá un área de 2 unidades.



El triángulo B es exactamente la mitad de un rectángulo de dos unidades y por tanto, tendrá un área de 1 unidad.



Por lo tanto A+B=3 unidades y, puesto que el rectángulo marco ocupaba 4 unidades, el triángulo inicial tendrá un área de 1 unidad.

—∘ *Formula de Pick*

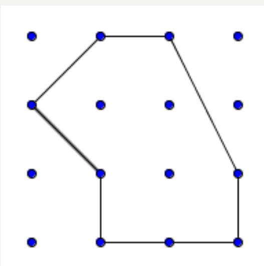
Es un método muy sencillo que permite encontrar el área contando puntos a través de la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\text{Número de puntos que tocan el borde}}{2} + \text{Número de puntos interiores} - 1$$

En el ejemplo 3.1 usamos esta fórmula para calcular el área de un polígono dibujado sobre una malla de puntos o construido sobre un geoplano.

Ejemplo 3.1

Calcula, mediante la fórmula de Pick, el área de la siguiente figura



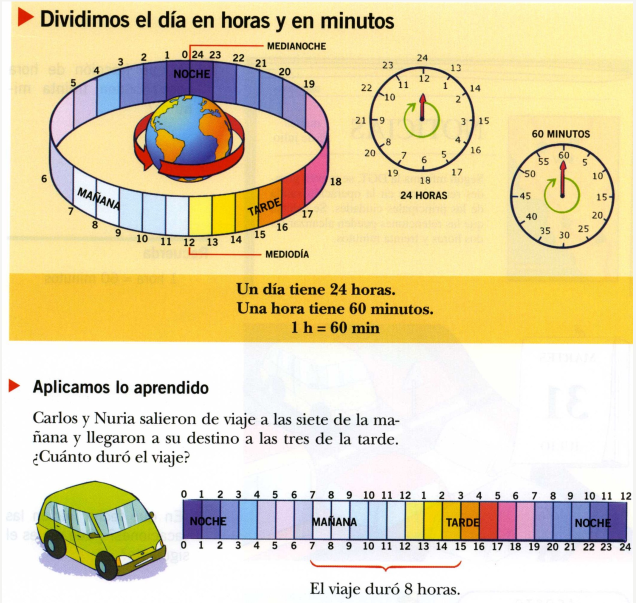
$$\frac{8}{2} + 3 - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

Actividades para trabajar el tiempo

Al considerar cómo enseñar la medida del tiempo debemos tener en cuenta dos aspectos centrales. El tiempo puede verse como un proceso lineal –se puede mostrar a través de una línea– exactamente igual que un peso o una longitud. Sin embargo estamos acostumbrados a leerlo en un círculo, expresando su carácter cíclico. Esto hace que trabajar la medida del tiempo suponga una serie de dificultades.

En el ejemplo 3.2, extraído de *Matemáticas 3: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 164), encontramos una actividad que muestra cómo se puede trabajar de manera lineal el carácter circular del tiempo.

Ejemplo 3.2



Al medir el tiempo podemos estar considerando dos cosas: podemos querer determinar una duración (paso del tiempo entre dos momentos) y podemos querer determinar un punto en la línea horaria (una hora del día, un día de la semana, un año,...).

La lectura de la hora es, por tanto, fundamental para poder trabajar con esta magnitud. Es una actividad que empieza a abordarse en educación infantil y que implica trabajar otros conceptos centrales relacionados.

Actividad 3.19

Contenido: Entendemos la magnitud *tiempo*.

Tareas

Diseña una actividad para los primeros cursos de primaria en la que los alumnos trabajen los siguientes conceptos

- Comprender que existen patrones temporales (días, meses, años,...).

- Entender el carácter cíclico del paso del tiempo.
- Observar la subjetividad en la percepción del paso del tiempo.

El tiempo es algo intangible para los niños y, sin embargo, es un concepto al que se enfrentan diariamente a través de las rutinas de su día a día. Una forma de hacer que los niños sean más conscientes del paso del tiempo y de su carácter cíclico es enfrentarlos a un esquema donde se representen sus rutinas diarias o semanales así como a calendarios.

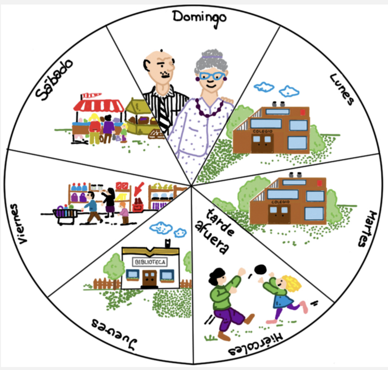
En la actividad de laboratorio 3.20 se diseñará una actividad en donde, dado un esquema circular de los días de la semana, los alumnos sean capaces de distinguir una serie de actividades cotidianas a la vez que trabajen el carácter repetitivo y circular de las semanas dentro de un mes.

Actividad 3.20

Contenido: El tiempo es una rueda

Tareas

Diseña una actividad para los primeros cursos de primaria en la que, dado un esquema circular parecido al que se muestra en la figura, los alumnos trabajen la repetición de los días de la semana dentro de un mes y el carácter cíclico de las actividades que realizan durante los diferentes días.



Se les puede presentar (o que hagan ellos) un calendario mensual o anual donde pueden indicar las fechas importantes como cumpleaños, días festivos, etc. A partir de esto, se pueden plantear preguntas como: en el calendario hemos marcado el cumpleaños de Pablo, ¿en qué día de la semana lo celebraremos? Para algunos niños de primer ciclo la lectura de calendario supone no pocas dificultades. Al principio irán leyendo un día tras otro, luego observarán que pueden usar la cuadrícula para hallar el día directamente. El calendario es una fuente inmensa de actividades de aritmética que vale la pena aprovechar.

Actividad 3.21

Contenido: Eventos importantes en el calendario

Tareas

Diseña una actividad para los primeros cursos de primaria en la que, dado un calendario anual, los alumnos puedan marcar eventos importantes en el mismo y hagan cálculos de la distancia en días o meses entre dos eventos determinados.

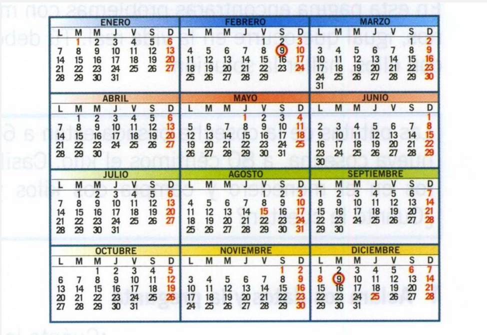


Imagen extraída de Matemáticas 3: Primaria. Dejar huella (*2007, p. 171*)

Una vez se distingue entre distintas franjas horarias: mañana, tarde y noche, conviene empezar a trabajar la división en horas. A partir de este momento se puede empezar a trabajar también la lectura de la hora. Se empieza por trabajar las horas en punto y las medias. Para ello puede ser interesante poner en la clase un reloj que, con algún sonido, marque las horas y las medias.

Es importante que los niños sean capaces de estimar correctamente la duración de sus actividades cotidianas. ¿Cuánto tiempo pasan en el patio a la hora del almuerzo? ¿Cuánto tiempo tardan en lavarse los dientes? ¿Cuánto tiempo dura una fiesta de cumpleaños? El hecho de entender mejor la duración subjetiva del paso del tiempo facilitará también la lectura de la hora.

Actividad 3.22

Contenido: ¿Cuánto tiempo tardamos?

Tareas

Diseña una actividad en la que los alumnos tengan que registrar cuánto tiempo pasan haciendo actividades cotidianas para luego hacer comparaciones y operaciones aritméticas entre las diferentes actividades y entre los demás alumnos de la clase.

	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h	13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h	23h
Durmiendo																								
En el cole																								
En el parque																								
Lavandome los dientes																								
Comiendo																								
Viendo la televisión																								
Jugando																								

Una vez los alumnos ya saben leer las horas en punto y las medias se introducen los cuartos de hora, intentado relacionarlos con actividades cotidianas (tiempo que tardan en llegar de casa al colegio, duración del patio, etc.).

Es importante usar, además del reloj, otros instrumentos de medida no convencionales para medir el paso del tiempo. En los primeros cursos de primaria se puede graduar una vela o un reloj de arena a intervalos regulares y usarlo para medir el tiempo. También es interesante construir relojes de arena «rápidos» y «lentos». En los cursos intermedios se puede continuar el trabajo con relojes de arena usando también un cronómetro para hacer actividades como las que se proponen en la actividad de laboratorio 3.23.

Actividad 3.23

Contenido: Jugamos con relojes de arena

Tareas
Diseña una actividad en la que los alumnos trabajen alguna o varias de las siguientes acciones con relojes de arena. Indica el curso al que va dirigida la actividad y la forma de trabajarla en clase.

- *Clasificar y ordenar relojes de arena.*
- *Encontrar equivalencias entre relojes de arena.*
- *Medir la duración de diferentes canciones con diferentes relojes de arena, viendo que en algunos casos se puede decidir cuál es más larga, pero no siempre.*
- *Comparar indirectamente relojes de arena a partir de una graduación. Se trata de asignar a cada reloj un número que actúe como medida. Dicho número puede encontrarse de muchas maneras: contando mientras cae la arena, mediante un cronómetro, a partir de una canción, etc.*

3.8 Conflictos en el aprendizaje de las magnitudes y su medida

Las magnitudes y su medida han constituido un escollo para escolares y maestros que suele convertirse en un problema para los alumnos cuando se aborda el problema de las conversiones entre unidades de magnitud. En la mayoría de los casos se identifica el aprendizaje de las magnitudes y su medida con el conocimiento y dominio del sistema métrico decimal y se considera que se han alcanzado los objetivos propuestos cuando el alumno efectúa conversiones con seguridad y rapidez.

Paralelamente a lo anterior, los alumnos suelen expresar la medida de superficies en metros lineales, dan como solución de un problema que la masa de una bola de billar es de 6 kilos o que el volumen de agua que contiene una piscina olímpica llena es de 200 litros. También encontramos que, en las conversiones, afirman que 1 metro son 100 hectómetros en virtud de que, de acuerdo con todo lo que recuerda, hay ceros de por medio cuya colocación se realiza más como un acto de azar que como una reflexión consciente.

Los problemas anteriores se trasladan de la escuela a la sociedad y, así, no es difícil escuchar en programas de radio y televisión cifras disparatadas para cuantificar la densidad de población, superficies de arbolados, capacidad de los embalses, etc. Con la finalidad de propiciar una reflexión a este respecto, se propone la siguiente actividad, adaptada de Chamorro y Belmonte (1988).

Actividad 3.24

Lee con atención la siguiente noticia de un diario nacional de fecha reciente.

Los incendios forestales arrasan más de mil kilómetros en el este de Australia

Al menos tres personas han muerto y unas 150 viviendas han sido destruidas por más de 77 focos acti

AGENCIAS

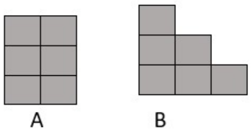
Sídney · 9 NOV 2019 · 16:27 CET

Localiza en el periódico cinco anuncios en los que intervengan magnitudes y analiza los errores e imprecisiones que aparezcan.

⊳ Relaciones entre las magnitudes de los objetos

Una de las mayores dificultades a la hora de asimilar la idea de cantidad de magnitud es la de establecer relaciones entre las magnitudes de los objetos. Los alumnos consideran, de forma frecuente, que objetos con la misma cantidad de una magnitud también tienen la misma cantidad de otras magnitudes. Algunos creen, por ejemplo, que dos figuras con la misma superficie tienen también el mismo perímetro, que dos figuras con el mismo volumen tienen necesariamente la misma superficie o que dos cuerpos con el mismo peso tienen el mismo volumen.

Como se observa en la Figura 3.14a, las figuras A y B tienen la misma cantidad de superficie y diferente perímetro. También se observa en la Figura 3.14b que el trozo de madera y el trozo de hierro tienen el mismo peso y ocupan distinto volumen.



(a) Misma superfície y distinto perímetro.

(b) Mismo peso y distinto volumen.

Figura 3.14: Relaciones entre magnitudes que llevan a error a los alumnos.

Vergnaud, Ricco, Rouchier, Marthe, y Metregiste (1978); Vergnaud y cols. (1983) presentan varios estudios en los que se presentan las dificultades de los estudiantes a la hora de relacionar las magnitudes de longitud y volumen. Además, Reece y Kamii (2001) muestran un estudio en el que se estudió el grado de razonamiento en transitividad e iteración de la unidad que tienen los alumnos al medir las magnitudes de volumen y capacidad. Su trabajo concluye que el estándar del *Principles and standards for school mathematics* (2000) en donde se espera que los niños entiendan las unidades de volumen y capacidad en 2º grado es poco realista. Todos estos trabajos proporcionan una batería de ejemplos de actividades y resultados que conviene tener en cuenta a la hora de diseñar las futuras actividades.

⪢ El concepto de la unidad de medida

Se distinguen principalmente dos dificultades asociadas al concepto de unidad de medida: la relativa a la idea de reiteración de la unidad y la relativa a la equivalencia de las unidades de medida (Stephan y Clements, 2003). El alumno tiene dificultades para entender que la unidad de debe reiterarse sobre el objeto que se desea medir hasta cubrirlo completamente, de forma exhaustiva, mediante lo que denominamos composición aditiva. Esto lleva a errores en situaciones en las que las unidades de medida de las que se dispone no cubren o sobrepasan la cantidad de magnitud del objeto que hay que medir.

Por ejemplo, si se dispone de menos clips de los que hacen falta para cubrir la longitud de un lápiz, el alumno introduce agujeros entre los clips para ocupar todo el objeto. De la misma forma, si el alumno tiene más unidades de las necesarias, tenderá a emplearlas todas. Así mismo, en relación con las propiedades de acumulación de distancia y aditividad, un alumno que no haya interiorizado el proceso de iteración de la unidad de medida puede asumir que el número que se da como resultado de la medida es la medida de la última unidad.

⪢ Equivalencia entre unidades de medida

Respecto de la dificultad relacionada con la equivalencia de las unidades de medida, aparecen dos errores. El primero es el de tomar diferentes cantidades de magnitud como una misma unidad de medida. Este error se produce cuando, por ejemplo, al medir longitudes en una cuadrícula, el alumno identifica como unidad de longitud tanto la distancia entre dos puntos consecutivos en horizontal o vertical como la diagonal de un cuadrado básico de la cuadrícula. De esta forma, en la Figura 3.15 se podría decir que sus lados miden $2u$, $4u$, $2u$ y $2u$ (empezando con el lado vertical y continuando en el sentido de las agujas del reloj).

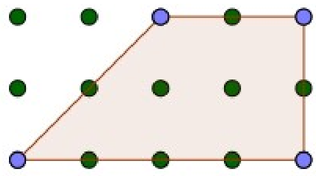


Figura 3.15: Medida de longitudes en una cuadrícula.

El segundo error aparece al hacer comparaciones de cantidades de magnitud expresadas en diferentes unidades sin ser conscientes de dicha diferencia. En la Figura 3.16, el alumno puede pensar que la piña y la sandía pesan lo mismo, puesto que las balanzas se equilibran con dos botellas de agua, sin considerar que las botellas tienen distinta cantidad de magnitud (unas, de 33 centilitros y otras de 1′5 litros).

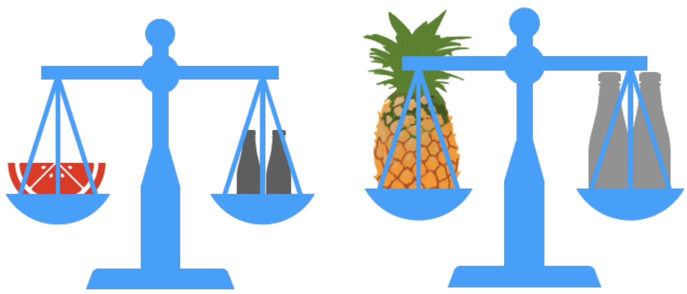


Figura 3.16: Balanzas con cantidades de magnitud diferentes.

⊳ Conservación de la medida

Las dificultades asociadas a la conservación de la medida se centran en aspectos relativos al cambio de la posición o la forma de los objetos (Chamorro y Belmonte, 1988; Dickson y cols., 1991). Los alumnos tienden a juzgar la medida de una magnitud por la apariencia visual del objeto que hay que medir. Consideran, por ejemplo, que la amplitud de dos ángulos es diferente si los segmentos de recta que los determinan son en uno más largos que en el otro. De la misma forma, atribuyen más peso al objeto que ocupa más volumen, más superficie a la figura más larga y más valor monetario al conjunto que contiene más monedas. Un ejemplo clásico de esta dificultad es la experiencia de Piaget (1937) con vasos de agua, en la que se mostraban dos vasos iguales con la misma cantidad de agua y se pasaba el agua de uno de ellos a un más estrecho y alto. Los alumnos que no habían asimilado la propiedad de conservación tendían a pensar que el vaso alto tenía más agua que el original.

⊳ Procedimientos de medida

Una de las dificultades asociadas a los procedimientos de medida directa del volumen o capacidad es la relacionada con el conteo de unidades. El alumno comete el error de considerar únicamente las unidades que presentan caras visibles. Al calcular, por ejemplo el volumen de la Figura 3.17, tomando como unidad de medida el cubo, no suele considerar los cubos interiores.

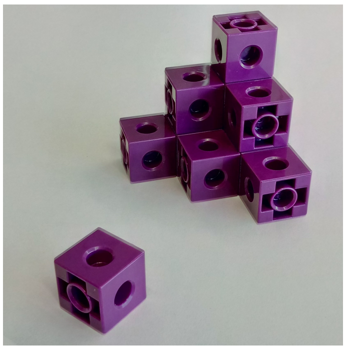


Figura 3.17: Cálculo del volumen de la figura A empleando como unidad de medida un cubo.

El error más común al trabajar la medida indirecta está asociada a la linealidad. Es frecuente presuponer que, al duplicar la longitud de los lados de una figura, se duplica también su superficie o su volumen. La Figura 3.18 muestra que, dada una figura A, si duplicamos la longitud de sus lados, se obtiene la figura B, la superficie de la cual es cuatro veces la de la figura A y no dos veces.

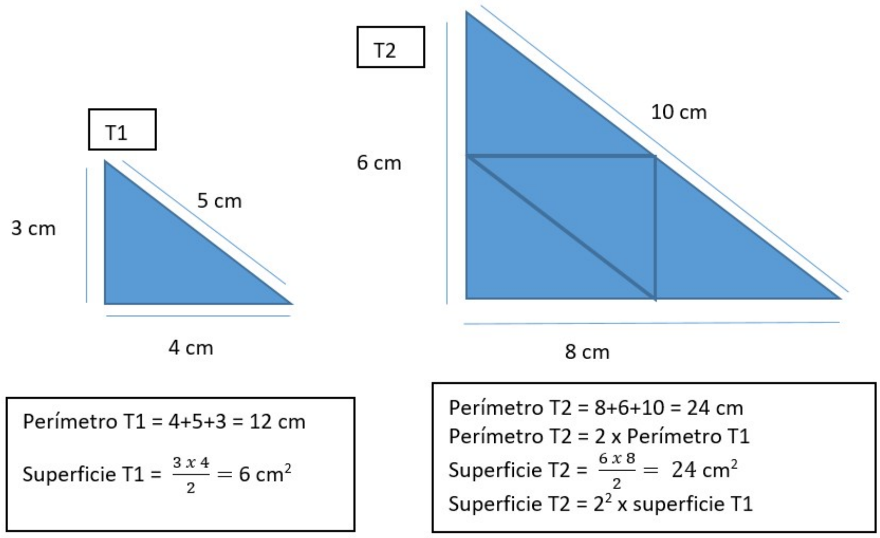


Figura 3.18: Triángulos de doble perímetro y cuádruple superficie.

⩥ Errores didácticos

Otro tipo de dificultades en la comprensión de la medida tiene origen didáctico. Retomamos aquí lo que hemos comentado anteriormente sobre el tratamiento fundamentalmente aritmético de la medida en muchos libros de texto. Este tratamiento dificulta la interiorización de unidades de medida, la comprensión del proceso de medida y sus elementos conceptuales clave y el desarrollo de estrategias de medida y estimación. Todo esto deriva en muchas ocasiones en que el conocimiento del alumno sobre la medida es un conocimiento exclusivamente académico y algorítmico que no le resulta útil ni en situaciones reales, ni en la comprensión de otros contenidos relacionados con la medida (como el concepto de integral de una función, perteneciente a la etapa de bachillerato).

Por otro lado, un tratamiento didáctico de las magnitudes de superficie y volumen que incida sobre todo en procedimientos indirectos, asociados a las dimensiones lineales de los objetos y basados en las fórmulas de cálculo, dificulta la comprensión de ambas magnitudes. Se pierde la propia percepción de la magnitud que se está tratando, de la unidad que se emplea y de qué representa la medida de esa magnitud, con lo cual el alumno no tiene apoyo para desarrollar referentes para la medida y estimación de estas magnitudes.

⋗ La estimación

En el ámbito de la estimación, las dificultades pueden venir asociadas, en primer lugar, al hecho de que algunos alumnos no estén familiarizados con la magnitud que hay que estimar (por ejemplo, suele pasar al estimar la capacidad de objetos) o tengan dificultades para percibir la cantidad de magnitud, como ocurre al enfrentarse a estimaciones de cantidades muy grandes o muy pequeñas.

Asimismo, también pueden surgir dificultades relacionadas con el uso de referentes, cosa que es frecuente cuando se solicita la estimación de la capacidad de una cucharilla de café, puesto que la unidad más común para el alumno es el litro, no llegando a interiorizar el centilitro o el mililitro. Por otro lado, aparecen errores derivados del uso de referentes relacionados con el propio cuerpo, puesto que, debido a su desarrollo físico permanente, dichas cantidades de magnitud varían con cierta rapidez y, por lo tanto, no pueden ser tomadas como referentes por un tiempo muy prolongado.

La asignación subjetiva de un valor numérico a la medida de una cantidad de magnitud es difícil también cuando el único referente que tiene el alumno no es útil. Esto sucede, por ejemplo, cuando se pretende estimar la capacidad de una bañera teniendo como referente el litro, donde este referente posee pleno sentido como unidad, pero no es útil por la lejanía entre la cantidad de magnitud de dicha unidad y la cantidad de magnitud (capacidad) del objeto (bañera). Conocer otros referentes, como la capacidad de una pecera puede ayudar en esta situación.

3.9 Laboratorio de herramientas TIC para el aprendizaje de la medida de magnitudes

Empezaremos con una actividad para trabajar con los alumnos los métodos de cálculo del área de polígonos visto en el Apartado 3.7.2.

Actividad 3.25

Contenido: Área de triángulos en un geoplano

Tareas

Utiliza el micro-programa interactivo de Geogebra

www Trabajo con geoplanos | Treball en un geoplà

Àrea de triangles en un geoplà

para practicar con los alumnos de los últimos cursos de primaria los métodos vistos en el Apartado 3.7.2 al calcular él área de los polígonos que van apareciendo en el micro-programa interactivo. Diseña una actividad en donde los alumnos dibujen primero sobre una trama de puntos en papel los triángulos que van aparecido para posteriormente comprobar si el resultado es correcto en el mismo.

La actividad tecnológica 3.26 está pensada para guiar a los alumnos de los cursos superiores de primaria en una secuencia en la que calculen el área de triángulos y cuadriláteros para posteriormente pedirles que dibujen polígonos con un área determinada. El trabajo inverso de construcción es una actividad interesante para que los alumnos reflexionen sobre el concepto de área y sobre cómo varía ésta al modificar los vértices y las características de cada polígono. Además, el micro-programa interactivo inicia a los alumnos en la obtención de la fórmula de Pick, que se completará en la actividad tecnológica 3.27.

Actividad 3.26

Contenido: Área de polígonos en un geoplano

Tareas
Analiza el micro-programa interactivo de Geogebra

www Trabajo con geoplanos | Treball en un geoplà > Àrees de polígons en un geoplà.

Analiza además las preguntas siguientes que aparecen en el mismo y cómo podrías trabajarlas en un aula de primaria de manera que los alumnos empiecen a reflexionar sobre la relación entre la forma de una figura y su área.

- *Investiga qué triángulos puedes construir que tengan por área* 0,5, 1, 1,5 *y* 2. *Anota los datos de manera que puedas obtener una tabla con sus puntos frontera e interiores. ¿Ves alguna relación entre la cantidad de puntos frontera, los interiores y el área del triángulo?*
- *Investiga qué cuadriláteros puedes construir que tengan por área un número natural del* 1 *al* 20. *Anota los datos de forma que puedas construir una tabla con sus puntos frontera e interiores. ¿Se sigue verificando la relación encontrada anteriormente entre la cantidad de puntos frontera, los puntos interiores y el área del polígono? ¿Se verifica tanto para cuadriláteros cóncavos como convexos?*

La actividad tecnológica 3.27 pretende ser una generalización de la actividad tecnológica 3.26. Se pide diseñar una actividad teniendo como base uno micro-programa interactivo ya existente en Geogebra para calcular el área de polígonos genéricos dibujados sobre un geoplano de manera que al finalizar la actividad los alumnos hayan deducido la fórmula general de Pick para cualquier polígono cóncavo o convexo.

Actividad 3.27

Contenido: Deducimos la fórmula de Pick

Tareas
Diseña una secuencia de tareas destinada a deducir la fórmula de Pick que tenga los siguientes pasos

1. *Deducir una fórmula que relacione el área de un polígono sin puntos interiores teniendo en cuenta sus puntos frontera* (F).
2. *Deducir una fórmula que relacione el área de un polígono con un punto interior teniendo en cuenta sus puntos frontera* (F).
3. *Deducir una fórmula que relacione el área de un polígono con dos puntos interiores teniendo en cuenta sus puntos frontera* (F).
4. *Deducir una fórmula que relacione el área de un polígono con* (I) *puntos interiores teniendo en cuenta sus puntos frontera* (F).

Añade la comprobación de sus suposiciones utilizando el micro-programa interactivo de Geogebra www Área de polígonos (Fórmula de Pick)

3.10 Análisis de libros de texto sobre tareas de medida de magnitudes en primaria

En este tema nos interesa incidir en el tratamiento que se le da a la medida de magnitudes en los libros de texto de primaria. Ya hemos visto a lo largo del tema que diversos autores insisten en el tratamiento mayoritariamente aritmético que se le da a las diferentes magnitudes, así como la necesidad de que este enfoque sea parcialmente sustituido por un tratamiento más práctico en el que los alumnos sean capaces de experimentar la medida de magnitudes de manera directa o indirecta utilizando los instrumentos apropiados. El ejercicio que se presentan a continuación se centra en el análisis de libros de texto desde esta perspectiva.

Actividad 3.28

Contenido: Análisis de ejercicios y propuestas de medida de magnitudes en los libros de texto de primaria.

Tareas

a) Selecciona libros de texto de diferentes cursos de Educación Primaria y analiza, respecto del trabajo con diferentes magnitudes, qué aspectos de la comprensión de la medida se encuentran (percepción de la magnitud, comparación de magnitudes y de unidades de magnitud, necesidad de la medida, medida directa o indirecta, estimación) en ellos.

b) Analiza además los siguientes aspectos

   i) ¿Hay diferencias en el tratamiento de diferentes magnitudes?

   ii) ¿Y en el tratamiento de una misma magnitud en diferentes cursos?

   iii) ¿Se observa un tratamiento fundamentalmente aritmético de la medida?

3.11 Bibliografia del Tema 3

Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*.

Carrillo, L., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. I., y Flores, E. (Eds.). (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Ediciones Paraninfo, SA.

Chamorro, M. C., y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid, Editorial Síntesis.

Consellería d'Educació, Cultura i Esport. (2014). *Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana* (Vol. 7311).

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor Madrid, MEC.

Frías, A., Gil, F., y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*, 477–502.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

International Bureau of Weights and Measures, Taylor, B. N., y Thompson, A. (2001). *The international system of units (SI)*. US Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology.

Lott, T., y Harrell, G. (2003). Estimation at work. En D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement.* NCTM.

Luengo, R., y Beta, G. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Síntesis.

Matemáticas 3: Primaria. Dejar huella. (2007). Madrid. Anaya.

Piaget, J. (1937). *The construction of reality in the child.* (*En Inglés: Basic Books* (*1954*)). Neuchâtel: Delachaux & Niestlé. París.

Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). (2000). National Council of Teachers of Mathematics.

Reece, C. S., y Kamii, C. (2001). The measurement of volume: why do young children measure inaccurately? *School Science and Mathematics*, *101*(7), 356–361.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis. Madrid.

Segovia, I., y Rico, L. (1996). La estimación en medida. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas, Barcelona*(10), 29–42.

Stephan, M., y Clements, D. H. (2003). Linear, Area and Time Measurement in Prekindergarten to Grade 2. En G. Bright y D. H. Clements (Eds.), *Learning and teaching measurement.* NCTM.

Vergnaud, G., Ricco, G., Rouchier, A., Marthe, P., y Metregiste, R. (1978). Quelles connaissances les enfants de sixième ont-ils des structures multiplicatives élémentaires. Un sondage. *Bulletin de l'APMEP*, 331–357.

Vergnaud, G., Rouchier, A., Desmoulieres, S., Landre, C., Marthe, P., Ricco, G., ... Viala, A. (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(1), 71–120.

III Didáctica de la Probabilidad y la Estadística

4. Estadística y probabilidad

4.1 Introducción

La estadística y la probabilidad se encargan del estudio de la variabilidad bajo una situación de incertidumbre. Esta es la característica de esta parte de las matemáticas que la distingue de otras ramas en las que se trabaja con situaciones deterministas. Otra característica que ha hecho que se incluyan estos contenidos en los currículum de la enseñanza obligatoria es su continua presencia en nuestra vida cotidiana, sobre todo en los medios de comunicación, pero también en situaciones como los juegos de lotería que se suelen encontrar los ciudadanos en su día a día.

Partiendo de los contenidos que tienen que estar presentes en el currículum de Educación Primaria, en esta parte se tratan los aspectos fenomenológicos que dan sentido a estos contenidos, se aborda el significado de los conceptos evitando fundamentalmente la parte más mecánica para que adquieran un sentido global y se completa con el proceso de resolución del tipo de problemas que se plantean tanto en estadística como en probabilidad.

4.2 La estadística y la probabilidad en el currículum de primaria

Actualmente la enseñanza de la estadística y de la probabilidad se incluye en todas las etapas de la enseñanza obligatoria, pero esto no siempre ha sido así. Mientras que su presencia en la Enseñanza Secundaria está aceptada desde hace tiempo, su generalización a todos los niveles es relativamente reciente, puesto que se produjo en la ultima década del siglo XX.

Antes, la presencia de la estadística y la probabilidad en el currículum era casi anecdótica, con apariciones breves y posteriores desapariciones (Jefatura del Estado, 1953, 1970). Esto fue así hasta que la LOGSE (Ministerio de Educación y Ciencia, 1990) introdujo en el currículum de Primaria un bloque de contenidos llamado Tratamiento de la información, azar y probabilidad. A partir de ese momento la enseñanza de la estadística y la probabilidad se generalizó a todos los niveles desde la Educación Primaria hasta los Bachilleratos.

Tal y como ya hicimos en los temas anteriores, empezaremos centrando nuestra atención en los contenidos que establecen diferentes instituciones. Se compararán en primer lugar las orientaciones curriculares locales (Consellería d'Educació, Cultura i Esport, 2014) Decreto 108/2014, con las orientaciones establecidas en los Common Core Stardards (*Principles and standards for school mathematics*, 2000) CCSS-M publicadas en EEUU.

Actividad 4.1

Accede a la web de los Common Core Sate Stardards in Mathematics en Español y extrae, por curso, los contenidos relativos al bloque de probabilidad y estadística. Compara estas orientaciones con las publicadas en el currículo de la LOMCE en el anexo I del DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell.

En la Tabla 4.1 se recoge un breve resumen de las orientaciones establecidas por el CCSS-M para las competencias que deben adquirir los alumnos en cada curso.

1º	Organizan, representan e interpretan datos que tienen hasta tres categorías; preguntan y responden a preguntas sobre la cantidad total de datos, cuántos hay en cada categoría y si hay una cantidad mayor o menor entre las categorías.
2º	Dibujan un pictograma y un gráfico de barras (con escala unitaria) para representar un grupo de datos de hasta cuatro categorías. Resuelven problemas simples para unir, separar y comparar usando la información representada en el gráfico de barras.
3º	Trazan un pictograma a escala y un gráfico de barras a escala para representar datos con varias categorías. Resuelven problemas de uno y dos pasos sobre «cuántos más» y «cuántos menos» utilizando la información presentada en gráficos de barras a escala.
4º	Hacen un diagrama de puntos para representar un conjunto de datos de medidas en fracciones de una unidad (1/2, 1/4, 1/8). Resuelven problemas sobre sumas y restas de fracciones utilizando la información presentada en los diagramas de puntos.
5º	Hacen un diagrama de puntos para mostrar un conjunto de medidas en unidades fraccionarias (1/2, 1/4, 1/8). Efectúan operaciones con fracciones apropiadas a este grado, para resolver problemas relacionados con la información presentada en los diagramas de puntos.
6º	Desarrollan la comprensión sobre la variabilidad estadística. Resumen y escriben distribuciones. Representan datos numéricos en diagramas sobre una recta numérica, incluyendo los diagramas de puntos, los histogramas y los diagramas de cajas y bigotes. Resumen conjuntos de datos numéricos en relación a su contexto.
7º	Utilizan el muestreo al azar para establecer inferencias sobre una población. Establecen inferencias comparativas informales entre dos poblaciones. Investigan los procesos estocásticos y desarrollan, utilizan y evalúan modelos de probabilidad.

Sigue en la página siguiente…

8º	Construyen e interpretan diagramas de dispersión para datos bivariados. Describen patrones como agrupaciones, valores atípicos, asociación positiva o negativa, asociación lineal y asociación no lineal. Saben que líneas rectas se utilizan para modelar relaciones entre dos variables cuantitativas. Ajustan informalmente una línea recta y evalúan informalmente el ajuste. Usan una ecuación de un modelo lineal para resolver problemas en el contexto de datos bivariados de medición. Entienden que los patrones de asociación también pueden verse en datos categóricos bivariados al visualizar frecuencias y frecuencias relativas en una tabla de doble entrada. Construyen e interpretan una tabla de doble entrada que resume los datos en dos variables categóricas reunidas de los mismos sujetos. Usan frecuencias relativas calculadas para filas o columnas para describir una asociación posible entre las dos variables.

Tabla 4.1: Orientaciones CCSS-M por curso relativas al bloque de probabilidad y estadística.

La siguiente actividad que propondremos consistirá en analizar libros de texto de diferentes editoriales para identificar cuáles son los contenidos relativos al bloque de probabilidad y estadística y cómo éstos se presentan tanto a los alumnos como a los maestros en los libros del profesor.

Actividad 4.2

Identificad, en los libros de texto que tenéis a vuestra disposición, los contenidos relativos a la probabilidad y la estadística. Observad si los contenidos se ajustan a las orientaciones curriculares y tomad nota del tratamiento que se hace de éstos.

4.3 Estadística

La estadística está presente en nuestra sociedad tanto a través los medios de comunicación como a través de los informes de resultados de las empresas, en los informes pedagógicos de los centros escolares, en las investigaciones científicas y en prácticamente cualquier campo de conocimiento en el que se requiera trabajar con un volumen considerable de información y datos. Pero esta presencia no siempre es reconocida por el ciudadano con el interés y precisión deseable, tal vez por la ausencia de las ideas fundamentales del razonamiento estadístico que permiten analizar e interpretar los datos que se proporcionan y tomar decisiones pertinentes sobre ellas.

Por esto es necesaria una formación estadística desde la escuela primaria que permita al futuro ciudadano afrontar la gran cantidad de información que recibe diariamente.

4.3.1 Significados y usos de la estadística

El origen etimológico de la palabra estadística proviene del latín *statisticus* y hace referencia al análisis de datos del Estado. En Alemania se empleó el término *Statistik*, acuñado en 1749 por Gottfried Achenwald. Originariamente surge como aritmética política en la escuela alemana de Conring y sus fines estaban asociados a la recogida y análisis de datos ligados a los estados o ciudades libres con el objeto de obtener datos demográficos de una población determinada (Gutiérrez Cabria, 1994). En relación con esta idea se encuentra, por ejemplo, la noción de censo, el cual se realizaba ya en la época del Imperio Romano, con el fin de tener información de los ciudadanos de cada región dominada.

Actualmente, la producción generalizada de información en prácticamente todos los ámbitos de la vida hace de la estadística una ciencia imprescindible en nuestra sociedad, sobre la que deben tener formación adecuada todos los ciudadanos. Así, la estadística se ha aplicado a ámbitos como la economía, la sociología, la medicina, la psicología, la educación y tantos otros aspectos que forman parte de la vida del ser humano.

Habitualmente escuchamos o leemos afirmaciones como que la altura de un niño está en el percentil 75, que la tasa de nacimientos en España es de 1′32 hijos, que la esperanza de vida es de 82′38 años o que el 96 % de españoles tiene un terminal móvil, pero ¿entendemos el significado de estos datos?

Actividad 4.3

Busca en los medios de comunicación noticias en las que se haya empleado la estadística. Haz un listado de situaciones en las que se emplea la estadística. Propón una interpretación de lo que significan estas situaciones y clasifícalas según su contenido.

En los ejemplos que has localizado en los medios de comunicación habrás podido observar que la estadística habitualmente se emplea para responder preguntas concretas sobre características de los individuos de una determinada población en la que se encuentra variabilidad. El trabajo que hay detrás de esto incluye la recogida de datos, la reducción de la información de estos datos, las representaciones gráficas para organizarlos y la interpretación de la información obtenida, procurando describir esa variabilidad.

Podemos preguntarnos, por ejemplo, cuándo leen y qué leen los españoles. La respuesta a esta pregunta puede ser de gran utilidad para que las editoriales tomen decisiones adecuadas a partir de los hábitos lectores de los ciudadanos. Por esto sería necesario determinar cuántos libros leen los españoles al año, si leen libros de bolsillo, best sellers, ebooks, etc. Si leen más los hombres o las mujeres, en qué época del año se lee más, las ciudades en las que más se lee, cuánto tiempo se dedica a la lectura, cuál es el autor con más lectores, etc.

Una posibilidad para hacer este estudio de forma fiable seria realizar las preguntas a cada uno de los españoles. En este caso haríamos un *censo*. Evidentemente resultaría muy complicado y caro realizar una encuesta como ésa. Por esta razón se suele elegir una parte de la población que se desea analizar con el objetivo de obtener información sobre la característica objeto de estudio. Dicha elección no puede ser arbitraria sino que la cantidad de los encuestados influirá en la confiabilidad que se tenga en el estudio. A esta parte de la población se la denomina *muestra* y cuando es elegida adecuadamente se dice que es *representativa*. A pesar de la variabilidad que habitualmente se obtiene en la recogida de información, los estudios estadísticos han mostrado que los valores extremos suelen ser poco frecuentes y que la mayoría de la población muestra características suficientemente similares.

Las características que son objeto de estudio se denominan *variables* y estas pueden tomar valores diferentes para individuos diferentes. Cada individuo es un caso y el resultado de la observación de la variable correspondiente a un individuo se denomina *dato*.

Tipo de variable	Ejemplo
Cualitativas nominales	Son variables que no se pueden medir, contar u ordenar. Sería el caso del tipo de libro preferido por los españoles
Cualitativas ordinales	Pueden estar asociadas a un orden, aunque no a una cantidad. Este sería el caso si hemos preguntado a los lectores cuánto les gusta leer en una escala «nada–poco–bastante–mucho»
Cuantitativas discretas	Son las que se pueden contar, como el número de libros que lee al año un individuo
Cuantitativas continuas	Se refieren a una medida, por ejemplo, el tiempo dedicado a la lectura

La distinción que se hace entre los tipos de variables es importante puesto que el tratamiento estadístico que reciben es diferente.

Actividad 4.4

Elige tres libros de matemáticas de Primaria de diferentes editoriales en los que se tratan temas de estadística. Analiza cuál de los tipos de variables antes descritas consideran estos libros. ¿Hay alguna que aparezca de forma más frecuente?, ¿hay algún tipo de variable que aparezca poco o que no aparezca? ¿Por qué piensas que pasa esto?

4.3.2 Significados de los conceptos estadísticos

Cuando se quiere estudiar una determinada característica de una población es necesario recoger información de esta característica. Una vez recogidos los datos, es necesario organizarlos y resumirlos mediante alguna medida calculada a partir de ellos y que proporcione información numérica para poder emplearla en lugar de tener que recurrir siempre a todos los datos recopilados. Entre estas medidas estadísticas se encuentran las llamadas *medidas de posición* y las *medidas de dispersión*, que completan la información proporcionada por las de centralización.

Al emplear estas medidas se está realizando una gran reducción de datos, perdiendo en el proceso parte de la información. Por este motivo se deben escoger estas medidas de forma adecuada para que representen lo mejor posible el conjunto de datos de los que provienen. Se debe tener en cuenta que no hay una medida mejor que otra; la selección de una u otra aporta ventajas e inconvenientes que se deben valorar dependiendo siempre del contexto en el que estemos trabajando.

Algunos libros de texto reducen el trabajo con estas medidas a cálculos aritméticos repetitivos mediante ejercicios rutinarios. En la enseñanza de este tema, así como de la estadística y de la matemática en general, deben proporcionarse a los alumnos situaciones significativas en las que tenga sentido el recurso a las medidas estadísticas, dándoles de esta forma significado.

4.3.3 La reducción de los datos

Empleamos medidas estadísticas para reducir un conjunto de datos a un único número que se considera el más típico y, por lo tanto, representativo, en algún sentido, del comportamiento de todo el conjunto. Estos números describen el agrupamiento de los datos alrededor de unos valores próximos al centro, lo que permitirá conocer cómo están distribuidos estos valores respecto a las medidas centrales. Estas medidas se denominan *medidas de centralización*.

Las medidas de centralización

Una medida de centralización es un valor que muestra la regularidad o tendencia de un conjunto de datos. Es, incluso, un indicador de lo que es más razonable que ocurra, lo más probable o lo que se espera que ocurra con esa característica. Las medidas de centralización que se enseñan en Primaria son la moda, la mediana y la media.

⊳ La moda

Una forma de resumir la información es obteniendo el valor que más se repite, el que tiene una frecuencia mayor: *la moda*. Su importancia recae en que es la única medida que se puede emplear cuando los datos son cualitativos o cuando con los datos no se puede establecer un orden. Con otro tipo de datos, esta medida tiene interés si la muestra es grande pero con pocos valores diferentes. Un conjunto de datos puede tener más de una moda, pero siempre coincide con alguno de los datos contenidos en el conjunto.

Por ejemplo, imaginamos que nos preguntan cuál o cuáles son las mascotas más populares entre los alumnos. Para esto hacemos una encuesta sobre qué mascota tienen en este momento y obtenemos los datos de la Tabla 4.2.

Mascota	Perro	Gato	Tortuga	Pez	Canario	Hámster	Ninguno
Frecuencia	8	6	3	2	1	1	6

Tabla 4.2: Resumen de los datos obtenidos.

En este caso la moda es el perro, dado que es la mascota que más alumnos tienen, es el dato con la frecuencia más alta. Por eso decimos que el perro es la mascota más popular.

Cuando los datos son cuantitativos, los alumnos pueden confundir la moda con el dato que tiene el valor más alto y responder que la moda es 8. Tenemos que llamar la atención sobre que la moda se corresponde con el dato que tenga la frecuencia más alta.

⊳ La mediana

Otra forma de describir un conjunto de datos, si están ordenados, es mediante el valor central. El valor que divide al conjunto de datos por la mitad es *la mediana*, el punto de equilibrio de la distribución de datos, la que está en medio. La mediana, por lo tanto, nos informa de que el 50 % de los datos se encuentra por debajo de ella y que el otro 50 % está por encima.

Si hay un número impar de datos, entre ellos hay uno que divide la muestra en dos mitades iguales, en cambio, si es par, no hay ningún dato que cumpla esta propiedad y por tanto se seleccionan los dos valores centrales y se utiliza la media aritmética de estos dos como mediana.

Actividad 4.5

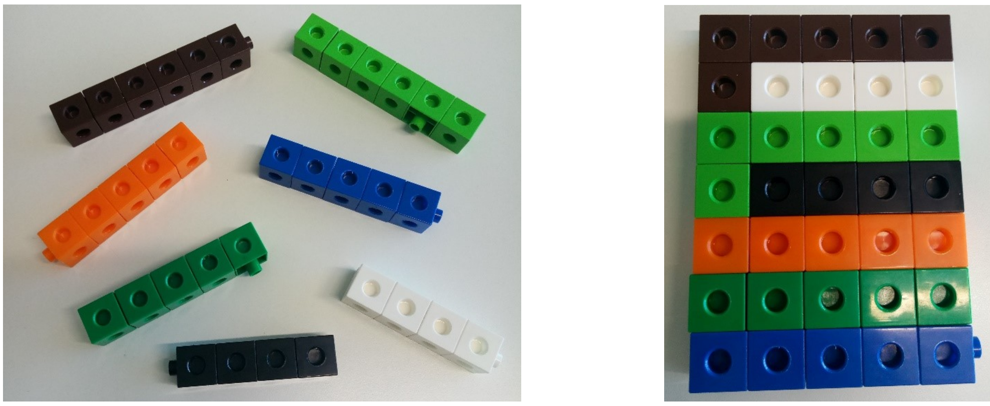
Calcula la mediana de las siguientes notas de la clase:

$$7, 4, 6, 8, 3, 9, 5, 6, 4, 6, 7, 10, 2, 7, 5, 6, 8, 5, 9, 3, 5, 5, 5, 3, 2$$

⊳ La media

Otra medida de tendencia central es *la media*. Seguramente es la medida más empleada y más reconocida. La media es una cantidad que equilibra la distribución de los datos. En un conjunto de datos dado, unos datos están por encima de la media y otros por debajo, pero estas diferencias se equilibrarán siempre unas con otras.

Imaginamos la siguiente situación: siete niños cuentan el número de letras que tienen sus apellidos y representan las cantidades obtenidas empleando cubos para formar torres, como vemos a la Figura 4.1a. Podemos observar que hay apellidos de la misma longitud, pero otros varían en tamaño. Si nos preguntamos cuál es la media de estas longitudes empleando la configuración anterior con torres, podemos reconfigurarlas para que todas tengan la misma longitud o casi (medida en número de bloques). Obtendríamos las torres mostradas en la Figura 4.1b. Todas las torres tienen cinco cubos. Este número se corresponde con lo que se denomina media de las longitudes de los apellidos de los niños.



(a) Representación con policubos de los apellidos. (b) Reestructuración de los datos.

Figura 4.1: Representación visual de la media como medida de equilibrio de los datos.

Esta propiedad de equilibrio nos permite saber que, si queremos hacer etiquetas para formar los apellidos de los niños, podemos descomponer todas las etiquetas de longitud 5 letras para formar tiras de papel de la longitud exacta de todos los apellidos involucrados. El aprovechamiento óptimo del papel se encuentra cuando, a partir de las tiras ya cortadas, podemos extraer una cantidad de letras de tal forma que se pueden formar los apellidos sin que la cantidad que sobra de cada tira sea excesiva.

La propiedad de equilibrio que tiene la media nos permite, siguiendo un razonamiento inverso, la reconstrucción de los apellidos. En este ejemplo esta reconstrucción es exacta, no sobrará ni faltará ninguna letra, pero habrá otros casos en los que la media nos ayude para aproximarnos a la solución del problema pero tendremos que interpretar el valor de acuerdo con el contexto (por ejemplo, si la media fuera un número no entero).

Actividad 4.6

Seguimos con los datos de la Actividad 4.5 en la que teníamos una lista con las notas de los alumnos de la clase:

$$7, 4, 6, 8, 3, 9, 5, 6, 4, 6, 7, 10, 2, 7, 5, 6, 8, 5, 9, 3, 5, 5, 5, 3, 2$$

Vamos a imaginarnos ahora que llega un compañero nuevo. No sabemos qué nota va a sacar, ¿qué crees que pasará con la media? ¿Y con la mediana? ¿Qué conclusión puedes sacar de la variabilidad de la media y de la mediana?

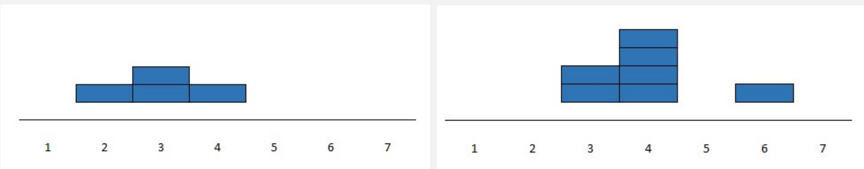
La media también puede interpretarse como el reparto equitativo de una cantidad de objetos entre diferentes personas, lugares, etc. De esta manera podemos, utilizando material estructurado o no estructurado, crear actividades para trabajar el reparto en el sentido del cálculo de la media en los primeros cursos de primaria.

Actividad 4.7

Diseña una actividad para clase de forma que los niños trabajen el concepto de media en el sentido de reparto equitativo. Ayúdate de material manipulable si lo consideras oportuno.

Actividad 4.8

Los siguientes gráficos representan la cantidad de letras de los apellidos de dos conjuntos de niños:



a) ¿Cuántos niños están representados en cada situación?

b) ¿Cuántas letras hay involucradas en cada conjunto?

c) ¿Cuál es la media de cada conjunto? ¿Cómo se relaciona cada una de estos datos con la media?

d) Determina otros dos conjuntos de seis niños que tengan la misma media.

e) ¿Que pasa si añadimos uno o dos valores más a cada uno de estos conjuntos de datos que sean muy diferentes del conjunto original de datos? Observa como afecta a la media y a la mediana añadir uno, dos o más valores. Analiza también cómo se ve afectada la relación de orden entre media y mediana.

Como habrás comprobado, para el cálculo de la mediana solo intervienen uno o dos valores de los datos obtenidos y por eso no se ve afectada por el resto de los valores, mientras que en la media se emplean todos los datos de la muestra. Esto puede tener especial importancia cuando los datos de los extremos son muy diferentes de los centrales. Por este motivo la media es, a veces, una medida engañosa, al ser muy sensible a estos valores extremos. Además, la media no pertenece necesariamente al conjunto de datos, aunque todos los datos intervienen en su cálculo, incluso los que son cero.

La media es una medida única que se expresa en la misma unidad que los datos, es decir, en el ejemplo anterior, la media será una cantidad de letras. A menudo los alumnos se confunden en este sentido y encuentran las medias de las frecuencias, en lugar de calcular la media de los valores de las variables, o bien no tienen en cuenta las frecuencias absolutas de cada valor en su cálculo.

Para calcular la media cuando tenemos los datos agrupados en una tabla de frecuencias hay que considerar cada una de éstas a la hora de hacer los cálculos. Es decir, si tenemos una tabla con valores x_i que tienen frecuencias f_i, la media vendrá dada por la siguiente ecuación

$$M = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

Veámoslo en el ejemplo 4.1.

Ejemplo 4.1

Si tenemos la siguiente tabla con las notas de los alumnos de 4º curso

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº alumnos	1	3	0	6	4	11	2	8	7	5	3

La suma de todas las frecuencias $\sum f_i$ es 50 y la suma del producto de cada nota por su frecuencia $\sum x_i f_i$ es 291. Con lo que la nota media de todos los alumnos es 5,82.

Emplear las medidas de centralización como representantes del conjunto de datos suele dar una visión incompleta de las características de este conjunto. Para completar la información se suelen emplear las medidas de dispersión o variabilidad.

Las medidas de dispersión

Como hemos visto en la Actividad 4.8, puede haber diferentes conjuntos de datos que tengan la misma media. ¿Cómo podemos distinguirlos si están representados por la misma medida de centralización? Para ello es necesario emplear otras cantidades o números que midan la variabilidad de cada conjunto de datos. Estos números son las *medidas de dispersión*.

⊳ El rango

Una forma de medir esta dispersión viene dada por la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de los datos. En el caso de la Actividad 4.8, en la que las gráficas nos permiten apreciar cómo los datos de la izquierda están más dispersos que las de la derecha sobre el eje horizontal, podemos medir esta dispersión para el primer conjunto de datos con la diferencia 4-2=2, mientras que al segundo caso es 6-3=3. ¿De qué nos informan estas cantidades? Nos están confirmando que en el primer caso la dispersión es mayor que en el segundo. Esta medida se denomina *rango o amplitud*.

⊳ La desviación media

¿Que pasaría si la amplitud de los dos conjuntos fuera la misma? Entonces, tendríamos que estudiar la variabilidad respecto de aquel valor que los representa. Así, una forma de medir la variabilidad seria calculando cuánto se desvían o diferencian los datos respecto de la media, tomada ésta como representante de los conjuntos de datos que estamos estudiando. Imaginemos, por ejemplo, que tenemos los siguientes conjuntos de datos sobre la longitud de los apellidos de los niños de cuatro clases diferentes:

$$A = \{2,3,3,4,4,4,5,8,8,9\}$$

$$B = \{4,4,4,5,5,5,5,6,6,6\}$$

$$C = \{2,4,4,5,5,5,5,6,6,8\}$$

$$D = \{2,2,2,3,4,6,7,8,8,8\}$$

Podemos comprobar que todos los conjuntos anteriores tienen la misma media. Algunos tienen además la misma amplitud. Calculamos la diferencia de cada uno de estos valores respecto de la media (Tabla 4.3).

Hemos medido la variabilidad mediante la desviación respecto de la media y hemos comprobado que la variabilidad de estos conjuntos, a pesar de tener la misma media, es diferente entre ellos. Hay que tener en cuenta que las diferencias las hemos tomado en valor absoluto, porque en otro caso comprobamos que la suma de estas diferencias es cero, como se corresponde con la forma en la que hemos definido la media.

A la media de las desviaciones en valor absoluto se la denomina *desviación media* y nos da una idea de cómo de dispersos están los datos respecto a su media. Cuanto mayor sea la desviación media, mayor dispersión habrá y por tanto la media representará peor al conjunto de datos del que proviene. La desviación media puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\sum |y_i - \bar{y}|}{N}$$

donde y_i es cada uno de los datos obtenidos e $\bar{y}$ su media.

⊳ La varianza y la desviación típica

Otra forma también de evitar las compensaciones entre los valor positivos y negativos es elevar estas diferencias al cuadrado y hacer la suma de los valores resultantes. Esta medida, que se denomina *varianza*, no es una buena alternativa, puesto que las unidades de medida se han elevado al cuadrado, por esto se suele emplear, en lugar de la varianza, su raíz cuadrada, que se denomina *desviación típica*.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores que toma la variable, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son las frecuencias de cada uno de estos valores, N es el número de datos y $\bar{x}$ es la media de este conjunto de datos, la varianza, σ^2, viene dada por la Ecuación (4.1) y la desviación típica, σ, es su raíz cuadrada.

Datos	Dif con la media	Valor absoluto	Datos	Dif con la media	Valor absoluto
2	-3	3	4	-1	1
3	-2	2	4	-1	1
3	-2	2	4	-1	1
4	-1	1	5	0	0
4	-1	1	5	0	0
4	-1	1	5	0	0
5	0	0	5	0	0
8	3	3	6	1	1
8	3	3	6	1	1
9	4	4	6	1	1
Total	0	20	Total	0	6
Conjunto A			Conjunto B		

Datos	Dif con la media	Valor absoluto	Datos	Dif con la media	Valor absoluto
2	-3	3	2	-3	3
4	-1	1	2	-3	3
4	-1	1	2	-3	3
5	0	0	3	-2	2
5	0	0	4	-1	1
5	0	0	6	1	1
5	0	0	7	2	2
6	1	1	8	3	3
6	1	1	8	3	3
8	3	3	8	3	3
Total	0	10	Total	0	24
Conjunto C			Conjunto D		

Tabla 4.3: Desviación respecto de la media de los conjuntos A,B,C y D.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N} \tag{4.1}$$

Actividad 4.9

Calcula las varianzas y las desviaciones típicas de cada uno de los cuatro conjuntos anteriores.

Las medidas de posición. Los cuartiles

Otras medidas que pueden ser muy útiles para saber como están distribuidos los datos son las *medidas de posición*, entre las que se encuentran los *cuartiles*. Estas medidas nos dividen en cuatro partes iguales un conjunto de datos ordenado.

Imaginamos que estamos a la puerta de unos grandes almacenes y hacemos una encuesta preguntando cuántos libros han comprado los clientes en el último mes y obtenemos los resultados de la Tabla 4.4.

Número libros	Personas
0	5
1	16
2	38
3	21
4	12
5	6
6	2

Tabla 4.4: Número de libros comprados.

Los cuartiles dividirían a estos conjuntos, al contener 100 datos, en cuatro subconjuntos de 25 datos cada uno. El primer cuartil es un valor tal que el 25 % de los datos es menor o igual que él. En el caso de la actividad anterior, el primer cuartil sería el 2, puesto que el dato número 25 es precisamente que la persona encuestada compró dos libros. Es decir, las 25 personas que menos libros compraron adquirieron 0, 1 o 2 libros. El segundo cuartil es un valor tal que el 50 % de los datos es menor o igual que él y esto coincide con la definición de mediana. También nos da un valor de 2. El tercer cuartil nos indica que el 75 % de los datos es menor o igual que él. En este caso, el tercer cuartil es 3.

4.3.4 Tratamiento estadístico de la información

Tradicionalmente la enseñanza de la estadística se ha centrado en instruir a los alumnos para que resuelvan de forma mecánica ejercicios en los que los datos ya están disponibles y deben ser utilizados para calcular algunas medidas que normalmente no tienen ningún sentido para ellos. Sin embargo, la investigación en didáctica de la matemática aconseja que la enseñanza de la estadística contemple las seis recomendaciones siguientes (*Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (*GAISE*) *Reports*, 2012):

- Incidir en la alfabetización y desarrollar el pensamiento estadístico.
- Utilizar datos reales.
- Enfatizar la comprensión conceptual, más que el conocimiento de los procedimientos.
- Desarrollar el aprendizaje activo en el aula.
- Utilizar la tecnología para desarrollar la comprensión conceptual y para analizar los datos.
- Utilizar la evaluación para mejorar y valorar el aprendizaje de los alumnos.

Esto requiere que la enseñanza de la estadística se realice a través de un estudio estadístico organizado alrededor de un problema significativo para el alumno. Además, es importante que los alumnos tengan que recoger la información relativa a ese problema, transformarla en datos, que deberán organizar para que sean más manejables. Una vez organizados los datos mediante las diferentes medidas estadísticas, los alumnos deberán reducirlos a ciertos valores que los representen y, de esta forma, obtener una idea global del significado de estos datos.

Actividad 4.10

Diseña una actividad estadística que tenga sentido para los alumnos de una escuela de Educación Primaria en la que se puedan obtener y dar sentido a cada una de las medidas de centralización y de dispersión que hemos visto anteriormente.

De la información a los datos

Para empezar a realizar un estudio estadístico tenemos que diseñar un instrumento que nos permita recoger información sobre las características de la población que queremos estudiar, como un cuestionario, una encuesta o la simple observación.

En estadística, una vez que se ha diseñado un instrumento de recogida de datos hay que pasarlo a una muestra representativa de la población. Para que la muestra se considere representativa debe contener las características relevantes de la población en la misma proporción en que están incluidas en dicha población. La información obtenida debe transformarse en datos y frecuencias para que pueda realizarse un tratamiento matemático de las observaciones.

Los tipos de muestreo son un conjunto de técnicas para seleccionar los individuos de una población que formarán parte de la muestra. Estas técnicas se dividen en dos grandes grupos, el muestreo probabilístico y el muestreo no probabilístico.

El muestreo probabilístico:

Es el proceso de selección de una muestra en la que todos los individuos o elementos de una población, tienen la misma probabilidad de ser seleccionados. Son técnicas basadas en el principio de selección al azar.

El muestreo no probabilístico:

Selección de una muestra en la que todos los elementos de la población no tienen la misma probabilidad de formar parte de ella. También llamado muestreo empírico, no están basados en la selección al azar.

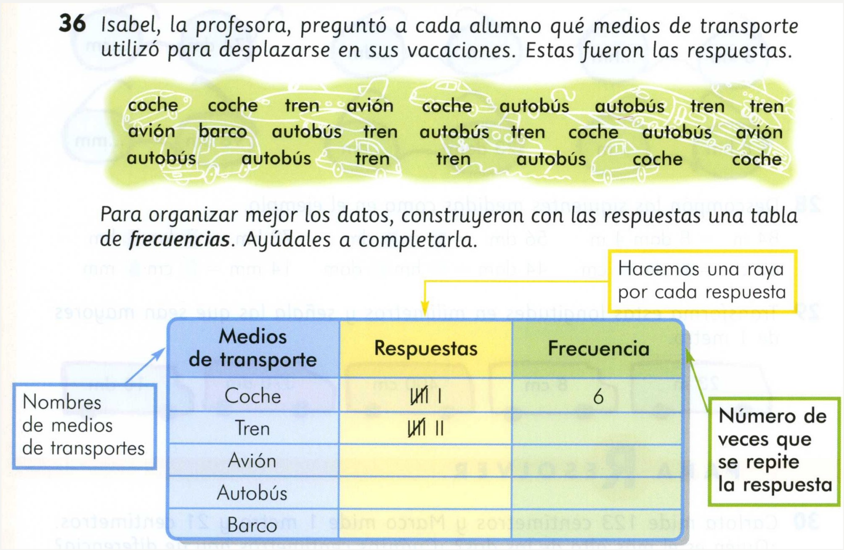
En la medida de lo posible, se aconseja la utilización de técnicas de muestreo probabilístico. En los casos en los que sea posible aplicar este tipo de técnicas hablaremos de *muestras probabilísticas*. No debemos, en general, hablar de muestras representativas dado que no es posible tener la certeza de que tal característica se haya logrado a menos que se conozcan bien las características de la población.

Por otro lado, el *muestreo subjetivo* puede emplearse cuando se busque seleccionar individuos que se sabe de antemano tienen un conocimiento profundo del tema estudiado y, por lo tanto, se considera que la información aportada por estas personas es vital para la toma de decisiones.

La presentación de los datos

Existen algunas representaciones muy simples que se pueden construir directamente a partir de un conjunto de datos o también en el momento de recogida de datos. En el siguiente ejemplo puede verse un ejemplo extraído de *Matemáticas 4: Primaria. Trotamundos. La emoción de descubrir* (2005, p. 150) donde se inicia a los alumnos en el registro de los datos. De esta forma se realiza la identificación de los diferentes valores de la variable al mismo tiempo que contamos las veces que aparece cada uno de estos valores y se puede contabilizar fácilmente el número de elementos de cada categoría.

Ejemplo 4.2



36 Isabel, la profesora, preguntó a cada alumno qué medios de transporte utilizó para desplazarse en sus vacaciones. Estas fueron las respuestas.

coche coche tren avión coche autobús autobús tren tren
avión barco autobús tren autobús tren coche autobús avión
autobús autobús tren tren autobús coche coche

Para organizar mejor los datos, construyeron con las respuestas una tabla de ***frecuencias***. Ayúdales a completarla.

Hacemos una raya por cada respuesta

Medios de transporte	Respuestas	Frecuencia
Coche	𝍸 I	6
Tren	𝍸 II	
Avión		
Autobús		
Barco		

Nombres de medios de transportes

Número de veces que se repite la respuesta

Los datos se pueden organizar también en forma de tabla de frecuencias en varias columnas. Si hacemos una encuesta preguntando los hábitos lectores de 20 niños de primaria podemos construir la Tabla 4.5. La primera columna se emplea para indicar cada una de las categorías en las que se organiza el conjunto de datos de la muestra y en la siguiente se refleja el número a veces que pertenece a esta categoría, que denominamos *frecuencia absoluta*. En la tercera se indican las *frecuencias relativas*, es decir, la razón de las frecuencias absolutas respecto del total de datos. A veces, también se incluyen las *frecuencias acumuladas* o los *porcentajes*.

	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Frecuencias acumuladas	Porcentajes
Cuentos	8	8/20	8	40 %
Poesía	2	2/20	10	10 %
Teatro	6	6/20	16	30 %
Cómic	4	4/20	20	20 %

Tabla 4.5: Tipos de frecuencias.

⊳ El diagrama de puntos

La representación gráfica más simple para organizar los datos es un *diagrama de puntos* (Figura 4.2). Es una forma de visualizar el recuento, en el que cada individuo se presenta por un punto. Cuidando que la distribución de puntos sea uniforme, podemos saber que hay más individuos donde la línea resultante es más larga.

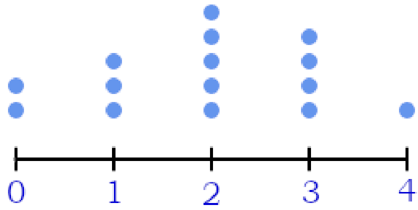


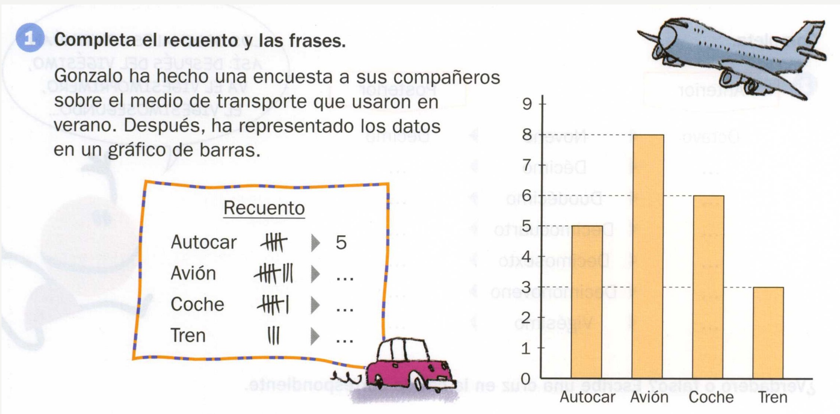
Figura 4.2: Diagrama de puntos representando el número de hermanos que tienen los niños de la clase.

⊳ Los diagramas de barras

Un *gráfico o diagrama de barras* es una representación gráfica en un eje cartesiano de las frecuencias de una variable cualitativa o cuantitativa discreta. En uno de los ejes se posicionan las diferentes categorías o modalidades de la variable (en el Ejemplo 4.3, el medio de transporte) y en el otro el valor o frecuencia de cada categoría en una determinada escala (en el ejemplo, el número de alumnos).

Ejemplo 4.3

Actividad extraída de *Matemáticas 3: Un paso más* (2005, p. 100)



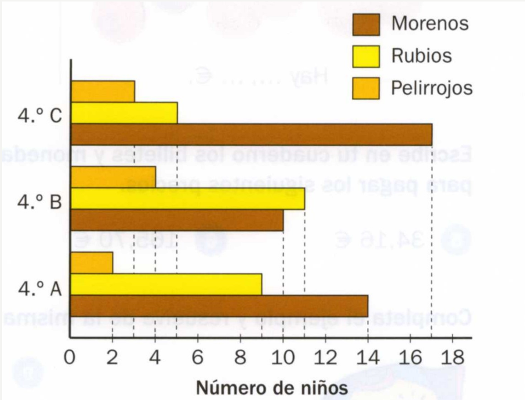
La orientación del gráfico puede ser:

- **Vertical**: las diferentes categorías están situadas en el eje horizontal y las barras de frecuencias crecen verticalmente.
- **Horizontal**: las categorías se sitúan en el eje vertical y las barras crecen horizontalmente. Suelen usarse cuando hay muchas categorías o sus nombres son demasiado largos (Ejemplo 4.4).

Las categorías pueden ordenarse alfabéticamente facilitando su investigación o por sus frecuencias facilitando la comparación de los datos. Este tipo de gráficos suele utilizarse para ver la evolución en el tiempo de una magnitud concreta o comparar magnitudes de varias categorías.

Ejemplo 4.4

Actividad extraída de *Matemáticas 4: Un paso más* (2006, p. 60)



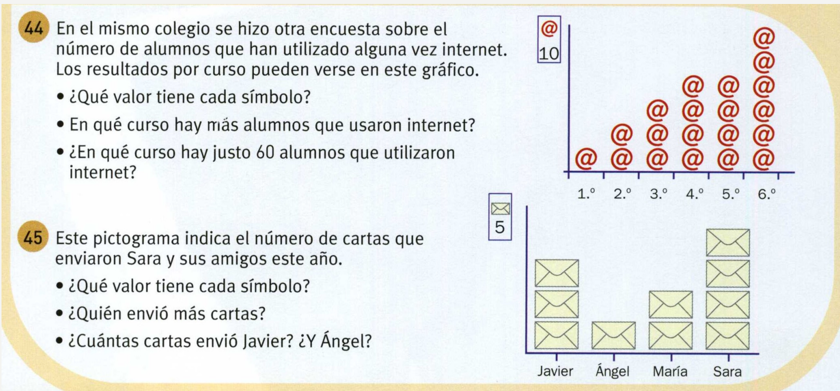
⊳ El pictograma

Un *pictograma* es un gráfico que representa mediante figuras o símbolos las frecuencias de una variable cualitativa o cuantitativa discreta. Igual que los gráficos de barras suelen usarse para comparar magnitudes o ver la evolución en el tiempo de una categoría concreta. Los tipos de pictogramas más comunes son:

- Gráficas de barras donde las barras están constituidas por símbolos o figuras distorsionadas que se adaptan a la longitud de la barra.
- Gráficas de barras donde las barras están constituidas por símbolos o figuras de la misma medida que representan una cantidad específica (a mayor frecuencia, más acumulación de figuras) (Ejemplo 4.5).

Ejemplo 4.5

Actividad extraída de *Matemáticas 5: Primaria. Planeta amigo, la emoción de convivir* (2006, p. 121)


44 En el mismo colegio se hizo otra encuesta sobre el número de alumnos que han utilizado alguna vez internet. Los resultados por curso pueden verse en este gráfico.

- ¿Qué valor tiene cada símbolo?
- En qué curso hay más alumnos que usaron internet?
- ¿En qué curso hay justo 60 alumnos que utilizaron internet?

45 Este pictograma indica el número de cartas que enviaron Sara y sus amigos este año.

- ¿Qué valor tiene cada símbolo?
- ¿Quién envió más cartas?
- ¿Cuántas cartas envió Javier? ¿Y Ángel?

⊳ Diagrama de sectores

Uno de los gráficos más complejos es el *gráfico o diagrama de sectores*, dado que cada uno de los sectores representa la frecuencia de los valores de cada una de las categorías de una variable estadística en relación con el área del círculo. Aunque hay programas informáticos en los que se pueden generar estos gráficos, resulta importante que los alumnos de Primaria construyan estos esquemas, puesto que relacionarán diferentes temas de diferentes áreas de las matemáticas, lo que les permitirá ver que éstos no están desconectados unos de otros y apreciar su utilidad en el seno de la propia matemática. Este tipo de gráfico es muy útil para realizar comparaciones entre las diferentes categorías y observar la distribución global de los valores de las variables.

Por ejemplo, imaginemos que preguntamos a un grupo de alumnos el soporte más habitual en el que realizan las lecturas y los damos tres opciones: papel, libro electrónico o audio-libro. Imaginamos también que los resultados obtenidos son que 15 leen sobre el papel, 4, en formato electrónico y 1 utiliza los audio-libros. Para asociar la frecuencia 15 a una amplitud de un sector circular se debe cumplir la siguiente razón de proporcionalidad:

$$\frac{360}{20} = \frac{x}{15}$$

Si 360º es la amplitud de la circunferencia y 20 el total de niños que han respondido la pregunta, nos saldrá una amplitud de 270º para el soporte en papel. Siguiendo el mismo cálculo para el resto de categorías obtenemos el gráfico de la Figura 4.3.

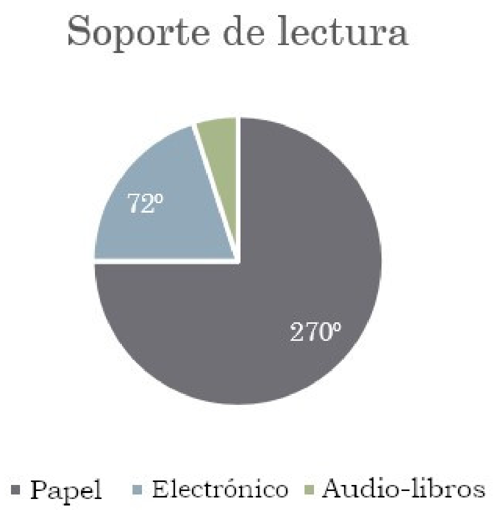


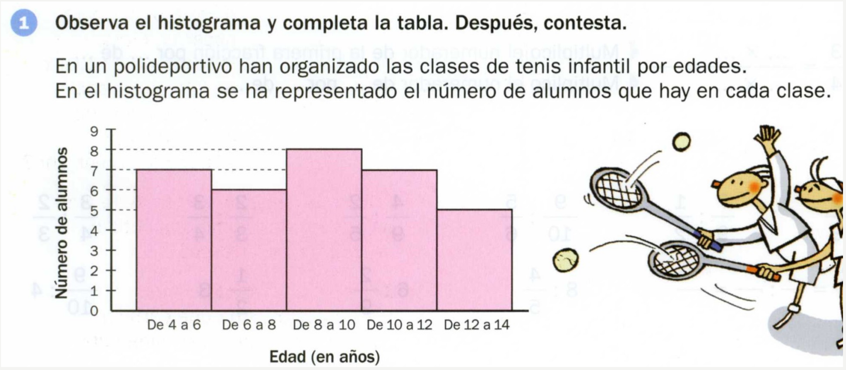
Figura 4.3: Representación en diagrama de sectores.

⊳ El histograma

Un *histograma* es una representación gráfica de una variable en forma de barras. Los histogramas se utilizan para variables continuas o para variables discretas con un gran número de datos y que se han agrupado en clases. En el eje abscisas se construyen unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo y por altura la frecuencia absoluta de cada intervalo. La superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados. En el ejemplo 4.6 podemos encontrar una actividad extraída de *Matemáticas 6: Un paso más* (2006, p. 102) en el que los alumnos trabajan con variables continuas para interpretar los datos de un histograma.

Ejemplo 4.6

Actividad extraída de *Matemáticas 6: Un paso más* (2006, p. 102)



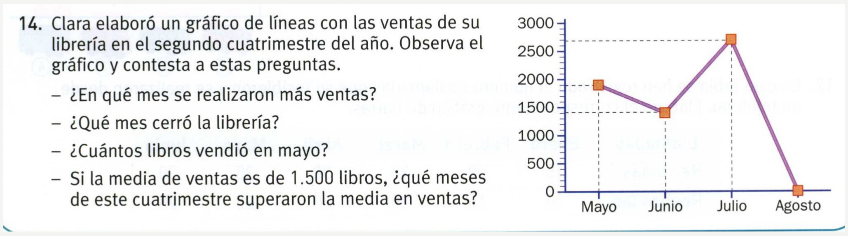
> El gráfico de líneas

El *diagrama de líneas, gráfico lineal, diagrama lineal o gráfico de líneas* es la representación gráfica de los datos recogidos mediante una línea que une los diferentes valores obtenidos.

El gráfico lineal se compone de una serie de datos representados por puntos, unidos por segmentos lineales. Mediante este gráfico se puede comprobar rápidamente el cambio de tendencia de los datos. El diagrama lineal se suele utilizar con variables cuantitativas, para ver su comportamiento en el transcurso del tiempo. Por ejemplo, en las series temporales mensuales, anuales, trimestrales, etc. tal y como puede verse en el ejemplo 4.7.

Ejemplo 4.7

Actividad extraída de *Matemáticas 5: Primaria. Planeta amigo, la emoción de convivir* (2006, p. 114)



Este diagrama puede obtenerse a partir de un diagrama de barras. Para representar la línea uniremos los puntos centrales de cada una de las partes superiores de los rectángulos representados en un diagrama de barras.

> El diagrama de cajas y bigotes

Con los cuartiles y el rango podemos sintetizar un conjunto de datos en forma de diagrama empleando el llamado *diagrama de caja y bigotes*. Los diagramas de Caja-Bigotes son una presentación visual que describe varias características importantes al mismo tiempo, tales como la dispersión y simetría. Para su realización se representan los tres cuartiles y los valores mínimo y máximo de los datos sobre un rectángulo alineado horizontal o verticalmente.

Estos gráficos pueden ser muy útiles para comparar dos o más conjuntos de datos. Por ejemplo, si queremos comparar la misma encuesta en dos grandes almacenes, en dos ciudades, en la puerta de unos grandes almacenes y una librería, etc. y después queremos comparar las diferentes medidas obtenidas de una forma visual.

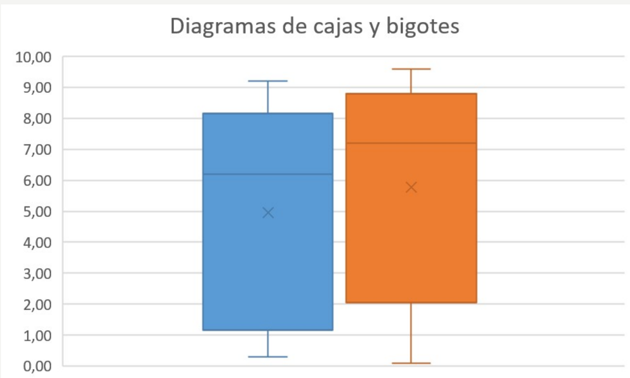
En el ejemplo 4.8 se puede ver la comparación entre dos conjuntos de datos pertenecientes a las notas de dos clases distintas en las que se puede observar las diferencias entre los valores máximo y mínimo de cada uno de ellos, la amplitud entre sus cuartiles y la posición de la media (marcada con una cruz dentro de la caja) y la mediana (marcada con una linea horizontal dentro de la caja).

Ejemplo 4.8

Veamos las notas de dos clases distintas de un mismo curso y de una misma asignatura. El objetivo es comparar los resultados obtenidos en las dos clases para analizar si una ha tenido mejor resultado que la otra.

	Clase A	Clase B
Media	5.02	5.94
Desviación típica	2.91	3.01
Rango	8.90	9.50
Mediana	6.20	7.20
Mínimo	0.30	0.10
Cuartil 1	2.00	4.00
Cuartil 2	6.20	7.20
Cuartil 3	7.10	8.00
Máximo	9.20	9.60

Si construimos los diagramas de cajas y bigotes de las dos clases obtenemos una comparación visual de los resultados en la que se aprecia claramente que, en el conjunto de la clase, los resultados de la clase B han sido mejores que los de la clase A.



4.3.5 Situaciones y recursos didácticos para el aprendizaje de la estadística

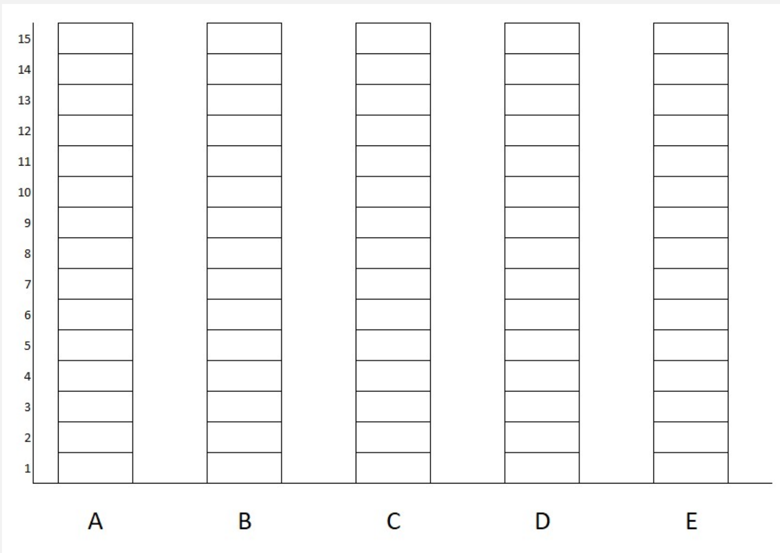
Existen diversos materiales para trabajar la estadística en las primeras edades de manera que se comprenda mejor el significado de la reducción de datos de un conjunto grande con el objetivo de describirlo, como los policubos y los programas informáticos generadores de gráficos. Vamos a proponer, a modo de ejemplo, algunas actividades para trabajar los conceptos más importantes de estadística en la Educación Primaria con material manipulativo.

Empezaremos con una actividad para los más pequeños en la que puedan elegir sobre qué quieren hacer un estudio estadístico y construir un diagrama de barras o histograma sobre el tema elegido.

Actividad 4.11

Contenido: Pictogramas para los más pequeños

Tareas
Diseña una actividad para los primeros cursos de primaria en la que los alumnos tengan que construir diferentes pictogramas utilizando pegatinas y papel con cuadros grandes. Elige diversos temas con los que definir las categorías de las variables *A, B, C, D y E*.



A continuación, en las actividades 4.12 y 4.13, se analizarán una actividades ya creadas que nos permitirán llevar a cabo una reflexión sobre sobre los contenidos de estadística que se están trabajando, sobre cómo podemos asegurarnos de que los alumnos los han entendido y sobre su contextualización en un curso determinado de primaria.

Actividad 4.12

Contenido: Histogramas de chocolate

Tareas
Analiza la siguiente actividad

> *Se divide la clase en cuatro grupos de cuatro a seis integrantes y se reparten 30 chocolates de colores a cada grupo. Se les pide que rellenen una tabla de frecuencias con el número de chocolates que tienen de cada color y que a continuación dibujen el diagrama de barras correspondiente.*

1. ¿Qué conceptos de estadística se trabajan en esta actividad?
2. Escribe una lista de preguntas que les harías a los alumnos para comprobar si han entendido bien los conceptos que se querían trabajar en esta actividad.
3. En qué curso de primaria crees que sería apropiado trabajarla. ¿Por qué?

Actividad 4.13

Contenido: Gráficos de sectores de chocolate

Tareas
Analiza la siguiente actividad

> *Se divide la clase en cuatro grupos de cuatro a seis integrantes y se reparten 16 chocolates de colores a cada grupo. Se les pide que dibujen un diagrama con 16 sectores de manera que coloquen los chocolates agrupados por colores y que saquen conclusiones del conjunto de chocolates que tenían en su grupo.*

1. ¿Qué conceptos de estadística se trabajan en esta actividad?
2. Escribe una lista de preguntas que les harías a los alumnos para comprobar si han entendido bien los conceptos que se querían trabajar en esta actividad.
3. En qué curso de primaria crees que sería apropiado trabajarla. ¿Por qué?

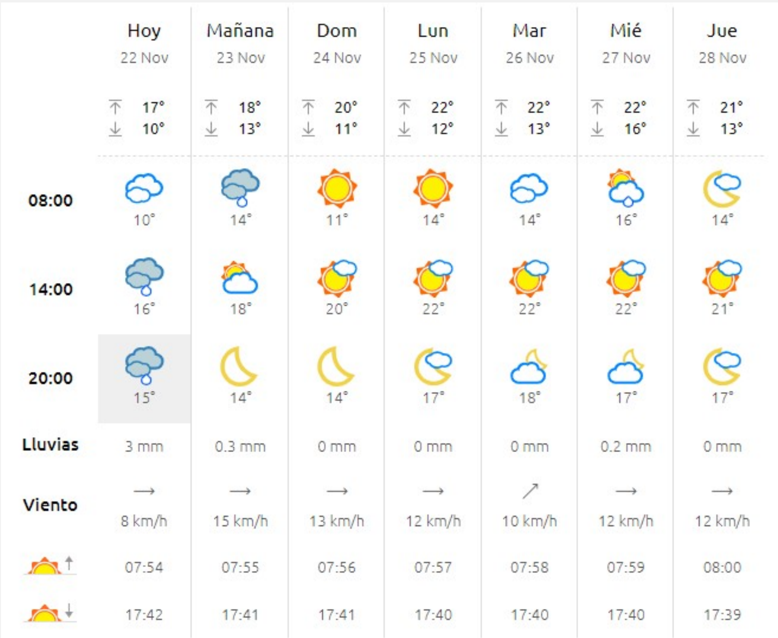
Por último, en la Actividad 4.14, se pide diseñar una actividad para que los alumnos de los últimos cursos de primaria tengan que elegir las variables necesarias para estudiar una situación concreta (previsión del tiempo atmosférico) y la forma de representar la información más apropiada para cada tipo de variable.

Actividad 4.14

Contenido: Elección de variables estadísticas

Tareas

Diseña una actividad destinada a los últimos cursos de primaria de manera que, a partir de la siguiente imagen, los alumnos trabajen diversos tipos de variables estadísticas y diversos tipos de gráficos para representar los datos.



	Hoy 22 Nov	Mañana 23 Nov	Dom 24 Nov	Lun 25 Nov	Mar 26 Nov	Mié 27 Nov	Jue 28 Nov
	17° 10°	18° 13°	20° 11°	22° 12°	22° 13°	22° 16°	21° 13°
08:00	10°	14°	11°	14°	14°	16°	14°
14:00	16°	18°	20°	22°	22°	22°	21°
20:00	15°	14°	14°	17°	18°	17°	17°
Lluvias	3 mm	0.3 mm	0 mm	0 mm	0 mm	0.2 mm	0 mm
Viento	→ 8 km/h	→ 15 km/h	→ 13 km/h	→ 12 km/h	↗ 10 km/h	→ 12 km/h	→ 12 km/h
↑	07:54	07:55	07:56	07:57	07:58	07:59	08:00
↓	17:42	17:41	17:41	17:40	17:40	17:40	17:39

Imagen extraída de la web `eltiempo.es`

4.3.6 Conflictos en el aprendizaje de la estadística

Batanero, Godino, Green, Holmes, y Vallecillos (1994) centran su trabajo en el hecho observable de que el alumno se equivoca cuando se le pide realizar ciertas tareas. El alumno proporciona respuestas erróneas, con respecto a una patrón de evaluación o simplemente no es capaz de dar ninguna respuesta. En los casos en que no se trata de mera distracción se dice que tal tarea resulta demasiado difícil para el alumno en cuestión. Pero los errores y dificultades no se presentan de un modo aleatorio o imprevisible. Con frecuencia es posible encontrar patrones de comportamiento y, en especial, ciertas asociaciones con variables propias de las tareas propuestas, de los sujetos o de las circunstancias presentes o pasadas. López Nievas (2014) hace una recopilación en su trabajo de los errores más usuales cometidos por los alumnos cuando trabajan conceptos de estadística en primaria.

Asignar el concepto de variable al de valor de la variable o viceversa. Por lo general, el alumno no tiene claro el concepto de variable estadística y confunde los valores que puede tomar esta variable e, incluso la frecuencia de los mismos, con la propia variable aleatoria. Investigadores como Miller (1998) afirman que una de las causas de esta confusión es el tratamiento que hacen los libros de texto del término variable aleatoria, que generalmente está asociado al del valor de los datos.

Confundir frecuencia absoluta/relativa o variable cualitativa/cuantitativa. Se trata de errores de comprensión o de memorización de nociones. Esto puede deberse a una mala puesta en práctica de los conceptos o a falta de comprensión de los mismos. Esta dificultad puede provocar problemas en la tabulación y en la interpretación de tablas. Este error es muy común cuando se trabaja con gráficos estadísticos (Arteaga, Batanero, Cañadas, y Contreras, 2011; Arteaga, Batanero, y Contreras, 2011) y se observa a la hora de representar gráficos cualitativos.

Dificultades de registro y obtención de datos. Uno de los errores típicos en estadística es causado por no recopilar correctamente los datos propuestos. Esto puede ser debido a la dificultad de comprensión de los problemas o enunciados planteados (Konold, 1989). Pero también puede producirse al elegir de manera incorrecta las preguntas de las que debe constar una encuesta o cuestionario.

Falta de comprensión y errores de cálculo de los parámetros de centralización y dispersión. Batanero y cols. (1994) confirman la idea generalizada de que el conocimiento por parte del alumnado de las reglas de cálculo no implica necesariamente una comprensión de los conceptos subyacentes. Por ello advierten de la frecuencia con la que aparecen errores predecibles excepto en aquellos problemas más sencillos. Carvalho (1998) describe algunos errores en el cálculo de medidas de tendencia central tras analizar las respuestas de los alumnos de su estudio. Destacan entre ellos el tomar la mayor frecuencia absoluta en el cálculo de la moda; no ordenar los datos para el cálculo de la mediana; calcular la moda en vez de la mediana; no tener en cuenta los valores nulos para su cálculo o desconocer que el algoritmo de cálculo es distinto dependiendo de si el número de datos con el que trabajamos es par o impar.

Errores en la tabulación y en la interpretación de tablas. En el caso de las tablas y su interpretación, los profesores debemos ser cuidadosos eligiéndolos para que sean accesibles a los alumnos (Monteiro y Ainley, 2006). La falta de conocimiento sobre la estructuración de las tablas, sobre el orden que deben seguir para su construcción o sobre el posicionamiento idóneo de las cifras o datos en ellas, pueden ser dificultades que aparezcan durante el desarrollo de la tarea y que conlleven problemas de interpretación posterior.

Pero si hay un tipo de errores que merece especial atención son los relativos a las dificultades en la construcción e interpretación de gráficos estadísticos. Veámoslo en el siguiente apartado.

Comprensión y elaboración de tablas y gráficos estadísticos

Con frecuencia, los profesores subestiman la dificultad que supone para los alumnos la elaboración de tablas y gráficos, dedicándole por ello poco tiempo en el desarrollo del tema. Sin embargo, este ejercicio supone una primera reducción estadística de los datos, ya que los valores originales de cada uno de los datos individuales son sustituidos por los valores de la distribución de las frecuencias.

Este concepto supone pasar de una descripción de cada dato particular a una descripción de la población en su conjunto, por lo que no debe minimizarse su complejidad. Mientras que los alumnos comprenden bien propiedades que se refieren a individuos, como el color de pelo o la altura de una persona, les resulta más problemático comprender la idea de distribución de alturas de un grupo. Esta transformación es, además, una característica esencial a múltiples conceptos estadísticos que se estudiarán posteriormente, por lo que su adecuada asimilación es muy importante para poder avanzar en el currículo.

Por otra parte, la presentación de datos en forma de gráficos y tablas es, probablemente, la expresión más frecuente de contenido estadístico, no sólo en otros contenidos curriculares, sino también en los medios de comunicación y otros ámbitos de la vida cotidiana. La destreza en la lectura crítica de datos y, en particular, la comprensión de este tipo de representaciones es, por tanto, un elemento central de la alfabetización cuantitativa y una necesidad en nuestra sociedad tecnológica.

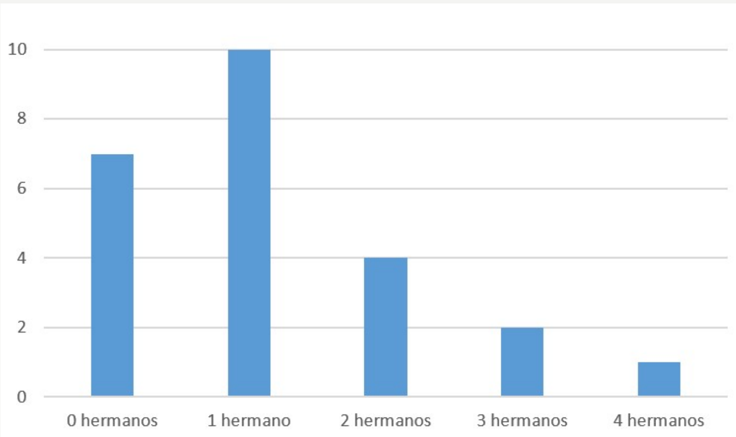
Curcio (1989) describe cuatro niveles diferentes de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos:

Nivel 1: Leer los datos.

Este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo. Se puede preguntar por las abscisas o por las ordenadas (Ejemplo 4.9).

Ejemplo 4.9

Dado el gráfico siguiente, responder a la pregunta, ¿cuántos alumnos tienen dos hermanos? ¿Qué número de hermanos es el más frecuente?

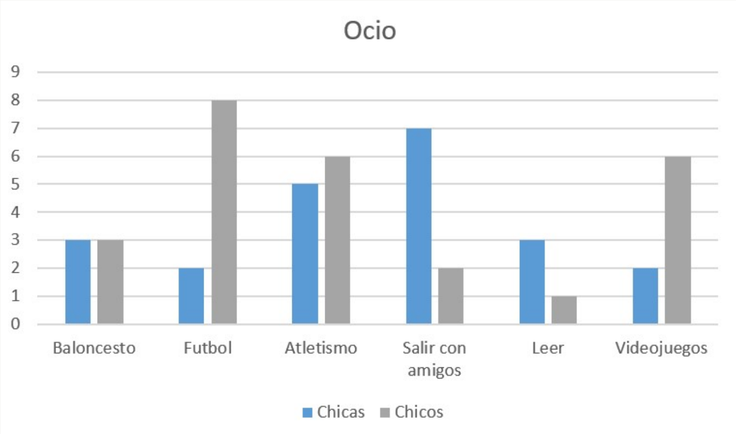


Nivel 2: Leer dentro de los datos.

Este nivel incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso otros conceptos y destrezas matemáticas (Ejemplo 4.10).

Ejemplo 4.10

Responder a la pregunta de si practican más deporte los chicos o las chicas.

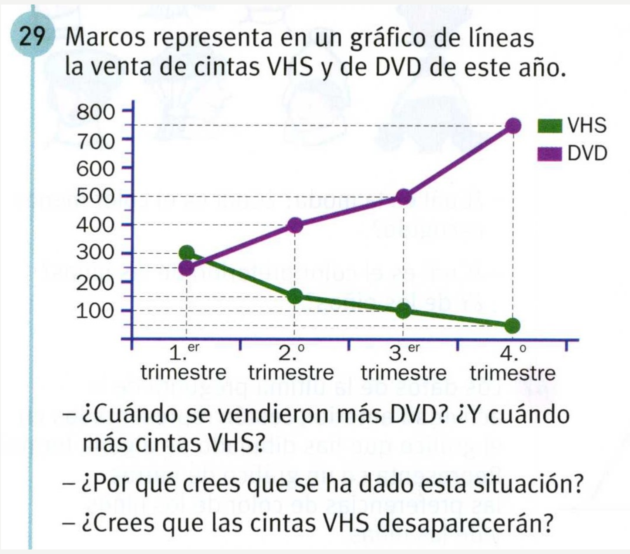


Nivel 3: Leer más allá de los datos.

Este nivel requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico (Ejemplo 4.11).

Ejemplo 4.11

Actividad extraída de *Matemáticas 5: Primaria. Planeta amigo, la emoción de convivir* (2006, p. 119)



Nivel 4: Leer detrás de los datos.

Este nivel supone valorar la fiabilidad y completitud de los datos.

Si analizamos las tareas que se requieren en la interpretación de una serie de tiempo, «leer los datos» se refiere a cuestiones sobre la lectura de las escalas o a como encontrar el valor de una de las coordenadas de uno de los puntos dado el valor de la otra coordenada. «Leer dentro de los datos» se refiere, por ejemplo, a cuestiones sobre la tendencia, sobre si podría ser representada o no mediante una función lineal o sobre si se observan ciclos. La predicción del comportamiento de la serie para los próximos meses, requeriría el trabajo en el nivel de «leer más allá de los datos». «Leer detrás de los datos» se refiere a valorar si los datos son completos, analizar la forma en qué fueron recogidos y detectar posibles sesgos.

Una teoría relacionada con estos niveles de comprensión de gráficos es la de Wainer (1992). Este autor clasifica el tipo de preguntas que se pueden plantear a partir de un gráfico en tres niveles:

- **Nivel elemental**. Preguntas relacionadas únicamente con la extracción de datos directamente del gráfico.
- **Nivel intermedio**. Preguntas relacionadas con la evaluación de tendencias basándose en una parte de los datos.
- **Nivel superior**. Preguntas sobre la estructura profunda de los datos presentados íntegramente, usualmente comparando tendencias y viendo agrupaciones.

Li y Shen (1992) muestran ejemplos de elección incorrecta del tipo de gráfico en los proyectos estadísticos realizados por los alumnos de secundaria. Algunos alumnos utilizaron un polígono de frecuencias con variables cualitativas o un diagrama de barras horizontal para representar la evolución del índice de producción industrial a lo largo de una serie de años. Con frecuencia la elección de las escalas de representación es poco adecuada para el objetivo buscado. Los autores incluyen, además, una lista de errores de carácter técnico entre los cuales destacamos los siguientes: omitir las escalas en al menos uno de los ejes; no tener en cuenta las leyendas de los pictogramas; no especificar el origen de coordenadas o no proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Wu (2004) encuentra los siguientes errores en la construcción de gráficos: errores en las escalas, errores en títulos o etiquetas, problemas de proporcionalidad en un pictograma, confusión entre gráficos parecidos pero de naturaleza distinta (por ejemplo, entre histograma y gráfico de barras) y confusión entre frecuencia y valor de la variable. El ordenador en ocasiones contribuye a empeorar los resultados. Ben-Zvi y Friedlander (1997) describen el uso acrítico de programas informáticos cuando los alumnos construyen gráficos rutinariamente, aceptando las opciones por defecto del programa aunque no sean adecuadas. Otras veces, la utilización inadecuada del «software» gráfico se debe a las concepciones incorrectas del alumno, como al obtener un diagrama de sectores en los cuales estos no son proporcionales a las frecuencias de las categorías o comparar cantidades heterogéneas en un mismo gráfico.

Arteaga, Batanero, Contreras, y Cañadas (2016) realizaron un análisis en futuros profesores de primaria y mostraron que estos conflictos están relacionados con los convenios de construcción, la selección de gráficos o el sentido numérico, además de los errores conceptuales tal y como se ha descrito anteriormente.

Para evitar o superar los errores relativos a la elaboración o comprensión de tablas es necesario plantear a los alumnos actividades en las cuales, además de plantear preguntas sobre la lectura de la tabla, tengan que completarla o comprobar que la tabla «cuadra», como en los ejemplos 4.12 y 4.13.

Ejemplo 4.12

En una clase de 12 alumnos se obtiene la siguiente información relativa al color de ojos ¿Es posible?

Color ojos	Azules	Verdes	Marrones
Frecuencia	4	3	7

Ejemplo 4.13

Tipo Sudoku: en una clase de 30 niños ...

	Canicas amarillas	Canicas verdes	Canicas rojas	Total
Chicas	2			
Chicos		6	4	
Total	15	10		

Actividad 4.15

Busca ejemplos en la prensa de tablas estadísticas o gráficos que presentan errores de construcción o que induzcan a obtener conclusiones equivocadas. Elabora una lista de los principales tipos de errores detectados.

4.3.7 Laboratorio de herramientas TIC para el aprendizaje de la estadística

A continuación se presentan diversos ejemplos de programas o herramientas TIC que el profesor puede emplear para la preparación de tareas en el aula. En las dos primeras actividades queremos crear o modificar micro-programas interactivos con Geogebra para trabajar la construcción y comprensión de los diagramas de barras y circulares.

Actividad 4.16

Contenido: Construcción de diagramas de barras

Tareas
Diseña un micro-programa interactivo de Geogebra

www Estadística para todos | Estadística para todos > Diagrama de barras

para trabajar la construcción y comprensión de los diagramas de barras en primaria.

Actividad 4.17

Contenido: Construcción de diagramas circulares

Tareas
Diseña un micro-programa interactivo de Geogebra

Estadística para todos Estadística para todos > Diagrama circular

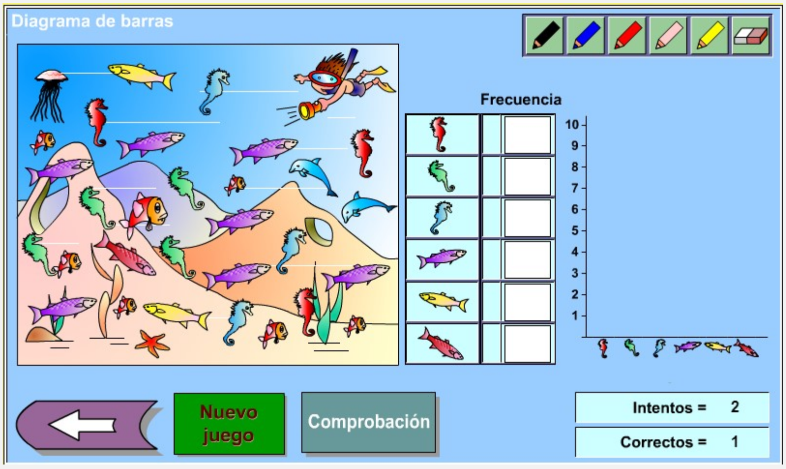
para trabajar la construcción y comprensión de los diagramas circulares en primaria.

El objetivo de las actividades 4.18 y 4.19 es analizar micro-programas interactivos de manera que se mejore parte de su diseño para evitar que los alumnos cometan errores a la hora de comprender la construcción de los diagramas de barras y los conceptos de frecuencia relativa y frecuencia absoluta.

Actividad 4.18

Contenido: Analizamos un micro-programa interactivo

Tareas
En Contamos y construimos encontramos un micro-programa interactivo en el que los alumnos tienen que contar elementos en una imagen y construir la tabla de frecuencias absolutas correspondientes. Analiza si la actividad propuesta es adecuada para los alumnos de los primeros años de primaria. Además, analiza la forma en la que se dibuja el diagrama de barras correspondiente y sus elementos y propón una mejora que evite errores por parte de los alumnos.

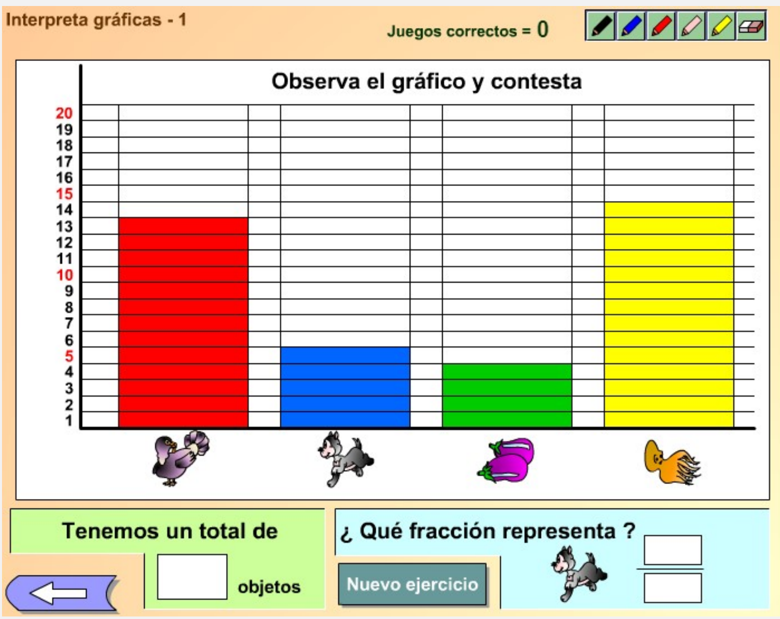


Actividad 4.19

Contenido: Analizamos un micro-programa interactivo II

Tareas

En Contamos y construimos encontramos un micro-programa interactivo en el que los alumnos tienen que interpretar un diagrama de barras y calcular la frecuencia relativa de algunas de sus categorías. Analiza si la actividad propuesta es adecuada para los alumnos de los cursos intermedios de primaria y, en caso contrario, propón una propuesta de mejora que evite errores por parte de los alumnos.



La siguiente actividad está enfocada a diseñar una actividad para trabajar cómo influyen los datos con los que se trabaja en la forma del diagrama de cajas y bigotes.

Actividad 4.20

Contenido: Construcción de diagramas de cajas y bigotes

Tareas

En Diagrama de cajas encontrarás un micro-programa interactivo de Geogebra que te permite, a partir de 19 datos que pueden variarse, construir un diagrama de cajas y bigotes.

Diseña una actividad en la que los alumnos puedan analizar cómo varía la forma del diagrama de cajas y bigotes al cambiar los valores dados inicialmente.

4.3.8 Análisis de libros de texto sobre tareas de estadística en primaria

Para el análisis de actividades de estadística de los libros de texto pondremos especial atención en los conceptos estadísticos que se trabajan en la actividad así como en el número y tipo de variables estadísticas utilizadas. Se analizarán los objetivos de la actividad y los posibles errores que puedan cometer los alumnos al realizar la actividad tal y como está plantada en el libro de texto.

Actividad 4.21

Contenido: Análisis de ejercicios y propuestas de Estadística en los libros de texto de primaria

Tareas Busca enunciados de ejercicios y propuestas de Estadística en libros de texto de primaria de distintas editoriales. Para cada uno:

1. Resuelve la actividad.
2. ¿Que conceptos de estadística se trabajan en la actividad?
3. Analiza: Forma de proporcionar la información (datos desorganizados, datos organizados en una tabla, datos resumidos en un gráfico, etc.).
4. Analiza: Variables estudiadas (cualitativas (nominales u ordinales) o cuantitativas (discretas o continuas)).
5. Analiza: Número de variables estudiadas y nombre de la(s) variable(s) (una sola variable o varias variables).
6. Analiza: Objetivo de la actividad.
   - Creación de tablas de frecuencias.
   - Creación de gráficos.
   - Contestar a preguntas sobre lectura de datos.
   - Cálculo de la moda, mediana, cálculo algorítmico de medias.
   - Comprensión de la moda, mediana, media, frecuencia relativa.
   - Justificar la necesidad de organizar la información para contestar a preguntas de forma más sencilla.
   - Otras (indica).
7. ¿Qué errores crees que pueden cometer los alumnos al resolver esta actividad?

4.4 Probabilidad

Comenzaremos este apartado con dos citas que nos ayudarán a entender la naturaleza de la probabilidad como objeto matemático y la naturaleza de una buena enseñanza de la misma. La primera corresponde a uno de los matemáticos que son considerados como padres de la probabilidad, Pierre-Simon Laplace, quien afirmaba en 1814 que «*la teoría de la probabilidad no es otra cosa que el sentido común aplicado al cálculo*». La otra corresponde al fundador de la escuela holandesa de didáctica de la matemática sobre la que se sustenta la llamada educación matemática realista, Hans Freudenthal, quien, en 1973, sostenía que «*para explicar a la gente lo que realmente significaban las matemáticas, podemos encontrar en la probabilidad los ejemplos más convincentes*».

Efectivamente, sentido común y modelización de situaciones reales muy particulares, que no son abordables desde otro punto de vista que no sea el de la probabilidad, son los dos pilares sobre los que se debería de asentar el razonamiento probabilístico en la Educación Primaria.

En una situación *determinista* la relación causa-efecto es evidente. Por ejemplo, si hoy es lunes, el hecho de que mañana sea martes es una situación inevitable y siempre que nos encontremos en la situación de ser cierto el primer hecho (hoy es lunes) mañana será cierto el segundo (será martes). No ocurre así en las situaciones *aleatorias* o de *incertidumbre*, en las el conocimiento de un hecho concreto no permite asegurar que le sucederá otro hecho. Cuando lanzamos un dado, por ejemplo, no somos capaces de predecir cuál de sus seis caras quedará en la parte superior.

La distinción que hacemos entre aleatorio o de incertidumbre se debe solo a cómo vivimos la situación, si con una perspectiva objetiva o subjetiva. Esto es, identificamos las situaciones como *aleatorias* si proceden de algún juego de azar o como consecuencia de un suceso fortuito, donde parece que las personas son ajenas a él. Por otra parte, identificamos una situación como de *incertidumbre* si en estas situaciones nuestra incapacidad para realizar una predicción la achacamos a que nos falta conocimiento seguro y claro del que ocurrió o está ocurriendo, impidiéndonos afirmar con seguridad qué va a ocurrir.

Lo que denominamos *probabilidad* organiza los fenómenos asociados tanto a las situaciones aleatorias como a las de incertidumbre. En ellas somos capaces de asignar una probabilidad tanto a un suceso incierto en una situación aleatoria, como «obtener cara» al lanzar una moneda, como la posibilidad que tiene un ciudadano de contraer la gripe a primeros de cada invierno.

En ocasiones, cuando el alumno no tiene muy cimentadas las diferencias entre aquello determinista y las situaciones aleatorias y de incertidumbre puede tener tendencia a establecer irregularidades en los acontecimientos aleatorios. Esto es, a interiorizar como el patrón de comportamiento normal una ocurrencia concreta de una situación aleatoria o con incertidumbre.

Es conveniente que en el trabajo con estas nociones se propongan situaciones a los alumnos en las que se puedan confrontar sus nociones de situación determinista o situación aleatoria y que el propio trabajo del aula los ayude a encontrar una comprensión más solida que les permita diferenciar ambos conceptos de forma clara.

En la Educación Primaria hay situaciones generales que suelen emplearse para la enseñanza de la probabilidad. Una de las situaciones es conocida como *juegos de azar*. Se trata de una situación aleatoria general en la que pueden considerarse varios contextos derivados del generador de azar empleado en el juego: monedas, dados, ruletas, bombos, urnas, etc.

Los juegos con monedas son diferentes de los juegos con dados y estos de los juegos con ruletas y bombos, etc., por eso los fenómenos que están presentes en ellos también son diferentes y requieren que se traten de forma diferenciada. Sólo cuando este tratamiento individualizado, contexto por contexto, esté hecho es cuando puede abordarse el tratamiento de los fenómenos que están presentes en la situación general (juegos de azar), con el fin de modelizarlos y tomar decisiones sobre, por ejemplo, apuestas o riesgos en los juegos de azar.

4.4.1 La estimación objetiva de la probabilidad

Bajo el calificativo de *objetiva*, la estimación de la probabilidad de un suceso se produce independientemente de lo que piense el propio sujeto sobre él. En estas circunstancias hay dos formas posibles de razonar: *estimar la probabilidad antes de que el proceso aleatorio tenga lugar o estimarla después*, en función de la información disponible sobre las veces que un determinado suceso se ha producido cuando el proceso se ha repetido suficientes veces y en iguales condiciones cada vez.

Estimación clásica o laplaciana de la probabilidad

Consideramos como aleatorio el proceso de lanzar un dado cúbico al aire y observar sobre qué cara caerá. Esto implica que no se puede saber por anticipado sobre qué cara se posará el dado. Entonces es razonable preguntarse, por ejemplo, si es más fácil que se pose sobre la que contiene el número 3 que sobre cualquier otra, como la del 1 o la del 5. Preguntarnos sobre esto es interrogarnos por la *probabilidad de un suceso*, la probabilidad de que la cara sobre la que se pose el dado sea la del número 3 ¿Cómo decidir si algo imprevisto es más fácil o difícil que ocurra? Debemos recurrir para esto a los números. Tenemos que asignar un número a esto que hemos denominado *facilidad*.

Solo hay una cara con ese número y cinco que no lo tienen. Por otro lado, nada nos hace sospechar sobre el dado, suponemos por hipótesis que su geometría es perfecta, que el dado es perfecto (que se trata de un dado ideal). Entonces, es razonable tener la misma certeza o incertidumbre sobre qué cara se posará el dado cuando caiga. Es decir, se consideran todas las caras igualmente fáciles o igualmente probables. Digamos que todos los resultados son *equiprobables*.

Asignamos el valor 0 y el valor 1 a los extremos sobre los que se puede hablar de facilidad, certeza o incertidumbre: ninguna y toda, respectivamente. Entre ellos está el valor de probabilidad que corresponde al suceso por el que nos estamos preguntando, probabilidad que es la misma para las otras cinco caras del dado. Así que lo más razonable es que la seguridad total, cuantificada por 1, se reparta por igual entre todas las que corresponden a cada una de las caras del dado, resultando así $1/6$ la probabilidad estimada para cada cara y, en consecuencia, que sea esta la probabilidad de que la cara sobre la que caiga el dado sea la del número 3.

Lo que se ha hecho es lo más razonable con las circunstancias en las que se plantea la situación aleatoria. Pero no solo es útil para esta situación aleatoria, sino para otras muchas en las que las circunstancias sean compartidas.

Por ejemplo, consideramos un saco opaco que contiene 15 bolas del mismo tamaño, material y textura, 4 negras, 5 blancas y 6 rojas. Se considera aleatorio el proceso de extracción de bolas de un saco sin mirar. Se pregunta por la probabilidad de que la bola extraída sea de un color determinado. Lo que es seguro es que se extrae una bola. El que es incierto es qué bola será y como consecuencia de qué color. Si repartimos toda la certeza en partes iguales entre las 15 bolas del saco, tenemos que la probabilidad es de $4/15$ para las bolas negras, $5/15$ para las blancas y $6/15$ para las rojas. La intuición ya nos decía que es más fácil que la bola extraída sea roja que blanca o negra; y que es más fácil que no sea roja que sí que lo sea.

El poder de los números nos permite hablar con alguna precisión sobre la facilidad con la que ocurren resultados inciertos y nos permite cuantificar esta facilidad o dificultad.

La forma de proceder que hemos visto se puede resumir con la llamada *regla de Laplace*, que dice así

> *Suponemos un proceso aleatorio con n resultados posibles, todos ellos considerados como igualmente probables, de los cuales m son favorables a un suceso M, q lo son a un suceso Q y r a un suceso R, siendo $n = m + q + r$, entonces: la probabilidad de que ocurra el suceso M se llama $p(M) = m/n$, la probabilidad de Q se llama $p(Q) = q/n$ y la probabilidad de R se llama $p(R) = r/n$.*

Estimación por frecuencias relativas

En muchos casos la hipótesis de la equiprobabilidad no es razonable, no es discutida o ni siquiera es considerada. Veamos un ejemplo en el que esta hipótesis no es asumible.

Actividad 4.22

Discute, por ejemplo, con tus compañeros la hipótesis de equiprobabilidad con el lanzamiento de una chincheta, comparándola con el lanzamiento de una moneda. Si a la chincheta se le presupone la equiprobabilidad, actuar de forma Laplaciana es razonable y no discutible. Pero, obviamente, para una chincheta es muy discutible tomar como cierta la hipótesis de equiprobabilidad.

En las circunstancias anteriores, lo más razonable es que la asignación de una probabilidad a un suceso se lleve a cabo sólo tras tener suficiente información sobre la realización de este suceso dentro del experimento aleatorio en el que se considere. Así, por ejemplo, si en un número n de lanzamientos de la chincheta ideal (en la que se supone que su realizados siempre de la misma forma para que los resultados que se obtengan no estén desvirtuados) o real (en la que la hipótesis anterior no es posible considerarla), m veces la posición es de pie y p veces acostada, siendo $n = m + p$, entonces, con la información disponible, se puede asignar la frecuencia m relativa a las veces n que se lanzó la chincheta, es decir la razón m por cada n (m/n), como una forma de decir cómo de fácil o de difícil es (su probabilidad) que la chincheta caiga de pie. Por la misma razón, se puede asignar la razón p veces por cada n (p/n) lanzamientos como la probabilidad de que la chincheta caiga acostada. En este caso vemos, por tanto, que la probabilidad asignada depende de la información disponible; es una probabilidad experimental y no teórica.

⋗ Idea intuitiva de probabilidad. Ley de estabilidad de las frecuencias relativas

La ley de estabilidad de las frecuencias relativas nos dice que *la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente*. A este número se le llama *probabilidad del suceso*.

Esta ley permite aproximarnos a la probabilidad de una forma intuitiva, mediante la repetición de un experimento. Aunque un alumno no tenga conocimientos probabilísticos puede intuir que sucesos son más o menos probables de forma experimental. Para esto tendrá que repetir el experimento un número elevado a veces y calcular las frecuencias relativas de cada suceso, es decir, el número de veces que el suceso se ha realizado dividido entre el número de experimentos realizados. Las frecuencias relativas de cada suceso, a medida que el número de pruebas del experimento crece, se aproxima a su probabilidad en el experimento.

Mediante el uso de esta ley los alumnos de primaria pueden dar solución a problemas de probabilidad más complejos de los que se corresponden con su nivel educativo.

4.4.2 La estimación subjetiva de la probabilidad

Cuando a la hora de asignar una probabilidad a un suceso se tiene en cuenta no solo la información objetiva disponible sobre él (como frecuencias relativas o razones de equiprobabilidad) sino, además, las creencias o experiencia personales, entonces estamos hablando de una *asignación subjetiva de la probabilidad*. La base de la estimación es la información de la que el sujeto dispone sobre el experimento aleatorio y sobre el suceso al que hay que asignar la probabilidad.

Suponemos, por ejemplo, que queremos asignar una probabilidad al suceso «el próximo bebé que nazca será niña» en una familia con 3 hijos. ¿Cómo podemos hacerlo? Intentemos asignar probabilidades de forma objetiva. Como al nacer un bebé hay dos posibilidades, niño o niña y para nosotros no hay razón suficiente para pensar que no son igualmente probables, la probabilidad de que «el próximo bebé que nazca sea niña» debe ser de 1/2. Ahora bien, alguien puede hacernos ver que tal vez la suposición de equiprobabilidad no es razonable en este caso, puesto que en el mundo «hay más niñas que niños». Consultamos las estadísticas y encontramos que en el mundo el 51 % de la población son mujeres y el 49 % son hombres.

Entonces, atendiendo a esta información, la probabilidad de que «el próximo bebé que nazca sea niña» es del 51 % o 0’51. Pero, claro, el mundo es muy grande y puede ser que no explique lo que ocurre en la familia de la que hablamos. Así que o bien consideramos que cualquiera de las dos asignaciones anteriores expresa bien la probabilidad pedida o bien dejamos de ser objetivos y tenemos en cuenta más informaciones relativas al comportamiento de los nacimientos en el mundo más próximo a nosotros, al del sujeto que tiene que asignar la probabilidad (por ejemplo en su continente, país o comunidad en la que vive esta familia) o incluso en el seno de la familia en cuestión.

Si, por ejemplo, en esta familia, a lo largo de generaciones, por cada niño que nace, nacen dos niñas, ¿podemos seguir pensando que cualquiera de las dos asignaciones objetivas expresa bien la probabilidad pedida? Si de los tres hijos que ya hay en la familia dos son niñas y uno es niño, ¿es igual (o aproximadamente igual) de probable que el «próximo bebé que nazca sea niña» que niño? ¿No es más razonable pensar que es más probable que «el próximo bebé que nazca en esta familia sea niña» antes de que niño?

Como la información es variable, es de suponer que cada vez que disponemos de más información mejor será la asignación de una probabilidad, es decir, la decisión que tomamos será la más probable. La probabilidad asignada de esta forma es, por tanto, actualizable en cada momento en el que se disponga de más información sobre el suceso.

4.4.3 La resolución de problemas de probabilidad

Un problema de probabilidad puede definirse como una situación problemática en la que aparentemente no hay una respuesta obvia, en la que se pregunta por la probabilidad de que un suceso ocurra o vaya a ocurrir, ya sea en tiempo presente, pasado o futuro.

Resolver un problema de probabilidad consiste en dar respuesta a esa pregunta a partir de la información disponible por el resolutor, información que puede estar ya incluida en el enunciado del problema.

El proceso de resolución consiste, pues, en la obtención que esta información, lo que hace que la respuesta al problema dependa de cómo se ha obtenido. Así, podemos decir que, si un resolutor dispone de toda la información necesaria sobre un suceso, entonces responde a la pregunta del problema mediante la asignación de un número a la probabilidad preguntada. Si, en cambio, esa información no está directamente relacionada con el suceso por el que pregunta el problema, entonces el resolutor necesita hacer cálculo de probabilidades y ver de qué manera se relaciona la probabilidad preguntada con las probabilidades que conoce.

Finalmente, si ninguna de las situaciones anteriores es posible, entonces el resolutor debe acudir a modelizar el problema mediante una simulación que le permita obtener la información necesaria para poder dar respuesta a la pregunta del problema simulado, aunque sea en el modelo y que le sirva como respuesta del problema original. Veamos cómo puede ser este proceso en cada uno de los diferentes casos de resolución.

Diremos que un problema de probabilidad está *resuelto por asignación* si la respuesta a la pregunta del problema implica tomar una decisión en términos de probabilidad sobre la ocurrencia de un suceso. En general, la resolución de un problema de probabilidad por asignación implica seguir los siguientes pasos:

1. Análisis de posibilidades y determinación del espacio de posibilidades en la situación aleatoria en la que está formulado el problema.

2. Identificación del suceso por el que se pregunta su probabilidad y su relación con el espacio muestral o de posibilidades. Hay que tener en cuenta que un suceso es un subconjunto del espacio de posibilidades.

3. Reflexión sobre la equiprobabilidad de los sucesos, ya sean elementales o compuestos, en la situación aleatoria. Aceptación de la hipótesis de la equiprobabilidad.

4. Medir el espacio muestral y del suceso por el que se pregunta su probabilidad.

5. Comparar los tamaños del espacio muestral y del suceso y expresar esta comparación mediante una razón que indique el tamaño del suceso por el que se pregunta su probabilidad en relación con el del espacio muestral.

6. Tomar como la probabilidad pedida del suceso la razón definida en el paso anterior.

La resolución por asignación

Si bien ya hemos comentado antes que la enseñanza de las matemáticas no tiene que restringirse a enseñar el dominio de procedimientos sin que el alumno le dé algún sentido personal a los problemas, estos pasos tienen la intención de hacer que el profesor tome consciencia sobre los procesos mentales que están involucrados en la resolución de problemas de probabilidad por asignación.

En cualquier caso, todo resolutor que dé respuesta a un problema asignando una probabilidad pasa de una forma consciente o inconsciente por los pasos anteriores. Esta consciencia permitirá al profesor, entre otras cosas, adelantarse a las dificultades que puede tener un alumno a la hora de enfrentar este tipo de problemas, diseñar estrategias para desarrollar el pensamiento probabilístico de los alumnos y proponer situaciones en las que tenga especial importancia reconocer cuándo un problema puede resolverse por asignación o puede convertirse en un problema de asignación.

Vemos en el ejemplo 4.14 el uso intencional de los seis pasos antes descritos en la resolución de un problema.

Ejemplo 4.14

Se lanzan dos dados cúbicos al aire. ¿Qué probabilidad hay de obtener una suma de 7 puntos entre los dos dados?

Procedemos de una forma sistemática, aplicando los pasos anteriores como un método:

1. ¿Qué posibilidades tengo cuando lanzo un dado cúbico? ¿Qué posibilidades tengo cuando lanzo dos dados cúbicos y miro los resultados?

   Al lanzar dos dados, obtenemos 6 posibilidades diferentes en cada uno de ellos de aterrizar sobre la mesa. Es decir, obtenemos 36 posibilidades en total, como puede verse a continuación en la Tabla 4.6.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tabla 4.6: Posibles resultados al lanzar dos dados cúbicos.

   El problema se interesa por otro tipo de resultado posible, que no está explícitamente reflejado en la tabla anterior: el que proporciona la suma de los resultados individuales en cada dado y que van desde el número 2 hasta el 12, ambos obtenidos de forma única. Traducimos la tabla anterior a una tabla con las sumas (Tabla 4.7). Lo que obtengamos es el espacio muestral o espacio de posibilidades para el suceso «suma 7».

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabla 4.7: Espacio muestral en forma de tabla del valor sumado al lanzar dos dados cúbicos.

2. El suceso «suma 7» está representado por los valores 7 situados en la diagonal secundaria de la tabla anterior, que representa el espacio muestral de las sumas que se obtienen al lanzar dos dados cúbicos.

3. Como se considera el resultado (1,1) igual de probable que el resultado (6,1), aceptamos la hipótesis de equiprobabilidad para cada uno de los 36 resultados posibles representados en la mesa. De estos, 6 corresponden a la «suma 7».

4. El tamaño muestral es 36 y el tamaño del suceso «suma 7» es 6.

5. Por lo tanto, la razón de «suma 7» a todas las sumas posibles es 6 de 36.

6. Respondemos con una asignación: probabilidad de obtener «suma 7», $p(\text{suma } 7) = 6/36$ o $1/6$.

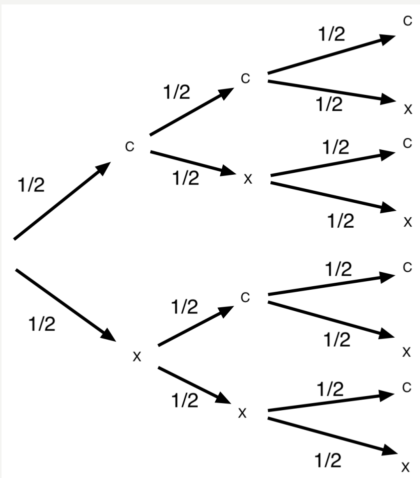
La resolución de problemas por cálculo de probabilidades

Diremos que un problema se resuelve o está resuelto mediante el cálculo de probabilidades si en su resolución se han aplicado reglas de cálculo entre probabilidades. Estas reglas de cálculo dependen del registro en el que se expresan las cantidades del problema. Así, si el registro es algebraico, entonces las reglas de cálculo a las que nos referimos se expresan por medio de formulas. Dado que este tipo de registro no es objeto de enseñanza en la probabilidad de Primaria no nos ocuparemos de estas expresiones.

Pero, si el registro es otro, por ejemplo, los diagramas de árbol que representan las diferentes posibilidades que pueden darse en un proceso aleatorio compuesto de más de una prueba, entonces las fórmulas anteriores se expresan en el árbol como reglas de cálculo asociadas a él. Estas reglas son la regla del producto de probabilidades y la regla de la suma de probabilidades. Vemos cómo funciona en los ejemplos 4.15 y 4.16.

Ejemplo 4.15

Calcular la probabilidad de que, al echar al aire tres monedas, las tres sean cara.

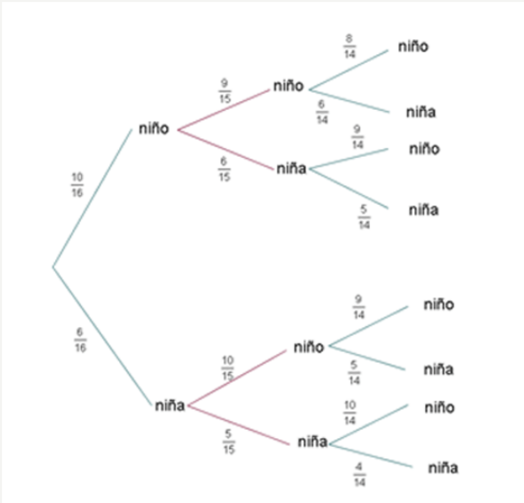


$$p(3c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 4.16

Una clase tiene 6 niñas y 10 niños. Si se elige un comité de tres alumnos al azar. Encontrar la probabilidad de

1. Elegir tres niños
2. Elegir exactamente dos niños y una niña
3. Elegir exactamente dos niñas y un niño
4. Elegir tres niñas



1. Elegir tres niños
$$p(3 \text{ niños}) = \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14} = 0{,}214$$
2. Elegir exactamente dos niños y una niña
$$p(2 \text{ niños y una niña}) = \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14} + \frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14} = 0{,}482$$
3. Elegir exactamente dos niñas y un niño
$$p(2 \text{ niñas y un niño}) = \frac{10}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14} + \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14} = 0{,}268$$
4. Elegir tres niñas
$$p(3 \text{ niñas}) = \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} = 0{,}0357$$

La resolución de problemas por simulación

Simular un problema de probabilidad consiste en transformar un problema dado, el problema original, en otro que es probabilísticamente equivalente y que, mediante el uso de un generador de azar que simula la situación aleatoria en el problema original, se obtenga una solución al problema simulado que pueda emplearse para dar respuesta al problema original.

El éxito en la resolución de un problema por simulación reside en la elección correcta del generador de azar (dado, ruleta, números aleatorios, programas informáticos, etc.) y su consideración va a dar lugar al problema simulado, que tiene que ser probabilísticamente equivalente al problema original que se quiere resolver, pero que, por la razón que sea, de este no se dispone o no se quiere disponer de una solución teórica y con el simulado se piensa que se puede llegar a dar una respuesta. Por ejemplo, consideramos el problema del ejemplo 4.17.

Ejemplo 4.17

Una conocida firma de pastelería regala con cada uno de sus pasteles una figurita que incluye su interior. La colección completa está formada por 6 figuritas. ¿Cuántos pasteles crees que, por término medio, tendrás que comprar para tener la colección completa?

Para resolver este problema mediante asignación necesitaríamos, por ejemplo, conocer el número total de pasteles fabricados, considerar conjuntos de pasteles que contengan las 6 figuritas diferentes y saber la distribución de éstos en diferentes tiendas, pero no tenemos todos esos datos y por eso no podemos emplear este método para encontrar la solución.

Con el método de experimentación tendríamos que abrir pasteles hasta encontrar las seis figuritas diferentes y registrar el número de pasteles que han hecho falta para esto. Ese sería nuestro primer experimento. Posteriormente tendríamos que repetir el experimento y registrar el número de pasteles que se requiere abrir para encontrar nuevamente 6 figuritas diferentes y así hasta tener una cantidad considerable de experimentos y esto es inviable.

Por estas razones, parece que la forma más óptima de resolver este problema es por simulación. Entonces, tenemos que pensar en cómo simular la compra de pasteles y ver qué figuras hemos obtenido. Para esto, tenemos que considerar algunas hipótesis sobre cómo están distribuidas las figuritas en los pasteles y estos, en los estantes de las grandes superficies.

Así, supondremos que el fabricante distribuye las figuritas por igual entre los pasteles que vende y que éstos están expuestos en los estantes también de forma uniforme. Así, siempre que vayamos a comprar un pastelito puede salirnos cualquiera de las 6 figuritas por igual.

Esta hipótesis también se la podemos otorgar a un dado cúbico cualquiera y suponer que el dado, una vez lanzado, puede caer igualmente en cualquiera de sus caras (la hipótesis de la equiprobabilidad que ya hemos visto anteriormente). Entonces, si numeramos las figuritas del 1 al 6, al lanzar el dado y ver la cara en la que cae, podemos simular que hemos comprado un pastel en el que dentro estaba la figurita con ese número de cara. Entonces, ¿cuántas veces tengo que lanzar un dado, por término medio, hasta que haya caído en todas sus caras al menos una vez? Esta es la pregunta del problema al que hemos denominado problema simulado. La solución de este problema nos debería de dar información para poder tomar una decisión sobre el problema original.

Huerta Palau (2015) trabaja este mismo problema y propone lanzar el dado cuántas veces estimemos que sea necesario. Diremos que hemos realizado una simulación cuando al lanzar repetidamente el dado hemos conseguido reproducir el suceso por el cual se nos pregunta.

Lo que esta simulación produce es información sobre lo que ha ocurrido, información que tiene que ser organizada y tratada. Ahora bien, el estado de incertidumbre que puede producir una respuesta basada en sólo dos simulaciones puede ser mayor que si hacemos muchas más. Pero, ¿cuántas más? Algunos métodos para determinar la probabilidad experimental de un suceso sugieren realizar un número de simulaciones dado por adelantado: 50, 100 o 1000, número con el cual se considera que se puede proporcionar una respuesta razonable al problema simulado.

Actividad 4.23

Resuelve el problema simulado anterior.

a) ¿Qué información te aporta el problema simulado que sea útil para dar una respuesta al problema original?

b) Responde a la pregunta del problema original

4.4.4 Situaciones y recursos didácticos para el aprendizaje de la probabilidad

Para Alsina, Burgués, y Fortuny (1988), el término *material* agrupa todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en la diversas fases del aprendizaje, es decir, el material manipulativo, software didáctico y no didáctico, libros, problemas, juegos, y, en general, todos los instrumentos que facilitan el trabajo en la clase de probabilidad.

El material manipulativo desempeña un papel básico en los primeros niveles de enseñanza por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratamos de enseñarles. Por ejemplo, en los *Principles and standards for school mathematics* (2000) del NCTM se recomienda que los alumnos experimenten y simulen modelos de probabilidad. *No basta contar con que en la vida cotidiana el niño encuentre sucesos aleatorios que le permitan descubrir las leyes de las probabilidades; es necesario introducir estrategias, apelar a la actividad para suscitar la curiosidad natural del niño, conducirle a que se enfrente con la realidad y luchar contra las ideas falsas que pueda tener*.

Bolas en urnas

Los experimentos con urnas tratan sobre cualquier colección de objetos (fichas, cartas, regletas, bloques, etc.) que se puedan mezclar antes de extraer de una urna o una caja, de modo que todas tengan la misma posibilidad de salir. Permiten, por un lado, introducir el número de elementos diferentes que se desee, en lugar de estar restringido a un número dado de elementos y por otro lado, la mayor o menor proporción de elementos de cada tipo en la urna permitirá cambiar a voluntad las probabilidades de los distintos sucesos elementales.

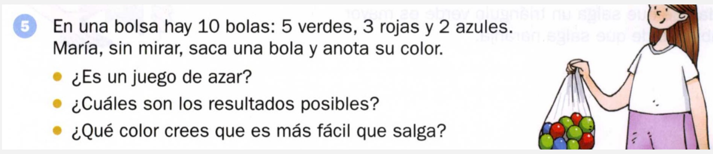
La extracción de bolas en urnas un número dado de veces puede dar origen a cuatro tipos de experimentos diferentes: extracciones con reemplazamiento y sin reemplazamiento, ordenadas y no ordenadas (que se corresponden con las cuatro operaciones combinatorias básicas). Además, la extracción de bolas en urnas puede dar lugar al estudio de problemas de inferencia si se usa una urna opaca y el alumno desconoce la composición de la urna.

Cuando los alumnos no han tenido todavía conocimiento de *la fórmula de Laplace*, el alumno observará la frecuencia de cada color para estimar la probabilidad y utilizará expresiones como «más fácil que» o «más probable que». Con esto, será conveniente comprobar experimentalmente su respuesta con la ley de estabilidad de las frecuencias relativas.

En las actividades 4.24 y 4.25 encontramos ejemplos de los libros de texto donde sólo se realiza una estimación basada en el espacio muestral del contenido de las urnas. Para ello, no se le pide a los alumnos que utilicen los conceptos de probabilidad numérica explícitamente.

Actividad 4.24

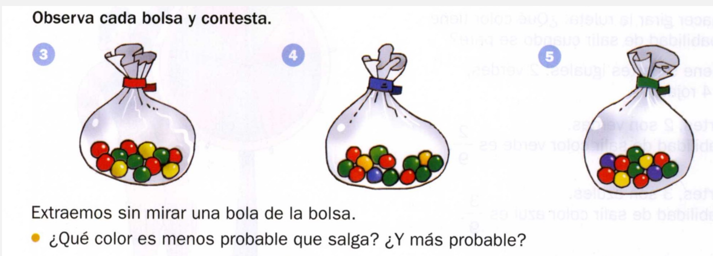
Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 161)


5 En una bolsa hay 10 bolas: 5 verdes, 3 rojas y 2 azules.
María, sin mirar, saca una bola y anota su color.
- ¿Es un juego de azar?
- ¿Cuáles son los resultados posibles?
- ¿Qué color crees que es más fácil que salga?

¿Qué conceptos probabilísticos se ponen en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

Actividad 4.25

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 163)


Observa cada bolsa y contesta.

3 4 5

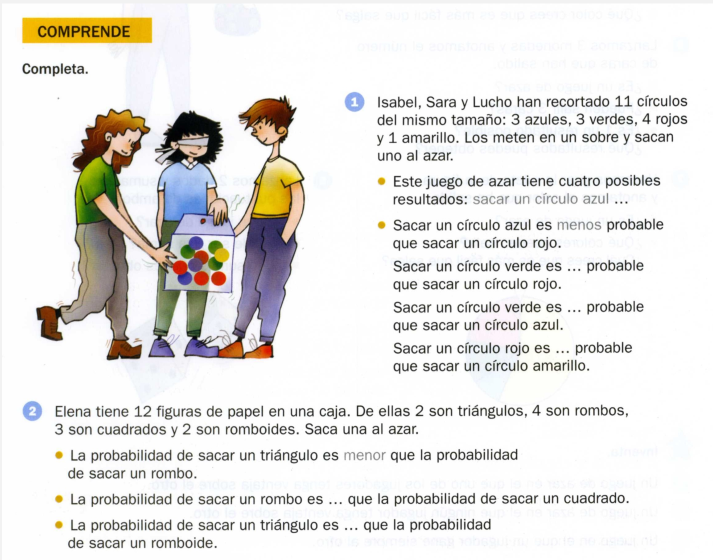
Extraemos sin mirar una bola de la bolsa.
- ¿Qué color es menos probable que salga? ¿Y más probable?

¿Qué conceptos probabilísticos se ponen en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

Cuando el alumno ya tenga conocimientos sobre *la fórmula de Laplace*, será capaz de comparar ciertas probabilidades para las que es necesario comparar fracciones como podemos observar en la Actividad 4.26.

Actividad 4.26

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 162)



COMPRENDE

Completa.

1. Isabel, Sara y Lucho han recortado 11 círculos del mismo tamaño: 3 azules, 3 verdes, 4 rojos y 1 amarillo. Los meten en un sobre y sacan uno al azar.
   - Este juego de azar tiene cuatro posibles resultados: sacar un círculo azul ...
   - Sacar un círculo azul es menos probable que sacar un círculo rojo.

     Sacar un círculo verde es ... probable que sacar un círculo rojo.

     Sacar un círculo verde es ... probable que sacar un círculo azul.

     Sacar un círculo rojo es ... probable que sacar un círculo amarillo.

2. Elena tiene 12 figuras de papel en una caja. De ellas 2 son triángulos, 4 son rombos, 3 son cuadrados y 2 son romboides. Saca una al azar.
   - La probabilidad de sacar un triángulo es menor que la probabilidad de sacar un rombo.
   - La probabilidad de sacar un rombo es ... que la probabilidad de sacar un cuadrado.
   - La probabilidad de sacar un triángulo es ... que la probabilidad de sacar un romboide.

¿Qué conceptos probabilísticos se pretenden poner en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

En el estudio de Fernandes (2001) se investigaron las intuiciones probabilísticas en alumnos, suponiendo que las intuiciones son cogniciones que adquieren un carácter axiomático a través de la práctica y particularmente las intuiciones primarias, mientras que las ideas se desarrollan de forma independiente de la educación formal (Fischbein, 1987).

En las siguientes dos actividades se pide que los alumnos analicen los problemas que utilizó Fernandes (2001) en su investigación con el fin de repasar los conceptos de probabilidad que se ponen en juego en cada una de ellas y situarlas dentro del currículum de primaria.

Actividad 4.27

Analiza la siguiente actividad extraída de Fernandes (2001).

> *Una urna opaca contiene una bola blanca, una bola negra y una bola gris. Clasifica los siguientes sucesos en «seguro, posible o imposible» cuando se extrae una bola de la urna sin mirar.*
>
> 1. *Extraer una bola blanca*
> 2. *Extraer una bola gris*
> 3. *Extraer una bola roja*
> 4. *Extraer una bola no verde*
> 5. *Extraer una bola no negra*

¿Qué conceptos probabilísticos se pretenden poner en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

Actividad 4.28

Analiza la siguiente actividad extraída de Fernandes (2001).

> *Un saco (I) contiene dos bolas blancas y tres bolas negras y otro saco (II) contiene tres bolas blancas y dos bolas negras. Si extraemos una bola de cada uno de los sacos sin mirar, ¿de cuál de los dos sacos es más probable sacar una bola blanca?*

Saco I

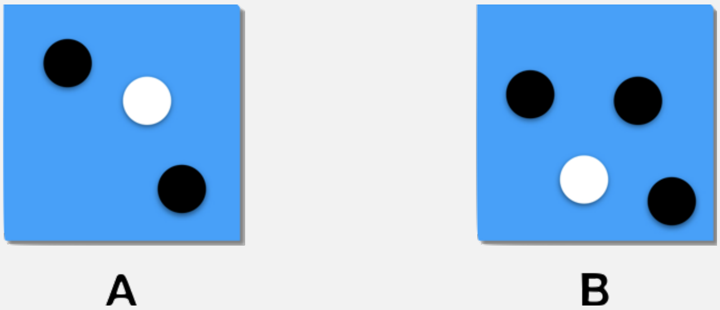
Saco II

¿Qué conceptos probabilísticos se pretenden poner en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

En la Actividad 4.29 presentamos un ejemplo de las tareas utilizadas en las investigaciones de Yost, Siegel, y Andrews (1962) sobre la capacidad de los niños para comparar probabilidades.

Actividad 4.29

En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca.



1. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:
   a) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
   b) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
   c) Las dos cajas dan la misma posibilidad
   d) No lo sé
2. ¿Crees que puedes variar la dificultad de este problema para los niños, cambiando el número de bolas blancas y negras en cada urna? ¿Cómo?
3. Elabora una clasificación de estos problemas, atendiendo a la dificultad de comparación de las fracciones implicadas.
4. Si un niño no es capaz de comparar fracciones, ¿podría resolver el problema con éxito en algunos casos?
5. ¿Demostraría ésto que el niño tiene una intuición correcta sobre la probabilidad?

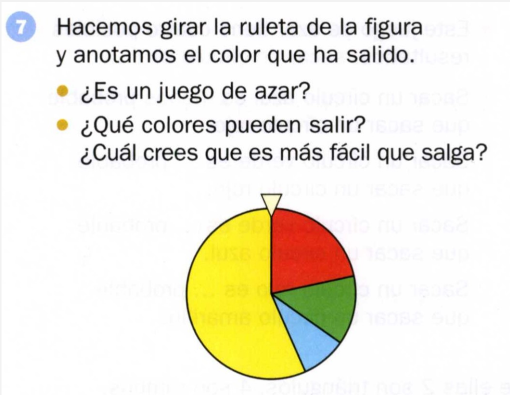
Juegos con ruletas

Las ruletas son dispositivos que permiten plantear problemas de probabilidades geométricos y observar la reversibilidad del experimento. Pueden servir ruletas construidas con cartulina por los propios alumnos con áreas rayadas de formas diversas. Como eje de giro de estas ruletas puede utilizarse un lápiz y como aguja un clip sujetapapeles desplegado por uno de sus laterales.

Este tipo de material permite utilizar sectores con áreas iguales o desiguales y sucesos con probabilidades iguales o diferentes. Permite también plantear problemas de probabilidades compuestas mediante un juego de coronas y sectores circulares. Además, podemos generar variables continuas, tales como la distancia al radio más cercano. Cuando los alumnos todavía no conocen la *fórmula de Laplace* pueden resolver los problemas observando el área de cada porción como ocurre en las actividades 4.30 y 4.31

Actividad 4.30

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 161).



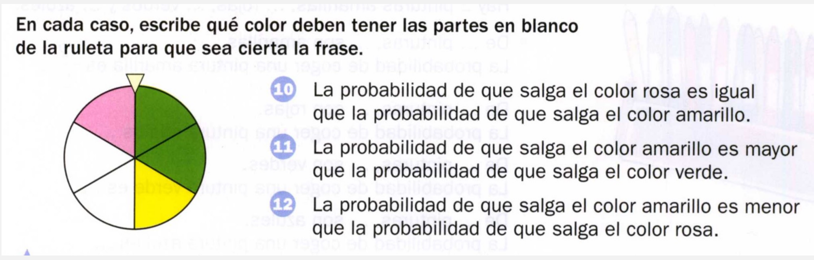
7 Hacemos girar la ruleta de la figura y anotamos el color que ha salido.

- ¿Es un juego de azar?
- ¿Qué colores pueden salir? ¿Cuál crees que es más fácil que salga?

¿Qué conceptos probabilísticos se ponen en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

Actividad 4.31

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 163).



En cada caso, escribe qué color deben tener las partes en blanco de la ruleta para que sea cierta la frase.

10 La probabilidad de que salga el color rosa es igual que la probabilidad de que salga el color amarillo.

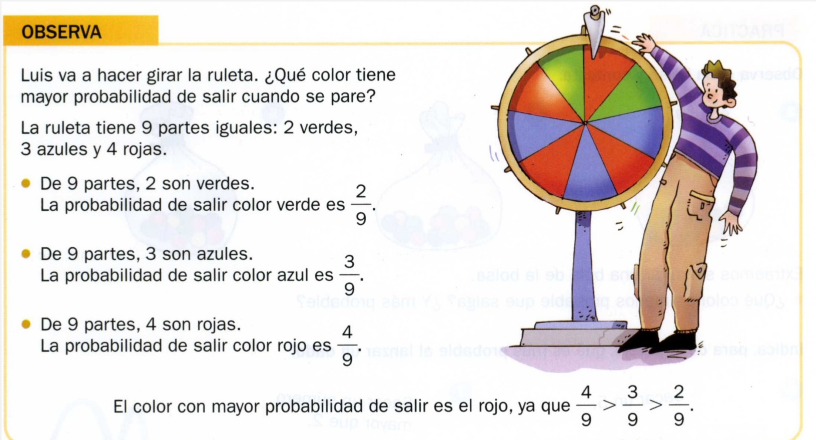
11 La probabilidad de que salga el color amarillo es mayor que la probabilidad de que salga el color verde.

12 La probabilidad de que salga el color amarillo es menor que la probabilidad de que salga el color rosa.

Una vez ya conocen la *fórmula de Laplace* pueden cambiar las resoluciones anteriores por problemas en los que se trabajen además, las fracciones y sus relaciones.

Actividad 4.32

Analiza la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 164).



OBSERVA

Luis va a hacer girar la ruleta. ¿Qué color tiene mayor probabilidad de salir cuando se pare?

La ruleta tiene 9 partes iguales: 2 verdes, 3 azules y 4 rojas.

- De 9 partes, 2 son verdes. La probabilidad de salir color verde es $\frac{2}{9}$.
- De 9 partes, 3 son azules. La probabilidad de salir color azul es $\frac{3}{9}$.
- De 9 partes, 4 son rojas. La probabilidad de salir color rojo es $\frac{4}{9}$.

El color con mayor probabilidad de salir es el rojo, ya que $\frac{4}{9} > \frac{3}{9} > \frac{2}{9}$.

¿Qué conceptos probabilísticos se pretenden poner en juego en la actividad? ¿En qué nivel educativo la propondrías y cómo la llevarías a cabo en el aula?

Juegos con dados o monedas

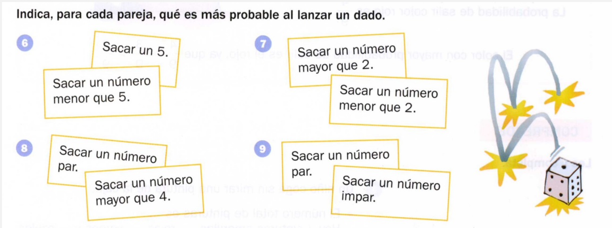
Cualquier objeto que presente un número finito de posiciones distintas, como trompas, monedas, fichas bicolores, etc., pueden simular un número finito de posibilidades en el espacio muestral. Los representantes más conocidos en la Educación Primaria son los dados cúbicos y las monedas.

Este tipo de material concretiza el experimento aleatorio más simple posible: cuando el espacio muestral es finito y los resultados son equiprobables.

Antes de conocer las propiedades del espacio muestral y, por tanto, la idea subyacente en la *fórmula de Laplace*, los alumnos pueden admitir la equiprobabilidad de todas las caras de un dado bien construido aludiendo a la simetría del dado.

Actividad 4.33

Trabaja la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Un paso más* (2006, p. 163) de manera que los alumnos no tengan que hacer alusión a la *fórmula de Laplace* explícitamente.



Indica, para cada pareja, qué es más probable al lanzar un dado.

6 Sacar un 5. / Sacar un número menor que 5.

7 Sacar un número mayor que 2. / Sacar un número menor que 2.

8 Sacar un número par. / Sacar un número mayor que 4.

9 Sacar un número par. / Sacar un número impar.

¿Crees que podría ayudar si se trabajara con material manipulativo en el aula? ¿Cómo?

Por otro lado, en cuanto estos conceptos han sido trabajados en clase, es interesante proponer a los alumnos actividades más sofisticadas en las que se ponga en juego más de un lanzamiento del objeto que se trabaja para construir un espacio muestral más grande.

Actividad 4.34

Contenido: Cara o cruz

Tareas
Analiza la siguiente actividad

> *Se divide la clase en cuatro grupos de cuatro a seis integrantes, se reparten cuatro monedas de plástico a cada grupo y se les pide que hagan diversos lanzamientos de las cuatro monedas y anoten el resultado de cada lanzamiento. Al cabo de un rato se les pide que escriban el espacio muestral del lanzamiento de las cuatro monedas.*

1. ¿Qué conceptos de probabilidad se trabajan en esta actividad?
2. En qué curso de primaria crees que sería apropiado trabajarla ¿Por qué?
3. Escribe una lista de preguntas que les harías a los alumnos para comprobar si han entendido bien los conceptos que se querían trabajar en esta actividad.

⪢ Dados sesgados

Una actividad interesante que podemos hacer con los alumnos es construir dados en los que la probabilidad de cada cara sea diferente. Para ello, una vez realizado el cubo, en cada cara podemos pegar un número distinto de cartulinas y finalmente numerar las caras. Un ejemplo de dado sesgado es el que encontramos en la Actividad 4.35, ya que todos los números no tienen igual probabilidad.

Actividad 4.35

¿Se te ocurre cómo trabajar con los alumnos la siguiente actividad extraída de *Matemáticas 5: Primaria. Dejar huella* (2007, p. 199) de manera que sean capaces de construir por ellos mismos un nuevo dado que les asegure una mayor probabilidad de ganar si saca un 2?

Caminos

Batanero (2013) sugiere que los niños pueden adquirir nociones probabilísticas al introducirlas mediante actividades basadas en juegos de azar, que favorecen su adquisición intuitiva. De este modo, diversos investigadores sugieren experiencias sencillas que pueden llevar a los alumnos a la comprensión progresiva de otras más complejas.

Un ejemplo de esto último sería comenzar con la comprensión de experiencias compuestas sencillas de bifurcación por canales (Figura 4.4), como las propuestas por Green (1983), donde se pregunta a los niños por cuál de los canales pasarán más bolas cuando se dejan caer un número grande de ellas en distintos dispositivos.

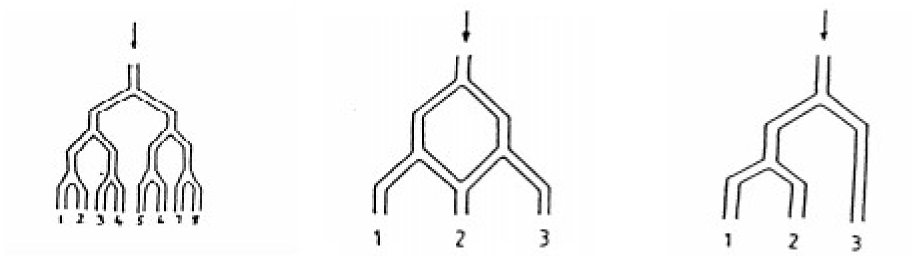


Figura 4.4: Biburcación por canales en el cuestionario de Green (1983).

Para responder la pregunta el niño debe comprender la igualdad de probabilidades en cada bifurcación inicial y entender cómo la proporción de bolas que caen por cada lado de la bifurcación se divide aplicando la regla del producto. En el segundo dispositivo hay también que aplicar la regla de la suma en el canal 2, donde llegarán la mitad de las bolas que se bifurquen a la izquierda en el nivel 1 y la mitad de las que se bifurquen a la derecha en dicho nivel, lo que da un total de la mitad de las bolas introducidas.

4.4.5 Conflictos en el aprendizaje de la probabilidad

Batanero (2001) hace un repaso de numerosos investigadores, tanto en psicología como en educación matemática, que han tratado de evaluar el significado atribuido a la aleatoriedad por niños y adultos, planteándoles problemas y centrándose en la determinación de las propiedades que se atribuyen a este concepto.

Los tipos de problemas planteados se pueden clasificar en dos tipos:

En los problemas de generación se pide a los sujetos simular una secuencia de resultados aleatorios. Por ejemplo, se pide escribir puntos al azar en un folio o escribir una sucesión de dígitos aleatorios.

En los problemas de reconocimiento se pregunta a los participantes si unas ciertas situaciones, secuencias o patrones espaciales son o no aleatorias.

Las investigaciones muestran que los sujetos tienden a encontrar patrones deterministas en las situaciones aleatorias, es decir, tratan de encontrar asociaciones inexistentes, con objeto de reducir la incertidumbre. También tendemos a inferir aleatoriedad en situaciones en las que no está presente. En general se observa la tendencia a generar rachas cortas de dos o tres símbolos adyacentes en algún sentido, por ejemplo números consecutivos o letras sucesivas del alfabeto. También se produce un exceso de alternancias que consiste en reproducir la frecuencia esperada del suceso con demasiada exactitud, incluso en rachas cortas.

Falk (1981) hizo un estudio con alumnos de secundaria, usando secuencias de cartas verdes y amarillas, preguntándoles si eran o no aleatorias. Los alumnos tendían a considerar aleatorias las secuencias con más alternancias entre los dos colores, aunque de hecho es más probable que una secuencia aleatoria contenga algunas rachas largas de un mismo color. Obtuvo el mismo resultado al pedir a los alumnos que escribiesen una secuencia aleatoria de longitud dada. Veamos un par de actividades extraídas de Batanero (2001).

Actividad 4.36

Un problema clásico de probabilidad es el siguiente:¿Cuál es el mínimo número de personas en una habitación para que la probabilidad de que al menos dos de ellos celebren el cumpleaños el mismo día sea mayor que $1/2$?
Parece sorprendente que la respuesta sea $n = 23$. Analiza esta situación desde el punto de vista de sus implicaciones sobre la percepción subjetiva de la probabilidad y de la confusión entre el experimento aleatorio implicado y otros posibles experimentos aleatorios.

Actividad 4.37

Recopila en la prensa noticias referentes a los juegos de azar y su incidencia social, en particular, sobre el fenómeno de las ludopatías. ¿Crees que estos datos apoyan las investigaciones psicológicas sobre la creencia de los sujetos en la posibilidad de control de lo aleatorio?

Otro ejemplo de una percepción equivocada de la aleatoriedad es la conocida como «*paradoja del jugador*» que se produce con la repetición de un mismo juego de azar. Según esta paradoja si observamos una secuencia de sucesos independientes equiprobables que se desvía de la media, consideraremos más probable un suceso que compensa dicha secuencia. Aplicada al lanzamiento de una moneda equilibrada consistiría en considerar más probable la aparición de una cara tras una secuencia de varias cruces seguidas.

Así, las dos secuencias de caras y cruces siguientes tienen la misma probabilidad de aparecer:

$$(A) \quad OXOXOXOXOOOXXXXOXOXOO$$

$$(B) \quad OXOXXXXXOXOOOOXOOOXXO$$

Pero dado el mayor número de rachas del mismo resultado que aparecen en la secuencia (B), ésta será considerada como menos característica de un proceso estocástico que la secuencia (B) por los sujetos, lo que podría ser la causa de esta paradoja (Batanero, 2001). De hecho, tras un rápido análisis combinatorio descubrimos que hay un mayor número de posibles secuencias semejantes a (B) que semejantes a (A), por lo que, en este sentido, se podría considerar más característica de un proceso aleatorio la segunda.

Reconocimiento de resultados aleatorios

Fernandes (2001) hizo un estudio sobre las intuiciones de los alumnos en cuanto a sucesos seguros, posibles o imposibles. En el cuanto a la distinción de *evento seguro*, *evento posible* y *evento imposible*, las mayores dificultades de los alumnos fueron clasificar los eventos *seguros* involucrando conexiones lógicas. Debe tenerse en cuenta que la clasificación de un evento determinado como *seguro* implica el reconocimiento de que es «*posible en todos los casos*» mientras que el alumno puede haber clasificado el evento en solo unos pocos casos.

En el caso de la distinción entre eventos *posibles* e *imposibles*, tal razonamiento siempre conduce a la clasificación del evento como imposible, ya que es «*imposible en todos los casos*». Este razonamiento parece explicar, al menos en parte, las dificultades de los alumnos, ya que casi nunca etiquetan eventos imposibles como posibles, pero a menudo califican eventos ciertos como posibles.

Las investigaciones de Green (1983) y de Toohey (1995) incluyen una pregunta en la cual los niños deben diferenciar entre una sucesión generada por un mecanismo aleatorio y otra que no cumple esta condición. Como resultado, descubren que la mayor parte de los niños elige precisamente la secuencia no aleatoria y que no mejora la apreciación de la aleatoriedad con la edad. Entre las razones aducidas por los niños para justificar su decisión, encontró las siguientes:

- *Razones correctas*: El patrón de la sucesión es demasiado regular para ser aleatorio; demasiadas rachas o rachas demasiado cortas.

- *Razones incorrectas*: no se apreciaba suficientemente la irregularidad de una sucesión aleatoria; se espera que la frecuencia relativa fuera exactamente el 50 % de caras y cruces o un valor muy próximo; rachas demasiado largas; no se admite la posibilidad de este tipo de rachas en una sucesión aleatoria.

Todos estos resultados son replicados y completados por Batanero y Serrano (1999), quienes sugieren que los alumnos atribuyen diferentes significados a la aleatoriedad y algunos de ellos coinciden con los admitidos en diferentes periodos históricos dentro de la estadística, por ejemplo:

- Aleatoriedad como inexistencia de causas o causa desconocida;

- Aleatoriedad como equiprobabilidad;

- Aleatoriedad como estabilidad de las frecuencias relativas;

- Aleatoriedad como impredecibilidad.

Cada una de estas concepciones recoge propiedades parciales del concepto y por ello puede ser válida en unas situaciones e incompleta en otras más complejas. Es importante que en la clase el profesor presente a los alumnos ejemplos variados de situaciones aleatorias como las que hemos mostrado a lo largo de esta sección para ayudar a los alumnos a una construcción progresiva del concepto.

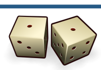
El sesgo de equiprobabilidad

Algunos autores (por ejemplo, Lecoutre (1992)) describen la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Como ejemplo, usan un problema en el que se pregunta si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5. A pesar de variar el contexto y el formato de la pregunta, los resultados siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los dos resultados son equiprobables.

Lecoutre y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en las que interviene «el azar». Los alumnos a los que se les pasó la prueba consideran que el resultado del experimento «depende del azar» y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

Con la siguiente actividad, queremos comprobar que la frecuencia relativa de un suceso se aproxima a su probabilidad teórica cuántas más simulaciones se hagan y que por tanto, se puede probar la equiprobabilidad en el lanzamiento de una moneda o de un dado.

Actividad 4.38



Emplea la ley de estabilidad de las frecuencias relativas para probar que la probabilidad de sacar cara al lanzar una moneda es 1/2. Hazlo también para las probabilidades de sacar un número dado al lanzar un dado.

Si aún así los alumnos tuvieran problemas para entender la equiprobabilidad, bien con una moneda bien con un dado, puede recurrirse a la siguiente actividad extraída de Godino, Batanero, y Font (2004).

Actividad 4.39

a) Imagina que estás jugando al parchís con un amigo. Para poder comenzar a mover la ficha es necesario obtener un cinco, pero tu amigo prefiere que se le exija obtener un 3, porque piensa que de este modo tiene ventaja. ¿Tú qué opinas? ¿Puedes dejarle que comience a mover la ficha cuando le salga el 3 o es necesario que los dos juguéis a obtener el mismo número?

Otro compañero sugiere que hagáis un experimento para resolver la discusión. Piensa que de este modo se puede saber quién tiene ventaja.

b) Fíjate en la tabla que te presentamos a continuación. Trata de adivinar cuántas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuántas el 5 si lanzas un dado 24 veces. Escribe este número en la columna «número esperado de veces». A continuación, lanza el dado 24 veces y anota los resultados en la tabla. Compara la frecuencia relativa de obtener 5 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor?

Resultado	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Nº esperado veces
1			
2			
3			
4			
5			
6			
Total	24	1	24

c) El profesor mostrará en la pizarra los resultados de toda la clase. Preparará con ellos una tabla y un gráfico de barras. Compara estos resultados con los vuestros y con la estimación que habéis hecho.

d) Con el fin de apreciar la ley de estabilidad de las frecuencias relativas y comparar los valores de la probabilidad asignados según la regla de Laplace con el correspondiente concepto frecuencial, nos fijaremos en el número de veces que sale un 5 al aumentar el número de experimentos. Rellenaremos la Tabla 4.8 y haremos un gráfico de líneas representando en el eje de OX el número de experimentos y en el OY, la frecuencia relativa.

Errores con urnas

Muchos otros autores han analizado las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Reproducimos la Tabla 4.9 en que Cañizares (1997) hace una síntesis de las mismas. Consideremos la situación de la Actividad 4.29 con dos urnas con bolas blancas y negras en su interior:

alumno nº	Nº Experimento	Frec. absoluta	Nº Experimentos acumul. (N)	Frec. acumulada (A)	Frec. relativa acumul. (A/N)
1	24		24		
2	24		48		
...					

Tabla 4.8: Tabla de frecuencias para la Actividad 4.39.


A


B

Las posibles estrategias de los alumnos al hacerles la pregunta de qué caja elegirían si para ganar un premio tuvieran que sacar una bola negra son las siguientes:

A)	Comparación del número de casos posibles: Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas	Los niños sólo tienen en cuenta el número de casos posibles de ambas cajas, sin comparar las proporciones de bolas blancas y negras.
B)	Comparación del número de casos favorables: Consiste en elegir la caja que contenga más bolas del color favorable.	De los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. El alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y sus partes.
C)	Comparación del número de casos desfavorables: Se elige la caja con menor número de bolas del color desfavorables.	Los niños utilizan esta estrategia cuando existe igualdad de casos favorables y centran su atención, entonces, sobre el número de casos desfavorables.
D)	Estrategias aditivas: Se tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, pero comparan los datos por medio de alguna operación aditiva.	
E)	Estrategia de correspondencia: Se establece un criterio de proporcionalidad en una fracción y se aplica a la otra fracción.	A falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones son comparables en forma inmediata.
F)	Estrategias multiplicativas: Es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Consiste en la aplicación de la regla de Laplace.	Es necesario establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas.
G)	Otros tipos	Hacer referencia a la suerte o elegir el color favorito.

Tabla 4.9: Estrategias de resolución al comparar probabilidades según Cañizares (1997)

4.4.6 Laboratorio de herramientas TIC para el aprendizaje de la probabilidad

La siguiente actividad va destinada a diseñar una actividad con una ruleta para trabajar los conceptos probabilísticos de espacio muestral, casos favorables y casos posibles y distinguir si los alumnos pueden separar estos conceptos de la intuición no matemática de la probabilidad.

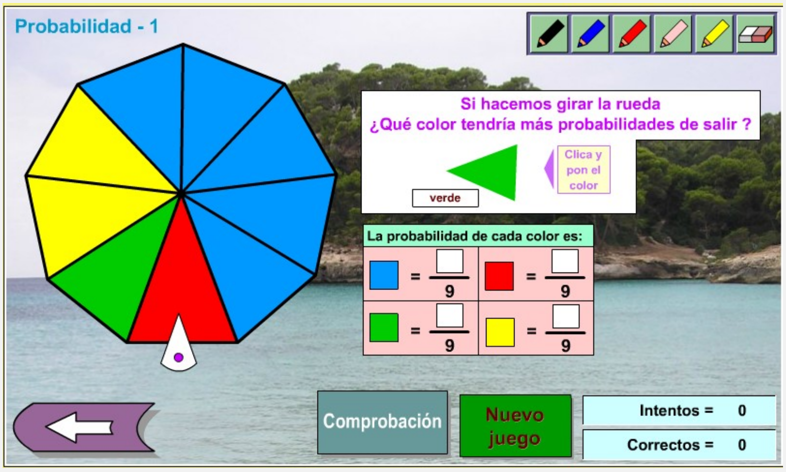
Actividad 4.40

Contenido: Jugamos con una ruleta

Tareas

Diseña una actividad para los primeros cursos de primaria en la que utilices una ruleta para iniciar a los alumnos en los conceptos de espacio muestral, casos favorables y casos posibles para posteriormente reafirmar la idea con el micro-programa interactivo Ruleta.

¿Qué preguntas les harías a los alumnos para asegurarte que han entendido estos conceptos y no están usando su intuición sobre la probabilidad de sucesos?



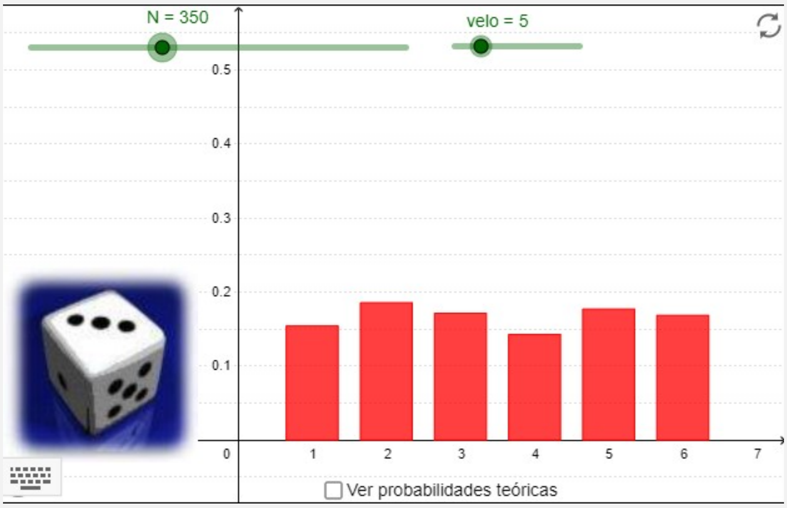
En la siguiente actividad se deberá diseñar una actividad para que los alumnos comprueben la ley de estabilidad de las frecuencias relativas, primero con un dado físico y luego con el micro-programa interactivo proporcionado.

Actividad 4.41

Contenido: Ley de los grandes números con un dado

Tareas

Diseña una actividad en la que utilices la idea vista en el Apartado 4.4.1 sobre la ley de estabilidad de las frecuencias relativas para posteriormente reafirmar la idea con el micro-programa interactivo Dado.



En la Actividad 4.42 se deberá diseñar una actividad para resolver el problema de sacar al menos un 6 al lanzar un dado cuatro veces mediante el cálculo de probabilidades y mediante la simulación.

Actividad 4.42

Contenido: Un seis tras cuatro lanzamientos

Tareas

Diseña una actividad en la que utilices la idea vista en el Apartado 4.4.3 sobre la resolución de problemas mediante el cálculo de probabilidades para contestar a la pregunta ¿qué probabilidad hay de sacar al menos un 6 al lanzar un dado cuatro veces? (o 4 dados una vez)
Utiliza el micro-programa interactivo Simulación dado para trabajar el mismo problema mediante la resolución por simulación.

En la Actividad 4.43 se deberá analizar un problema de probabilidad para adaptarlo a un aula de primaria. Podréis ayudaros de un micro-programa interactivo diseñado para simular dicho problema.

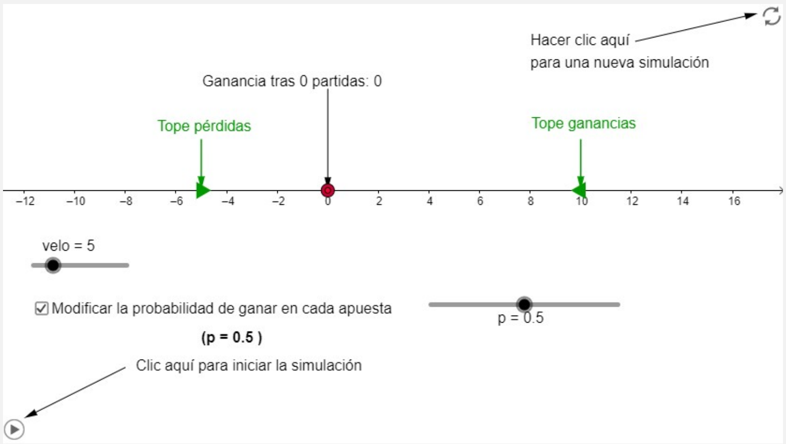
Actividad 4.43

Contenido: La ruina del jugador

Tareas
Analiza la siguiente actividad y propón como la trabajarías en un aula de primaria

> *Un jugador juega contra la banca partidas sucesivas e independientes. En cada partida, la probabilidad de ganar es igual a la de perder: $p = \frac{1}{2}$. Si el jugador pierde, entrega un euro a la banca y si gana recibe la misma cantidad. La fortuna del jugador varía por tanto, al azar, de acuerdo con los resultados de las distintas partidas. El jugador tiene previsto retirarse tanto si llega a ganar 10 euros como si llega a perder 5.*

Puedes ayudarte del micro-programa interactivo La ruina del jugador



En la Actividad 4.44 trabajaremos el diseño de una actividad para que los alumnos de los últimos cursos de primaria calculen la probabilidad de que unas bolas caigan por un circuito utilizando la ley de la estabilidad de las frecuencias relativas vista en la sección 4.4.1.

Actividad 4.44

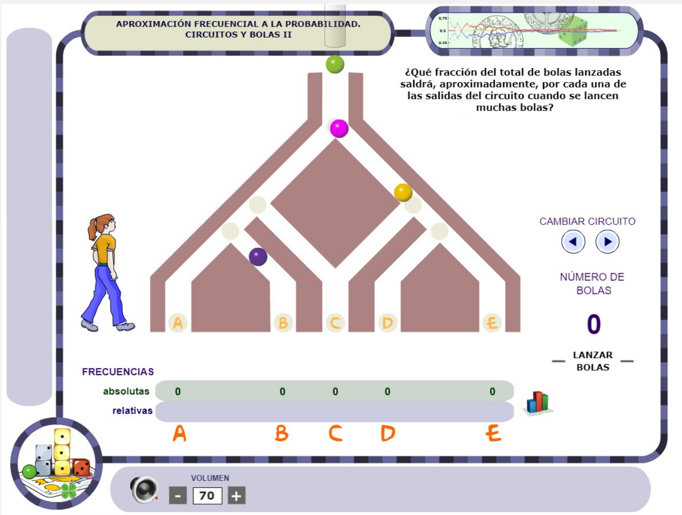
Contenido: Aproximación frecuencial a la probabilidad: Circuitos y bolas

Tareas

Analiza el micro-programa interactivo

Laboratorio básico de azar | Azar y probabilidad > Elige un circuito con bolas. . .

Diseña una actividad para los últimos cursos de primaria para trabajar la aproximación frecuencial de la probabilidad con circuitos y bolas. Incluye preguntas para asegurarte de que los alumnos han entendido completamente los conceptos probabilísticos que se trabajan.



En la Actividad 4.45 analizaremos un micro-programa interactivo para, además de comprobar cuál es la probabilidad de cada uno de los resultados de la suma de dos dados obtenida mediante sus frecuencias relativas, se proponga a los alumnos de los últimos cursos de primaria que la obtengan teóricamente.

Actividad 4.45

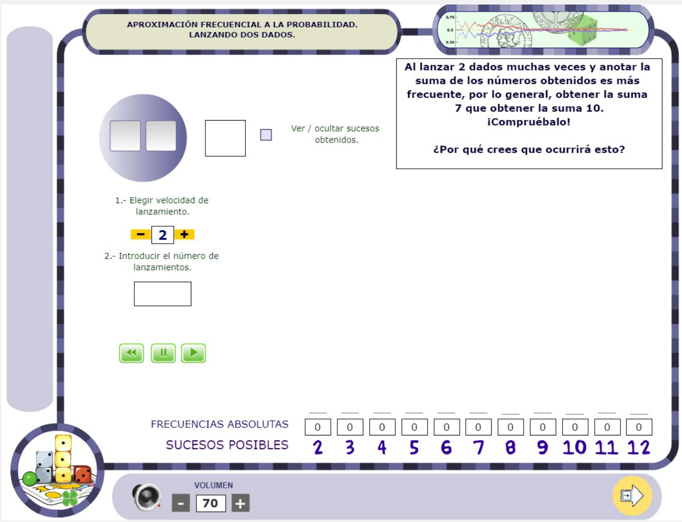
Contenido: Aproximación frecuencial a la probabilidad: Lanzando dos dados

Tareas

Analiza el micro-programa interactivo

www Laboratorio básico de azar | Azar y probabilidad 〉 Al lanzar dos dados. . .

y diseña una actividad para los últimos cursos de primaria en la que los alumnos deban calcular primero la probabilidad teórica de cada uno de los resultados de la suma de dos dados y después la comprueben mediante la repetición de sucesos y el cálculo de sus frecuencias relativas.



4.4.7 Análisis de libros de texto sobre tareas de probabilidad en primaria

Para el análisis de actividades de probabilidad de los libros de texto nos centraremos en analizar los conceptos y procedimientos que se ponen en juego en cada actividad así como analizarlos en base a la forma en la que se presentan. Además, analizaremos si los alumnos serán capaces de entender el enunciado de la actividad a resolver y la posible necesidad de utilizar material manipulativo. Además, se analizarán también los posibles errores que puedan cometer los alumnos al realizar la actividad tal y como está plantada en el libro de texto.

Actividad 4.46

Contenido: Análisis de ejercicios y propuestas de Probabilidad en los libros de texto de primaria.

Tareas
Busca enunciados de ejercicios y propuestas de Probabilidad en libros de texto de primaria de distintas editoriales. Para cada uno:

1. Resuélvelas.
2. Indica los conceptos de probabilidad que se ponen en juego en la resolución.
3. ¿El contenido se presenta de forma motivadora y adecuada para el curso en el cual se encuentran? En caso negativo, propón una manera alternativa para tratar los mismos conceptos de manera más clara y ayudándote de material manipulativo.
4. ¿Qué opinas sobre la metodología empleada? Piensa en los errores que, durante su resolución, podrían cometer los alumnos.

4.5 Bibliografia del Tema 4

Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *76*, 55–67.

Arteaga, P., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Indivisa. Boletin de Estudios e Investigación*(12), 123–135.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M., y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(1), 15–40.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: qué podemos aprender de la investigación. *Atas do III Encontro de probabilidades e estatistica na escola*, 9–21.

Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., y Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25*(4), 527–547.

Batanero, C., y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 558–567.

Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*, 45–55.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. *Comunicación presentada en el VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación. Castelo de Vide, Portugal*.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias. *Unpublished Ph. D. University of Granada, Spain*.

Consellería d'Educació, Cultura i Esport. (2014). *Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana* (Vol. 7311).

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension. Elementary and Middle school activities.* ERIC.

Falk, R. (1981). The perception of randomness. En *Proceedings of the fifth international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 222–229).

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8. º e 11. º anos de escolaridade. *Quadrante*, *10*(2), 3–32.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16. *Proceedings of the ICOTS I. University of Sheffield*.

Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Reports. (2012). Descargado de `http://www.amstat.org/education/gaise/GAISECollege.htm`

Gutiérrez Cabria, S. (1994). *Filosofía de la estadística*. Universitat de València, Servei de Publicacions.

Huerta Palau, M. (2015). La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 53.*

Jefatura del Estado. (1953, febrero). *Ley de 26 de febero de 1953 sobre Ordenación de la Enseñanza Media.* BOE núm. 58, 27 de febrero de 1953.

Jefatura del Estado. (1970, agosto). *Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa.* BOE núm. 187, de 6 de agosto de 1970.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and instruction*, *6*(1), 59–98.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational studies in mathematics*, *23*(6), 557–568.

Li, K.-Y., y Shen, S.-M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, *14*(1), 2–8.

López Nievas, T. (2014). *Puesta en práctica y análisis de la unidad didáctica: proyecto de estadística para 2º ciclo de primaria.*

Matemáticas 3: Un paso más. (2005). Madrid. Santillana.

Matemáticas 4: Primaria. Trotamundos. La emoción de descubrir. (2005). Editorial SM.

Matemáticas 4: Un paso más. (2006). Madrid. Santillana.

Matemáticas 5: Primaria. Dejar huella. (2007). Madrid. Anaya.

Matemáticas 5: Primaria. Planeta amigo, la emoción de convivir. (2006). Editorial SM.

Matemáticas 5: Un paso más. (2006). Madrid. Santillana.

Matemáticas 6: Un paso más. (2006). Madrid. Santillana.

Miller, T. K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. En *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics* (pp. 1221–1222).

Ministerio de Educación y Ciencia. (1990, octubre). *Ley Orgánica 1/1990, del 3 de octubre de 1990, de Ordenación General del Sistema Educativo.* BOE núm. 238, 4 de octubre de 1990.

Monteiro, C., y Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graphs. En *Proceedings of the seventh international conference on teaching statistics* (pp. 1–6).

Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). (2000). National Council of Teachers of Mathematics.

Toohey, P. G. (1995). *Adolescent perceptions of the concept of randomness* (Tesis Doctoral, The University of Adelaide.) The University of Adelaide.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational researcher*, *21*(1), 14–23.

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs. En *10th international congress on mathematics education* (*icme 10*).

Yost, P. A., Siegel, A. E., y Andrews, J. (1962). Nonverbal probability judgments by young children. *Child Development*, 769–780.