Orientación de un objeto a lo largo de una curva

Ignacio García Fernández*

Noviembre 2020

1 Alineación con el tangente

El objetivo es conseguir que un eje del objeto, $\mathbf{e}$, quede alineado con el tangente unitario a la curva $\mathbf{t}$. Si escogemos que el eje $\mathbf{e}$ sea, por ejemplo, el eje X, entonces tendríamos $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$. Supondremos que $\mathbf{e}$ tiene módulo 1.

Como debemos modificar la orientación del objeto, entonces se trata de encontrar un cuaternión q que represente la rotación del objeto, de forma que el resultado de rotar $\mathbf{e}$ quede alineado con $\mathbf{t}$. Es decir, buscamos q, que represente una rotación y que cumpla que

$$q\mathbf{e}q^{-1} = \mathbf{t}$$

Para obtener el cuaternión, necesitamos obtener un eje de giro, $\mathbf{v}$, y un ángulo θ, que rotaremos alrededor de $\mathbf{v}$. Si rotamos un objeto alrededor de $\mathbf{v}$, entonces cualquier vector que sea perpendicular a $\mathbf{v}$ se mantendrá contenido en un plano perpendicular a $\mathbf{v}$. Si queremos transformar $\mathbf{e}$ en $\mathbf{t}$, ambos vectores deberán estar contenidos en el mismo plano perpendicular a $\mathbf{v}$. Así, la única forma de escoger $\mathbf{v}$ será como un vector que sea perpendicular a ambos vectores. Tomamos, por tanto,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{t}}{|\mathbf{e} \times \mathbf{t}|},$$

que es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{t}$ y a $\mathbf{e}$. Para saber el ángulo que debe girar $\mathbf{e}$ para apuntar en la dirección de $\mathbf{t}$, calculamos el ángulo entre los dos vectores

$$\theta = \arccos(\mathbf{e} \cdot \mathbf{t})$$

y obtenemos el cuaternión como

$$q = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{v}).$$

Ejercicio: Programa una función que se llame `get_quat_from_vecs`, que reciba los dos vectores $\mathbf{e}$ y $\mathbf{t}$, y devuelva el cuaternión que alinea $\mathbf{e}$ con $\mathbf{t}$.

2 Ajuste de la dirección lateral

Supongamos que habéis escogido orientar el eje X en la dirección del tangente, $\mathbf{t}$. Queremos modificar la orientación del objeto para controlar su inclinación lateral. Esto debemos hacerlo sin alterar la alineación del objeto con la tangente, por lo que debemos rotarlo alrededor del eje $\mathbf{t}$. Lo que hay que hacer ahora es elegir otro vector del objeto $\mathbf{e}_l$, que consideraremos como *lateral al objeto* y una dirección deseada $\mathbf{l}$, y repetir el mismo proceso que hemos seguido antes al alinear un eje con el tangente. Por ejemplo, si estamos orientando un coche y hemos alineado el morro con la tangente, entonces podemos considerar como dirección lateral la que va del centro del coche hacia la puerta del conductor.

Nuestro objetivo es alinear este eje con un vector que sea completamente horizontal y además sea perpendicular al tangente. Por tanto, buscamos un vector con componente $z = 0$. Lo vamos a llamar vector $\mathbf{l} = (l_x, l_y, 0)$, porque es lateral en nuestra curva. Este vector debe ser también perpendicular al tangente, así que lo puedo calcular como el producto vectorial de $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$ por el tangente $\mathbf{t}$

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{t}}{|\mathbf{z} \times \mathbf{t}|}.$$

Ejercicio: Programa una función que se llame `get_lat_vec`, que reciba el vector $\mathbf{t}$ y calcule el vector $\mathbf{l}$.

El eje de rotación será $\mathbf{t}$, y el ángulo será el formado por $\mathbf{e}_l$ y $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{t}; \qquad \theta_l = \arccos(\mathbf{e}'_l \cdot \mathbf{l}),$$

donde el vector $\mathbf{e}'_l$ es el vector $\mathbf{e}_l$ tras aplicarle la rotación del cuaternión q, y se obtiene como $\mathbf{e}'_l = q \cdot \mathbf{e}_l \cdot q^{-1}$. El cuaternión resultante será

$$q_2 = (\cos(\theta_l/2), \sin(\theta_l/2)\mathbf{t}).$$

Para obtener el cuaternión q_2, pasaremos el vector $\mathbf{e}_l$, rotado por el cuaternión del apartado anterior, y el vector $\mathbf{l}$ a la función `get_quat_from_vecs`.

Ejercicio: Programa una función que se llame `get_quat_rot`, que reciba el vector $\mathbf{t}$, el vector $\mathbf{e}$ para alinearlo con $\mathbf{t}$ y el vector $\mathbf{e}_l$ para controlar la orientación lateral. La función debe devolver un cuaternión que recoja la rotación adecuada.

3 Aplicación de una rotación adicional

Para aplicar una rotación adicional y animar, por ejemplo, el movimiento lateral de un coche cuando coge una curva o el alabeo de un avión, debemos aplicar un ángulo adicional, al que llamaremos θ_a.

Dado que esta rotación será siempre alrededor del eje $\mathbf{t}$, basta con crear un tercer cuaternión que rote el objeto θ_a alrededor del tangente $\mathbf{t}$:

$$q_3 = (\cos(\theta_a/2), \sin(\theta_a/2)\mathbf{t}).$$

Ejercicio: Modifica la función `get_quat_rot` para que además de los argumentos anteriores reciba también un ángulo de alabeo y lo aplique por medio del cuaternión q_3.

Nota sobre el uso de Blender: La clase vector tiene un método llamado `rotate` que admite como argumento un cuaternión y que aplica la rotación del cuaternión sobre el vector. La transformación se hace en el sitio, modificando el vector con el que llamamos al método. Para calcular $\mathbf{e}'_l$ podéis (debéis) usar este método.

Bibliografía

Rick Parent. *Computer Animation* (3ª ed.). 2012. Morgan Kaufman. `[Link]`

- Apartado 2.2 *Orientation representation*
- Apartado 3.3 *Interpolation of orientations*
- Apartado 3.4 *Working with paths* y concretamente Apartado 3.4.2 *Orientation along a path*