

Un conjunto de experimentos sencillos ilustran la naturaleza ondulatoria de los campos electromagnéticos

Resonancias de ondas electromagnéticas

J. M. Villalba, F. J. Manjón, A. Guirao y M. V. Andrés

ABSTRACT: We describe in this paper a set of experiments designed to make qualitative and quantitative measurements on electromagnetic resonances of several simple systems. The experiments are designed for the undergraduate laboratory of Electricity and Magnetism in Physics. These experiments can help the students understanding the concept of resonance, which appears in different fields of Physics.

1. INTRODUCCION

El conjunto de experiencias que hemos elaborado está orientado al estudio cualitativo y cuantitativo de resonancias de ondas electromagnéticas. Estas experiencias están concebidas para el laboratorio de Electricidad y Magnetismo del segundo o tercer curso de la Licenciatura de Física. El primer objetivo que nos proponemos es consolidar y unificar conceptos como el de onda estacionaria y el de resonancia, que aparecen en la naturaleza en campos diversos como mecánica, acústica, electromagnetismo, óptica, estado sólido, física atómica y nuclear, etc. ([1], Apdo. 23-4).

El montaje experimental, que se propone, se fundamenta en la utilización de un analizador de espectros. En ese sentido, hemos aprovechado la existencia de analizadores de espectros de radiofrecuencia económicos y asequibles para un laboratorio de docencia. En concreto, nuestro montaje experimental consta de un generador de barrido y un analizador de espectros que permiten cubrir el rango (0, 500) MHz. Este sistema requiere, adicionalmente, un osciloscopio para visualizar el espectro de frecuencias.

Las experiencias concretas que aquí se proponen se ciñen a la medida de frecuencia de resonancia de sistemas sencillos. Comentaremos a lo largo del trabajo las analogías con diversos sistemas resonantes, que en algunos casos pueden ser más familiares para los estudiantes. Todo ello en su conjunto debe facilitar la adecuada unificación del concepto de resonancia de un sistema.

Un aspecto muy interesante para el desarrollo de las experiencias propuestas es el hecho de que la medida del espectro de frecuencias es en «tiempo real». Esto significa que pueden observarse directamente los efectos de conectar o desconectar un determinado cable; cambiar la longitud del cable en resonancia empalmado otro en su extremo; cambiar la condición de contorno del extremo del mismo de circuito abierto a circuito cerrado y viceversa; etc.

Abordaremos el planteamiento teórico y la discusión de los resultados suponiendo el nivel de formación de los estudiantes de un curso de electromagnetismo fundamental, si bien, es posible aprovechar el montaje propuesto para un estudio más profundo de las características de las ondas estacionarias. En concreto, nuestro montaje experimental puede emplearse también para estudiar con detalle algunas consecuencias de la teoría de líneas de transmisión.

2. FUNDAMENTO TEORICO

Un primer aspecto teórico que los estudiantes deben plantearse, para el desarrollo de las experiencias propuestas, es el comprender que la conexión de un generador a un cable, por ejemplo coaxial, conlleva la propagación de una onda electromagnética en el mismo. En este sentido es ilustrativo plantear en un primer momento la conexión de un generador de corriente continua a un cable coaxial. Por una parte se generará en el mismo una diferencia de potencial V y, en función de la resistencia que se conecte en su extremo, una intensidad I , ambas estacionarias. Por otra parte, también se generarán unos campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} que podemos calcular en función de V e I . De hecho, puede comprobarse que la potencia transportada en términos de V e I no es más que el flujo del vector de Poynting correspondiente a los campos \vec{E} y \vec{H} .

Este análisis del caso estacionario permite comprender fácilmente que si el generador fuese de corriente alterna se generarían en el cable coaxial una diferencia de potencial y una intensidad armónicas. Simultáneamente se generarían también unos campos \vec{E} y \vec{H} armónicos que, siendo solución de las ecuaciones de Maxwell, serán solución de la ecuación de ondas, constituyendo una onda electromagnética:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, r, t) &= E_0(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r, \\ \vec{H}(z, r, t) &= H_0(r) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_\phi\end{aligned}\quad (1)$$

donde se ha tomado un sistema de coordenadas cilíndricas cuyo eje z coincide con el eje de simetría de revolución del cable coaxial y donde E_0 y H_0 tienen las mismas expresiones que las de los campos del caso estacionario ([2], Ap-

do. 26-5), y donde $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$. La velocidad de fase v y la longitud de onda λ vendrán dadas por $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ y por $2\pi/k$, respectivamente.

La onda electromagnética de las expresiones (1) lleva asociadas unas ondas de diferencia de potencial e intensidad ([3], Cap. 8) que podemos escribir de la forma

$$V(z, r, t) = V_0(r) \cos(\omega t - kz) \quad (2)$$

$$I(z, r, t) = I_0(r) \cos(\omega t - kz)$$

En resumen, al conectar un generador armónico a un cable coaxial se generará y propagará una onda electromagnética en su interior. Esta onda será análoga a la onda acústica que puede propagarse por un tubo al excitar una onda armónica en el interior del mismo, por ejemplo acoplando uno de los extremos del tubo a un altavoz. Al llegar la onda electromagnética al extremo del cable, al igual que en el caso de la onda acústica en un tubo, se producirá una reflexión generándose una onda estacionaria en su interior.

Los dos casos más característicos serán ([3] Apdo. 8-3-2, [4] Apdo. 22-5):

- a) Extremo del cable cortocircuitado. En este caso la diferencia de potencial en el extremo será cero y por tanto la onda estacionaria correspondiente tendrá un nodo en el extremo del cable. Es el caso equivalente al de una onda acústica reflejándose en el extremo de un tubo cerrado.
- b) Extremo del cable en circuito abierto. Este caso será el equivalente al de una onda acústica reflejándose en el extremo abierto de un tubo y se generará por tanto una onda estacionaria con un vientre en el extremo.

Por ello, las ondas estacionarias resonantes en un cable de longitud L con ambos extremos cortocircuitados serán aquellas tales que L sea un múltiplo de medias longitudes de onda, que es la separación entre nodos consecutivos. Esta condición escrita en función de la frecuencia de la onda tiene la forma:

$$f = \frac{v}{2L} n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

y en el caso de un cable con un extremo cortocircuitado y otro en circuito abierto, la condición que deberá cumplirse es:

$$f = \frac{v}{2L} n - \frac{v}{4L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Las resonancias electromagnéticas de una cavidad de paredes conductoras también puede estudiarse con el montaje que aquí se propone. En particular, las resonancias de una cavidad paralelepípeda de lados a , b y d vienen dadas por la expresión ([5] Apdo. 18.8):

$$f_{pmn} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2} \quad (5)$$

donde c es la velocidad de la luz y p , m y n son números naturales, entre los que al menos dos han de ser distintos de cero. La medida experimental de las frecuencias f_{pmn} permitirá una determinación de c , lo que resulta atractivo para los estudiantes de física y que en este caso, además, es una determinación relativamente precisa.

3. EXPERIENCIAS

La primera experiencia, que proponemos, consiste en medir las frecuencias de resonancia de un cable coaxial cuyo extremo libre dejaremos en circuito abierto. La figura 1 es un esquema del montaje experimental empleado. El cable cuyas resonancias mediremos es el cable AB. Antes de conectar el extremo A del cable al conector coaxial tipo «T», el generador de barrido y el analizador de espectros están conectados directamente. El espectro que se observa en esa situación es plano, lo que corresponde al hecho de que las ondas, salen del generador, se propagan por el cable coaxial y llegan al analizador con igual amplitud cualquiera que sea su frecuencia. En el momento que el extremo A del cable se conecta, podrá observarse la transformación que sufre el espectro de frecuencias en el que aparecerán una serie de picos de absorción.

Es importante resaltar por qué la conexión del cable AB produce esos picos en el espectro. La comparación con el espectro plano existente antes de conectar el cable AB es la clave, dado que nos indica que ahora las ondas de determinadas frecuencias no llegan al analizador, o llegan con una amplitud muy atenuada. Es fácil concluir que cada uno de los picos de absorción corresponde a una resonancia del cable AB y que el cable sólo absorbe energía de forma apreciable cuando está en resonancia, ya que las oscilaciones inducidas en el sistema van a ser mucho mayores cuando la frecuencia de excitación coincida con una resonancia. La figura 2 es un ejemplo de los espectros que pueden observarse. Es interesante observar cómo se modifica este espectro alargando el cable AB con la ayuda de un conector y otro cable, o cambiando el cable. La figura 3 muestra las frecuencias de resonancia f_n medidas en función de su número de orden en el espectro, n , para dos cables AB de longitudes L distintas. Las pendientes de las rectas obtenidas vienen determinadas por la ecuación 4. Los resultados de la figura 3 permiten una primera determinación de la velocidad de fase v , obteniéndose los valores $2,00 \cdot 10^8$ y $1,99 \cdot 10^8$ m/s para los cables de 2,16 m y 1,64 m, respectivamente.

La segunda experiencia consiste en medir las resonancias de un cable coaxial cortocircuitado. Esta experiencia puede realizarse simultáneamente con la primera. El montaje experimental propuesto anteriormente puede emplearse para medir las frecuencias de resonancia de los mismos cables, pero ahora con su extremo libre B cortocircuitado. De hecho, es interesante observar directamente en el espectro de frecuencias el cambio que se produce al conectar

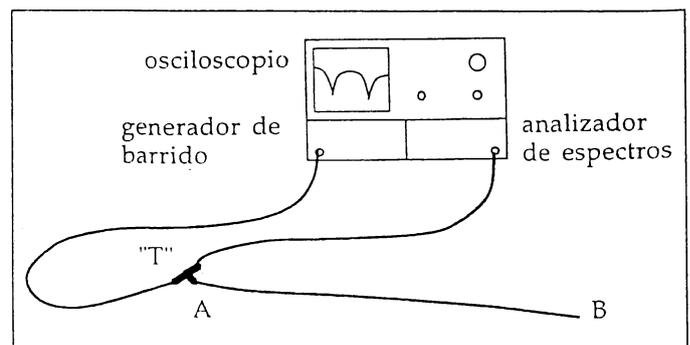


FIGURA 1. Esquema de montaje experimental para la medida de las frecuencias de resonancia del cable AB.

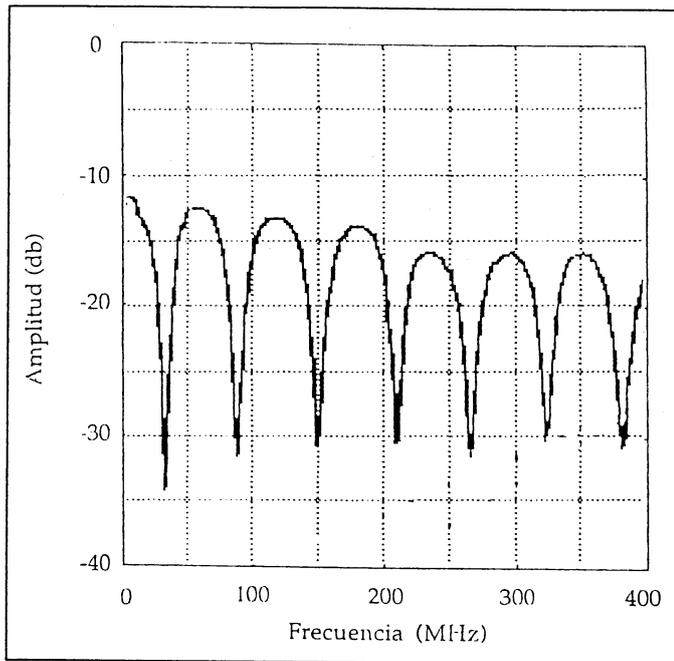


FIGURA 2.

Espectro generado por un cable coaxial de 1,64 m, con su extremo en circuito abierto. Cada resonancia produce un pico de absorción.

y desconectar un cortocircuito en el extremo B del cable. De esta observación es inmediato comprobar que el número de resonancias es el mismo, pero ahora las frecuencias correspondientes están desplazadas una cantidad constante.

La gráfica de las frecuencias f_n medidas experimentalmente en función del número de orden n , para los mismos cables que en el apartado anterior, da lugar a dos rectas que ahora pasan por el origen. La pendiente de estas rectas viene determinada por la ecuación 3, y permiten una segunda determinación de la velocidad de fase. En nuestro caso hemos obtenido $1,96 \cdot 10^8$ y $1,87 \cdot 10^8$ m/s, con los cables de longitud 2,16 m y 1,64 m, respectivamente.

Una vez estudiadas las resonancias de cables en circuito abierto y en cortocircuito, sería el momento de plantear la medida de las resonancias de un anillo de cable coaxial. El anillo se montaría a partir del esquema de la figura 1,

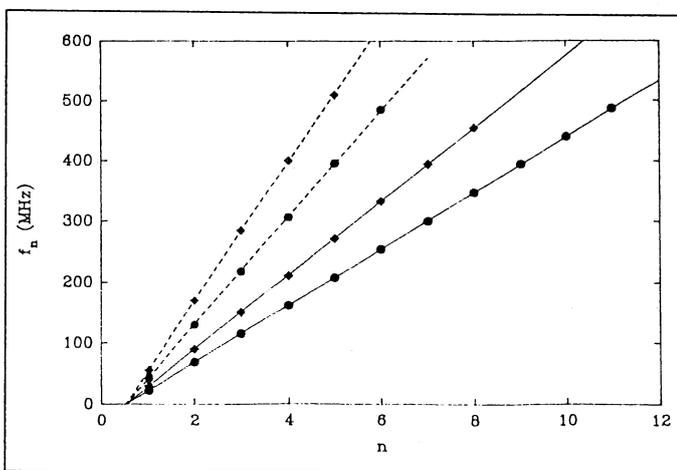


FIGURA 3.

Frecuencias de resonancia en función de su número de orden: (—) cables coaxiales con un extremo en circuito abierto (- - -) anillos de cable coaxial. Longitud de los cables: (●) 2,16 m y (♦) 1,64 m.

con la ayuda de un segundo conector tipo «T», que permitirá conectar el extremo B del cable con el A. Resulta bastante ilustrativo observar el espectro de frecuencias al mismo tiempo que se siguen los siguientes pasos: (a) no se conecta cable alguno al punto A, (b) se conecta el extremo de un cable y (c) se conecta el otro extremo formando el anillo. En el primer paso se observará el correspondiente espectro plano y en el segundo se observarán las resonancias de un cable con su extremo B en circuito abierto. En el tercer paso, al cerrar el anillo, se observará que el número de resonancias disminuye a la mitad y que están desplazadas respecto a las del cable en circuito abierto. ¿Cómo se relacionarán las resonancias del anillo con las de un cable con sus extremos en cortocircuito? Para responder a esta pregunta basta con repetir los pasos (b) y (c), pero ahora cortocircuitando el extremo B del cable en el segundo paso. Podrá observarse ahora que las resonancias del anillo coinciden exactamente con las impares del cable cortocircuitado.

Basta un simple esquema gráfico para comprender que en el anillo se propagan dos ondas en sentidos contrarios, ambas de la misma amplitud, generadas en el punto A. Por ello, sólo se superpondrán constructivamente aquellas que cumplan la condición $L = m \lambda/2$, con m impar. Esta condición reescrita en función de las frecuencias de resonancia f_n tiene la forma:

$$f_n = \frac{v}{L} n - \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Los valores experimentales de f_n , obtenidos para dos anillos de longitudes distintas, se representan en la figura 3 en función del número de orden n . Las pendientes de estas rectas permiten una tercera determinación de v , obteniéndose $1,90 \cdot 10^8$ y $1,87 \cdot 10^8$ m/s, respectivamente para los anillos de 2,16 m y 1,64 m de longitud.

Este sistema resonante, el anillo, es particularmente interesante porque puede facilitar la comprensión de la condición de cuantización del momento angular del electrón en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, desde una perspectiva electromagnética. En efecto, la ecuación 6 es la condición de cuantización de las ondas electromagnéticas en un anillo de longitud L , determinando las frecuencias posibles de una onda electromagnética en dicho anillo. De forma análoga, la hipótesis de De Broglie postula la naturaleza ondulatoria del electrón y nos permite interpretar la condición de cuantización de Bohr como una condición de resonancia del electrón en las órbitas circulares de longitud L ([6] Apdo. 31-2, [7] Apdos. 35-5 y 35-6).

Desde un punto de vista cuantitativo, el postulado de cuantización del momento angular de Bohr reescrito en función de la longitud de onda del electrón, λ , tiene la forma $L = n\lambda$ y en función de las frecuencias posibles del electrón, f_n , queda de la forma $f_n = nv/L$, donde v es la velocidad del electrón. Este resultado es muy semejante al obtenido para las resonancias de un anillo, dadas por la ecuación 6. Por una parte observamos que en ambos casos la diferencia de frecuencia entre dos resonancias sucesivas es v/L . Por otra parte, las condiciones de cuantización obtenidas se diferencian en la ordenada en el origen, o sea la condición que fija la primera resonancia, y ello es debido a que en el modelo de Bohr el electrón define una onda propagante en un sentido, mientras que en nuestros anillos de cable coaxial se generan ondas estacionarias, superposición de dos ondas con sentidos de propagación

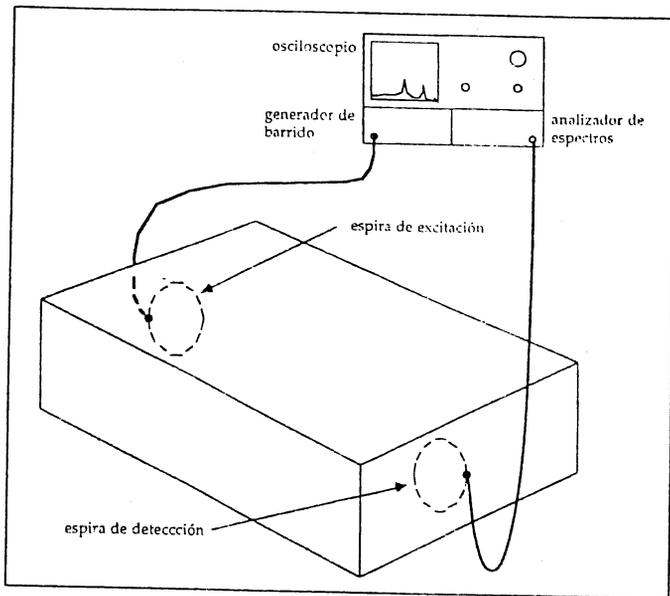


FIGURA 4.

Esquema del montaje experimental para la medida de las frecuencias de resonancias de una cavidad paralelepípeda.

opuestos y ello conduce a una condición de superposición constructiva distinta.

Cabe añadir que los casos anteriores, resonancias de cables coaxiales de longitud L , también pueden compararse con otros problemas de mecánica cuántica, por ejemplo con «pozos de potencial» monodimensionales.

La última experiencia que proponemos es la medida de las resonancias de una cavidad paralelepípeda. La figura 4 es un esquema del montaje empleado para observar las resonancias de una cavidad paralelepípeda. En nuestro caso, se ha construido una cavidad con lámina de aluminio de 2 mm de grosor, de dimensiones $a = 100$ cm, $b = 50$ cm y $d = 25$ cm, y siendo móvil una de las caras $b \times d$. Esa cara móvil puede desplazarse, por lo que el lado a resulta variable entre 0 y 100 cm. En la parte interior de las caras $b \times d$ se han insertado dos espiras de un radio aproximado de 5 cm, que incluye una resistencia de 50Ω . Una de estas espiras, conectada al generador de barrido, excita las ondas electromagnéticas en la cavidad, y la otra, conectada al analizador de espectros, hace de sonda detectora. Cuando la frecuencia de la señal de excitación coincide con una frecuencia de resonancia, se observa un pico en la señal detectada. Otra opción, igualmente sencilla y práctica, sería el estudio de las resonancias de una cavidad cilíndrica [8] Cap. 23).

La figura 5 muestra la evolución de las dos frecuencias de resonancia observadas en función de la longitud del lado a . Las pendientes de las rectas $(f_{pnm}, \frac{1}{a^2})$ nos permiten una determinación de c , obteniendo $2,97 \cdot 10^8$ m/s con el modo f_{110} y $2,91 \cdot 10^8$ m/s con el modo f_{210} .

4. CONCLUSIONES

La disponibilidad de un analizador de espectros en un laboratorio de Electricidad y Magnetismo permite realizar un conjunto de experiencias muy sencillas para ilustrar la naturaleza ondulatoria de los campos electromagnéticos no estacionarios. En particular, la medida de las frecuencias de resonancia de cables coaxiales y de una cavidad

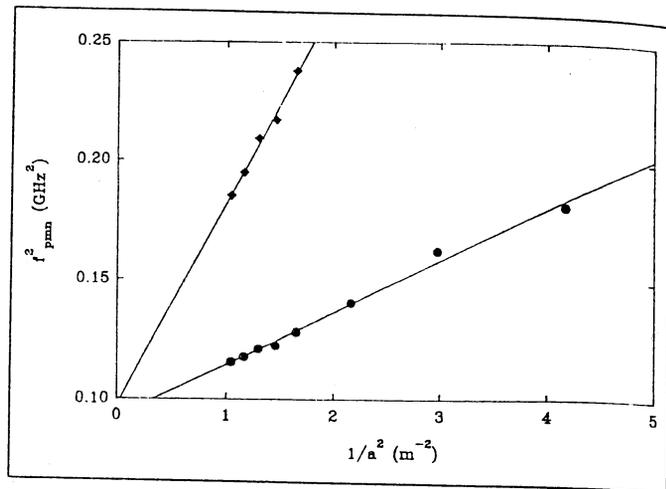


FIGURA 5.

Frecuencias de resonancia al cuadrado en función del inverso del lado mayor de la cavidad al cuadrado: (●) f_{110} , (◆) f_{210} .

paralelepípeda es especialmente simple y demostrativa. El conjunto de experiencias descrito permite promover la reflexión de los estudiantes sobre los elementos comunes con otros sistemas resonantes de naturaleza acústica, mecánico-cuántica, óptica, etc.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer a D. Teófilo Pitarch la confección de la cavidad paralelepípeda y a D. Vicente Muñoz la ayuda prestada en la preparación de este trabajo. Queremos también agradecer la colaboración de los demás miembros del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Valencia en el desarrollo de estas experiencias.

J. M. V., F. J. M. y A. G. hacen constar su agradecimiento a la Facultad de Física de la Universidad de Valencia y al Rotary Club Valencia Centro por el concurso que organizan todos los años, para el fomento del trabajo experimental entre los estudiantes de Física de la Universidad de Valencia. Este trabajo ha sido galardonado con el primer premio de la convocatoria del año 1992.

REFERENCIAS

- [1] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON y M. SANDS: *Física, Volumen I: mecánica, radiación y calor*, Addison-Wesley, 1987.
- [2] R. K. WANGSNES: *Campos electromagnéticos*, Limusa, 1989.
- [3] M. ZAHN: *Electromagnetic field theory: a problem solving approach*, John Wiley & Sons, 1979.
- [4] F. W. SEARS, M. W. ZEMANSKY y H. D. YOUNG: *Física Universitaria*. Fondo Educativo Interamericano, 1986.
- [5] J. R. REITZ, F. J. MILFORD y R. W. CHRISTY: *Fundamentos de la teoría electromagnética*, Addison-Wesley, 1986.
- [6] R. H. EISBERG y L. S. LERNER: *Física, fundamentos y aplicaciones (Vol. II)*, McGraw-Hill, 1984.
- [7] P. A. TIPLER: *Física*, Reverté, 1992.
- [8] R. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON y M. SANDS: *Física, Volumen II: electromagnetismo y materia*, Addison-Wesley, 1987.

J. M. Villalba, F. J. Manjón, A. Guirao y M. V. Andrés
están en el Departamento de Física Aplicada,
Universidad de Valencia