NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 109, noviembre de 2021, páginas 33-49

Errores y dificultades de los futuros maestros de educación primaria al afrontar un problema de modelización asociado a la medida de magnitudes

Marta Pla-Castells
Carmen Melchor Borja
Gisela Chaparro
(Universitat de València. España)

Fecha de recepción: 08 de enero de 2021
Fecha de aceptación: 20 de junio de 2021

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis cualitativo de una experiencia con estudiantes de segundo curso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria. Concretamente, se detallan los diferentes errores conceptuales y procedimentales cometidos al resolver una tarea de modelización asociado a la medida de magnitudes. El problema presentado requiere cálculos matemáticos elementales que deberían estar consolidados en estudiantes de grado. Es la primera vez que el alumnado aborda una propuesta de este tipo y, aunque la modelización matemática se ha demostrado como un elemento eficaz para potenciar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en este caso supone un obstáculo añadido. Se reflexiona sobre la automaticidad con la que los estudiantes intentan razonar y aplicar matemáticas sin saber cómo adaptarlas a un problema de la vida real.

Palabras clave

Modelización matemática, Competencia matemática, Medida de magnitudes, Estimación, Escalas, Análisis de errores, Formación del profesorado.

Title

Errors and difficulties of pre-service teachers when facing a modelling problem regarding measurement of magnitudes

Abstract

This paper presents a qualitative analysis of an experience with second course pre-service primary teachers. Particularly, we detail the different conceptual and procedural errors committed by the students when solving a modelling task associated with the measurement of magnitudes. The problem presented requires elementary mathematical calculations that should be consolidated in undergraduate students. It is the first time that students tackle a proposal of this type and, although mathematical modelling has been shown to be an effective element to enhance the teaching-learning processes of mathematics, in this case it is an added obstacle. This work reflects on the automaticity which students try to reason with and apply mathematics without knowing how to adapt it to a real situation.

Keywords

Mathematical modelling, Mathematical competence, Measurement of magnitudes, Estimation, Scales, Error analysis, Teacher Education.

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

1. Introducción

Uno de los objetivos principales de la educación matemática es que los estudiantes obtengan competencias para darle sentido a situaciones de la vida cotidiana. Esto puede hacerse en gran medida a través de las llamadas "competencias de modelización". Estas necesariamente implican que los estudiantes tengan competencias adaptativas frente a competencias rutinarias. Hatano (2003, p. xi) define la competencia adaptativa como "la habilidad de aplicar procedimientos aprendidos con significado de manera flexible y creativa" y la opone a la competencia rutinaria definida como "simplemente ser capaces de completar las tareas escolares matemáticas de forma rápida y correcta sin entenderlas de manera profunda". El nivel de competencia adaptativa se refiere a los procesos de modelización donde la interpretación matemática de un problema, la elección de un modelo apropiado y/o la interpretación de los resultados no son directos o triviales. Además, las soluciones pueden involucrar varios ciclos de modelización en donde las descripciones, explicaciones y predicciones se refinan, revisan o rechazan gradualmente (Lesh & Doerr, 2003; Niss, 2001; Verschaffel et al., 2000). Un proceso de resolución de problemas no adaptativo se refiere directamente a los elementos superficiales en el campo de los cálculos, sin pasar a través de un "modelo de situación" del problema (Nesher, 1980; Verschaffel et al., 2000). Este involucra sólo competencias computacionales rutinarias combinadas con la localización de pistas que ayuden a su resolución, lo cual no es modelización matemática en un sentido real o profundo.

En el presente trabajo se exponen los resultados de un estudio realizado con estudiantes de segundo curso del grado de Maestro/a de Educación Primaria al enfrentarse a una tarea de modelización matemática. En este estudio se analizan tanto las producciones escritas por los estudiantes como las transcripciones de las grabaciones del trabajo en grupo que se realizaron durante la resolución de la tarea en una sesión normal de clase.

Esta investigación tiene como objetivo analizar las dificultades que presentan los futuros maestros de Educación Primaria para resolver una tarea de modelización al no tener desarrollada su competencia adaptativa en el sentido de Hatano (2003, p. xi) y tampoco la competencia matemática. Con este trabajo se pretende contribuir a la idea de que la introducción de tareas de modelización en la formación de futuros maestros hace aflorar sus carencias en competencia matemática. Además, el análisis de los errores cometidos por los estudiantes y su correspondiente uso como retroalimentación a las actividades realizadas en clase supondrá una mejora sustancial en su formación como futuros maestros de matemáticas.

Según PISA/OCDE, la competencia matemática es la capacidad que tiene un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano (Rico, 2007). Esta competencia matemática es clave para entender y medir el conocimiento matemático necesario para la enseñanza. Tal y como afirman Hill, Ball y Schilling (2008), este conocimiento es el que los profesores utilizan en las aulas para producir instrucción y propiciar el aprendizaje en los estudiantes y debe formar parte de su formación como futuros maestros para, en un futuro, poder diseñar y desarrollar una unidad didáctica con contenido matemático.

Como se verá en este trabajo, los estudiantes presentan errores tanto de planteamiento de la situación como de reconocimiento de los conceptos matemáticos que se ponen en juego en la resolución de la misma al no tratarse de una tarea cerrada como las que están acostumbrados a resolver. En este sentido, Rushton (2018) sugiere que el análisis de errores puede ayudar a proporcionar una experiencia de aprendizaje rica que conduce a una comprensión más profunda de las matemáticas. Así, la detección y el análisis de estos errores puede fomentar una comprensión más profunda y completa del contenido matemático, así como de la naturaleza de las matemáticas en sí.

2. Marco Teórico

Existen estudios en la literatura (Van Dooren et al., 2005; Verschaffel et al., 2000) que muestran que las tareas matemáticas que se suelen trabajar en la educación obligatoria animan a los estudiantes a adquirir, al menos inicialmente, competencias rutinarias en lugar de adaptativas en la resolución de problemas. De esta forma, el alumnado tiende a generalizar la validez y relevancia de los esquemas previamente aprendidos de manera que se puedan aplicar a otros ámbitos en los que ya no son válidos.

En un estudio monográfico sobre las consideraciones poco realistas de los estudiantes cuando resuelven problemas (Verschaffel, 2002) se contrasta su visión puramente matemática y su consideración realista basada en su propia experiencia. El autor ilustra con diversos ejemplos que el alumnado no encuentra conexión entre las matemáticas que se enseñan en la escuela y la vida real y resuelven los problemas aplicando algoritmos sin usar el sentido común. Además, los alumnos basan sus estrategias artificiales de resolución de problemas en su experiencia sobre el libro de texto de las escuelas. Verschaffel, en su artículo, defiende que se debe crear una conexión equilibrada entre la descripción de los aspectos del mundo real y la construcción de estructuras matemáticas abstractas a través de la modelización. Paradójicamente, el modelo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que reciben los estudiantes del grado de magisterio no ayuda a que se les plantee otro modelo que implique que experimenten, se formulen preguntas, apliquen estrategias diversas o generalicen resultados (de Nicolás, Torremorell y Valls, 2016).

Trabajos como los de Blum & Niss (1991) y Kaiser & Sriraman (2006) demuestran que el uso de tareas de modelización fomenta un aprendizaje significativo. En ellos se pone de manifiesto que la utilización de este tipo de actividades promueve las aptitudes necesarias para poder utilizar las matemáticas fuera del aula, así como el cambio en la percepción de los alumnos sobre la utilidad de las matemáticas para resolver situaciones de tareas significativas en la vida real (Palm, 2007). El presente trabajo de investigación ha supuesto para la mayoría de los estudiantes un primer contacto con un problema de modelización contextualizado en la vida real. Por ello, no podíamos esperar que esta primera experiencia rompiera con las creencias del alumnado, basadas desde la escuela en problemas tipo.

En la literatura sobre modelización y sus aplicaciones podemos encontrar diferentes ciclos de modelización. Estos dependen de diversas perspectivas de modelización (Borromeo-Ferri, 2006). Utilizaremos el ciclo de modelización (Figura 1) de Kaiser (1995) y Blum (1996) para analizar los errores de los estudiantes en sus distintas fases. Hemos elegido este ciclo de modelización ya que la realidad y las matemáticas están separadas en “dos mundos” y los pasos que sigue son más transparentes que en otros ciclos. Este modelo, llamado Didáctico o Pedagógico en Borromeo-Ferri (2018) ofrece la oportunidad de reflejar lo que hacen los estudiantes cuando resuelven problemas reales y proporciona una herramienta simple y eficaz para analizar los pasos seguidos y los errores cometidos.

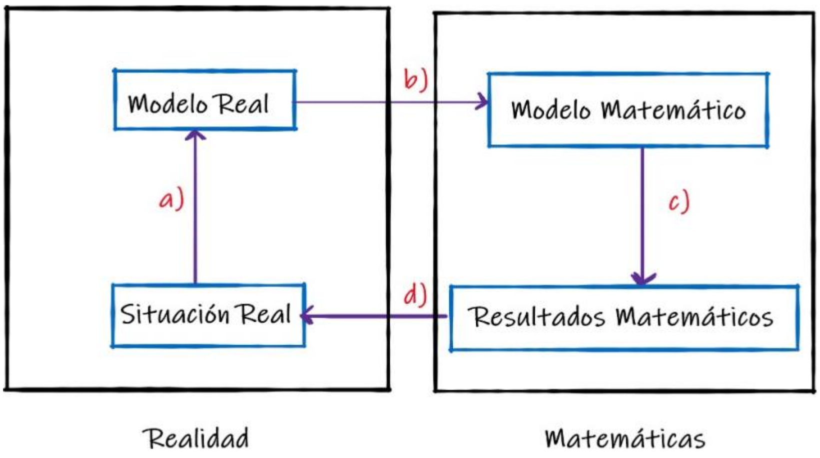


Figura 1. Ciclo de modelización de Blum (1996) y Kaiser (1995). (a) Idealizar, (b) Matematizar, (c) Investigación del modelo, (d) Interpretación.

El punto de partida es una "*situación real*" que tiene que simplificarse, idealizarse, estructurarse, someterse a condiciones y decisiones apropiadas y hacerse más precisa para el resolutor, de acuerdo con sus intereses. Esto conduce a un "*modelo real*" de la situación original en donde, por un lado, se tienen las condiciones esenciales de la situación original, pero, por otro lado, se ha esquematizado de manera que se pueda abarcar en términos matemáticos.

El modelo real tiene que matematizarse, es decir, sus datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones tienen que traducirse a las matemáticas. Tendremos entonces un "*modelo matemático*" de la situación real. El proceso continúa con el trabajo matemático, dibujando esquemas, haciendo cálculos y aplicando métodos matemáticos para obtener los "*resultados matemáticos*". Estos resultados tienen que ser trasladados al mundo real, es decir, ser interpretados en relación con la situación original. Haciendo esto, el resolutor también valida el modelo y decide si los resultados obtenidos se corresponden con el propósito para el cual se ha construido. Cuando se valida, ocurren discrepancias de diversos tipos que pueden llevar a la modificación del modelo o su reemplazo por uno nuevo. En otras palabras, el proceso de resolución del problema puede requerir que se recorra el ciclo varias veces.

3. Metodología

La sesión de trabajo en la tarea de modelización fue diseñada para, por una parte, hacer que los estudiantes se enfrentaran a los principios de la educación matemática realista (Gravemeijer, 1994) utilizando una situación que hiciera aflorar los conceptos matemáticos, correctos o erróneos, que poseen. Por otra parte, se quiso hacer uso del conocimiento informal del alumnado mediante la verbalización y confrontación de diferentes puntos de vista durante el proceso de resolución para iniciar la comprensión del problema (Glaser, 1991). Aparte, para trabajar el ciclo de modelización, es mucho más eficiente que los alumnos trabajen en parejas o en grupos que de manera individual. Las interacciones entre los alumnos en la clase de matemáticas hacen que los intercambios de información, las confrontaciones y las justificaciones entre ellos produzcan progresos y favorezcan la validación del trabajo matemático que se realiza (Quaranta y Wolman, 2003). En su artículo, Quaranta y Wolman afirman que el trabajo conjunto "facilita colaboraciones en el proceso de buscar juntos soluciones, mediante la coordinación de los procedimientos para alcanzar un objetivo determinado" (p. 195). Pero el trabajo en grupo también puede generar limitaciones y conflictos tales como que alguno de sus integrantes asuma la dirección de la solución y los otros la acepten sin cuestionarla. También puede ocurrir que algún participante se oponga sistemáticamente a las propuestas del resto sin emplear argumentos matemáticos. Por tanto, habrá que estar pendientes de los registros visuales o sonoros de las interacciones entre los integrantes de los grupos para detectar estas posibles conductas. Por todo ello, se decidió organizar a los treinta y siete estudiantes del segundo curso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria en grupos de trabajo.

El experimento se realizó durante una sesión de la asignatura Matemáticas para Maestros, la cual es completamente instrumental y tiene como objetivo proporcionar un nivel de cultura matemática básica. Es decir, se tratan aspectos conceptuales y procedimentales de matemáticas sin contenido didáctico. Además, en esta asignatura, se pretende dotar a los futuros maestros de la competencia matemática que hace posible analizar, entender y aplicar los contenidos de las matemáticas que se enseñan en las escuelas y les permite actuar de una manera reflexiva, fundamentada y crítica ante la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La asignatura se estructura en cuatro bloques que son: aritmética e iniciación al álgebra, geometría del espacio y del plano, estimación y medida de magnitudes y estadística y probabilidad. Cuando se realizó la experiencia, ya se habían trabajado los bloques de geometría y medida. Por tanto, los contenidos del experimento que se corresponden con estos bloques habían sido estudiados previamente. No obstante, tal y como se ha explicado anteriormente, las herramientas matemáticas requeridas en la resolución de la tarea se suponen adquiridas en cualquier alumno de grado.

El grupo de estudiantes mostró, en las distintas evaluaciones realizadas desde el principio de curso, un nivel en competencia matemática medio-bajo. En términos generales, manifestaban la necesidad de automatizar la resolución de los problemas que se les iban planteando. En general, sabían resolverlos en los casos en los que previamente se había mostrado un ejemplo prácticamente idéntico. Sin embargo, mostraban muchas dificultades cuando se trataba de problemas que requerían flexibilidad y creatividad en la aplicación de las estrategias. En muchas ocasiones, memorizaban procedimientos justificando que les resultaba mucho menos complicado que entender profundamente el contenido.

El alumnado se organizó aleatoriamente en cinco grupos. Se le proporcionó a cada equipo el enunciado del siguiente problema y tuvieron una hora y media para resolverlo.

Mi amigo Vicente quiere cambiarse de piso con sus compañeros para empezar el curso. Cuando fueron a verlo se dieron cuenta de que le hacía falta una manita de pintura. El piso les interesa mucho, pero quieren reclamarle al arrendatario que les descuente el precio de la pintura del primer mes de alquiler. Han conseguido un plano del piso (Figura 2) y quieren que les ayudemos a calcular qué cantidad de dinero descontarán en el primer pago. La única información que han conseguido es que 1 litro de pintura es suficiente para pintar 7 m^2 de pared y cuesta 2 € el litro. Además, ¿podrá transportar Vicente toda la pintura en el maletero de su coche?

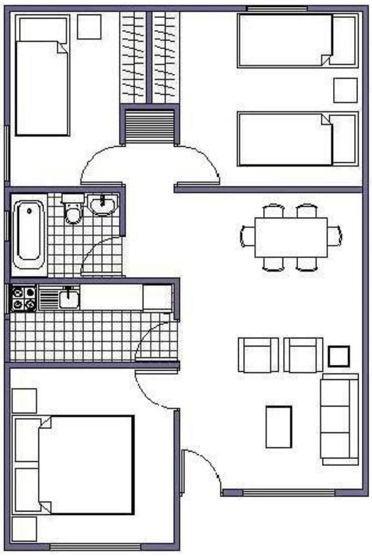


Figura 2. Representación del plano del problema. Fuente: creación propia (2020).

Tras presentar la tarea, se animó a los estudiantes a estimar las medidas que fueran necesarias, tal y como lo harían en la vida real si se encontraran en la situación del problema. En cada grupo se realizó una grabación de audio con todas las conversaciones que surgieron durante el transcurso de la tarea además de recoger las producciones escritas de la resolución de esta.

4. Análisis de la experiencia y resultados

Tal y como se ha explicado en la introducción, se analizaron tanto las producciones escritas de los diferentes grupos como la transcripción de las grabaciones de las discusiones en grupo. Posteriormente, se categorizaron los errores más frecuentes que cometieron los diferentes grupos en cada una de las fases de resolución de un problema de modelización según el ciclo de Kaiser (1995) y Blum (1996) presentado en la Figura 1. Por simplicidad, denotaremos como Fase 1 la unificación de las fases de *idealización*, para construir un modelo del mundo real a partir de la situación real que se presenta y de *matematización*, para obtener un modelo matemático de la situación real. La Fase 2 se corresponderá con la *investigación* del modelo matemático para obtener resultados matemáticos. Finalmente, definiremos la Fase 3 como la *interpretación* de los resultados para trasladarlos a la situación real original. Los errores y reflexiones comentados en las Fases 1 y 3 se obtuvieron fundamentalmente de las transcripciones de las grabaciones, mientras que los correspondientes a la Fase 2 se extrajeron principalmente de los resultados escritos.

4.1 Fase 1: Idealización y matematización

Error 1: Falta de simplificación al principio del problema

Una de las primeras cosas que se detecta al analizar las grabaciones de audio registradas por los alumnos es que, en algunos grupos, cuando se repartió el problema, un representante de cada grupo leyó el enunciado en voz alta de manera espontánea. En cuanto a la idealización de la situación real que en algunos grupos surgió, observamos que desde el primer momento aparecieron expresiones del tipo:

- *La cocina puede no pintarse...si es de azulejos…,*
- *¿Preguntamos si las puertas se pintan?*
- *No hace falta descontar pared y ventanas...*

Sin embargo, este tipo de reflexiones no surgieron en otros grupos hasta que el proceso de resolución de la tarea estuvo mucho más avanzado en la Fase 2 o incluso en la Fase 3. En estos casos, la demora en el análisis de los elementos de complejidad, que permite simplificar el problema y obtener una mejor estimación del resultado, dificultó y ralentizó la toma de decisiones y la obtención de una interpretación final. En particular, la omisión de los elementos de complejidad dificultó la transición desde la creación de la representación mental de la situación real a la construcción del modelo real (Borromeo-Ferri, 2006).

Error 2: Planteamiento incorrecto o incompleto del problema

Una vez se leyó la situación real, surgieron rápidamente propuestas para abordar la fase de matematización.

- *Primero tenemos que sacar alguna de las medidas….*
- *Alguna de las partes de la casa deberá tener alguna medida estándar….*
- *Habrá que saber cuánto miden las paredes…*
- *Hay que saber la altura y la base…*

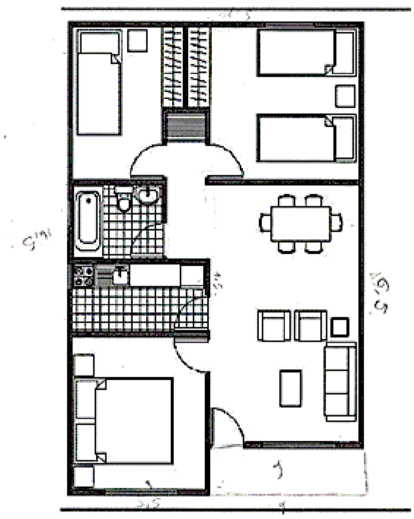


Figura 3. Representación toma medidas (Grupo 1).

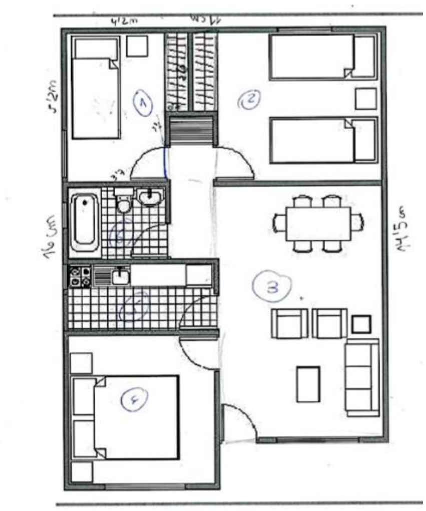
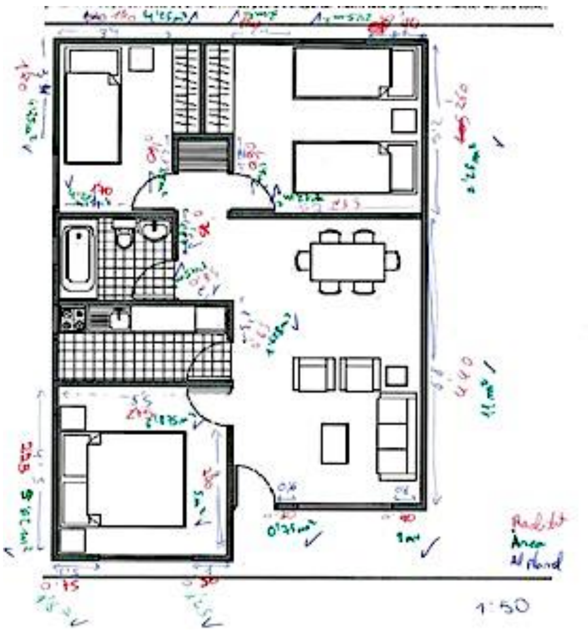


Figura 4. Representación toma medidas (Grupo 2).

En general, todos los grupos llegaron a la conclusión rápidamente de que debían medir para obtener los datos de los que el problema carecía. La estrategia en todos los casos consistió en utilizar la regla y medir la longitud en centímetros de las paredes en el plano.

Tras analizar las grabaciones se observa que ninguno de los grupos supo cómo abordar el problema hasta que las profesoras introdujeron la idea de estimación. En ese momento, cada grupo comenzó a realizar estimaciones sobre la posible medida de la altura de la pared.



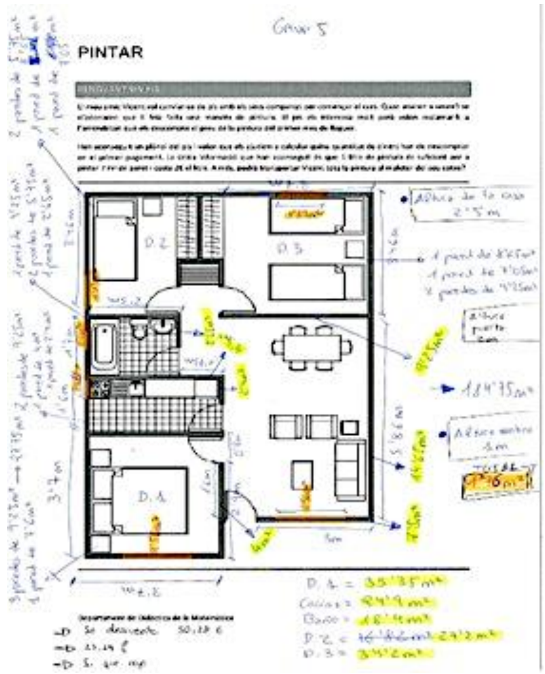


Figura 5. Representación toma medidas (Grupo 4).

Figura 6. Representación toma medidas (Grupo 5).

Observamos que, en general, no hay rigurosidad al recoger los datos necesarios para la resolución del problema. Únicamente el Grupo 5 (Figura 6) indicó todas las medidas de las paredes en metros, es decir, tras haber aplicado una escala. El Grupo 4 (Figura 5) marcó las medidas en el plano y en la realidad, aunque no se incluyeron las unidades de medida. Ambos grupos anotaron el área correspondiente a las paredes de cada habitación en metros cuadrados. En todos los demás casos faltaron medidas y/o sus correspondientes unidades. Véanse por ejemplo las Figuras 3 y 4 correspondientes a los Grupos 1 y 2, respectivamente. La falta de claridad al tomar medidas hizo que los cálculos posteriores fueran incompletos o erróneos. En las grabaciones se detecta que los grupos que no anotaron todas las medidas sobre el plano, realizaron cálculos de resolución a la vez que tomaron las medidas. Es decir, combinaron las fases de matematización y de investigación del modelo matemático. Este hecho muestra que el proceso de modelización no es lineal y la manera en la que se presenta el problema, en este caso sin datos, influye en la distinción entre fases (Borromeo-Ferri, 2006). El cambio de fase hacia adelante y hacia atrás en el ciclo de modelización implica que los estudiantes no pueden comprobar si su resolución tiene sentido o si faltan mediciones a tener en cuenta. También se detecta en las grabaciones que el hecho de no anotar las cotas en el plano produce desconcierto en los estudiantes cuando realizan operaciones, pues no saben cada valor a qué parte del plano corresponde.

4.2 Fase 2: Investigación del modelo matemático

Error 3: Errores en el trabajo con escalas

Tras escuchar las grabaciones y analizar las producciones escritas de los alumnos, se observa que en la mayoría de los grupos se asumió que la altura de la pared era 2.5 m. En el caso del Grupo 1 (Figura 7), sin embargo, para calcular el área de la ventana o de las paredes de la habitación de matrimonio, se multiplicó por mediciones tomadas en centímetros sin aplicar ninguna escala. Pese a la mezcla de unidades, el resultado final del área se expresó en metros cuadrados, pues los estudiantes asumieron implícitamente que la escala, en centímetros, era 1:100. Este grupo cometió el mismo error en el cálculo de las áreas de las paredes de todas las habitaciones y observamos que, además, no se habían tomado todas las medidas en el plano. De lo contrario, quizás este error se habría podido evitar.

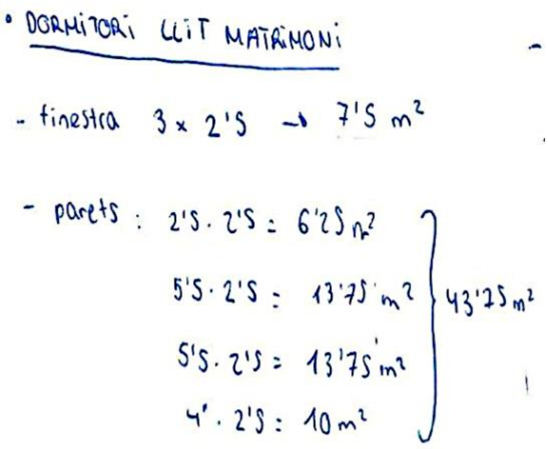


Figura 7. Mezcla de unidades en el cálculo de áreas (Grupo 1).

En cuanto al Grupo 2 (Figura 8), se cometió el mismo error que en el caso del Grupo 1. Se asumió que la altura de la habitación era 2.5 m, pero el resto de las longitudes para el cálculo de áreas se tomaron en centímetros sin considerar ninguna escala. Se repitió el mismo error en todas las habitaciones y no se indicaron las unidades de superficie. Comparando las resoluciones de los Grupos 1 y 2 para la misma habitación, se observan discrepancias en la toma de mediciones.

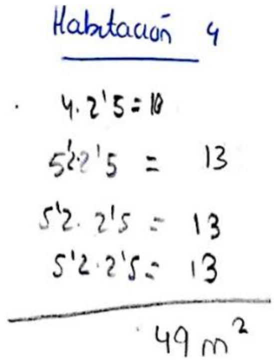


Figura 8. Mezcla de unidades en el cálculo de áreas (Grupo 2).

En el caso del Grupo 3 (Figura 9), se sumaron las medidas en centímetros de las bases de todas las paredes y posteriormente se aplicó una regla de tres para obtener la equivalencia en metros. Para averiguar la escala, se tomaron como referencia los 190 centímetros que mide una cama estándar y que se correspondían con 3.5 centímetros del plano, aunque esto no se expresó correctamente. No se observó que la escala en centímetros es 1:50. Aunque el resultado de 40.71 m no es incorrecto, debido a la cancelación de las unidades, no se refleja un verdadero entendimiento de la escala.

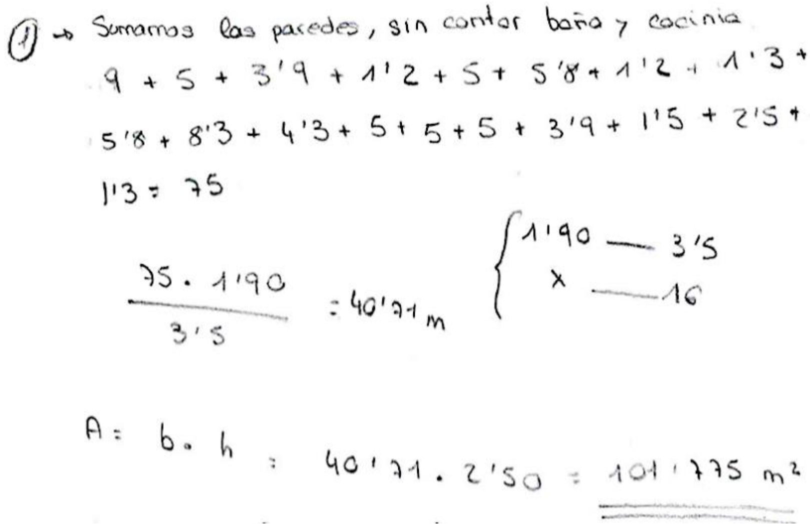


Figura 9. Aplicación fortuita de la escala (Grupo 3).

Sin embargo, en otros casos como el del Grupo 4 (Figura 5), se observa en los datos anotados en el plano y también en la grabación, que se razonó correctamente especificando la escala en centímetros 1:50 y esta se aplicó a cada una de las medidas del plano. No obstante, se debería haber indicado las unidades en las medidas escritas en el plano. En el caso del Grupo 5, se detecta en la grabación que lograron, apoyándose en el uso de la regla de tres, obtener la escala correctamente. Por último, en el caso del Grupo 6, según se escucha en la grabación, para obtener la proporción de las medidas en metros, se tomó como referencia el ancho de la cama. Se consideró que 3 centímetros del plano se correspondían con 1.5 metros de la realidad. De esta manera, se concluyó que para transformar las mediciones del plano en las de la realidad había que dividir entre 2. No aparece explícitamente la escala que se está utilizando, que en este caso sería 1:50 en centímetros, aunque la técnica funciona.

En general, la mayoría de los grupos no supo establecer correctamente la escala que transforma las mediciones del plano en las correspondientes medidas reales. Como se ha podido observar, en algunos casos ni siquiera se consideró que todas las mediciones deben operarse en las mismas unidades, llegando incluso a mezclar metros y centímetros. Además, hay casos en los que se inventaron técnicas alternativas a la detección de la escala que, aunque funcionan, no reflejan que el alumnado entiende el proceso de transformación de unidades y el concepto de escala.

Error 4: Uso inadecuado del signo igual

Autores como Knuth et al (2006) y Matthews et al (2012), afirman que muchos estudiantes demuestran un conocimiento inadecuado de la posición y el significado del signo igual. Simplemente lo ven como un anuncio de un resultado de una operación aritmética y no como un símbolo de equivalencia matemática. En esta línea, en las respuestas recopiladas por nuestros estudiantes, aparecen evidencias de este tipo de concepción errónea de la utilización del signo igual.

Así, en el Grupo 2 (Figura 10) observamos una falta de rigurosidad al establecer igualdades que no son ciertas. El error en la expresión sucede cuando se pretende indicar el dinero gastado en pintura en cada una de las habitaciones. Si observamos el razonamiento para la habitación número 1, se utilizó una regla de tres para saber que se debe dividir la cantidad de metros cuadrados entre 7 para conocer los litros de pintura necesarios. A continuación, la primera regla de tres se iguala a una segunda, que se utilizó para calcular el precio de la pintura de la habitación. En el caso de la habitación 2, se igualó el cociente, del cual se obtiene la cantidad de pintura, al resultado multiplicado por lo que cuesta un litro. Aunque el resultado final sobre dinero es correcto, la notación matemática utilizada en el proceso tiene incoherencias.

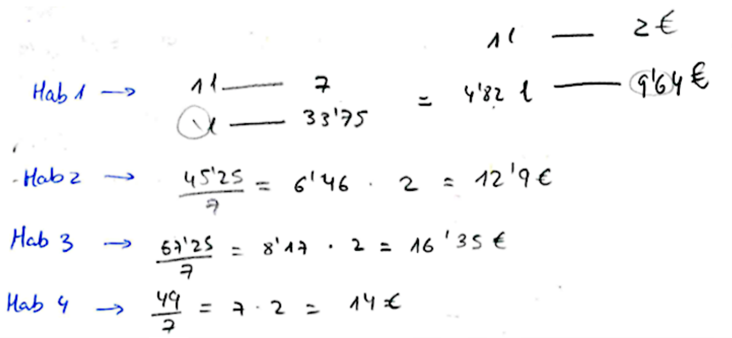


Figura 10. Representación de uso inadecuado del signo igual (Grupo 2).

Error 5: Sobreutilización de la regla de tres

En el caso de los Grupos 2, 1 y 3 se utilizó la regla de tres para saber que, dado que con 1 litro de pintura se pintan 7 metros cuadrados, hay que dividir el total de metros cuadrados entre 7 para saber cuántos litros de pintura se necesitan (Figuras 10, 11 y 12). Este hecho demuestra que no se entiende qué es una división y qué tipo de problemas modeliza. Existen diversos estudios que analizan el uso de la regla de tres para la resolución de problemas del tipo "missing value word-problem (en inglés)" ya que puede darse una excesiva linealización de los problemas cuando no hay necesidad de hacerlo (Van Dooren et al., 2008). Pero incluso en aquellos problemas donde se dan valores a, b y c (incluyendo un par que dan una proporción) y debe encontrarse un cuarto valor x que cumpla la proporción, los alumnos tienden a utilizar la regla de tres incluso cuando no hay necesidad de hacerlo. En aquellos casos, en los que la proporción lleva explícita la razón de proporción (1 litro es suficiente para pintar 7 m^2 de pared) los alumnos siguen usando la regla de tres ya que han interiorizado el carácter procedimental de la proporción sin tener en cuenta los conceptos que la sustentan.

El Grupo 2 (Figura 10) también utilizó regla de tres para saber el total de dinero invertido en pintura. Esto indica de nuevo una fuerte carencia de entendimiento del concepto de multiplicación. Todos estos ejemplos ilustran, además, que los estudiantes tienden a resolver los problemas de manera mecánica sin entender verdaderamente el significado del concepto que se maneja (Verschaffel, 2002).

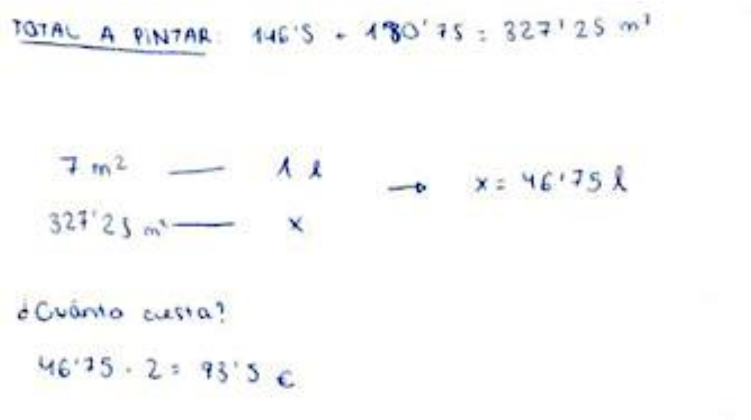


Figura 11. Representación de la sobreutilización de la regla de tres (Grupo 1).

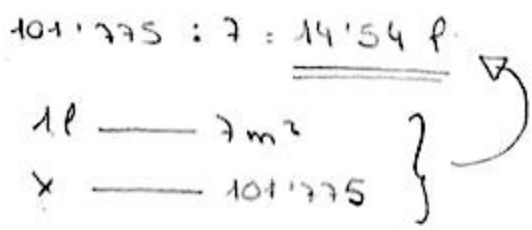


Figura 12. Representación de la sobreutilización de la regla de tres (Grupo 3).

Error 6: Experiencias poco adaptativas y eficientes

Tras analizar las grabaciones, se detecta que los Grupos 1 y 2 intentaron aplicar conceptos que recientemente se les había enseñado independientemente de que estos fueran pertinentes en la resolución del problema (Van Dooren et al., 2008). Además, los alumnos de ambos grupos quisieron aplicar la fórmula general para obtener el área de un polígono regular utilizando su apotema. Esto es debido a que poco antes de la realización del presente estudio se había realizado un examen sobre dicho contenido. En las transcripciones correspondientes se puede observar cómo el alumnado tiende a relacionar el contenido que deben aplicar en la resolución con lo último sobre lo que se les ha evaluado. Sin embargo, las fórmulas que se habían estudiado no eran aplicables para resolver el problema y sólo rectificaron cuando su idea inicial no les condujo a una resolución satisfactoria.

- *¿La fórmula del área cuál era? El perímetro por apotema. La general era la del examen. Es perímetro por apotema partido dos, esa era la de los polígonos.*
- *Habrá que hacer lo de los volúmenes. Pitágoras. Entonces hay que hacer lo de la apotema esa. Con razón he suspendido.*

Por otra parte, se observa que, en general, todos los grupos tendían a identificar en el plano una forma geométrica que les permitiera calcular el área con un procedimiento conocido. Sin embargo, utilizaron formas poco eficientes para ello, decidiendo hacer los cálculos habitación por habitación (véase Figura 10). El único grupo que mostró una estrategia basada en la minimización de operaciones fue el Grupo 3 (Figura 9) que agrupó todas las medidas de longitud de las paredes antes de multiplicar por la altura y así calcular su área.

En algunos grupos, el gran número de operaciones aritméticas que realizaron durante la resolución ocasionó confusión en los cálculos al no haber empleado una estrategia sistemática a la hora de anotar las medidas sobre el plano. Así, puede oírse en las grabaciones el desconcierto a la hora de realizar las operaciones al no saber de dónde provienen los datos ni a qué habitación pertenecen.

En general, los diferentes grupos no tuvieron en cuenta los elementos de complejidad asociados a la tarea. Acciones como restar las puertas y las ventanas de las habitaciones no se llevaron a cabo hasta el final del proceso y solo en algunos grupos. Esto provocó que se realizasen más operaciones de las necesarias; primero calcularon el área de la habitación sin restar la ventana o puerta para posteriormente realizar otra operación para restar ambas.

4.3 Fase 3: Interpretación

Error 7: Argumentación final poco rigurosa

En todos los grupos se obtuvo un valor para el área total de la pared a pintar. Sin embargo, el objetivo del problema de modelización era interpretar este número en relación con el problema dado para obtener resultados reales (Borromeo-Ferri, 2006) sobre la capacidad del maletero. Observamos que en todos los grupos la conclusión final carece de argumentación consistente de manera escrita. Únicamente el Grupo 2 (Figura 13) realizó unos cálculos básicos. Sin embargo, en las grabaciones se detectan, en algunos pocos grupos, diferentes argumentos y estimaciones.

- *Sí que caben 46 litros, pensando en las garrafas de 8 litros del supermercado….*
- *20 litros son 4 garrafas de 5 litros. Por tanto, sí que cabe en el coche….*

En estos mismos grupos se manifestó la intención de encontrar una validación de su interpretación. En algún caso incluso llegaron a darse cuenta de que el valor del área debía ser incorrecto pues obtuvieron poca cantidad de pintura. Uno de los grupos intentó validar su intuición sobre el volumen de un maletero con un mecánico conocido. Tras la consulta verificaron que habían obtenido un valor muy bajo de litros de pintura. Si los estudiantes no cuestionan la realidad del resultado matemático, entonces la modelización carece de sentido (Borromeo-Ferri, 2006). Es lo que ocurre en la mayoría de los grupos, pues no son capaces de hacerse las preguntas pertinentes para reflexionar sobre la viabilidad de los resultados obtenidos.

En todas las grabaciones se manifestó la falta de tiempo para la resolución del problema. A esta situación se suma la poca agilidad que la mayoría de los grupos demostró para encontrar referentes cercanos que les permitieran establecer conclusiones y, en lugar de esto, insistieron en encontrar fórmulas que originasen una respuesta automática.

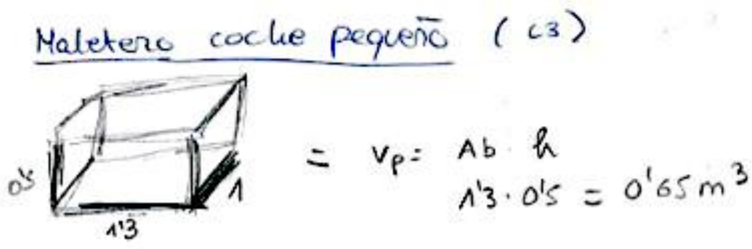


Figura 13. Representación de la respuesta escrita a la pregunta sobre el maletero (Grupo 2).

5. Conclusiones

La modelización matemática se ha demostrado como un elemento eficaz para potenciar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Blomhoj, 2004). El trabajo con tareas abiertas, complejas, reales y auténticas permite que los estudiantes movilicen conocimientos previos, tomen decisiones y adopten posturas críticas frente a la situación que están modelizando a la vez que construyen nuevos conocimientos.

Ahora bien, si los estudiantes no tienen bien consolidados los conocimientos básicos para resolver la tarea de modelización que se les presenta, esta hará emerger una serie de errores matemáticos conceptuales y procedimentales. La tarea presentada en este trabajo requería de cálculos matemáticos sencillos que ya deberían estar consolidados en estudiantes de grado que optan a convertirse en maestros de primaria en pocos años. Errores en el cálculo de áreas de polígonos sencillos, de conversión de unidades debidos a cambios de escala o una mala utilización del concepto de proporción aparecen sistemáticamente en una tarea, a priori, sencilla.

Además de las carencias matemáticas que pueden emerger al resolver un problema de modelización, surgen otras derivadas del mismo proceso cíclico de la resolución de este tipo de problemas. Los estudiantes con los que se ha hecho el estudio, al no estar habituados a conjeturar, formular ideas y validar los resultados que iban obteniendo, necesitaron de muchas discusiones y alguna ayuda por parte de los docentes para encontrar un camino viable con el que empezar a trabajar en la tarea propuesta. Aun así, en el análisis de las producciones escritas y las grabaciones de audio se aprecia el desconcierto de los estudiantes al no tener una guía precisa y unos datos prefijados para resolver la tarea propuesta.

Los resultados de este trabajo apuntan al estudio de Blum (2015) que se refieren a la necesidad de proporcionar a los futuros profesores el conocimiento profesional necesario para llevar adelante actividades de modelización y desarrollar experiencias de enseñanza mediante la modelización matemática. Además de los beneficios cognitivos que saldrían de tales actividades, los futuros maestros podrían tener un conocimiento profundo de las fases de resolución por los que pasarían sus estudiantes al resolver problemas abiertos de matemáticas (Lesh y Doerr, 2003). Para ello, tal y como se afirma en el estudio de Lui y Bonner (2016), el conocimiento conceptual en matemáticas es primordial para que los maestros puedan crear diversos planes de enseñanza, como es el caso de la modelización. Sin embargo, como Cooney (1999) expresa en su estudio, no es realmente sorprendente que los profesores tengan una comprensión limitada de las matemáticas de la escuela. Una de las razones más importantes de esto es que, después del final de la vida escolar, los estudiantes no experimentan situaciones de aprendizaje o uso de las matemáticas. Además, los programas de formación de profesores se dirigen principalmente a llenar las deficiencias en el conocimiento de las materias, pero sin utilizar para ello problemas de la vida real o de aplicación de conceptos matemáticos.

El presente trabajo ha puesto de manifiesto que la resolución de una tarea de modelización ligada a la medida de magnitudes ha hecho aflorar las carencias conceptuales y procedimentales en matemáticas que presentan los futuros maestros de Educación Primaria. Aunque existen estudios de análisis de errores matemáticos de estudiantes de magisterio (de Nicolás, Torremorell y Valls, 2016), la utilización de este tipo de tareas abiertas y complejas con estudiantes de magisterio con el fin de analizar su falta de competencia matemática es una línea de investigación novedosa sobre la que no existen estudios similares anteriores. La implicación que se persigue con este estudio es poner en valor la utilización de tareas de modelización en la formación de profesores de manera que estos sean capaces de transmitir conocimientos a través de diferentes situaciones que eviten el trabajo descontextualizado de las matemáticas y ayuden a paliar los errores procedimentales y conceptuales provenientes del aprendizaje mecánico de las mismas (Doerr y Lesh, 2003). Además, el análisis de estos errores permitirá incidir en aquellos aspectos en los que los futuros maestros muestren deficiencias competenciales matemáticas a la hora de planificar su formación dentro del grado. La implementación de actividades de modelización proporciona aportes significativos para la formación inicial de maestros de Educación Primaria: pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes y pueden hacer que los futuros docentes sean sensibles hacia diferentes maneras de dar sentido a la matemática (Villarreal, 2019).

Bibliografía

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling-A theory for practice.En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K.Walby (Edits.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education*, 45-159. National Center for Mathematics Education de la Univesidad de Gothenburg: Suecia.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematik-unterricht – Trends und Perspektiven. En Kadunz, G. et al. (Eds.), *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, *23*, Wien: Hölder-Pichler- Tempsky, 15 – 38.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? En Cho, S.J. (Ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Cham: Springer.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing.

Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 163-87.

de Nicolás, M. A., Torremorell, M. C. B., & Valls, M. M. P. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. *Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology.*, *1*(1), 419-430.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modelling perspective on teacher development en R. Lesh and H.
M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & Teaching.* Lawrence Erlbaum: London (Chapter 6).

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Glaser (1991). The Maturing of the relationship between the science of learning and cognition and educational practice, *Learning and Instruction*,*1*, 129-144.

Hatano, G. (2003). Foreword. En A.J Baroody, & A. Dowker (ed.) *The Development of Arithmetic Concepts and Skills*, xi-xiii. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, *39*(4), 372–400.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. En Graumann, G. et al. (Eds.) *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, (pp. 66 – 84) Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.

Lesh, R. & Doerr, H.M., (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism: A models & modeling perspective on mathematics problem solving, learning & Teaching* (p. 17).

Lui, A. M., & Bonner, S. M. (2016). Preservice and inservice teachers' knowledge, beliefs, and instructional planning in primary school mathematics. *Teaching and Teacher Education*, *56*, 1-13.

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 316-350.

Nesher, P. (1980). *The stereotyped nature of school word problems*. For the Learning of Mathematics, *1*(l), 4l -48.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. En J.F. Matos, W. Blum, S.K. Houston, & S.P. Carreira (Eds.), *Modelling and Mathematics Education. ICTMA 9: Applications in Science and Technology*, 72-89. Chichester: Ellis Horwood.

Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. En *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 201-208). Springer, Boston, MA.

Quaranta, M. & Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M, Panizza, (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. 189-243. Paidós: Buenos Aires.
Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.
Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3*(1), 1-12.
Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of problem type and age on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(l), 57 -86.
Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.
Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.
Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 64–80). Norwich. United Kingdom: PME.
Villarreal, M. E. (2019). Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (18), 219-234.

Marta Pla-Castells. Profesora en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Magisterio de la Universitat de València. Email: marta.pla@uv.es.

Carmen Melchor Borja. Profesora en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Magisterio de la Universitat de València. Email: carmen.melchor-borja@uv.es

Gisela Chaparro. Becaria de Colaboración en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Magisterio de la Universitat de València. Estudiante del Máster de Investigación en Didácticas Específicas de la Universitat de València. Email: gichagar@alumni.uv.es