Curvas parametrizadas y reparametrización de una curva por el arco

Ignacio García Fernández

Octubre de 2017

Última revisión:
11 de octubre de 2021

1. Definiciones

Una **curva en el espacio** es una función de un intervalo $J = [s_a, s_b]$ en el espacio tridimensional

$$\mathbf{c} : J \to \mathbb{R}^3.$$

A la variable s se la denomina **parámetro de la curva**. Una curva puede interpretarse como la trayectoria de un objeto en el espacio, en la que el parámetro s representa el tiempo y el valor de la curva $\mathbf{c}(s)$ la posición del objeto en el tiempo s.

Cuando la curva es diferenciable, podemos definir el vector tangente, $\mathbf{c}'(s)$, que puede interpretarse como la velocidad,

$$\mathbf{c}'(s) = \frac{d\mathbf{c}}{ds}(s),$$

y el vector tangente unitario

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\mathbf{c}'(s)}{|\mathbf{c}'(s)|}.$$

Si la curva diferenciable cumple que $\mathbf{c}'(s) \neq 0$ diremos que la curva es **regular**.

2. El triedro de Frenet

Para una curba diferenciable, se definen varias funciones que determinan su geometría.

- La curvatura
$$\kappa(s) = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)\right|.$$
- El vector normal unitario
$$\mathbf{n}(s) = \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}(s)}{\kappa(s)},$$
- El vector binormal
$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

Al triedro formado por los tres vectores, $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ se le denomina Triedro de Frenet, y forma una base del espacio tridimensional.

Ejercicio. Considera la curva parametrizada dada por la expresión

$$\mathbf{c}(s) = (\ \cos(s^2)\ ,\ \ \sin(s^2)\ ,\ 0\ ), \quad s \in [0, \sqrt{2\pi}].$$

Calclua el triedro de Frenet en $s = 2$. Utiliza radianes para los cálculos.

3. Longitud de arco de una curva

Dada una curva diferenciable en el espacio, $\mathbf{c} : J \to \mathbb{R}^3$, que cumple que $|\mathbf{c}'(s)| \neq 0, \forall s \in J$ (curva *regular*). La longitud de la curva entre s_a y s es

$$L_{s_a}(s) = \int_{s_a}^{s} |\mathbf{c}'(s)| ds. \tag{1}$$

Esta función nos indica la longitud del tramo de curva que va desde el principio, $\mathbf{c}(s_a)$, hasta la posición en la curva para el valor del parámetro s, es decir, $\mathbf{c}(s)$. La longitud completa de la curva se obtiene integrando en el intervalo J completo:

$$L_{\mathbf{c}} = \int_{s_a}^{s_b} |\mathbf{c}'(s)| ds.$$

Ejercicio. Considera la curva parametrizada del ejercicio anterior. Calcula la función longitud de arco.

En la mayoría de los casos, no dispondremos de una función que nos permita calcular la integral anterior. Por tanto, para saber en cada valor del parámetro s cuál es la longitud recorrida, utilizaremos una discretización de la curva. Si dividimos el intervalo J en N tramos, y consideramos el tamaño de subintervalo resultante, $h = (s_a - s_b)/N$, obtenemos los valores $s_0 = s_a,\ s_1 = s_a + h,\ s_2 = s_a + 2h,\ s_3 = s_a + 3h, \ldots, s_N = s_b$.

Estos valores del parámetro nos proporcionan una sucesión de puntos por los que pasa la curva. Como la curva es diferenciable, si el valor de h es suficientemente pequeño, uniendo los puntos por medio de segmentos de recta obtenemos una buena aproximación a la curva. Nuestra aproximación de la integral la realizaremos sumando las longitudes de los sucesivos segmentos de recta hasta alcanzar el valor del parámetro s. Es decir, la longitud de la curva desde s_a hasta el valor del parámetro s_k podemos aproximarlo como:

$$L_{s_a}(s_k) = \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{c}(s_i) - \mathbf{c}(s_{i-1})|. \tag{2}$$

Si fuera necesario calcular la longitud hasta un valor de s que no se encuentra en la lista de valores del parámetro $\{s_i\}$, sino que se encuentra entre dos de ellos, $s \in [s_k, s_{k+1}[$, entonces aproximaremos la longitud del arco desde s_a hasta s como:

$$L_{s_a}(s) = \sum_{i=1}^{k} |\mathbf{c}(s_i) - \mathbf{c}(s_{i-1})| + \frac{s - s_k}{s_{k+1} - s_k} |\mathbf{c}(s_{k+1}) - \mathbf{c}(s_k)|. \tag{3}$$

El segundo término (que queda fuera del sumatorio), proporciona la longitud del segmento final, que no está completo por ser $s < s_{k+1}$. Esta fórmula, no obstante, raramente la utilizaremos porque la opción más cómoda es utilizar como valores del parámetro el tiempo en los fotogramas de la animación, de tal forma que $s_k = k/24$.

Ejercicio. Completa la siguiente tabla de longitud de arco para la curva del ejercicio anterior, usando la técnica de discretización propuesta. En este caso, se está utilizando $N = 8$.

s	l
0.0	
0.313	
0.627	
0.940	
1.253	
1.567	
1.880	
2.193	
2.507	

4. Reparametrización de una curva

La utilización de curvas parametrizadas en animación es fundamental, ya que se usan durante el proceso de interpolación de fotogramas clave; los polinomios interpoladores que utilizamos para realizar el *inbetweening* dan lugar a una curva diferenciable que, para cada instante de tiempo, nos proporciona la posición de un objeto.

Fijando el tiempo en el que se pasa por los los fotogramas clave, controlamos de forma indirecta la velocidad a la que se recorre la curva. Sin embargo, no tenemos un control preciso de la velocidad o de la posición en cada instante de tiempo.

Para poder tener este control más preciso, utilizaremos reparametrizaciones de la curva. Una reparametización de una curva es una nueva curva obtenida por medio de un cambio de variable. Si $I \subset \mathbb{R}$ es un nuevo intervalo y tenemos una función $r : I \to J$, entonces una reparametrización de la curva es una nueva curva, $\mathbf{s} : I \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{c}(r(t)).$$

Es importante observar que la nueva curva ocupa exactamente los mismos puntos que la curva original (o al menos un subconjunto de ella). Es decir, que una reparametrización de la curva no afecta al recorrido, sino únicamente a los tiempos y velocidades del recorrido de la curva.

Si la función de cambio de variable $s(t)$ es estrictamente creciente (y en consecuencia no tiene derivada nula en ningún punto), entonces el Triedro de Frenet está definido en la nueva curva y es el mismo que el de la curva original.

Otra propiedad importante de una reparametrización se obtiene como consecuencia de la regla de la cadena. La derivada de la nueva curva viene dada por

$$\mathbf{s}'(t) = \mathbf{c}'(r(t))r'(t),$$

con lo que la derivada del cambio de variable nos dice, exactamente, como va a variar la derivada de $\mathbf{c}$ cuando se convierta en $\mathbf{s}$; la nueva derivada va a ser la misma, multiplicada por $s'(t)$.

Este resultado nos permite ya tener cierto control sobre el recorrido de la curva. Por ejemplo, si tenemos una trayectoria dada por la curva $\mathbf{c}(s)$, definida en el intervalo $J = [0, 1]$, y queremos que se recorra el doble de rápido, necesitamos usar un cambio de variable que tenga derivada 2. La forma de conseguir esto, es usando el cambio de variable $s = r(t) = 2t$ en el intervalo $I = [0, \frac{1}{2}]$.

Ejercicio. Escribe la expresión que resulta de aplicar a la curva de los ejercicios anteriores el cambio de variable $s = r(t) = 2t$.

5. Reparametrización por la longitud del arco

A partir del resultado anterior, nos podemos plantear que, si conseguimos un cambio de variable con una derivada adecuada, podremos decidir a qué velocidad se recorre la curva con total precisión. Sin embargo buscar este cambio de variable directamente puede no ser sencillo. Para poder encontrarlo, vamos a considerar un cambio de variable previo $s = r(t)$ que haga que la nueva curva se recorra con velocidad constante $|\mathbf{s}(t)| = |\mathbf{c}(r(t))| = 1, \forall t \in I$. Este cambio de variable está definido en el intervalo $I = [0, L_c]$ y hace que la función longitud de arco sea la identidad:

$$L_0(t) = t.$$

Por esto último, una curva que tiene vector tangente con módulo 1 constante se dice que está **parametrizada por la longitud del arco** (porque la longitud del arco coincide con el parámetro), y se abrevia como p.p.a. Veamos ahora cómo podemos conseguir una reparametrización p.p.a para una curva cualquiera.

Supongamos que tenemos una curva regular, $\mathbf{c} : J \to \mathbb{R}^3$ que no está parametrizada por el arco. El objetivo que perseguimos es encontrar un cambio de variable, $s = r(t)$ con la siguiente propiedad: para un valor de t, necesitamos obtener el valor de s con el que la distancia recorrida en $\mathbf{c}(s)$ sea exactamente t.

Tenemos una función que nos permite conocer la longitud como función de s. Y ahora buscamos obtener s en función de la longitud t. Por tanto, si $l = L_{\mathbf{sa}}(s)$ es la función longitud[1], con s como variable, queremos obtener la inversa[2] de esta función, $s = L_{\mathbf{sa}}^{-1}(l)$.

Como la curva es regular, la función longitud de arco es estrictamente creciente y su derivada no se anula en todo el intervalo $[0, L_{\mathbf{c}}]$. Por tanto, sabemos que existe esta inversa. Tomaremos como cambio de variable esta función

$$s = r(l) = L_{\mathbf{sa}}^{-1}(l),$$

que nos dice qué valor de s debemos tomar para que asegurarnos de que se ha recorrido una distancia l.

En definitiva, los pasos a seguir para obtener el cambio de variable que da lugar a la reparametrización por el arco son:

[1]Se está usando la variable l para indicar longitud o distancia recorrida, pero puede perfectamente usarse la variable t que indica tiempo, ya que lo que queremos es que la distancia recorrida sea exactamente el tiempo transcurrido desde el inicio de la trayectoria.

[2]Recordemos que, dada una función $y = f(x)$, la inversa de f es la función que nos permite obtener x a partir de y, y se denota f^{-1}. La forma de calcular la inversa cuando tenemos una expresión analítica es lo que comúnmente conocemos como *despejar* la variable. De esta forma, la inversa de $y = \sqrt{x}, x > 0$ es $x = y^2$, y la inversa de $y = 2x + 3$ es $x = \frac{y-3}{2}$.

La inversa de una función f no siempre existe, porque puede ocurrir que varios valores de x den el mismo valor de y. Una condición suficiente para que exista la inversa de una función f en un intervalo es que su derivada no se anule. Por otra parte, aunque exista, no siempre es sencillo obtenerla analíticamente.

1. Calcular la función longitud de arco $l = L_{\mathbf{s_a}}(s)$, resolviendo la integral definida (1).
2. A partir de la expresión obtenida, obtener su inversa, despejando la variable s.
3. Tomar la fórmula obtenida como cambio de variable, $s = r(l) = L_{\mathbf{s_a}}^{-1}(l)$.
4. Aplicar el cambio de variable para obtener la posición en la curva, $\mathbf{s}(l) = \mathbf{c}(r(l))$.

Ejercicio. Calclua el cambio de variable que da lugar a la reparametrización por el arco de la curva de los ejercicios anteriores, y obtén la reparametrización por el arco de la curva.

Para llevar este cambio de variable a nuestro sistema de interpolación, debemos implementar una función para el paso 3. La función, a la que llamaremos `reparam()`, recibirá un valor l, y nos devolverá un valor s del parámetro para el que la distancia recorrida es l. En las funciones en las que obtenemos la posición de un objeto a partir del fotograma de la animación, seguiremos los siguientes pasos

1. Calcularemos el tiempo t a partir del fotograma, de la forma habitual.
2. Usaremos el valor de t obtenido para llamar a la función `reparam()`.
3. Usaremos el resultado como valor del parámetro para llamar a las funciones de interpolación (Hermite, Catmull-Rom,…).

5.1. Cálculo numérico de la reparametización por el arco

El cálculo analítico de la integral (1) únicamente es posible en un número muy reducido de casos. Además, una vez calculada la integral, tampoco es siempre sencillo obtener su inversa despejando la variable s. Por este motivo es habitual realizar el proceso de cálculo de forma numérica. Para ello, debemos cambiar la forma en la que calculamos la longitud de arco y su inversa.

En este caso, en lugar de calcular la longitud de arco usando (1), generaremos una tabla que guarde la longitud de arco para diferentes valores del parámetro, usando la fórmula (2). Este paso debe realizarse antes de lanzar la animación, junto con la lectura de los puntos de control.

La función `reparam()` recibirá un valor de l y realizará una búsqueda en la tabla para decidir en qué valor de s se alcanza ese valor. Dado que el valor de l deseado no estará en la tabla en la mayoría de los casos, será necesario detectar entre que dos valores de la tabla se encuentra l, e interpolar s adecuadamente.

Ejercicio. Usando la tabla que has construido, determina para qué valor del parámetro se alcanza la longitud de arco $L_0(s) = 2$.

6. Ejercicios

Repite los ejercicios anteriores para las curvas:

1. $\mathbf{c}(t) = \left(e^{t-2}\cos 2\pi t, e^{t-2}\sin 2\pi t, e^{t-2}\right),\ t \in [0, 2]$

2. $\mathbf{c}(t) = \left(t\ ,\ \frac{2}{3}t^{3/2}\ ,\ \frac{1}{2}t\right),\ t \in [0, 2]$

3. $\mathbf{c}(t) = (t^2\ ,\ t^3\ ,\ 1)\ ,\ t \in [0, 3]$

7. Bibliografía

- Rick Parent. *Computer Animation Algorithms and Techniques*. Morgan Kaufmann. 2008. Apartado 3.2.
- E. Lengyel. *Mathematics for 3D game programming and computer graphics*. Charles River Media. 2004. Apartado 11.8.
- K. Erleben. *Physics-Based Animation*. Charles River Media. 2005. Apartado 4.2.
- S. Montiel y A. Ros. *Curvas y superficies*. Proyecto Sur, 1997.
- S. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza, 1990.