Tesis doctoral del Programa de Doctorado en Didácticas Específicas, especialidad en Didáctica de la Matemática

FLEXIBILIDAD Y RENDIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTIMACIÓN EN CONTEXTO REAL. UN ESTUDIO CON FUTUROS MAESTROS

Carlos José Segura Cordero

Directora: Dra. Irene Ferrando Palomares

Universitat de València - Estudi General
Facultat de Magisteri, Departament de Didàctica de la Matemàtica
Valencia

Diciembre 2021

Tesis doctoral del Programa de Doctorado en Didácticas Específicas, especialidad en Didáctica de la Matemática

FLEXIBILIDAD Y RENDIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTIMACIÓN EN CONTEXTO REAL. UN ESTUDIO CON FUTUROS MAESTROS

Carlos José Segura Cordero

Directora: Dra. Irene Ferrando Palomares

Universitat de València - Estudi General
Facultat de Magisteri, Departament de Didàctica de la Matemàtica
Valencia
Diciembre 2021

Qu'il ne lui demande pas seulement compte des mots de sa leçon, mais du sens et de la substance, et qu'il juge du profit qu'il aura fait, non par le témoignage de sa mémoire, mais de sa vie. Que ce qu'il viendra d'apprendre, il le lui fasse mettre en cent visages et accommoder à autant de divers sujets, pour voir s'il l'a encore bien pris et bien fait sien. C'est témoignage de crudité et indigestion que de regorger la viande comme on l'a avalée. L'estomac n'a pas fait son opération, s'il n'a fait changer la façon et la forme à ce qu'on lui avait donné à cuire.

Montaigne, Essais, I, 26, «De l'institution des enfants».

Doña Irene Ferrando Palomares, profesora Contratada Doctora del Departamento de Didáctica de las Matemática de la Universitat de València

CERTIFICA:

Que la presente memoria, titulada FLEXIBILIDAD Y RENDIMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ESTIMACIÓN EN CONTEXTO REAL. UN ESTUDIO CON FUTUROS MAESTROS, corresponde al trabajo realizado bajo su dirección por D. Carlos José Segura Cordero, para su presentación como Tesis Doctoral en el Programa de Doctorado en Didácticas Específicas especialidad Matemáticas en la Universitat de València.

Y para que conste firma el presente certificado en Valencia, a 14 de diciembre de 2021.

Fdo. Irene Ferrando Palomares.

Agradecimiento

We had tea in the afternoon, and our landlord's daughter, a modest civil girl, very neatly drest, made it for us... Dr Johnson made her a present of a book which he had bought at Inverness... And what was this book? My readers, prepare your features for merriment. It was Cocker's Arithmetick! Wherever this was mentioned, there was a loud laugh, at which Dr Johnson, when present used sometimes to be a little angry. One day, when we were dining at General Oglethorpe's, where we had many a valuable day, I ventured to interrogate him, 'But, sir, is it not somewhat singular that you should HAPPEN to have Cocker's Arithmetick about you on your journey? What made you buy such a book at Inverness?' He gave me a very sufficient answer. 'Why, sir, if you are to have but one book with you upon a Journey, let it be a book of science. When you have read through a book of entertainment, you know it, and it can do no more for you; but a book of science is inexhaustible.'

James Boswell, The Journal of a Tour to the Hebrides.

Sentado en el ordenador, pensando en cómo empezar unos agradecimientos que rematen la tesis, me viene a la cabeza la frase que cierra *Pickpocket* (Robert Bresson, 1959), cuando Michel, que acaba en la cárcel porque una especie de zozobra existencial le ha arrastrado al carterismo, mira como si fuera la primera vez a Jeanne, quien desde el principio le acompañó en silencio y a quien siempre respondió con desdén, exclamando: *Oh, Jeanne, pour aller jusqu'à toi, quel drôle de chemin il m'a fallu prendre.* Afortunadamente, no he practicado la delincuencia, pero confieso que siento haber dado demasiadas vueltas - físicas y mentales - hasta llegar aquí. Vuelvo al punto de salida en mi trayectoria profesional, de cuya senda me desvié pronto; y aunque el terreno de llegada es muy distinto al de partida, del análisis funcional a la educación matemática, reconozco que tiene sus ventajas: hay consenso en que el pico de creatividad matemática se alcanza antes de los cuarenta y luego empieza la decadencia, mientras que en la didáctica la experiencia es un valor porque el saber se acumula, madura y decanta con el tiempo.

Lo cierto es que tenía el ejemplo en casa, porque esa trayectoria Irene la recorrió unos años antes y sin apenas desvíos, con talento y una inmensa capacidad de trabajo. Si tengo que agradecer a alguien no sólo la finalización de la tesis, sino el durante, y por qué no decirlo, el antes y el después, es a ella. Es difícil escribir agradecimientos sin caer en el sentimentalismo o en el exhibicionismo emocional, pero no incurro en grandilocuencias si aseguro que Irene es la persona más importante que ha pasado por mi vida y que, no podía ser de otra forma, también lo ha sido en esta tesis. Como directora ha cumplido - espero no estropear su lectura desvelando el final de la tesis - con los criterios que definen la adaptabilidad: rapidez, precisión y rigor. Además, la adaptabilidad necesita de la flexibilidad, y ella sabe serlo, combinando exigencia y generosidad. Ahora tengo la ocasión de disculparme por mis arrebatos de tozudez, y de agradecer sus lecciones y correcciones. Mantener el rigor y la exigencia con la persona que compartes la vida no es sencillo y considero su caso un ejemplo moral. Tampoco es sencilla la convivencia entre el ámbito profesional y el personal, mil veces invadido; por eso quiero disculparme y dejar escrita la promesa de minimizar la invasión del trabajo en los momentos de descanso y ocio. Mi deuda se extiende, naturalmente, a nuestro hijo Claudio, que nos ha traído la plenitud a casa y crece casi tanto como nuestro orgullo y agradecimiento al mirarlo. Después de un proyecto común tan extraordinario, la envergadura de esta tesis se redimensiona. Mi voluntad de revancha es compartir con él y con Irene un tiempo precioso que, en estos últimos meses, ha sido insuficiente. Me admira su paciencia y madurez en tantos momentos en que su padre (y su madre) trabajaban. Es hora de compensarle y nada me puede hacer más feliz que tener años por delante para hacerlo.

En épocas de confusión, incertidumbre y tempestad, la familia es un asidero firme. Que la familia es el núcleo de la vida social suena a tópico, pero no hay lazos más sólidos, y es irrelevante que sean de sangre o afinidades electivas que han anudado alrededor. Quiero agradecer a mi padre y a Isa su atención y entrega infinita todos estos años, sin la que yo sería peor persona, incompleto y débil; quiero agradecer a mis hermanos (Alejandro, David, Vicente), a mi madre, su vínculo y cariño inquebrantable e inagotable; quiero agradecer a Maite y a José hacerme sentir como en casa, con esa misma incondicionalidad y seguridad que define el espacio familiar; quiero agradecer a los abuelos, aunque la mayoría ya no esté, porque alimentan mi orgullo con su orgullo; quiero agradecer a mis tíos y a todas las personas que componen eso que llamamos familia - y que suele retratarse en torno a una formidable comilona - porque el trabajo se afronta mejor en un lugar confortable y cálido. Todos vosotros, pues me leeréis, me habéis construido con las piezas que habéis ido colocando. En toda virtud que yo pueda tener os debéis reconocer; no os preocupéis por mis defectos y debilidades, esas piezas las he puesto yo solo, sin ayuda.

En la amistad no intervienen las ineluctables fuerzas de la naturaleza; al contrario, como escribió Montaigne, es un ejercicio de plena libertad con el fin de que la vida no languidezca. Su importancia es capital: amistad es todo aquello que ocurre alrededor de una cerveza, un vino o un cóctel. Media existencia, por tanto. Y la otra media incluye el sueño y las horas frente al ordenador. La pandemia nos lo quiso poner difícil - y a mí, que carezco del don de la constancia, me ha ayudado un poco con este trabajo - pero la hemos sometido: hubiera sido una época oscura, indeseable, de no contar con el apoyo de la cuchipanda, cuya amistad, apuntalada por la de nuestros hijos, sobrepasa cualquier causa extrínseca. Agradezco a todos ellos - Luisma, Eva, Lalo, Inma & Inma, Fernando - su apoyo cada día, laborables y festivos. La amistad sortea obstáculos, y aunque ahora nos veamos algo menos, también agradezco las tertulias - cinéfilas, literarias, políticas o esperpénticas - con Marcos, Ana, Raül y Celia, y los ratos con Álex y Aitor, o con Rafa, o con Juanan y Mari, como agradezco cualquier momento con amigos que van y vienen, dejando un rastro de bienestar, de Madrid - que se empeña en ser el centro de España y de nuestra diversión, gracias a Javi, Elisa, Jorge y compañía - y de otros lugares o épocas, cercanos y lejanos, porque la amistad sobrevive a encuentros esporádicos y los recuerdos asaltan imprevisibles para alegrarte la tarde un lunes cualquiera de septiembre.

El trabajo puede no ser ese lugar lúgubre al que acudimos con la única aspiración de empezar la cuenta atrás (para irnos); hay evidencias de que, bajo ciertas condiciones controladas en laboratorio, puede llegar a ser un lugar interesante. Yo debo agradecer a mis compañeros y compañeras del CEFIRE CTEM su contribución y trabajo para recrear esa atmósfera estimulante y divertida. Compartir desvelos tratando de mejorar la Educación es un buen ejercicio de confraternización. Podría decir lo mismo del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València: aunque, como profesor a tiempo parcial, lo he frecuentado menos, siempre he encontrado apoyo e interés, y no sólo de aquellos, como Marta o Jordi, con quienes he colaborado estrechamente, también del resto, y la lista es larga. Sólo puedo decir que espero, en un futuro, pasar más tiempo allí y colaborar en mantener un ambiente estimulante. Del mismo modo, en congresos, estancias y encuentros con otros investigadores e investigadoras del área, siempre he encontrado un ambiente cordial y cooperativo que es justo reconocer. En particular, me gustaría agradecer la hospitalidad de Jon en Boston y los días en pequeña comunidad con el grupo SimiS; así como, por supuesto, la atenta acogida de Lluís en Barcelona, con quien he aprendido tanto. Por suerte, esto es sólo el principio.

Después de escribir estos agradecimientos, con la vista puesta en la vida post-tesis, se impone la lógica implacable de una determinación: exprimir el tiempo, y la mejor manera de hacerlo es compartirlo con todos vosotros.

Índice de contenidos

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Parte I.

Introducción y marco teórico

1. Introducción

En este capítulo se presenta el contexto en el que ha crecido esta investigación. En la primera sección se explica de qué manera la trayectoria profesional del doctorando ha incorporado distintos intereses, sensibilidades y motivaciones; algunas han sido gratos encuentros en alguna etapa del camino, otras han tenido un desarrollo natural a partir de las primeras inquietudes e ideas relacionadas con lo que ha terminado siendo esta investigación. El punto central del trabajo son un tipo de problemas de estimación en contexto real, también llamados problemas de Fermi. En este punto confluyen distintas perspectivas didácticas que han condicionado un diseño de la investigación complejo. La confluencia se concreta en varias preguntas de investigación que se enuncian en la segunda sección del capítulo. Por último, se presenta un breve resumen de cada uno de los capítulos que componen la tesis, conduciendo a la obtención y discusión de resultados que ofrecen una respuesta fundamentada a las preguntas de investigación.

1.1. Contexto de la investigación

Toda historia tiene un comienzo y el de esta podríamos situarlo en 2010, el momento en el que comienzo a trabajar como profesor de Matemáticas en Educación Secundaria. En ese momento, cuando se entra a un aula de la ESO, uno es consciente de que la transición entre hacer Matemáticas superiores y enseñar Matemáticas en Educación Secundaria no es suave, sino un cambio abrupto. El pensamiento de los estudiantes es concreto, y la lógica deductiva, a partir de principios y estructuras generales y abstractas, no sólo les resulta ajena, sino que les plantea enormes dificultades de comprensión. Un profesor joven, con el formalismo matemático aprendido durante la licenciatura bajo el brazo, constata en su primera sesión de clase el fracaso de la matemática moderna (Kline, 1973), es decir, el error de ofrecer a los estudiantes la versión final, más acabada, formalmente perfecta, de una disciplina que, sin embargo, ha necesitado un camino tortuoso de intuiciones a partir de experiencias concretas, analogías, hipótesis y aproximaciones.

Ese profesor inexperto debe buscar alternativas a la enseñanza monumentalista de las Matemáticas, es decir, la presentación de los contenidos matemáticos como si fueran monumentos formales que contemplar y admirar, pero que, precisamente por ello, han perdido su funcionalidad (Chevallard, 2004). La alternativa pasa por transitar del desarrollo deductivo del conocimiento matemático a uno constructivo, en el que este conocimiento tiene un carácter funcional, es decir, útil para conocer el mundo y su fenomenología, como explica

Freudenthal (1968) en el coloquio del ICMI dedicado a responder a la pregunta *"How to Teach Mathematics so as to Be Useful?"*. Esa es la pregunta que se hace el profesor novato, y su trabajo es encontrar vías para dar respuesta.

1.1.1. Modelización y problemas de Fermi

Quien ahora escribe esta tesis encontró su vía en la modelización matemática, porque el camino lo tenía cerca: Irene Ferrando, que entonces no era mi directora de tesis, había empezado a trabajar en la modelización como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con su director de tesis, Enrique A. Sánchez, y otros investigadores de su grupo: Lluís García-Raffi y José Calabuig; todos ellos profesores en grados de Ingeniería de la Universidad Politécnica de València. No hacía mucho que habían fundado la revista *Modelling in Science Education and Learning (MSEL)*[1]. No formaban un grupo aislado: en los últimos 40 años - con un incremento significativo en los últimos 15 años - se han publicado numerosas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática en todas las etapas (de Primaria a Universidad); se pueden leer panoramas sobre el tema tanto a nivel internacional (Blum, 2002) como nacional (Ferrando, 2019).
La relevancia de la modelización matemática ha ido en aumento hasta desbordar lo académico y convertirse en un proceso clave dentro del currículo y los estándares educativos de muchos países del mundo, con distintas perspectivas (Borromeo-Ferri, 2014), pero compartiendo una característica esencial: la modelización puede ser descrita como una actividad que implica una transición de ida y vuelta entre la realidad y las Matemáticas (Borromeo-Ferri, 2014). Desde 2003, aparece en los estándares educativos para las Matemáticas en Alemania (Blum, Drüke-Noe, Hartung, y Köller, 2006); desde 2012, en Chile; y desde 2010 aparece como proceso explícito en los Common Core Standards en Estados Unidos: "students can apply the mathematics they know to solve problems arising in everyday life, society, and the workplace" CCSSI (2010, pp. 6-8).
Así que, en primer lugar, fue un genuino interés por la modelización matemática como docente de Secundaria lo que me llevó a participar en las II y las III Jornadas de Modelización Matemática (2010 y 2012) y a desarrollar algunos trabajos de innovación educativa; por ejemplo, la implementación, dentro del proyecto Estalmat [2], de tareas de modelización en el contexto del arte clásico (Ferrando y Segura, 2013). En esa época - entre el 2011 y el 2015- conocí, a través del profesor Richard Cabassut (Université de Strasbourg), el proyecto internacional LEMA, en el que se presentan materiales para introducir tareas basadas en situaciones reales y un curso de desarrollo profesional en modelización (Maaß y Gurlitt, 2011); y el proyecto MaSciL (*Mathematics and Science for Life*), cuyo objetivo es promover metodologías basadas en la indagación para Matemáticas y Ciencias y dar apoyo al profesorado en su desarrollo profesional (Maaß y cols., 2015). Estos materiales de apoyo me permitieron

[1] `https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL`
[2] `https://estalmatcv.blogs.uv.es/`

introducir tareas relacionadas con la experiencia de los estudiantes, que permiten construir su propia comprensión de las situaciones problemáticas, en lugar de comenzar con algoritmos y fórmulas (Gravemeijer, 1994).
El énfasis del aprendizaje a través de tareas de contexto real radica en la creación de sentido matemático y en el refinamiento progresivo de estrategias informales, hasta llegar a la generalización y la formalización (Dickinson y Hough, 2012). Precisamente, salir de los contextos puramente matemáticos y relacionarse con el mundo real es una condición para que los estudiantes desarrollen competencias generales y de pensamiento crítico (Blum y Niss, 1991). Este enfoque se relaciona con la *mathematical literacy*, traducida en nuestro país como alfabetización matemática o como competencia matemática, que Niss (2003) define como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden jugar un papel. El enfoque competencial - y en particular la resolución de problemas de contexto real como base del aprendizaje matemático - no es sólo el que me interesaba como profesor, también es el promovido por la OCDE a través del informe PISA realizado por la OCDE (2006; 2014) y que ha llevado al diseño curricular de las últimas leyes educativas en España, la Ley Orgánica de Educación LOE, la LOMCE (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2014) y la reciente LOMLOE (Ministerio de Educación, 2020). Resumiendo, la resolución de problemas es la base de la alfabetización matemática, cuyo objetivo es formar ciudadanos preparados para comprender el mundo, y por tanto, es un dominio esencial para la mejora de la enseñanza de las Matemáticas (Lott, 2007).
Entre 2011 y 2016, César Gallart estaba trabajando en su tesis doctoral bajo la dirección de Irene Ferrando, en la que se estudia el papel clave que desempeña la modelización en el desarrollo de la competencia matemática (Gallart, 2016). Se trata de un trabajo que, entre otros, incluye resultados que constituyen un precedente importante de esta tesis doctoral, sobre estrategias de lo que se conoce como problemas de Fermi.
Antes de escribir sobre los problemas de Fermi debo destacar la importancia del contacto de Irene Ferrando y César Gallart con Lluís Albarracín, de la Universitat Autònoma de Barcelona, quien ha dedicado gran parte de su investigación, incluida su tesis doctoral, a esta clase de problemas. Ese contacto se extendió, posteriormente, también a mí, por lo que sus trabajos juegan un papel relevante en esta tesis. En su tesis, siguiendo a Ärleback (2009), se define problema de Fermi, que también llama Problema de Estimación de Magnitudes No Abarcables (PEMNA), como:

> una tasca plantejada a un alumne en la que, sense un procediment, algorisme o esquema previ que porti a la seva resolució, ha d'estimar el valor d'una magnitud no abastable amb l'objectiu de crear significat per a aquesta magnitud
>
> Albarracín, 2011, p.59.

Pensemos en la cadena humana que se formó en 1989, cruzando las tres repúblicas bálticas

(Estonia, Letonia y Lituania), para reclamar la independencia de esos territorios de la Unión Soviética. Si nos preguntamos cuánta gente se dio la mano para formar la Cadena Báltica, tenemos un problema de Fermi, PEMNA o, simplemente, problema de estimación en contexto real. Schoenfeld (2014) describe el primer estudio sobre resolución de problemas que incluyó los problemas de Fermi - propone a estudiantes estimar cuántas células componen el cuerpo humano - y aunque no examina las características propias de este tipo de problemas, documenta las estrategias de resolución que emplean los alumnos. Este tipo de problemas se caracterizan por parecer difusos, porque plantean situaciones reales sin datos o con poca información, en las que los hechos no ofrecen una vía explícita para la obtención de la estimación (Efthimiou y Llewellyn, 2007). Carlson (1997) describe la resolución de un problema de Fermi como el método de obtener una aproximación rápida a un proceso matemático en apariencia complejo mediante una serie de hipótesis y cálculos simplificados. Este proceso de resolución puede describirse mediante el ciclo de modelización (Albarracín y Gorgorió, 2014). De hecho, los problemas de estimación en contexto real pueden utilizarse como medio para iniciar a los estudiantes, incluso en la etapa de Primaria, en la elaboración de modelos matemáticos (Borromeo-Ferri, 2018).

La tesis de Albarracín (2011) presenta un estudio sobre la resolución de PEMNA o problemas de Fermi, en la que se caracterizan las estrategias de resolución de alumnos de Educación Secundaria, se relaciona el tipo estrategia desarrollado por el estudiante y su éxito en la resolución, y se estudia la influencia del contexto sobre las estrategias propuestas en las resoluciones. Por su carácter exploratorio, este trabajo ha abierto caminos fecundos de investigación; en particular, como se ha dicho, a partir de la tesis de Gallart se avanzó proponiendo una primera versión de una herramienta para analizar las producciones de los estudiantes de Secundaria (Gallart, Ferrando, García-Raffi, Albarracín, y Gorgorió, 2017), identificando y distinguiendo aspectos diferenciadores entre las resoluciones producidas por estudiantes con experiencia previa en tareas de modelización y las producidas por estudiantes sin experiencia modelizadora (Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi, y Gorgorió, 2017). Esta tesis doctoral también es una prolongación de esos caminos de investigación, aunque incorpora - como se explicará - otros temas (flexibilidad y adaptabilidad) y sus sujetos de investigación son los futuros maestros de Educación Primaria. Los problemas de estimación de grandes cantidades en contexto real empleados en esta tesis son un subconjunto de los problemas de Fermi: aquellos problemas que requieren estimar un gran número de elementos en una superficie delimitada real, como conocer el número de personas que caben en una plaza pública. Uno de los objetivos de investigación de este trabajo es encontrar si existe una relación estadísticamente significativa entre las características del contexto y el tipo de resolución categorizada. Además, se pretende explorar si el tipo de contexto también influye en la incorporación de factores de complejidad en las resoluciones, que se refieren a los elementos de la resolución - por ejemplo, eliminar obstáculos - con los que se pretende obtener una estimación más precisa. A continuación explicaremos las motivaciones que llevaron a escoger a los futuros maestros como sujeto de estudio, y las motivaciones que llevaron a ampliar los trabajos citados sobre relación entre estrategias, contexto y problemas de Fermi, al ámbito de la flexibilidad y la adaptabilidad.

1.1.2. Conocimiento del profesor y sus dificultades con los problemas de modelización

La siguiente parada relevante en el trayecto profesional que va definiendo esta tesis se sitúa en el año 2015, cuando empiezo a trabajar como asesor de formación del profesorado en el CEFIRE Específico de Ámbito Científico, Tecnológico y Matemático (CTEM). Tenía como cometido diseñar, organizar y coordinar la formación continua del profesorado de la Comunidad Valenciana en el área de Matemáticas. Apoyado en los argumentos explicados con anterioridad, establecí la modelización matemática como una de las líneas formativas estratégicas. El primer reto era desarrollar acciones formativas sobre modelización matemática, a la manera del proyecto europeo LEMA (Learning and Education in and through Modelling and Applications), que había sido tan útil en mi autoformación [3] . El año 2015 también accedí a una plaza de profesor asociado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, por lo que aumentó mi interés en la investigación en Educación Matemática, de manera que la colaboración con Irene Ferrando no se iba a limitar al diseño del curso de modelización para el CEFIRE Específico CTEM, sino que nuestro propósito también era investigar sobre la formación del profesorado en problemas de contexto real. En ese momento aún no estaba clara la idea de tesis doctoral, aunque era una opción que ya estaba valorando; la primera idea - que luego se transformó en la actual - era fundamentar el diseño de un curso de formación en línea para profesorado sobre modelización (Cabassut y Ferrando, 2017; Ferrando, Segura, y Pla-Castells, 2017a, 2017b) y continuar después investigando sobre dificultades del profesorado para diseñar, implementar, gestionar y evaluar este tipo de tareas.

Es necesario incorporar formación al desarrollo profesional docente para sensibilizar a los profesores sobre los beneficios del uso de contextos reales en Matemáticas y para asesorar en cómo explotar metodológicamente estos contextos en las clases de forma eficaz (Hough, Solomon, Dickinson, y Gough, 2017). Una de las aproximaciones metodológicas más eficaces es la modelización matemática. La enseñanza de la modelización requiere un abanico de estrategias pedagógicas más amplio que el que utilizan la mayoría de los profesores al impartir el plan de estudios esencialmente imitativo que domina las aulas en muchos países (Burkhardt, 2006), por ejemplo, el conocimiento de las estrategias y procesos de la modelización, el diseño de tareas ricas, la cesión de la responsabilidad a los alumnos resolutores, la aportación de orientaciones que guíen al estudiante en la resolución del problema sin darles un proceso estructurado que seguir, etc. Muchos profesores no son capaces de diagnosticar las necesidades de sus estudiantes y darles retroalimentación; pero aquellos docentes que

[3] En otoño de 2016 tuve la oportunidad de visitar al profesor Cabassut en Estrasburgo, donde conocí el centro de formación de profesores y su organización de la formación inicial y continua.

han recibido formación sobre diagnóstico y retroalimentación en tareas de modelización se desempeñan mejor con sus alumnos (Klieme y cols., 2010; Blum, 2011).

Borromeo Ferri y Blum (2009, 2010) proponen un modelo de competencias necesarias para enseñar modelización matemática, basado en cuatro dimensiones: dimensión teórica; dimensión de la tarea; dimensión de la instrucción; y dimensión del diagnóstico. Estas dimensiones y sus competencias concretas se tuvieron en cuenta para el diseño del curso de modelización del CEFIRE Específico CTEM. En este punto, debo destacar un acontecimiento que amplió nuestra perspectiva sobre la competencia del profesor de Matemáticas: la visita a nuestra universidad de Heather Hill y Jon Star, profesores de Harvard University, para impartir una charla sobre instrumentos de evaluación del desempeño del profesor de Matemáticas . Después tuvimos una reunión, en la que decidimos colaborar con ellos para estudiar la actuación del profesor de Matemáticas de Secundaria en España, lo que condujo a que conociéramos más sobre modelos de conocimiento y competencia del docente.

Hill y cols. (2008) desarrollaron una herramienta de evaluación de vídeos validada, llamada *Mathematical Quality of Instruction* (MQI), que recoge tres dominios de interacción: profesor-contenido, profesor-estudiante y estudiante-contenido. Este instrumento de observación y evaluación está relacionado con el modelo MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*), desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008) a partir de la caracterización propuesta por Shulman (Shulman, 1986) del conocimiento del profesor en tres dominios: el conocimiento del contenido; el conocimiento pedagógico del contenido; y el conocimiento pedagógico. Así, el modelo MKT considera el conocimiento matemático para la enseñanza constituido por dos dominios, el conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido. Ball y cols. (2008) han enfatizado la importancia del conocimiento del contenido matemático como parte de la competencia del profesor de Matemáticas, que en el MQI corresponde al dominio profesor-contenido, compuesto por dos dimensiones: errores e imprecisión; y riqueza de las Matemáticas, tanto relativo a las explicaciones como a las tareas propuestas.

El contacto con los profesores Hill y Star nos condujo, en 2017, a concretar quién era el sujeto de la tesis doctoral y qué aspecto general queríamos estudiar: decidimos centrarnos en los futuros maestros y en un dominio de la competencia docente: el conocimiento del contenido, y en particular, el conocimiento en resolución de problemas, empleando los problemas de estimación contextualizados. El proyecto de emprender una tesis doctoral dirigida por Irene Ferrando quedó claro en ese momento; faltaba concretar qué habilidades en resolución de esta clase de problemas de modelización queríamos estudiar, y en este sentido, el encuentro del 2016 también fue fructífero, pues nos hizo poner el foco en el razonamiento flexible.

1.1.3. Flexibilidad y adaptabilidad en resolución de problemas

En junio de 2017 se constituyó el grupo *Studying and improving Mathematics instruction in Secondary schools in Spain*[4] (SiMiS), liderado por los profesores Jon Star y Nuria Joglar. Nuria Joglar (Universidad Complutense de Madrid) tuvo la idea de crear, junto a Jon Star, un grupo de estudio afiliado al Real Colegio Complutense en Harvard, para trabajar sobre el análisis del rol de profesor de Matemáticas en España. Irene Ferrando y yo formamos parte del grupo, lo que nos permitió conocer mejor el trabajo de Jon Star, quien está particularmente interesado en la flexibilidad matemática. Las reuniones durante el 2017 con el profesor Star, y sobre todo la estancia en Harvard el verano de 2018, nos permitió incorporar la tercera idea central de este trabajo: la flexibilidad y la adaptabilidad en la resolución de problemas.

Una definición sencilla de flexibilidad es el conocimiento de más de una estrategia para resolver un tipo de problema concreto (Heirdsfield y Cooper, 2002). Star (2005) señala que ha habido una confusión que identifica lo conceptual con conocimiento profundo y lo procedimental con conocimiento superficial, pero defiende que existe un conocimiento procedimental profundo y menciona la flexibilidad como ejemplo de componente clave del mismo. Además, el uso flexible de estrategias es un indicador, desde una perspectiva psicológica, de la variabilidad cognitiva, que permite a los individuos resolver problemas rápidamente y con precisión (Heinze, Star, y Verschaffel, 2009). Desde una perspectiva educativa, la flexibilidad está considerada un aspecto importante de la competencia matemática, pues es necesaria para que los estudiantes adquieran la habilidad de adaptar sus resoluciones a las características de la tarea o del contexto (Kilpatrick, 2001). En particular, es un componente crucial de la competencia en resolución de problemas (Dowker, 1992; Dowker, Flood, Griffiths, Harris, y Hook, 1996; Star y Newton, 2009). Schukajlow, Krug y Rakoczy (2015) han mostrado que el uso de soluciones múltiples en problemas de modelización es una vía efectiva para mejorar su actuación.

Aunque algunos autores incorporan la noción de adaptabilidad dentro de la de flexibilidad (Star y Rittle-Johnson, 2008), otros diferencian entre el uso flexible de estrategias, que se refiere a la capacidad para escoger entre diferentes estrategias –sin seleccionar necesariamente la más adecuada–, y el uso adaptativo de las estrategias, que implica la selección de la más adecuada a un problema concreto (Heinze y cols., 2009). En el trabajo planteado en esta tesis doctoral se sigue esta diferenciación para los problemas de estimación en contexto real; aún más, se adapta la distinción de dos tipos de flexibilidad en resolución de problemas propuesta por Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009): flexibilidad inter-tarea (cambio de estrategia entre problemas) y flexibilidad intra-tarea (cambio de estrategia dentro de un problema).

[4]véanse `https://simisrcc.wordpress.com/` y `https://rcc.harvard.edu/studying-and-improving-mathematics-instruction-secondary-schools-spain-simis`

1.1.4. Tesis doctoral

El recorrido profesional descrito tiene su fin y cristalización en el plan de investigación para el desarrollo de esta tesis doctoral (curso 2017-18), y en el posterior diseño experimental de las experiencias implementadas los cursos 2017-18, 2018-19 y 2019-20. A partir de 2017, por tanto, comienza una nueva etapa, propiamente investigadora.

Como se ha visto, esta tesis pretende ser una aportación al estudio del conocimiento del contenido matemático de los futuros maestros de Educación Primaria. Se ha destacado la importancia de las tareas de modelización como herramienta de enseñanza y aprendizaje de unas Matemáticas competenciales, y de los problemas de estimación contextualizados (o problemas de Fermi) como vía de introducción de este tipo de tareas. Por lo tanto, dentro del conocimiento del contenido matemático, se pretende estudiar la competencia en resolución de problemas de estimación de contexto real en los futuros maestros.

Se ha visto también que la flexibilidad y la adaptabilidad son unas componentes cruciales de la competencia en resolución de problemas. La categorización de las resoluciones de los estudiantes a los problemas de estimación de contexto real (Ferrando, Albarracín, y cols., 2017) permite verlos como *Multiple Solution Tasks* (Leikin y Levav-Waynberg, 2008); es decir, problemas abiertos, pero con un número limitado de soluciones, todas ellas conocidas, "controladas" dentro de la categorización. Además, el estudio exploratorio de Albarracín (2011) apunta a que puede existir una influencia del contexto en la resolución escogida por los estudiantes. Esto nos ha permitido formular la hipótesis de que es posible identificar unas variables de contexto y diseñar una secuencia de problemas de Fermi que promueva el uso de distintas estrategias de resolución.

Afinando la idea de la tesis: la finalidad principal es estudiar el desempeño, y en particular, el uso flexible de los planes de resolución, de los futuros maestros cuando resuelven una secuencia de problemas de estimación en un contexto real. Para ello, es necesario analizar los tipos de resolución empleados, la relación entre características del contexto y tipo de plan de resolución, medir los cambios de tipo de resolución, y analizar los errores, lo que conduce a estudiar si existen relaciones entre flexibilidad y rendimiento de los futuros maestros. En este estudio, de naturaleza observacional (Yin, 2009; Lodico, Spaulding, y Voegtle, 2010), se utilizarán secuencias de problemas de estimación en contexto real y otros instrumentos de recogida de datos como cuestionarios. Como se explica en el Capítulo 3, se combinarán métodos cualitativos y cuantitativos para poder responder a las preguntas de investigación que se derivan de los fines de la investigación.

1.2. Preguntas de investigación

El estudio del contexto, de la flexibilidad y adaptabilidad en la resolución de problemas de estimación de contexto real, conlleva una serie de cuestiones y derivaciones que se formulan a continuación en forma de preguntas de investigación, que se clasifican en varios dominios:

descripción de los planes de resolución y las resoluciones de los futuros maestros; influencia del contexto y la estructura del problema en el tipo de resolución; uso flexible de las resoluciones; influencia del trabajo experimental en el lugar del problema; errores y rendimiento de los futuros maestros; flexibilidad y relación con el rendimiento; adaptabilidad de las resoluciones.

P1- ¿Cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real?

P2- ¿Hay alguna influencia del contexto y de la estructura del problema en la resolución desarrollada por los futuros maestros para los problemas de estimación de contexto real?

P3- ¿En qué medida la resolución experimental en lugar físico del problema influye en las resoluciones?

P4- ¿Qué rendimiento tienen los futuros maestros cuando resuelven problemas de estimación en contexto real?

P5- ¿Son los futuros maestros flexibles en la resolución de problemas de estimación en contexto real?

P6- ¿Existe relación entre flexibilidad de futuros maestros y su rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real?

P7- ¿Cómo hacen los futuros maestros un uso adaptativo de sus resoluciones en los problemas de estimación en contexto real?

1.3. Sumario de la tesis doctoral

Esta tesis doctoral dará respuesta a las preguntas de investigación formuladas en la sección anterior.
En el Capítulo 2 se desarrollan las teorías, conceptos, investigaciones y antecedentes sintetizados en la primera sección de este capítulo para describir el contexto de la investigación, configurando el marco teórico de esta tesis.
En el Capítulo 3 se explica el diseño de la investigación de la que se ocupa esta tesis doctoral. La respuesta a las preguntas de investigación, que recogen y conectan distintos enfoques, exige un diseño de investigación complejo, compuesto por varias investigaciones y experiencias (ver Figura **3-2**). También demanda una combinación de enfoques metodológicos cualitativos y cuantitativos, que son justificados en este capítulo.
En el Capítulo 4 se justifica el diseño de los instrumentos de recogida de datos (secuencia 1, secuencia 2, cuestionario post-experiencia, cuestionario de expertos); se describen las experiencias que componen la investigación (experiencia A1, experiencia A2, investigación B,

investigación C); y se explican y justifican las herramientas metodológicas utilizadas en el proceso de análisis (categorizaciones, triangulación, codificaciones, etc.).
En el Capítulo 5 se exponen los resultados de las distintas experiencias que componen el diseño experimental de esta tesis. Se organizan en torno a doce objetivos de investigación que permitirán construir las respuestas a las preguntas de investigación. Se abordan, por tanto: los resultados del análisis de los tipos de plan de resolución; el análisis de la relación entre tipo resolución y las características del contexto; el estudio de la influencia del trabajo grupal e *in situ*; el análisis de errores y la definición de los niveles de rendimiento; el análisis de la flexibilidad inter-tarea e intra-tarea; el análisis de la relación entre flexibilidad y rendimiento; y la fundamentación de unos criterios de adaptabilidad para los problemas de estimación en contexto real.
En el Capítulo 6 se responde a las preguntas de investigación, estableciendo conclusiones a partir de los resultados, relacionándolas con estudios del marco teórico, señalando limitaciones y debilidades del trabajo y apuntando líneas de trabajo para el futuro.

2. Marco teórico

Este capítulo muestra un amplio panorama que recoge las diferentes consideraciones teóricas, temas de investigación, conocimientos y antecedentes que sustentan esta tesis doctoral, es decir, que permiten definir y justificar los problemas de investigación planteados, ubicar este estudio en el área de la Didáctica de las Matemáticas, llevar a cabo el diseño y la implementación del marco metodológico, y establecer unos resultados y conclusiones.

En la primera sección se introducen las bases didácticas sobre las que se plantea esta investigación: la Educación Matemática Realista y la competencia matemática. El enfoque realista y competencial de la enseñanza y el aprendizaje requiere un docente que domine los procesos matemáticos a partir de contextos y de la resolución de problemas. En este sentido, en la segunda sección, se habla del conocimiento del profesor, de modelos de competencia en la docencia de Matemáticas y de las necesidades formativas de los maestros de Educación Primaria. Al final de la sección se pone el foco, por su relevancia, en la resolución de problemas; en particular, en la necesidad de mejorar la competencia del maestro de Primaria en resolución de problemas de contexto real.

En la tercera sección se aborda de manera general la resolución de problemas y, en particular, la resolución de problemas de modelización. Partiendo de los problemas verbales, se hace un recorrido por problemas abiertos, reales y complejos, para caracterizar los problemas de modelización. También se presenta una descripción de los procesos de resolución de este tipo de problemas, mediante el ciclo de modelización. Por último, se presentan algunos estudios sobre dificultades y errores del profesorado en resolución de problemas de modelización. En la cuarta sección el foco se pone en los problemas de estimación en contexto real. Se destaca la importancia que juega en estos problemas el sentido de la medida y de la estimación, y se describen las dificultades y errores del profesorado en relación a estas habilidades. A continuación, se abordan los problemas de Fermi como un tipo concreto de problema de modelización en el que la estimación de medidas juega un papel relevante. Por último, se describen los trabajos previos sobre análisis de las resoluciones de un tipo concreto de problemas de Fermi, aquellos que consisten en estimar un gran número de elementos en una superficie delimitada.

Finalmente, en la quinta sección se aborda la flexibilidad en la resolución de problemas. Se discuten las distintas caracterizaciones de flexibilidad y su importancia como componente de la competencia matemática. Se específica la diferencia entre flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea. Por último, se define adaptabilidad y se contraponen los estudios sobre flexibilidad y adaptabilidad en resolución de problemas intra-matemáticos al estudio de la flexibilidad y la adaptabilidad en resolución de problemas reales, en los que las características del contexto del problema son un factor de influencia.

2.1. La Educación Matemática Realista y el enfoque competencial

2.1.1. La Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR) fue la respuesta holandesa a la necesidad de reformar la enseñanza de las Matemáticas, como reacción tanto a la llamada Matemática Moderna como a la enseñanza mecánica y algorítmica de las Matemáticas. Se configura en los años setenta del pasado siglo, a partir de la visión de la disciplina de su figura más relevante en ese momento, Hans Freudenthal, quien más que formular una teoría sobre la Educación Matemática, desarrolló una idea de las Matemáticas como actividad humana (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Para Freudenthal (1977) las Matemáticas que se enseñan y se aprenden en la escuela deben estar conectadas con la realidad, ser cercanas a la experiencia de los estudiantes y ser relevantes para la sociedad. La Educación Matemática debe ofrecer a los alumnos la oportunidad de reinventar de forma guiada las Matemáticas mediante su práctica (De Corte, Greer, y Verschaffel, 1996). Esto implica un acercamiento a la disciplina no como sistema cerrado, sino como un *proceso de matematización* (Freudenthal, 1968). Siguiendo esta visión, Treffers (2012) distingue dos tipos de matematización en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: la *horizontal* implica que los estudiantes extraigan y cuantifiquen información relevante de una situación real, encuentren y usen herramientas y estrategias informales para organizar la resolución de un problema de contexto real; mientras que la *vertical* es un proceso de reorganización dentro del propio sistema matemático de tipo simbólico-formal, encontrando conexiones entre conceptos y estrategias para su formalización.
Según recoge De Lange (1996), la EMR se basa en las siguientes características, conectadas con las teorías socio-constructivistas:

- Los contextos como vehículos para el tránsito de lo concreto a lo abstracto.
- La modelización como eje del proceso de matematización.
- El fomento de producciones libres de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
- El trabajo integrado de los distintos bloques de contenido del currículo de Matemáticas.

Algunos trabajos (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Puig 1997) ahondan en estas características para fundamentar la EMR en el análisis fenomenológico. Esta fundamentación del

aprendizaje de la Matemática como constitución de objetos mentales puede sistematizarse en seis principios, que tomamos de la síntesis de Alsina (2009):
1) *Principio de actividad*: las Matemáticas se conciben como una forma de actividad humana, cuyo fin es matematizar - es decir, organizar, generalizar y formalizar - el mundo.
2) *Principio de realidad*: el aprendizaje de las Matemáticas se da desde el trabajo en contextos reales, es decir, resolviendo situaciones problemáticas relacionadas con la vida y/o la experiencia del estudiante.
3) *Principio de niveles*: a través de la matematización de situaciones reales, los estudiantes recorren un camino de lo concreto a lo abstracto en varios niveles de comprensión: situacional (entender el contexto), referencial (esquematizar, simplificar la realidad), general (explorar, geometrizar) y formal (conectar con conceptos matemáticos, resolver simbólicamente).
4) *Principio de reinvención guiada*: el proceso de matematización, guiado por el profesor, conlleva una reconstrucción activa de los estudiantes del conocimiento matemático formal.
5) *Principio de interacción*: la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas es una actividad social que produce aprendizaje a través de interacciones - y posterior reflexión individual - entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.
6) *Principio de interconexión*: el trabajo matemático a partir de contextos reales implica que los bloques de contenido matemático no pueden tratarse separadamente, pues las situaciones problemáticas exigen desarrollar contenidos matemáticos interrelacionados.
En resumen, la EMR plantea una alternativa a la aproximación mecanicista de las Matemáticas, que presenta la disciplina como un cuerpo cerrado, en el que:

> mathematics was taught directly at a formal level, in an atomized manner, and the mathematical content was derived from the structure of mathematics as a scientific discipline. Students learned procedures step by step with the teacher demonstrating how to solve problems. This led to inflexible and reproduction-based knowledge
>
> Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020, p.521.

Frente a este enfoque, EMR propone una visión funcional, en el que la disciplina se aborda como un conjunto de procesos de matematización abiertos que, utilizando situaciones reales como punto de partida, avanzan - esquematizando, modelizando, formalizando - hacia la abstracción. Esta oposición se corresponde con el cambio de paradigma pedagógico que propone Chevallard (2015), pasando del monumentalismo, centrado en presentar a los alumnos un conjunto de contenidos aislados y poco funcionales, a un paradigma basado en el "cuestionamiento del mundo" (Barquero, Bosch, y Gascón, 2011).

2.1.2. Alfabetización matemática y competencia matemática

El enfoque funcional de la EMR se recoge en la noción de *mathematical literacy* o competencia matemática, que PISA define como:

> una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.
>
> OCDE, 2006, p.74.

El mismo documento explica después la relación entre funcionalidad y competencia de forma explícita:

> el término «competencia matemática» se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter funcional del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos.
>
> OCDE, 2006, p.74.

Niss y Jablonka (2014) afirman que una de las primeras veces que se empleó el término *mathematical literacy* fue en 1944, en un documento del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) sobre los Planes de Posguerra, que exige que la escuela garantice la *mathematical literacy* [alfabetización o competencia matemática] a todos los que puedan alcanzarla (NCTM, 1989, p. 244). Posteriormente, en 1989 los Standards del NCTM se proponen cinco objetivos generales para alcanzar la *mathematical literacy* en todos los estudiantes:

> (1) that they learn to value mathematics, (2) that they become confident with their ability to do mathematics, (3) that they become mathematical problem solvers, (4) that they learn to communicate mathematically, and (5) that they learn to reason mathematically.
>
> NCTM, 1989, p.5.

En la literatura sobre Educación Matemática se encuentran nociones relacionadas con *mathematical literacy*, como *numeracy*, *quantitative literacy*, *critical mathematical literacy*, *mathemacy* o *mathematical competence*. Para Niss y Jablonka (2014), hay una diferencia de matiz entre *literacy* y *competence*: la primera se asocia a una educación básica, para toda la ciudadanía, focalizada en resolución de problemas no matemáticos, conectando alfabetización matemática y participación democrática; mientras que la competencia matemática pone el foco en el dominio las Matemáticas, incluida la capacidad de resolver problemas tanto matemáticos como no matemáticos. En consonancia con la distinción anterior, Kilpatrick (2001,2014) ofrece una definición de competencia matemática más académica y centrada en el dominio, a través de cinco componentes:

a) la *comprensión conceptual*, que se refiere a la comprensión por parte del estudiante de los conceptos y relaciones matemáticas;

b) la *fluidez procedimental*, esto es, la habilidad del estudiante para llevar a cabo procedimientos matemáticos de forma flexible, precisa, eficiente y adecuada;

c) la *competencia estratégica*, que es la capacidad del alumno para formular, representar y resolver problemas matemáticos;

d) el *razonamiento adaptativo*, la capacidad de pensamiento lógico y de reflexión, de uso de argumentos matemáticos;

e) la *disposición productiva*, que incluye la inclinación habitual del alumno a ver las Matemáticas como algo valioso, que merece la pena aprender.

Sin embargo, otros autores (Sol, 2009; Goñi, 2011; Blanco, 2012) se orientan hacia la idea de competencia matemática como aplicación de conocimientos, habilidades y actitudes en distintas situaciones o contextos. En este segundo enfoque, similar al de PISA, no hay una diferencia notable entre *mathematical literacy* y *mathematical competence*, que se da "cuando el individuo trata de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes" (Rico, 2007, p. 50). Goñi (2009) sintetiza de manera general la idea de competencia como uso eficiente y responsable del conocimiento para hacer frente a situaciones problemáticas relevantes, diferenciando "saber" y "saber usar". Reducir la noción de alfabetización o competencia a lo puramente instrumental, a la aplicación de conceptos y técnicas, es una simplificación. La noción de competencia matemática como una manera de entender el mundo - haciendo frente a situaciones problemáticas - implica no sólo usar las Matemáticas, también comunicar, relacionarse, apreciar y disfrutar con las Matemáticas (Rico, 2006). El proyecto KOM (Niss, 2003), encargado en el año 2000 de la reforma de las asignaturas de Matemáticas en el sistema educativo danés, ofrece la versión más completa de competencia matemática; Niss y Højgaard (2011) la definen como "la capacidad de entender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticas en las que éstas juegan o podrían desempeñar un papel". Además, en el proyecto KOM (Niss, 2003) se despliega la competencia matemática en ocho competencias específicas agrupadas en dos dominios de competencias:
I) Aquellas relacionadas con la habilidad de formular y responder preguntas en y con las matemáticas:

1. Pensar matemáticamente.

2. Plantear y resolver problemas matemáticos.

3. Modelizar matemáticamente.

4. Razonamiento matemático.

II) Aquellas relacionadas con la capacidad para afrontar y gestionar el lenguaje y las herramientas matemáticas:

5. Representación de entidades matemáticas.
6. Manejo de símbolos matemáticos y formalismos.
7. Comunicar en, con y sobre las matemáticas.
8. Utilización de recursos y herramientas.

Cada una de estas ocho competencias específicas tiene un lado analítico y uno productivo. El lado analítico implica la comprensión e interpretación de las Matemáticas, mientras que la parte productiva consiste en la construcción de procesos matemáticos y su uso a partir de situaciones (Niss, 2003). El lado productivo está ligado a la habilidad de plantear, resolver e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones o contextos. De este modo, la resolución de problemas es un aspecto esencial para formar ciudadanos que comprendan el mundo en el que viven y, por tanto, debe ser una de las direcciones en las que se debe mejorar la enseñanza en las escuelas (Lott, 2007). Para mejorar la enseñanza en resolución de problemas se necesita formar docentes que sepan guiar el proceso de matematización a partir de una variedad de situaciones problemáticas en contextos; en particular, también maestros de Educación Primaria capaces de hacerlo. Sin embargo, se han detectado numerosas dificultades en implementar de forma sostenible estos enfoques de enseñanza competencial y basada en la resolución de problemas (Artigue y Blomhøj, 2013). Para afrontar estas dificultades resulta útil conocer los modelos de conocimiento del docente y de su competencia profesional.

2.2. El conocimiento del profesor de Matemáticas

2.2.1. Modelos de conocimiento del profesor

Una enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas cuyo fin es el desarrollo de la competencia matemática requiere que el profesor sea capaz de ayudar al estudiante a saber y a hacer Matemáticas; es decir, el docente debe ser competente en el trabajo de enseñar Matemáticas (Wilson, Heid, Zbiek, y Wilson, 2010). Hay una larga investigación sobre qué clase de conocimiento debe adquirir el docente para ser competente en su trabajo. Las primeras investigaciones sobre conocimiento de los docentes trataron de relacionar estadísticamente las horas de asignaturas que había cursado en el grado o licenciatura relacionadas con la materia que impartía o sus notas medias en el grado o licenciatura con los resultados de sus estudiantes (Begle, 1972; Hunkler, 2016; Dunkin y Biddle, 1974), pero dichas relaciones eran débiles o nulas. Conant (1963) había advertido que la adquisición de un grado o licenciatura no implica que se haya desarrollado un conocimiento profundo de la materia relacionada con dicho título, pero sólo a partir de los años ochenta existe un consenso en esa dirección. Dewey (1983) apuntó tempranamente que existen diferencias entre conocer la materia y conocer la materia para enseñar:

> Every study or subject thus has two aspects: one for the scientist as a scientist; the other for the teacher as a teacher. These two aspects are in no sense opposed or conflicting. But neither are they immediately identical (pp.285-286).

La investigación posterior ha respaldado esta idea de Dewey: aunque parte de lo que los docentes necesitan saber sobre su materia intersecta con el conocimiento de los especialistas de la disciplina, también necesitan comprender su materia de forma que su conocimiento promueva el aprendizaje (Grossman, 1989).

A partir de los años ochenta del pasado siglo, la investigación ha abordado qué es el conocimiento del profesor, cómo se forma y de qué manera se organiza. Este conocimiento se relaciona con el conocimiento de la materia, el conocimiento de los procesos de comprensión de los estudiantes, y el conocimiento del contexto de la enseñanza (Elbaz, 1983). El trabajo de Shulman es central en la investigación sobre el conocimiento del profesor no solo porque ahonda en la idea de que existen conocimientos específicos del profesor, que van más allá tanto de una formación científica en su materia como de una formación pedagógica general; sino porque sistematiza el conocimiento del docente en un modelo. Así, la caracterización propuesta por Shulman (1986) se basa en tres categorías:

- *Conocimiento del contenido*: se refiere al contenido que domina el profesor y a la organización mental de dichos contenidos, ya que para pensar correctamente sobre un contenido (y por tanto para enseñarlo) es necesario ir más allá de los propios hechos o conceptos que lo componen: requiere incorporarlo en cierta estructura del conocimiento. Shulman asume la distinción de Schwab (1964) entre la estructura sustantiva del conocimiento de una disciplina (cómo se organizan los conocimientos) y su estructura sintáctica (cuáles son los criterios de validez y el conjunto de reglas legítimas para hacer afirmaciones en una disciplina). Por tanto, no es suficiente con conocer una serie de hechos respecto a una disciplina concreta, es necesario ser capaz de explicar por qué son ciertos o no lo son, para qué sirve conocer un contenido concreto y cómo se relaciona con otros aspectos de la misma disciplina o de otras.

- Conocimiento didáctico del contenido: va más allá del conocimiento disciplinar y es el conocimiento para enseñar la disciplina. Se refiere a:

  > the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations - in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others.
  >
  > Shulman, 1986, p.9.

El conocimiento didáctico del contenido incluye a todas las formas de representación y de presentación de que dispone el docente respecto a un contenido concreto. El conocimiento didáctico del contenido integra el conocimiento de la comprensión de los estudiantes y de sus posibles ideas preconcebidas o erróneas; el conocimiento de estrategias didácticas y recursos de enseñanza; y el conocimiento de los objetivos y fines de la enseñanza de la materia (Shulman, 1987;Grossman, 1989; Marks, 1990).

- *Conocimiento del currículo*: dominio de los materiales y programas que sirven como herramientas para desempeñar la profesión de docente.

En 1987, Shulman añadió varios dominios, entre ellos el conocimiento pedagógico general, que hace referencia a aquellos principios y estrategias generales de gestión y organización del aula que parecen trascender la materia (Shulman, 1987). Por ejemplo, la gestión de conductas disruptivas. Posteriormente, Marks (1990) representa la especificidad del conocimiento didáctico del contenido como una intersección del conocimiento de la materia y del conocimiento pedagógico general (ver Figura **2-1**).

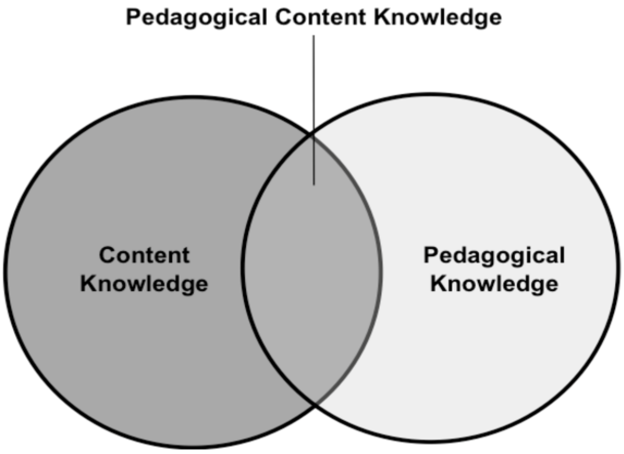


Figura 2-1.: Pedagogical content knowledge framework, adaptado de Shulman (1986)

En este modelo aparece claramente desarrollada y sistematizada la idea pionera de Dewey, reformulada como la diferencia entre el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento del contenido, que es aquello que "distinguishes between the subject matter expert and the experienced teacher" (Grossman, 1990, p. 9). La especificidad del saber para la enseñanza es formulada por Chevallard (1991) como un proceso de transposición didáctica que convierte el *savoir savant* (la erudición, el saber del experto) en *savoir enseigné* (conocimiento escolar) mediante una serie de transformaciones adaptativas (de selección, organización y adaptación del contenido disciplinar).
A partir de la propuesta de Shulman (1986, 1987), Ball y cols. (2008) proponen una caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés, *Mathematics Knowledge for Teaching*) basada en los conocimientos y habilidades que necesitan los profesores para conseguir que los alumnos aprendan. En efecto, MKT considera el

conocimiento matemático para la enseñanza constituido por dos dominios, el *conocimiento didáctico del contenido* y el *conocimiento de la disciplina*. Aunque mantienen el foco en el conocimiento para la enseñanza, en su modelo destaca la importancia del conocimiento de los contenidos matemáticos. Ball y cols. (2008) señalan que hay pocos estudios que hayan probado empíricamente si se pueden identificar distintas clases de conocimientos del contenido que sean importantes para la enseñanza. En esta tesis estudiaremos, como se verá, una parte del conocimiento del contenido para la enseñanza, por lo que resulta importante profundizar en este tema. Estos autores emprendieron el proyecto *Mathematics Teaching and Learning to Teach* y el proyecto *Learning Mathematics for Teaching Project* para desarrollar una aproximación empírica al conocimiento del contenido matemático necesario para la enseñanza. El primer proyecto se centró en el trabajo que realizan los profesores cuando enseñan Matemáticas. A partir de la observación y análisis de prácticas de aula, Ball y Bass (2003), plantearon una serie de hipótesis contrastables sobre la naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza. Relacionado con este trabajo, en el segundo proyecto se desarrollaron instrumentos de medida del conocimiento del contenido para la enseñanza de las matemáticas (Hill, Ball y Schilling, 2004; Hill y Ball, 2005; Thames, 2009), que proporcionaron vías para investigar la naturaleza, el papel y la importancia de los diferentes tipos de conocimiento matemático para la enseñanza. En su trabajo, mediante técnicas de análisis factorial, encuentran un nuevo dominio del conocimiento del profesor que describen como:

> [A] less recognized domain of content knowledge for teaching that is not contained in pedagogical content knowledge, but yet—we hypothesize—is essential to effective teaching. We refer to this as specialized content knowledge.
>
> Ball y cols., 2008, p.390.

Será precisamente el *specialized content knowledge* (SCK), el conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza, el dominio del conocimiento docente en el que nos centraremos en esta tesis. Como puede verse en la Figura **2-2**, el conocimiento de la disciplina está constituido por conocimiento del contenido ordinario (CCK), conocimiento del horizonte del contenido y conocimiento especializado del contenido (SCK). Aunque en nuestra investigación no nos centraremos en el conocimiento didáctico del contenido, es - como hemos argumentado - una parte esencial de conocimiento del docente que, en el modelo de Ball y cols. (2008) está formado por las categorías conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) y conocimiento del contenido y el currículo.

Como se ha señalado anteriormente, el MKT presta mayor atención al papel del conocimiento de la disciplina en el proceso de enseñanza que los modelos de Shulman, que la reducen a un conocimiento académico. Poniendo el foco en el conocimiento de la disciplina para la enseñanza, definiremos las categorías que componen esta dimensión.

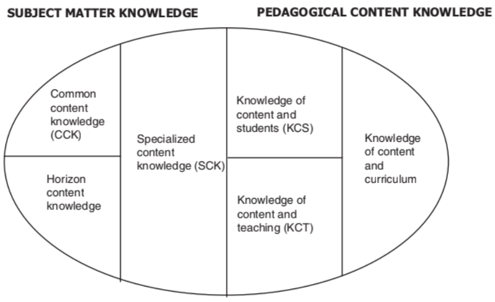


Figura 2-2.: MKT framework, extraído de Ball, Thames y Phelps (2008, p. 403).

El *conocimiento del contenido ordinario* (CCK) es el conocimiento del experto en la disciplina, el conocimiento académico, aquel que se utiliza también en ámbitos distintos a la enseñanza. Contempla aspectos como un uso correcto del lenguaje matemático, la capacidad de desarrollar una serie de procedimientos de manera correcta, o de definir un concepto matemático con rigor y precisión.

El *conocimiento del horizonte del contenido* se refiere a cómo se relaciona cada tema matemático con el conjunto de las Matemáticas incluidas en el currículo (Ball, 1993), estableciendo conexiones entre las ideas matemáticas empleadas en un curso y su desarrollo posterior en los cursos siguientes o los nuevos conceptos con los que se podrán relacionar.

El *conocimiento especializado del contenido matemático* (SCK) no es pedagógico, pero sí exclusivo de la enseñanza de las matemáticas, y su identificación es la contribución central del MKT al conocimiento del profesor de Matemáticas. Se define este conocimiento especializado para la enseñanza en un sentido amplio, incluyendo habilidades, hábitos mentales e intuición. Está formulado en términos de uso y de trabajos propios de la enseñanza. Tiene relación con el desempeño requerido por el docente de Matemáticas en tareas relacionadas con el conocimiento de las ideas matemáticas, habilidades en razonamiento matemático, dominio en el uso de ejemplos y terminología, y reflexión sobre la naturaleza de la competencia matemática (Kilpatrick, Swafford, y Findell, 2001). Incluye cómo presentar los contenidos, qué registro de representación emplear para un fin concreto de enseñanza, o comparar distintas estrategias de resolución de un problema.

Al final de la sección 2.1 se ha destacado la importancia para la educación matemática competencial de resolver e interpretar problemas en una variedad de situaciones o contextos reales y, por tanto, la necesidad de formar docentes capaces de guiar con éxito al estudiante en el proceso de resolución de problemas de contexto real. Esa competencia docente se integra en las dos dimensiones del conocimiento del profesor de Matemáticas del modelo MKT: el conocimiento del contenido/disciplina y el conocimiento didáctico de la disciplina. Sin embargo, en esta tesis doctoral nos interesaremos en el desempeño de los futuros maestros cuando resuelven problemas de contexto real, y por lo tanto, nos centraremos en un aspecto central del conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza (SCK):

el conocimiento de la resolución de problemas matemáticos; en concreto, de problemas de estimación en contexto real. Chapman (2015), basándose en una revisión sistemática de la literatura sobre resolución de problemas, subraya la importancia de los conocimientos del profesor en materia de resolución de problemas. Forma parte del trabajo matemático que conlleva la enseñanza, la *proficiency in mathematical activity* (Conner, Wilson, y Kim, 2011). De hecho, el dominio del profesor en resolución de problemas es importante, por ejemplo, para interpretar las respuestas de los alumnos o para comprender las implicaciones de la utilización de ciertas estrategias en un problema. Es decir, que el docente sea competente en resolver problemas es la base para desarrollar conocimiento especializado del contenido sobre resolución de problemas en el modelo MKT, y también para el conocimiento didáctico del contenido sobre el tema. De hecho, la falta de conocimientos de los maestros en resolución de problemas complejos podría explicar que apenas se propongan en las aulas de Primaria (Chapman, 2013). La selección de las tareas matemáticas para trabajar en el aula es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que es a través de tareas que la atención de los estudiantes se dirija a ideas matemáticas importantes y se promueva una alta activación cognitiva (Stein, Grover, y Henningsen, 1996). A pesar de que hay pruebas convergentes que indican que la calidad del aprendizaje es mayor cuando los estudiantes se enfrentan a problemas cognitivamente exigentes (Boaler y Staples, 2008; Stein y Lane, 1996), los profesores se muestran reacios a incorporar esos problemas en su enseñanza (Hiebert y cols., 2003). Además, incluso cuando los docentes eligen problemas complejos para su implementación, no hay garantía de que se lleven a cabo con el nivel de desafío previsto (Arbaugh, Lannin, Jones, y Park-Rogers, 2006; Stein y cols., 1996; Wilkie, 2016).

Es importante recordar que Shulman (1987) planteó su modelo de conocimiento del profesor en el marco de su desarrollo profesional, para el que contempla cuatro fuentes de progreso y perfeccionamiento: formación académica disciplinar; materiales y documentos institucionales sobre el proceso educativo; resultados de investigación relacionados con el ejercicio docente; y experiencia profesional enriquecedora. Estudiar el conocimiento de los futuros maestros de Educación Primaria en resolución de problemas de contexto real ayudaría a mejorar su formación académica disciplinar. En efecto, "evidence suggests that *what* teachers learn matters at least as much as how they learn" (Darling-Hammond, Hammerness, Grossman, Rust, y Shulman, 2005, p. 395). Como veremos en el siguiente apartado, hay numerosos estudios que advierten de las limitaciones de los maestros en formación, por lo que una investigación sobre su desempeño en resolución de problemas de contexto real permitiría no sólo, como se ha dicho, contrastar qué aspectos mejorar en su formación; también contrastar si sus limitaciones o carencias coinciden con los trabajos precedentes.

2.2.2. Particularidades de la formación matemática de los maestros de Primaria

En España, hasta la segunda mitad del siglo XIX, con el surgimiento de las primeras Escuelas Normales, que respondían a un interés del Estado por la modernización de la escuela (Agulló y Juan, 2012), el oficio del maestro se basaba exclusivamente en la práctica. A partir de la Ley General de Educación de Villar Palasí, de 1970, la formación de maestros se integró en los estudios superiores universitarios, como Escuelas Universitarias que impartían diplomaturas. A partir de 2012, completando el proceso de adaptación al Marco de Convergencia Europea, se constituye la Facultad de Magisterio en la Universitat de València, ofertando el Grado de Maestro/a en Educación Primaria, compuesto por 240 créditos ECTS, que debe conferir a los titulados competencias docentes en todas las materias comunes que actualmente son competencia de los tutores, entre ellas, Matemáticas. La formación obligatoria en Matemáticas y su didáctica suma 21 créditos ECTS, lo que no llega a un 9 % del peso en los planes de estudio.

La formación inicial del profesorado difiere significativamente en función de la etapa educativa (Educación Infantil, Primaria o Secundaria) para la que se han formado, pero un gran número de estudios, para diferentes niveles educativos, han encontrado relación entre la eficacia del docente enseñando una disciplina y la cantidad de formación recibida sobre dicha disciplina y sobre su didáctica específica (Goldhaber y Brewer, 2000; Darling-Hammond y cols., 2005). Aunque existe un debate sobre qué conocimiento matemático debe proporcionarse en los programas de formación inicial de maestros y profesores (Comiti y Ball, 1996), la investigación sugiere que la educación matemática, incluida la etapa de Primaria, requiere conocimientos matemáticos complejos (Llinares y Krainer, 2006). Sin embargo, por el carácter generalista de la figura del maestro, la formación en Matemáticas y su didáctica específica tiene un peso muy limitado en los planes de estudio del grado de Maestro/a en Educación Primaria en España.

Algunos estudios han abordado las carencias en el conocimiento matemático de los futuros maestros; por ejemplo, Ball (1988) elaboró preguntas en entrevistas con maestros y futuros maestros que revelaron insuficiencias importantes en sus conocimientos sobre las matemáticas necesarias para la enseñanza. Estas carencias se agravan en el caso español: el análisis de los resultados de *Teacher and Education Development Study in Mathematics* (TEDS–M), desarrollado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo durante el periodo 2006-2012, en el que participaron 17 países, muestra que el conocimiento matemático y la profundidad de su comprensión adquiridos como resultado de su formación inicial por los futuros maestros de Primaria de España (que en ese período aún cursaban estudios de diplomatura) se sitúa en el límite inferior de la franja de países con resultados medios, que incluye - todos por encima de España - a EEUU, Suiza, Noruega y Alemania entre los países próximos a nuestro entorno socioeconómico y cultural (I. Sanz y Martín, 2014, p. 78). Dentro de los conocimientos y las competencias matemáticas de los maestros de Educación Primaria, Chapman (2015) ha destacado la importancia de su capacidad para resolver problemas. El conocimiento de los maestros sobre resolución de problemas forma una red de conocimientos interconectados (Chapman, 2015). Así, los futuros maestros deben aprender a entender los problemas en función de su estructura y propósito (Polya, 1962); deben aprender sobre características de los problemas tales como su complejidad sintáctica, el formato de presentación, la cantidad de información dada o el tipo de contexto (Silver y Thompson, 1984, p. 531); deben aprender sobre problemas con soluciones múltiples (Szydlik, Szydlik, y Benson, 2003; Guberman y Leikin, 2013); deben aprender sobre problemas ricos (Slavit y Nelson, 2010) y, en particular, sobre problemas abiertos. Autores como Thomson (1985) señalan la conveniencia de que los profesores experimenten la resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor antes de abordar adecuadamente su enseñanza. Esa es la perspectiva que adoptamos en la investigación de esta tesis.

Dado que el peso de los créditos de Matemáticas y su didáctica en la formación inicial de los maestros de Educación Primaria es reducido, la formación inicial específica sobre resolución de problemas es, como muestran los resultados de los estudios internacionales previamente comentados, mejorable. En Chapman (2015, p. 25) se recogen varios estudios sobre las limitaciones de futuros maestros en el conocimiento necesario para ser competente en resolución de problemas:

- Incapacidad para relacionar con éxito sus soluciones con la situación real cuando resuelven problemas contextualizados (Tirosh y Graeber, 1989; Tirosh, Tirosh, Graeber, y Wilson, 1991).
- Confusión sobre qué significa matemáticamente tarea abierta, aunque los futuros maestros conozcan que eso implica más de una solución (Chapman, 2012).
- Falta de flexibilidad en la aproximación a la resolución del problema (Van Dooren, Verschaffel, y Onghena, 2003).
- Conocimiento de una gama reducida de estrategias de resolución y poca flexibilidad en su uso, no cambiando la estrategia escogida, aunque no sea productiva o eficaz (Chapman, 1999; Taplin, 1994).
- Tendencia a aplicar resoluciones estereotipadas a un problema, por ejemplo, vinculando estrategias con temas matemáticos (Leikin, 2003).
- Consideración de la resolución de problemas como un proceso lineal en el que hay que aplicar uno o varios algoritmos, como en los problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) (Chapman, 2005).
- Falta de estrategias para interpretar la información que se da (o no se da) en el enunciado de un problema y para reconocer el procedimiento adecuado a utilizar (Taplin, 1998).

En relación con el trabajo de Taplin (1998) sobre las dificultades para comprender e interpretar la información del enunciado del problema, otros estudios (Escolano-Vizcarra, Gairín-Sallén, Jiménez-Gestal, Murillo-Ramón, y Roncal-Gómez, 2012; Orrantia, Múñez, Vicente, Verschaffel, y Rosales, 2014; Leiß, Plath, y Schwippert, 2019) destacan la dificultad de los futuros profesores para comprender cuestiones indirectas y, por tanto, tareas enunciadas de un modo más complejo. En los Capítulos 4 y 5 se explicará el papel las variables de la tarea en el diseño y análisis del enunciado de los problemas, dedicando más atención a estos aspectos. En particular, a la influencia que tienen en el rendimiento de futuros maestros al resolver problemas de estimación en contexto real.

Además, Sáenz (2007) encuentra que los futuros maestros tienen una competencia matemática baja en los ítems más complejos de las pruebas PISA 2003, sin diferencias significativas con los estudiantes de Secundaria. Estos resultados son comparables a los de Escolano-Vizcarra y cols. (2012), que encontraron un alto nivel de fracaso en los ítems de resolución de problemas de PISA 2003. Arce, Marbán, y Palop (2017), a partir de una prueba de competencia matemática para sexto curso de Primaria, identificaron carencias y dificultades de los futuros profesores en relación con aspectos esenciales como la aplicación de procedimientos de medida o la interpretación de resultados en situaciones que implican grandes cantidades. Esto hace pensar que los procesos de resolución, los resultados y las dificultades de los futuros maestros al enfrentarse a la resolución de problemas, especialmente si estos son complejos, abiertos y de contexto real, pueden ser similares a las de los estudiantes de Secundaria.

Como se ha explicado en el primer capítulo, en esta tesis el foco está en estudiar el conocimiento de los futuros maestros en resolución de problemas de estimación de grandes cantidades en una situación real: cómo influyen determinadas características del contexto o del enunciado del problema en sus resoluciones; si son flexibles en el uso de las resoluciones y saben adaptarlas a dichas características; si la manera de presentar la información sobre la situación les genera dificultades; qué errores se cometen y cuál es su rendimiento; o cómo se adaptan a resolver esos problemas en grupo y en el lugar real del problema, entre otros objetivos, tal y como se expusieron en el Capítulo 3. Algunos de estos objetivos de investigación se relacionan con las limitaciones descritas anteriormente (incapacidad para relacionar la solución con el contexto real; falta de flexibilidad en la aproximación a la resolución y en el uso de estrategias; tendencia a aplicar soluciones estereotipadas; dificultades para interpretar la información del problema), por lo que resulta de interés conocer si se repiten estas dificultades en esta clase de problemas de modelización, porque permitiría proponer mejoras para la formación inicial de los futuros maestros. En las siguientes secciones se construirá el marco teórico que permite describir, caracterizar y fundamentar este tipo de problemas y los procesos de resolución implicados.

2.3. Resolución de problemas de modelización

2.3.1. Fundamentos de la resolución de problemas

Puig (1996) explica que hay distintas - y a veces contradictorias - definiciones del concepto de problema, aunque la condición de problema no es inherente a la tarea propuesta, sino que depende del resolutor que se enfrenta a dicha tarea (Schoenfeld, 2014). Un problema no se resuelve de manera rutinaria, aplicando un algoritmo o procedimiento que se sabe que va a llevar a la solución (Kantowski, 1977), requiere un proceso de pensamiento complejo. Siguiendo esta idea, Blum y Niss (1991) definen problema como:

> [A] situation which carries with it certain open questions that challenge somebody intellectually who is not in immediate possession of direct methods/procedures/algorithms etc. sufficient to answer the questions. This notion of a problem is apparently relative to the persons involved; so, what to one person is a problem may be an exercise to someone else (p. 37).

Por tanto, resolver un problema es "knowing what to do when you don't know what to do" (Johnson, Herr, y Kysh, 2003, p. 3). Puig (1996) distingue entre resolución (el proceso completo que permite resolver un problema), solución (el proceso depurado que presenta para justificar el resultado) y resultado (la respuesta al problema). Polya (1962) describe el proceso de resolución de un problema a través de cuatro grandes pasos o fases:

I. *Comprender el problema.* Consiste en comprender el problema, identificar las preguntas que plantea y hacerse un esquema de la situación del problema.

II. *Concebir un plan.* Es el proceso de planificación de la solución, identificando objetivos y diseñando un plan de actuación para alcanzarlos.

III. *Ejecutar el plan.* Consiste en implementar el plan anterior, llevando a cabo las acciones particulares del plan y regulando la actuación para cumplir el plan fijado.

IV. *Mirada retrospectiva.* En este último paso se trata de examinar la solución, verificando las decisiones tomadas y validando el resultado obtenido.

Polya examina el comportamiento del resolutor capaz de autogestionar su proceso de resolución pasando por las cuatro fases, y de plantearse preguntas para avanzar en el proceso; muchas de ellas son variaciones de la pregunta: ¿conoces un problema relacionado? (Polya, 1962). Schoenfeld (2014) considera que la descripción de las fases de Polya es demasiado general, y las enriquece con elementos necesarios para el desarrollo del proceso de resolución: el resolutor debe estar equipado con los recursos apropiados (conceptos, procedimientos) y saber usarlos con competencia, debe disponer de estrategias heurísticas (vías y reglas de decisión generales para avanzar en la resolución de un problema, basadas en la experiencia previa con problemas similares), debe poseer un control metacognitivo (control y evaluación) de su propio proceso de resolución, y debe contar con un sistema de creencias apropiadas (perspectiva, motivación y confianza). Así, Schoenfeld (2014) reformula el proceso de resolución de problemas de Polya concretando unas estrategias heurísticas específicas para cada fase:

I. *Análisis.* Se asocian estrategias heurísticas como: realizar una figura, esquema o diagrama; examinar casos especiales; y simplificar el problema.

II. *Diseño.* No se asocian estrategias heurísticas concretas en la elaboración del plan de resolución.

III. *Exploración.* Se asocian estrategias heurísticas como examinar problemas equivalentes, variando las condiciones del planteamiento, o descomponer en subproblemas.

IV. *Implementación.* No se asocian estrategias heurísticas específicas en esta fase.

V. *Verificación.* Se asocian las siguientes estrategias heurísticas: comprobar que se han empleado todos los datos; verificar que el resultado está acorde con estimaciones o predicciones razonables; explorar si se puede transferir la solución a otra situación; o usar la solución para comprobar si genera algo ya conocido.

En el estado de la cuestión sobre resolución de problemas recogido por Lester (1994), se muestran distintos estudios que prosiguen la línea de Polya y Schoenfeld, buscando caracterizar cómo resuelven los problemas los buenos resolutores (Silver y Thompson, 1984; Charles y Silver, 1988; Hiebert y cols., 1997). Algunas de las características del buen resolutor de problemas son:

- Apreciar las características estructurales importantes del problema.
- Capacidad para visualizar e interpretar hechos y relaciones cuantitativas o espaciales.
- Capacidad de notar semejanzas, diferencias y analogías, de identificar elementos críticos y seleccionar los procedimientos correctos; capacidad de anotar la información irrelevante, y de estimar y analizar.
- Tendencia a evaluar y seleccionar entre caminos de solución alternativos, utilizar estrategias de estimación y de aproximación, y a comprobar la razonabilidad de sus soluciones.
- Disponer de habilidades bien desarrolladas para representar problemas matemáticos, y tendencia a realizar análisis cualitativos de los problemas antes de realizar cualquier cálculo.
- Capacidad de mostrar flexibilidad en los procesos mentales.

- Tendencia a buscar la claridad, la sencillez, la economía y la racionalidad de las soluciones.

En contra de lo que se podría pensar, y enlazando las características del buen resolutor (Lester, 1994) con el conocimiento de las fases de resolución de problemas y las estrategias heurísticas asociadas, la instrucción en estrategias heurísticas generales a resolutores principiantes no es tan eficaz como se podría esperar para volverlos resolutores expertos (Lesh, 1985). El estudio de Lester (1994) también recoge aquellas primeras investigaciones que, entre 1970 y 1994, trataron de identificar qué características hacen que un problema sea difícil. Se relacionan con aspectos sintácticos y semánticos, con el formato del problema o con su contexto:

Tabla 2-1.: Impacto de algunas características del problema en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas.

Características del problema	**Dificultades**
Estructura sintáctica	Un formato telegráfico, con sintaxis sencilla, no facilita el desempeño de los estudiantes en problemas verbales o narrativos (Moyer, Moyer, Sowder, y Threadgill-Sowder, 1984)
Estructura semántica	Los estudiantes tienen dificultades con problemas en los que la acción está implícita en el enunciado (Silver y Thompson, 1984).
	La estructura semántica del problema tiene fuerte influencia en las estrategias de resolución de los estudiantes (De Corte y Verschaffel, 1987)
Contexto	Los problemas concretos son menos difíciles que los abstractos, y los problemas basados en hechos son más sencillos que los hipotéticos (Caldwell y Goldin, 1987)
Formato	La capacidad de los estudiantes para resolver problemas verbales se ve afectada por el formato de presentación del problema; los problemas que presentan fotografías o dibujos adecuados facilitan que los estudiantes los resuelvan con éxito (L. F. Webb y Sherrill, 1973)

Algunas características, como las que aparecen en la Tabla **2-1**, relacionadas con la estructura sintáctica, con la estructura semántica, con el formato y con el contexto, se considerarán en el diseño de las secuencias de problemas empleadas en este trabajo. Se definirán y serán analizadas como variables de tarea (Kilpatrick, 1978), tal y como se muestra con mayor profundidad en el Capítulo 4.

Puesto que la instrucción en estrategias heurísticas generales no da los resultados esperados, es relevante investigar las estrategias de resolución para tipos de problema concretos. Además, en la elección de los problemas se deben considerar variables de dificultad o complejidad como las descritas anteriormente. Como se ha comentado, este trabajo se focaliza en los problemas de estimación en contexto real, o problemas de Fermi, y es necesario tratar previamente algunas de sus características generales.

2.3.2. Problemas verbales y problemas de contexto real

Los problemas escolares pueden presentarse en distintos formatos: de forma verbal, pictórica, con símbolos matemáticos o combinando estas formulaciones. Los problemas escolares de enunciado verbal presentan un texto en lenguaje natural que debe ser traducido a procedimientos matemáticos (aritméticos, algebraicos, geométricos, o combinación de todos ellos) que permiten proporcionar una solución (Puig, 1996). El enunciado de este tipo de problemas suele hacer referencia a la realidad, aunque a menudo en el aula se presentan problemas de aspecto real cuyo proceso de resolución es independiente de los elementos del contexto real (Blum, 1993). De hecho, Niss, Blum, y Galbraith (2007) distinguen tres tipos de problemas en función del grado de relación con el mundo real: los problemas intramatemáticos (que no tienen relación con la realidad), los problemas verbales y los problemas de modelización. Los problemas verbales y los problemas de modelización tienen relación con la realidad, pero en los segundos el proceso de resolución es fuertemente dependiente del contexto real del problema, y en los primeros no suele ser así. Blum y Niss (1991) señalan que los problemas verbales consisten en un modelo de la realidad simplificado y preestablecido, que exige la aplicación de una determinada estructura matemática pero no un análisis de la situación planteada. Distintas investigaciones (Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994; Verschaffel y De Corte, 1997; Verschaffel, Greer, y De Corte, 2000) sugieren que la mayoría de estudiantes no utilizan para resolver este tipo de problemas ningún tipo de conocimiento del contexto real en el que se sitúan los problemas, dándose a menudo una suspensión del sentido de la realidad que hace que den resultados de naturaleza incompatible con la realidad (números decimales como respuesta a preguntas que requieren solución entera, o dando como solución magnitudes claramente desproporcionadas, por ejemplo).

El papel activo del contexto real en el proceso de resolución de un problema es la diferencia entre un problema de enunciado verbal y un problema de modelización, que es una clase de problemas de contexto real sobre la que profundizaremos en la siguiente sección. En los problemas de contexto real intervienen procesos de matematización horizontal y vertical. Blum y Niss (1991) se refiere a ellos como *applied mathematical problems*, y señala que "it is characteristic of an applied mathematical problem that the situation and the questions defining it belong to some segment of the real world and allow some mathematical concepts, methods and results to become involved" (p. 37). Según Rico (2007), cuando se resuelven problemas de contexto real la matematización horizontal incluye procesos como:

i) identificar matemáticas relevantes en un contexto general;

ii) plantear interrogantes;

iii) enunciar problemas;

iv) representar el problema de un modo diferente;

v) comprender la relación entre lenguaje natural, lenguaje simbólico y formal;

vi) encontrar regularidades, relaciones y patrones;

vii) reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos;

viii) traducir el problema a un modelo matemático;

ix) utilizar herramientas y recursos adecuados.

Por otro lado, en resolución de problemas de contexto real la matematización vertical incluye las siguientes destrezas:

i) usar diferentes representaciones;

ii) usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones;

iii) refinar y ajustar los modelos matemáticos;

iv) combinar e integrar modelos;

v) argumentar y generalizar.

Verschaffel (2012) ha observado que los estudiantes suelen dar respuestas estereotipadas a los problemas de contexto real. De hecho, investigaciones (Verschaffel, Vicente, y Van Dooren, 2008) destacan que algunos factores relacionados con la enseñanza de las matemáticas en la escuela crean obstáculos a los estudiantes cuando deben resolver esta clase de problemas:

- Los problemas que suelen trabajarse en clase (verbales cuando suelen hacer referencia a la realidad) y los que presenta el libro de texto siempre tienen una solución con sentido.
- Cada problema tiene una única respuesta, normalmente numérica.
- El problema verbal suele contener toda la información necesaria para dar una interpretación matemática a la situación y llegar a la solución.
- El estudiante no necesita aportar su experiencia o conocimiento del contexto real porque se presentan situaciones estilizadas y artificiales.

Aunque, como se ve, la resolución de este tipo de problemas incluye procesos complejos y choca con la práctica habitual de resolución de problemas verbales, para Van den Heuvel-Panhuizen (2002) la introducción de un contexto real en los problemas los hace más accesibles y promueve estrategias de resolución. Los problemas de la vida real facilitan el uso de estrategias matemáticas propias y, por tanto, promueven la implicación de los estudiantes (Albarracín, 2011). Además, permiten construir conocimiento matemático desde lo concreto a lo abstracto, en línea con los principios de la EMR (De Corte y cols., 1996). Albarracín (2011), siguiendo a Chapman (2006) y Doerr (2006), observa que muchos docentes presentan estos problemas de forma cerrada, sin promover un trabajo de matematización horizontal rico, y que la formación del profesorado es clave para que desarrollen un conocimiento sobre las características del problema, el papel del contexto en la resolución y las posibles estrategias o tipos de resolución que pueden dar los alumnos. Estos resultados van en la línea de lo expuesto en los apartados 2.1.1 y 2.2.2. Como se ha destacado anteriormente, en esta tesis se pretende profundizar en las características del problema, el papel del contexto en la resolución y los tipos de resolución que pueden dar los alumnos para un tipo de problemas de contexto: los problemas de modelización llamados problemas de Fermi, esto es, problemas de estimación de grandes cantidades en contexto real.

2.3.3. Problemas de modelización

Antes de definir qué es un problema de modelización, conviene concretar qué se entiende por contexto real y, en consecuencia, por problema de contexto real. Albarracín (2011) distingue los siguientes tipos de contexto para un problema:

a) *Contexto real*: son situaciones reales que implican la práctica matemática en el entorno donde está formulado el problema.

b) *Contexto evocado*: son situaciones propuestas en el aula que remiten a un contexto real que debe ser imaginado por los estudiantes.

c) *Contexto simulado*: es una representación que reproduce, simplificadas, las características de un contexto real.

En este trabajo, por simplificar, llamaremos *problemas de contexto real* a aquellos problemas de enunciado verbal cuyo contexto remita a una situación real que puede trabajarse *in situ* (a) o evocándola (b) en el aula. Como se verá en el Capítulo 4, en la investigación que presentamos en esta tesis el diseño de las experiencias con las secuencias de problemas reales se ha concebido desde esta doble perspectiva: en una primera experiencia, los futuros maestros evocaron los problemas en el aula; en una segunda experiencia, los trabajaron en el entorno donde está formulado el problema. Se estudiará la influencia que tiene en la resolución de los problemas realizar el trabajo matemático en el lugar real planteado por el enunciado, comparando las resoluciones *in situ* con las resoluciones planteadas cuando el

problema es evocado desde el aula. En ambos casos, la palabra realista hace referencia no sólo a su conexión con el mundo real, sino también a situaciones que son reales en la mente de los estudiantes (Sriraman y Knott, 2009). Una característica relevante de los problemas de contexto real es la autenticidad, esto es, que el contexto del problema pertenezca a una realidad plausible, lo que no implica que un problema sea auténtico en sentido estricto, sino que pueda serlo en algunos aspectos como pueda ser su origen o finalidad, combinados con otros aspectos presentes con fines didácticos (Maaß, 2010; Vos, 2011).
Aunque hay distintas aproximaciones didácticas para definir qué es un problema de modelización, existe un consenso en que son problemas que implican tránsitos de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas (Blomhøj, 2009; Kaiser y Sriraman, 2006; Borromeo-Ferri, 2014; Abassian, Safi, Bush, y Bostic, 2020). No puede ser un problema pseudorealista ni de contexto simulado, en el que los datos vienen dados, o en el que sólo hay aplicar una serie de algoritmos y procedimientos matemáticos (Borromeo-Ferri, 2018), sin que el contexto planteado por el problema juegue un papel relevante en el proceso de resolución. El tránsito de ida y vuelta entre la realidad y las matemáticas implica saber simplificar, estructurar y cuantificar el contexto (ida), pero también reinterpretar el resultado obtenido mediante procedimientos matemáticos en contraste con la realidad (vuelta). Maaß(2006, p. 115) define los *problemas de modelización* como problemas reales, auténticos, complejos (pues el proceso de resolución no es conocido de antemano y requiere de un proceso de reflexión) y abiertos, en el sentido de que puede haber más de una estrategia de resolución o solución posible. Gallart (2016, p. 16) recoge la siguiente caracterización de Blomhøj y Kjeldsen (2006) de las tareas de modelización:

a) Que puedan ser reconocidas y comprendidas por los estudiantes.

b) Que ofrezcan un reto adecuado para el trabajo de los estudiantes con independencia del apoyo del profesor.

c) Que sean auténticas o que incluyan datos auténticos, y relevantes en alguna situación real.

d) Que sean abiertas por el propio interés de los resultados, es decir, que muestren que los modelos matemáticos pueden añadir significado a la situación y proporcionar nuevos conocimientos sobre el problema.

e) Que se abran a la crítica del modelo y de los resultados.

f) Que desafíen a los estudiantes a trabajar apropiadamente con conceptos y métodos relevantes para su aprendizaje de las matemáticas.

En resumen, los problemas de modelización son un subconjunto de los problemas reales, caracterizados por ser abiertos, complejos, realistas, auténticos, y por tener como finalidad el desarrollo de un modelo matemático. Así, el proceso de resolución de un problema de modelización, sobre el que hablaremos detenidamente en la siguiente sección, implica la construcción de un modelo, entendido intuitivamente como una representación simplificada y aproximada de la realidad (Maaß, 2010).

A partir de las características descritas, vamos a analizar, a modo de ejemplo, si la tarea presentada en la Figura **2-3**, que llamaremos “Colas en el cine”, es un problema de modelización.

Figura 2-3.: Ejemplo de problema de modelización “Colas en el cine”.

- *¿Es abierto?* La situación presenta una situación cuya información debe ser completada formándose conjeturas y asumiendo posibilidades entre muchas posibles. Además, las soluciones son múltiples, y dependen tanto de las condiciones sobre la situación escogidas por el resolutor, como de las variadas estrategias de resolución disponibles para llegar a las mismas.

- *¿Es complejo?* Para comprender y abordar el problema deben establecerse distintas hipótesis sobre el contexto y explorar suposiciones. Deben asumirse datos y discriminar aspectos relevantes e irrelevantes. Debe simplificarse la situación real para poder matematizarla. (¿cuántas salas tiene el cine? ¿cuántas butacas por sala? ¿cómo se distribuye la cola de compra? ¿cuántas taquillas hay? ¿cuántas entradas compra cada cliente, de media? ¿hay más gente en la cola que butacas en total? etc.)

- *¿Es realista?* Plantea una situación en un contexto real, significativo para el alumnado, que debe pensar en el cine de su ciudad y conoce la experiencia de hacer cola para comprar una entrada.

- *¿Es auténtico?* La situación existe en el mundo real y se da habitualmente.

- *¿Es un problema?* La tarea no se puede resolver directamente y requiere resolver varios subproblemas: calcular cuántas butacas hay en total en el cine, calcular espacio disponible para colas y estimar cuánta gente cabe si está lleno, calcular el tiempo de compra por persona, construir intervalos de tiempo al variar las condiciones, etc.

En efecto, la tarea "Colas en el cine" es un problema de modelización: cumple las características y, además, el proceso de resolución implica construir una representación simplificada y aproximada a la realidad con el fin de cuantificar distintos aspectos que permitan dar respuesta a las preguntas. Esta es una primera aproximación a la idea de modelo matemático, pero conviene definir modelo matemático desde un punto de vista didáctico, a partir de las producciones de los estudiantes al resolver un problema de modelización. Para relacionar los elementos característicos de los modelos matemáticos con las producciones de los alumnos, en esta tesis nos basaremos en la definición de modelos matemáticos de Lesh y Harel (2003):

> *Models* are conceptual systems that generally tend to be expressed using a variety of interacting representational media, which may involve written symbols, spoken language, computer-based graphics, paper-based diagrams or graphs, or experience-based metaphors. Their purposes are to construct, describe or explain other system(s).
> Models include both: (a) a *conceptual system* for describing or explaining the relevant mathematical objects, relations, actions, patterns, and regularities that are attributed to the problem-solving situation; and (b) *accompanying procedures* for generating useful constructions, manipulations, or predictions for achieving clearly recognized goals.
> Mathematical models are distinct from other categories of models mainly because they focus on structural characteristics (rather than, for example, physical, biological, or artistic characteristics) of systems they describe (p.159).

A partir de esta definición, se entiende que, en efecto, crear y desarrollar modelos matemáticos destinados a describir o representar abstractamente un determinado fenómeno o realidad, es un proceso complejo. En lo sucesivo, nos referiremos por modelo a la interacción entre diferentes conceptos y procedimientos, aunque esta distinción será útil para categorizar las resoluciones del tipo de problemas sobre los que se ocupa esta tesis, como se explicará más adelante. Un modelo matemático relaciona conceptos y procedimientos matemáticos con la realidad, produciendo significado para aquello que estudian y describiendo simbólicamente una situación o fenómeno (Lesh y Zawojewski, 2007). Los problemas de modelización han sido de interés para la Educación Matemática desde el trabajo seminal de Pollak (1979),

quien, en el paradigma de la EMR, comenzó a introducir actividades en las aulas que mostraban la relación fecunda entre las Matemáticas y el mundo real. La investigación en las últimas décadas ha incrementado su interés por propuestas educativas que incorporan la modelización matemática en distintos niveles educativos (Vorhölter, Kaiser, y Ferri, 2014; Ferrando, 2019). Siguiendo a Blum (2015), el uso de problemas de modelización para la enseñanza tiene una doble función: por un lado, el conocimiento de las matemáticas es vital para comprender, interpretar y relacionarse con el mundo real, resolviendo problemas reales; por otro lado, el mundo real permite dar sentido al aprendizaje de conceptos matemáticos.
La perspectiva de las *Modelling-Eliciting Activities* (MEAs) se aproxima a la modelización como una actividad de resolución de problemas. Estos problemas plantean una situación que sigue unos principios (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post, 2000) que permiten al resolutor desarrollar un modelo aplicable a situaciones similares (Lesh y Doerr, 2003). Las MEAs son actividades que se pueden introducir desde edades tempranas y en todas las etapas educativas, de manera que ayuden a entender a los estudiantes la importancia de las Matemáticas en la vida real. Un tipo de MEAs son las llamadas "actividades de obtención de estructuras" (Gallart, 2016), en las que el resolutor debe cuantificar informaciones cualitativas para tomar decisiones razonadas y justificadas. En este trabajo se adoptará la perspectiva MEAs como una aproximación a la modelización matemática desde la resolución de problemas, en los que el resolutor debe estimar medidas y cantidades a partir de informaciones cualitativas. En el siguiente apartado se profundizará en el proceso de construcción de modelos matemáticos.

2.3.4. Proceso de modelización matemática

El proceso de resolución de un problema de modelización tiene características distintas a los procesos de resolución de otro tipo de problemas: los conceptos y procedimientos implicados están vinculados fuertemente con la realidad, produciendo sentido para aquello que describen (Albarracín, 2011), y derivándose de ellos soluciones generalizables e interpretables (Doerr y English, 2003). El proceso de resolución de un problema de modelización implica una transición de ida y vuelta entre el mundo real y las Matemáticas que puede verse como una particularización de las fases de Polya (Gallart, 2016). Llamaremos modelización matemática al proceso de resolución de un problema de modelización (Maaß, 2006). Este proceso está constituido por fases y existe un consenso en que dichas fases forman un ciclo (Doerr y English, 2003; Galbraith y Stillman, 2006; Carreira, Amado, y Lecoq, 2011; Schukajlow, Kaiser, y Stillman, 2018). Como se ha dicho, durante una actividad de modelización, los resolutores deben recorrer diferentes etapas en las que pasan de la realidad al dominio matemático, reevaluando cada vez el fenómeno estudiado. Todo el proceso se repite en varias vueltas o iteraciones, en las que los estudiantes mejoran progresivamente los modelos y las soluciones encontradas para el problema en el que están trabajando, adaptando los modelos a los requisitos del enunciado del problema (Blum y Borromeo-Ferri, 2009).
En la literatura sobre modelización matemática pueden encontrarse distintos ciclos de mo-

delización que dependen de diferentes perspectivas sobre el proceso o de qué tareas han sido empleadas (Borromeo-Ferri, 2006). El *ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva* pone el foco en los procesos cognitivos del resolutor durante el proceso de modelización (Borromeo-Ferri, 2018), que conforman sus distintas fases. Los procesos mentales relacionados con la comprensión de la situación real, que conducen a la concepción de una situación modelo, forman una fase importante del proceso de modelización. Desde esta perspectiva, Blum y Leiß(2007) la incluyen en su ciclo, presentando una secuenciación más refinada que otros ciclos para describir la transición entre situación real y situación modelo como parte de la comprensión del problema (Gallart, 2016). La Figura **2-4** muestra el ciclo de modelización de Blum y Leiß(Blum y Leiß, 2007) adaptado por Borromeo Ferri (2007), formado por siete fases: comprensión de la tarea, simplificación/estructuración, matematización, resolución/trabajo matemático, interpretación, validación y comunicación.

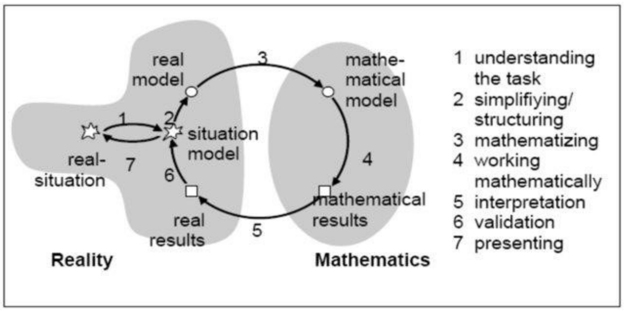


Figura 2-4.: Ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva (Blum y Leiß, 2007; Borromeo-Ferri, 2007).

Este ciclo puede ser empleado para describir y reconstruir los procesos cognitivos asociados al proceso de modelización (Borromeo-Ferri, 2018), es decir, es un modo de interpretar las producciones de los resolutores y permite diagnosticar posibles barreras cognitivas mientras se modeliza. En la Tabla **2-2** se ofrece una explicación que profundiza en cada una de las etapas y fases que componen el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva:

Tabla 2-2.: Etapas y fases del ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva

Situación real	Presenta una situación tomada de la realidad, mediante un enunciado verbal, una imagen, una tabla, etc.
Situación modelo	Forma parte de la comprensión de la tarea y se entiende como la representación mental de la situación que se hace el resolutor. En la situación modelo también influye la experiencia individual del resolutor y su conocimiento del contexto en el que sitúa la tarea.

Modelo real	Se construye a partir de la situación modelo simplificando y estructurando la representación mental. Se seleccionan los elementos de la realidad relevantes para solucionar el problema; se hacen suposiciones sobre la realidad como vía de simplificación o estructuración; y se completan los datos proporcionados si fuera necesario, recurriendo al conocimiento extra-matemático del contexto de la situación.
Modelo matemático	Siguiendo la definición de Lesh y Harel ((2003), p. 159), un modelo matemático es un sistema que incluye conceptos matemáticos, relaciones, acciones, patrones o regularidades asignados a la situación del problema mediada por el modelo real, empleando representaciones variadas (símbolos, gráficos, esquemas, etc.), así como los procedimientos que los acompañan para generar construcciones útiles, manipulaciones o predicciones necesarias para la resolución. La construcción de un modelo matemático implica matematización horizontal - para construir el sistema conceptual que representa el modelo real - y matematización vertical - trabajar matemáticamente mediante procedimientos que permiten alcanzar una solución. Por la complejidad de las situaciones reales, a menudo se puede desarrollar más de un modelo matemático para resolver un problema de modelización (Borromeo-Ferri, 2018).
Resultados matemáticos	El trabajo matemático dentro del modelo - las construcciones, manipulaciones y predicciones derivadas - conduce a la resolución del modelo matemático, es decir, a obtener el resultado o solución, en términos matemáticos, del problema, ya sea un valor numérico, una ecuación, una gráfica, etc.
Resultados reales	Los resultados matemáticos obtenidos en el modelo matemático deben ser interpretados en el contexto del modelo real y la situación real de partida para obtener los resultados reales del problema. Estos resultados deben ser validados, es decir, no sólo interpretados sino comparados y contrastados con el modelo real y las hipótesis asumidas al inicio, así como con el conocimiento extra-matemático empleado. Si la realidad de los resultados matemáticos no es cuestionada y comunicada por los estudiantes, el modelo matemático no tiene sentido (Borromeo-Ferri, 2018).

Si la solución del problema de modelización, después de la validación, no resulta adecuada, debe revisarse el modelo iniciando una nueva iteración del ciclo de modelización para mejorarlo (Gallart, 2016). Se podrán tener aspectos no considerados en el modelo anterior e incluso desarrollar una comprensión más profunda sobre sus limitaciones y restricciones (Zawojewski, 2013; Czocher, 2018).

2.3.5. Dificultades del profesorado y tipos de errores en problemas de modelización

La capacidad para desarrollar con éxito todas las fases del proceso de modelización puede ser definida como competencia en modelización (Blomhøj y Højgaard, 2003). Se ha hablado del conocimiento del profesor en secciones anteriores, poniendo el foco en la resolución de problemas y en las dificultades que tienen los futuros maestros y los maestros en activo cuando deben enfrentarse a este tipo de actividad matemática. Si, sobre la base de los modelos de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, se pone el foco en qué debe dominar el docente para la enseñanza de la modelización (Borromeo-Ferri y Blum, 2009; Borromeo-Ferri, 2014), se pueden distinguir cuatro dimensiones del conocimiento del profesor sobre modelización matemática: la dimensión teórica (relativa al conocimiento del ciclo de modelización y perspectivas de la modelización), la dimensión de la tarea (relativa a conocer múltiples soluciones de los problemas de modelización y a su diseño y análisis), la dimensión de la instrucción (relativa a la planificación y la implementación) y la dimensión de diagnóstico (relativa al seguimiento, a la evaluación y la calificación).
Puesto que en esta tesis nos centramos en la resolución de problemas de modelización por futuros maestros (en particular, en analizar cómo influye el contexto en los procesos de resolución de las tareas de modelización y el uso de múltiples soluciones), nuestro interés está en la dimensión de la tarea, que se relaciona estrechamente con los conocimientos de los docentes sobre las tareas matemáticas (Chapman, 2013). Hein y Biembengut (2006) destacan que los docentes tienen poca formación sobre modelización; por tanto, es necesario que los futuros maestros experimenten la modelización empleando distintas herramientas, contextos y prácticas reflexivas (Doerr, 2007; Blum, 2015), lo que permitirá que desarrollen su competencia en modelización como base para desarrollar el resto de competencias necesarias para la enseñanza de la modelización.
Se ha hablado anteriormente de las dificultades de futuros maestros en resolución de problemas; para terminar esta sección se concretará en las dificultades en el contexto de las tareas de modelización relacionando tipo de error y fase del proceso de modelización. Existen bastantes trabajos que han investigado los errores, obstáculos y dificultades en los procesos de modelización (Maaß, 2005; Galbraith y Stillman, 2006; Schaap, Vos, y Goedhart, 2011; Wess, Klock, Siller, y Greefrath, 2021). Widjaja (2013) encontró que los futuros maestros tienen dificultades para identificar las variables que intervienen en sus modelos matemáticos y muestran dificultades para comparar y validar soluciones. Crouch y Haines (2007) identifican

cuatro grandes tipos de errores y dificultades:

i. incoherencia entre el mundo real y el modelo matemático;

ii. aplicar un modelo inadecuado en un contexto;

iii. desarrollo incorrecto o incompleto de conceptos o procedimientos matemáticos;

iv. no validar la resolución en el mundo real.

Klock y Siller (2020) desarrollaron una categorización que proporciona una visión general de las dificultades en cada etapa del ciclo de modelización. Se trata de una categorización exhaustiva que, para cada paso del proceso de modelización (elaboración del modelo real; construcción del modelo matemático; trabajo matemático; interpretación; validación), establece dificultades asociadas a una serie de subprocesos. Moreno, Martín, y Ramírez (2021, p. 121) parten del trabajo de Crouch y Haines (2007) para establecer el siguiente sistema de categorías de error durante el proceso de modelización:

Tabla 2-4.: Sistema de categorías de errores en el proceso de modelización (Moreno, Marín y Ramírez-Uclés, 2021, p.121)

Categoría	**Valores de la categoría**
Error de simplificación	Modelo real incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la realidad. Modelo real incompleto por incoherencias en las relaciones entre los elementos de la realidad considerados. No se elabora una función objetivo para el modelo real. No construye un modelo real
Error de matematización	Modelo matemático incoherente con el real. Modelo matemático incompleto. No se construye un modelo matemático.
Error de resolución	Errores conceptuales. Errores procedimentales. Resolución incompleta.
Error de interpretación	No se interpretan los resultados. No identificar o plantear posibles limitaciones del modelo.

Este sistema de categorías es similar a la categorización, algo más compleja, propuesta por Klock y Siller (2020). Moreno y cols. (2021) aplican este sistema de categorías de errores en

el análisis de las resoluciones de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria cuando se enfrentan a una tarea de modelización. Encontraron que todos ellos cometieron algún error durante el proceso de modelización; algunos de ellos durante el proceso de resolución, porque el problema les resultó complejo, pero la mayoría de errores se dieron durante las fases de simplificación (traslación de la situación real a un modelo real) y de validación de la solución. La conclusión es que los futuros profesores están poco familiarizados con los procesos de modelización, por lo que es necesaria formación inicial específica para mejorar su competencia en modelización.
En línea con estos trabajos, esta tesis también abordará no sólo un análisis del proceso de resolución de futuros maestros, también una clasificación de sus errores cuando resuelven un tipo concreto de problemas de modelización especialmente adecuado para la Educación Primaria: los problemas de Fermi o problemas de estimación en contexto real. Se adaptará el sistema de categorías anterior a las características de esta clase de problemas y se analizarán posibles relaciones con un aspecto clave de la competencia en resolución de problemas: la flexibilidad (el uso de múltiples estrategias de resolución).

2.4. Problemas de estimación en contexto real

En esta sección se abordará la clase de problemas de modelización que se emplean en este trabajo: los problemas de Fermi o de estimación en contexto real, y más concretamente, los problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie. Como se verá, son problemas adecuados para introducir la modelización en la Educación Primaria o Secundaria, y en ellos los conceptos de magnitud, medida y estimación son esenciales.

2.4.1. Magnitud, medida y estimación

El estudio de la medida es un tema de gran riqueza porque permite establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas (aspectos geométricos, aritméticos, de proporcionalidad, de resolución de problemas, etc.) y también entre las matemáticas y otras disciplinas (Callís, 2002). Debe hacerse una mención especial a la relación de la medida con la aritmética, la proporcionalidad y la geometría.
Las magnitudes son propiedades medibles de los objetos o fenómenos observables. La posibilidad de medir una magnitud de un objeto o fenómeno conlleva un tratamiento numérico de la misma, teniendo en cuenta los comportamientos que puede presentar (Frías, Gil, y Moreno, 2001). Estos autores definen el proceso de medida a partir de la comparación de la propiedad que se quiere medir en un objeto con una referencia (que da lugar a la cantidad de magnitud), y la asignación de un número a dicha cantidad. Es decir:

> Este proceso comienza a partir de la elección de una cantidad fija denominada unidad de medida que se compara con la cantidad de magnitud que se quiere medir averiguando el número de veces que la unidad está contenida en la cantidad de medir
>
> Mengual, 2017, p.23.

La acción de medir comporta la repetición de una unidad de medida sobre la extensión de la magnitud considerada, de manera que se cubra el intervalo sin huecos ni superposiciones (Dickson, Brown, y Gibson, 1991). La acción de medir tiene en cuenta elementos como los objetos materiales que deben medirse, las unidades de medida e instrumentos de medida empleados, el lenguaje y la notación empleada para expresar una medida (Godino, Batanero, y Roa, 2002). Se debe considerar que la medida puede ser directa, reiterando sucesivamente la unidad de medida, hasta completar la cantidad de magnitud que se disponga; e indirecta, cuando deben aplicarse procedimientos matemáticos para su obtención porque no es posible realizar la comparación directa de una unidad (Mengual, 2017).
El proceso de medida requiere procedimientos específicos, por ejemplo, tener en cuenta qué unidad de medida se escoge (debe ser de la misma clase de propiedad que se va a medir, así, unidad de longitud si se quiere medir una longitud, o unidad de tiempo si se quiere medir un intervalo temporal, etc.) y cuál será el nivel de precisión que se quiere, comprendiendo que una medida es una estimación aproximativa (Mengual, 2017).
Por tanto, un aspecto esencial de la medida es la estimación. Para Van de Walle, Karp, y Bay-Williams (2016) la estimación "se refiere a un número que es una aproximación adecuada para un número exacto dado el contexto particular, que se sustenta en algún tipo de razonamiento" (p. 241). Siguiendo a Mengual (2017, p. 30), se pueden distinguir tres tipos de estimación:

i) *Estimación numérica*: "habilidad de estimar visualmente un número de objetos dispuestos en un plano durante un tiempo limitado" (Pizarro, 2015, p. 29).

ii) *Estimación computacional*: "el proceso de transformar números exactos en aproximaciones y calcular mentalmente con estos números para obtener una respuesta razonablemente próxima al resultado exacto de un cálculo" (Sowder, 1988, p. 82).

iii) *Estimación métrica*: habilidad perceptiva de estimar diferentes magnitudes en objetos comunes (Hogan y Brezinski, 2003).

En esta tesis, cuando hablemos de estimación nos referiremos a la estimación métrica, que implica distintas habilidades: comprensión del concepto de unidad, imagen mental de la unidad y uso de estrategias para estimar (Hildreth, 1983). Castillo y cols. (2011) identifican las siguientes habilidades en el proceso de obtener una estimación métrica:

- Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.

- Percibir lo que va a ser medido o estimado.
- Comprender el concepto de unidad de medida.
- Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.
- Tener una imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.
- Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.
- Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.
- Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones.
- Verificar la adecuación de la estimación.

Por tanto, la estimación es una actividad compleja cuya enseñanza, según diversos autores, ha sido limitada y superficial (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, y Subrahmanyam, 2005). Sin embargo, la estimación de medida es rica desde el punto de vista didáctico, pues permite desarrollar estrategias flexibles y propias para obtener los resultados, para interpretarlos y para validarlos en contextos reales, fortaleciendo la relación del mundo real con el matemático (Cajaraville, 2007; Pizarro, 2015). Cockcroft (1985) recoge que la enseñanza de la medida debe estar basada en la habilidad de medir, usando herramientas como los dibujos o croquis y también instrumentos de medida, y realizando estimaciones que permitan la creación de referentes de tamaño o cantidad que permitan realizar estimaciones fundadas. Esto permite superar obstáculos didácticos como el abuso de procedimientos algorítmicos en el cambio de unidades o la idealización de objetos simplificados. Además, el uso de unidades de medida no convencionales o informales (pasos, cuerdas, etc.) ayuda a resolver problemas de escala y a interiorizar referentes de magnitud adecuados (Maranhao y Campos, 2000). Si la enseñanza de la medida no ha tenido mayor desarrollo y no se ha desarrollado en el aula su potencialidad didáctica en profundidad, es porque los docentes no se han sentido competentes en el tema y no han dispuesto de herramientas para desarrollar y evaluar actividades de estimación en contexto real (Frías y cols., 2001).

Gutiérrez (2004) presenta una revisión de investigaciones en didáctica de la medida de áreas, entre ellas las que recogen carencias y dificultades de estudiantes. Además, hay una falta de comprensión básica del manejo de las cantidades, que impide a los estudiantes ser capaces de razonar sobre la estimación y medición en situaciones complejas (Baturo y Nason, 1996). Existen otros estudios posteriores sobre las deficiencias en la capacidad estimativa de estudiantes de Secundaria (Castillo-Mateo, Segovia, Castro, y Molina, 2012), e incluso futuros maestros (Castillo-Mateo, 2012). La investigación de Castillo-Mateo y cols. (2012) ofrece una categorización de errores durante el proceso de estimación de cantidades de longitud y superficie. A partir de una serie de tareas de estimación sobre cantidades de longitud y superficie, categorizan diferentes tipos de error identificando su carácter (procedimental o conceptual) y su relación con el proceso de estimación. Los errores intrínsecos son debidos a las características propias del proceso estimativo, mientras que los extrínsecos son los derivados de conceptos mal adquiridos o procedimientos utilizados erróneamente. En la tabla **2-5** se presentan los diferentes tipos de error categorizados por Castillo-Mateo y cols. (2012).

Tabla 2-5.: Tipos de error en el proceso de estimación de longitudes y superficies (Castillo y cols., 2012)

Tipo de error	**Carácter**	**Relación con el proceso de estimación**
E1. Error de cálculo en las operaciones	Procedimental	Extrínseco
E2. Error de percepción de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E3. Error de significado de términos propios de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E4. Ausencia de unidades de medida	Conceptual	Extrínseco
E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas	Conceptual	Extrínseco
E6. Error de conversión de unidades de medida	Procedimental	Extrínseco
E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E8. Interiorización inadecuada de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E9. Error en la comparación de cantidades	Procedimental	Intrínseco
E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos	Procedimental	Extrínseco

El error *E1* se da cuando un alumno se equivoca en la realización de los cálculos para obtener la estimación; *E2* se comete cuando se confunde una magnitud con otra, por ejemplo, longitud y superficie; *E3* se da cuando se utiliza inadecuadamente algún término relacionado con la magnitud que se está estimando, por ejemplo, confundir ancho y largo; *E4* se comete cuando el estudiante estima un valor numérico o el resultado de una medida sin revelar a qué unidad de medida se refiere; *E5* se comete cuando se utilizan unidades de medida propias de otra magnitud, por ejemplo, metros en lugar de metros cuadrados; *E6* se da cuando no se convierte correctamente una unidad de medida a otra, por ejemplo, pasando de metros a centímetros; *E7* se da cuando el estudiante no tiene interiorizada una medida adecuada de algún referente de la magnitud a estimar, por ejemplo, piensa que en dos metros cuadrados caben dos personas; *E8* se comete cuando se toma como unidad de medida una cantidad que no se corresponde con dicha unidad de medida, por ejemplo, cuando se considera que un paso equivale a un metro; *E9* se da cuando se comparan e igualan cantidades que no lo son; *E10* se comete cuando el estudiante emplea una fórmula inadecuada, por ejemplo, que el área de un rectángulo es base más altura.

Por otro lado, es bien conocida la frecuente confusión entre área y perímetro (Dickson y cols., 1991). En efecto, el cálculo del área y del perímetro suele venir acompañado de fórmulas que estereotipan la comprensión y relación de los fundamentos espaciales de estos dos conceptos. En este sentido, Gutiérrez (2004) sugiere que el estudio de la superficie debe abordarse "un tratamiento geométrico que forme la base para el aprendizaje comprensivo y dé sentido al inevitable componente de cálculo numérico, en particular a las fórmulas, su estructura y uso" (p. 83). Más allá del conocimiento del contenido, según la revisión realizada por Pizarro (2015), los estudios sobre el conocimiento didáctico de los maestros y profesores son escasos: Subramaniam (2014) encuentra que los futuros maestros son capaces de usar referentes para realizar estimaciones de medida, pero eso no se traduce en un conocimiento idóneo para enseñar la estimación de medida. También la propia Pizarro (2015), en su tesis doctoral, encuentra carencias en tres aspectos sobre el conocimiento de estimación de medida de los maestros: cómo lo entienden, cómo lo usan y cómo lo representan.

Desde la perspectiva del conocimiento en resolución de problemas de futuros maestros, y dado que en esta investigación nos centramos en un tipo de problemas de modelización, los problemas de estimación de un gran número de elementos en superficies delimitadas, uno de los objetivos de la misma será estudiar los tipos errores de los futuros maestros, sintetizando tanto los errores propios del proceso de modelización descritos en la Tabla **2-4**, como los errores del proceso de estimación de longitudes y superficies implicadas mostrados en la Tabla **2-5**. En este sentido, hay un precedente importante en el trabajo de Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, y Adamuz-Povedano (2017, 2019), quienes analizan cómo modelizan los futuros maestros en situaciones de área y perímetro, encontrando limitaciones con las unidades de medida y en el uso de fórmulas para el cálculo y estimación de áreas.

Un alto rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real exige que el resolutor no cometa errores asociados al proceso de modelización, pero tampoco relacionados con las habilidades de estimación. Un buen resolutor de esta clase de problemas debe ser buen estimador. Sowder (1992) explica que los buenos estimadores se caracterizan por su flexibilidad, mientras que los malos estimadores suelen ser capaces de usar sólo una estrategia:

> Good estimators are flexible in their thinking, and they use a variety of strategies. They demonstrate a deep understanding of number and operations, and they continually draw upon that understanding. Poor estimators seem to be bound, with only slight variations, to one strategy—that of applying algorithms more suitable for finding an exact answer. Poor estimators have only a vague notion of the nature and purpose of estimation; they believe it to be inferior to exact calculation and equate it with guessing (p. 375).

El uso flexible de varias estrategias es un aspecto clave que también trataremos en las siguientes secciones, dentro del marco de la resolución de problemas de estimación en contexto real.

2.4.2. Problemas de Fermi y problemas de estimación de magnitudes no abarcables en superficies delimitadas

Se conoce poco sobre cómo el sentido de la medida influye en la competencia de modelización, aunque Larson (2010, p. 117) identificó que el razonamiento cuantitativo es una lente útil para aplicar una perspectiva de modelos y modelización. Tal y como se ha señalado en la sección anterior, los estudios sugieren que es importante que los alumnos comprendan cómo y por qué funciona la medición (Vasilyeva, Ludlow, Casey, y Onge, 2009), así como que tengan un sentido de las unidades de medida (Joram, 2003) para construir con éxito los sentidos de la medición y de la estimación. Desarrollando estas ideas, la investigación de Hagena (2015) muestra que la capacidad de manejar y estimar cantidades - es decir, tener un sentido de las unidades de medida (sentido de la medición) y de su número (estimación y orden de magnitud) - es necesaria para que los futuros profesores trabajen con éxito en tareas de modelización. Si, como afirma Hagena (2015), el sentido de la medida y de la estimación son necesarios para resolver con éxito muchas tareas de modelización, entonces adquieren especial relevancia las tareas de modelización que no sólo impliquen medidas y estimación, sino que pongan el foco en las mismas como parte central del proceso de construcción del modelo y obtención de la respuesta. Hablamos de los problemas de estimación en contexto real, es decir, aquellas tareas que plantean una situación real que demanda realizar una serie de estimaciones de medida para obtener la respuesta requerida, que es una estimación.
Dentro de este tipo de tareas, nos centraremos en los *problemas de estimación de magnitudes no abarcables* (PEMNA), que exigen del resolutor visualizar y comprender un número asociado a una magnitud muy grande, es decir, desarrollar una intuición para grandes cantidades. Ejemplos de PEMNA son estimar cuántos bares hay en la ciudad de Valencia o cuántos afinadores de piano hay en Chicago, problema propuesto por el Premio Nobel de Física Enrico Fermi (1901-1954) en una época en la que era una profesión más común que hoy en día (Albarracín, 2011). La estrategia para resolver este problema, recogida en Efthimiou y Llewellyn (2007), es la base de la resolución de este tipo de tareas de modelización: sortear la dificultad de no poder establecer un marco de referencias fiables debido a la magnitud de la cantidad estudiada, y centrarse en aspectos concretos que sí pueden ser estimados. Albarracín (2011) resume la resolución de este problema en el siguiente párrafo:

> Evidentment, si volem saber quants afinadors de piano hi ha a Chicago sense conèixer la dada real, són necessaris alguns coneixements demogràfics, socials i/o tècnics que ens han de permetre determinar un valor aproximat per als factors parcials que utilitzarem. En aquest cas, és necessari saber que Chicago té uns tres milions d'habitants, que una família americana mitjana està formada per quatre membres i que una de cada cinc famílies té un piano. Aquestes dades estan associades al grau de coneixement de l'entorn del problema i poden ser estimades amb una dificultat comparativament menor que la pregunta inicial.

> A partir del coneixement del nostre entorn social, podem suposar que un afinador de pianos treballa unes 48 setmanes a l'any, amb una jornada de 8 hores diàries i de dilluns a divendres, i que un afinador pot treballar en 4 pianos en un sol dia. Aquestes dades requereixen un coneixement de la feina d'un treballador qualsevol amb la dificultat de saber quant temps requereix afinar un piano.
> Una vegada ja tenim clares aquestes dades, i pensant que un piano s'ha d'afinar un cop a l'any, només ens resta calcular que un afinador podrà afinar $48 \times 5 \times 4 = 960$ pianos en un any. Com que podem determinar que a Chicago hi haurà $3{,}000{,}000 \div 4 \div 5 = 150{,}000$ pianos, el nombre d'afinadors haurà de ser de $150{,}000 \div 960$, uns 160 afinadors aproximadament (p. 41).

Además de por sus trabajos en el campo de la Física nuclear y de partículas, Enrico Fermi fue célebre entre sus estudiantes por entrenar su sentido de la estimación de medidas planteando este tipo de problemas. De ahí que los PEMNA sean también conocidos como *problemas de Fermi*. Ärlebäck (2009) ofrece una definición clara y sintética de los problemas de Fermi:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations (p. 331).

Carlson (1997) describe el proceso de resolución de los problemas de Fermi como "the method of obtaining a quick approximation to a seemingly difficult mathematical process by using a series of educated guesses and rounded calculations" (p. 308). Sólo el análisis detallado de la situación del problema permite descomponerlo en otros subproblemas más simples (Carlson, 1997). El proceso de identificación de las estructuras esenciales de la situación implica la síntesis de un modelo (Robinson, 2008). Ärlebäck (2009) descompone el proceso de resolución de un problema de Fermi en las siguientes actividades que están, a su vez, relacionadas con el ciclo de modelización (Blum y Leiß, 2007):

i. *Leer*: lectura y comprensión de la situación real que plantea el problema.

ii. *Desarrollar un modelo*: simplificar y estructurar la realidad encontrando patrones o regularidades y construyendo un sistema conceptual que representa la situación real comprendida por el resolutor.

iii. *Estimar*: hacer las estimaciones de medida necesarias para cuantificar el modelo de la situación.

iv. *Calcular*: realizar los cálculos para encontrar la estimación final requerida por el problema.

v. *Validar*: interpretar y contrastar el resultado y el modelo con la situación real.

vi. *Escribir*: resumir los resultados y escribir la solución.

Como se ha dicho, existe un vínculo claro entre el proceso de resolución de problemas de Fermi descrito previamente y el trabajo desarrollado durante el ciclo de modelización para la construcción de un modelo matemático (Borromeo-Ferri, 2006; Ärlebäck, 2009; Albarracín y Gorgorió, 2014). El desarrollo de un modelo matemático para describir un determinado fenómeno real es un proceso complejo que, a menudo, requiere realizar simplificaciones y asumir hipótesis antes del trabajo puramente matemático, como ocurre cuando se resuelven problemas de Fermi. De hecho, en los problemas de Fermi, el enunciado presenta una situación de la que se conoce poca información concreta o formulada de manera difusa, lo que obliga a hacer suposiciones y a simplificar para obtener una solución a la pregunta inicial (Efthimiou y Llewellyn, 2007). En la vida cotidiana hay muchas situaciones en las que una estimación es la mejor manera de responder a una pregunta, bien porque no se tienen los medios para responderla con precisión, bien porque no se tiene toda la información necesaria. Los problemas de Fermi son, por tanto, apropiados para introducir la modelización en las aulas de Primaria y Secundaria, contribuyendo a cultivar el pensamiento crítico (D'Ambrosio, 1989; Ärlebäck y Bergsten, 2010; Czocher, 2016, 2018; Borromeo-Ferri, 2018; Albarracín y Gorgorió, 2019). Sriraman y Knott (2009) afirman que estos problemas de estimación tienen como objetivo que los estudiantes hagan conjeturas razonadas. Otros autores (Albarracín, 2011, recogiendo las ideas de Ross y Ross, 1986) señalan que un resolutor bien informado puede encontrar una solución a un problema de Fermi a partir de una cadena de estimaciones. Teniendo en cuenta todas estas particularidades, Ärlebäck (2009) caracteriza los problemas de Fermi como:

- *Accesibles*: no requieren conocimientos matemáticos específicos que no estén al alcance del alumnado de Primaria, y se pueden proponer individualmente o por grupos, con distintos niveles de complejidad (Albarracín, 2011)
- *Reales*: presentan situaciones reales, relacionadas con actividades de la vida cotidiana, abiertas, lo que ofrecen gran diversidad de posibilidades en su abordaje.
- *Falta información*: el resolutor debe completar y/o estructurar información para resolver el problema.
- *No hay datos*: el resolutor debe hacer estimaciones necesarias para obtener una solución numérica justificada.
- *No se cierran*: promueven la discusión entre el alumnado.

Otros autores (Peter-Koop, 2004; Sriraman y Lesh, 2006) coinciden con las características anteriores cuando defienden que los problemas de Fermi más útiles desde el punto de vista didáctico son aquellos que tratan sobre situaciones del mundo real y, especialmente, contextos cercanos de la vida cotidiana. Albarracín (2011) recoge la siguiente reflexión de Sriraman y Knott (2009):

> We argue that Fermi problems which are directly related to the daily environment are more meaningful and offer more pedagogical possibilities than purely intellectual exercises such as computing the number of piano tuners in a city or the number of grains of sand in a glass. Fermi problems involving estimates of fresh water consumption, gasoline consumption, wastage of food, amount of trash produced and so on have the potential to lead to a growing awareness of ecological problems related to the environment we live in as well as provoke critical thought when checking the accuracy of computations with different governmental and corporate resources. (...) Students would learn so much more about their world, how to live in it, deal with it, understand it, influence it, make it a better world. What a concept for education!
>
> Sriraman y Knott, 2009, p.220-221.

En este sentido, es importante no sólo que los estudiantes usen los problemas de Fermi para pensar críticamente sobre el mundo, también deben experimentarlos en su entorno. Algunos ejemplos de problemas de Fermi usados en investigaciones previas son los siguientes: estimar el número de coches acumulados en una retención de 3 km en la autopista (Peter-Koop, 2009); estimar la cantidad de latidos que da un corazón humano durante una vida (García, 2013); estimar cuántos centros comerciales hay en Estados Unidos (Anderson y Sherman, 2010). Además, en contextos cercanos o conocidos de la vida cotidiana a menudo nos preguntamos por cuántos elementos hay dispuestos en una superficie delimitada.

Figura 2-5.: Fiesta de Nochevieja en Times Square y superficie delimitada en Google maps.

Podemos preguntar, por ejemplo, cuántas personas pueden entrar en Times Square durante la fiesta de Nochevieja (Figura **2-5**). Si tenemos un mapa a escala de la plaza, podemos intentar estimar las distancias o incluso el área de la superficie. Para ello, tenemos que delimitar qué superficie consideramos y simplificar su forma (en este caso podemos suponer que Times Square es más o menos como un rectángulo en el cruce de la Séptima avenida y la calle 45). Entonces, podemos suponer que las personas se distribuirán de forma irregular, pero ciertamente, muy cerca unas de otras. Para simplificar, si queremos obtener una estimación máxima del número de personas, podemos suponer que no hay obstáculos, es decir, que todo el espacio está lleno de gente. Por lo tanto, tenemos que hacer algunas estimaciones intermedias: por ejemplo, establecer una densidad de cinco personas por metro cuadrado. Entonces, trabajando matemáticamente, se multiplica el área (estimada con ayuda del mapa) por la densidad y se obtiene una estimación de la cantidad de personas que celebran el fin de año en Times Square.

2.4.3. Tipos de resolución de problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada

Hay varias maneras de resolver un problema de Fermi o PEMNA como el anterior, pues se trata de un problema abierto. A este tipo de problemas los denominaremos, a partir de ahora, *problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada*.
Hildreth (1983) considera que existen varias estrategias de estimación de medidas, que son las implicadas en este tipo de problemas. Castillo y cols. (2011) desarrollan las estrategias de Hildreth para la estimación de medidas de longitud y superficie. Algunas de ellas son la iteración de la unidad, que consiste en iterar mentalmente una unidad de medida (presente en el espacio del problema o ausente); descomponer una superficie en superficies más pequeñas (iguales o diferentes); comparar un objeto con otro del que se posee información y se toma como referente de medida (presente o ausente); servirse de objetos iguales regularmente distribuidos a lo largo de una longitud. Además, hay destrezas necesarias para desarrollar estrategias de estimación de medidas, en concreto lo que llaman técnicas indirectas, como el uso de fórmulas para calcular un área o del teorema de Pitágoras para calcular distancias.
Este tipo de estrategias y técnicas asociadas a la estimación de medidas aparecen integradas en el proceso de resolución de problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada. Hemos visto que esta clase de problemas de Fermi se contextualizan en el mundo real y el proceso de resolución corresponde con el ciclo de modelización. Puesto que se trata de tareas abiertas, hay distintas aproximaciones para abordar el estudio de las posibles resoluciones de un problema de modelización. Debemos establecer qué se considerará en esta tesis como tipo de resolución. Achmetli, Schukajlow, y Rakoczy (2019) identifican tres formas (dos distintas y una combinación de ambas) de diferenciar las resoluciones de un problema de modelización ubicado en el mundo real:

> (1) multiple solutions that (a) occur because different assumptions are made to resolve vague conditions and (b) differ in their outcomes/results, and (2) multiple solutions that differ in the mathematical procedures (sometimes also called solution methods or solution strategies) applied to solve the problems, or a combination of these two types of multiple solutions
>
> Achmetli y cols., 2019, p.45.

La primera es establecer diferentes hipótesis que generalmente conducen a diferentes resultados. La segunda es aplicar diferentes estrategias matemáticas, lo que normalmente conduce al mismo resultado matemático. La tercera es la combinación de las dos anteriores. Esta tercera vía es la que emplearemos en esta tesis para abordar los diferentes tipos de resolución de un problema de estimación de grandes cantidades en superficies delimitadas. Seguimos en esto el enfoque de Ferrando, Albarracín, y cols. 2017, quienes parten de la definición de modelo de Lesh y Harel (2003) como sistema formado por conceptos y representaciones simbólico-matemáticas y por procedimientos asociados a su uso, para definir un instrumento de análisis de producciones escritas de los estudiantes de Secundaria al resolver problemas de estimación de grandes cantidades en superficies delimitadas. Considerando la diferencia entre resolución, solución y resultado de Puig (1996), entendemos resolución como el desarrollo de un modelo matemático y los procedimientos asociados para alcanzar la estimación (resultado). El instrumento de análisisde las resoluciones se basa en dos componentes interrelacionados: el modelo inicial y la estrategia asociada. En esta tesis, como se verá, se refina este instrumento y se adapta para analizar las producciones de futuros maestros. De hecho, la descripción de las componentes (modelo inicial y estrategia) que puede leerse a continuación es una reelaboración de la que aparece en Ferrando, Albarracín, y cols. (2017) que la clarifica.

Los problemas de Fermi que se van a tratar en esta tesis son problemas sencillos de modelización, por tanto su resolución se puede esquematizar mediante una simplificación del ciclo de modelización que sirve para hacer un primer análisis de las producciones de los estudiantes y permite clasificarlas en tipos de resolución. En efecto, el primer componente, el *modelo inicial*, constituye una primera representación simbólica de la realidad del problema, y es equivalente a lo que en el ciclo de modelización mostrado en la Figura **2-4** se denomina modelo real. En este caso, si un problema plantea estimar cuántos elementos caben en una superficie, el modelo inicial se refiere a las simplificaciones e hipótesis esenciales que el resolutor asume sobre la superficie y la configuración de los elementos cuyo número debe ser estimado. Es decir, a cómo el resolutor distribuye los elementos en la superficie. Por ejemplo, puede estructurar el espacio de un problema como una región rectangular sobre la que disponer los elementos en filas (o columnas); esto reduce el problema inicial de magnitudes bidimensionales (áreas) a uno de magnitudes unidimensionales (longitud). Esta configuración corresponde a un modelo inicial que se considera *unidimensional* (1D) porque implica magnitudes lineales. La otra alternativa es que el resolutor establezca un modelo basado en una disposición no lineal de los objetos en la región, basando su resolución en el cálculo de áreas. Esta configuración corresponde a un modelo inicial *bidimensional* (2D).

El segundo componente que permite clasificar las resoluciones de este tipo de problemas es la *estrategia* asociada al modelo inicial, y recoge para este tipo de problemas las fases de matematización (se trata de una matematización sencilla, bien trabajando con longitudes, si se parte de un modelo inicial 1D, o bien trabajando con áreas, si se parte de un modelo inicial 2D) y de trabajo matemático del ciclo de modelización. En su tesis, Albarracín (2011) presenta un árbol de estrategias de resolución de un conjunto de PEMNA más amplio que los problemas de estimación de grandes cantidades en una superficie delimitada (Figura **2-6**). Esta clasificación de estrategias aparece publicada posteriormente en Albarracín y Gorgorió (2014).

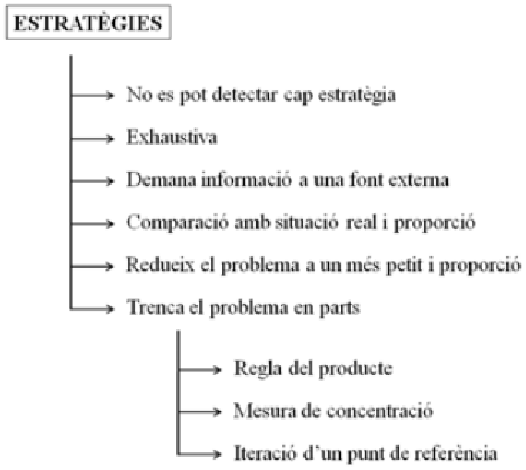


Figura 2-6.: Árbol de categorías de estrategias para PEMNA recogido de Albarracín (2011)

Estas estrategias se interpretan como una cadena de procedimientos relacionados con los conceptos de medición y proporcionalidad que permiten obtener la estimación del resultado. Tomando como base el árbol de estrategias de la Figura **2-6** (Albarracín, 2011; Albarracín y Gorgorió, 2014), en Ferrando y cols. (Ferrando, Albarracín, y cols., 2017) se analizan las estrategias de estudiantes de Secundaria a partir de conceptos, procedimientos y lenguajes, pero no están claramente sistematizadas como para establecer una categorización de tipos de resolución específica para problemas de estimación de grandes cantidades en superficie delimitada. La sistematización y categorización de combinaciones de modelos iniciales y estrategias en un árbol de soluciones múltiples se encuentra en Albarracín, Ferrando, y Gorgorió (2021), quienes simplifican y organizan las que aparecen en los trabajos citados previamente:

i. La estrategia más básica (pero poco eficiente si el número de elementos a estimar es muy grande) es el *recuento*. No se desarrolla un modelo inicial de la situación real ni se utilizan procedimientos matemáticos basados en la medida y/o la proporcionalidad.

ii. Se puede proceder mediante el uso de *distribución en cuadrícula* (Ferrando, Albarracín, y cols., 2017), corresponde a un modelo inicial en el que los elementos cuyo número se quiere estimar se disponen de forma ordenada en el plano por filas o columnas. El procedimiento asociado a este modelo inicial es el producto cartesiano (elementos por fila $\times$ elementos por columna) y permite obtener el número total de elementos.

iii. También se puede argumentar a partir del espacio (longitud o área) ocupado por un elemento, y obtener el resultado de la estimación dividiendo el área total (o longitud total) por el área (o longitud) ocupada por un elemento. Esto corresponde a la estrategia de *unidad base*, también denominada iteración de la unidad (Castillo y cols., 2011; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017).

iv. Por último, es posible razonar a partir de una magnitud intensiva, la densidad, calculando el número de elementos en una unidad de área (o longitud) y multiplicando este valor por el número total de unidades de área (o longitud); esto corresponde a la estrategia de *densidad* (Ferrando, Albarracín, y cols., 2017).

Así, a partir de la idea de resolución como sistema compuesto por modelo inicial y estrategia asociada, Albarracín y cols. (2021) elaboran un diagrama de árbol con tipos de resolución (Figura **2-7**).

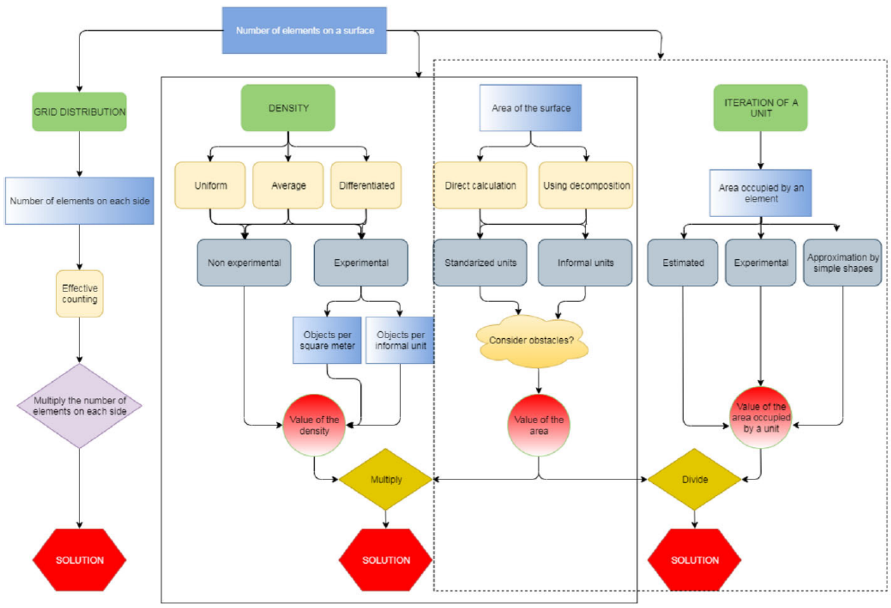


Figura 2-7.: Árbol de tipos de resolución para problemas de estimación de grandes cantidades en superficies delimitadas (Albarracín y cols., 2021)

Este árbol refleja la complejidad y variabilidad del proceso de resolución, a la vez que simplifica la forma de presentar el espacio de soluciones (Leikin y Levav-Waynberg, 2008) generado por los estudiantes de Secundaria. En el árbol se observa que durante el proceso de resolución el estudiante puede incorporar al modelo construido aspectos cuantificables del contexto real que proporcionan mayor precisión en la estimación obtenida. Estos aspectos se denominan *factores de complejidad* (Albarracín y cols., 2021), y se relacionan con características del contexto que pueden identificar los alumnos en su resolución: irregularidad en la forma o tamaño de los elementos a estimar; irregularidad en la superficie; homogeneidad o heterogeneidad en la distribución de los elementos. Los factores de complejidad que recoge el árbol de resoluciones son los siguientes:

- Para el cálculo del área de la superficie delimitada sobre la que hay que estimar la cantidad de elementos el árbol recoge dos factores de complejidad. El primero consiste en que se puede diferenciar espacio útil, cuya área puede ser ocupada por los elementos, de espacio inútil, en el que la presencia de obstáculos impide que puedan colocarse elementos y cuya área debe ser descontada del área total. El segundo consiste en aproximar la superficie del problema, sobre todo si no es regular, por figuras geométricas simples.

- En el tipo de resolución basado en densidad, el árbol recoge dos factores de complejidad que pueden incorporarse: densidad promedio y densidad diferenciada. Esto supone que los elementos se distribuyen de manera heterogénea por la superficie; o bien se puede trabajar descomponiendo la superficie total en zonas con distinta densidad (densidad diferenciada), o bien calculando varias densidades y haciendo una media para trabajar con la superficie total.

En los capítulos 4 y 5 explicaremos la adaptación y simplificación de este árbol de resoluciones a la categorización a las producciones de futuros maestros, obteniendo categorías análogas de tipos de resolución para futuros maestros. Además, en esos mismos capítulos, se explicará la adaptación y la ampliación del análisis y de la categorización de los factores de complejidad a las producciones de futuros maestros. Es relevante conocer similitudes y diferencias entre las resoluciones de futuros maestros y estudiantes no universitarios. De hecho, existen diferencias entre los tipos de resolución empleados por estudiantes de Primaria (de 10 a 12 años de edad) y los de Secundaria (Albarracín y Gorgorió, 2019). Ferrando y Albarracín (2021) analizan cómo evolucionan las resoluciones desde los 8 años hasta los 16 años de edad cuando resuelven secuencias de problemas de Fermi. En la Figura **2-8** se muestra la evolución en los tipos de estrategia empleados:

Model		Strategy	2nd	4th	6th	8th	10th
1-dimensional	Only counting	Exhaustive	3				
		Effective	1				
	Fitted rectangles		1				
	Grid distribution	Exhaustive	1				
		Effective		2	1		1
		Linear Reference Point		1	2	1	1
		Linear Concentration Measurement		1	1	1	
2-dimensional	Irregular homogeneous	Reference point			1	1	2
		Concentration Measurement				2	2
	Irregular heterogeneous	Concentration Measurement					1

Figura 2-8.: Tipos de resolución (modelo inicial + estrategia) por cada curso escolar, desde los 8 a los 16 años, Ferrando y Albarracín, 2021.

Se observa que los primeros años los estudiantes no dominan el concepto de área y utilizan es-

trategias de recuento o modelos lineales, tipo distribución en cuadrícula. En los últimos años las resoluciones evolucionan hacia la unidad base (*reference point*) y sólo aparece densidad (*concentration measurement*) en los resolutores con mayor madurez matemática. Conocer los tipos de resolución de futuros maestros aporta información complementaria a este estudio longitudinal para problemas de Fermi, aunque no es el tema de esta tesis doctoral.
El interés en clasificar los tipos de resolución de problemas de estimación de grandes cantidades en una superficie delimitada se explicará con más profundidad en la siguiente sección, y tiene relación con cómo las características del contexto del problema pueden influir en el tipo de resolución desarrollado por los futuros maestros, y con cómo esto podría afectar a su uso flexible de varios tipos de resolución. En Albarracín y cols. (2021) hay un primer intento, exploratorio, de relacionar tipo de resolución y características de contexto:

> In this way, certain contexts facilitated or promoted the emergence of some strategies that appeared more frequently, while, contrariwise, they were not used at all in other contexts. However, we did not find any direct relationship between the characteristics of the problem context (i.e. relative size of the elements and the enclosure, shape of the enclosure, shape of the elements or even arrangement of the elements on the surface) and those strategies identified that might suggest that the context determines the strategies.
>
> Albarracín y cols., 2021, p.1225.

También emerge una idea intuitiva del potencial de utilizar secuencias de problemas de estimación reales en los que hay variación del contexto para promover el uso flexible de múltiples tipos de resolución o estrategias:

> Nonetheless, although the context does not appear to determine the strategy, the variety of contexts promotes the emergence of different strategies. Given that students adapted their approaches to the needs of each specific context, the diversity of strategies could not have been generated if the problems were decontextualized or were stated in camouflaged contexts.
>
> Albarracín y cols., 2021, p.1225.

En esta tesis, un diseño de secuencias de este tipo de problemas basado en controlar algunas características del contexto relevantes permitirá estudiar estas relaciones combinando técnicas cualitativas y cuantitativas.

2.5. Flexibilidad en resolución de problemas

2.5.1. Relevancia del estudio de la flexibilidad en resolución de problemas

La caracterización del conocimiento matemático en conocimiento conceptual y conocimiento procedimental puede ser atribuida a Hiebert y Lefevre (1986). Definen el conocimiento conceptual como:

> knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network
>
> Hiebert y Lefevre, 1986, pp.3-4.

El conocimiento procedimental es definido como:

> One kind of procedural knowledge is a familiarity with the individual symbols of the system and with the syntactic conventions for acceptable configurations of symbols. The second kind of procedural knowledge consists of rules or procedures for solving mathematical problems. Many of the procedures that students possess probably are chains of prescriptions for manipulating symbols
>
> Hiebert y Lefevre, 1986, pp.7-8.

Estos dos tipos de conocimiento han sido tema de interés y foco de debate a lo largo de los años (Castro, Prat, y Gorgorió, 2016). Se ha abordado cómo se desarrollan e interactúan ambos conocimientos, y aunque no existe un consenso sobre cómo medirlos, se asume que no pueden separarse (Hiebert y Lefevre, 1986). La mayoría de investigadores en educación matemática han puesto el foco en la distinción del tipo y la calidad del conocimiento, desde escaso hasta ricamente conectado (Castro y cols., 2016; Star, 2007). Star (2005) abre un debate porque propone revisar la investigación sobre estos dos tipos de conocimiento, ya que el conocimiento procedimental no ha recibido la atención necesaria en la investigación en educación matemática durante las últimas décadas. En efecto, la revisión de la investigación sobre este tema sugiere - como puede verse en la influyente caracterización de Hiebert y Lefevre (1986) recogida con anterioridad - que el conocimiento procedimental es profundo, ricamente conectado, flexible y significativo, mientras que el conocimiento procedimental se asocia a la mecanización, a procesos lineales, poco conectados y no profundos (Castro y cols., 2016; Star, 2005).

Frente a esta perspectiva, Star (2005, 2007) defiende la reconceptualización del conocimiento procedimental y rechaza que éste sea necesariamente superficial y secuencial. La idea de que un paso de un procedimiento viene conectado con el siguiente paso sugiere que el conocimiento procedimental es un conocimiento desconectado, pero "there are many different kinds of procedures, and the quality of the connections within a procedure varies" (Star, (2005), p. 407). Algunos procedimientos son algoritmos, y por tanto secuenciales, pero otros procedimientos son heurísticos: procedimientos más abstractos que pueden ser de ayuda en la resolución de problemas. El uso de heurísticos es un ejemplo de conocimiento procedimental profundo y conectado. La investigación en conocimiento conceptual ha llegado a confundir conocimiento de los conceptos con las formas en que pueden ser conocidos; sin embargo, según Star (2005), el conocimiento procedimental se ha asociado a conocimiento de una sola forma de procedimiento (los algoritmos) y una sola forma de ser conocido (superficial sin conexiones).
Además de los heurísticos como procedimientos ricos y profundos, Star (2005) propone un ejemplo de conocimiento procedimental profundo: la flexibilidad en la resolución de problemas. En particular, se refiere a su investigación en la resolución de ecuaciones de primer grado, en la que observa que:

> Skilled equation solvers have the ability to use the equation-solving actions flexibly, so that a maximally efficient solution can be generated for any problem type. I consider flexibility to be an indicator of deep procedural knowledge.
>
> Star, 2005, p.409.

A continuación, Star (2005) afirma que "flexibility is a nontrivial and often overlooked competency" (p. 409). Lo cierto es que el panorama ha cambiado desde entonces, y la flexibilidad ha ido ganando un lugar como componente relevante de la competencia matemática (CCSSI, 2010). En este trabajo, la resolución de problemas de Fermi conlleva el desarrollo de un modelo matemático entendido como un sistema conectado de conceptos y procedimientos, basado en la idea de modelo inicial y estrategia asociada. Se consideran los procedimientos como una forma de conocimiento profunda y conectada a los conceptos y representaciones de la realidad. De hecho, en esta tesis se afrontan aspectos que Star (2005) señala como propios del conocimiento procedimental profundo y que tienen vinculación con la flexibilidad en resolución de problemas:

> There are subtle interactions among the problem's characteristics, one's knowledge of procedures, and one's problem-solving goals that might lead a solver to implement a particular series of procedural actions.
>
> Star, 2005, p.409.

Así, la flexibilidad es un componente importante de la competencia matemática, y en particular, la flexibilidad en resolución de problemas es un ejemplo de conocimiento procedimental profundo y conectado (Baroody, 2003; Star y Seifert, 2006; Rittle-Johnson y Star, 2009a). Levav-Waynberg y Leikin (2012) han estudiado el papel de las *multiple solution tasks* en el desarrollo de la creatividad matemática, que abordan con tres criterios: fluidez o soltura, flexibilidad y originalidad. Las *multiple solution tasks* son problemas en los que el investigador dispone de un espacio de soluciones, por lo que puede pedir a los resolutores que resuelvan una tarea de distintas maneras, o usar el espacio de soluciones para analizar si, al variar las tareas, los resolutores utilizan diferentes resoluciones (Leikin y Levav-Waynberg, 2008). De hecho, como componente de la creatividad matemática, Leikin (2009) define flexibilidad como la capacidad de "generating new solutions when least one has already been produced" (p. 132). Como se ha visto en el apartado 2.4.3, los problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada permiten categorizar un espacio de soluciones delimitado y, por tanto, dan lugar a investigar su potencial como *multiple-solution tasks* para promover la flexibilidad.
El uso flexible de las estrategias de resolución es un indicador no solo de la creatividad matemática, sino, desde una perspectiva psicológica, de la variabilidad cognitiva, que permite a los individuos resolver problemas con rapidez y precisión (Krutetskii, 1976; Spiro, Coulson, Feltovich, y Anderson, 1988; Heinze y cols., 2009). Demetriou (2004) señala que los individuos con pensamiento flexible desarrollan conceptos más refinados y lo asocia a la producción de soluciones más creativas y apropiadas a las características del entorno. La flexibilidad se considera una competencia matemática importante, ya que es necesaria para que los estudiantes adquieran la capacidad de adaptar sus resoluciones a las características de la tarea o el contexto (Kilpatrick y cols., 2001). En el marco de la resolución de problemas, como se ha dicho, los estudios sobre el uso flexible de múltiples soluciones consideraron que la flexibilidad es esencial para construir un conocimiento profundo y conectado (Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous, y Strawhun, 2005; Rittle-Johnson y Star, 2009b; Rittle-Johnson, Star, y Durkin, 2009; Rittle-Johnson y Star, 2009a; Leikin y Levav-Waynberg, 2008; Levav-Waynberg y Leikin, 2012).
En su entrada para la *Encyclopedia of the Sciences of Learning*, Nistal, Van Dooren y Verschaffel (2012) definen flexibilidad en resolución de problemas de la siguiente manera:

> The noun flexibility derives from the Latin verb "flectere", to bend. Literally, flexibility refers to the capability of bending without breaking. At a more metaphorical level, flexibility refers to someone's predisposition to readily adapt his or her behavior to the (changing) requirements of any given situation. In the sciences of learning, flexibility in problem solving is generally understood as the ability to choose the most appropriate strategy and/or representation for the problem at hand, for a given student, and in a given context (p. 1302).

A diferencia de la definición de flexibilidad como componente de la creatividad matemática empleada por Leikin (2009), en la definición anterior para resolución de problemas se habla de cambio de estrategia, pero también de adaptación de la misma a un problema o contexto concreto. Aunque para algunos autores las nociones de flexibilidad y adaptabilidad son sinónimas (Star y Rittle-Johnson, 2008), otros distinguen entre el uso flexible de estrategias, que se refiere a la capacidad para escoger entre diferentes estrategias – sin seleccionar necesariamente la más adecuada –, y el uso adaptativo de las estrategias, que implica la selección de la más adecuada a un problema concreto (Heinze y cols., 2009). Así, Star y Rittle-Johnson (2008) definen *flexibilidad en resolución de problemas* como "knowledge of (a) multiple strategies and (b) the relative efficiency of these strategies" y apostillan que "a strategy is defined here as a step-by-step procedure for solving a problem" (p. 566). En su definición, el conocimiento de la eficiencia de una estrategia implica que el uso adaptable de varias estrategias de resolución está contenido en el uso flexible. Por ejemplo, en resolución de ecuaciones de primer grado:

> To solve an equation such as $3(x+1) = 15$, a student could (a) choose one of these four transformations at random, determine if the transformation can be applied in the given equation, apply it, evaluate whether the resulting equation is closer to the solution form of $x = a$, and then repeat this process; (b) follow a set order for executing transformations - a 'standard' strategy for solving this linear equation is to distribute the 3, subtract 3 from both sides of the equation, and then divide both sides of the equation by 3; or (c) decide which transformation to apply based on features of the particular problem - for this equation, since the right side is evenly divisible by 3, a student may choose to divide both sides by 3 as a first step. All three strategies should lead to the correct solution, but they vary in how efficient they are. The last, selecting a strategy using particular features of the problem, is typically more efficient - it often involves fewer steps and fewer computations and thus should be faster and less error prone.
>
> Star y Rittle-Johnson, 2008, p.568.

Como se ve en la cita anterior, es relativamente fácil definir eficiencia en problemas de naturaleza intra-matemática sencillos como la resolución de una ecuación de primer grado (en términos de coste computacional: se necesita un número menor de pasos), pero es complicado definir qué se entiende por eficiencia en problemas reales y complejos como los que utilizamos en nuestra investigación. Por consiguiente, en las próximas subsecciones discutiremos definiciones alternativas de flexibilidad basadas en variabilidad de resoluciones, pero que no incluyen la adaptabilidad. También discutiremos los problemas que puede implicar la definición de adaptabilidad - y eficiencia - en problemas de contexto real.

Además de la importancia de la flexibilidad en los procesos cognitivos asociados a la actividad matemática, y en concreto a la resolución de problemas, queremos destacar que recientemente ha aumentado la investigación en factores afectivos, motivacionales y socioculturales que influyen en la inclinación de los estudiantes a escoger de manera flexible entre distintas estrategias de resolución de problemas (Nistal y cols., 2012). Así, establecer tareas que promuevan el desarrollo de múltiples soluciones mejora la metacognición, la autorregulación, la autoeficacia y la experiencia de competencia e interés en la resolución de problemas (Schukajlow y Krug, 2012, 2013, 2014; Schukajlow, Achmetli, y Rakoczy, 2019).

2.5.2. Flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea

Si la definición de flexibilidad en resolución de problemas de Star y Rittle-Johnson (2008) recoge variabilidad (conocimiento de múltiples estrategias de resolución) y adaptabilidad (conocimiento de cuál es la estrategia más eficiente según características específicas del problema), existen otras conceptualizaciones de la flexibilidad en resolución de problemas que la distinguen de adaptabilidad e identifican con la variabilidad en el uso de estrategias cuando se resuelve un problema o una secuencia de problemas. Heinze y cols. (2009) resumen los distintos enfoques del siguiente modo:

> The notions "flexible" and "adaptive" in the context of research of individual strategy application in mathematics education are used with different meanings. For some researchers, these notions are synonyms, whereas others distinguish between flexible use of strategies, which means that individuals are able to choose flexibly between different strategies, but do not necessarily select the most appropriate strategy, and adaptive use of strategies that in addition encompasses the choice of the most appropriate strategy.
>
> Heinze y cols., 2009, p.536.

Estos autores señalan que la existencia de estos modos distintos de ver flexibilidad y adaptabilidad puede ser un problema menor en la investigación en este campo, un asunto terminológico. Sin embargo, en esta tesis diferenciaremos flexibilidad y adaptabilidad porque vamos a seguir la conceptualización de flexibilidad de Elia y cols. (2009). Estas autoras exploran el uso de estrategias de resolución para problemas intra-matemáticos no-rutinarios en estudiantes de Primaria con alto rendimiento. Para ello, utilizan una categorización de los tipos de resolución basada en heurísticos, y distinguen dos tipos de flexibilidad en la resolución de problemas no-rutinarios: *flexibilidad inter-tarea*(cambio de estrategia entre tareas) y *flexibilidad intra-tarea* (cambio de estrategia dentro de una tarea). En su estudio sobre problemas intra-matemáticos no-rutinarios, identificaron que los estudiantes con flexibilidad inter-tarea tenían más éxito que los que perseveraban en la misma estrategia. Es un resultado previsto porque cambiar de estrategia entre tareas es condición necesaria para desarrollar un uso adaptable de las resoluciones. ¿Pero qué ocurre con la flexibilidad intra-tarea? Es célebre la frase de Polya (1957) en la que afirma que "it is better to solve one problem five different ways, than to solve five problems one way", pues encontrar varias vías para resolver un problema es un indicador de creatividad matemática (Leikin, 2009). Sorprendentemente, en el estudio de Elia y cols. (2009) se encontró que la flexibilidad intra-tarea no estaba relacionada con el rendimiento:

> students who changed strategies within the problems were equally successful with the students who applied only one strategy for the solution of the problems. This finding suggests that intra-task strategy flexibility did not support the students in reaching a correct answer. A qualitative analysis of the intra-task strategy flexibility showed that comprehending the problem situation intervened with the solution strategies and therefore influenced the correctness of the answer.
>
> Elia y cols., 2009, p.616.

Parece que la comprensión de las características de la situación que plantea problema es determinante en el uso correcto de la estrategia de resolución, y por eso la inter-flexibilidad está ligada a un buen rendimiento, mientras que la intra-flexibilidad, que implicaría generar varias estrategias con independencia de estas características, no es garantiza que esas resoluciones sean correctas. Como se ha dicho, en este trabajo se seguirá la distinción entre flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea, aplicada a los tipos de resolución (modelo inicial + estrategia asociada). Así, uno de los objetivos de esta tesis se relaciona con:

> how task characteristics (e.g., the nature of the numbers involved in a mental calculation problem) can affect subjects' choice of strategies and/or representations, and the influence that such choices have on problem-solving performance.
>
> Nistal y cols., 2012, p.1302.

En ese sentido, el foco de interés se pondrá en la flexibilidad inter-tarea, pues permite analizar en qué medida futuros maestros cambian de tipo de resolución cuando cambian las características del contexto del problema.

2.5.3. Flexibilidad y adaptabilidad en resolución de problemas reales

Nos interesa la influencia de las características del contexto en el tipo de resolución escogida por el resolutor porque permite analizar la flexibilidad (en particular, la flexibilidad inter-tarea) en problemas reales (en particular, en problemas de estimación de grandes cantidades en una superficie delimitada). Nistal y cols. (2012) afirman que es un tema de investigación poco desarrollado:

> Although research on the influence of contextual variables on flexibility is still in its initial stages, nowadays their importance is being acknowledged much more frequently.
>
> Nistal y cols., 2012, p.1303.

La mayoría de los estudios sobre la influencia del conocimiento de resoluciones múltiples y su uso flexible se han centrado en tareas intra-matemáticas, por ejemplo:

- los problemas de geometría (Leikin y Levav-Waynberg, 2007; Levav-Waynberg y Leikin, 2012);
- la resolución de ecuaciones de primer grado (Rittle-Johnson y Star, 2009b; Star y Rittle-Johnson, 2008; Star y Newton, 2009; Rittle-Johnson y Star, 2009a);
- los problemas verbales y/o no-rutinarios (Kaizer y Shore, 1995; Elia y cols., 2009);
- el cálculo mental (Threlfall, 2002);
- las habilidades aritméticas (Blöte, Van der Burg, y Klein, 2001; Baroody, 2003);
- las fracciones y el razonamiento proporcional (Berk, Taber, Carrino, y Poetzl, 2009; Lee, 2017)

Por el contrario, existen pocos estudios empíricos que relacionen el desarrollo de múltiples soluciones y el rendimiento en la resolución de problemas del mundo real (Schukajlow y cols., 2015; Achmetli y cols., 2019). Los resultados de Schukajlow y cols. (2015) mostraron que promover que los estudiantes de Secundaria encuentren soluciones múltiples a un problema abierto de modelización no mejora su rendimiento directamente, pero un análisis de trayectorias encontró efectos indirectos del tratamiento sobre el rendimiento de los estudiantes a través del número de soluciones que desarrollaron y su experiencia de competencia, que fueron relacionados posteriormente con la mejora de conocimientos conceptuales y procedimentales previos (Achmetli y cols., 2019).
Hay, por tanto, más allá de estos estudios, pocos datos y resultados sobre el efecto de la flexibilidad en resolución de problemas de contexto real. También hay poca investigación sobre la flexibilidad de los profesores en formación (Leikin y Levav-Waynberg, 2007; Berk y cols., 2009; Lee, 2017). Es importante saber más sobre la flexibilidad de los futuros profesores porque proporciona información sobre su competencia en la resolución de problemas. En esa línea, esta tesis pretende aportar resultados al estudio de la flexibilidad de futuros profesores en resolución de problemas de modelización que involucran estimaciones.
El conocimiento de la eficacia de la estrategia es una característica fundamental del rendimiento experto en resolución de problemas y es también un mecanismo predominante que subyace al aprendizaje y al desarrollo (Star y Rittle-Johnson, 2008; Selter, 2009). El estudio de la adaptabilidad de futuros maestros en la resolución de problemas reales es un asunto más complejo que el de la flexibilidad. La adaptabilidad en resolución de problemas es conocer qué estrategia es más eficiente que otras bajo particulares circunstancias del problema (Star y Rittle-Johnson, 2008). Sin embargo, como afirman Heinze y cols. (2009), esto plantea un reto importante:

> Much more critical and challenging are the fundamental theoretical questions: when should a strategy be considered as appropriate and which criteria are relevant to this?
>
> Heinze y cols., 2009, p.536.

Hemos visto que en ecuaciones de primer grado es relativamente sencillo definir qué se entiende por solución más apropiada para un tipo de ecuación determinada. También puede estar claro en problemas intra-matemáticos no complejos, por ejemplo, adaptar estrategias de suma o resta a ciertas características de los números que aparecen en el problema, de tal manera que pueda reducirse el número de pasos para resolver el problema (Blöte y cols., 2001). Pero en problemas complejos, especialmente en problemas reales y abiertos, como pueden ser los problemas de modelización y en concreto los problemas de Fermi, el criterio para saber cuál es la estrategia de resolución más eficiente o apropiada no es tan claro, porque con frecuencia intervienen varios factores, algunos de ellos difíciles de cuantificar, como puede ser el contexto. Conscientes de esta dificultad, Verschaffel, Luwel, Torbeyns, y Van Dooren (2009) proponen la siguiente definición de adaptabilidad:

> the conscious or unconscious selection and use of the most appropriate solution strategy on a given mathematical item or problem, for a given individual, in a given context
>
> Verschaffel y cols., 2009, p.343.

Estudiar la adaptabilidad en resolución de problemas reales, en concreto para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada, plantea varios retos importantes. El primero es poder describir con precisión qué características del contexto influyen en la elección del tipo de resolución más adecuado. En el Capítulo 4 dedicado a la metodología se explicará con detalle cómo se ha empleado la idea de variable de la tarea de Kilpatrick (1978) para lograr diseñar una secuencia que sirva para analizar esta posible influencia. El segundo es encontrar criterios que definan qué significa solución más apropiada para un problema de estas características. Threlfall (2002) encuentra dificultades para escoger cuál es la mejor estrategia en operaciones de cálculo mental y en estimación computacional. ¿La que tiene un menor número de pasos? ¿la que resulta más sencilla al resolutor? ¿la más rápida? Aún es más complicado en situaciones reales de estimación de medida, en las que incluso es complicado definir qué se considera una buena estimación. El error aceptable es aún más discutible cuando se resuelven problemas de Fermi, en los se conoce poca información concreta y se deben hacer suposiciones y simplificaciones para obtener una estimación (Efthimiou y Llewellyn, 2007), cuyo valor dependerá de las conjeturas y decisiones sobre la situación real tomadas por el resolutor. En esta tesis se presentará un estudio exploratorio sobre qué criterios son considerados por los resolutores para valorar cuál es la estrategia de resolución más adecuada y cómo se relacionan con las características del contexto del problema.

Parte II.

Diseño y metodología de la investigación

3. Diseño de la investigación

En este capítulo se expone y esquematiza el diseño de la investigación. En primer lugar, se introduce la investigación aproximándose a sus cinco aspectos esenciales: objeto, objetivo y propósitos, situación en el área, preguntas de investigación y metodología. El capítulo finaliza con un esquema que sintetiza el desarrollo de la investigación que sustenta esta tesis y facilita la orientación en los próximos capítulos.

3.1. Introducción a la investigación

Boaler, Ball, y Even (2003) afirman que investigar es más que un conocimiento; es un proceso activo en el que hay que hacer un uso del conocimiento en contexto. Está compuesto por una serie de prácticas fundamentales:

> reading, formulating a research question, using data carefully to make and ground claims, moving from the particular to the general, considering mathematics, and communicating research findings.
>
> Boaler y cols., 2003, p.495.

El diseño de la investigación tiene como función estructurar estas prácticas fundamentales para alcanzar unos objetivos que respondan a las preguntas de investigación. El pentágono de investigación (Bikner-Ahsbahs, 2019) es una herramienta epistemológica que facilita una aproximación introductoria a los cinco aspectos esenciales implicados en el diseño de cualquier investigación, así como en la elección de sus metodologías. A partir del pentágono de investigación (Figura **3-1**) describiremos los principales aspectos que caracterizan la investigación que presentamos en esta tesis, profundizando en cada una de ellos. Estos cinco aspectos son: objeto de investigación; propósito y objetivo de la investigación; situación de la investigación en el área; preguntas de investigación; y métodos y técnicas de investigación.

3.1.1. Objeto de investigación

Aunque las prácticas descritas por Boaler y cols. (2003) son esenciales en una investigación, debe añadirse la naturaleza epistémica del objeto investigado, que proporciona indicios para su exploración y evoca problemas que hay que resolver (Bikner-Ahsbahs, 2019). En el presente estudio, el objeto empírico de la investigación son los futuros maestros de Educación

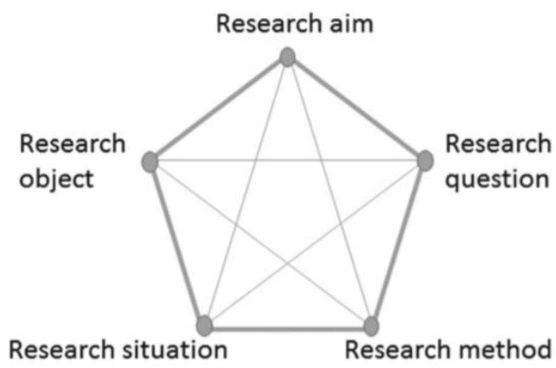


Figura 3-1.: Pentágono de investigación para describir los principales aspectos de hacer investigación (Bickner-Ahsbahs, 2019, p. 154)

Primaria. Pero el conocimiento que nos interesa del objeto empírico son sus resoluciones de problemas del mundo real, pues la solvencia - un alto rendimiento - en la resolución de este tipo de problemas es condición necesaria para su introducción exitosa en el aula. Así, desde el punto de vista epistémico, el objeto es la competencia de maestros en formación en resolución de problemas de modelización que involucran estimaciones. En particular, la influencia que el contexto de este tipo de problemas puede tener en sus resoluciones y en el uso flexible que hacen de ellas. Esto nos lleva a definir el propósito de la investigación.

3.1.2. Propósito y objetivo de la investigación

El objetivo principal de esta investigación es mejorar el conocimiento de cómo resuelven los maestros en formación problemas de modelización que involucran estimaciones (también los hemos denominado problemas de Fermi o problemas de estimación en contexto real). Se trata de un objetivo amplio, que forma parte del conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza, por lo que debe concretarse en varios propósitos que permitan dar una respuesta parcial.

En concreto, un primer propósito es describir qué tipos de resolución emplean los futuros maestros, qué factores los caracterizan, tanto cuando resuelven los problemas reales de estimación de manera individual en el aula, como cuando los resuelven en grupo y experimentando en el lugar del problema.

Un segundo propósito de la investigación es conocer si determinadas características de esta clase de problemas condicionan o se relacionan con el tipo de resolución escogido por futuros maestros.

El tercer propósito es caracterizar qué tipos de errores cometen los futuros maestros cuando resuelven estos problemas, tanto individualmente en el aula, como en grupo y experimentando en el lugar del problema.

El cuarto propósito es conocer si pueden emplearse secuencias de problemas reales de estimación para promover el uso flexible de resoluciones, y explorar qué criterios se podrían escoger para determinar cuándo una resolución es más adecuada que otra.
El último propósito es conocer si hay relación entre la flexibilidad de los futuros maestros y su rendimiento en la resolución de problemas reales de estimación.

3.1.3. Situación de la investigación en el área

El objetivo y los propósitos de la investigación nos permiten abordar la relevancia de la investigación dentro del área de la Didáctica de las Matemáticas. En el Capítulo 2 hemos construido en detalle el marco teórico en el que se sitúan los propósitos descritos. A continuación, sintetizamos las conexiones del objetivo y los propósitos de la investigación con los distintos dominios de investigación del marco teórico.
El objetivo de la investigación se enmarca dentro del interés en el papel del profesor como promotor de un enfoque basado en la Educación Matemática Realista (EMR) y una enseñanza-aprendizaje funcional de las Matemáticas. En este enfoque la resolución de problemas juega un papel central. Para abordar el objetivo de la investigación es necesario relacionarlo con los modelos de conocimiento especializado del profesor existentes, así como con los estudios sobre errores y dificultades del profesorado en resolución de problemas, especialmente problemas reales y de modelización.
Dentro de la resolución de problemas reales, la investigación se enmarca en los problemas de Fermi, en concreto en los problemas reales de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada, por ser adecuados para introducir la modelización en Educación Primaria. Dado que el objeto de investigación son los maestros de Primaria en formación, los problemas de Fermi son adecuados como medio para estudiar aspectos de la competencia de futuros maestros en resolución de problemas reales. En el marco teórico se han descrito estudios que caracterizan las resoluciones de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (Albarracín y Gorgorió, 2014; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017; Albarracín y Gorgorió, 2019), por lo que es conveniente la extensión de esta caracterización a maestros y maestras en formación. Además, en estudios recientes, se ha explorado la vinculación de ciertas características de los problemas de Fermi, en particular de su contexto, con el tipo de resolución desarrollada por los estudiantes (Albarracín y cols., 2021; Ferrando y Albarracín, 2021). Uno de los propósitos de investigación es consolidar esta línea de investigación reciente.
La línea de investigación sobre características de los problemas de Fermi que influyen en su resolución tiene evidentes conexiones con el dominio de investigación sobre flexibilidad y adaptabilidad, es decir, sobre el conocimiento del resolutor de múltiples estrategias de resolución y sobre el conocimiento de cuál es la más eficiente o apropiada según las características del problema. Puesto que la flexibilidad y la adaptabilidad son componentes de la competencia en resolución de problemas, su estudio para futuros maestros conecta con el objetivo de la investigación y cierra el círculo. En resumen, teniendo por objeto los maestros

en formación, este trabajo reúne distintos dominios de investigación que se articulan en torno a una respuesta al comentario de Star (2005):

> There are subtle interactions among the problem's characteristics, one's knowledge of procedures, and one's problem-solving goals that might lead a solver to implement a particular series of procedural actions (p. 409).

Desarrollar una respuesta a ese comentario conlleva aportar resultados a los dominios de investigación implicados, contestando a varias preguntas de investigación, que expondremos a continuación.

3.1.4. Preguntas de investigación

Una vez escogido el objeto de investigación, descritos el objetivo y los propósitos de investigación, y situados dentro del área de investigación de la Didáctica de las Matemáticas, es necesario articular las preguntas de investigación que posibilitan la concreción en prácticas investigadoras como el diseño de la experiencia, la selección de la muestra, la recogida y análisis de datos, etc. Las preguntas de investigación se habían adelantado en el Capítulo 1, como puerta de entrada a esta tesis doctoral, y son las siguientes:
P1- ¿Cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real?
P2- ¿Hay alguna influencia del contexto y de la estructura del problema en la resolución desarrollada por los futuros maestros para los problemas de estimación de contexto real?
P3- ¿En qué medida la resolución experimental en lugar físico del problema influye en las resoluciones?
P4- ¿Qué rendimiento tienen los futuros maestros cuando resuelven problemas de estimación en contexto real?
P5- ¿Son los futuros maestros flexibles en la resolución de problemas de estimación en contexto real?
P6- ¿Existe relación entre flexibilidad de futuros maestros y su rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real?
P7- ¿Cómo hacen los futuros maestros un uso adaptativo de sus resoluciones en los problemas de estimación en contexto real?

3.1.5. Métodos y técnicas de la investigación

Contestar a las preguntas anteriores exige movilizar una serie de prácticas de investigación – recogida de datos, análisis, interpretación, elaboración de conclusiones - regidas por mecanismos o procedimientos racionales. Escoger los métodos y técnicas de investigación ajustados y coherentes con los objetivos de la investigación y con el paradigma epistemológico en el que se enmarca es parte del diseño metodológico. El objeto y objetivos de esta investigación pueden enmarcarse dentro del paradigma interpretativo (Bassey, 1999; Bryman, 2012). Bajo este paradigma trataremos de comprender la competencia de los maestros en formación en resolución de problemas de modelización que involucran estimaciones (también los hemos denominado problemas de Fermi, o problemas de estimación en contexto real). Se trata del estudio de una realidad educativa, en la que el investigador no interviene sobre la situación, lo que se denomina investigación observacional (Yin, 2009; Lodico y cols., 2010). No se trata de encontrar relaciones causales que subyacen y explican el fenómeno estudiado – el objeto de investigación – sino de interpretarlo, encontrar relaciones y tratar de comprender la experiencia subjetiva de los sujetos (Bryman, 2012). Pizarro (2015, pp. 64-65) recoge en su tesis algunas de las características del paradigma interpretativo, que expondremos a continuación por ajustarse, en parte, al enfoque metodológico de nuestra investigación:

- La metodología se basa en una descripción rigurosa del fenómeno a estudiar, en este caso, las producciones de los futuros maestros cuando resuelven problemas reales de estimación. El método produce datos descriptivos, que permiten inducir categorías que constituyen un marco de referencia para (re)interpretar los datos (Gibbs, 2007).
- El interés es describir, interpretar y comprender un escenario social, más que hacer predicciones sobre el mismo.
- Pone el foco en la subjetividad de los sujetos y la manera en que interpretan las situaciones.
- El acuerdo intersubjetivo garantiza la fiabilidad del análisis y la reducción de posibles sesgos, por medio de la triangulación de investigadores que describen e interpretan las producciones (Denzin, 2009).
- Se centra en lo que es único y particular del sujeto más que en aspectos generalizables.
- Requiere el análisis conjunto de los datos.

Señalábamos que este paradigma se ajusta en parte porque, aunque la hermenéutica es una de las bases metodológicas de nuestra investigación, también tiene carácter empírico, apoyado en una muestra lo suficientemente grande como para elaborar descripciones y obtener conclusiones de carácter estadístico. Por tanto, la investigación requiere combinar métodos y técnicas propias del enfoque cualitativo y el paradigma interpretativo con metodologías cuantitativas. La investigación en métodos mixtos (*Mixed Methods Research*, MMR) emplea aproximaciones multi-metodológicas al análisis de datos, basándose en la idea de triangulación como combinación de metodologías para el estudio de un mismo fenómeno (Buchholtz, 2019). En algunos momentos, a partir de un análisis cualitativo de categorías realizado con suficiente precisión, un análisis cuantitativo busca la generalización. En otros momentos de la investigación, el análisis cualitativo de producciones particulares del colectivo de sujetos analizado complementa el análisis estadístico descriptivo. Esta instrumentalización del análisis cualitativo permite combinarlo con lo cuantitativo (MMR) en diseño secuencial QUAL

$\rightarrow$ QUAN y QUAN $\rightarrow$ QUAL (Buchholtz, 2019). Por tanto, aunque no aborda explicaciones causales ni predicciones, este trabajo requiere métodos y técnicas más allá del paradigma interpretativo, en particular, en la descripción de aspectos generalizables y en la inferencia de relaciones entre variables implicadas en el fenómeno estudiado. Puesto que la componente interpretativa es esencial, ya que se analizan variables cualitativas nominales (categóricas) categorizadas en la triangulación de investigadores, se trabajará con una muestra no paramétrica. Esta situación demanda métodos y técnicas basadas en la agrupación y resumen de los datos en tablas cruzadas o de contingencia, y en pruebas estadísticas de dependencia o asociación entre las variables como la Chi-Cuadrado de Pearson, la Kruskal-Wallis para comparar medianas y medias de muestras, la prueba de razón de verosimilitud o el coeficiente de contingencia V de Cramer.

3.2. Esquema del desarrollo de la investigación

Una vez introducido el diseño de la investigación en sus cinco aspectos esenciales, creemos necesario introducir un esquema que sirva de apoyo y facilite la descripción de su desarrollo. Describiremos la investigación en tres partes, una de ellas central, con varias experiencias asociadas. Cada una de estas experiencias requiere unas herramientas materiales (secuencia o cuestionarios) y técnicas de análisis cualitativo y cuantitativo. En la Figura **3-2** se presenta el esquema del desarrollo de la investigación, describiendo cómo se llevaron a cabo las distintas experiencias y fases que la componen.

Investigación A Se trata de la investigación central de esta tesis doctoral. Se desarrolló durante los cursos 2017/18 y 2018/19. Está compuesta de dos experiencias (A1 y A2) que se repiten en ambos cursos, y de un cuestionario post-experiencia implementado en el curso 2018/19. En total, N = 224 futuros maestros participaron en la Investigación A.
Los N = 224 futuros maestros se enfrentaron dos veces a una misma secuencia de cuatro problemas de estimación de una gran cantidad de elementos en una superficie delimitada (Anexos A y B). En los cuatro problemas la pregunta se formulaba de manera concisa y directa, y hacía referencia a lugares del entorno de la Facultad de Magisterio. En la experiencia A1, los maestros en formación realizaban planes de resolución de la secuencia en el aula, de manera individual, durante una sesión de 90 minutos. En la experiencia A2, esos mismos maestros en formación resolvieron la secuencia en grupos, realizando mediciones en el lugar real de los problemas durante una sesión de 90 minutos.
Además, una submuestra de 111 futuros maestros que participó en la investigación A durante el curso 2018/19 respondió un cuestionario con preguntas abiertas de reflexión sobre las experiencias A1 y A2 (Anexo D).
El análisis mixto, cualitativo y cuantitativo, de las producciones de los N = 224 futuros maestros cuando resuelven la secuencia de problemas en las experiencias A1 y A2, y el análisis cualitativo de las respuestas a algunas preguntas del cuestionario post-experiencia,

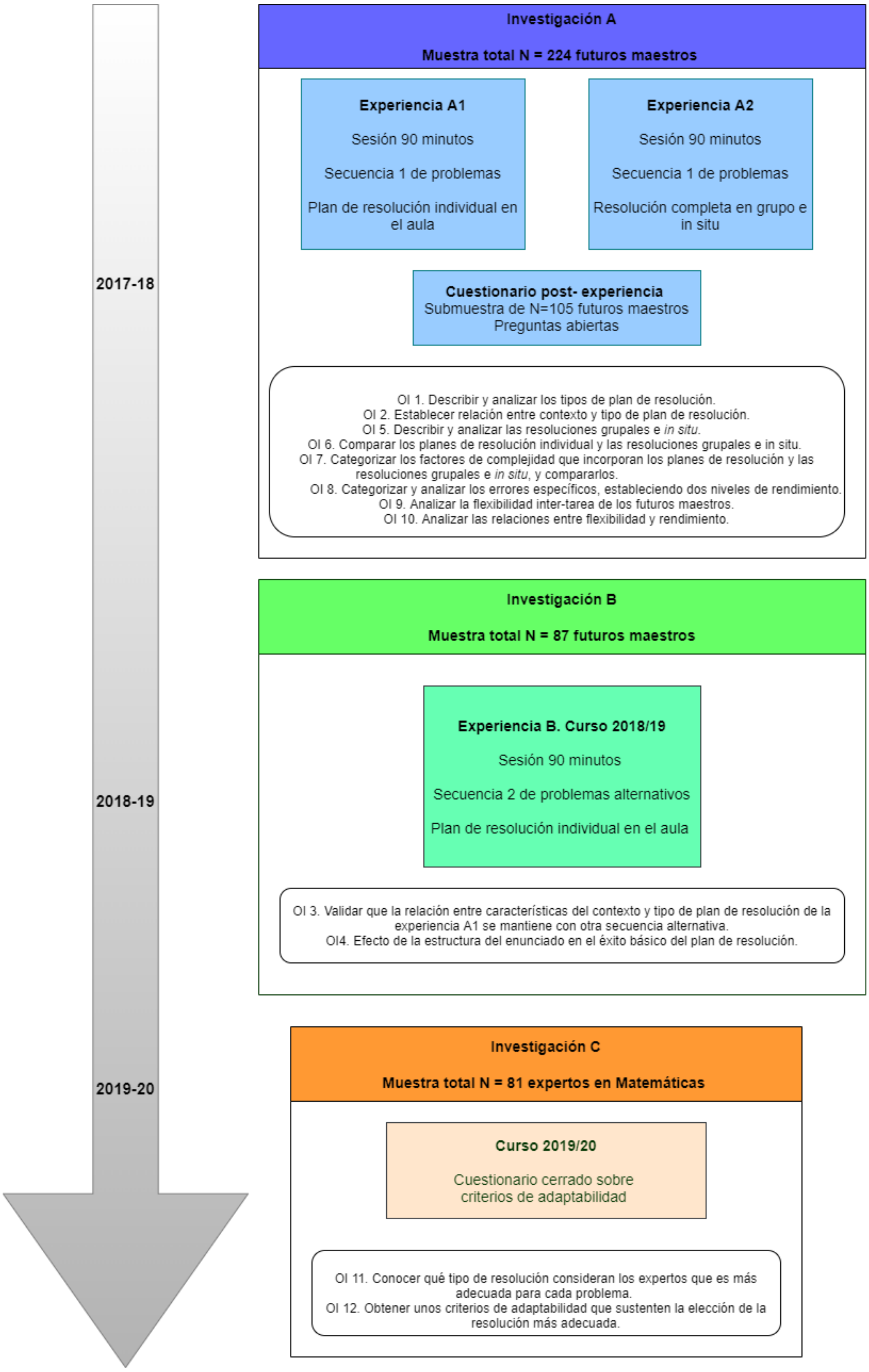


Figura 3-2.: Esquema del desarrollo de la investigación de esta tesis doctoral

ha permitido afrontar los siguientes objetivos de investigación, que responden a las preguntas de investigación expuestas en el apartado 3.1.4

OI 1. Describir y analizar los tipos de plan de resolución.

OI 2. Encontrar si existe una relación entre las características del contexto de los problemas y el tipo de plan de resolución empleado por los futuros maestros.

OI 5. Describir y analizar las resoluciones grupales e *in situ*.

OI 6. Comparar los planes de resolución individual y las resoluciones grupales *in situ*.

OI 7. Categorizar los factores de complejidad que incorporan los planes de resolución y las resoluciones grupales e *in situ*, y compararlos.

OI 8. Categorizar los errores específicos para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada y analizar los errores en las producciones de los futuros maestros, estableciendo niveles de rendimiento.

OI 9. Analizar la flexibilidad inter-tarea de los futuros maestros.

OI 10. Analizar las posibles relaciones entre el uso flexible de los planes de resolución de futuros maestros y su rendimiento en la resolución de los problemas de la secuencia, contemplando los errores cometidos y su gravedad.

Investigación B Durante el curso 2018/19, en paralelo a la segunda parte de la Investigación A, un total de N = 87 futuros maestros participaron en la Investigación B. Se compone de una experiencia más simple: una sesión de 90 minutos en el aula, en la que los futuros maestros debieron plantear un plan de resolución individual para una secuencia de cuatro problemas de estimación de una gran cantidad de elementos en una superficie delimitada alternativa (ver Anexo C) a la que se usó en la Investigación A. En esta secuencia 2, los problemas plantean una situación real distinta a los de la primera secuencia, pero mantienen las mismas características del contexto. El objetivo de esta Investigación B era validar la experiencia A1 con una secuencia distinta pero contextualmente equivalente.
Además, se aprovechó esta segunda secuencia de validación para iniciar un estudio de la influencia de la estructura del enunciado de los problemas en la capacidad de los futuros maestros de proporcionar una respuesta completa. Los enunciados de la segunda secuencia plantean la situación de manera narrativa, menos concisa, o bien formulan la pregunta de manera indirecta.
Un análisis que combina técnicas y métodos cualitativos y cuantitativos de las producciones de N = 87 futuros maestros nos ha permitido afrontar los siguientes objetivos de investigación:

OI 3. Validar que la relación entre características del contexto y tipo de resolución de la experiencia A1 se mantiene con otra secuencia alternativa.

OI 4. Estudiar la influencia de la estructura del enunciado en el éxito básico del plan de resolución.

Investigación C La Investigación C tiene el objetivo de completar, con una aproximación interpretativa, el estudio de la flexibilidad de futuros maestros de la Investigación A. Es el primer paso de una investigación sobre un reto difícil: el de definir qué es la adaptabilidad en la resolución de problemas de modelización que involucran estimaciones. A partir de algunos datos obtenidos del cuestionario post-experiencia de la investigación A, se diseñó un cuestionario con preguntas cerradas para recoger la opinión sobre cuál es el tipo de resolución más apropiado para cada problema de la secuencia 1 y sobre qué criterios se han tenido en cuenta para hacer esa elección (Anexo E). El cuestionario se pasó a N = 81 expertos en el área de Matemáticas y/o de la Didáctica de las Matemáticas. Un análisis estadístico de las respuestas permite abordar los siguientes objetivos de investigación:

OI 11. Conocer qué tipo de resolución consideran los expertos que es más adecuada para cada problema.

OI 12. Obtener unos criterios de adaptabilidad que sustenten la elección de la resolución más adecuada y analizar el grado de adaptabilidad de los futuros maestros.

En el próximo capítulo detallaremos el diseño de los materiales utilizados para llevar a cabo las distintas partes de la investigación, describiremos cómo se llevaron a cabo las experiencias y explicaremos las herramientas metodológicas empleadas para el análisis de los datos.

4. Metodología de la investigación

En este capítulo se fundamenta y justifica en profundidad cómo se han diseñado los materiales utilizados para desarrollar la investigación. Se describen las experiencias que componen la investigación, y se detallan las aproximaciones y herramientas metodológicas empleadas para abordar el análisis de dichas experiencias.

La primera sección se centra en el diseño de los materiales. Primero se explican los fundamentos del diseño de las secuencias de problemas empleados, que constituyen el material central de la investigación. También se describe la elaboración de dos cuestionarios que complementan la información recogida en las producciones de futuros maestros cuando resuelven las secuencias.

La segunda sección describe la selección de las muestras, el desarrollo de las experiencias que componen la investigación en sus distintas fases y las herramientas de recogida de datos utilizadas.

En la tercera sección se abordan los métodos empleados para el análisis de los datos, con especial atención al proceso de categorización de los distintos datos recogidos en la investigación.

4.1. Diseño de los materiales

Una vez introducidos los elementos del diseño de la investigación y el marco metodológico, y esquematizado su desarrollo, en esta sección nos centramos en el diseño de los materiales empleados en las experiencias y fases que la componen. Se trata de dos secuencias de problemas (secuencia 1 y secuencia 2); de un cuestionario abierto con preguntas de reflexión sobre algunos aspectos de la resolución de la secuencia 1; y de un cuestionario con preguntas cerradas sobre criterios para escoger el tipo de resolución más adecuada para cada problema.

4.1.1. Bases teóricas para el diseño de las secuencias de problemas

Una aproximación frecuente a la modelización en las aulas es lo que Blum y Niss llamaron "the island approach" (1991, p. 60), consiste en trabajar un contenido matemático y, posteriormente, y de forma puntual, abordar una tarea aislada de modelización en la que aplicar dicho contenido (Ärlebäck y Doerr, 2015). En esta investigación se emplean secuencias de problemas de modelización, siguiendo la idea de Ärlebäck y Doerr (2015) de usarlas para facilitar el desarrollo de competencias de modelización - en particular, de la flexibilidad inter-tareas - en los futuros maestros:

> We want to move beyond an isolated, single modelling activity and focus on sequences of modelling tasks that facilitate the development of learners' mathematical ideas and modelling competencies.
>
> Ärlebäck y Doerr, 2015, p.293.

Otra aproximación a la línea de investigación en diseño de secuencias de tareas de modelización es la de la metodología de los Recorridos de Estudio e Investigación y las praxeologías de la Teoría Antropológica de la Didáctica (Barquero, Bosch, Gascón, y Raj, 2007; Barquero y cols., 2011). Estos autores recurren a ella para diseñar y usar secuencias de tareas de modelización que "cubran" los principales contenidos de los temarios oficiales de matemáticas, dando una clara funcionalidad a sus contenidos. Nuestra aproximación puede vincularse con las *model development sequences* propuestas por Lesh y Doerr (2003). En la perspectiva de Lesh y Doerr, los estudiantes comienzan, como punto de partida, resolviendo las *model eliciting activities* (MEA), en las que deben desarrollar un modelo para dar sentido a una situación significativa; posteriormente se enfrentan a las *model exploration activities* (MXA), en las que deben ampliar, estructurar y enriquecer los modelos anteriores en situaciones similares, pero algo más complejas; y finalmente resuelven las *model application activities*(MAA), en las que deben aplicar los modelos desarrollados en las MEA y las MXA en nuevas situaciones o fenómenos. Sin embargo, aunque nuestra aproximación al diseño de secuencias comparte interés en promover la evolución de los modelos matemáticos a través de problemas similares, no nos centramos en el enriquecimiento progresivo del modelo sino en los cambios de resolución (entendida como modelo + estrategia) promovidos por la secuencia. Se trata de que, resolviendo los problemas de la secuencia, tengan la oportunidad de variar los modelos y estrategias que pueden ser útiles en la resolución, en función de aquellos elementos que mejor se ajustan a cada aspecto del fenómeno estudiado.
Para el diseño de la secuencia, siguiendo a Ärlebäck y Doerr (2015), nos hemos apoyado en la *variation theory* (Ko y Marton, 2004), pues abre la posibilidad de que el estudiante tome conciencia de los aspectos críticos de determinados contenidos (en el caso de este estudio, de contenidos relacionados con habilidades de medida y estimación de longitudes y superficies en lugares reales) al tiempo que facilita el desarrollo de capacidades específicas para la resolución de problemas. Desde este punto de vista, se pone el foco en qué es lo que varía y lo que permanece invariable en cualquier situación de aprendizaje (en particular, en la resolución de problemas reales de estimación). La variación promueve que ciertos aspectos críticos aparezcan en primer plano, mientras que otros aspectos permanecen o pasan a un segundo plano, lo que ayuda a que los estudiantes disciernan dichos aspectos. Se pueden distinguir cuatro tipos de variación: contraste, generalización, separación y fusión (Marton, Runesson, y Tsui, 2004). En el diseño de las secuencias de problemas de estimación en contexto real nos basaremos en el primer tipo de variación, el *contraste*. La variación de contraste permite

discernir un nuevo aspecto de una situación de aprendizaje por comparación con otro que ha variado. Es nuestro propósito hacer variar características de contextos similares a través de una secuencia de problemas reales de estimación, de modo que podamos comprobar si la resolución de los futuros maestros se ve afectada por dicha variación.

Para diseñar el patrón de variación de contraste en los problemas que componen la secuencia necesitamos recurrir a la idea de *variables de la tarea* (Kilpatrick, 1978), que permitirán tratar con cierta precisión cómo varían ciertas características del contexto que intervienen necesariamente en las resoluciones. Según la definición establecida por Goldin y McClintock (1979), una variable de la tarea es cualquier característica que asuma un valor determinado a partir de un conjunto de valores posibles. Puig y Cerdán (1988) explican que las variables de la tarea pueden ser numéricas (por ejemplo, el número de palabras del enunciado), clasificatorias (por ejemplo, el contexto de la tarea) o cualitativas (por ejemplo, la posición de la pregunta en el enunciado del problema). Son variables independientes, es decir, que pueden medirse antes de la ejecución de la tarea. En la definición original de variable de la tarea, Kilpatrick (1978) establece tres categorías: variable de contexto, de formato y de estructura. Puig y Cerdán (1988) las categorizan en variable de contexto, sintáctica y de contenido. La *variable de estructura* y la *sintáctica* pueden considerarse equivalentes, y se define como:

> cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Desde este punto de vista, palabras, grupos de palabras, símbolos y relaciones entre ellos se consideran al margen de cualquier referencia a su contenido.
>
> Puig y Cerdán, 1988, p.18.

Existen muchas variables sintácticas, por ejemplo: el tamaño del enunciado (medido en número de palabras o caracteres que lo componen); la complejidad gramatical (oraciones más largas, oraciones subordinadas, presencia de calificativos, etc.); presentación de los datos (en palabras, en números); situación de la pregunta (al principio, el final o en medio, si es directa o indirecta); el orden en el que se presentan los datos (corresponde o no con el orden las operaciones realizadas para resolver el problema). La *variable de formato* está muy relacionada con la variable de estructura o sintáctica (Webb, 1979), y hace referencia a cómo se presenta el problema: puede presentarse con enunciado verbal o de modo manipulativo, simbólico, etc.; puede estar ilustrado con dibujos o imágenes; puede presentar la información de manera narrativa o sintética. En la investigación que presenta esta tesis no se variarán las características sintácticas (estructurales) ni de formato dentro de la secuencia de problemas, pues el foco de interés está puesto en el contexto, aunque, como se explicará en la sección dedicada al diseño de la secuencia 2, sí se estudiará la variación de estas características entre secuencias (secuencia 1 y secuencia 2).

Por otro lado, las variables de contenido y de contexto están estrechamente relacionadas. Se vinculan a lo que Puig y Cerdán (1988) llaman significado del texto:

> Las variables de contenido y de contexto dan cuenta, pues, del significado del texto. Las variables de contenido se refieren al significado matemático profundo, mientras que las variables de contexto lo hacen a los significados no matemáticos, incidentales en el texto del problema.
>
> Puig y Cerdán, 1988, p.20.

La *variable de contenido* es fija en toda la investigación: se trabaja con problemas de modelización, un tipo de problemas de Fermi, aquellos que requieren estimar un gran número de elementos en una superficie delimitada. El contenido matemático de estos problemas se vincula con medidas de longitud y área, así como con razonamiento proporcional. La *variable de contexto* hace referencia a los aspectos que describen la situación de un problema (en el caso de los problemas reales de estimación, como se verá, tamaño de los elementos, distribución de los elementos a estimar, etc.) y lo que Webb (1979) llama escenario-marco (real o simulado, convencional o imaginativo, familiar o no familiar, concreto o abstracto, etc.). Conviene tener en cuenta que, en los problemas de modelización, la distinción entre contenido y contexto no es tan clara como en los problemas aritméticos escolares, pues el contexto matemático deja de ser incidental y pasa a ser relevante desde el punto de vista del contenido matemático, ya que debe ser matematizado.
El objetivo de las investigaciones cuando utilizan las variables de tarea es correlacionar aspectos como el porcentaje de éxito o la estrategia de resolución con las variables de problemas cuyos enunciados se han variado sistemáticamente, y establecer, mediante técnicas estadísticas, los factores que explican los niveles de dificultad o los tipos de resolución que aparecen (Puig y Cerdán, 1988). En el caso de nuestra investigación, se busca correlacionar variables de contexto previamente fijadas con los tipos de resolución que aparecen en las producciones de los futuros maestros. En la siguiente sección explicaremos el diseño de la secuencia 1 (la secuencia de cuatro problemas central en esta investigación) a partir de la variación de algunas variables de contexto relevantes que fueron identificadas previamente.

4.1.2. Diseño de la Secuencia 1 de problemas

El punto de partida del diseño de la secuencia de problemas de esta investigación es la lista de 36 problemas de Fermi elaborada por Albarracín (2011) para su tesis doctoral:

> Els problemes triats demanen estimar una magnitud no abastable que ha d'estar relacionada amb el seu context social dels alumnes, a l'aula o a fora d'ella, tractant temàtiques que poden ser del seu interès o que seria desitjable que centressin la seva atenció. Al mateix temps, aquests problemes cobreixen diferents tipus de continguts matemàtics. Essencialment, els problemes són preguntes sobre recomptes o mesures de magnituds en els que intervenen conceptes com l'àrea, el volum, la quantitat o el temps (p. 64).

Albarracín (2011) los clasifica por tipo de magnitud tratada: distancia, superficie, volumen, tránsito, conocimiento social y tiempo. Así, en su estudio de las producciones de los estudiantes de Secundaria utiliza problemas de estimación de elementos en una superficie, como el problema 6 y problema 7 (Figura **4-1**).

Problema 6: Organitzem un concert

> Pel festival de final de curs, una bona opció seria portar a un grup ben conegut i organitzar un concert. Podríem aprofitar la pista del pati per encabir a tothom que vulgui venir.
>
> En aquesta situació, una bona pregunta seria: *quantes entrades podríem vendre si omplíssim el pati per fer un concert?*

Problema 7: Gent a una manifestació

> Quan hi ha una manifestació és important saber la gent que hi ha anat per valorar la força que tindrà la protesta. Moltes vegades, la policia i l organització no es posen d acord.
>
> En aquesta situació, una bona pregunta és: *quanta gent hi ha en una manifestació?*

Figura 4-1.: Problemas de Fermi 6 y 7 elaborados por Albarracín (2011, p. 67)

Albarracín (2011) señala que son problemas con un planteamiento equivalente, pero que existen diferencias: en el problema 6 el espacio es conocido por los estudiantes (el patio de su centro educativo), mientras que en el problema 7 no se concreta el espacio de la manifestación, el contexto es de naturaleza más abstracta y lejana. Además, señala que la distribución de la gente en un concierto no es la misma que en una manifestación. A partir de estas diferencias, se pregunta "si la proximitat al problema té alguna influència en les propostes de resolució que ens proporcionen els alumnes" (p. 69). En trabajos posteriores, hemos profundizado en esta cuestión de la influencia de la lejanía y la cercanía de los contextos en problemas de Fermi (Albarracín, Segura, Ferrando, y Gorgorió, 2021).

La idea del contraste entre dos tareas ya estaba presente, por tanto, en ese trabajo, en los problemas de estimación de un gran número de elementos (personas, en este caso) en una superficie (el patio del colegio, el recorrido de la manifestación). Sin embargo, el contraste se da en la lejanía o cercanía del contexto, que lo hace más o menos accesible para el alumnado, y no en detectar características concretas que puedan influir en el tipo de resolución. De hecho, a partir de la tesis de Albarracín se diseña una secuencia exclusivamente de problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada, pero basada en la idea de secuencia de desarrollo de un modelo MEA-MXA-MAA, graduando la lejanía y complejidad del contexto (Ferrando y cols, 2017). La secuencia que utilizan es la siguiente:

- Problema A: ¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?
- Problema B1: ¿Cuánta gente cabe en el Palau St. Jordi en un concierto?
- Problema B2: ¿Cuánta gente cabe en la plaza del ayuntamiento de tu ciudad en una manifestación?
- Problema B3: ¿Cuántos árboles hay en Central Park?

El problema A es el MEA, mientras que B1 y B2 son MXA y B3 es la MAA, pues se pasa de recuento de personas a recuento de árboles, y los autores esperan que los estudiantes sean capaces de mejorar y aplicar su modelo a esta nueva situación. Otros trabajos han continuado esta línea de investigación sobre el efecto de la lejanía del contexto en la accesibilidad de este tipo de problemas (Pla-Castells y Ferrando, 2019; Albarracín y cols., 2021). Sin embargo, como hemos comentado en la sección anterior, el propósito de esta investigación no es el desarrollo de un modelo usando una secuencia al estilo MEA-MXA-MAA, ni investigar el efecto de la lejanía o complejidad del contexto sobre las resoluciones, sino estudiar el cambio de tipos de resolución en relación a la variación de características precisas del contexto. Si, efectivamente, determinadas características precisas del contexto se relacionan con una mayor elección de un tipo de resolución determinado por los resolutores, entonces se abre la posibilidad de que la secuencia de problemas de Fermi promueva la flexibilidad entre tareas. Es decir, es el primer paso para estudiar el uso flexible de las resoluciones en futuros maestros. Con este propósito, el diseño de la secuencia requería simplificar al máximo la situación real de los problemas y que formara parte del entorno de los resolutores. Esta decisión de partida se tomó para poder "controlar" mejor las categorías de los tipos de resolución, descartando situaciones que favorezcan desarrollos desiguales del modelo matemático (a la manera de MEA-MXA-MAA) o tipologías de resolución de distinta naturaleza (resoluciones a subproblemas o resoluciones basadas en información externa, por poner dos ejemplos). Lo que se buscaba era simplificar las categorizaciones de estrategias de trabajos previos (Albarracín, 2011; Albarracín y cols., 2021), por ejemplo, las de la Figura **2-6**. Simplificar las categorías de resolución para ganar en simplicidad, fijando un diseño de una secuencia que permitiera abordar el estudio de la flexibilidad, implicaba seleccionar problemas que evitaran estrategias como "pedir información a una fuente externa", "reducir el problema a uno más pequeño" o "romper el problema en partes". Como se ha destacado en el Capítulo 2, nuestra intención era centrarnos en analizar la resolución como un sistema compuesto por un modelo inicial relativo a la distribución de los elementos en la superficie, y una estrategia asociada para alcanzar la estimación.
Como se ha dicho, el criterio de partida fue escoger las situaciones reales de los problemas en el propio campus de la Facultad de Magisterio, de manera que los futuros maestros que debían resolverlos no necesitaran acudir a fuentes de información externas. Son espacios que les son familiares y deben tener una idea – más o menos clara – de sus dimensiones y características. El segundo criterio de partida fue escoger situaciones reales en las que la superficie

no sólo estuviera claramente delimitada, sino que fuera rectangular, para evitar resoluciones en las que el área total se descomponga en áreas simples, y que no sólo multiplicarían la categorización de resoluciones, también las harían menos homogéneas (y, por tanto, podríamos encontrar problemas para comparar los tipos de resolución). A continuación, detallaremos las condiciones impuestas para crear el patrón de contraste de la variable de contexto en los problemas de la secuencia.

Secuencia 1

El diseño de la secuencia parte de cuatro premisas básicas:

- Los problemas piden una estimación razonada de una cantidad de elementos lo suficientemente grande para que no pueda ser obtenida directamente.
- Todos los problemas están contextualizados en el entorno inmediato de los resolutores (Figura **4-6**).
- Todos los problemas plantean una situación real en la que el espacio físico es una superficie rectangular claramente delimitada.
- Las variables de estructura sintáctica y de formato no varían entre los problemas.
- Algunas variables de contexto varían entre problemas, para introducir un contraste entre las tareas en el sentido de Marton y cols. (2004).

De las razones que han conducido a establecer los tres primeros puntos hemos hablado anteriormente. Conviene detallar los dos últimos puntos:

- En cuanto a la variable de formato, todos los problemas se presentan igual: un enunciado verbal, formulado de manera sintética, acompañado de una fotografía del espacio real al que alude el problema, que es familiar a los resolutores.
- En cuanto a la variable de estructura de los problemas que componen la secuencia, se fijan en todos los siguientes valores: se formulan en una pregunta directa, en una oración de sintaxis sencilla.

El peso de la variación de la secuencia reside en la variable de contexto. Todos los contextos son cercanos para el resolutor, de modo que los valores de la variable a tener en cuenta son características espaciales del mismo. Para concretar las variables de contexto que intervinieron en el diseño de la secuencia fue necesario familiarizarse con los análisis de las producciones de estudiantes de Secundaria en los trabajos que son el precedente de esta tesis (Albarracín, 2011; Albarracín y Gorgorió, 2014, 2019; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017; Albarracín y cols., 2021). Cuando los estudiantes se enfrentan al problema, deben modelizar cómo colocarán los elementos en la superficie (¿en filas, siguiendo una estructura regular? ¿o arbitrariamente, en cualquier punto de la superficie hasta llenarla?), y luego deben aplicar una serie de cálculos y razonamientos basados en proporcionalidad para calcular cuántos elementos se han necesitado para cubrir el espacio. Por lo tanto, hay varias variables del contexto de la tarea que son esenciales porque han de ser necesariamente tenidas en cuenta en el proceso de resolución:

i. La *disposición de los elementos en la superficie*: el problema puede presentar una situación en las que los elementos cuyo número debe ser estimado se encuentren colocados (o se deban colocar) en la superficie de manera *ordenada* o *desordenada*. Esta variable interviene en la fase de elaboración del modelo inicial relativo a la distribución de los elementos, y se espera que tenga influencia en la elección de modelos iniciales unidimensionales o bidimensionales.

ii. El *tamaño de los elementos*: el problema presenta una situación en la que se debe estimar un número grande de elementos que tienen un tamaño en relación al resolutor y/o a la superficie en la que se encuentran; esos elementos pueden ser *pequeños*, *medianos* o *grandes*. Se espera que el tamaño de los elementos también sea una variable que influya en la elección del modelo inicial o de la estrategia asociada.

iii. El *tamaño de la superficie*: la superficie en la que se encuentran los elementos que deben ser estimados tiene un tamaño en relación a dichos elementos y al resolutor. Puede ser una superficie (rectangular, pues hemos fijado esta característica) de tamaño *pequeño*, *mediano* o *grande*.

iv. La *forma de los elementos*: los elementos que deben ser estimados pueden ser homogéneos o heterogéneos en forma o tamaño. Así, pueden tener una forma/tamaño *regular* o *irregular*.

Además, otra variable del contexto a considerar es si los elementos cuyo número debe estimarse están *presentes* en la situación del problema o *ausentes*. En el primer caso los elementos forman parte del espacio real del problema (por ejemplo, los ladrillos de una fachada), mientras que en el segundo caso los elementos no forman parte del espacio del problema, sino que se plantea una situación hipotética en el que el espacio se llenaría de esos elementos (por ejemplo, Times Square en la fiesta de fin de año).
Estas variables y sus valores definidos son las herramientas que emplearemos para diseñar las secuencias de problemas (la secuencia 1 y, posteriormente, la secuencia 2). La "cuantificación" de los valores de alguna variable es relativa (¿qué quiere decir grande, pequeño o mediano?) y depende del equipo investigador que analiza las producciones, pero lo importante es la coherencia interna del criterio que se utilice para generar un patrón de contraste entre las variables que posibilite el diseño de una secuencia de problemas válida. Durante el diseño de la experiencia, el doctorando y dos investigadoras acordamos los siguientes criterios para clasificar los valores de las variables:

a) tamaño del elemento: grande (más de 2 m^2), mediano (entre 1 m^2 y 2 m^2) o pequeño (menos de 1 m^2);

b) tamaño de la superficie: grande (más de 1000 m^2), mediano (entre 100 m^2 y 1000 m^2) o pequeña (menos de 100 m^2);

c) forma y tamaño de los elementos: hay variaciones fácilmente perceptibles (irregular) o no hay variaciones o son poco perceptibles (regular);

d) disposición de los elementos: están organizados siguiendo un patrón (ordenada) o están desorganizados (desordenada).

Los valores numéricos para clasificar el tamaño del elemento y la superficie son orientativos. El equipo de investigadores lo argumentó del siguiente modo: se escogió el tamaño del espacio próximo ocupado por una persona (las personas necesitan entre uno o dos metros cuadrados para sentir que no tienen a nadie demasiado cerca, "invadiendo" su espacio) como referencia de tamaño mediano, y a partir de esa superficie personal, orientativa, se define tamaño grande y tamaño pequeño. Por otro lado, se escogió el tamaño de la superficie grande como aquel que ya es difícil estimar directamente, sin apoyo de un referente claro o de instrumentos de medida, orientativamente a partir de 1000 metros cuadrados. El tamaño medio se escogió como la superficie que una persona consideraría espaciosa pero cuyas dimensiones podría estimar con cierta facilidad sin recurrir a un instrumento de medida, y el tamaño pequeño una superficie menor.

Una vez identificadas las variables de contexto y "cuantificadas" para poder escoger variaciones contextuales con cierta precisión, se escogieron los problemas que componen la secuencia 1. Para escoger los problemas, el punto de partida fueron varias sesiones de actividades realizadas en cursos anteriores (2015/16 y 2016/17) con los estudiantes de la asignatura "Didáctica de la Geometría, la Medida, la Estadística y la Probabilidad" que se imparte en el cuarto curso del grado de Maestro/a en Educación Primaria en la Facultat de Magisteri de la Universitat de València. Durante estas sesiones, llamadas "Fermi al pati", los futuros maestros resolvían, en grupo y con instrumentos de medida, una serie de problemas de estimación en lugares del campus de Magisterio. Los cuatro problemas de la secuencia se seleccionaron de esas actividades implementadas a lo largo de dos cursos académicos. Se escogieron cuatro porque trabajos previos (Ferrando, Albarracín, y cols., 2017; Albarracín y cols., 2021) utilizaban secuencias MEA-MXA-MAA con cuatro problemas de Fermi. Además, el equipo de investigadores que diseñamos la secuencia pensamos que más tareas podían producir cierta fatiga que repercutiera en la fiabilidad de los resultados, y que menos tareas no darían el suficiente juego de variación por contraste. El primer problema (*P1-Personas*) de la secuencia 1, con pregunta directa y fotografía ilustrativa, puede verse en su formato de presentación en la Figura **4-2**).

El segundo problema de la secuencia 1 (*P2-Baldosas*) también se presenta en un formato con pregunta directa y fotografía (Figura **4-3**) que acompaña al enunciado.

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Figura 4-2.: Enunciado del problema *P1-Personas*.

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

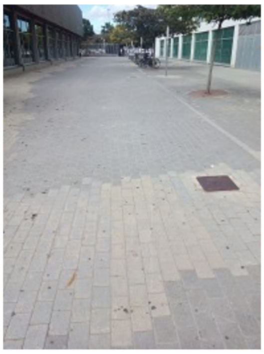


Figura 4-3.: Enunciado del problema *P2-Baldosas*.

El tercer problema (*P3- Césped*) mantiene las mismas condiciones: pregunta directa y fotografía ilustrativa del espacio real del problema (Figura **4-4**).

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Figura 4-4.: Enunciado del problema *P3-Césped*.

Por último, el cuarto problema (*P4-Coches*) de la secuencia 1 se presentado con una pregunta directa acompañada de una fotografía del aparcamiento cercano a la Facultad de Magisterio (Figura **4-5**).
Los cuatro problemas presentan situaciones reales en el entorno de la Facultad de Magisterio de la Universitat de València (Campus de Tarongers), como puede verse en la Figura **4-6**. Son lugares de paso diario del alumnado del Grado de Maestro/a de Primaria; por lo

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

Figura 4-5.: Enunciado del problema *P4-Coches*.

tanto, aunque se presentan con una fotografía, los resolutores tienen una idea clara de cómo es el espacio real al que alude el problema (superficies rectangulares delimitadas) y están familiarizados con sus dimensiones. Como se explicará a continuación, estos cuatro problemas P1-P2-P3-P4 se escogieron teniendo en cuenta la variación por contraste de las variables de contexto.

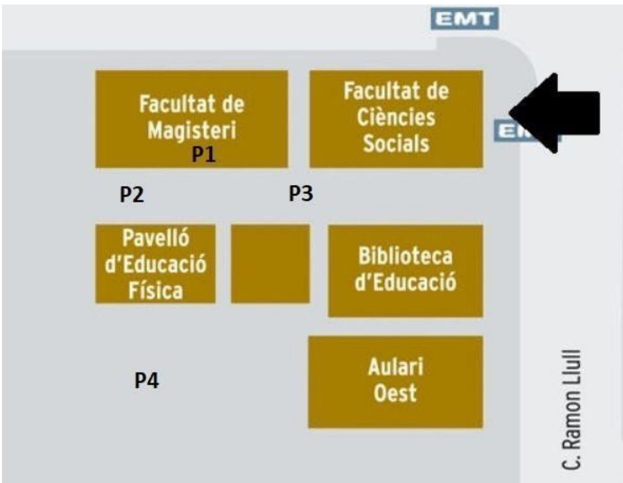


Figura 4-6.: Situación de los espacios reales de los problemas P1-P2-P3-P4 en el Campus de Tarongers, obtenido de `https://www.uv.es/uvweb/magisteri/es/facultad/situacion-contacto/valencia/planos-1285848223104.html`.

Los valores que toman las variables de contexto relativas al tamaño de la superficie y de los elementos en los problemas P1-P2-P3-P4 de la secuencia 1 se recogen en la Tabla **4-1**. Así, en el problema *P1-Personas* el área de la superficie que ocupa el porche puede clasificarse como mediana pero cercana a pequeña (mediana-pequeña), mientras que el área de la superficie entre la Facultad de Magisterio y el gimnasio, en el problema *P2-Baldosas*, se clasifica como mediana pero cercana a grande (mediana-grande). De tal manera que la secuencia de cuatro problemas P1-P2-P3-P4 está graduada, en cuanto al tamaño de la superficie, de pequeña

Tabla 4-1.: Valores de las variables de contexto “tamaño de los elementos” y “tamaño de la superficie” en los problemas P1-P2-P3-P4 de la secuencia 1.

Tamaño superficie	Tamaño de los elementos		
	Menos de 1 m^2	1 m^2 a 2 m^2	Más de 2 m^2
Menos de 100 m^2	P3	XXX	XXX
100 m^2 a 1000 m^2	P2	P1	XXX
Más de 1000 m^2	XXX	XXX	P4

Tabla 4-2.: Valores de las variables de contexto “disposición de los elementos” y “forma de los elementos” en los problemas P1-P2-P3-P4 de la secuencia 1.

		Disposición de los elementos	
		Ordenada	Desordenada
Forma de los elementos	Regular	P2	P1
	Irregular	P4	P3

(en *P3-Césped*) a grande (en *P4-Coches*), pasando por mediana-pequeña (en *P1-Personas*) y por mediana-grande (en *P2-Baldosas*).
El tamaño de los elementos es muy pequeño para la brizna de césped (P3), pequeño para la baldosa (P2), mediano para la persona (P1) y grande para el coche (P4). De esta manera queda claro el patrón de variación de las variables “tamaño de la superficie” y “tamaño de los elementos” en el diseño de la secuencia 1. En la Tabla **4-2** se recogen los valores de las variables de contexto relativas a la “forma de los elementos” y la “disposición de los elementos”.
El valor en la “disposición de los elementos” es claro en el problema *P2-Baldosas* porque los elementos están presentes en la situación del problema, ordenados en cuadrícula, y por tanto pueden ser observados por el resolutor (Figura **4-3**). En el caso de *P4-Coches*, se ha clasificado como problema de disposición ordenada de los elementos porque los coches se suelen colocar alineados y las plazas de aparcamiento sirven de guía, pero no está tan claro porque éstos no están presentes en la situación del problema (el aparcamiento no está completamente lleno de coches, sin huecos), sino que debe ser imaginado por el resolutor (debe hacerse un modelo real de la situación). En *P3- Césped* los elementos también están presentes en la situación del problema y se perciben claramente en una distribución desordenada; mientras que, aunque en *P1-Personas* los elementos a estimar están ausentes y deben ser imaginados por el resolutor, lo natural es imaginar a las personas dispuestas de manera desordenada, aunque puede darse el caso de que algún resolutor las imagine ordenadas por filas bien alineadas.
El valor de la “forma de los elementos” es claramente regular en el caso de las baldosas (P2), pues se trata de un elemento presente en el problema y todas son iguales. Del mismo modo,

la forma es claramente irregular en el caso de las briznas de césped (P3), que también son un elemento presente en el problema. Hay algo más de ambigüedad en el caso de las personas (P1) y de los coches (P3). Hemos considerado que las variaciones en la superficie ocupada por una persona son muy pequeñas, mientras que en el tamaño de los coches el margen de variabilidad es mayor. Pero, de nuevo, son elementos a estimar ausentes en el problema, por lo que el resolutor debe imaginar, es decir, hacerse un modelo real de la situación en la que la decisión que tome sobre esta variable de contexto tendrá su influencia en el tipo de resolución y en la estimación obtenida.

La Tabla **4-3** sintetiza el valor de las variables de contexto consideradas para cada problema de la secuencia 1. Como puede verse en la tabla, el tratamiento preciso de las características del contexto mediante valores de variables relevantes para la resolución del problema permite poner el foco en qué es lo que varía y lo que permanece invariable en cada problema de la secuencia diseñada, de manera que podamos identificar si alguna de estas variables tiene relación con un tipo de resolución determinada.

Como se ha dicho, la secuencia 1 es la herramienta principal en la investigación desarrollada en esta tesis doctoral. Se utilizó en los cursos 2017/18 y 2018/19 con un total de $N = 224$ futuros profesores. Los futuros maestros debieron resolverla dos veces. En las Figuras **4-2**, **4-3**, **4-4** y **4-5** se muestra el formato de presentación para la experiencia individual (en Anexo A se encuentra el documento tal y como se entregó a los resolutores). El formato de presentación de la secuencia 1 en la experiencia grupal es prácticamente el mismo (en Anexo B se encuentra el documento tal y como se entregó a los resolutores), pero, dado que se trata de resoluciones realizadas en el lugar de los problemas y tomando medidas, para cada problema se les indica que deben escribir “datos y medidas recogidos”, “proceso de resolución” y “resultado”. Por ejemplo, se puede comparar la presentación de P1-Personas en formato individual (Figura **4-2** con la presentación del mismo problema en formato grupal (Figura **4-7**).

A partir de la secuencia 1, como se explicará en las siguientes secciones y en el Capítulo V, se analizan las producciones de futuros maestros y se categorizan tipos de resolución (individuales y grupales), factores de complejidad incorporados al modelo inicial, relación entre variables del contexto y tipo de resolución, flexibilidad inter-tarea, tipos de errores cometidos, relación entre flexibilidad y errores, y adaptabilidad.

Conviene señalar, para terminar con el diseño de la secuencia 1, que durante el curso 2018/19 se introdujo un añadido en el cuarto problema, *P4-Coches*, que no modifica la secuencia original, pero que demanda una segunda resolución alternativa para dicho problema (Figura **4-8**). La finalidad de este añadido fue estudiar la flexibilidad intra-tarea en uno de los problemas.

Tabla 4-3.: Problemas y valores de las variables de contexto considerada en el diseño de la secuencia 1.

Enunciado	Valor de las variables
P1 Personas. ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de la facultad si llueve?	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: desordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-pequeño Elemento ausente
P2. Baldosas. ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: ordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-grande Elemento presente
P3. Césped. ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: desordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: pequeño Elemento presente
P4. Coches. ¿Cuántos coches caben en este parking si no dejamos espacio para pasar?	Tamaño elementos: grande Disposición elementos: ordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: grande Elemento ausente

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Datos y medidas recogidos:

Proceso de resolución:

Resultado:

Figura 4-7.: Enunciado del problema *P1-Personas* en la experiencia A2.

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar? Plantea, si es posible, dos estrategias de resolución distintas.

Estrategia 1:

Estrategia 2:

Figura 4-8.: Pregunta adicional en el problema *P4-Coches* integrado en el curso 2018/19.

4.1.3. Diseño de la Secuencia 2 de problemas

La secuencia 2 se diseña durante el curso 2018/19 para la Investigación B, teniendo como referencia la secuencia 1. De hecho, la secuencia 2 se diseña escogiendo cuatro problemas con los mismos valores de las variables de contexto considerados en la secuencia 1. El propósito es validar la relación entre las variables de contexto y el tipo de resolución que, tal y como se mostrará en el apartado de resultado, se observa en la secuencia 1 y comprobar que esta relación es independiente de la situación real concreta de los problemas P1-P2-P3-P4 escogidos. Por lo tanto, el propósito de la secuencia P1'-P2'-P3'-P4', formada por problemas que plantean situaciones reales alternativas, es comprobar si la relación se mantiene con los mismos valores de las variables de contexto (lugar cercano a la Facultad de Magiste-

rio, superficie rectangular, tamaño de la superficie, tamaño de los elementos, forma de los elementos, disposición de los elementos). El diseño de la secuencia 2 tuvo en cuenta, por consiguiente, que cada problema tuviera lo denominaremos un *contexto isomorfo* al contexto del problema correspondiente, en el mismo orden, de la secuencia 1. Es decir, que exista una correspondencia entre los valores de las variables de contexto de P1-P1', P2-P2', P3-P3', P4-P4'. Además, se adoptó el mismo formato de presentación: enunciado verbal y fotografía ilustrativa del lugar del problema.
Sin embargo, se modificaron las variables de estructura (también llamada variable sintáctica) de los problemas de la secuencia 2. De esta manera, además de validar los resultados de la relación entre contexto y resolución de la secuencia de la Investigación A, en la Investigación B se incluye un estudio sobre la influencia de la complejidad del enunciado en el rendimiento de los futuros maestros al redactar un plan de resolución completo (que consideraremos como una forma de éxito, aunque completar un plan de resolución sea un éxito básico). En efecto, la variable estructura de un problema está relacionada con la complejidad de su enunciado, por lo que, como explican Leiß y cols. (2019), ciertos aspectos pueden acentuarla, especialmente la inclusión de información superflua que alarga el enunciado de la tarea o que añade ambigüedad a lo que se pregunta. Algunos trabajos sobre problemas aritméticos verbales analizan el impacto de la variable estructura en el éxito de resolución de los alumnos (Days, Wheatley, y Kulm, 1976); otros analizan en qué medida el tipo de texto del enunciado influye en el procesamiento del problema (Orrantia y cols., 2014). Así, Orrantia y cols. (2014) destacan que para entender un problema es importante prestar atención no sólo a la información matemática específica, sino también a la situación y los fenómenos descritos en el texto. Estos resultados están en consonancia con el trabajo desarrollado por Leiß y cols. (2019), lo que permite a estos autores sugerir que la variación en las variables de estructura de la tarea (en particular la complejidad de la situación) representa un factor clave que influye en el proceso de comprensión. Estas ideas son la base teórica que sustenta la modificación de la secuencia 2 respecto a la secuencia 1, cuyos enunciados estaban todos formulados de manera directa, sin información superflua ni ambigüedad. En la secuencia 2, sin embargo, propondremos enunciados con un carácter más narrativo y sintácticamente más complejos que los de la primera secuencia. Los cuatro problemas de la segunda secuencia formularán la pregunta sólo tras la presentación de una situación contextualizada, y la pregunta podrá ser directa o indirecta.

Secuencia 2

Los cuatro problemas alternativos que componen la secuencia 2 presentan situaciones en lugares reales, ubicados en lugares familiares para los futuros maestros, en el entorno cercano a la Facultad de Magisterio. En los cuatro problemas, como en los de la primera secuencia, se pide una estimación del número de elementos que llenan una superficie rectangular. Los cuatro problemas se presentan con el mismo formato que los de la secuencia 1, es decir, con un enunciado verbal y una fotografía del lugar del problema al que alude el enunciado. El primer problema escogido para la secuencia alternativa es *P1'- Llaves robadas*, cuyo formato de presentación puede verse en la Figura **4-9**.

Problema 1. ¡Alerta, alguien ha robado las llaves de las aulas del aulario! Todos los alumnos están esperando en el pasillo para entrar a clase porque la cafetería está cerrada y llueve a cántaros. ¿Cuántos alumnos caben en el pasillo del aulario?

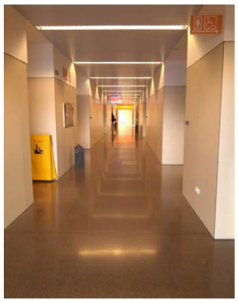


Figura 4-9.: Enunciado del problema *P1'-Llaves robadas*.

El problema *P1'- Llaves robadas* presenta un contexto isomorfo al del problema *P1-Personas*. En efecto, se trata de una superficie rectangular familiar para los maestros en formación, cuyo valor de la variable "tamaño de la superficie" es mediano-pequeño. Los elementos son las personas que llenan esa superficie, por tanto, son elementos ausentes en la situación real y los valores de las variables "tamaño del elemento", "forma del elemento" y "disposición de los elementos en la superficie" son los mismos que para *P1-Personas*.
Tanto el problema P1 como el problema P1' requieren una estimación del número de personas que pueden caber en un recinto rectangular. Sin embargo, la variable de estructura del problema *P1'- Llaves robadas* introduce mayor complejidad, pues la situación narrativa presenta información superflua que añade ambigüedad a la pregunta del problema y puede dar lugar a otra interpretación: la estimación del número de alumnos que reciben clases en las aulas del pasillo.
El segundo problema de la secuencia alternativa, *P2'- Ladrillos pintados*, se presenta como en la Figura **4-10**. El contexto de P2' es isomorfo al de P2: se trata de una superficie rectangular (la fachada del Aulario de Magisterio) familiar para los maestros en formación, cuyo valor de la variable "tamaño de la superficie" es mediano-grande. Los elementos son los ladrillos de la fachada, elementos presentes en la situación real del problema. Los valores de las variables "tamaño de los elementos", "forma de los elementos" y "disposición de los elementos" son los mismos para los ladrillos de P2' que para las baldosas de P2, pues se trata de elementos de tamaño pequeño, forma regular y disposición ordenada. En el problema *P2' – Ladrillos pintados* la demanda, desde el punto de vista matemático, es la misma que en el problema *P2- Baldosas*, y consiste en estimar el número de ladrillos (baldosas en P2) en una superficie rectangular. Además, hemos visto que el contexto es equivalente. Sin embargo, hay una variación en la variable de estructura sintáctica de P2' respecto a P2: se ha añadido una situación narrativa (cada participante puede pintar un único ladrillo) y la pregunta no se formula directamente, pues se pregunta por el número de alumnos que pueden participar y no, como en el caso de la secuencia 1, por el número de ladrillos.

Problema 2. El decano ha decidido darle un toque de color al aulario y ha decidido poner unos andamios en el muro norte para que cada alumno de magisterio pinte como quiera uno de los ladrillos grises de la fachada, eso sí, cada alumno pintará sólo un ladrillo. ¿Cuántos alumnos podrán participar?

,

Figura 4-10.: Enunciado del problema *P2'-Ladrillos pintados*.

El problema *P3'- Palomitas* presenta un contexto isomorfo al del problema *P3-Césped*. Su formato de presentación puede verse en la Figura **4-11**. La situación real planteada es el suelo de un aula habitual para los maestros en formación, por tanto, saben que es una superficie rectangular cuyo valor de la variable "tamaño de la superficie" es pequeño. Los elementos son las palomitas de maíz que llenan esa superficie. Son elementos ausentes de la situación real, pero se presentan en la fotografía y todos los resolutores conocen perfectamente su forma y tamaño, no hay problemas de variabilidad que pueden estar asociados a elementos ausentes más cambiantes. En cuanto al valor de la variable "tamaño del elemento", es pequeño; la "forma del elemento" es irregular y la "disposición de los elementos en la superficie" es desordenada. En todos estos valores coincide con las briznas de césped de *P3-Césped*.
La variable de estructura de *P3'- Palomitas* presenta un cambio respecto a *P3-Césped*, añadiendo una pequeña situación narrativa cuya información, en cualquier caso, no añade ambigüedad a la situación ni a la formulación de la pregunta. En P3' se trata, simplemente, de añadir algo de complejidad sintáctica al enunciado.

Problema 3. Sabéis bien que no está permitido comer en clase, pero hoy han proyectado una peli y, excepcionalmente, los alumnos han traído cajas de palomitas. Como era de esperar, el suelo del aula ha quedado cubierto de palomitas de maíz. ¿Cuántas caben?

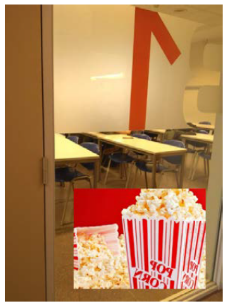


Figura 4-11.: Enunciado del problema *P3'- Palomitas*.

El último problema de la secuencia alternativa, *P4'- Tablao flamenco*, presenta un contexto isomorfo a *P4- Coches*. En la Figura **4-12** puede ver el formato de presentación del problema en la secuencia que se entregó a los futuros maestros participantes en la Investigación B. La situación real se refiere a la superficie del hall de la Facultad de Magisterio, lugar de paso habitual para los maestros en formación. Por tanto, saben que es una superficie rectangular, espaciosa y diáfana, cuyo valor de la variable "tamaño de la superficie" es grande.

Problema 4. Para celebrar la feria de abril, vamos a hacer una fiesta en el hall de la facultad. A falta de un buen escenario, usaremos mesas para cubrir el hall, y así alumnos (y profesores) podrán bailar como si estuvieran en un tablao flamenco. ¿Cuántas mesas necesitamos?

Figura 4-12.: Enunciado del problema *P4'-Tablao flamenco.*

Los elementos son las mesas habituales en la Facultad de Magisterio, son grandes mesas rectangulares, cuya superficie excede sobradamente los dos metros cuadrados, por tanto, el valor de la variable "tamaño del elemento" es grande. La variable "forma y tamaño del elemento" es irregular, porque hay dos tamaños distintos de mesa (unas más largas y otras más cortas), y la variable "disposición de los elementos en la superficie" es ordenada, pues las mesas deben alinearse. Además, las mesas son elementos ausentes de la situación del problema. Todos los valores de las variables de contexto son, por tanto, los mismos para P4' que para P4.
Como en el problema anterior, la variable de estructura de *P4'- Tablao flamenco* solamente añade, respecto a *P4-Coches*, una pequeña situación narrativa que sólo aumenta un poco la complejidad sintáctica del enunciado, pero cuya información no añade ambigüedad a la situación ni a la formulación de la pregunta.
En la Tabla **4-4** se sintetizan los valores de la variable de contexto para los problemas P1'-P2'-P3'-P4' de la secuencia 2, y resume el cambio introducido en la variable estructura para cada problema. Se puede comprobar, comparando con la Tabla 11, que, desde el punto de vista del contexto, las secuencias 1 y 2 son isomorfas.
El documento con la secuencia 2 completa, tal y como se presentó a los futuros maestros que participaron en la Investigación B, puede consultarse en el Anexo C.

4.1.4. Diseño del cuestionario post-experiencia

Con el objeto de recoger información sobre las diferencias entre las experiencias A1 y A2 -en particular sobre la influencia del trabajo grupal y la resolución de problemas *in situ*-, y también con la intención de obtener datos sobre los criterios de adaptabilidad, se diseñó un cuestionario de preguntas abiertas. Los cuestionarios son herramientas administradas para recoger datos de sondeos, normalmente bajo la forma de un listado de preguntas que suelen ser las mismas para todos los participantes en la investigación (Cohen, Manion, y Morrison, 2011). Esto permite ganar consistencia y precisión al analizar las respuestas. Los

Tabla 4-4.: Problemas y valores de las variables de contexto considerada en el diseño de la secuencia 2.

Problemas de la secuencia 2	**Valor de las variables de contexto**	**Cambio en variable de estructura respecto a secuencia 1**
P1'- Llaves robadas	Tamaño elementos: mediano Disposición elementos: desordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-pequeño	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica. Añade ambigüedad a la pregunta.
P2'- Ladrillos pintados	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: ordenada Forma elementos: regular Tamaño región: mediano-grande	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica. Pregunta indirecta.
P3'- Palomitas	Tamaño elementos: pequeño Disposición elementos: desordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: pequeño	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica.
P4'- Tablao flamenco	Tamaño elementos: grande Disposición elementos: ordenada Forma elementos: irregular Tamaño región: grande	Situación narrativa. Mayor complejidad sintáctica.

cuestionarios permiten obtener datos de forma rápida y directa, lo que es una ventaja respecto a otras formas de sondeo, como la entrevista. Su ventaja, la simplicidad, también es su limitación, pues el formato impide profundizar sobre alguna respuesta que el investigador estime relevante.

Así, durante el curso 2018/19, los participantes de las experiencias A1 y A2 contestaron este cuestionario post-experiencia que, por sus características, permite ayudar a reconstruir algunos de los procesos metacognitivos que los futuros maestros experimentaron durante la resolución de la secuencia 1 en las experiencias A1 y A2, pues normalmente éstos se omiten en el momento de la resolución (Torregrosa, Albarracín, y Deulofeu, 2021). Es por esta razón por la cual se diseña como un cuestionario de preguntas abiertas, sin especificar ninguna respuesta para elegir, con la intención de recoger información complementaria a la que el investigador encuentra en las resoluciones de la secuencia. El cuestionario puede leerse, tal y como se presentó a los participantes, en el Anexo D. Consta de tres preguntas:

C1. ¿Medir *in situ* ha cambiado tu opinión sobre cómo resolver de la mejor manera posible alguno de los problemas? Explica en qué te ha influido a ti o al grupo hacer mediciones y en qué problemas esto os ha inducido a proponer una estrategia distinta a la que habías presentado de forma individual.

C2. ¿La estrategia de resolución presentada por tu grupo difiere de la que propusiste en tu resolución individual en alguno de los problemas? Explica en qué problemas has cambiado de estrategia de resolución, qué factores os han influido en ese cambio de decisión y cómo habéis tomado (y consensuado) en grupo esa decisión final.

C3. Imagina que un alumno/a te ha dicho que ha resuelto el problema de la mejor forma posible. ¿Qué piensas que quiere decir con la mejor forma posible?

Las dos primeras preguntas pretenden provocar una reflexión en los participantes sobre los cambios de la experiencia A2 respecto a la experiencia A1. Así, la pregunta C1 tiene como fin que los participantes reflexionen sobre cómo influye en la resolución grupal medir y trabajar de manera empírica en el lugar real de los problemas. La pregunta C2 busca la reflexión sobre la influencia de trabajar en grupo y comparar entre los miembros los planes de resolución individual antes de consensuar la resolución grupal.
La pregunta C3 busca hacer reflexionar al participante sobre la comparación entre múltiples resoluciones y qué criterios de adaptabilidad consideraría para los problemas de estimación en contexto real de la secuencia 1. Esta pregunta sigue la línea de interés sobre la visión que tienen profesores o maestros en formación sobre el uso y comparación de múltiples estrategias de resolución (Leikin y Levav-Waynberg, 2007; Lynch y Star, 2014). De hecho, se relaciona con las siguientes preguntas del cuestionario de Lynch y Star (2014):

> 10c. Do you tell students that one strategy is better than another?
> 10d. Do you teach students that there are certain situations or problems where one strategy is better than another?
>
> Lynch y Star, 2014, p.107.

4.1.5. Diseño del cuestionario sobre criterios de adaptabilidad

El instrumento de recogida de datos en la Investigación C es un cuestionario dirigido al profesorado experto en el área de Matemáticas y/o de la Didáctica de las Matemáticas y diseñado con el objetivo de conocer, desde la perspectiva de un experto en Matemáticas, cuál es el tipo de resolución más adecuado para cada problema de la secuencia 1, y con qué criterios de adaptabilidad relacionan su elección. Como se explicó al final del Capítulo 2, la elección de estos criterios se trata de una cuestión abierta en muchos tipos de problemas (Heinze y cols., 2009). Definir estos criterios es especialmente complicado en los problemas reales, por su complejidad y porque, como ocurre con los problemas de modelización, son abiertos, por lo que no hay una única solución.

El *cuestionario para expertos* se diseñó durante el curso 2019/20. La selección de la muestra y el proceso de recogida de datos se detallará al final de la sección 4.2, centrándonos ahora en su diseño. En este caso, el criterio para el diseño no fue, como ocurría con el cuestionario post-experiencia, recoger una información que complemente algunos aspectos del análisis de las producciones de los futuros maestros y aporte nuevas vías de interpretación. El criterio se basó en el objetivo del cuestionario, determinar el juicio de expertos sobre un problema: los criterios de adaptabilidad para las resoluciones de problemas de estimación en contexto real. Esta es la razón para escoger un cuestionario de preguntas cerradas, con un listado de respuestas predeterminadas entre las que el participante debe escoger. Estas respuestas son similares en cuanto a rango y permiten ser agrupadas para sacar conclusiones mediante un análisis estadístico (Aiken, 1996). La validez y fiabilidad de este formato de cuestionario reside en la exactitud y precisión de los datos recogidos, que no requieren ser interpretados y categorizados a posteriori (Cohen y cols., 2011).
Para poder recoger fácilmente los datos (y más teniendo en cuenta las restricciones de movilidad derivadas de la situación sanitaria en esos meses), se decidió elaborar un cuestionario en línea mediante la herramienta *Google Forms*, un software gratuito de administración de encuestas. El cuestionario está dividido en seis secciones a pantalla completa; después de responder las preguntas de una sección el participante debe pulsar "Siguiente" para acceder a la siguiente sección. Todas las preguntas son obligatorias. El cuestionario puede verse completo, tal y como se presentó a los participantes en la Investigación C, en el Anexo E.
En la primera sección se presenta a los participantes el título de la encuesta: "Cuestionario para determinar criterios de adaptabilidad en problemas contextualizados de estimación". En la primera sección también se incluye el siguiente texto que explica el tipo de investigación en la que el profesorado experto está participando:

> Este cuestionario forma parte de una investigación sobre la flexibilidad y la adaptabilidad en la resolución de problemas contextualizados de estimación. Los participantes en la primera parte del estudio (estudiantes del grado de Maestro/a en Educación Primaria) resolvieron una secuencia de cuatro problemas en los que debían obtener una estimación del número de elementos que caben en una superficie rectangular. Son problemas situados en un contexto familiar a los resolutores, del tipo: ¿Cuántos estudiantes caben en el hall de la Facultad? Además, se presentan sin datos (sólo se acompañan de una fotografía del espacio), por lo que requieren que el resolutor haga suposiciones sobre la situación del problema y estime cantidades relevantes para la obtención del resultado. Se ha observado que, pese a que se trata de cuatro problemas similares, los resolutores cambian de estrategia cuando se modifican algunas características del enunciado del problema. Ahora queremos recoger los criterios de expertos para identificar si, desde su perspectiva, identifican como más adecuada una estrategia que otra en función de las características del enunciado.
> En este cuestionario se presentará cada problema de la secuencia y se le pedirá que escoja y justifique cuál es la estrategia más adecuada para cada uno. Puede retroceder en el cuestionario si fuera necesario. ¡Muchas gracias por su colaboración!

La primera sección finaliza con un compromiso escrito de respeto a la privacidad de los datos, advirtiendo que los resultados serán publicados en una Tesis Doctoral de forma agregada y que los datos serán almacenados de forma anónima y de conformidad con la normativa vigente de protección de datos y siguiendo las recomendaciones éticas de la Declaración de Helsinki.
La segunda sección se diseñó para recoger los datos profesionales de los participantes y así poder hacer un perfil del profesorado experto que compone la muestra. Las dos primeras preguntas admiten una o varias respuestas de una lista de opciones. Como se puede ver en la Figura **4-13**, se trata de dos preguntas para ubicar profesionalmente al participante: tipo y nivel de estudios académicos realizados, y nivel de docencia que imparte. Las otras dos preguntas de la sección dos son cerradas, de elección múltiple, en las que debe seleccionarse sólo una respuesta. Una pregunta por el género (hombre, mujer) y otra por la edad (menos de 30; entre 30 y 40; entre 40 y 50; entre 50 y 60; mayor de 60).

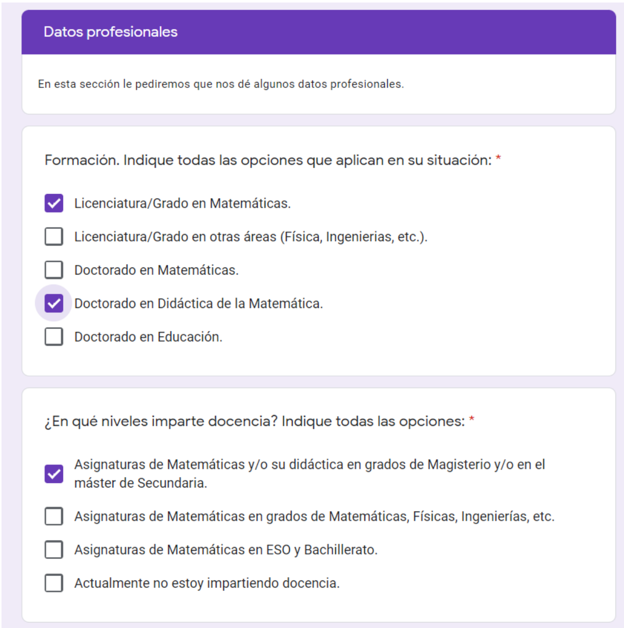
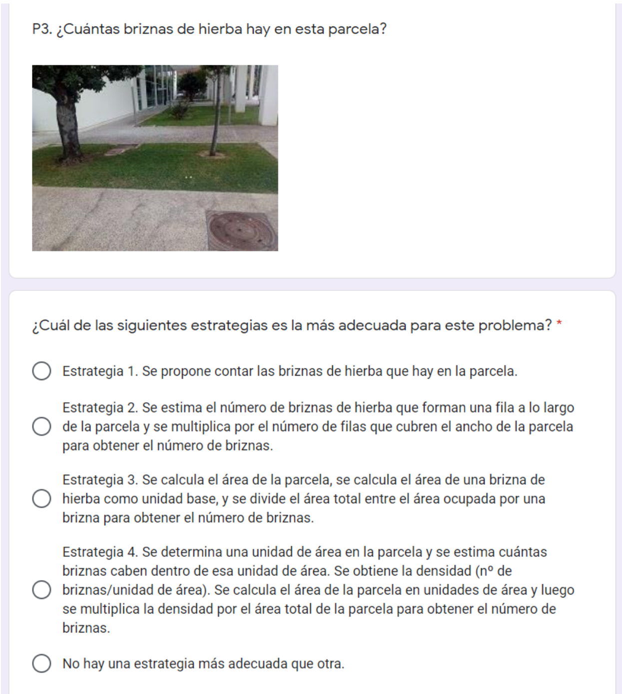


Figura 4-13.: Preguntas sobre el perfil profesional del participante en el cuestionario de expertos.

La tercera, cuarta, quinta y sexta sección tienen la misma estructura y contienen las mismas preguntas, pero cada una se dedica a un problema de la secuencia 1. Se les indica que lean el problema que se presenta debajo y respondan a dos preguntas relativas a distintas estrategias de resolución. A continuación, se presenta el problema en el mismo formato que el presentado a los futuros maestros en la experiencia A1: el enunciado del problema y una fotografía ilustrativa del espacio real al que se refiere.
Tras el enunciado del problema deben responder a dos preguntas relacionadas con el uso de estrategias de resolución para dicho problema. El diseño de las preguntas de esta parte del

cuestionario de expertos tiene como base algunos resultados obtenidos de las experiencias A1 y del cuestionario post-experiencia. Aunque la categorización de las resoluciones se explicará en la sección 4.3 y el análisis de los resultados se detallará en el Capítulo 5, para poder describir con claridad el diseño de estas preguntas es necesario adelantar algunos resultados concretos que se consideraron para la elaboración del cuestionario de expertos. Así, a partir de la categorización de los tipos de plan de resolución de los $N = 224$ futuros maestros que resolvieron la secuencia 1 en la experiencia A1 durante los cursos 2017/18 y 2018/19 se elaboraron las respuestas de elección múltiple a la primera pregunta: "¿Cuál de las siguientes estrategias es más adecuada para este problema?". En la Figura **4-14** pueden verse para el problema *P3-Césped*, en la quinta sección del cuestionario.
En el Capítulo 2 ya se describieron estas categorías de resolución, pues aparecen en estudios previos sobre producciones de estudiantes de Secundaria cuando resuelven problemas de estimación de contexto real (problemas de Fermi). Conviene señalar que en el cuestionario hemos hablado de "estrategias" porque es el término más habitual para referirse a las distintas formas de solucionar un problema, aunque en esta tesis, como se ha argumentado en el Capítulo 2 y se desarrollará en este y en el siguiente capítulo, consideramos la estrategia como una parte de la resolución (modelo inicial + estrategia). La estrategia 1 corresponde a Recuento; la estrategia 2 a Linealización; la estrategia 3 a Unidad Base; y la estrategia 4 a Densidad. La quinta opción es considerar que ningún tipo de resolución es mejor que otro.

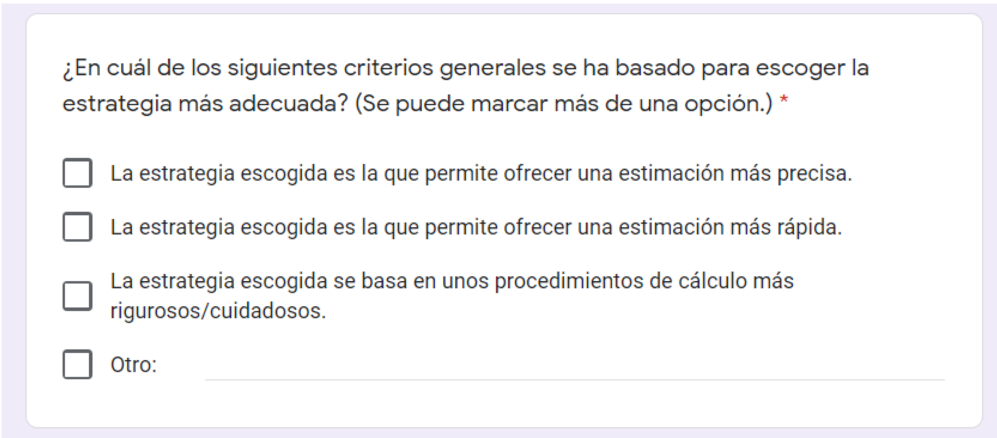

P3. ¿Cuántas briznas de hierba hay en esta parcela?

¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema? *

- Estrategia 1. Se propone contar las briznas de hierba que hay en la parcela.
- Estrategia 2. Se estima el número de briznas de hierba que forman una fila a lo largo de la parcela y se multiplica por el número de filas que cubren el ancho de la parcela para obtener el número de briznas.
- Estrategia 3. Se calcula el área de la parcela, se calcula el área de una brizna de hierba como unidad base, y se divide el área total entre el área ocupada por una brizna para obtener el número de briznas.
- Estrategia 4. Se determina una unidad de área en la parcela y se estima cuántas briznas caben dentro de esa unidad de área. Se obtiene la densidad (nº de briznas/unidad de área). Se calcula el área de la parcela en unidades de área y luego se multiplica la densidad por el área total de la parcela para obtener el número de briznas.
- No hay una estrategia más adecuada que otra.

Figura 4-14.: Pregunta de elección múltiple sobre adaptabilidad para *P3-Césped* con los tipos de resolución categorizados.

Para diseñar la segunda pregunta de estas secciones nos basamos en la categorización de las respuestas a la pregunta C3 del cuestionario post- experiencia (Anexo D), que pedía a los futuros maestros qué quiere decir mejor solución posible para un problema real de estimación como los de la secuencia 1. Aunque se explicará con más detalle en este capítulo y en el Capítulo 5, las categorías obtenidas para estas dos preguntas se refieren a posibles criterios que los futuros maestros participantes piensan que pueden servir para valorar cuál es la mejor solución posible. Son los siguientes: rapidez/sencillez de la resolución; precisión de la estimación; rigor y cuidado en el proceso. Decidimos que estos criterios obtenidos de quienes resolvieron los problemas podían servir como punto de partida para la elección de los expertos, de tal manera que los resultados del cuestionario post-experiencia conectaran con el cuestionario de expertos. Así, las respuestas a la pregunta sobre los criterios para escoger la resolución más adecuada recogen los criterios categorizados en C3. En el cuestionario de expertos se puede escoger más de un criterio, como aparece en la Figura **4-15**.



¿En cuál de los siguientes criterios generales se ha basado para escoger la estrategia más adecuada? (Se puede marcar más de una opción.) *

- [ ] La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más precisa.
- [ ] La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más rápida.
- [ ] La estrategia escogida se basa en unos procedimientos de cálculo más rigurosos/cuidadosos.
- [ ] Otro:

Figura 4-15.: Pregunta sobre criterios de adaptabilidad.

4.2. Descripción de las experiencias y recogida de datos

En los siguientes apartados describiremos el desarrollo de la Investigación A, la Investigación B y la Investigación C. Puesto que la Investigación A es la central y más compleja, se dedicarán tres apartados. En el apartado 4.2.1 se describe la experiencia A1 y los instrumentos metodológicos empleados para la recogida de datos. En el apartado 4.2.2 se describen estos mismos aspectos para la experiencia A2. El apartado 4.2.3 describe la implementación del cuestionario post-experiencia.

Finalmente, el apartado 4.2.4 se centra en describir la experiencia que compone la Investigación B, mientras que en 4.2.5 se explica a qué muestra y cómo se implementó el cuestionario sobre criterios de adaptabilidad, correspondiente a la Investigación C.

4.2.1. Experiencia A1

Comencemos recordando que la experiencia A1 es la parte central de todo el diseño de investigación de esta tesis doctoral, y que la mayoría de objetivos de investigación se relacionan con los datos que ésta proporciona. A continuación, describiremos la muestra de participantes, cómo se desarrolló la experiencia y qué datos se recogieron.

Elección de la muestra

En la experiencia A1 maestros en formación debían resolver, de manera individual, la secuencia 1 de problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie rectangular. Los participantes se escogieron entre los estudiantes de cuarto curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universitat de València.

La elección de una muestra de futuros maestros de Primaria que cursan el último año del grado obedece a dos razones. La primera es que, puesto que se quiere conocer la competencia de futuros maestros en resolución de problemas de modelización que involucran estimaciones, porque se considera una condición necesaria para su introducción exitosa en las aulas, lo natural es conocerla en aquellos maestros que están cerca de completar su formación. De este modo, conocer cómo resuelven estos problemas, su flexibilidad o sus errores nos pone en alerta sobre lo que ocurre con maestros y maestras en ejercicio profesional, pues los estudiantes de cuarto año del grado de Maestro/a en Educación Primaria ya no recibirán más formación en Matemáticas ni en su didáctica específica. La segunda razón es que, como se ha explicado en el apartado dedicado al diseño de la secuencia 1, las actividades con fines didácticos "Fermi al pati", realizadas en los cursos 2015/16 y 2016/17 con los estudiantes de la asignatura "Didáctica de la Geometría, la Medida, la Estadística y la Probabilidad", que se imparte en cuarto curso del grado, fueron el precedente para la experiencia A1. Por tanto, lo más natural era continuar con estudiantes de esa misma asignatura. Es importante remarcar que la experiencia A1 se realizó, tanto en el curso 2017/18 como en el 2018/19, durante las primeras semanas de la asignatura, que se imparte el primer cuatrimestre. Por tanto, los participantes no tenían experiencia previa en modelización ni, en concreto, en la resolución de problemas reales de estimación. Tampoco habían recibido todavía formación en didáctica de la medida.

Sintetizando: la secuencia 1 de problemas se propuso a un total de $N = 224$ estudiantes de cuarto curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Facultad de Magisterio de la Universitat de València durante los cursos 2017/18 y 2018/19. Se trata de una muestra incidental que incluye, aproximadamente, al 25 % de los estudiantes de cuarto curso del grado en esos dos años académicos. Los futuros maestros participantes en la experiencia A1 pertenecían a 6 grupos naturales de cuarto curso. El año académico 2017/18 participaron 113 estudiantes de los grupos 4º D (36 estudiantes), 4º F (37 estudiantes) y 4º K (40). El año académico 2018/19 participaron 111 estudiantes de los grupos 4º A (34 estudiantes), 4º I (36 estudiantes) y 4º K (41 estudiantes).

Descripción de la experiencia

La secuencia 1 de problemas se propuso a los participantes en una sesión ordinaria de la asignatura “Didáctica de la Geometría, la Medida, la Estadística y la Probabilidad”. En dicha sesión, de 90 minutos de duración, los futuros maestros participantes trabajaron individualmente, en su aula habitual ubicada en la Facultad de Magisterio, en los cuatro problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie rectangular. Durante los cursos 2017/18 y 2018/19, en todos los grupos participantes el profesor responsable fue el doctorando (D), la tutora (T) o una investigadora (X) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

En cada uno de los grupos, durante los diez primeros minutos de la sesión, se explicó a los participantes que iban a enfrentarse a una secuencia de cuatro problemas ubicados cuyo planteamiento hacía referencia a espacios reales familiares para todos ellos. Se hizo hincapié en los siguientes aspectos:

- en cada problema los participantes debían plantear un posible esquema de resolución indicando las medidas que necesitarían para obtener la estimación requerida;
- el trabajo debía realizarse de forma individual;
- debían explicar sus procedimientos de forma escrita y podían utilizar dibujos o diagramas;
- y, por último, no se esperaba que los participantes obtuvieran una solución numérica, sino que bastaba con que explicaran cuidadosamente cómo obtener la estimación solicitada.

Estas especificaciones son importantes, porque conviene distinguir entre el plan de resolución y la resolución completa. Llamaremos *plan de resolución* a esta clase de producciones con carácter esquemático - análogas al plan de acción de Polya (1962) - en las que no es necesario plantear una resolución completa cuantificando y efectuando los cálculos, sino que basta con indicar los datos necesarios para abordar la resolución y explicar los procedimientos matemáticos necesarios para llegar a obtener la estimación pedida. Como se explicará más detalladamente en el análisis de las producciones, un plan de resolución puede analizarse como un sistema interrelacionado de modelo inicial y estrategia.

Una vez explicados estos aspectos esenciales durante los primeros diez minutos, a cada participante se le proporcionaron dos hojas con los cuatro problemas (dos problemas por hoja) de la secuencia 1, tal y como puede verse en el Anexo A. En el apartado dedicado al diseño de la secuencia se describió el formato de presentación de cada problema: un enunciado y una pequeña imagen del espacio real al que hace referencia. Se dejó un espacio en blanco de media página para que los participantes escribieran su plan de resolución. Una vez los participantes daban por finalizados sus planes de resolución de los problemas, entregaban las hojas con sus producciones escritas al profesor o profesora responsable de la sesión.

Recogida de datos

La fuente de datos de la experiencia A1 son las producciones escritas de los futuros maestros al resolver la secuencia 1 de problemas. Se trata de los planes de resolución de $N = 224$ futuros maestros, por tanto, son 224×4 problemas $= 896$ producciones escritas las que se han recogido y analizado en esta experiencia.

Las producciones escritas recogidas se codificaron y escanearon, agrupadas por año académico y grupo. Para garantizar cierta eficiencia al efectuar este análisis, los documentos con las respuestas individuales se organizaron y se les asignó una etiqueta que permitiera identificarlos. Esta etiqueta empieza por I, que indica individual (experiencia A1), para distinguir de grupal en la experiencia A2. Las producciones se agruparon por curso académico y grupo natural. Como estos mismos futuros maestros resolvieron la experiencia A2 en equipos, se les asignó un número de dos cifras, la primera de ellas es el equipo del que iban a ser componentes, y la segunda el número que ocupan en el equipo. Así, por ejemplo, para el año 2017/18, en el grupo 4º K, tenemos los planes de resolución individuales del participante I.3.2, que significa que es el segundo componente del grupo 3 en la experiencia A2. Si el grupo 3 tenía cuatro componentes, sus producciones en la experiencia A1 fueron etiquetadas como I.3.1, I.3.2, I.3.3 e I.3.4.

Para cada grupo y año académico, tenemos los datos pasados a una hoja de cálculo (Figura **4-16**). En la hoja de cálculo se codificaron numéricamente los tipos de plan de resolución categorizados.

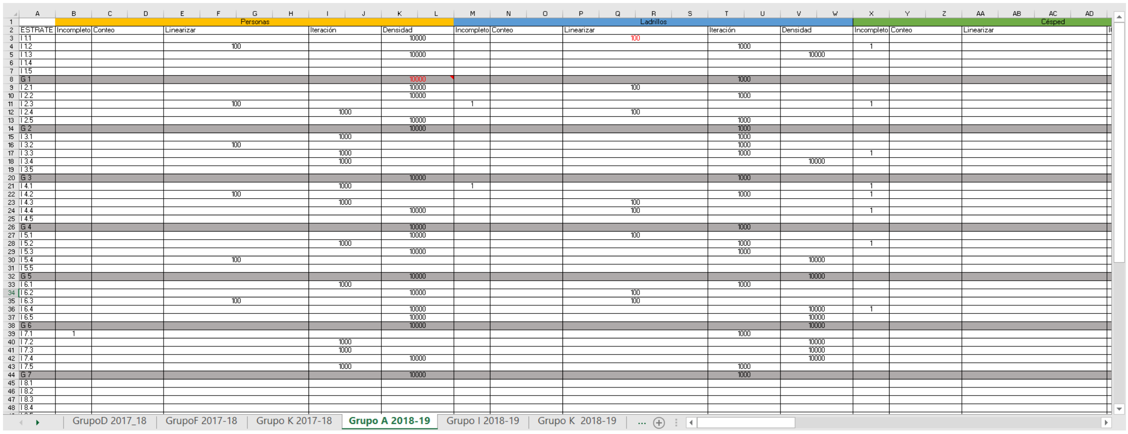


Figura 4-16.: Hoja de cálculo que recoge la codificación de la categorización de los planes de resolución individuales (experiencia A1) y de las resoluciones grupales (experiencia A2) para el grupo 4º A del año 2018/2019.

4.2.2. Experiencia A2

En la experiencia A2 los mismos participantes de la experiencia A1 se enfrentaron de nuevo a la secuencia 1, pero esta vez debían resolverlos por completo y en grupo, es decir, realizando mediciones y estimaciones cuantitativas en el lugar real del problema, y ejecutando procedimientos de cálculo para obtener la estimación numérica demandada en cada problema. El diseño de esta experiencia obedece al objetivo de estudiar si trabajar en grupo y en el lugar real de los problemas influye en la resolución de problemas reales de estimación. La elección del trabajo en grupo durante la experiencia A2 se apoya en diferentes estudios que destacan la importancia de trabajar en grupo para mejorar las habilidades de resolución de problemas (Chapman, 1999; Szydlik y cols., 2003). Además, Llinares y Valls (2009) explican que en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y de su enseñanza, los futuros profesores utilizan los instrumentos que les rodean para pensar y actuar en una comunidad de práctica. Es pertinente considerar, por tanto, que el trabajo *in situ* puede ser una forma de andamiaje que facilite la resolución de este tipo de problemas (Buchholtz, 2017).

Elección de la muestra

En la experiencia A2, como se ha dicho, participaron los mismos maestros en formación que en la experiencia A1, es decir, 113 participantes el curso 2017/18 y 111 participantes el curso 2018/19. Pero en esta experiencia configuraron, de manera libre, grupos de 3 a 5 personas. Se configuran 31 grupos en el curso 2017/18 y 31 grupos en el curso 2018/19, por lo que la muestra de la experiencia A2 está compuesta por $N = 62$ grupos de futuros maestros.

Descripción de la experiencia

En los cursos académicos 2017/18 y 2018/19, la experiencia A2 se llevó a cabo la semana siguiente a la experiencia A1. A final de la sesión de la experiencia A1 se dijo a los participantes que debían formar grupos de entre 3 y 5 personas para la siguiente sesión, por lo que la experiencia A2 empezó con los grupos formados.

Durante los primeros diez minutos se explicó a los estudiantes que iban a volver a enfrentarse a la secuencia 1, pero esta vez trabajarían en grupos y en el entorno de la Facultad, en los lugares físicos reales en los que se ubican los cuatro problemas (Figura **4-6**). Se explicó, además, que esta vez no debían limitarse a hacer un plan de resolución, sino que debían ejecutar el plan, de forma que obtuvieran una estimación numérica como solución del problema. Se insistió en la importancia de que todos los participantes del grupo trataran de llegar a un consenso sobre qué tipo de resolución desarrollar, y se incidió en que todos debían participar en el proceso de resolución. Para alcanzar estos objetivos, a cada grupo se le facilitaron instrumentos de medida: varios metros extensibles y un odómetro de rueda por grupo, para distancias más grandes.

Se entregó a cada grupo un legajo con los enunciados de los cuatro mismos problemas que en la experiencia A1. Puesto que un objetivo de la investigación basada en la experiencia A2 es categorizar los acuerdos entre los miembros del grupo respecto a sus planes de resolución previos, también se le entregaron a cada componente del grupo unas fotocopias de sus producciones individuales. De este modo, cada integrante del grupo disponía de su plan de resolución y podía servir de guía para la resolución grupal, siempre y cuando llegaran a

un acuerdo si los planes eran distintos. Zawojewski, Lesh, y English (2003) sugieren que los alumnos - trabajando en pequeños grupos y enfrentándose a una situación problemática que les resulte significativa y relevante - deben inventar, ampliar y perfeccionar sus propias construcciones matemáticas para responder a las exigencias del problema planteado. También señalan que cuando los resultados se comunican a otros estudiantes, pueden producirse discusiones e intercambios de opiniones, lo que a su vez puede llevar a una revisión del proceso seguido y a la construcción de nuevos modelos.
A continuación, se les condujo a los espacios reales del entorno de la Facultad en los que están situados los problemas. Los 80 minutos de experiencia en los lugares de los problemas fueron supervisados por los investigadores D (doctorando), T (tutora) y X (colaboradora), pero en ningún momento intervinieron en la actividad de los participantes. Se distribuyeron los grupos de trabajo entre las cuatro ubicaciones de los problemas, para que no coincidieran todos en un mismo espacio, y se les indicó que cada grupo debía resolver los problemas de manera independiente, sin interactuar con los otros grupos. Al terminar la actividad, los participantes entregaron el material utilizado a los investigadores.

Recogida de datos

Como en la experiencia anterior, la fuente de datos de la experiencia A2 son las producciones escritas de los grupos de futuros maestros al volver a resolver la secuencia 1 de problemas. Se trata de las resoluciones de $N = 62$ grupos, por tanto, son 62×4 problemas $= 248$ producciones escritas las que se han recogido y analizado en esta experiencia.
Agrupadas por año académico y grupo, se escanearon todas las producciones. Se utilizaron las mismas hojas de cálculo que las que sirvieron para codificar los planes de resolución individual (Figura **4-16**). Las producciones escritas correspondientes a cada grupo se codificaron simplemente como G1, G2, etc. La configuración de los grupos, como se ha comentado ya, fue la base para etiquetar las resoluciones individuales, de manera que cada código individual de la experiencia A1 tenía una cifra que indicaba el grupo del que formó parte en la experiencia A2. Así, por ejemplo, el resolutor I.3.4 es el cuarto componente del G3. Esto permite conectar las producciones individuales con las grupales, y es la razón de que se utilice la misma hoja de cálculo. En la hoja de cálculo se registraron las categorías de resolución, pero distinguiendo en franjas grises las grupales de las individuales (Figura **4-16**). De este modo, cada franja gris está precedida por las franjas blancas de sus componentes individuales.

4.2.3. Implementación del cuestionario Post-experiencia

Con el objetivo de complementar el análisis de las producciones de las experiencias A1 y A2, recogiendo algunas reflexiones sobre el proceso de resolución de la secuencia 1, tanto a nivel individual como grupal, se implementó el cuestionario post-experiencia cuyo diseño ha sido explicado con anterioridad. La idea de recoger esta información surgió una vez implementadas las experiencias A1 y A2 en el curso 2017/18, por lo que este cuestionario post-experiencia se diseñó tras la experiencia A2 de 2017/18 y se pasó tras la experiencia A2 del año 2018/19.

Elección de la muestra y descripción de la experiencia

La implementación del cuestionario post-experiencia se llevó a cabo el curso 2018/19 con los mismos 111 maestros en formación que habían participado, durante las dos sesiones previas, en las experiencias A1 y A2. El cuestionario se completó, por tanto, durante una sesión ordinaria de 90 minutos de la asignatura "Didáctica de la Geometría, la Medida, la Estadística y la Probabilidad" en los grupos 4º A, 4º I y 4º K. En dicha sesión faltaron 6 personas que habían participado en las anteriores experiencias, por lo que se dispone finalmente de $N = 105$ respuestas al cuestionario.

Recogida de datos

La fuente de datos son las respuestas escritas a las tres preguntas abiertas del cuestionario (Anexo D). Se escanearon todas las producciones, ordenadas por grupo académico: primero las de 4º A, luego 4º I y por último 4º K. Se elaboró una hoja de cálculo para cada pregunta del cuestionario, con un listado de los 105 participantes, cada uno identificado con la etiqueta a1, a2, . . . , a105. Para cada pregunta, en la hoja de cálculo se registraron, por columnas, los números correspondientes a las categorías de respuesta que emergieron de la categorización, que explicaremos en la siguiente sección, y se marcaba la que correspondía a cada participante (Figura **4-17**).

	1	3	4	6	7	8	9	11	12		
a1	1										
a2			1							**P12**	**Influencia de medir in situ en la resolución grupal respecto a la individual**
a3		1									*9 categorías*
a4								1		1	Trabajar en el espacio del problema le ha permitido visualizar la situación de forma clara: considerar el tamaño del espacio, el gran
a5								1		2	
a6		1								3	Explica que poder concretar las estimaciones realizando mediciones, así como hacer pruebas sobre el terreno, les ha llevado a ver
a7								1		4	Incompleto o blanco.
a8	1					1				5	
a9								1		6	Explica que en P1 al trabajar in situ ven baldosas del suelo, que no se ven en la foto, y les permite ganar en sencillez y rapidez, ni si
a10									1	7	Explica que sobre el terreno contemplan irregularidades en la disposición de ladrillos en P2 o del tamaño de la hierba en P3, que n
a11						1				8	Considera que trabajar sobre el terreno y con datos numéricos resultado de mediciones es más fácil, y que los problemas abiertos
a12	1									9	Asegura que trabajar en grupo permite comparar procesos de resolución sobre el terreno y comprobar cuál es la mejor.
a13		1		1						10	
a14									1	11	Asegura que trabajar in situ le ha influido pero no da razones.
a15					1					12	Dice que trabajar in situ realizando mediciones aumenta la motivación, la utilidad y/o el interés/diversión al resolver el problema.

Figura 4-17.: Registro de las respuestas categorizadas a la pregunta C1.

4.2.4. Investigación B

La experiencia en la que se basa la investigación B, como ya se ha adelantado, tiene como objetivo verificar si la relación entre contexto y tipo de plan de resolución, cuando se utiliza una secuencia 2 contextualmente isomorfa a la secuencia 1, es la misma que en la experiencia A1. También se introducía un estudio sobre el efecto de hacer más compleja la estructura del enunciado de los problemas de la secuencia.

Elección de la muestra y descripción de la experiencia

La experiencia de la investigación B se desarrolló el curso 2018/19 con dos grupos (4º G y

4º H) de la asignatura de cuarto curso "Didáctica de la Geometría, la Medida, la Estadística y la Probabilidad", para asegurar homogeneidad con la experiencia A1. Participaron en la experiencia $N = 87$ futuros maestros, 43 de 4ºG y 44 de 4º H. La experiencia de la investigación B fue homóloga a la experiencia A1, pero los participantes debían resolver una secuencia alternativa de cuatro problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie rectangular. Tuvo lugar en una sesión ordinaria de 90 minutos de la asignatura mencionada, en el aula habitual de cada grupo. De nuevo, en los primeros 10 minutos se hizo hincapié en las mismas instrucciones que en la experiencia A1. Una vez dadas las instrucciones, a cada futuro maestro participante se le proporcionaron dos hojas con los cuatro problemas (dos problemas por hoja) de la secuencia 2, tal y como puede verse en el Anexo C. Uno de los investigadores (D o T) estuvo presente durante la experiencia en cada aula de grupo.

Recogida de datos
La fuente de datos de la investigación B son las producciones escritas de los futuros maestros al resolver la secuencia 2 de problemas. Se trata de los planes de resolución de N = 87 futuros maestros, por tanto, son 87×4 problemas = 348 producciones escritas las que se han recogido y analizado en esta experiencia. El proceso de recogida de los datos y etiquetado de las producciones en las hojas de cálculo es idéntico al explicado en la experiencia A1.

4.2.5. Investigación C

La investigación C se diseñó para emprender un estudio sobre criterios de adaptabilidad para los planes de resolución/resoluciones de problemas de estimación de un gran número de elementos en superficies delimitadas. Para ello se diseñó y distribuyó un cuestionario en línea (Anexo E) para expertos en el que se les consultaba sobre cuál es el tipo de resolución más adecuado en cada problema y a qué criterios de adaptabilidad obedece la decisión.

Selección de la muestra e implementación
La selección de expertos se llevó a cabo por varias vías:

- Se envió una invitación a participar en la investigación sobre criterios de adaptabilidad en resolución de problemas de estimación en contexto real por correo electrónico a través de la lista de difusión de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), con la finalidad de recoger opiniones de investigadores e investigadoras en el área de Didáctica de la Matemática.

- Se difundió por correo electrónico entre los departamentos de la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València, y los departamentos de Matemáticas de la Universitat Jaume I de Castellón y de la Universidad de Oviedo. También se difundió a través de la lista de difusión de la comisión de educación de la RSME (Real Sociedad Matemática Española).

- Se difundió en listas de correo de profesores y profesoras de Secundaria de la especialidad Matemáticas que habían participado en cursos de formación del profesorado en modelización matemática, por lo que tenían cierta familiaridad con los problemas de Fermi, que se habían tratado en esos cursos.

El periodo de difusión y recogida de respuestas discurrió entre el 13 de julio de 2020 y el 18 de septiembre de 2020. Se recogieron $N = 81$ respuestas. El perfil de los participantes es el siguiente:
En cuanto a formación, la mayoría de los participantes (64,2 %) son licenciados en Matemáticas, un 32,1 % de ellos tiene un doctorado en Matemáticas y un 12,3 % tiene un doctorado en Didáctica de la Matemática (Figura **4-18**).

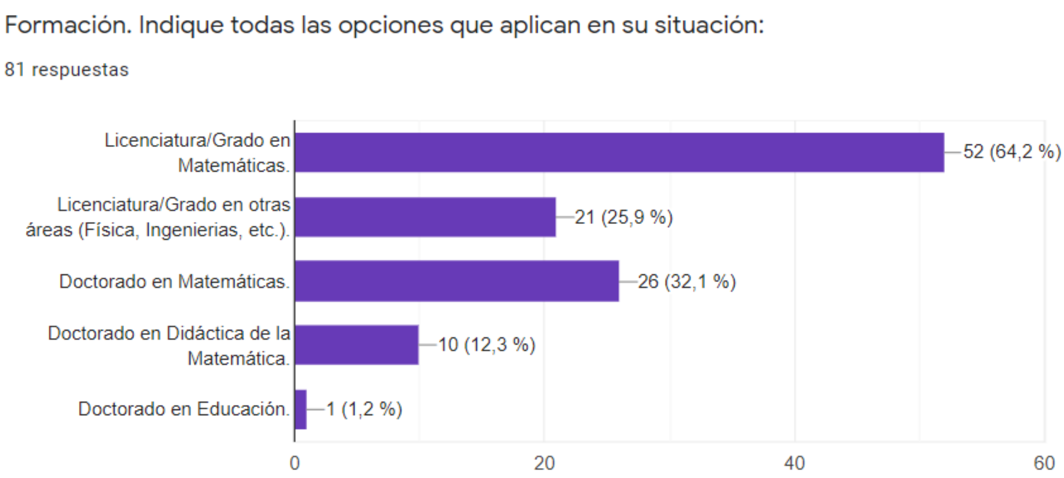


Figura 4-18.: Formación de los participantes en la encuesta de expertos de la investigación C.

Una mayoría de los participantes (51,9 %) imparten docencia en asignaturas de Matemáticas en la ESO y Bachillerato. Un 32,1 % imparte docencia en asignaturas de Matemáticas y/o su didáctica en grados de Magisterio o en el Máster de profesor de Secundaria. El 21 % imparte docencia en asignaturas de Matemáticas en grados de Matemáticas, Física o Ingeniería. Cinco personas (6,2 %) no estaban impartiendo docencia en ese momento. Hay que señalar que hay participantes que han marcados dos opciones, por ser profesorado asociado en la universidad, pero también docentes de Secundaria.
En cuanto al género, han contestado 46 hombres y 35 mujeres (Figura **4-19**).
El cuestionario, como se ha explicado en la sección dedicada a su diseño, tiene dos preguntas cerradas para cada problema de la secuencia 1: una de elección múltiple y otra en forma de

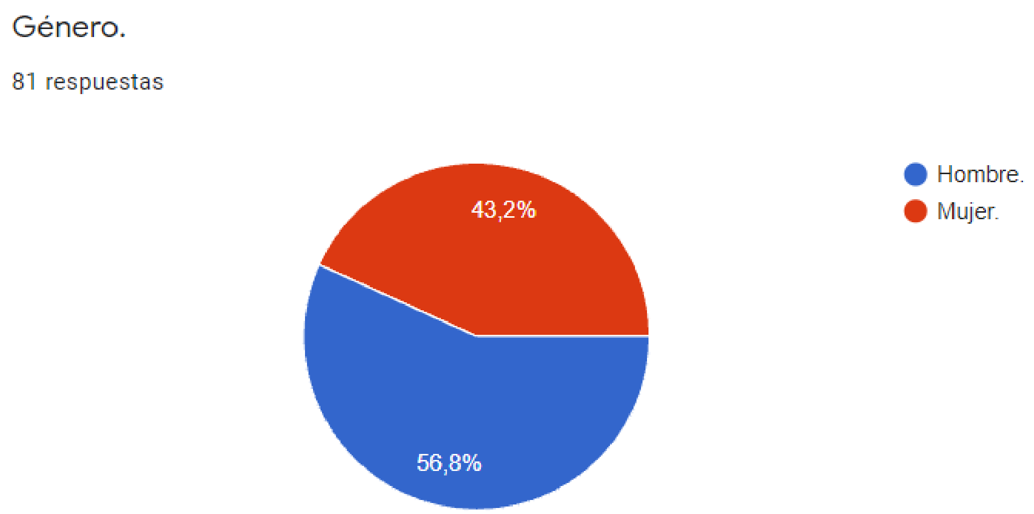


Figura 4-19.: Género de los $N = 81$ expertos y expertas participantes en la investigación C.

checklist. El proceso de análisis de estos datos es cuantitativo y directo, y se mostrarán los resultados en el Capítulo V.

4.3. Metodologías para el análisis de los datos

En los siguientes apartados describiremos las técnicas y aproximaciones metodológicas empleadas en esta investigación. Como explicamos en el Capítulo 3, se trata de una investigación observacional (Yin, 2009; Lodico y cols., 2010) que utiliza técnicas y métodos mixtos, es decir, que combinan análisis cualitativo y cuantitativo (Buchholtz, 2019). La componente cualitativa es esencial, y en el análisis de datos y resultados que se presentará en el Capítulo 5 se trabajará con variables cualitativas nominales (categóricas) categorizadas en una triangulación de investigadores (Denzin, 2009).En esta sección, por tanto, se describirá el proceso de categorización previo al análisis de los resultados.

En el apartado 4.3.1, se explicará el proceso de categorización de los tipos de plan de resolución (experiencia A1) y los tipos de resolución (experiencia A2) a partir de las producciones recogidas en la secuencia 1, y los tipos de plan de resolución de la secuencia 2 (investigación B).

En el apartado 4.3.2 se describe el proceso de categorización de los acuerdos del trabajo grupal y de las respuestas a las preguntas C1 y C2 de cuestionario post-experiencia, que demandaban una reflexión sobre los cambios que introduce el trabajo grupal e *in situ* en la experiencia A2 respecto de la experiencia A1.

En el apartado 4.3.3 se describirá el proceso de categorización de los factores de complejidad en las producciones recogidas en la experiencia A1 y la experiencia A2.

En el apartado 4.3.4 se describe el proceso de categorización de los errores específicos para los problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada. El apartado 4.3.5 aborda el proceso de categorización de la flexibilidad (inter-tarea y también intra-tarea) en los planes de resolución de la experiencia A1. También se presenta la categorización de la pregunta C3 del cuestionario post-experiencia sobre los criterios de adaptabilidad.

4.3.1. Categorización de los planes de resolución y las resoluciones

El proceso de análisis de las categorías de tipo de plan de resolución (experiencia A1 e investigación B) y de tipo de resolución (experiencia A2) se realizó entre tres investigadores, uno de ellos el doctorando (D), y otra la tutora (T). La tercera (X) es una investigadora colaboradora. Se utilizó una metodología de triangulación entre investigadores que describen e interpretan las producciones. El acuerdo intersubjetivo garantiza la reducción de sesgos (Denzin, 2009), pero es importante distinguir entre concordancia entre codificadores (la proporción de acuerdo entre ellos durante el proceso de construcción de las categorías) y la fiabilidad de la categorización, que se puede cuantificar una vez fijado el sistema de categorías y haber sido utilizado para analizar las producciones (Gordillo y Rodríguez, 2009). En este caso, no fue necesario llegar a acuerdos durante el proceso de construcción de las categorías porque se utilizaron las categorías de los estudios precedentes (Albarracín, 2011; Albarracín y Gorgorió, 2014; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017; Albarracín y cols., 2021) para todas las producciones recogidas (experiencia A1, experiencia A2, investigación B). El enfoque metodológico de carácter cualitativo fue emplear el instrumento de análisis de este tipo de producciones basado en considerarlas como un sistema interrelacionado de modelo inicial y estrategia, como se explicó en el apartado 2.4.3. El modelo inicial se refiere a la distribución de los elementos en la superficie del problema, que puede ser unidimensional o bidimensional; mientras que la estrategia asociada puede consistir en contar directamente, en iterar el área de un elemento (tomada como unidad de medida de la superficie) o en utilizar la densidad en una muestra del espacio. Este enfoque daba lugar, en los trabajos precedentes, a una categorización de tipos de resolución para las producciones de estudiantes de Secundaria. En el caso de nuestro análisis, se trata de verificar que esta categorización también funciona para las producciones de futuros maestros en las tres experiencias, y cuantificar su fiabilidad.

Efectivamente, en los sucesivos procesos de categorización para las experiencias A1, A2 y la investigación B, los investigadores pudieron adaptar la categorización mencionada a las producciones de los futuros maestros, sin encontrar nuevas categorías de plan de resolución/resolución. A continuación, describiremos la categorización empleada, apoyando la descripción con un ejemplo tomado de las producciones de la experiencia A1 (aunque, como hemos dicho, también se ajusta a las producciones obtenidas en la experiencia A2 y en la investigación B). Utilizaremos el genérico “resolutor” para referirnos a la futura maestra o maestro que elaboró la producción. Después, analizaremos la fiabilidad de la categorización para cada una de las tres experiencias.

- *Recuento.* Este tipo de plan de resolución propone un procedimiento de recuento exhaustivo y directo para obtener la estimación. No hay un modelo de la situación real que deba ser matematizado, sino que la estrategia consiste en representar físicamente o simular la situación real. Por ejemplo, el resolutor 4ºI-I.2.1 propone el siguiente plan basado en el recuento para *P3-Césped*:

  > "Contar la cantidad de ramas que hay y cuántas briznas tiene cada rama aproximadamente".

  Para *P4-Coches* el resolutor 4ºF- I.5.1. escribe:

  > "Se llena el parking de coches sin dejar huecos, hacemos una foto desde arriba del parking, y se cuentan los coches. Ese número será el total de coches que caben".

- *Linealización.* Este plan de resolución es una adaptación de lo que en el Capítulo 2 se llamó, siguiendo los estudios precedentes, distribución en cuadrícula. Durante el proceso de categorización nos pareció más adecuado optar por renombrarla, pues la disposición de los elementos siguiendo una cuadrícula es sólo un caso particular de la estrategia que consiste en obtener la estimación reduciendo el problema de dos dimensiones a una dimensión. Así, dentro de este tipo de plan de resolución se han englobado todas las producciones basadas en un modelo inicial unidimensional de distribución de los elementos. Son producciones que "reducen" el problema de estimación en dos dimensiones a un problema de estimación de una dimensión, y una vez se ha escrito cómo alcanzar la estimación lineal, el proceso para obtener la estimación del número total de elementos en la superficie es realizar un producto cartesiano. No se han distinguido las estrategias escogidas por los resolutores para obtener la "estimación lineal" porque lo que nos interesaba analizar en estas producciones es la "mirada lineal" a un problema de estimación de un gran número de elementos colocados en una superficie. Concretando: en la mayoría de producciones la Linealización implica estimar el número de elementos en una fila (por lo tanto, trabajar en un modelo de distribución unidimensional), y luego hacer el producto cartesiano de filas por columnas. Por ejemplo, en *P2-Baldosas* el resolutor 4ºK-I.11.2 propone el siguiente plan de resolución basado en linealización:

  > "En primer lugar necesitaría contar el número de baldosas que hay en un lado del área que ocupan dichas baldosas [de la superficie rectangular entre el gimnasio y la facultad de Magisterio] y luego las del otro lado perpendicular, y por último las multiplicaría".

- *Unidad base*. El modelo inicial de este plan de resolución es bidimensional, pues el resolutor no coloca los elementos a lo largo de una longitud, sino que trabaja a partir del espacio bidimensional que ocupa un elemento en relación al espacio total. La cuestión implícita detrás de este modelo inicial es cómo cubrir la superficie total usando el área del elemento como unidad de medida. La estrategia asociada es directa, para saber cuántas veces cabe la superficie que ocupa un elemento en la superficie total, el procedimiento es: primero calcular el área total de la superficie, luego calcular el área que ocupa un elemento, y por último dividir la medida del área de la superficie total entre la medida del área ocupada por un elemento, pues el resultado es precisamente cuántas áreas ocupadas por un elemento se necesitan para cubrir la superficie total. Por ejemplo, para *P1- Personas*, el resolutor 4ºD- I.1.3 propone el siguiente plan de resolución basado en la iteración de la unidad base:

> "En primer lugar, calcularía la superficie del porche, es decir, necesitaría medir el largo y la anchura del porche, y lo multiplicaría. En segundo lugar, mediría la superficie que ocupa una persona en el porche de la misma forma, multiplicando el largo y la anchura que ocupa. Ambas medidas, la superficie del porche y la que ocupa una persona, las pasaremos a la misma unidad, por ejemplo, metros o centímetros cuadrados. Finalmente, dividiría la superficie del porche entre la superficie que ocupa una persona, y el resultado serán las personas que se pueden resguardar".

- *Densidad*. Como ocurre con el plan de resolución Unidad base, el modelo inicial del plan de resolución basado en densidad es bidimensional, ya que el resolutor considera una distribución de los elementos por toda la superficie y escoge una porción bidimensional de ese espacio en la que supone que hay un número de elementos proporcional al que hay en el área total. El resolutor elige en su modelo un área más pequeña (que toma como unidad) con el objetivo de estimar con cierta facilidad el número de elementos (normalmente, por recuento directo), por lo que la llamaremos "área unidad" (o "subárea muestral"). Una vez estimado el número de elementos por área unidad, el resolutor calcula cuántas áreas unidad cubren el espacio, por tanto, debe hacer una división de medidas: área de la superficie total entre área unidad (normalmente se toma el metro cuadrado como área unidad, pero en otros casos se toma un centímetro cuadrado). Para finalizar, fundamentado en el razonamiento proporcional, el resolutor debe multiplicar el número de elementos que hay distribuidos en un área unidad por el número de áreas unidad que cubren el área total. En resumen, el plan de resolución Densidad consiste, por tanto, en un modelo inicial de la distribución de los elementos basados en un área total y un área unidad, y en procedimientos de proporcionalidad para estimar el número total de elementos. Por ejemplo, para el problema *P3- Césped*, el resolutor 4ºD-I.1.3 propone el siguiente plan de resolución basado en densidad:

> "En primer lugar, mediría un centímetro de largo y otro de ancho y lo delimitaría, de modo que podemos contar cuántas briznas hay en un centímetro cuadrado [área unidad]. En segundo lugar, mediría el ancho y el largo de todo el césped [la jardinera rectangular] para saber la superficie total en centímetros cuadrados. Finalmente, multiplicaría el número de briznas que hay en un 1 cm^2 por la superficie total".

- *Incompleta.* Esta categoría no es un tipo de resolución, sino una categoría que engloba aquellas producciones en las que no se dan suficientes detalles para saber cómo se obtendría la estimación. Son aquellas producciones que están en alguno de estos tres casos: no responden a la pregunta del problema o la dejan en blanco; no desarrollan un modelo matemático de la situación ni una estrategia de estimación; o comienzan a desarrollar un modelo, pero no explican lo suficiente el proceso como para determinar si el resolutor podría alcanzar una estimación. Esta categoría engloba, por tanto, todas aquellas producciones que no reúnen los requisitos mínimos como para considerarse un plan de resolución, aunque a veces - cuando se ha empezado a esbozar un modelo inicial y/o matematizado algunos aspectos del modelo - se intuya hacia dónde quiere ir el resolutor. Por ejemplo, el resolutor 4ºD-8.3 plantea la siguiente producción incompleta para el problema *P1-Personas*, pues no llega a desarrollar un modelo inicial completo de la situación del problema ni hay proceso de matematización. En efecto, se puede observar que menciona la medida del porche, pero no indica la magnitud que está midiendo, tampoco explica a qué se refiere con "estimar el total", pues no menciona ni los elementos que se deben estimar ni su distribución en la superficie:

> "Necesitaríamos saber cuál es la medida total del porche en primer lugar. Para ello tendríamos que estimar el total partiendo del ancho y del largo".

Esta categorización se utilizó en el análisis de las producciones de los futuros maestros en la experiencia A1, en la experiencia B y la experiencia A2. En las dos primeras, las cinco categorías anteriores se aplicaron a planes de resolución, que, como se explicó en el apartado 4.2.1, son resoluciones esquemáticas de los problemas de estimación. En la experiencia A2, las mismas categorías se utilizaron para la categorización de resoluciones en grupo e *in situ*. Para analizar la fiabilidad de estas categorizaciones, se codificaron las categorías como 1 (Incompleta), 2 (Recuento), 3 (Linealización), 4 (Unidad base) y 5 (Densidad).
En la experiencia A1, el proceso de categorización de las 896 producciones de los $N = 224$ futuros maestros entre tres investigadores (D, T y X), y el análisis de la fiabilidad de dicho proceso, fueron los siguientes: primero se categorizaron las 452 producciones de los 113 participantes durante el curso 2017/18 por dos investigadores (D, T). Cada uno de ellos, de manera independiente, completó las hojas de cálculo de los grupos participantes ese curso. Para cada participante (filas), en cada uno de los cuatro problemas (columnas), se asignaba el número correspondiente a la categoría de plan de resolución escogida. Para el análisis

de la fiabilidad de categorización realizada de manera independiente por los investigadores D y T, se realizó una tabla de coincidencias (Tabla **4-5**) y se calculó la kappa de Cohen (Landis y Koch, 1977; Gordillo y Rodríguez, 2009) como test de objetividad. Este test se calculó con el programa online de estadística de la web VassarStats (Website for Statistical Computation[1]).

Tabla 4-5.: Tabla de coincidencia entre los investigadores D y T para la categorización de 452 tipos de plan de resolución (1= incompleto, 2 = recuento, 3 = linealización, 4 = unidad base, 5 = densidad) de los 113 futuros maestros participantes en la experiencia A1 durante el curso 2017/18.

		D					
		1	2	3	4	5	Total T
T	1	**74**	10	4	11	5	104
	2	5	**3**	0	0	0	8
	3	8	7	**61**	2	1	79
	4	9	0	3	**202**	0	214
	5	2	0	2	0	**43**	47
	Total D	98	20	70	215	49	452

El valor de la kappa de Cohen observada es $k = 0,7774$, con error estándar $SE = 0,0238$. El grado de concordancia inter-observador es mayor cuanto más cercano a 1 sea el valor del coeficiente kappa de Cohen, siendo el valor 0,7774 bueno, cercano a muy bueno (de 0,81 a 1), en la escala de Landis y Koch (1977). La categorización fue clara y, como puede verse en la Tabla **4-5**, las mayores dificultades residieron en categorizar planes de resolución incompletos (1) y planes de resolución basados en recuento (2). Esto es esperable porque la categoría Incompleto es la menos precisa, ya que engloba cualquier producción que haya desarrollado lo suficiente el modelo inicial o la estrategia necesarios para alcanzar la estimación. También es esperable que, puesto que la categoría Recuento incluye producciones sin un modelo matemático desarrollado, se observe que lo que el investigador D categoriza como Recuento, el investigador T lo categorice como Incompleto, y viceversa. Para resolver estas ambigüedades y clarificar el criterio de categorización en los casos de discordancia, los investigadores D y T se reunieron con el investigador X y se discutieron uno a uno, completando el consenso en el análisis de los tipos de planes de resolución para el curso 2017/18.

El proceso se repitió para categorizar las 444 producciones de los 111 futuros maestros que participaron en la experiencia A1 el curso 2018/19. Esta vez, los investigadores D y X completaron las hojas de cálculo de los grupos de ese curso. En este caso, el valor de la kappa de Cohen observada es $k = 0,7998$, con error estándar $SE = 0,0224$. De nuevo, la mayoría de

[1] `http://vassarstats.net/`

Tabla 4-6.: Tabla de coincidencia entre los investigadores D y T para la categorización de 348 tipos de plan de resolución (1= incompleto, 2 = recuento, 3 = linealización, 4 = unidad base, 5 = densidad) de los 87 futuros maestros participantes en la investigación B durante el curso 2018/19.

		D					
		1	2	3	4	5	Total T
T	1	**52**	7	8	3	4	74
	2	11	**3**	2	2	1	19
	3	6	5	**39**	8	1	59
	4	5	0	1	**112**	2	120
	5	4	3	2	0	**67**	76
	Total D	78	18	52	125	75	348

ambigüedades que afectan a la fiabilidad de la categorización se concentran en las categorías Incompleto y Recuento. Para resolverlas y clarificar el criterio de categorización en los casos de discordancia, se repitió el proceso seguido el año anterior, pero con cambio de roles: los investigadores D y X se reunieron con el investigador T para discutir cada discordancia, completando el consenso en el análisis de los tipos de planes de resolución para el curso 2018/19. El proceso de categorización de los tipos de plan de resolución para la experiencia A1 fue, por lo tanto, de alta fiabilidad por dos razones fundamentales: las categorías se habían desarrollado en estudios previos; y, sobre todo, hay poca ambigüedad en la interpretación de qué estrategia se ha empleado en una producción, salvo en la determinación de qué es lo que se considera resolución incompleta.

En la investigación B, el proceso de categorización de las 348 producciones de los $N = 87$ participantes se realizó por los tres investigadores (D, T y X) de manera similar. Aunque los futuros maestros resolvieron la secuencia 2, alternativa a la de la experiencia A1, se aplicaron las mismas categorías de plan de resolución. De nuevo, se utilizó una metodología de triangulación entre investigadores para reducir sesgos y se midió la fiabilidad de la categorización con un test de objetividad kappa de Cohen. Los investigadores D y T completaron, por separado, el análisis de categorías en las hojas de cálculo correspondientes a los grupos participantes en esta experiencia. Se calculó una kappa de Cohen con valor $k = 0,7139$ con $SE = 0,0282$. Se trata de un nivel de fiabilidad en el acuerdo alto. El valor es algo más bajo que en la experiencia A1 porque ha aumentado la proporción de las producciones categorizadas como Incompleta, que son las que producen más discrepancias (ver Tabla **4-6**). Los investigadores D y T se reunieron con el investigador X para clarificar el criterio de categorización en los casos de discordancia, completando el consenso en el análisis de los tipos de planes de resolución para la secuencia 2.

Por último, en la experiencia A2, el proceso de categorización de los tipos de resolución se realizó mediante una triangulación de los investigadores D y T. Para categorizar las 124 producciones de los 31 equipos participantes en el curso 2017/18, los investigadores completaron, de manera independiente, las hojas de cálculo de los grupos participantes durante ese curso, y se utilizó la kappa como test de objetividad. El grado de concordancia inter-observador fue muy alto, con $k = 0,8703$ ($SE = 0,0412$). Las pocas discordancias se consensuaron entre los dos investigadores, sin necesidad de la intervención de un tercero. El proceso se repitió para las 124 producciones de los 31 equipos participantes el curso 2018/19, con un grado de concordancia inter-observador muy alto, de $k = 0{,}8792$ ($SE = 0{,}373$). Se consensuaron las discrepancias entre los investigadores D y T. Se completó la categorización de las resoluciones grupales con mayor fiabilidad y claridad en el proceso que la de los planes de resolución, pues las producciones en esta experiencia son más minuciosas y más completas, lo que permite ajustar la interpretación; además, hay menos producciones categorizadas como incompletas, y apenas hay elementos de ambigüedad.

4.3.2. Categorización de los acuerdos entre los grupos y de las respuestas sobre la influencia del trabajo in situ y en grupo

En este apartado se describe el proceso de categorización que conduce al análisis de los aspectos del trabajo experimental *in situ* y en grupo que se relacionan con los posibles cambios en el tipo de resolución de la experiencia A2 respecto a los planes de resolución de la experiencia A1. Para ello, se utilizan las categorías de resolución descritas en el apartado anterior y también se analizan las respuestas C1 y C2 del cuestionario post-experiencia (Anexo D).

En primer lugar, se categorizaron todos los posibles escenarios que, para cada grupo de trabajo participante en la experiencia A2, describen el cambio del tipo de resolución grupal consensuado respecto a los tipos de planes de resolución individual de los miembros del grupo en la experiencia A1. El proceso de análisis de cómo se llevaron a cabo los *consensos entre los miembros del grupo* se apoyó en técnicas cuantitativas. Para ello, los tipos de resolución grupales y los tipos de plan de resolución individual de las experiencias A1 y A2 se recodificaron con los mismos códigos (1 = Incompleto, 10 = Recuento, 100 = Linealización, 1000 = Unidad base, 10000 = Densidad), y se creó una hoja de cálculo con todos los grupos que permitía comparar los cambios del tipo de plan de resolución escogido por cada miembro del grupo respecto a la resolución consensuada por el equipo (Figura **4-20**). Por ejemplo, en la Figura **4-20** se observa que en el problema *P1-Personas* sólo un miembro del grupo (I.1.2) usó el plan de resolución Densidad en la experiencia A1, que es el tipo de resolución grupal que se consensuó en la experiencia grupal e *in situ* A2. Dos miembros del grupo habían escogido el plan de resolución Unidad base (I.1.1 e I.1.3), y otro había escogido Linealización (I.1.4). Se trata de una situación en la que la mayoría (formada por los resultores I.1.1 e I.1.3 que habían escogido Unidad base en sus respectivos planes de resolución individuales) acuerda cambiar su resolución individual a favor de la resolución minoritaria (la propuesta en el plan individual por el resolutor I.1.2, que escogió Densidad).

		Personas			Ladrillos		Césped		Coches	
	Est/grupo	Estrategia	Gruoo		Estrategia	Gruoo	Estrategia	Gruoo	Estrategia	Gruoo
Grupo D 17_18	I 1.1	1000			100		1000		1000	
	I 1.2	10000			100		10000		1000	
	I 1.3	1000			100		10000		1000	
	I 1.4	100			100		10000		100	
	G 1	10000	minM		1000	TV	10000	Mmin	1000	Mmin

Figura 4-20.: Hoja de cálculo que refleja, para el grupo G1, los cambios de los planes de resolución en la experiencia A1 respecto a la en la experiencia A2 en cada problema de la secuencia 1.

Para el proceso de categorización de los escenarios posibles para los N = 62 grupos, se siguieron las reglas de consenso para grupos de trabajo de Stasson, Kameda, Parks, Zimmerman, y Davis (1991), encontrando cinco casuísticas, que corresponden a las distintas combinaciones: *consenso directo entre todos los miembros*, porque en todos coincide plan individual y resolución grupal; *mayoría sobre la minoría*, en la que la resolución grupal coinciden con un plan de resolución mayoritario entre los miembros del grupo; *mitad y mitad*, porque dos escogieron un plan y otros dos escogieron otro, y se impuso una de las parejas; *minoría sobre la mayoría*, como en el ejemplo anterior; *todos cambian en la grupal*, porque se escoge un tipo de resolución distinto a los planes individuales de todos los miembros del grupo. Como puede verse en la Figura **4-20**, en el problema *P2-Baldosas*, se da un escenario de "todos cambian en la grupal", pues todos los miembros del grupo habían usado planes de resolución basados en la linealización en la experiencia A1, pero en la resolución grupal e *in situ* utilizaron la Unidad base. En la Figura **4-20** observamos que en *P3-Césped* el escenario del acuerdo es, en este caso, de "mayoría sobre la minoría", pues tres miembros habían escogido Densidad en su plan de resolución individual y sólo uno (I.1.1) había empleado la Unidad base, y la resolución consensuada por el grupo es la mayoritaria, Densidad. Lo mismo ocurre en *P4-Coches*: la resolución grupal consensuada es Unidad base, que coincide con el plan de resolución individual de tres miembros del grupo, y sólo uno (I.1.4) había escogido otro plan de resolución en la experiencia A1 (Figura **4-20**). En el Capítulo 5 se expondrán los resultados de este análisis de la gestión grupal de las resoluciones.
En segundo lugar, se categorizaron las N = 105 respuestas a las preguntas C1 y C2 del cuestionario post-experiencia.

C1. ¿Medir *in situ* ha cambiado tu opinión sobre cómo resolver de la mejor manera posible alguno de los problemas? Explica en qué te ha influido a ti o al grupo hacer mediciones y en qué problemas esto os ha inducido a proponer una estrategia distinta a la que habías presentado de forma individual.

C2. ¿La estrategia de resolución presentada por tu grupo difiere de la que propusiste en tu resolución individual en alguno de los problemas? Explica en qué problemas has cambiado de estrategia de resolución, qué factores os han influido en ese cambio de decisión y cómo habéis tomado (y consensuado) en grupo esa decisión final.

Las preguntas abiertas plantean dificultades en la codificación, por su variabilidad. La variabilidad y la complejidad en la categorización es la razón por la que el proceso de categorización se realizó de manera cualitativa, entre los investigadores D y T. El proceso de categorización fue el mismo para las dos preguntas: triangulación entre dos investigadores. En un primer estudio exploratorio, el investigador D elaboró un listado provisional de categorías de respuesta emergentes. En un segundo análisis de las 105 respuestas, el investigador T, reunido con el investigador D, usaba dicho listado provisional para aplicarlo sobre las respuestas y sugería cambios: unir categorías o añadir alguna categoría no contemplada en la categorización provisional. Estos cambios se discutían entre los dos investigadores hasta consensuar unas categorías de respuestas definitivas. Las categorías de respuesta consensuadas por los dos investigadores para la pregunta C1 fueron la siguientes:

R1. Incompleta / no contesta a la pregunta.

R2. El trabajo en el espacio del problema le ha permitido percibir/visualizar la situación del problema con claridad: considerar el tamaño del espacio, el gran número de elementos e identificar los posibles obstáculos.

R3. Explica que el hecho de poder concretar las estimaciones mediante la realización de mediciones, así como de poder hacer pruebas en el lugar del problema, le ha llevado a ver que hay estrategias que no se pueden aplicar o a buscar otras más eficientes/precisas.

R4. Explica que al resolver *P1-Personas* se observan grandes baldosas, que no se ven en la fotografía del enunciado, y que eso permite ganar en sencillez y rapidez utilizándolas como área unidad de Densidad, ya que ni siquiera tienen que medir.

R5. Explica que en el lugar donde se encuentra el problema *P2- Baldosas* se observan irregularidades en la disposición de las baldosas, que no habían sido consideradas en la resolución individual y que esto influye para cambiar el tipo de resolución.

R6. Considera que trabajar en el lugar del problema y con datos numéricos obtenidos de las mediciones es más fácil, y que los problemas abiertos sin datos son más abstractos y difíciles.

R7. Dice que trabajar en grupo en el lugar del problema permite comparar los tipos de resolución y comprobar cuál es el mejor.

R8. Afirma que el trabajo *in situ* le ha influido, pero no da las razones.

R9. Dice que trabajar *in situ* haciendo mediciones aumenta la motivación, la utilidad y/o el interés/diversión por resolver el problema.

Las categorías de respuesta consensuadas por los dos investigadores para la pregunta C2 fueron la siguientes:

R'1. Incompleta / no contesta a la pregunta.

R'2. Informa de que la resolución del grupo cambia respecto a su plan de resolución individual en algunos problemas, pero no da razones sobre la influencia del grupo para explicar el cambio.

R'3. Explica que en la resolución grupal se han incluido algunos obstáculos identificados en el lugar real del problema porque es más fácil visualizar el espacio trabajando *in situ*, y que ahora gana en precisión.

R'4. Explica que la puesta en común da lugar a discutir sobre la viabilidad de algunos planes de resolución, así como su falta de precisión o eficacia, y que esto les ha permitido cambiar a una resolución mejor tras la discusión.

R'5. Explica que, trabajando *in situ* en la tarea *P1-Personas*, el grupo observa que utilizando Densidad con las baldosas grandes se gana en sencillez y rapidez.

R'6. Dice que la resolución grupal cambia respecto a su plan individual porque otros miembros del equipo han decidido la adoptada por todos, y explica que su plan de resolución era peor o que la nueva resolución decidida es más clara o adecuada.

R'7. Dice que no les fue difícil llegar a un consenso, porque todos vieron la resolución óptima al mismo tiempo, y que esa resolución coincide con su plan de resolución individual.

R'8. Dice que el trabajo conjunto con los compañeros le ayuda a descubrir los errores de su plan individual (confundir el volumen con el área, etc.), y que por eso en la resolución del grupo se dejan de cometer.

R'9. Asegura que el trabajo en grupo a través del intercambio de ideas ha permitido comparar visiones y enriquecer los planes de resolución individuales, llegando a una resolución consensuada.

Una vez consensuadas las categorías de respuesta a las preguntas C1 y C2, los investigadores D y T completaron de manera independiente las hojas de cálculo de las $N = 105$ respuestas a las preguntas C1 y C2, categorizando las respuestas de cada participante a1, a2, etc. (Figura **4-17**). Una vez categorizadas todas las respuestas, en una sesión se acordaron las categorizaciones de cada producción, discutiendo discrepancias y llegando a un acuerdo sobre la categorización de todas las respuestas. Los resultados de este análisis ayudarán a completar la discusión sobre qué aspectos del trabajo empírico en el lugar del problema y del trabajo en grupo influyen en la resolución de los futuros maestros, como se explicará en el Capítulo 5.

4.3.3. Categorización de los factores de complejidad en los planes de resolución y en las resoluciones grupales e in situ

Recordemos que en el Capítulo 2 se habían presentado los factores de complejidad como aquellos aspectos del contexto real que el resolutor puede cuantificar e incorporar a la construcción del modelo matemático con el objetivo de obtener mayor precisión en la estimación. En este apartado se describe el proceso de categorización de los factores de complejidad en planes de resolución (experiencia A1) y en resoluciones grupales e *in situ* (experiencia A2). En ambas experiencias se adapta la categorización de Albarracín y cols. (2021), que había sido realizada para producciones de estudiantes de Secundaria cuando resuelven problemas de estimación de una gran cantidad de elementos en una superficie delimitada, a las producciones de futuros maestros cuando resuelven la secuencia 1.
En la experiencia A1, el proceso de categorización se llevó a cabo por los investigadores D y T. En una primera ronda de análisis, a partir de las 452 producciones de los 113 participantes durante el curso 2017/18, el investigador D aplicó las categorías de factor de complejidad descritas por Albarracín y cols. (2021), que son: eliminación de obstáculos, densidad media, densidades diferenciadas y tamaños diferenciados. En esta ronda de análisis, el investigador D observó que emergía una nueva categoría, un factor de complejidad que no había sido recogido en los trabajos precedentes con estudiantes de Secundaria: el tamaño medio de los elementos. Los resultados de esta primera ronda fueron consensuados con la investigadora T, y se acordaron las categorías definitivas de factor de complejidad, que describimos a continuación, ilustrando cada categoría con un ejemplo transcrito de las producciones de la experiencia A1 para clarificar la explicación.

- *Eliminación de obstáculos.* También denominado "área útil". Se identifican zonas en la región que impiden colocar elementos, y se descuenta el área que ocupan del área total, con el fin de no incluir estas zonas en la estimación del número total de elementos. Este aspecto de la realidad del contexto del problema, la eliminación de zonas en las que no pueden colocarse elementos, se incorpora al modelo con el objetivo de evitar una sobreestimación del número de elementos que caben en el espacio del problema. Por ejemplo, el resolutor 4ºI-I.1.1, tiene en cuenta este elemento de complejidad y lo ilustra y lo explica en su plan de resolución (Figura **4-21**) del problema *P1-Personas*, escribe que:

  > "se tiene que descontar la superficie que ocupan las columnas [del porche] y la que ocupan las puertas giratorias [de la entrada al hall de la facultad]".

El resolutor I.1.1 descuenta el área que ocupan los pilares y las puertas giratorias porque es consciente de que el espacio que ocupan no debería ser considerado como superficie en la que se colocan personas; en consecuencia, su modelo matemático es más complejo que el que se limita a considerar el porche como un rectángulo sin obstáculos, ya que descuenta estas zonas esperando mejorar la estimación.

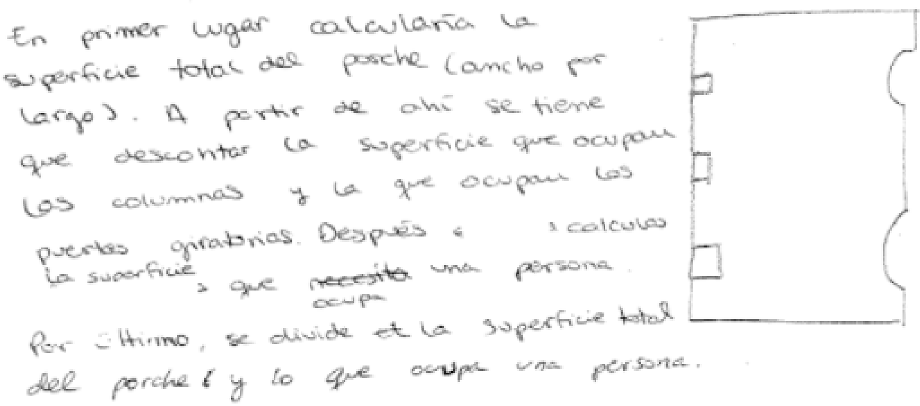


Figura 4-21.: Plan de resolución para *P1-Personas* con el factor de complejidad “eliminación de obstáculos”.

- *Densidad media.* Se reconocen densidades de población distintas y se calcula una densidad media. Este factor de complejidad es incorporado porque el resolutor concibe un modelo heterogéneo en la disposición de los elementos en la superficie (densidades distintas), pero en lugar de trabajar explícitamente con distribuciones heterogéneas, utiliza el promedio para “transformar” el modelo matemático en uno homogéneo que represente con mayor precisión esas diferencias entre densidades, tratando de “corregir” con la idea de media esas desviaciones de las densidades distintas. Por ejemplo, como puede verse en la Figura **4-22**, el resolutor 4ºD-I.1.2 escribe en su plan de resolución para *P3-Césped* que:

  > “Calcularía cuántas [briznas] hay en 5 cm^2 y haría este paso en diferentes zonas del césped. Sacaría una media de briznas por cada 5 cm^2 para tener un dato más acercado a la realidad”.

  En este caso, este “acercamiento” a la realidad permite obtener una mejor estimación ya que con la media se corrigen las desviaciones de las distintas densidades a lo largo de la superficie total.

- *Tamaño medio.* Como se ha dicho, en el análisis exploratorio para la categorización se encontraron producciones que incorporan el uso de la media aplicado al tipo de plan de resolución basado en la unidad base, es decir: se reconocen distintos tamaños de los

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Calcularía cuantas hay en 5 cm² y haría este paso en diferentes zonas del césped. Sacaría una media de briznas por cada 5 cm² para tener un dato más acercado a la realidad. Luego mediría cuántos m² hay de césped y lo dividiría entre 5 para saber cuántos trozos tengo de x números (los que caben en 5 m²) y lo multiplicaría por el número que me ha salido al hacer la media anteriormente, es decir, nuevamente las briznas que caben en 5 cm².

Figura 4-22.: Plan de resolución para *P3-Césped* con el factor de complejidad “densidad media”.

elementos a estimar y se calcula un tamaño medio para los elementos. Esta categoría no aparece en Albarracín y cols. (2021). Igual que en la categoría anterior, este factor de complejidad se asocia a un modelo heterogéneo en la disposición de los elementos en la superficie, la variabilidad en los tamaños de los elementos condiciona la estimación de su número. El resolutor concibe un modelo en el que hay distintas distribuciones del número de elementos dado su tamaño variable, pero no lo hace explícito en su plan de resolución, ya que utiliza la media para transformarlo en un modelo con elementos de tamaño homogéneo, pero que trata de “corregir” con la idea de tamaño medio las posibles desviaciones de los tamaños variables inicialmente considerados. Por ejemplo, el resolutor 4ºI-I.5.1, en su plan de resolución para *P4-Coches*, como se ve en la Figura **4-23**, escribe que todos los coches no miden lo mismo de ancho y de largo, es decir, que ocupan áreas de tamaño variable. Pero en su modelo no trabaja con vehículos de distinto tamaño, sino que opta por obtener un tamaño medio que permita trabajar con un modelo homogéneo que corrija esa variabilidad. Por eso escribe que calcularía “una mesura aproximada [se refiere a media] que assignaria a tots els cotxes”.

Tots els cotxes no mesuren el mateix d'ample i llarg. Trauria una mesura aproximada que assignaria a tots els cotxes. Després, calcularia la superfície del parking (llarg x ample) i dividiria per veure quants cotxes caben aproximadament. Calcul per estimació.

Figura 4-23.: Plan de resolución para *P4-Coches* con el factor de complejidad “tamaño medio”.

- *Densidades diferenciadas.* El resolutor reconoce densidades de población distintas y las incorpora a su modelo matemático, realizando estimaciones de densidades diferenciadas por zonas. Este factor de complejidad se vincula a un modelo con la distribución de los elementos heterogénea, pero repartida por distintas zonas, por lo que se puede realizar estimaciones separadas por una partición de la superficie total y luego sumar para obtener la estimación total sumando las estimaciones parciales. Por ejemplo, el resolutor 4ºK-I.8.4, plantea un plan de resolución para el problema *P3-Césped* basado en una partición de la jardinera en zonas con densidad diferenciada, como puede verse claramente en el esquema pictórico que incluye en su plan de resolución (Figura **4-24**). De hecho, escribe que "dividiria el terreny en 8 parts iguals" y que, a su vez, cada parte "la subdividiria en 10 parts". En cada una de estas 80 partes, el resolutor I.8.4 dice que haría un recuento de briznas. Advierte de que, en el caso de no ser uniforme (distribución heterogénea de briznas), "empraré una petita divisió per a cada sector", es decir, realizará un razonamiento proporcional por zonas diferenciadas, obteniendo estimaciones parciales para cada zona. Obvia explicar que la estimación del número total de briznas de césped se obtendría de la suma de las estimaciones parciales de la partición.

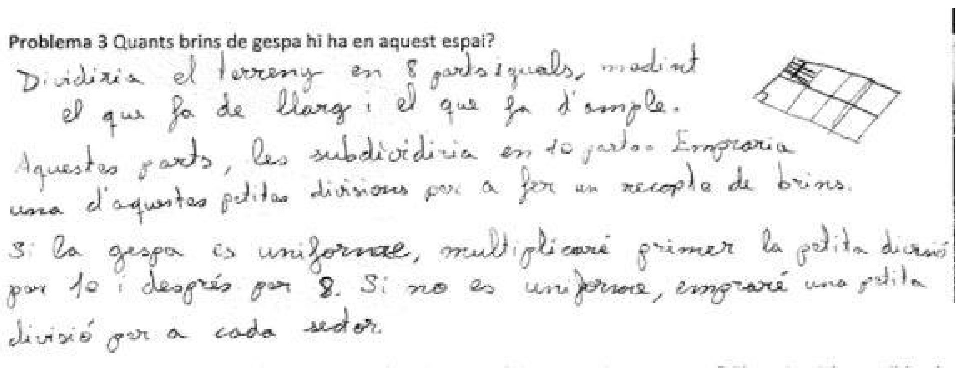

Problema 3 Quants brins de gespa hi ha en aquest espai?
Dividiria el terreny en 8 parts iguals, medint el que fa de llarg i el que fa d'ample.
Aquestes parts, les subdividiria en 10 parts. Empraria una d'aquestes petites divisions per a fer un recopte de brins.
Si la gespa es uniforme, multiplicaré primer la petita divisió per 10 i després per 8. Si no es uniforme, empraré una petita divisió per a cada sector.

Figura 4-24.: Plan de resolución para *P3-Césped* con el factor de complejidad "densidades diferenciadas".

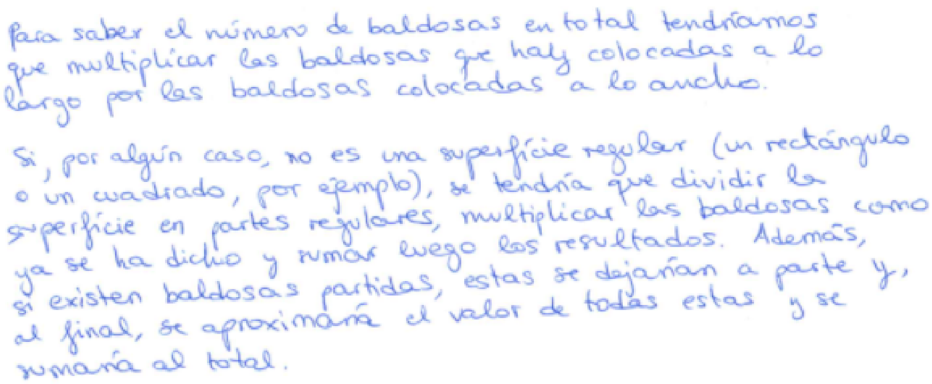
- *Tamaños diferenciados.* Este factor de complejidad se basa en el reconocimiento de distintos tamaños de los elementos a estimar. Esta heterogeneidad de tamaños se incorpora en el modelo, calculando diferentes estimaciones basadas en tamaños distintos en zonas diferenciadas, obteniendo estimaciones parciales en una partición de la superficie total. Por ejemplo, el resolutor 4ºK-I.10.3 escribe en su plan de resolución (mostrado en la Figura **4-25**) que:

> "para saber el número de baldosas en total tendríamos que multiplicar las baldosas que hay a lo largo por las baldosas colocadas a lo ancho.".

Es decir, se basa en la linealización. En esta primera parte del plan de resolución, el modelo considera que los elementos (las baldosas) tienen un tamaño homogéneo, por lo que no hay factor de complejidad. Pero luego dice que, si no hubiera regularidad, dividiría la superficie en partes iguales (partición) y haría estimaciones diferenciadas que luego sumaría. De hecho, explica que:

> "si existen baldosas partidas [tamaños de los elementos diferentes], estas se dejarían a parte y, al final, se aproximaría el valor [la cantidad] de todas estas y se sumaría al total.".

Es decir, el resolutor I.10.3 explica que haría una estimación diferenciada con las zonas en las que hay baldosas más pequeñas (partidas) y que luego incorporaría esta estimación parcial a la estimación total del número de baldosas.



Para saber el número de baldosas en total tendríamos que multiplicar las baldosas que hay colocadas a lo largo por las baldosas colocadas a lo ancho.

Si, por algún caso, no es una superficie regular (un rectángulo o un cuadrado, por ejemplo), se tendría que dividir la superficie en partes regulares, multiplicar las baldosas como ya se ha dicho y sumar luego los resultados. Además, si existen baldosas partidas, estas se dejarían a parte y, al final, se aproximaría el valor de todas estas y se sumaría al total.

Figura 4-25.: Plan de resolución para *P2-Baldosas* con el factor de complejidad "tamaños diferenciados".

En una segunda ronda de análisis, los investigadores D y T categorizaron las 896 producciones de los $N = 224$ futuros maestros participantes en la experiencia A1. Para simplificar el análisis de la fiabilidad de la categorización, se agruparon las categorías *Densidad media* y *Tamaño medio* en la categoría "Promedio", y las categorías *Densidades diferenciadas* y *Tamaños diferenciados* en la categoría "Heterogeneidad". Se creó una hoja de cálculo en la que se registró, para cada uno de los $N = 224$ futuros maestros participantes, qué factores de complejidad incluía, si lo hacía, en cada una de sus cuatro producciones (Figura **4-26**). Los investigadores D y T completaron hojas de cálculo independientes. Para cuantificar la fiabilidad del análisis de categorías de factor de complejidad, se codificaron de las siguientes acciones: 1 = no asigna factor de complejidad a la producción, 2 = asigna eliminación de obstáculos, 3 = asigna promedio, 4 = asigna heterogeneidad. Las producciones en las que no había concordancia con algún factor de complejidad se discutieron entre los investigadores D y T con la mediación de Y, otro investigador colaborador, para llegar a un acuerdo. El proceso de categorización de los factores de complejidad fue claro: la mayoría de discordancias no se dieron porque el investigador D asignara un factor de complejidad distinto al asignado

	Personas					Ladrillos					Césped					Coches			
Est/grupo	Estrategia	Área útil	Promedio	Hetero.		Estrategia	Área útil	Promedio	Hetero.		Estrategia	Área útil	Promedio	Hetero.		Estrategia	Área útil	Promedio	Hetero.
I 1.1	1000		1		1	100				0	1000				0	1000		1	
I 1.2	10000		1	1	2	100				0	10000		1	1	2	1000		1	
I 1.3	1000				0	100				0	10000				0	1000			
I 1.4	100				0	100				0	10000				0	100		1	
					0					0					0				
I 4.1	1000				0	100				0	10000				0	1000			
I 4.2	1000		1		1	100				0	1000				0	1000			
I 4.3	1000				0	1000				0	10000				0	1000			
I 4.4	1000		1		1	100				0	10000				0	1			
					0					0					0				
I 5.1	1000				0	100				0	1000				0	100			
I 5.2	1000				0	100				0	1000				0	1			
I 5.3	100				0	1000				0	1000				0	1000			
I 5.4	1000	1	1		2	1000				0	1000		1		1	1000			
I 5.5	1000				0	10000				0	10000				0	1000			
					0					0					0				
I 6.1	100		1		1	100				0	100	1			1	100			
I 6.2	1000				0	100				0	1000				0	1000			
I 6.3	1000				0	100				0	10000				0	1000		1	
I 6.4	1000				0	1000				0	1000				0	1000		1	
I 6.5	1000				0	100				0	1000	1			1	1000		1	

Figura 4-26.: Proceso de categorización de los factores de complejidad (Área útil, Promedio, Heterogeneidad) en hoja de cálculo para las 896 producciones de los N = 224 participantes en la experiencia A1.

por el investigador T, sino a que uno de los investigadores consideró que había un factor de complejidad que el otro había pasado por alto, como puede observarse en la Tabla **4-7**.
En tres producciones los investigadores D y T incluyeron más de dos factores de complejidad, que se consensuaron por separado con el investigador Y. En las 893 producciones restantes, los dos investigadores categorizaron entre ninguno y dos factores de complejidad, por lo que se pudo aplicar un test de objetividad kappa de Cohen (ver Tabla **4-7**). El valor de este coeficiente es de k = 0,757, con error estándar de SE = 0,0306. Se trata de una buena fiabilidad, cercana a muy buena.

Tabla 4-7.: Tabla de coincidencia entre los investigadores D y T para la categorización de factores de complejidad (1= no asigna factor de complejidad, 2 = área útil, 3 = promedio, 4 = heterogeneidad) de 893 producciones de la experiencia A1.

		D				
		1	2	3	4	Total T
T	1	**732**	2	11	3	748
	2	12	**34**	3	0	49
	3	15	5	**66**	2	88
	4	5	1	0	**2**	8
	Total D	764	42	80	7	893

En la experiencia A2, el proceso de categorización de los factores de complejidad incorporados a las resoluciones grupales e *in situ* se realizó entre los investigadores D, T e Y. La categorización de los factores de complejidad fue realizada, conjuntamente, para las 248 producciones de los N = 62 grupos participantes en la experiencia A2. Se consideró que las producciones eran lo suficientemente claras como para no requerir un análisis cuantitativo

de la fiabilidad de la categorización, por lo que se estableció un proceso de triangulación de observadores. Cada investigador (D, T, Y) completó una hoja de cálculo y en una sesión conjunta se pusieron en común los resultados del análisis, consensuando el criterio en aquellas producciones en las que había discordancias.
En el Capítulo 5 se presentarán los resultados del análisis de factores de complejidad para cada problema de la secuencia 1, a partir de un análisis comparativo, de tipo cualitativo y descriptivo, entre los planes de resolución de la experiencia A1 y las resoluciones grupales e *in situ* de la experiencia A2. Este análisis comparativo permitirá completar la caracterización de cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación de contexto real, y de qué características del contexto influyen en la incorporación de determinados factores de complejidad.

4.3.4. Proceso de categorización de los errores de las producciones

En este apartado se describe el proceso de categorización y análisis de los errores en las producciones de los futuros maestros, tanto para los planes de resolución (experiencia A1) como para las resoluciones grupales e *in situ* (experiencia A2). Se describe el proceso que conduce a establecer unas categorías de errores específicos para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada, pero, puesto que esta categorización es un resultado de la tesis, se presentará con detalle en el Capítulo 5. También se describe cómo, a partir de la categorización, se llevó a cabo el proceso de análisis de errores cuyos resultados se presentarán también en el Capítulo 5.
En la experiencia A1, tres investigadores (D, T, Y) intervinieron en la categorización y análisis de errores de las 896 producciones de los futuros maestros participantes. El investigador D realizó un primer análisis de las 452 producciones recogidas el curso 2017/18. Este análisis consistió en una búsqueda preliminar de errores en las producciones, configurando unas categorías de "errores preliminares" con las que se pudiera justificar si los trabajos previos sobre tipos de errores en modelización (Crouch y Haines, 2007; Widjaja, 2013; Klock y Siller, 2020; Wess y cols., 2021; Moreno y cols., 2021), o sobre tipos de errores de medida de longitudes y superficies (Baturo y Nason, 1996; Castillo y cols., 2011; Castillo-Mateo, 2012; Castillo-Mateo y cols., 2012; Pizarro, 2015), se adaptaban a los errores encontrados de manera preliminar en las producciones analizadas. En una hoja de cálculo, se fueron anotando los campos que iban emergiendo del análisis preliminar de errores, y su frecuencia de aparición en las 452 producciones, como puede verse en la Figura **4-27**.
A partir de esos errores preliminares, con ayuda de los trabajos sobre errores en modelización y medida citados, fue posible abordar una categorización específica de errores para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada. En concreto, se estableció una comparativa entre las doce categorías de error preliminares y los trabajos sobre categorías de error en el ciclo de modelización y también asociados al sentido de la medida y la estimación de magnitudes. Se encontró una correspondencia entre algunos

	A	B	C
1	**Errores emergentes**		
2	En blanco	14	
3	Error de inversión	7	
4	Referente inadecuado	3	
5	Sin modelo matemático	24	
6	Sin unidad de medida	3	
7	Cáculos incompletos	18	
8	Multiplicación por división	11	
9	Modelo matemático sin desarrollar	23	
10	Asignación de medida incorrecta	7	
11	Mezcla de dimensiones	16	
12	Confunde área y longitud	38	
13	Falta producto cartesiano	12	
14	TOTAL	176	
15			

Figura 4-27.: "Errores preliminares" en el análisis preliminar de las 452 producciones de los 113 futuros maestros participantes en el curso 2017/18.

errores detectados (sin modelo matemático; cálculos incompletos; modelo matemático sin desarrollar; en blanco) y la categorización de Moreno y cols. (2021) de errores durante el proceso de modelización. También se encontraron correspondencias entre otros errores detectados (referente inadecuado; sin unidad de medida; asignación de medida incorrecta; mezcla de dimensiones; confunde área y longitud; falta producto cartesiano) con la categorización de errores de medida y estimación de longitudes y áreas de Castillo-Mateo y cols. (2012). Otros errores preliminares, formulados de manera específica (error de inversión; multiplicación por división), podían caber en categorías más amplias de ambos sistemas de errores, por ejemplo, en la categoría "errores procedimentales" de Moreno y cols. (2021). Ambos sistemas de categorías contemplaban algunos tipos de error que no aparecieron en la lectura preliminar pero que, en un análisis más minucioso y riguroso, con ayuda de las categorizaciones, fueron emergiendo. El resultado final de la categorización de 13 errores específicos de los problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada, por tratarse de un resultado relevante de esta tesis, se presentará en el Capítulo 5 (ver Tabla **5-15**).
Una vez establecida la categorización de errores, los investigadores D y T realizaron un análisis independiente de los errores en las 452 producciones recogidas en el curso 2017/18. Cada investigador utilizó una hoja de cálculo para recoger, para cada participante y cada problema, los errores detectados. Los tipos de error se codificaron de E1 a E13, como puede verse en la Figura **4-28**, concluyendo que la categorización específica elaborada se ajustó al proceso de análisis de los dos investigadores. Dado que el número de categorías de error usadas en el análisis es muy alto, y que el número de errores asignados a cada producción es variable (entre 0 y 3 errores por producción), se optó por una dinámica de consenso de carácter cualitativo, a través de discusiones en las que se comparaban los errores catego-

rizados para cada estudiante, discutiendo las discrepancias que iban apareciendo. En una primera ronda de discusión los investigadores D y T consensuaron la mayoría de categorizaciones, pero se realizó una segunda ronda en la que participó el investigador Y para decidir los casos en los que aún había desacuerdo. De este modo se completaron los acuerdos, mediante la triangulación de investigadores para las 452 producciones de los 113 participantes en el curso 2017/18, lo que da credibilidad a los datos obtenidos (Denzin, 2009).

	Personas			Ladrillos					Cesped			Coches		
Estudiante														
I 1.1														
I 1.2				1	e2							1		e7
I 1.3				1	e2									
I 1.4									1	e8				
G 10														
I 4.1									1	e11				
I 4.2				1	e5				1	e2				
I 4.3	1	e11		2	e11	e5			1	e11		1		e11
I 4.4														
G 4														
I 5.1												1		e5
I 5.2	2	e2	e5	1	e5				1	e11		1		e11
I 5.3	2	e5	e11									1		e5
I 5.4														
I 5.5				1	e8				1	e11				
G 5														
I 6.1	1	e5		1	e5							1		e5
I 6.2	1	e11												
I 6.3	1	e11												
I 6.4	1	e8												
I 6.5	2	e2	e5											

Figura 4-28.: Categorización de los errores específicos para los problemas de la secuencia 1.

Para las 444 producciones de los 111 participantes en la experiencia A1 recogidas el curso 2018/19 se repitió la triangulación entre los investigadores D, T e Y. La categorización específica, por tanto, recoge todos los posibles errores encontrados en las 896 producciones de los $N = 224$ futuros maestros.
En la experiencia A2, el proceso de categorización y análisis de errores para las 248 producciones de los $N = 62$ grupos participantes fue realizado por los investigadores D, T e Y de manera muy similar al descrito anteriormente. Se repitió la dinámica cualitativa de triangulación de consensos: en una primera ronda de discusión, los investigadores D y T consensuaron la mayoría de categorizaciones, y se realizó una segunda ronda en la que participó el investigador Y para decidir los casos en los que aún había desacuerdo. La categorización se adaptó a las resoluciones completas e *in situ*, comprobando que no emergía ningún tipo de error que no estuviera contemplado en la categorización.

4.3.5. Proceso de categorización y análisis de la flexibilidad y los criterios de adaptabilidad

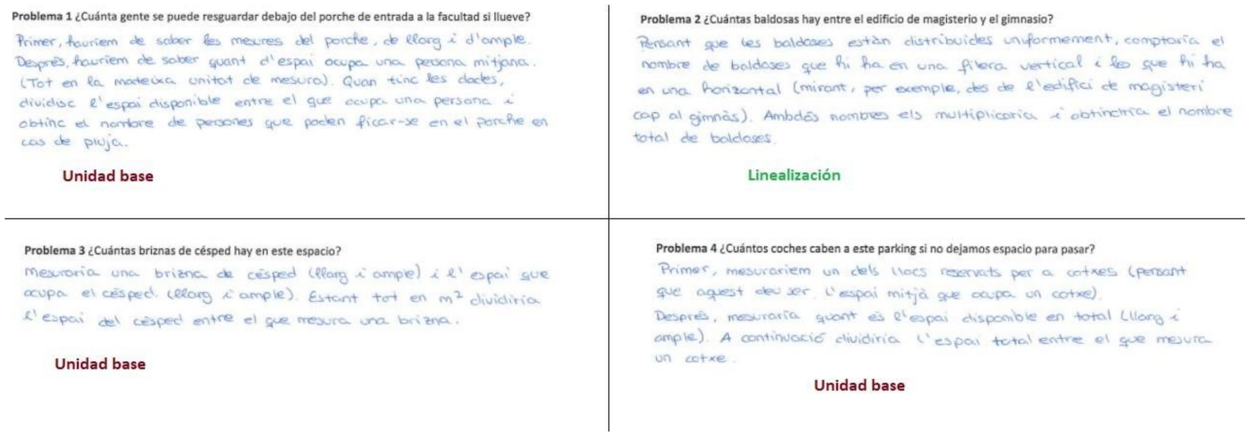
La categorización de las 896 producciones de la experiencia A1 en tipos de plan de resolución permite establecer, de manera directa, una *categorización de la flexibilidad inter-tarea* de cada futuro maestro participante, ya que se pueden cuantificar cuántos cambios de tipo de plan de resolución hay en sus cuatro producciones. Un resolutor hace un uso más flexible de sus resoluciones en la medida en que hay más cambios de tipo de plan de resolución en sus producciones.

Para cuantificar de manera eficiente estos cambios de tipo de plan de resolución, se usó la codificación Incompleta = 1, Recuento = 10, Linealización = 100, Unidad base = 1000, Densidad = 10000. Si se suman los códigos asignados a las cuatro producciones de un resolutor, se obtiene un resultado que permite codificar los cambios de tipo de resolución en un número de, cómo máximo, cinco cifras (Figura **4-29**). Por ejemplo, en el grupo 4º D del año 2017/18, las cuatro producciones del resolutor I.1.1 se codifican como 3100. Eso codifica que resolvió tres problemas mediante Unidad base y un problema mediante Linealización. Este resolutor, por tanto, ha empleado dos tipos de plan de resolución, cambiando de tipo de plan de resolución sólo en un problema, es decir, dos veces en la secuencia: del primer problema al segundo y del segundo al tercero, para volver al mismo tipo de plan que en el primero. En la Figura **4-30** puede observarse la secuencia de cuatro planes de resolución codificada como 3100.

Cesped					Coches					
Incompleto	Recuento	linealización	Unidad base	Densidad	Incompleto	Recuento	linealización	Unidad base	Densidad	Flexibilidad
			1000					1000		3100
				10000				1000		21100
				10000				1000		12100
				10000			100			10300
				10000				1000		22000
				10000				1000		12100
			1000					1000		3100
				10000				1000		13000
				10000	1					11101
				10000				1000		22000
			1000				100			2200
			1000		1					2101
			1000					1000		3100
			1000					1000		4000
				10000				1000		22000
			1000					1000		4000
		100					100			400
			1000					1000		3100
				10000				1000		12100
			1000					1000		4000
			1000					1000		3100
			1000					1000		4000

Figura 4-29.: Sistema de codificación de los cambios de tipo de plan de resolución para medir la flexibilidad inter-tarea de los 224 futuros maestros participantes en la experiencia A1.

Otro ejemplo: en ese mismo grupo 4º D, las cuatro producciones del resolutor I.1.2 se codifican como 21100, número que recoge que resolvió dos problemas mediante Densidad, un problema mediante Unidad base, y un problema mediante Linealización. En la Figura **4-31** se presentan los cuatro planes de resolución. Este resolutor, por tanto, ha empleado tres tipos de plan de resolución y cambia de plan en dos problemas, es decir, tres veces durante la secuencia: del primer al segundo problema, del segundo al tercer problema (para volver a tipo de resolución del primero), y del tercer problema al cuarto.



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Primer, hauriem de saber les mesures del porche, de llarg i d'ample. Després, hauriem de saber quant d'espai ocupa una persona mitjana. (Tot en la mateixa unitat de mesura). Quan tinc les dades, divideixo l'espai disponible entre el que ocupa una persona i obtinc el nombre de persones que poden ficar-se en el porche en cas de pluja.

Unidad base

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Pensant que les baldoses estàn distribuides uniformement, comptaría el nombre de baldoses que hi ha en una filera vertical i les que hi ha en una horizontal (mirant, per exemple, des de l'edifici de magisteri cap al gimnàs). Ambdós nombres els multiplicaria i obtindria el nombre total de baldoses.

Linealización

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Mesuraria una brizna de césped (llarg i ample) i l'espai que ocupa el césped. (llarg i ample). Estant tot en m^2 dividiria l'espai del césped entre el que mesura una brizna.

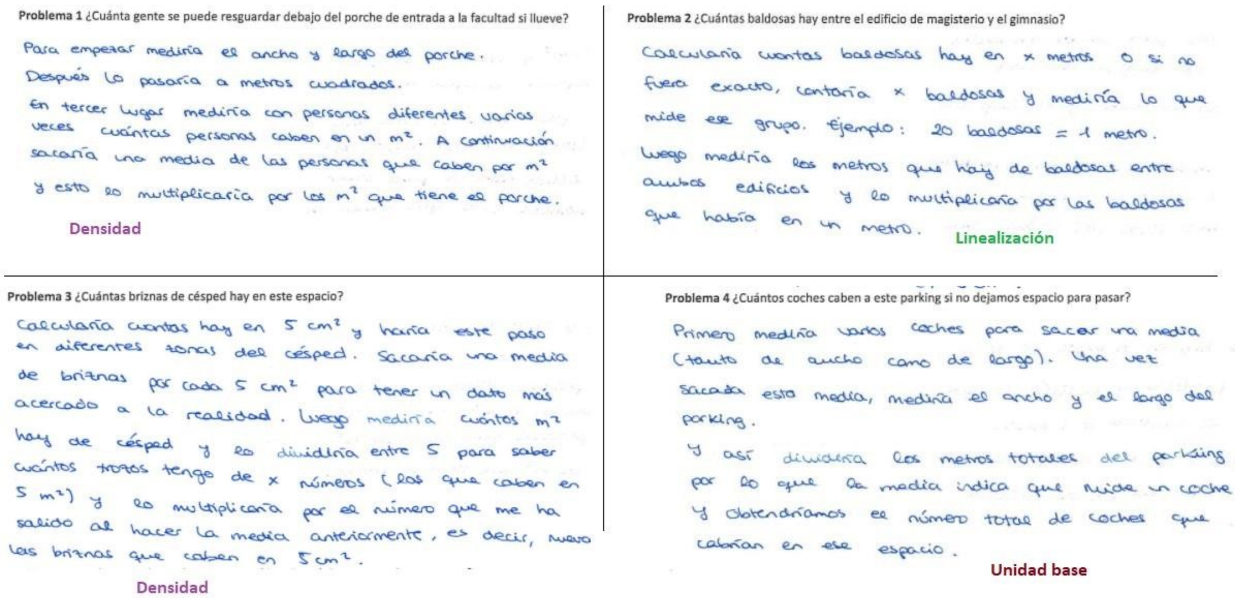
Unidad base

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

Primer, mesurariem un dels llocs reservats per a cotxes (pensant que aquest deu ser l'espai mitjà que ocupa un cotxe). Després, mesuraría quant és l'espai disponible en total (llarg i ample). A continuació dividiria l'espai total entre el que mesura un cotxe.

Unidad base

Figura 4-30.: Planes de resolución de un resolutor para la secuencia 1, codificados como 3100: tres Unidad base y una Linealización.



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Para empezar mediría el ancho y largo del porche. Después lo pasaría a metros cuadrados. En tercer lugar mediría con personas diferentes varias veces cuántas personas caben en un m^2. A continuación sacaría una media de las personas que caben por m^2 y esto lo multiplicaría por los m^2 que tiene el porche.

Densidad

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Calcularía cuantas baldosas hay en x metros o si no fuera exacto, contaría x baldosas y mediría lo que mide ese grupo. Ejemplo: 20 baldosas = 1 metro. Luego mediría los metros que hay de baldosas entre ambos edificios y lo multiplicaría por las baldosas que había en un metro.

Linealización

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Calcularía cuantas hay en 5 cm^2 y haría este paso en diferentes zonas del césped. Sacaría una media de briznas por cada 5 cm^2 para tener un dato más acercado a la realidad. Luego mediría cuántos m^2 hay de césped y lo dividiría entre 5 para saber cuántos trozos tengo de x números (los que caben en 5 m^2) y lo multiplicaría por el número que me ha salido al hacer la media anteriormente, es decir, nuevo las briznas que caben en 5 cm^2.

Densidad

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

Primero mediría varios coches para sacar una media (tanto de ancho como de largo). Una vez sacada esta media, mediría el ancho y el largo del parking. Y así dividiría los metros totales del parking por lo que la media indica que mide un coche y obtendríamos el número total de coches que cabrían en ese espacio.

Unidad base

Figura 4-31.: Planes de resolución de un resolutor para la secuencia 1, codificados como 2110: dos Densidad, una Unidad base y una Linealización.

Una vez codificadas las secuencias de cuatro planes de resolución para cuantificar los cambios en cada uno de los $N = 224$ futuros maestros participantes en la experiencia A1, los investigadores D y T consensuaron la siguiente categorización de niveles de flexibilidad inter-tarea: nada flexible, moderadamente flexible y muy flexible. Se categorizó como *nada flexible* a los resolutores que se limitaron a proponer el mismo tipo de plan de resolución en las tareas completadas; los que propusieron dos tipos de plan de resolución diferentes, pero cambiaron sólo en un problema de la secuencia, se categorizaron como *moderadamente flexibles*; y se categorizó como *muy flexible* a los resolutores que propusieron dos o más tipos de plan resolución y cambiaron de tipo de resolución en dos o más problemas. Esta categorización por niveles de flexibilidad inter-tarea va más allá de clasificar si un resolutor hace un uso flexible de sus resoluciones o no lo hace, y es una aportación original de esta tesis. Permite diferenciar, en los ejemplos anteriores, al resolutor I.1.1, que sería moderadamente flexible (Figura **4-30**), del resolutor I.1.2, que sería muy flexible (Figura **4-31**). En el Capítulo 5 se mostrará, como un resultado importante de esta tesis, que esta diferenciación de niveles de flexibilidad inter-tarea está justificada cuando se relaciona con el rendimiento de los futuros maestros, pues los futuros maestros muy flexibles cometen un número significativamente menor de errores en sus resoluciones.

Aún queda un aspecto más a categorizar dentro de la flexibilidad: como se explicó en el diseño de la secuencia 1, en la experiencia A1, durante el curso 2018/19, se añadió una demanda en el último problema, *P4- Coches*, pidiendo a los resolutores que plantearan una resolución alternativa a la primera para ese mismo problema, con la finalidad de estudiar de manera exploratoria la flexibilidad intra-tarea en uno de los problemas de la secuencia 1. Las 111 segundas respuestas a este problema se categorizaron por los investigadores D y T siguiendo el mismo proceso que el descrito en la sección 4.3.1, pero se registraron aparte. En el caso de que estas respuestas constituyeran un plan de resolución alternativo, se categorizó al resolutor como *intra-flexible*, y en el caso contrario, como *no intra-flexible*.

A partir de la categorización que hemos expuesto, en el Capítulo 5 se presentará el análisis de los datos sobre flexibilidad inter-tarea, ofreciendo como resultado un análisis cualitativo y descriptivo de todos los casos posibles codificados. También se presentarán los resultados del estudio exploratorio sobre flexibilidad intra-tarea. Esto permite describir si los futuros maestros hacen un uso flexible de sus resoluciones, es decir, si conocen varios tipos de plan de resolución y los utilizan, cambiando de un problema a otro, cuando resuelven problemas de estimación de contexto real.

Por último, en cuanto al análisis de la *adaptabilidad*, se ha descrito, en el Capítulo 3 y en secciones anteriores de este capítulo, el diseño de investigación que hemos seguido para establecer unos criterios de adaptabilidad en problemas de estimación de contexto real. Este diseño se basa en recoger las respuestas de los resolutores a la pregunta C3 del cuestionario post-experiencia (Anexo D) para definir unos criterios que se incluyeron en la encuesta de expertos (Anexo E), para que éstos decidieran cuál era el más adecuado para cada tipo de resolución y cada problema de la secuencia 1. La pregunta C3 era la siguiente:

> C3. Imagina que un alumno/a te ha dicho que ha resuelto el problema de la mejor forma posible. ¿Qué piensas que quiere decir con la mejor forma posible?

La categorización se realizó de manera cualitativa, entre los investigadores D y T, siguiendo el mismo proceso que el descrito para la categorización de las respuestas a las preguntas C1 y C2 de este cuestionario post-experiencia (ver apartado 4.3.2). El investigador D, en una primera ronda de análisis, elaboró un listado provisional de categorías de respuesta emergentes. En un segundo análisis de las 105 respuestas, el investigador T, reunido con el investigador D, aplicó estas categorías emergentes sobre las respuestas y sugería cambios alguna de ellas. Estos cambios se discutían entre los dos investigadores hasta consensuar unas categorías de respuestas definitivas. Una vez consensuadas, como en las preguntas C1 y C2, los investigadores D y T categorizaron de manera independiente todas las respuestas, y en una sesión se discutieron discrepancias y se consensuó la categorización de todas las respuestas. Las categorías de respuesta consensuadas por los dos investigadores para la pregunta C3 fueron las siguientes:

AD 1. La mejor resolución es la más sencilla, la que permite ofrecer una estimación en menos pasos.

AD 2. La mejor resolución es la más precisa, la que ofrece la estimación más fiable.

AD 3. La mejor resolución es la que se basa en procedimientos más cuidadosos y empíricos.

AD 4. No argumentan criterios de adaptabilidad o se basan en el gusto personal.

La categoría de respuesta AD 1 se refiere, por tanto, a un criterio de adaptabilidad que podríamos sintetizar como rapidez/sencillez; la categoría AD 2 a un criterio basado en la precisión; y la categoría AD 3 propone un criterio basado en el rigor. Estos tres criterios son los que se incluyeron en el cuestionario de los expertos (ver Figura **4-15**). En el Capítulo 5 se expondrán los resultados del análisis de datos del cuestionario de expertos, que permiten relacionar tipos de resolución con criterios de adaptabilidad, lo que conduce a un análisis de la adaptabilidad de los futuros maestros que cerrará los resultados de esta tesis doctoral.

Parte III.

Resultados y conclusiones

5. Análisis de datos y resultados

En este capítulo se expone el análisis de los datos recogidos en la investigación, y se discuten los resultados a los que da lugar. En cada sección se irán abordando los doce objetivos de investigación expuestos en el Capítulo 3 dedicado al diseño de la investigación (esquematizada en la Figura **3-2**), y que listamos a continuación para facilitar la lectura:

OI 1. Describir y analizar los tipos de plan de resolución.

OI 2. Encontrar si existe una relación entre las características del contexto de los problemas y el tipo de plan de resolución empleado por los futuros maestros.

OI 3. Validar que la relación entre características del contexto y tipo de resolución de la experiencia A1 se mantiene con otra secuencia alternativa.

OI 4. Estudiar la influencia de la estructura del enunciado en el éxito del plan de resolución.

OI 5. Describir y analizar las resoluciones grupales e *in situ*.

OI 6. Comparar los planes de resolución individual y las resoluciones grupales *in situ*.

OI 7. Categorizar los factores de complejidad que incorporan los planes de resolución y las resoluciones grupales e *in situ*, y compararlos.

OI 8. Categorizar los errores específicos para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada y analizar los errores en las producciones de los futuros maestros, estableciendo niveles de rendimiento.

OI 9. Analizar la flexibilidad inter-tarea de los futuros maestros.

OI 10. Analizar las posibles relaciones entre el uso flexible de los planes de resolución de futuros maestros y su rendimiento en la resolución de los problemas de la secuencia, contemplando los errores cometidos y su gravedad.

OI 11. Conocer qué tipo de resolución consideran los expertos que es más adecuada para cada problema.

OI 12. Obtener unos criterios de adaptabilidad que sustenten la elección de la resolución más adecuada y analizar el grado de adaptabilidad de los futuros maestros.

En la sección 5.1 se presentan los resultados del análisis, cualitativo y descriptivo, de los tipos de plan de resolución para la secuencia 1 y la secuencia 2 de problemas de estimación en contexto real. Se aborda el objetivo de investigación OI 1, describiendo cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real. Además, la identificación y caracterización de las producciones incompletas resultarán claves para definir lo que consideraremos un rendimiento de éxito en resolución de problemas de estimación en contexto real.
En la sección 5.2 se desarrolla el estudio de la relación entre contexto y tipo de plan de resolución para la secuencia 1 y la secuencia 2, y se comparan los resultados entre las dos secuencias. Esto permite abordar los objetivos de investigación OI 2 y OI 3. Además, se exponen los resultados del estudio exploratorio sobre la influencia de hacer más compleja la estructura del enunciado en la secuencia 2 de problemas, que corresponde al objetivo OI 4.
En la sección 5.3 se analizan los tipos de resolución cuando se resuelve la secuencia 1 en grupos y en el lugar del problema, en la experiencia A2, dando respuesta al objetivo OI 5. Además, se estudia la gestión de los grupos al llegar a consensos, utilizando las categorías de respuesta del cuestionario post-experiencia a las preguntas C1 y C2 para analizar la reflexión sobre la diferencia entre la experiencia individual en el aula, y la experiencia trabajando en grupo y en el lugar de los problemas. Esto permite alcanzar el objetivo de investigación OI 6. Por último, se analizan los factores de complejidad en los planes de resolución de la experiencia A1 y en las resoluciones grupales e *in situ* de la experiencia A2, comparando los resultados, que corresponde al objetivo OI 7.
En la sección 5.4 se aborda la categorización y análisis de errores de los futuros maestros en los planes de resolución de la experiencia A1, estableciendo dos niveles de rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real, respondiendo, por tanto, al objetivo OI 8. Además, se analiza la relación entre el contexto de los problemas y las categorías de error cometidos. Por último, se analizan los errores en las resoluciones grupales e *in situ* de la experiencia A2, y se realiza un estudio comparativo sobre los errores en ambas experiencias (que complementa los objetivos OI 6 y OI 7 sobre comparación entre plan de resolución individual y resolución grupal e *in situ*).
En la sección 5.5 se presentan los resultados del análisis de la flexibilidad inter-tarea de los futuros maestros participantes en la experiencia A1, lo que permite alcanzar el objetivo OI 9. Se presenta un estudio exploratorio sobre la flexibilidad intra-tarea y su posible relación con la flexibilidad inter-tarea. Se abordan las relaciones entre rendimiento, estudiado desde el punto de vista del número y gravedad de los errores cometidos, y flexibilidad inter-tarea, correspondiente al objetivo OI 10.
En la sección 5.6 se aborda el estudio de los criterios de adaptabilidad para problemas de estimación en contexto real, a partir de las respuestas al cuestionario de expertos (objetivo OI 11). Por último, se aplican estos criterios de adaptabilidad a los tipos de resolución en la experiencia A1, analizando la adaptabilidad de futuros maestros en problemas de estimación en contexto real, objetivo OI 12.

5.1. Análisis de los tipos de plan de resolución

En esta sección se detallan los resultados del análisis de tipos de plan de resolución para la experiencia A1 y la experiencia B. El análisis de categorías de planes de resolución de la secuencia 1 se publicó en Ferrando, Segura y Pla-Castells (2021).
El análisis cualitativo de las producciones permite ilustrar las categorías y, a la vez, describir su adaptación a cada uno de los problemas de la secuencia 1. Se encuentra que las mismas categorías de plan de resolución son válidas para la secuencia 1 (experiencia A1) y para la secuencia 2 (experiencia B).
Recordemos que utilizamos la expresión *plan de resolución* porque en la experiencia A1 y en la experiencia B se indicó a los futuros maestros participantes que debían explicar con claridad y explicando paso a paso cómo llegarían a la estimación demandada en los problemas de la secuencia 1 y la secuencia 2, respectivamente, pero que no era necesario que cuantificaran el proceso de resolución ni que ejecutaran los cálculos para alcanzar una estimación numérica. Esta clase de resolución tiene carácter de planificación esquemática, aunque suficientemente detallada como para que sea posible utilizar la herramienta de análisis basada en el modelo inicial (distribución de los elementos en el espacio) y estrategia asociada (cadena de procedimientos matemáticos para alcanzar la estimación). De ahí la denominación *plan de resolución*.

5.1.1. Tipos de plan de resolución para la secuencia 1

En el Capítulo 4 se ha explicado el proceso de categorización de los tipos de plan de resolución para la secuencia 1 (Tabla **4-3**; Anexo A). Tal y como se ha explicado en el Capítulo 2, en trabajos previos (Albarracín y Gorgorió, 2014; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017) se desarrolla un instrumento de análisis de los planes de resolución de estudiantes de Secundaria cuando se enfrentan a problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie. Dicho instrumento, basado en una adaptación de la concepción de modelo matemático establecida por Lesh y Harel (2003), es válido para analizar los planes de resolución de futuros maestros para la secuencia 1 y la secuencia 2. A partir de este análisis, se han establecido cuatro tipos de planes de resolución: Recuento, Linealización, Unidad base y Densidad. Además, a partir del análisis cualitativo, emergió una categoría para las producciones que no desarrollan lo suficiente el modelo matemático, las producciones incompletas.
Recordemos que $N = 224$ futuros maestros participaron en la experiencia A1 resolviendo la secuencia 1 que constaba de cuatro problemas, por lo que 896 producciones fueron analizadas.
A continuación, presentamos los resultados del análisis cualitativo y descriptivo de los tipos de resolución para los problemas de la secuencia 1.

Recuento

En las 896 producciones analizadas aparece muy poco este tipo de plan de resolución, sólo en 13 producciones (un 1, 45 % del total), de las cuales seis producciones son de *P2-Baldosas*, cuatro del problema *P4-Coches*, dos de *P3-Césped* y una de *P1-Personas*. En el único caso de *P1-Personas*, el resolutor 4°F-I.8.4 plantea un recuento directo (Figura **5-1**), simulando la situación del enunciado:

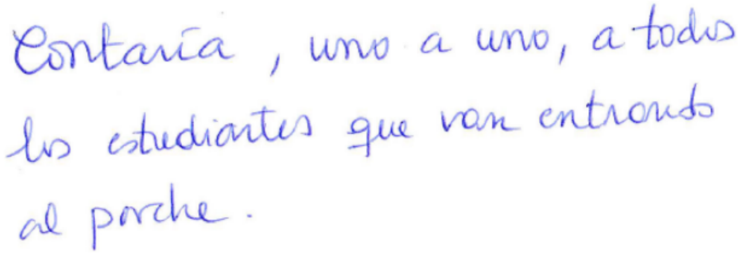


Figura 5-1.: Plan de resolución categorizado como Recuento para el problema *P1-Personas*.

En el problema *P2-Baldosas*, tomemos el caso de la siguiente producción (Figura **5-2**) del resolutor 4°D-I.9.4:

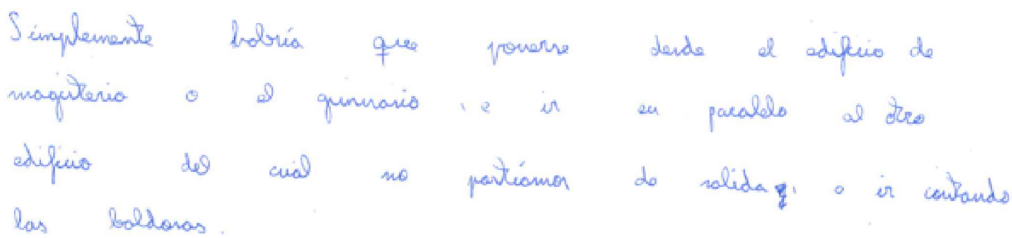


Figura 5-2.: Plan de resolución categorizado como Recuento para el problema *P2-Baldosas*.

Tal y como observamos en la Figura **5-2**, el resolutor I.9.4 escribe que, colocándose en un edificio, debería "ir contando las baldosas" mientras camina en paralelo al otro edificio. En la Figura **5-2** se muestra una vista aérea del espacio entre los dos edificios, como puede verse, el plan de resolución de I.9.4 propone recorrer una fachada e ir contando, una a una, las filas de baldosas que llegan hasta el edificio de enfrente. En este caso, debemos tener en cuenta que los elementos cuyo número debe ser estimado - las baldosas - están presente en el lugar real del problema, pero el número de baldosas es muy alto como para realizar un recuento exhaustivo.
Para *P3-Césped* encontramos, por ejemplo, el plan de resolución propuesto por el resolutor 4°I-I.2.1 en la Figura **5-4** categorizado como Recuento. En este caso, el resolutor ha escrito primero que calcularía el área del espacio (la jardinera rectangular cubierta de césped) y

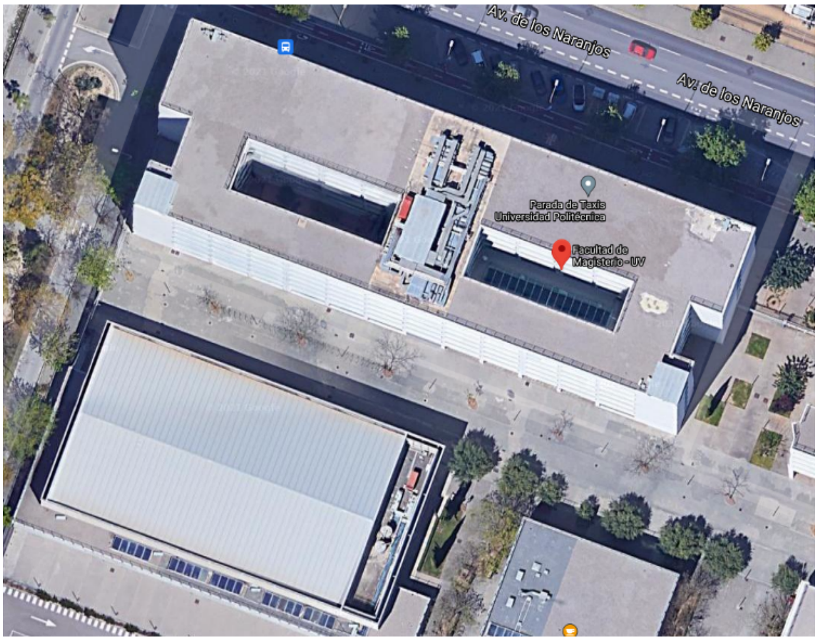


Figura 5-3.: Espacio real entre la Facultad de Magisterio (arriba) y el gimnasio (abajo), con el suelo cubierto de baldosas pequeñas, cuyo número debe ser estimado en el problema *P2-Baldosas*.

estimaría “quants brins poden cabre en aquest espai”, pero no da ninguna explicación sobre cuál sería ese procedimiento de estimación, así que a continuación escribe “o contant un per un”. Es decir, hay una primera tentativa de plan de resolución que queda incompleta, y el propio resolutor, al no saber especificar el proceso para alcanzar la estimación, redirige su plan de resolución hacia el recuento directo.

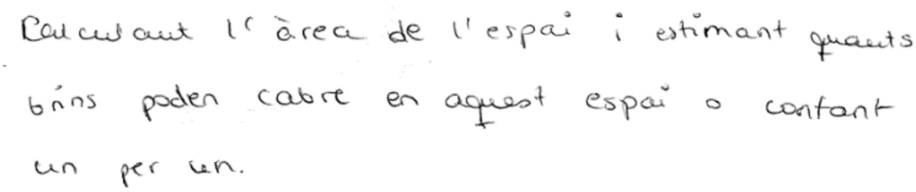


Figura 5-4.: Plan de resolución categorizado como Recuento para el problema *P3-Césped*.

Por último, para *P4-Coches* encontramos, por ejemplo, el caso de la producción del resolutor 4ºA-I.1.3 categorizada como Recuento (Figura **5-5**). En este caso, propone contar las plazas del aparcamiento y luego contar las plazas que cubrirían los carriles de circulación. En cuanto a las plazas del aparcamiento, es efectivo el recuento exhaustivo, pero el inconveniente de emplear Recuento en este problema es que las plazas disponibles sobre los actuales carriles de circulación no están, obviamente, delimitadas, y es poco factible simularlas para hacer un recuento de cuántas cabrían.

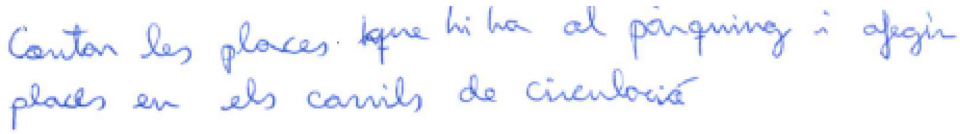


Figura 5-5.: Plan de resolución categorizado como Recuento para el problema *P4-Coches*.

Como puede verse en el análisis cualitativo precedente, Recuento es un plan de resolución fallido en la medida que, en los problemas en los que los elementos están presentes (*P2-Baldosas* y *P3-Césped*) no tiene en cuenta si es posible o efectivo realizar el recuento, ya que los problemas planteados suponen estimar un número lo suficientemente grande como para que sea muy largo y tedioso ser contado. En el caso de los problemas en los que los elementos no están presentes (*P1-Personas* y *P4-Coches*), supone depender de una simulación que no es posible realizar, sin disponer de vías reales para obtener una estimación.

Linealización

Un total de 166 producciones (el 18,53 %) han sido categorizadas como Linealización, de las cuales 92 son planes de resolución para el problema *P2-Baldosas*. Se encuentran planes de resolución basados en la linealización para todos los problemas de la secuencia 1. Por ejemplo, en *P1-Personas*, el resolutor 4ºK-I.4.3 escribe el plan de resolución mostrado en la Figura **5-6**.

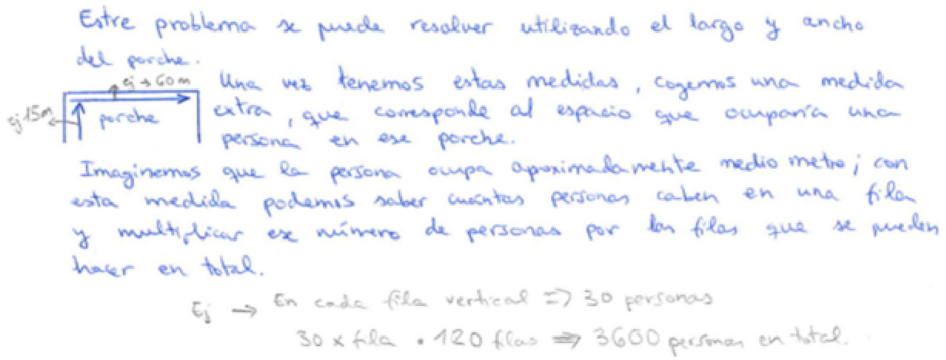


Figura 5-6.: Plan de resolución categorizado como Linealización para el problema *P1-Personas*.

Analizando con detalle la producción mostrada en la Figura **5-6**, encontramos un modelo inicial unidimensional, usando el metro como unidad de medida de longitud: "la persona ocupa medio metro [de ancho]" y "con esta medida podemos saber cuántas personas caben en una fila". La "mirada lineal" se observa en el esquema visual del espacio que dibuja como apoyo el resolutor I.4.3, pues la distribución de los elementos la hace siguiendo una línea (la flecha). Piensa la distribución en términos de "largo y ancho", pero no considera la superficie hasta el final, cuando escribe que para estimar el número total de personas en el porche debe "multiplicar ese número de personas [que caben en una fila] por las filas que se pueden hacer en total". Para obtener la estimación lineal de personas por fila, utiliza la estrategia de iteración de unidad a lo largo de la longitud de la fila ("con esta medida [el ancho de una persona] podemos saber cuántas personas caben en una fila").

En *P2-Baldosas* encontramos numerosos casos de producciones categorizadas como Linealización. Por ejemplo, el resolutor 4ºK-I.4.3 cuya producción se muestra en la Figura **5-7**, propone el siguiente plan de resolución: dividir la medida de la longitud del largo de la Facultad entre la medida del largo de una baldosa, para obtener el número de baldosas en una fila; dividir la medida del ancho entre el gimnasio y la facultad entre la medida del ancho de la baldosa, para obtener el número de baldosas en una columna. Multiplicar filas y columnas para obtener el número total. De nuevo, el problema de estimar el número de baldosas en un área se transforma en un problema unidimensional, estimar el número de baldosas en una fila y en una columna, del que se obtiene una estimación que responde al problema original realizando el producto cartesiano.

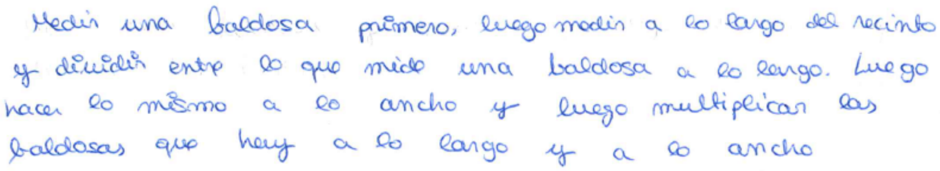

Medir una baldosa primero, luego medir a lo largo del recinto
y dividir entre lo que mide una baldosa a lo largo. Luego
hacer lo mismo a lo ancho y luego multiplicar las
baldosas que hay a lo largo y a lo ancho

Figura 5-7.: Plan de resolución categorizado como Linealización para el problema *P2-Baldosas*.

Como se ha dicho, hemos englobado en el tipo de plan de resolución Linealización diferentes estrategias lineales, todas aquellas basadas en un modelo inicial unidimensional. Por ejemplo, también para *P2-Baldosas*, el resolutor 4ºK-I.5.1 plantea un plan de resolución basado en la linealización, pero para calcular el número de baldosas en una longitud utiliza una medida de densidad lineal, el número de baldosas en 1 metro: "En primer lugar, calcularía el total de baldosas que caben en $1m$, posteriormente medir a lo largo y a lo ancho el total de metros [y el número de baldosas sería] $l \times a \times$ baldosas que caben en 1 m."

Y, por ejemplo, también categorizada como Linealización, encontramos la producción del resolutor 4ºD-I.5.4, que, como puede verse en la Figura **5-8**, reduce el problema a largo y ancho, y una vez "linealizado" el problema, utiliza el recuento lineal (contar baldosas a lo ancho y contar baldosas a lo largo).

La diferencia con la resolución de la Figura **5-2**, categorizada como Recuento, es que en esta sí hay, aunque sea muy simple, un modelo real matematizado de la situación real, pues la simplifica a dos segmentos, el ancho y el largo, como puede verse en el esquema que dibuja el resolutor I.5.4 en la Figura **5-8**. Además, en la resolución categorizada como Recuento las filas se van contando cada vez, a lo largo del recorrido transversal por el edificio de

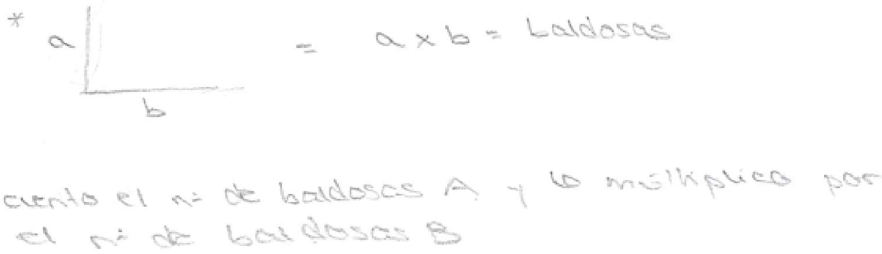


Figura 5-8.: Plan de resolución categorizado como Linealización y basado en un recuento lineal para el problema *P2-Balsosas*.

Magisterio, por lo que hay un recuento exhaustivo del total de baldosas, mientras que los planes de resolución basados en linealización sólo se cuentan las baldosas en una fila y en una columna porque recurren al producto cartesiano.
Con respecto a *P3-Césped*, es el problema en el que menos producciones se han categorizado como Linealización, solamente 15, quizá porque resulta forzado pensar en briznas de césped organizadas en filas y columnas. Por ejemplo, el resolutor 4ºI-I.8.1 escribe que mediría un lado de la jardinera, que luego contaría cuántas briznas hay en 1 metro, y que multiplicaría lo que mide la longitud (en metros) por las briznas/metro. Escribe que luego repetiría el proceso con el otro lado de la jardinera, y por último multiplicaría ambos resultados para obtener la estimación total (Figura **5-9**).

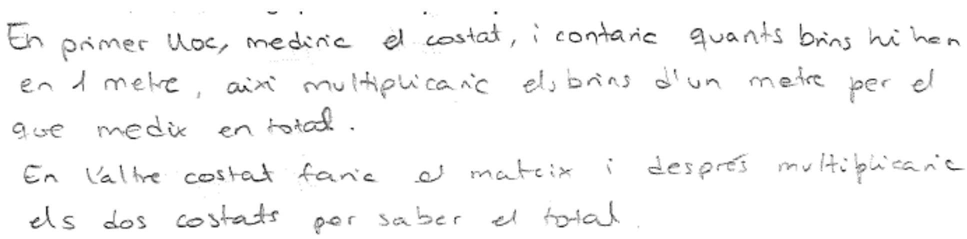

En primer lloc, mediria el costat, i contaria quants brins hi hen
en 1 metre, així multiplicaria els brins d'un metre per el
que medix en total.
En l'altre costat faria el mateix i després multiplicaria
els dos costats per saber el total.

Figura 5-9.: Plan de resolución categorizado como Linealización para el problema *P3-Césped*.

En el problema *P4-Coches* encontramos, por ejemplo, el caso de la producción del resolutor 4ºF-I.2.3 se cataloga como Linealización porque reduce el elemento coche a dos dimensiones lineales (ancho y largo), y hace lo mismo con la superficie del aparcamiento (Figura **5-10**). Para la estimación del número de coches a lo ancho y a lo largo, el resolutor I.2.3 propone una estrategia de iteración de la unidad lineal (cuántas veces cabe en largo o el ancho del coche en el largo o el ancho del aparcamiento, respectivamente).
Como se ha visto, todas las producciones analizadas tienen en común que, el resolutor, en su modelo inicial, dispone los elementos que quiere estimar a lo largo de una longitud, por lo que estructura y simplifica la situación real mediante un modelo unidimensional.

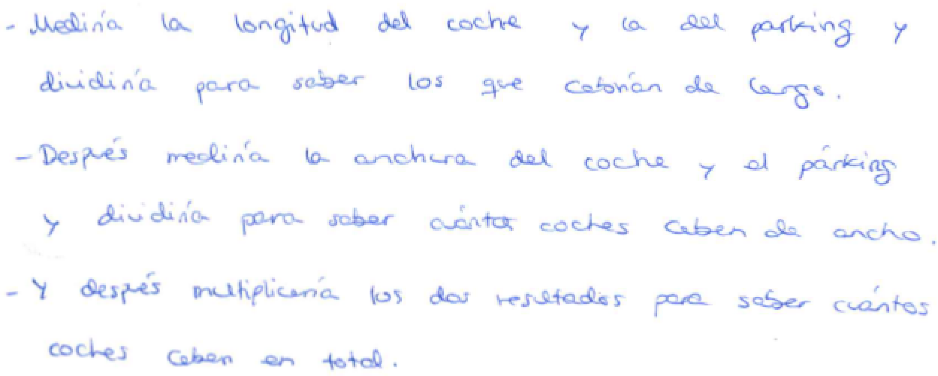

- Mediría la longitud del coche y la del parking y dividiría para saber los que cabrían de largo.
- Después mediría la anchura del coche y el parking y dividiría para saber cuántos coches caben de ancho.
- Y después multiplicaría los dos resultados para saber cuántos coches caben en total.

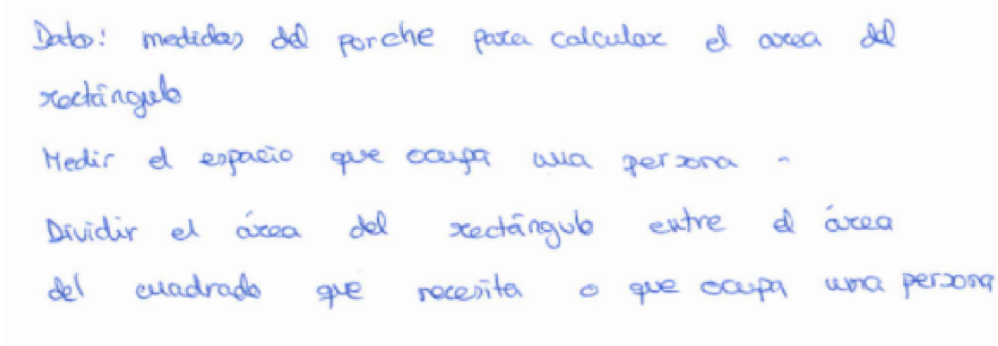
Figura 5-10.: Plan de resolución categorizado como Linealización, usando iteración de la unidad lineal para el problema *P4-Coches*.

Unidad base

Este tipo de plan de resolución es, con diferencia, el más utilizado en las 896 producciones analizadas. 408 producciones, un 45, 54 % del total, fueron categorizadas como Unidad base. Además, en el proceso de categorización descrito en el Capítulo 4, fue el tipo de plan de resolución con más proporción de acuerdos entre los investigadores que los categorizaron de manera independiente. Este plan de resolución aparece con frecuencia en todos los problemas de la secuencia 1, aunque es más numeroso en el problema *P4-Coches*, en el que se categorizaron 160 producciones como Unidad base. El segundo problema con la frecuencia más alta de producciones categorizadas como Unidad base es P1-Personas, con 110. En *P2-Baldosas* (71) y *P3-Césped* (67) la proporción es menor, aunque sigue siendo un tipo de plan de resolución muy empleado por los futuros maestros.

Un caso de uso de Unidad base en *P1-Personas* lo encontramos en la producción del resolutor 4ºF-I.12.2 (Figura **5-11**), que escribe que para obtener la estimación del número de personas que caben en el porche, primero debe calcular el área del rectángulo (ha matematizado el espacio real del problema reduciéndolo a una superficie rectangular sobre la que se distribuyen las personas, lo que indica un modelo inicial bidimensional). Luego debe "medir el espacio que ocupa una persona". Notemos que con ese "espacio" ocupado por una persona, el resolutor I.12.2 se refiere al área asignada a la persona, que modeliza como el "cuadrado [de superficie] que necesita" cada persona. Finaliza el plan de resolución con un procedimiento de división de medidas: "dividir el área del rectángulo [superficie del porche] entre el área del cuadrado que necesita o que ocupa una persona". Lo que se obtiene es cuántas veces cabe el área asignada a una persona en el área total, que proporciona la estimación que demanda el problema.

Un ejemplo de producción del problema *P2-Baldosas* categorizada como Unidad base es la propuesta por el resolutor 4ºA-I.2.2 en la Figura **5-12**. Estructura su plan de resolución en



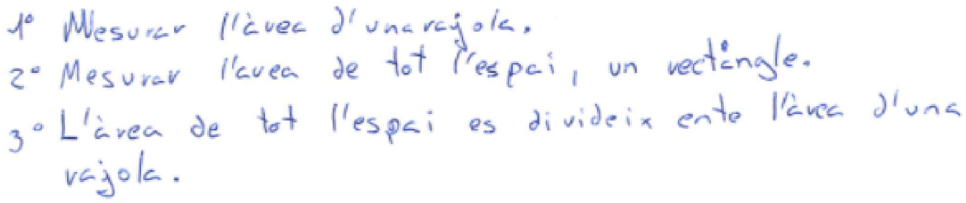
Dato: medidas del porche para calcular el area del rectángulo

Medir el espacio que ocupa una persona -

Dividir el área del rectángulo entre el área del cuadrado que necesita o que ocupa una persona

Figura 5-11.: Plan de resolución categorizado como Unidad base para el problema *P1-Personas*.

tres procesos: primero, medir el área de una baldosa (que es rectangular y pequeña, por tanto, la medida del área se obtendría directamente: ancho por largo); segundo, medir el área de todo el espacio (la superficie que delimitan Facultad de Magisterio y gimnasio, que es rectangular, como puede verse en la Figura **5-3**); y tercero, dividir el área de todo el espacio entre el área de una baldosa.



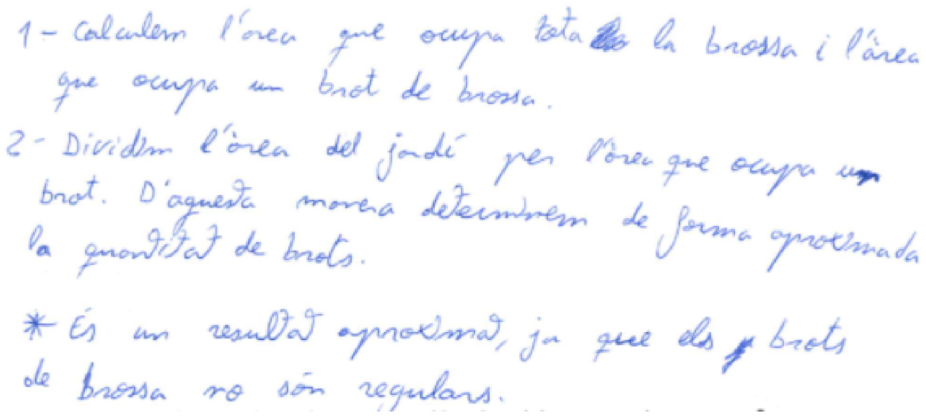
1º Mesurar l'àrea d'una rajola.

2º Mesurar l'area de tot l'espai, un rectangle.

3º L'àrea de tot l'espai es divideix ento l'àrea d'una rajola.

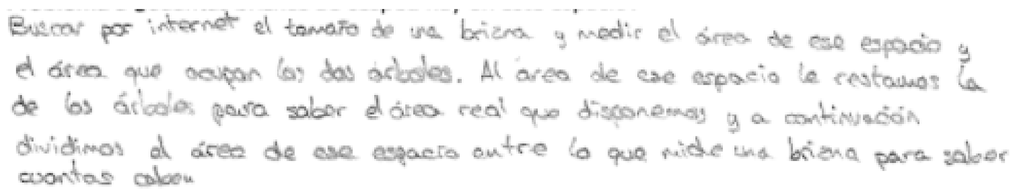
Figura 5-12.: Plan de resolución categorizado como Unidad base para el problema *P2-Balsosas*.

En *P3-Césped* encontramos el menor número de producciones categorizadas como Unidad base, y aunque sigue siendo una proporción bastante alta (un 29,91 % de los planes de resolución de este problema se categorizaron como Unidad base), algunos resolutores manifiestan la dificultad de calcular el área de una brizna de césped por su irregularidad, tanto en la forma como en la distribución. Por ejemplo, el resolutor 4ºK-I.7.3, después de realizar un plan de resolución basado en la iteración de la unidad de área ocupada por una brizna, advierte que es un resultado aproximado ya que las briznas de césped no son regulares (Figura **5-13**). Otro caso en relación a esta dificultad es el de la producción de la Figura **5-14**. Pese a que los problemas se escogieron para evitar que los resolutores acudieran a fuentes externas, como ya se explicó la sección dedicada al diseño de la secuencia en el Capítulo 4, el resolutor 4ºK-I.2.3 propone "buscar por internet el tamaño de una brizna" como solución al problema de medir el área de la brizna directamente. Finalmente, propone una división entre la medida del "área de ese espacio [la jardinera]" y "lo que mide [el área de] una brizna".



1- Calculem l'àrea que ocupa tota la brossa i l'àrea que ocupa un brot de brossa.
2- Dividim l'àrea del jardí per l'àrea que ocupa un brot. D'aquesta manera determinem de forma aproximada la quantitat de brots.
* És un resultat aproximat, ja que els brots de brossa no són regulars.

Figura 5-13.: Plan de resolución categorizado como Unidad base para el problema *P3-Césped*.



Buscar por internet el tamaño de una brizna y medir el área de ese espacio y el área que ocupan los dos árboles. Al área de ese espacio le restamos la de los árboles para saber el área real que disponemos y a continuación dividimos el área de ese espacio entre lo que mide una brizna para saber cuantas caben

Figura 5-14.: Plan de resolución Unidad base para *P3-Césped*, con medida indirecta para el área de la brizna.

Sin embargo, la mayoría de planes de resolución optan por un modelo matemático que simplifica la forma de una brizna para asimilarla a un pequeño rectángulo o cuadrado. También simplifican y estructuran la distribución de los elementos, pues suponen que los pequeños rectángulos que modelan la brizna cubren completamente la superficie rectangular de la jardinera. Por ejemplo, el resolutor 4ºK-I.9.3 escribe que debe calcularse el área de una brizna midiendo "la longitud y la anchura de la hoja" y después "dividir [la medida del área] el espacio de césped entre la [medida del área] de la hoja para saber cuántas caben".
En *P4-Coches* la Unidad base es el plan de resolución más utilizado; de hecho, como se ha dicho, es el problema con una mayor proporción de producciones categorizadas como Unidad base (un 71,43 % de las producciones). Un ejemplo de producción categorizada como este tipo de plan de resolución es la del resolutor 4ºI-I.8.4. Como se ve en la Figura **5-15**, su modelo inicial es bidimensional: considera la superficie del aparcamiento como un gran rectángulo en el que se distribuyen libremente los coches, considerados también como rectángulos (lo que apoyan los dibujos de la producción), hasta cubrir la superficie total. Para obtener la estimación del número de coches (en realidad, de las plazas rectangulares tomadas como modelo del espacio que ocupan los coches) que cubren la superficie del aparcamiento (rectangular), el resolutor I.8.4 escribe que se debe "dividir el área total del parquing entre

el área total [de la] plaza coche”.

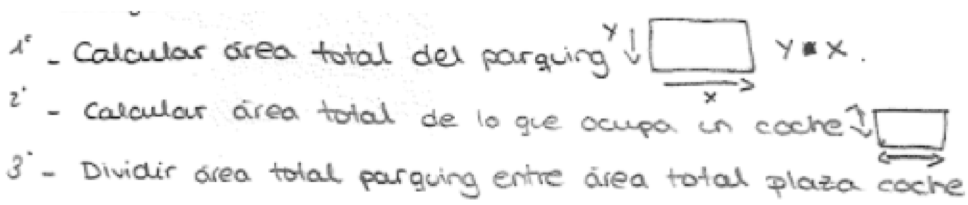


Figura 5-15.: Plan de resolución categorizado como Unidad base para el problema *P4-Coches*.

Otros planes de resolución categorizados como Unidad base en *P4-Coches* desarrollan la misma idea, aunque son menos precisos en la explicación. Por ejemplo, el resolutor 4ºK-I.6.1 (véase Figura **5-16**) escribe que “calcularíamos la superficie del parking multiplicando el ancho por el largo”, por lo que simplifica el espacio real del problema considerando su superficie como un rectángulo, pero luego escribe “calcularíamos cuánto espacio ocupa un coche”, sin explicitar, como sí hizo con el aparcamiento, que el modelo de la superficie ocupada por un coche sería un rectángulo.

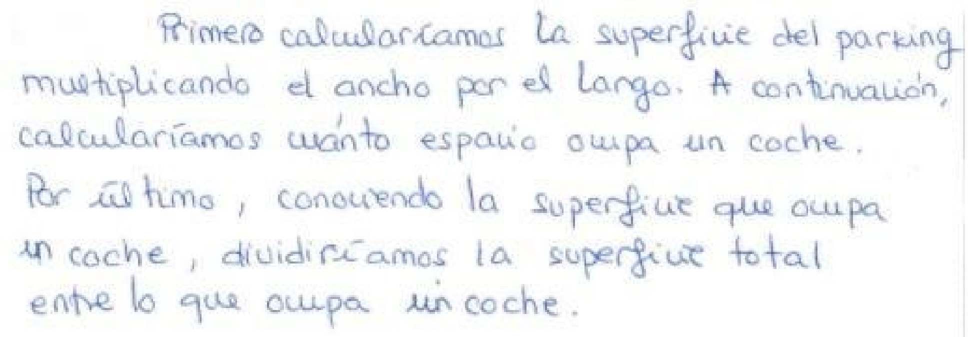

Primero calcularíamos la superficie del parking
multiplicando el ancho por el largo. A continuación,
calcularíamos cuánto espacio ocupa un coche.
Por último, conociendo la superficie que ocupa
un coche, dividiríamos la superficie total
entre lo que ocupa un coche.

Figura 5-16.: Otro plan de resolución categorizado como Unidad base para el problema *P4-Coches*.

Densidad

Un total de 169 producciones fueron categorizadas como Densidad, lo que supone un 18,86 % del total de las 896 producciones recogidas en la secuencia 1. Aparece con mayor frecuencia en el problema *P3-Césped*, con 96 planes de resolución basados en densidad. El segundo problema en el que más aparece este plan de resolución es en *P1-Personas*, con 51 producciones categorizadas como Densidad. Se categorizan 21 producciones de *P2-Baldosas* como Densidad y sólo una producción en *P4-Coches*. Veamos casos para los cuatro problemas de la secuencia 1 que permitan ejemplificar este plan de resolución y las distintas especificidades relacionadas con el contexto real de cada problema.

Los 51 planes de resolución Densidad que aparecen en P1-Personas suponen el 22,8 % del total de producciones en ese problema. En el caso del resolutor 4ºF-I.12.3, su producción (véase Figura **5-17**) fue categorizada como Densidad, pues escoge una subárea muestral de $1m \times 1m$, en la que es directo estimar cuántas personas caben (entre una y dos personas). En este caso, el resolutor formula el razonamiento proporcional

$$\frac{\text{nº de personas}}{1m^2} = \frac{\text{total de personas}}{\text{área de superficie}}$$

en términos de regla de tres, por lo que la proporción entre las personas que hay en la subárea muestral y el número total de personas no aparece explícito. De hecho, en un primer momento el resolutor I.12.3 escribe "hacer una multiplicación: los m^2 del porche $\times$ el nº [aquí queda incompleto]", pero lo tacha porque no sabe justificar que en realidad lo que hace es multiplicar el número de personas por metro cuadrado (la densidad en la subárea muestral) por los metros cuadrados de la superficie total. Y recurre a regla de tres, que es un procedimiento mecánico al que se acude para resolver situaciones de proporcionalidad.

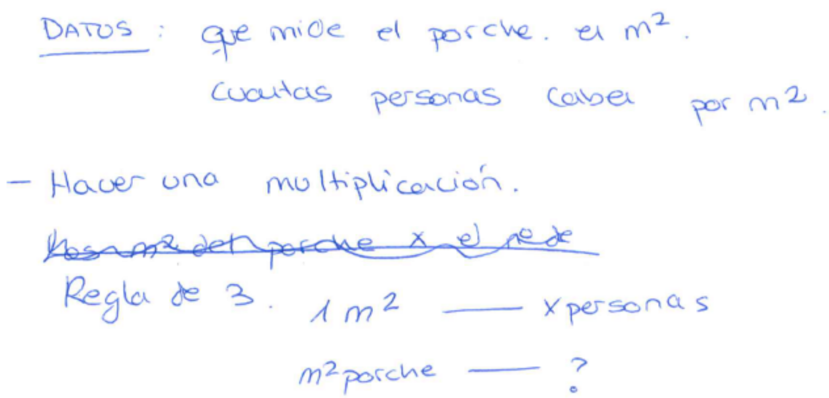


Figura 5-17.: Plan de resolución Densidad, con procedimiento de regla de 3, para el problema *P1-Personas*.

La mayoría de producciones categorizadas como Densidad se basan en una subárea muestral (o área unidad) de 1 metro cuadrado, y suelen plantear el procedimiento de estimación del número total de personas que caben en el porche como, por ejemplo, el resolutor 4ºA-I.7.5: "personas que caben por m^2 y esto lo multiplicaría por los m^2 que tiene el porche".

Sin embargo, algunos resolutores, como 4ºA-I.6.2, utilizan un plan de resolución basado en densidad (Figura **5-18**) diferente, con un modelo inicial y procedimiento asociado alternativos: aunque no se percibe en la fotografía que acompaña al enunciado del problema, por ser un espacio de paso habitual, recuerda que el suelo del porche está formado por baldosas grandes (mucho más grandes que las baldosas pequeñas del espacio del problema *P2-Baldosas*).

Por tanto, propone: (1) tomar como "unidad de medida" (lo que hemos llamado subárea muestral o área unidad) la baldosa; (2) estimar (contar) el número de personas que caben en una baldosa grande del suelo; (3) contar el número de baldosas grandes del suelo y multiplicar por el número de personas que caben en una baldosa.

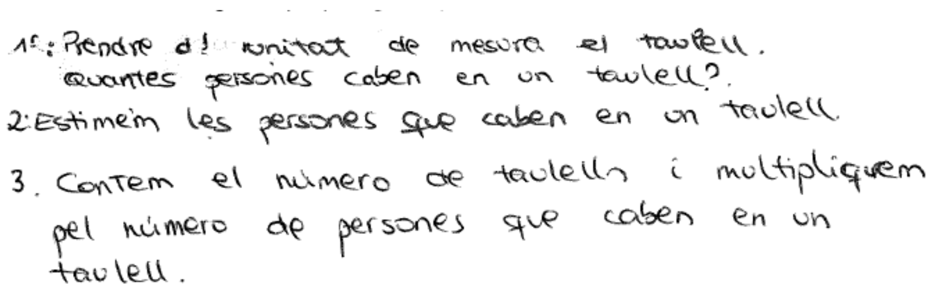

1r: Prendre d'unitat de mesura el taulell.
Quantes persones caben en un taulell?
2: Estimem les persones que caben en un taulell
3. Contem el número de taulells i multipliquem pel número de persones que caben en un taulell.

Figura 5-18.: Plan de resolución Densidad, con modelo inicial basado en baldosa grande del suelo del porche, para el problema *P1-Personas*.

En el caso de *P2-Baldosas*, el número de producciones categorizadas como Densidad desciende a 21. Un ejemplo lo encontramos en la producción del resolutor 4ºK-I.4.4, en la que, de nuevo, fija una subárea muestral de 1 metro cuadrado y propone contar las baldosas que hay contenidas (Figura **5-19**). El resolutor propone también calcular la medida de la superficie total entre la Facultad de Magisterio y el gimnasio, en metros cuadrados. Por último, multiplica el número de baldosas en un metro cuadrado por la medida del área total (en metros cuadrados).

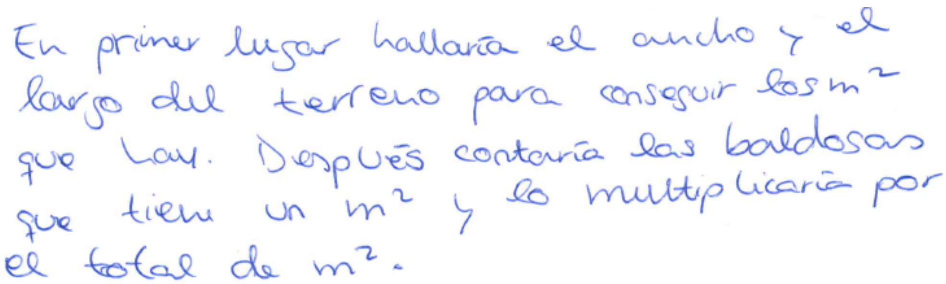

En primer lugar hallaría el ancho y el largo del terreno para conseguir los m² que hay. Después contaría las baldosas que tiene un m² y lo multiplicaría por el total de m².

Figura 5-19.: Plan de resolución Densidad para el problema *P2-Baldosas*.

En cuanto a *P3-Césped*, ya se ha indicado que es el problema con un mayor número de producciones categorizadas como Densidad. La mayoría de los planes de resolución basados en densidad delimitan una subárea muestral de una unidad de medida estándar, normalmente en centímetros cuadrados dado el tamaño y gran número de briznas de césped; por ejemplo, el resolutor 4ºD-I.1.3 escribe que "mediría un centímetro de largo y otro de ancho y lo delimitaría, de modo que podemos contar cuántas briznas hay en un centímetro cuadrado" (Figura **5-20**).

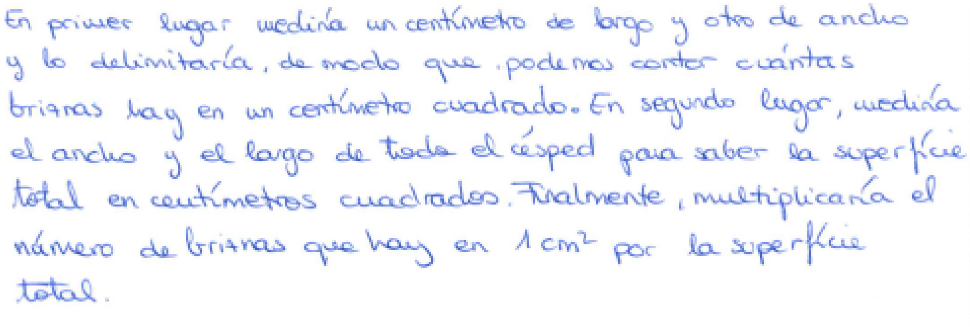

En primer lugar mediría un centímetro de largo y otro de ancho y lo delimitaría, de modo que podemos contar cuántas briznas hay en un centímetro cuadrado. En segundo lugar, mediría el ancho y el largo de todo el césped para saber la superficie total en centímetros cuadrados. Finalmente, multiplicaría el número de briznas que hay en 1 cm^2 por la superficie total.

Figura 5-20.: Plan de resolución Densidad para el problema *P3-Césped.*

Posteriormente el resolutor razona a partir de la proporcionalidad entre el número de briznas en un cuadrado de un centímetro de lado, y el número de briznas en la jardinera rectangular, por lo que "multiplicaría el número de briznas que hay en $1cm^2$ por la superficie total". En la producción del resolutor 4ºD-I.1.4 el plan de resolución es similar, pero se escoge un cuadrado de lado $5cm$, como puede verse en el esquema pictórico que el resolutor añade a la explicación (Figura **5-21**).

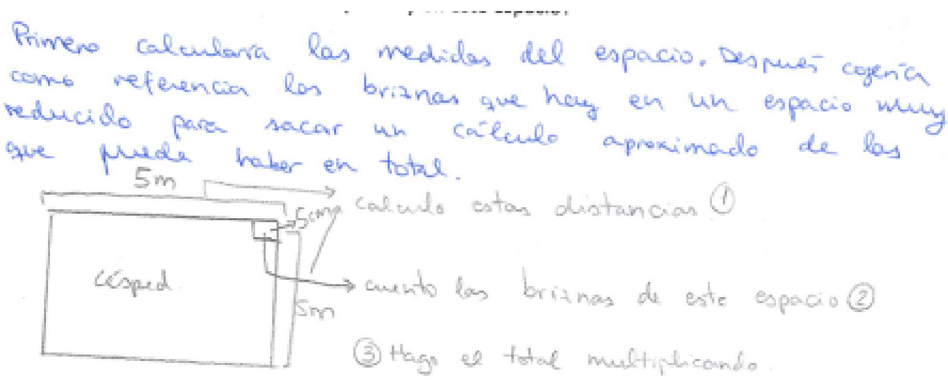


Figura 5-21.: Plan de resolución Densidad en cuadrado de lado 5 centímetros para el problema *P3-Césped.*

Hay que notar que en la descripción del procedimiento del resolutor I.1.4 hay errores: escribe que hay que "calcular las distancias", refiriéndose al lado del cuadrado de la subárea muestral (de 5 cm) y al lado de la jardinera (que estima en 5 metros), pero no dice nada sobre multiplicar los lados para obtener las áreas respectivas. Después de contar las briznas en la subárea muestral, escribe que "hago el total multiplicando", pero al tratarse de una subárea de 25 centímetros cuadrados, debería dividir primero el área total ($500cm \times 500cm$) entre los 25 centímetros cuadrados para obtener cuántas subáreas componen la jardinera, y luego ya multiplicar ese número por las briznas que ha contado en la subárea muestral. En la sección 5.4 nos centraremos en la categorización de los tipos de error analizados en las producciones. También encontramos producciones que escogen una subárea muestral demasiado grande: el resolutor 4ºI-I.1.1 escoge contar cuántas briznas de hierba hay en un metro cuadrado, lo que supone una tarea ardua (Figura **5-22**).

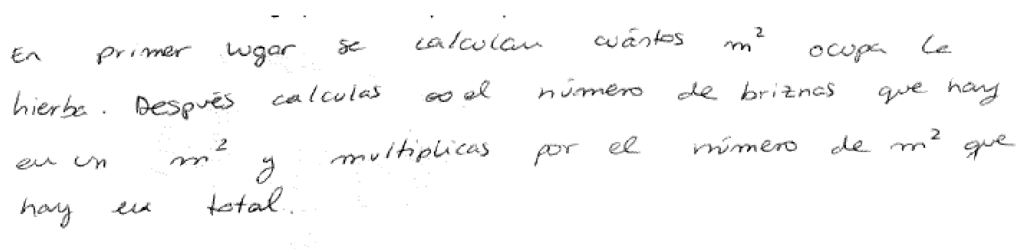

En primer lugar se calculan cuántos m² ocupa la hierba. Después calculas ~~es~~ el número de briznas que hay en un m² y multiplicas por el número de m² que hay en total.

Figura 5-22.: Plan de resolución Densidad en un metro cuadrado para el problema *P3-Césped.*

Para terminar con este tipo de plan de resolución, también se encuentran producciones categorizadas como Densidad que construyen un modelo inicial basado en una subárea medida en unidades no estándar. Por ejemplo, el resolutor 4ºI-I.2.4 escoge la "palma de la mano como unidad de medida de área". De hecho, su elección de subárea muestral es la superficie que ocupa el palmo de una mano, pues propone contar cuántas briznas de hierba abarca, y luego "comprobar cuántos palmos tiene el espacio". Encontramos otro modelo inicial basado en una unidad de medida no estándar en la elección de la subárea muestral en el resolutor 4ºI-I.5.1, quien propone contar cuántas briznas caben en el espacio que ocupa un libro tamaño DIN-A4, calcular la superficie total y luego calcular "cuántos libros caben" (Figura **5-23**).

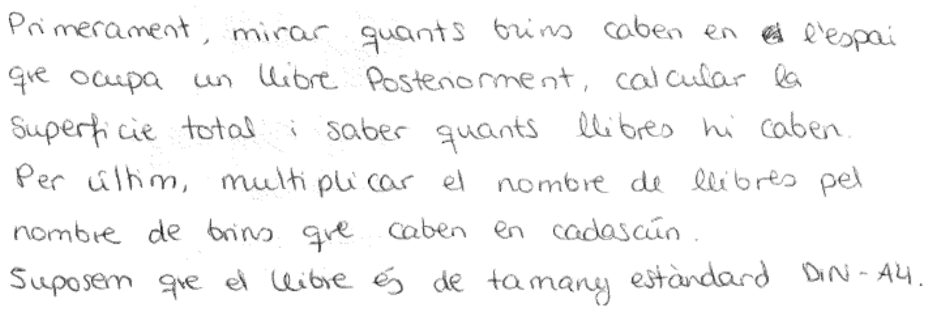

Primerament, mirar quants brins caben en l'espai que ocupa un llibre Posteriorment, calcular la superfície total i saber quants llibres hi caben. Per últim, multiplicar el nombre de llibres pel nombre de brins que caben en cadascún. Suposem que el llibre és de tamany estàndard DIN-A4.

Figura 5-23.: Plan de resolución Densidad en la superficie ocupada por un libro para el problema *P3-Césped.*

Por último, sólo encontramos un plan de resolución Densidad en *P4-Coches*. La explicación parece clara: los coches son demasiado grandes como para que resulte efectivo delimitar una subárea muestral - que sería poco abarcable - en la que contar el número de coches. La producción categorizada como Densidad es del resolutor 4ºK-I.3.3, quien delimita una subárea muestral de 20 metros cuadrados y cuenta cuántos coches caben en esa superficie (estima que 2 coches), para luego razonar proporcionalmente vía regla de 3, aunque mal planteada porque confunde la incógnita del problema (número total de coches) con un dato desconocido (el área total del aparcamiento) que debe ser estimado (ver Figura **5-24**).

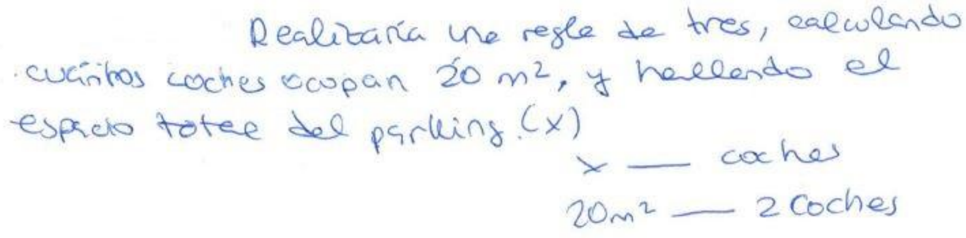


Figura 5-24.: Plan de resolución Densidad para el problema *P4-Coches*.

Incompleta

Se estableció la categoría Incompleta para todas aquellas producciones que están en alguno de estos tres casos:

(i) no responden a la pregunta del problema o la dejan en blanco;

(ii) no desarrollan un modelo matemático de la situación ni una estrategia de estimación;

(iii) comienzan a desarrollar un modelo, pero no explican lo suficiente el proceso como para determinar si el resolutor podría alcanzar una estimación.

De las 896 producciones analizadas en la secuencia 1, 140 se categorizaron como producción Incompleta, un 15, 63 % del total. De ellas, el mayor número está en *P3-Césped*, con 44 producciones incompletas, seguido de *P1-Personas* y *P2-Baldosas* (34 cada uno). El problema con menos producciones incompletas es P4-Coches (28 producciones).
En P1-Personas encontramos, por ejemplo, la producción del resolutor 4ºK-I.1.1 categorizada como Incompleta (Figura **5-25**). Este es un ejemplo de producción conflictiva en el proceso de categorización, como se explicó en el Capítulo 4. La razón es que el modelo inicial parece basarse en la superficie que ocupa una persona colocada en la superficie total del porche, por tanto, un modelo inicial bidimensional centrado en el área del elemento como unidad de medida. Es decir, se intuye que podría ser un plan de resolución Unidad base. Sin embargo, el resolutor no específica en ningún momento que vaya a trabajar con el área de la superficie del porche (sólo habla de largo y ancho, y luego de "medida del porche"); tampoco habla de superficie o área que ocupa una persona, sino de "lo que suele medir una persona más o menos"; por último, tampoco hace explícito el procedimiento de la estimación, pues no menciona la división de medidas de área, sino que "así [¿cómo?] saber cuántas puedo meter hasta llegar a la medida [¿cuál?] del porche". Por tanto, aunque se pueda interpretar que la intención del resolutor era describir un plan de resolución Unidad base, lo cierto es que

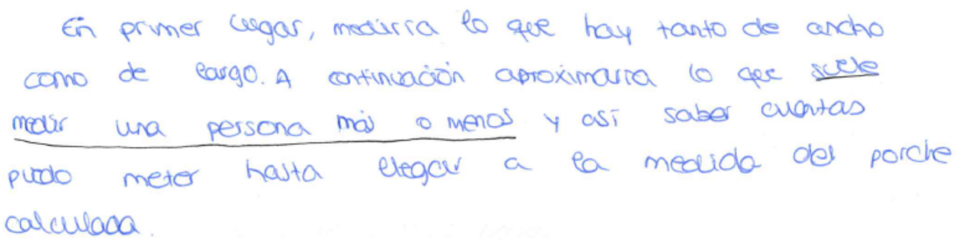

En primer lugar, mediría lo que hay tanto de ancho como de largo. A continuación aproximaría lo que suele medir una persona más o menos y así saber cuántas pudo meter hasta llegar a la medida del porche calculada.

Figura 5-25.: Plan de resolución incompleto (iii) para el problema *P1-Personas*.

el proceso no está lo suficientemente explicado, por lo que se terminó categorizando como Incompleta de tipo (iii).

Un ejemplo de producción Incompleta de tipo (ii), es decir, que no desarrolla un modelo matemático de la situación ni una estrategia de estimación, es la del resolutor 4ºF-I.6.3, quien escribe que: “Necesitamos saber el tamaño del porche en su conjunto. Tendríamos que medir el ancho y la longitud para poder obtener el total de metros cuadrados.” En esta producción observamos que el resolutor I.6.3 comienza a construir un modelo inicial y matemático del espacio del problema, considerándolo un rectángulo en el que hay que medir ancho y largo, pero ahí termina, no desarrolla el modelo matemático en sus aspectos más básicos, ni siquiera desarrolla el modelo inicial de la situación real, pues no incluye los elementos a estimar.

También encontramos producciones incompletas que no contestan a la pregunta del problema *P1-Personas*. Por ejemplo, se observa que la producción de 4ºF-I.8.4 no responde a la pregunta del problema: “Metros cuadrados a partir de las columnas que resguarda el porche”. Es una respuesta que carece de sentido porque no precisa a qué metros cuadrados se está refiriendo, cuál es la relación con las columnas y qué quiere hacer con esos datos.

En *P2-Baldosas* también se encuentran los tres tipos de producción categorizada como Incompleta. Por ejemplo, la producción del resolutor 4ºK-I.7.2, mostrada en la Figura **5-26**, plantea un modelo de la situación real y un procedimiento de cálculo que no responde a la estimación demandada por el problema (¿cuántas baldosas hay entre la Facultad de Magisterio y el gimnasio?). El resolutor I.7.2 plantea calcular el área de la superficie delimitada entre el edificio de Magisterio y el gimnasio, pero luego habla de “calcular por una parte del área de [¿el edificio?] de magisterio” y “por otro el área del gimnasio”. Luego escribe que por último se debe “realizar una suma de las dos áreas y restárselo a la superficie total”. No queda claro a qué responde esta producción, pero no aparecen las baldosas como un elemento considerado en el modelo inicial ni, por supuesto, ningún procedimiento para estimar su número.

En *P3-Césped*, además de ser el problema con mayor número de producciones categorizadas como Incompleta, muchas de ellas son respuestas en blanco. En el resto de problemas apenas hay respuestas en blanco. También hay respuestas que informan de la incapacidad del resolutor para resolver el problema, como la del resolutor 4ºK-I.11.1 en la Figura **5-27**. El

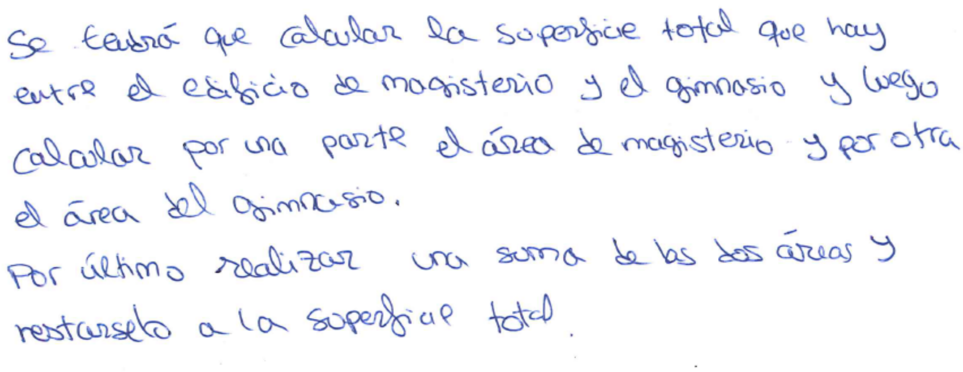

Se tendrá que calcular la superficie total que hay
entre el edificio de magisterio y el gimnasio y luego
calcular por una parte el área de magisterio y por otra
el área del gimnasio.
Por último realizar una suma de las dos áreas y
restarselo a la superficie total.

Figura 5-26.: Plan de resolución incompleto (i) no responde a la pregunta, para el problema *P2-Baldosas*.

resolutor dice que no se puede saber con exactitud [aunque lo que se pide es una estimación] porque la brizna "no sigue una simetría [imaginamos que se refiere a regularidad en la forma] exacta como las baldosas". Esto se relaciona con las dificultades descritas en el plan de resolución Unidad base (véase la Figura **5-13**), pero en este caso el resolutor I.11.1 no ha sido capaz de superarlas.

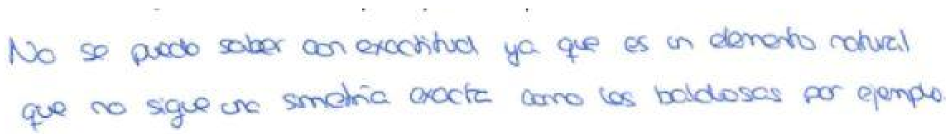

No se puede saber con exactitud ya que es un elemento natural
que no sigue una simetria exacta como las baldosas por ejemplo.

Figura 5-27.: Plan de resolución incompleto (ii) para el problema *P3-Césped*.

En la misma línea está la respuesta del resolutor 4ºA-I.9.2 de la Figura **5-28**, en la que escribe que "no se puede calcular con fórmulas" porque "puede variar el número de briznas". En el caso de este resolutor, en lugar de la irregularidad en la forma, es la distribución desordenada y heterogénea la barrera que le impide producir un plan de resolución que dé respuesta al problema.

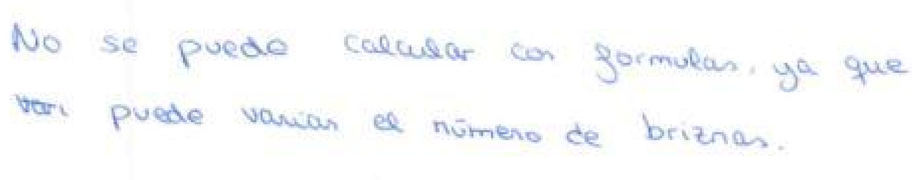

No se puede calcular con formulas, ya que
~~vari~~ puede variar el número de briznas.

Figura 5-28.: Plan de resolución incompleto (ii) para el problema *P3-Césped*.

En *P4-Coches* encontramos, por ejemplo, la producción del resolutor 4ºA-I.7.4, que escribe que: "Se mide cuánto mide un coche a lo ancho y a lo largo y se va sumando (de retrovisor a retrovisor).” Se trata de una respuesta que no se ajusta a lo que demanda el problema, pues sumar [¿el ancho? ¿el largo?] “de retrovisor a retrovisor” no conduce a la estimación, y además es un procedimiento incoherente con hallar la longitud del ancho y el largo del coche.

Sin embargo, otras producciones categorizadas como Incompleta en *P4-Coches* estaban más cerca de desarrollar el proceso de resolución, y como ocurría con la Figura **5-25**, hay dudas sobre si podrían categorizarse como un plan de resolución. Por ejemplo, la producción del resolutor 4ºK-I.6.2 de la Figura **5-29** planifica el proceso de resolución en tres partes: primero calcular “qué espacio [se sobreentiende superficie] ocupa un coche”; luego “calcular el espacio total del parking tanto en línea recta [¿qué quiere decir con esto?] como en horizontal [¿qué quiere decir con horizontal?]”; por último, dice que hay que “calcular la respuesta de la pregunta en función de la medida estándar del coche y el espacio del parking”. De nuevo, un esfuerzo de interpretación podría apuntar a que el resolutor I.6.2 está utilizando Unidad base, pero en realidad la explicación tiene lagunas y no está lo suficientemente desarrollada como para aventurar esa categorización. No habla de calcular el área del aparcamiento, sino de calcular (medir) el espacio tanto en “línea recta” como en “horizontal”, lo que quizá quiera decir tanto de ancho como de largo. En todo caso, faltaría desarrollar el procedimiento para obtener la medida del área. Se trata de una producción incompleta de tipo (iii), ya que tampoco escribe nada sobre el procedimiento de obtención de la estimación, sino que se apunta que se calcularía “en función de la medida” del coche, por lo que no queda explícito que el procedimiento sea una división de medidas dada por la fórmula:

$$\frac{\textit{área aparcamiento}}{\textit{área coche}}$$

.

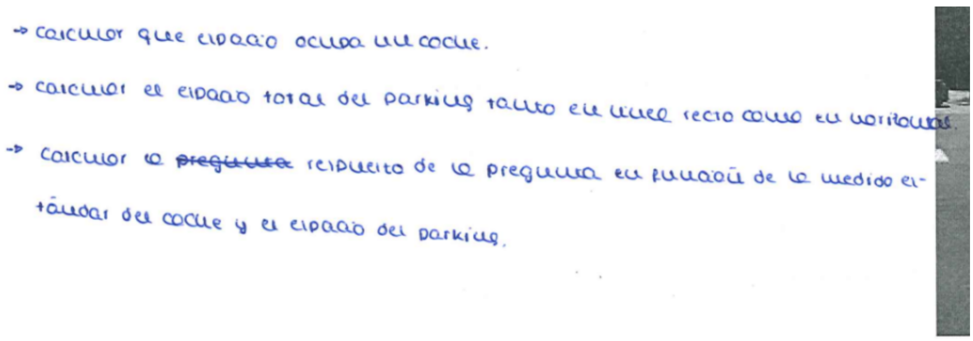

→ calcular que espacio ocupa un coche.
→ calcular el espacio total del parking tanto en línea recta como en horizontal.
→ calcular la ~~pregunta~~ respuesta de la pregunta en función de la medida estándar del coche y el espacio del parking.

Figura 5-29.: Plan de resolución tipo (iii), para el problema *P3-Césped.*

Consideraremos las producciones categorizadas como Incompleta el primer filtro (básico) para determinar el éxito o fracaso en la actuación de los futuros maestros resolviendo problemas de estimación en contexto real. El número de producciones incompletas de un resolutor es, por tanto, un primer indicador de su rendimiento en resolución de este tipo de problemas.

Adaptando la definición de rendimiento de éxito en resolución de problemas (*measures of problem-solving performance*) de Schoenfeld (1982), diremos que un resolutor tiene un *rendimiento de éxito* cuando posee la habilidad de manejar las técnicas y estrategias de resolución y es capaz de gestionar el enfoque y los recursos para resolver problemas de estimación en contexto real. Concretando en este primer indicador de rendimiento, esto se dará cuando el resolutor no tenga ninguna producción categorizada como Incompleta, es decir, cuando sea capaz de desarrollar, para todos los problemas de la secuencia, un modelo inicial y una estrategia asociada que permita alcanzar una estimación. Decimos que es un indicador básico porque se limita a distinguir entre quién termina sus planes de resolución y quién no es capaz de hacerlo, lo que no implica que los planes estén libres de errores o puedan dar lugar a una buena estimación. Pero esta limitación básica es importante por su gravedad, pues denota una falta de estrategias para interpretar la información del enunciado del problema y para reconocer el procedimiento adecuado a utilizar (Taplin, 1998). La noción de *éxito* permitirá definir, en la sección 5.4, los errores graves como aquellos que determinan o conducen a producciones Incompletas.

5.1.2. Tipos de plan de resolución para la secuencia 2

En este apartado presentamos los resultados del análisis de los tipos de plan de resolución para la secuencia 2 (Tabla **4-4**; Anexo C) de la investigación B. En el Capítulo 4 se ha explicado el proceso de categorización de los tipos de plan de resolución para la secuencia 2, y se mostró que fue similar al proceso de categorización de la secuencia 1, pudiendo utilizar para un análisis con fiabilidad alta las mismas categorías: Recuento, Linealización, Unidad base, Densidad e Incompleta. Recordemos que participaron $N = 87$ futuros maestros resolviendo la secuencia 2; por tanto, se analizaron 348 producciones. El análisis cualitativo y descriptivo de las producciones, para cada categoría y cada problema, será más breve que en el apartado anterior porque los resultados son análogos, pero consideramos necesario, para el estudio comparativo de las dos secuencias que se presentará en la sección 5.2, mostrar ejemplos concretos de planes de resolución de la secuencia 2.

Recuento

En la secuencia 2 se han categorizado 15 producciones como plan de resolución basado en recuento, un 4,31 % del total, un porcentaje bajo, aunque algo más alto que en la secuencia 1. Aparece sobre todo en *P2'- Ladrillos pintados*, con 10 producciones categorizadas como Recuento.

En *P1'- Llaves robadas* se categorizaron dos producciones como plan de resolución Recuento. Por ejemplo, el resolutor 4ºG-I.4.5 propone contar las baldosas que hay en el pasillo "teniendo en cuenta que cada alumno ocupa una baldosa" (Figura **5-30**). Se trata de un recuento exhaustivo, aunque aquí la propuesta tiene cierto ingenio: puesto que los elementos (las personas que llenan el pasillo) planteados en la situación del problema están ausentes, y eso impide un recuento directo sin tener que simular el problema (lo que supone una dificultad y hace inaplicable la propuesta), el resolutor I.4.5 propone contar baldosas del suelo, que sí es un elemento presente en el lugar real del problema, y por tanto susceptible de ser contado. Así planteado, se trata de un plan de resolución poco efectivo (podría reducirlo a un modelo lineal de largo por ancho) pero plausible.

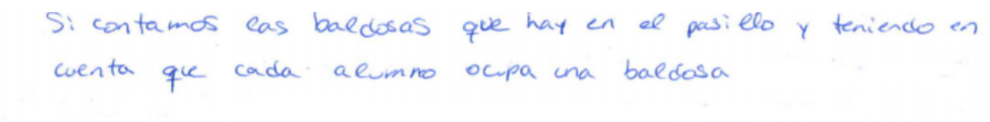

Si contamos las baldosas que hay en el pasillo y teniendo en cuenta que cada alumno ocupa una baldosa

Figura 5-30.: Plan de resolución Recuento para el problema *P1'-Llaves robadas.*

En *P2'- Ladrillos* pintados 10 producciones (un 11,5 %) se basan en recuento directo, con una particularidad: proponen un recuento exhaustivo de los ladrillos del primer piso y luego multiplican por cuatro, ya que el edificio tiene cuatro plantas. Por ejemplo, encontramos el caso del resolutor 4ºH-I.4.3 en la Figura **5-31**.

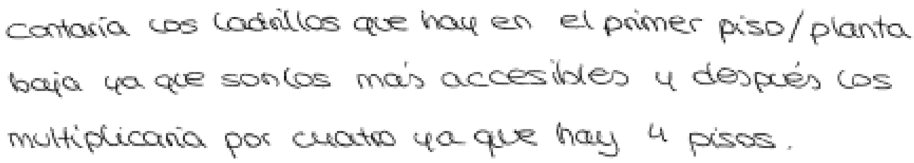

contaría los ladrillos que hay en el primer piso/planta baja ya que son los más accesibles y después los multiplicaría por cuatro ya que hay 4 pisos.

Figura 5-31.: Plan de resolución Recuento para el problema *P2'-Ladrillos pintados.*

Encontramos dos producciones categorizadas como Recuento en *P3'-Palomitas.* En ambas producciones la situación narrativa introduce cierta ambigüedad en la interpretación del problema, pues en un caso (resolutor 4ºG-I.2.5, Figura **5-32**) se interpreta que todo el contenido de las cajas termina en el suelo, y en otro (resolutor 4º G-I.4.4, Figura **5-33**) que sólo una parte, aunque no se justifica si es suficiente para cubrir el suelo. De hecho, ambas producciones ignoran el hecho de que lo hay que contar son las palomitas que hacen falta para cubrir el suelo, y recurren a la misma estrategia: contar el número de alumnos en la clase, asignar a cada uno una caja de palomitas, y contar el número de palomitas por caja. Estas dos producciones son un ejemplo de casos en los que la categorización fue discutida entre los tres investigadores (ver Capítulo 4), pues se podría considerar que no responden a la pregunta del problema *P3'- Palomitas*, y por tanto ser categorizadas como Incompleta. En la discusión se decidió que, aunque existe malinterpretación inducida por la situación narrativa del problema, la respuesta sí podría ajustarse a lo que pide la situación del problema.
En *P4'-Tablao flamenco* sólo hay una producción categorizada como Recuento, la del resolutor 4ºG-I.4.5, quien escribe: "Calculamos cuántas personas caben en una mesa. Después

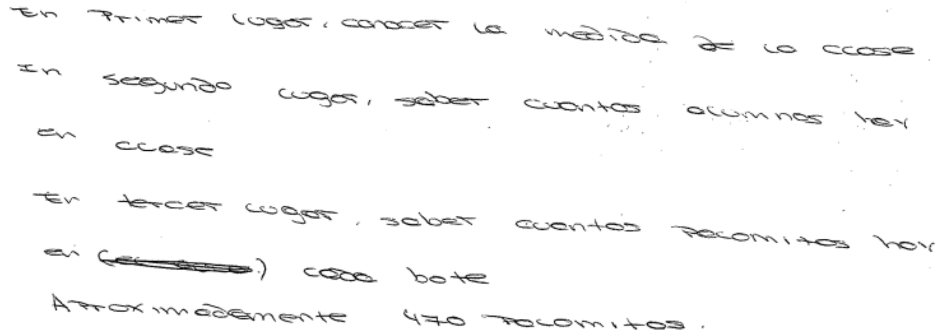

En primer lugar, conocer la medida de la clase
En segundo lugar, saber cuantos alumnos hay en clase
En tercer lugar, saber cuantos palomitas hay en (~~[illegible]~~) cada bote
Aproximadamente 470 palomitas.

Figura 5-32.: Plan de resolución Recuento para el problema *P3'-Palomitas.*

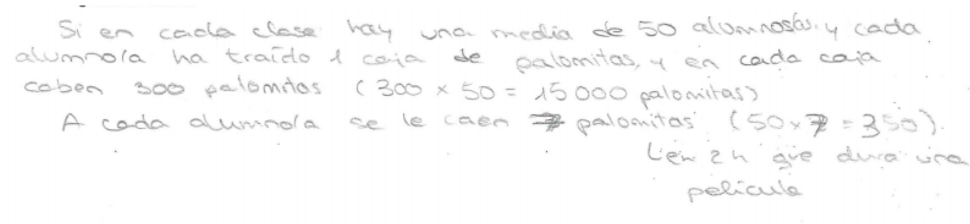

Si en cada clase hay una media de 50 alumnos/as y cada alumno/a ha traído 1 caja de palomitas, y en cada caja caben 300 palomitas (300 × 50 = 15 000 palomitas)
A cada alumno/a se le caen 7 palomitas (50×7 = 350).
(en 2 h que dura una película

Figura 5-33.: Plan de resolución Recuento para el problema *P3'-Palomitas.*

las personas se van poniendo en el hall para ir completándolo." En este caso, la imposibilidad de simular el problema cubriendo de mesas el hall de la Facultad de Magisterio lleva al resolutor I.4.5 a plantear una simulación usando personas para el recuento. Eso implica conocer "cuántas personas caben en una mesa", aunque el resolutor ha cometido un error al no terminar este procedimiento de recuento a través de las personas: le falta indicar que dividiría el número de personas que "completan" la superficie del hall de Magisterio entre el número de personas por mesa, para conocer cuántas mesas necesita.

Linealización

En la secuencia 2 se han categorizado 57 producciones como plan de resolución basado en la linealización, un $16,38\,\%$ del total. La mayoría se encuentran en el problema *P2'- Ladrillos pintados*, mientras que el menor número de planes de resolución Linealización se localiza en *P3'- Palomitas.* Es una situación análoga a la de la secuencia 1, en la que Linealización era más numerosa en *P2-Baldosas* y menos en *P3-Césped.* En *P1'- Llaves robadas* 9 producciones $(10,3\,\%)$ se categorizaron como Linealización. Es el caso de la producción del resolutor 4ºH-I.2.1, quien propone colocar una fila de personas en horizontal, de pared a pared del pasillo, y otra en vertical (a lo largo del pasillo), y luego realizar el producto cartesiano (Figura **5-34**).

En *P2'- Ladrillos pintados* hay 36 planes de resolución basados en la linealización, un $41,4\,\%$ de las producciones de ese problema. Por ejemplo, el resolutor 4ºH-I.6.5 propone el plan de resolución de la Figura **5-35**, en el que propone dividir la medida de longitud de la fachada

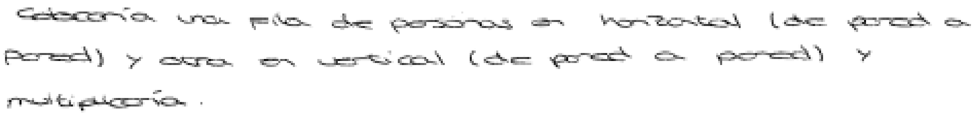

Colocaría una fila de personas en horizontal (de pared a pared) y otra en vertical (de pared a pared) y multiplicaría.

Figura 5-34.: Plan de resolución Linealización para el problema *P1'-Llaves robadas.*

del Aulario entre la medida de longitud de un ladrillo para obtener una estimación de cuántos ladrillos hay a lo largo del edificio. Luego propone contar cuántos ladrillos hay en una franja (un piso) a lo alto (lo denomina "columna de ladrillos"), pues hay un número menor y el recuento es eficiente. Multiplica el número de ladrillos por "columna" (alto de una franja) por el número de ladrillos a lo largo, y obtiene una estimación del número de ladrillos en la franja de un piso. Por último, como hay cuatro pisos, multiplica por cuatro.

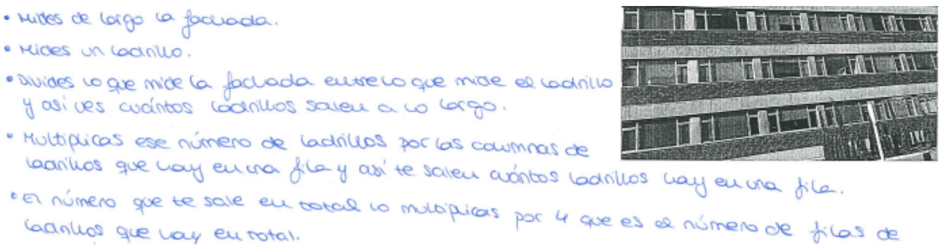

- Mides de largo la fachada.
- Mides un ladrillo.
- Divides lo que mide la fachada entre lo que mide el ladrillo y así ves cuántos ladrillos salen a lo largo.
- Multiplicas ese número de ladrillos por las columnas de ladrillos que hay en una fila y así te salen cuántos ladrillos hay en una fila.
- El número que te sale en total lo multiplicas por 4 que es el número de filas de ladrillos que hay en total.

Figura 5-35.: Plan de resolución Linealización para el problema *P2'- Ladrillos pintados.*

En *P3'- Palomitas* sólo hay cuatro producciones categorizadas como Linealización. Es la proporción más baja de planes de resolución basados en linealización, sólo un 4,6 % de las producciones del problema, porque resulta poco natural pensar en colocar alineadas las palomitas que hay por el suelo, siguiendo un modelo inicial de distribución unidimensional. Sin embargo, las producciones categorizadas como Linealización fuerzan la interpretación de la situación del problema para introducir su "mirada lineal" en el modelo matemático.
Así ocurre, por ejemplo, con la producción del resolutor 4ºG-I.7.4, como se ve en la Figura **5-36**, en concreto, en el esquema visual que el resolutor dibuja para acompañar su explicación del proceso. El resolutor, además, es consciente de lo forzado de su modelo, pues al final de su plan de resolución añade: "Suponiendo que las palomitas están puestas de manera equitativa y paralela [ordenada y homogénea], obtendremos el resultado correcto".
En *P4'-Tablao flamenco* encontramos 8 producciones categorizadas como Linealización, un 9,2 % de las producciones del problema. Un ejemplo es la producción del resolutor 4ºG-I.4.7, quien escribe que:

> "Hay que calcular el tamaño [se refiere a largo y ancho, como se verá a continuación] de las mesas y el tamaño [ídem] del hall. Después dividir el largo del hall entre el largo de las mesas y el ancho del hall entre el ancho de las mesas."

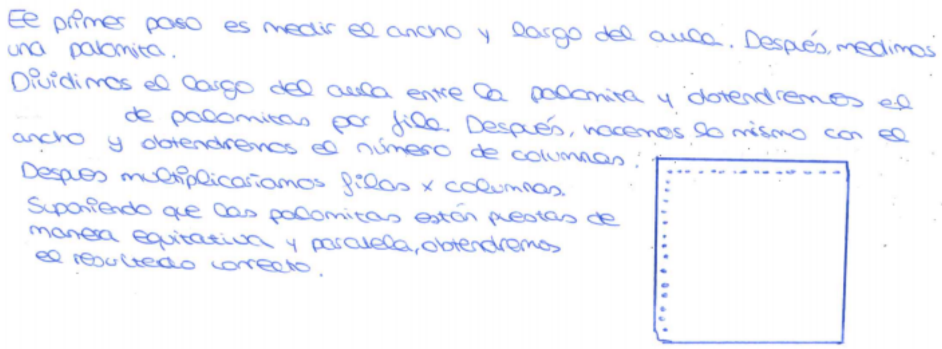

El primer paso es medir el ancho y largo del aula. Después, medimos una palomita.
Dividimos el largo del aula entre la palomita y obtendremos el de palomitas por fila. Después, hacemos lo mismo con el ancho y obtendremos el número de columnas.
Despues multiplicaríamos filas x columnas.
Suponiendo que las palomitas están puestas de manera equitativa y paralela, obtendremos el resultado correcto.

Figura 5-36.: Plan de resolución Linealización para el problema *P3'- Palomitas.*

Nótese que al resolutor I.4.7 le falta pasar de la estimación lineal (número de mesas a lo largo y número de mesas a lo ancho) a la estimación total (bidimensional: número de mesas en la superficie del hall) mediante el producto cartesiano. En este caso no se categoriza la producción como Incompleta porque está lo suficientemente desarrollada como para identificar inequívocamente que el modelo inicial es unidimensional y, por tanto, que el proceso propuesto se basa en la linealización del espacio del problema.

Unidad base

En la secuencia 2 se han categorizado 125 producciones como Unidad base. Igual que ocurría en la secuencia 1 de la experiencia A1, es con diferencia el plan de resolución más utilizado, pues supone un $35,92\,\%$ del total de 348 producciones. Es en el problema *P4'-Tablao flamenco* donde encontramos mayor número de planes de resolución Unidad base, de manera análoga a lo que ocurría en la secuencia 1, en la que era *P4- Coches* el problema con mayor número de ese tipo de planes de resolución. En el problema *P1'- Llaves robadas* se han categorizado 25 producciones (un $28,7\,\%$) como Unidad base. Por ejemplo, el resolutor 4ºH-I.1.2 plantea el plan de resolución mostrado en la Figura **5-37**.

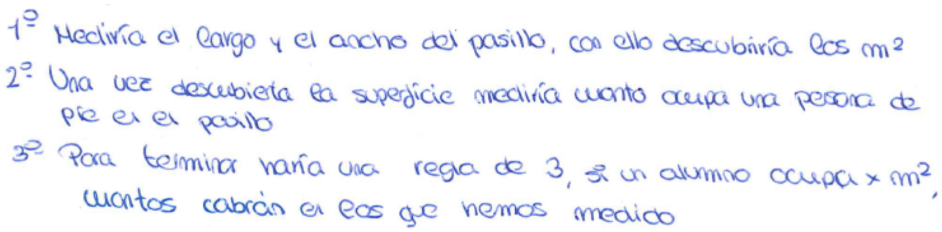

1º Mediría el largo y el ancho del pasillo, con ello descubriría los m²
2º Una vez descubierta la superficie mediría cuanto ocupa una persona de pie en el pasillo
3º Para terminar haría una regla de 3, si un alumno ocupa x m², cuantos cabrán en los que hemos medido

Figura 5-37.: Plan de resolución Unidad base para el problema *P1'- Llaves robadas.*

El resolutor I.1.2 plantea un proceso en tres partes: (1) calcular el área de la superficie del pasillo (rectangular) en metros cuadrados; (2) estimar qué área ocupa una persona de

pie; (3) razonar a partir de la razón de área del pasillo/área persona. En este último paso, utiliza de manera innecesaria un razonamiento proporcional mediante la regla de tres, cuando simplemente se trata de una razón de medidas.
En el problema *P2'- Ladrillos pintados* se encuentra el menor número de producciones categorizadas como Unidad base. Son 14 planes de resolución basados en la iteración del área ocupada por el elemento, un 16,1 % de las producciones de este problema. Es el caso de la producción del resolutor 4ºH-I.10.3, quien escribe:

> "En primer lugar, mediría la altura y la anchura del rectángulo donde están colocados los ladrillos [la franja de cada piso] y obtendría el área. Una vez hecho esto, mediría la altura y la anchura del ladrillo para [calcular el área y] después dividir el área del rectángulo entre [el área] lo que ocupa un ladrillo.De esta forma obtendría cuántos ladrillos caben en un rectángulo del edificio. Suponiendo que los cuatro [las franjas de cada piso] son iguales, multiplicaría el número de ladrillos que he obtenido anteriormente por cuatro. Así obtendría cuántos alumnos podrían participar porque equivale al mismo número de ladrillos."

Pese a algún descuido (el resolutor ha olvidado explicitar el procedimiento de cálculo del área del ladrillo), el proceso está descrito minuciosamente. Es posible que, a diferencia de otros problemas, el que la superficie del problema esté formada por cuatro franjas rectangulares haya influido en la elección de menos planes basados en Unidad base, pues implica calcular un área (la de la franja) que no es el "área total" del problema. Por otro lado, el resolutor I.10.3 sí responde a la pregunta indirecta, pues menciona la equivalencia entre número de ladrillos y número de alumnos. En otras resoluciones de *P2'- Ladrillos pintados* la respuesta se limita a proponer una forma de estimar el número de ladrillos.
En el problema P3'- Palomitas hay 25 planes de resolución Unidad base, un 28,7 % de las producciones del problema. Por ejemplo, el resolutor 4ºG-I.5.1 escribe:

> "Lo primero medir el tamaño [del área ocupada por] de una palomita. Lo segundo medir el espacio del aula [calcular el área]. Dividir el espacio del aula [la medida del área] entre el tamaño [la medida del área ocupada] de una palomita"

Pese a las imprecisiones y los procedimientos que quedan implícitos en la producción del resolutor I.5.1, el proceso es claro: división de medidas del área de la clase (rectangular) entre el área que ocupa una palomita. Otro resolutor, el 4ºG-I.5.3 plantea un plan muy similar, pero es más preciso cuando escribe "medir la base de una palomita".
En el problema *P4'-Tablao flamenco* 61 producciones fueron categorizadas como Unidad base, un 70,1 % del total en este problema. Hay numerosos ejemplos, todos basados en calcular el área del hall (rectangular) y el área de una mesa (rectangular) y dividir esas medidas. Por ejemplo, en la Figura **5-38** se puede leer el plan de resolución Unidad base del resolutor 4ºG-I.8.2.

- Primero ver lo qe mide una mesa y tambien lo qe mide el hall.
- Por último dividir lo que mide el hall entre lo qe mide la mesa para ver cuantos mesas hay.

Figura 5-38.: Plan de resolución Unidad base para el problema *P4'-Tablao flamenco.*

Densidad

En la secuencia 2 se han categorizado 73 producciones como Densidad, un $20,98\,\%$ del total de 348 producciones analizadas. Como en la secuencia 1 de la experiencia A1, es el tercer problema, *P3'- Palomitas*, en el que hay mayor número de planes de resolución basados en la densidad de los elementos en una subárea muestral. También es el cuarto problema, *P4'-Tablao flamenco*, en el que menos producciones han sido categorizadas como Densidad. En *P1'- Llaves robadas* se categorizaron 25 producciones como Densidad, un $28,7\,\%$. Es el caso del resolutor 4ºG-I.4.2, cuya producción transcrita es la siguiente:

> "Para empezar averiguaría cuántos alumnos hay en total sumando todas las clases, después sacaría las medidas del pasillo [se sobreentiende, por el procedimiento posterior, que se refiere al número de baldosas que contiene el pasillo] y cuántos alumnos caben por baldosa. Si por ejemplo supiéramos que tenemos 500 alumnos y 200 baldosas, sabríamos que, al caber dos personas por baldosa, 100 personas no cabrían y 400 sí"

Este plan de resolución tiene una peculiaridad que se repite bastante en *P1' – Llaves robadas*, y que está asociada a la ambigüedad que introduce la situación narrativa del enunciado: "Todos los alumnos están esperando ansiosos en el pasillo para entrar a clase porque la cafetería está cerrada y llueve a cántaros. ¿Cuántos alumnos caben en el pasillo del aulario?" (ver Figura **4-9**). La ambigüedad se debe a que no queda claro si la pregunta se refiere a cuántos alumnos hacen falta para llenar el pasillo o a cuántos alumnos hay por clase en las aulas del pasillo. En realidad, podemos tomar el plan de resolución del resolutor I.4.2 como clave para deshacer esa ambigüedad: en las clases a lo largo de un pasillo caben más estudiantes – porque hay mayor capacidad – que en el pasillo, por tanto, se debe estimar cuántos de esos alumnos (sea cual sea su número, estén esperando ya en clase o acudan después) harían falta para llenar el pasillo. El resolutor I.4.2 utiliza un plan de resolución basado en la densidad de estudiantes por baldosa. Muchos planes de resolución Densidad en este problema utilizan la baldosa como subárea muestral, por comodidad pues es una pequeña superficie físicamente delimitada dentro del pasillo, en la que es sencillo contar el número de personas que caben dentro. También es relativamente sencillo estimar cuántas baldosas cubren el pasillo. Pero otros planes de resolución Densidad, como el del resolutor

4ºG-I.8.5, delimitan una subárea muestral medida con unidades estándar, en este caso 1 metro cuadrado, como puede leerse en la siguiente transcripción:

> "(1) Sacaríamos las medidas del pasillo [ancho y largo, como menciona a continuación] para saber cuántos m^2 tiene éste. Multiplicamos el ancho por el largo. (2) Si sabemos o podríamos saber que en $1m^2$ caben unos 3 alumnos, si multiplicamos esos 3 alumnos por los m^2 [de la superficie del pasillo] sabemos cuántos alumnos caben."

En *P2'-Ladrillos pintados* hay sólo cuatro producciones categorizadas como Densidad. Los cuatro planes de resolución se basan en calcular la densidad de ladrillos delimitando como subárea muestral el rectángulo de la franja de ladrillos que coincide, debajo, con el ancho de la ventana. La fotografía que acompaña el problema y la explicación del resolutor 4ºG-I.9.4 ayudan a entenderlo mejor (Figura **5-39**).

1- En primer lugar podríamos aproximar el número de ladrillos que hay debajo de cada ventana entera que podrían ser unos 75,
2- En segundo lugar podríamos aproximar cuantas ventanas hay en la fachada que podrían ser unos 30
3- Multiplicando las ventanas por la cantidad de ladrillos que hay debajo de cada ventana podemos aproximar que hay 75 x 30 = 2.250 ladrillos, por lo tanto serían los alumnos que podrían participar puesto que cada alumno puede pintar un ladrillo.

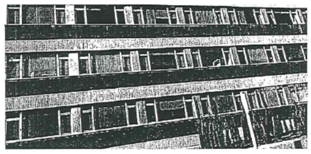


Figura 5-39.: Plan de resolución Densidad para el problema *P2'-Ladrillos pintados*.

El resolutor I.9.4 propone contar o estimar (utiliza la expresión "aproximar") el número de ladrillos que hay debajo de cada ventana (esto delimita una porción rectangular, del ancho de la ventana, de la franja gris de ladrillos que corre por debajo de las ventanas). Después cuenta las ventanas que cubren las cuatro franjas y multiplica el número de ladrillos en esa subárea muestral por el número de ventanas que recorren la franja de ladrillos en toda la fachada del edificio.

En *P3'-Palomitas* encontramos 39 producciones categorizadas como Densidad, un 44,8 % del total de producciones en este problema, la mayor proporción en la secuencia 2. Como ocurría con el pasillo de *P1'- Llaves robadas*, algunos planes de resolución se basan en la densidad por baldosa, por ejemplo, el del resolutor 4ºG-I.4.1 en la Figura **5-40**.

Como ocurría con los planes de resolución de *P3-Césped*, también aquí se advierte de la dificultad que plantea la variabilidad e irregularidad de las palomitas (en tamaño, en forma, o en distribución). El resolutor I.4.1 habla de "estimación aproximada, ya que las palomitas varían en tamaño". En su plan propone colocar "el mayor número de palomitas que caben en una baldosa" y luego contar las palomitas y el número de baldosas que cubren la clase, para finalmente terminar con una regla de tres (razonamiento proporcional).

Otros planes de resolución, como el del resolutor 4ºH-I.1.2 en la Figura **5-41**, se basan en la densidad estimada en una subárea de medida estándar, en este caso, 1 metro cuadrado.

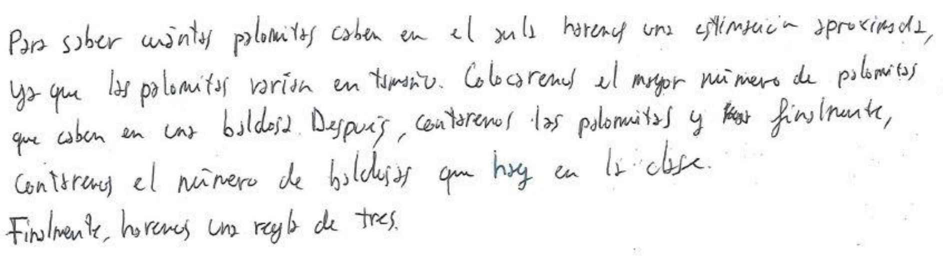

Para saber cuántas palomitas caben en el aula haremos una estimación aproximada, ya que las palomitas varían en tamaño. Colocaremos el mayor número de palomitas que caben en una baldosa. Después, contaremos las palomitas y finalmente, contaremos el número de baldosas que hay en la clase. Finalmente, haremos una regla de tres.

Figura 5-40.: Plan de resolución Densidad para el problema *P3'-Palomitas*.

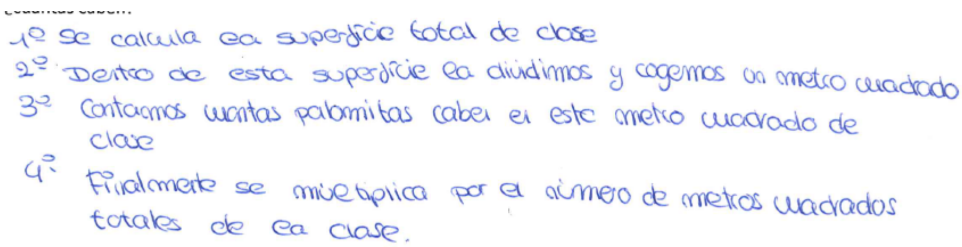

1º se calcula la superficie total de clase
2º Dentro de esta superficie la dividimos y cogemos un metro cuadrado
3º Contamos cuantas palomitas caben en este metro cuadrado de clase
4º Finalmente se multiplica por el número de metros cuadrados totales de la clase.

Figura 5-41.: Plan de resolución Densidad , en un metro cuadrado, para el problema *P3'-Palomitas*.

En *P4'-Tablao flamenco* sólo hay 5 producciones categorizadas como Densidad. Del mismo modo que con los coches de P4-Coches, no parece natural delimitar una subárea tan grande como para que quedan varias mesas, ni supone una gran ventaja en la resolución del problema, ya que el resolutor se puede preguntar: ¿y por qué no medir el área que ocupa la mesa, directamente? De ahí la gran proporción de planes de resolución Unidad base. Precisamente esta subárea muestral ha de ser lo suficientemente grande para que quepan varias mesas, y esto produce confusión entre los resolutores al no tener suficientemente interiorizadas las medidas del referente (este tipo de error se tratará en la sección 5.4). Es el caso del resolutor 4ºG-I.4.1, quien escribe que "colocaremos el mayor número de mesas en 2 m^2", cuando en esa subárea no cabría ninguna mesa de las que se dispone en la Facultad de Magisterio (Figura **5-42**).

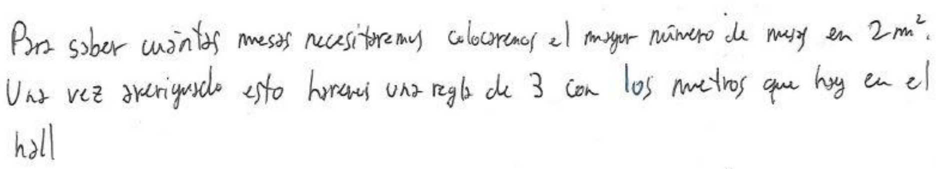

Para saber cuántas mesas necesitaremos colocaremos el mayor número de mesas en $2m^2$. Una vez averiguado esto haremos una regla de 3 con los metros que hay en el hall

Figura 5-42.: Plan de resolución Densidad para el problema *P4'-Tablao flamenco*.

Incompleta

En la secuencia 2 se han categorizado 78 producciones como Incompleta, un 22,41 % del

total. Se trata de una proporción de producciones incompletas mayor que la de la secuencia 1, que era de un 15, 63 %. En este caso, la distribución de producciones categorizadas como Incompleta es distinta a la secuencia 1, y las razones se apuntarán en los ejemplos mostrados a continuación, aunque terminarán de explicarse, en forma de resultados cuantitativos, en la siguiente sección. En efecto, el mayor número de producciones incompletas de la secuencia 2 se encuentra en los problemas *P1'- Llaves robadas* y *P2'- Ladrillos pintados*, mientras que en la secuencia 1 se encontraban en *P3- Césped.*
En *P1'- Llaves robadas* hay 26 producciones categorizadas como Incompleta, el 29, 9 % del total de producciones analizadas para este problema. Se trata del número más alto de producciones incompletas de todos los problemas de la secuencia 2. Una posible explicación se ha apuntado antes, cuando analizábamos los planes de resolución Densidad en este problema: la ambigüedad que introduce la estructura narrativa del problema induce a pensar que se pregunta por cuántos alumnos hay en las aulas en lugar de cuántos necesitamos para llenar el pasillo. Efectivamente, un análisis cualitativo de los casos nos muestra que la mayoría de producciones incompletas lo son por la confusión entre aulas y pasillo. Por ejemplo, en la producción del resolutor 4ºG-I.3.4 de la Figura **5-43** se detecta esa confusión, en efecto, el resolutor no llega a responder a la pregunta del problema. Escribe que hay que saber cuántas aulas hay por pasillo y cuántos alumnos por clase, pero luego propone calcular la medida (escribe longitud, ¿se ha confundido con área? ¿pensaba en otro procedimiento? Lo desconocemos porque no lo ha desarrollado lo suficiente) del pasillo. Termina escribiendo que hay que "conocer cuántos alumnos caben en el pasillo del aulario", pero no propone cómo y terminamos sin saber qué papel juegan la "medida del pasillo" ni la estimación del número de alumnos por clase. Lo único que es evidente en esta producción es la confusión entre conocer cuántos alumnos caben en el pasillo y cuántos alumnos hay en las clases.

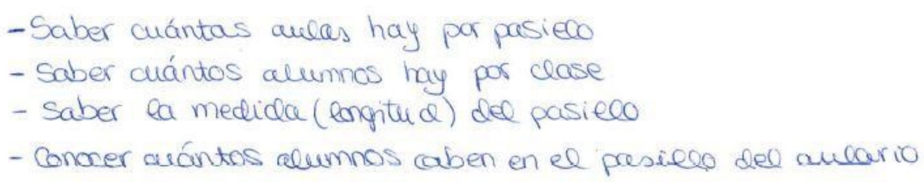

- Saber cuántas aulas hay por pasillo
- Saber cuántos alumnos hay por clase
- Saber la medida (longitud) del pasillo
- Conocer cuántos alumnos caben en el pasillo del aulario

Figura 5-43.: Plan de resolución Incompleto para el problema *P1'-Llaves robadas.*

Otro ejemplo de la misma confusión que lleva a producciones incompletas en este problema es la del resolutor 4ºG-I.3.3, quien escribe:

> "En primer lugar, contaría cuántas clases hay en el aulario. A continuación, cuántas personas caben dentro de cada clase. Teniendo en cuenta que todos los alumnos caben en el pasillo, y haciendo una estimación de las personas matriculadas, y midiendo el pasillo, sacaría el número de alumnos que cabrían en el pasillo del aulario."

De nuevo, el resolutor I.3.3 parece que quiera resolver dos problemas de estimación a la vez, el del número de personas que hay en las aulas y el de las personas que caben en el pasillo, y eso le hace mezclar procedimientos y cometer incoherencias que terminan por no conducir a una respuesta al problema. En efecto, el resolutor parece optar primero por estimar el número de personas que cabe en todas las aulas del pasillo (aunque sin indicar cómo hacerlo), afirmando que todos caben en el pasillo. Pero luego propone estimar "las personas matriculadas", sin especificar con qué fin, y continúa proponiendo medir el pasillo (¿el área?) para "sacar el número de alumnos que cabrían". Primero, no indica el procedimiento en el que se basaría para sacar dicho número. Y segundo, entra en contradicción con la primera parte de la producción, pues había escrito que los estudiantes que estimaría por aula caben en el pasillo, por lo que esa estimación hubiera sido suficiente según su primera aproximación.
En el problema *P2'- Ladrillos pintados* se han categorizado 23 producciones como Incompleta, un 26, 4 % de las producciones del problema. Es el segundo problema con el número más alto de producciones incompletas, y una hipótesis plausible es que se deba a que la pregunta esté formulada de manera indirecta y produzca cierta confusión entre alumnos y ladrillos. El estudio de casos refuerza la hipótesis porque ocurre en la mayoría de producciones incompletas. Un ejemplo de la posible confusión entre alumnos y ladrillos que induce la pregunta indirecta lo encontramos en la producción del resolutor 4ºG-I.3.3, como puede leerse en la Figura **5-44**. El resolutor primero propone "saber cuántos alumnos hay matriculados de magisterio" y luego afirma que a partir de las medidas de la fachada (¿de ancho? ¿de largo? ¿el área?) "sabemos cuántos ladrillos se necesitan", lo que es precisamente la estimación que debe argumentarse en un plan de resolución, pero que el resolutor no apoya en ningún modelo ni procedimiento. Para terminar, aún se confunde más con los dos elementos (personas y ladrillos) cuando propone "dividir el número de alumnos entre los ladrillos" (ratio de alumnos por ladrillo) y "contar cuántos alumnos no han podido decorar su ladrillo".

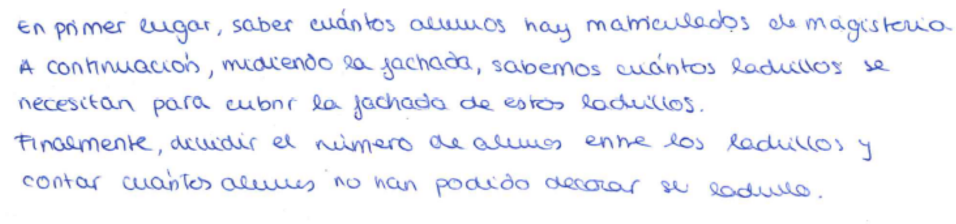

En primer lugar, saber cuántos alumnos hay matriculados de magisterio.
A continuación, midiendo la fachada, sabemos cuántos ladrillos se necesitan para cubrir la fachada de estos ladrillos.
Finalmente, dividir el número de alumnos entre los ladrillos y contar cuántos alumnos no han podido decorar su ladrillo.

Figura 5-44.: Plan de resolución Incompleto para el problema *P2'- Ladrillos pintados.*

Otro ejemplo de producción categorizada como Incompleta, la del resolutor 4ºG-1.2, es más directa, pero cae en la misma confusión: propone calcular "cuántos ladrillos grises hay en la fachada", sin explicar qué procedimiento seguiría; luego propone calcular "cuántos alumnos hay en la facultad"; por último, propone "dividir los ladrillos entre los alumnos de la facultad" (Figura **5-45**). Es la división inversa a la de la Figura **5-44**, pero como aquella, conduce a una razón (ladrillo por alumno) que no es la estimación demandada.
En el problema *P3'-Palomitas* hay 17 producciones categorizadas como Incompleta. La pro-

Primero calculamos cuántos ladrillos grises hay en la fachada. Luego cuántos alumnos hay en la facultad. Por último, dividir los ladrillos entre los alumnos de la facultad.

Figura 5-45.: Otro plan de resolución Incompleto para el problema *P2'-Ladrillos pintados.*

porción es el 19, 5 % del total, prácticamente igual que la proporción de incompletas en *P3-Césped* (un 19, 63 %). P3 era el problema con la proporción más alta de incompletas en la secuencia 1. Sin embargo, con una proporción igual, P3' es el tercero en la secuencia 2. La introducción de estructuras narrativas que generan ambigüedad en los dos primeros problemas de la secuencia 2 parece relacionarse con el número de producciones incompletas, dado que el resto de variables de los problemas (contextuales, de formato) P1' y P2' son isomorfas a los problemas P1 y P2. Esta es una hipótesis que deberá confirmarse en la siguiente sección. La mayoría de producciones incompletas en el problema *P3'-Palomitas* parecen tener relación, como ocurría con el césped, con la irregularidad de la forma de las palomitas, o con el desorden y heterogeneidad de su distribución. El haber aumentado la complejidad sintáctica del problema, con una situación narrativa que no conlleva ambigüedad, no afecta a la proporción de incompletas, que como hemos visto se mantiene igual que en su análogo P3. Un ejemplo de producción incompleta es la del resolutor 4ºG-I.2.3, que interpreta que las palomitas cubren la clase hasta el techo y escribe “caben tantas cuantos metros cúbicos hay en clase”, sin continuar explicando qué proceso seguiría para estimar esa cantidad.
Por último, en el problema *P4'-Tablao flamenco* hay 12 producciones incompletas, un 13, 8 % del total en el problema. Es el caso de la producción de la Figura **5-46**, del resolutor 4ºG-I.2.4, que propone calcular el área del Hall y luego “la aproximación [¿estimación?] de alumnos y profesores que haya” para así calcular “las mesas que necesitaríamos”. Pero no explica de qué manera vincula estimación de personas que caben en el hall con estimación del número de mesas para cubrirlo por completo.

Para poder calcularlo se tendrían que saber los m² que tiene el hall y la aproximación de alumnos y profesores que haya. De esta forma se calcularía las mesas que necesitaríamos.

Figura 5-46.: Plan de resolución Incompleto el problema *P4'-Tablao flamenco.*

Una vez finalizado el análisis y estudio de casos de los tipos de plan de resolución en la experiencia A1 (secuencia 1) y la investigación B (secuencia 2), en la siguiente sección se estudiará si existe una relación estadísticamente significativa entre los problemas y los tipos de plan de resolución.

5.2. Relación entre tipo de plan de resolución y características del contexto de los problemas de estimación

En esta sección se expone el análisis de la relación entre el tipo de plan de resolución más utilizado en cada problema y las características del contexto del problema. Se realiza a través de un test de dependencia entre variables nominales cualitativas. En el apartado 5.2.1 se analiza la relación entre la variable "tipo de plan de resolución" y la variable "contexto del problema" de la secuencia 1 (experiencia A1), dando respuesta al objetivo OI 2. Recordemos que las características del contexto de los problemas, consideradas como variable, fueron escogidas buscando la variabilidad de contraste, como se explicó en el Capítulo 4, en la sección dedicada al diseño de la secuencia. En el apartado 5.2.2 se analiza esa misma relación entre tipos de plan de resolución y variable de contexto para los problemas de la secuencia 2 (Investigación B), con el fin de verificar que la relación entre tipo de plan de resolución y características del contexto se mantiene en una secuencia alternativa con problemas de contexto isomorfo (objetivo OI 3). Finalmente, en el apartado 5.2.3, se analiza la relación entre la tasa de respuestas incompletas y la introducción de situaciones narrativas en el enunciado de los problemas de la secuencia 2 (objetivo OI4). Estos resultados fueron publicados en Ferrando, Segura y Pla-Castells (2020).

5.2.1. Relación entre tipo de plan de resolución y contexto de los problemas en la secuencia 1 de la experiencia A1

Recordemos que, dentro de la Investigación A, la experiencia A1 se llevó a cabo con una muestra de $N = 224$ futuros maestros. Del total de 896 producciones recogidas, se categorizaron 756 producciones en cuatro tipos de plan de resolución: Recuento, Linealización, Unidad Base y Densidad. Las 140 producciones restantes de categorizaron como Incompleta, por no desarrollar lo suficiente su respuesta como para ser consideradas un plan de resolución. Uno de los objetivos de la Investigación A, abordado a través de la experiencia A1, era encontrar una posible relación entre tipo de plan de resolución y contexto de los problemas de la secuencia 1 (OI 2). Para alcanzar este objetivo, en primer lugar, se ha realizado un análisis estadístico descriptivo y, posteriormente, se ha realizado un análisis inferencial. A continuación, explicamos las técnicas utilizadas y los resultados obtenidos. Como se quiere analizar la relación entre plan de resolución y contexto del problema, sólo se consideran las producciones de aquellos futuros maestros que fueron capaces de desarrollar un plan de resolución, por lo que las producciones categorizadas como Incompleta quedan fuera de este

Tabla 5-1.: Distribución de planes de resolución por problemas de la secuencia 1 para 756 producciones completas.

		Recuento	**Linealización**	**Unidad Base**	**Densidad**	**Total**
P1	Frecuencia	1	28	110	51	190
	% en P1	0,5 %	14,7 %	**57,9** %	26,8 %	100 %
P2	Frecuencia	6	92	71	21	190
	% en P2	3,2 %	**48,4** %	37,4 %	11,1 %	100 %
P3	Frecuencia	2	15	67	96	180
	% en P3	1,1 %	8,3 %	37,2 %	**53,3** %	100 %
P4	Frecuencia	4	31	160	1	196
	% en P4	2,0 %	15,8 %	**81,6** %	0,5 %	100 %
Total	Frecuencia	13	166	408	169	756
	% del total	1,7 %	22,0 %	54,0 %	22,4 %	100 %

análisis de dependencia entre variables.
Recordemos que la secuencia 1 fue diseñada buscando el contraste entre ciertos valores de la variable de contexto que son relevantes en este tipo de problemas: tamaño de los elementos (grande, mediano, pequeño); disposición de los elementos (ordenada, desordenada); tamaño de la superficie (grande, mediana, pequeña); forma de los elementos (regular, irregular). Los valores que caracterizaban el contexto de cada problema P1-P2-P3-P4 de la secuencia 1 aparecen recogidos en la Tabla **4-3**.
La Tabla **5-1** es una tabla de contingencia en la que se recogen los resultados que relacionan los tipos de resolución, en columnas, y los problemas - cada uno caracterizado por unos valores de contexto - en filas. Así, para cada uno de los cuatro problemas de la secuencia 1 se recoge el número de producciones categorizadas en cada plan de resolución. También se recoge el porcentaje de cada plan de resolución en relación con el número total de producciones completas para cada problema.
El análisis estadístico de estos datos se realizó con el software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS). Para confirmar la existencia de una relación estadísticamente significativa entre ambas variables - los problemas, caracterizados por su contexto, y los tipos de plan de resolución – se utilizó la prueba Chi-cuadrado de independencia de variables nominales, con $DF = 9$ y $N = 756$, a través del contraste de hipótesis. La hipótesis nula es que ambas variables son independientes, es decir, que la elección del plan de resolución es independiente de cada problema. La hipótesis alternativa es que existe dependencia entre el tipo de plan de solución y el problema, escogido con unos determinados valores de variable del contexto. Fijamos un nivel de significación $\alpha = 0,01$, obteniendo un valor de $\chi^2(9; 756) = 267{,}129$ con $p < 0,0001$, lo que nos llevaría a rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, hay cuatro celdas de la tabla de contingencia con valor menor que 5, lo que su-

Tabla 5-2.: Desviaciones porcentuales de las frecuencias observadas de la Tabla **5-1** respecto al valor que se esperaría sobre la base de la hipótesis nula.

	Recuento	**Linealización**	**Unidad Base**	**Densidad**
P1	$-69,4\,\%$	$-32,9\,\%$	$+7,3\,\%$	$+20,1\,\%$
P2	$+83,6\,\%$	+120,5 %	$-30,8\,\%$	$-50,6\,\%$
P3	$-35,4\,\%$	$-62\,\%$	$-31\,\%$	$+138,6\,\%$
P4	$+18,7\,\%$	$-28\,\%$	$+51,3\,\%$	$-97,7\,\%$

pone un 25 %, y como las frecuencias menores que 5 no deben exceder el 20 %, el resultado puede ser fiable o no. Para confirmar la fiabilidad, debemos basar nuestros resultados en la prueba de razón de verosimilitud Chi-cuadrado (*Likelihood Ratio Chi-Square test*, LR), que admite celdas con frecuencias inferiores a 5 (Özdemir y Eyduran, 2005; McHugh, 2013). Así, fijando un nivel de significación de $\alpha = 0,01$, el valor del test de razón de verosimilitud Chi-Cuadrado es $LR = 272,693$ con una significación asintótica (bilateral) menor a $0,0001$. Esto confirma que puede rechazarse la hipótesis nula (Howell, 2012); por tanto, existe una relación significativa entre el tipo de plan escogido y la variable contextual del problema.
Además, hemos medido la fortaleza de la correlación usando el coeficiente de contigencia de Pearson y la V de Cramer. El coeficiente de contingencia de Pearson tiene un valor de $0,511$ (en el rango entre 0 y $0,87$) con una significación igual a $0,001$, lo que indica que la relación entre el problema y tipo de plan de resolución es fuerte. Por otro lado, el valor de la V de Cramer es $V = 0,343$, con $p < 0,0001$. Debe tenerse en cuenta que el coeficiente V de Cramer tiende a producir medidas bajas de asociación entre variables; de hecho, es infrecuente observar valores de V próximos 1 y se puede considerar a 0,6 el valor máximo habitual (López-Roldán y Fachelli, 2015). Así, se considera que $0,343$ es un tamaño del efecto medio-alto. Por tanto, no sólo existe una correlación entre la variable de contexto y el tipo de plan de resolución, sino que la fortaleza de dicha asociación es media-alta.
En la Tabla **5-2** encontramos las desviaciones porcentuales de las frecuencias observadas de la Tabla **5-1** respecto al valor que se esperaría sobre la base de la hipótesis nula. Esta medida de la desviación respecto a lo esperado nos sirve de ayuda para interpretar la relación entre determinados valores del contexto de un problema, debido al diseño de la secuencia 1, y el plan de resolución escogido. A continuación, se detalla la interpretación de las siguientes asociaciones encontradas entre valores de variable de contexto de cada problema, y las componentes del plan de resolución, modelo inicial y estrategia:

- En el diseño de la secuencia 1 se escogieron los problemas *P2- Baldosas* y *P4- Coches* con el valor de la variable de contexto "distribución de los elementos" = ordenada (Tabla **4-3**). Se encuentra que la frecuencia del plan de resolución Linealización está un $120,5\,\%$ por encima de lo esperado en *P2- Baldosas*. Aunque está por debajo de lo esperado en el resto (lo que indica que Linealización se concentra en P2), en *P4-Coches* aparece con una frecuencia algo menos por debajo de lo esperado (−28 %) que en P1 (−32, 9 %) y, sobre todo, P3 (−62 %). De estos resultados se puede interpretar que el orden en la distribución de los elementos cuyo número hay que estimar se relaciona con el aumento de modelos iniciales unidimensionales. En otras palabras, los resolutores tienden a colocar por filas los elementos, para obtener una estimación lineal, cuando identifican o interpretan que éstos se distribuyen en el espacio de manera ordenada. Sin embargo, esto ocurre especialmente cuando la distribución de los elementos es obvia y visible en la propia situación real, es decir, cuando están presentes, como en *P2- Baldosas*. En el caso de *P4-Coches*, al ser elementos ausentes de la situación del problema (el aparcamiento no está lleno de coches), no es tan evidente la interpretación de esa distribución ordenada y, por tanto, se asocia con menor intensidad a Linealización.

- También parece haber una asociación entre la distribución ordenada de los elementos (*P2-Baldosas* y, con menor claridad, *P4-Coches*) y el uso del plan de resolución Recuento, pues aparece con una frecuencia de un +83, 6 % por encima de lo esperado en P2 y de un +18, 7 % por encima de lo esperado en P4. Se puede interpretar, por tanto, que el orden en la de los elementos cuyo número hay que estimar se asocia con estrategias de recuento. Los resolutores tienden a contar los elementos si los ven ordenados, especialmente cuando dichos elementos están presentes en el lugar real del problema (*P2-Baldosas*) y no deben simular ese recuento.

- Por el contrario, en el diseño de la secuencia 1 se escogieron los problemas *P1-Personas* y *P3-Césped* con valor de la variable de contexto “distribución de los elementos” = desordenada. En el caso de *P3-Césped*, el desorden de los elementos era claro por estar presentes en el lugar real del problema. Además, su distribución también se percibe claramente heterogénea, pues no hay una cantidad uniforme de césped en todo el espacio. Sin embargo, en el caso de *P1-Personas* dicha distribución desordenada no era tan clara por ser elementos que no están presentes en el lugar del problema (el porche no está repleto de estudiantes), por lo que el modelo inicial del resolutor podría ser más variable. En la Tabla **5-2** encontramos que, en los problemas P1 y P3, con distribución desordenada de los elementos, hay una frecuencia mayor de planes de resolución basados en un modelo inicial bidimensional (Unidad base y Densidad). Además, en P1 y P3 disminuye significativamente la frecuencia de planes de resolución basados en recuento o en linealización, que estaban asociados a contextos con distribución ordenada de los elementos. Por tanto, se interpreta que los resolutores tienden a construir un modelo inicial basado en magnitudes bidimensionales (superficies) y medida de áreas cuando identifican o interpretan que los elementos se distribuyen en el espacio de manera desordenada. De hecho, si afinamos dentro de los modelos iniciales bidimensionales, se asocia desorden con mayor frecuencia al plan de resolución Densidad, pues encontramos que está un +20, 1 % por encima de lo esperado en *P1- Personas* y un +138, 6 % por encima de lo esperado en *P3- Césped*.

- En el diseño de la secuencia 1 se escogió el problema *P4-Coches* con el valor de la variable de contexto "tamaño de los elementos" = grande. Se encuentra que la frecuencia del plan de resolución Unidad base está un $+51,3\,\%$ por encima de lo esperado en este problema. Esto apoya la interpretación de que un tamaño grande de los elementos a estimar – en este caso, los coches - se relaciona con producciones en las que el resolutor utiliza su área como unidad de medida de la superficie total.

- Por el contrario, un tamaño de los elementos pequeño, cuando estos se distribuyen en la superficie de manera desordenada, como ocurre en *P3-Césped*, se vincula con planes de resolución basados en la densidad de una subárea muestral. Como se ha indicado anteriormente, que en P3 el resolutor perciba con claridad el desorden e irregularidad en la distribución de las briznas de césped, y que además sean un elemento con un tamaño pequeño y forma bastante irregular, dificultando la medida de su área, son variables del contexto que parecen tener una relación más natural con el uso de una pequeña zona delimitada como muestra en la que estimar por recuento la densidad de briznas y luego proceder por un razonamiento de proporcionalidad. De ahí que sea el problema que concentra la mayoría de planes de resolución Densidad.

- El tamaño mediano de los elementos, cuando estos se distribuyen en la superficie de manera desordenada, como ocurre en *P1-Personas*, concuerda con la interpretación anterior sobre el tamaño del elemento grande asociado a Unidad base y el tamaño del elemento pequeño asociado a Densidad, pues en P1 el plan de resolución Unidad base es el más empleado (un $+7,3\,\%$ por encima de lo esperado) pero Densidad también tiene una frecuencia alta, un $+20,1\,\%$ por encima de lo esperado.

- No parece haber una relación clara entre el tamaño de la superficie y el tipo de plan de resolución.

En resumen, la relación entre cada problema de la secuencia 1, escogido según determinados valores de la variable de contexto, y el tipo de plan de resolución más frecuente, es significativa con un tamaño del efecto medio-alto, y puede interpretarse en términos de cómo afectan esos valores de la variable de contexto al modelo inicial de la distribución de los elementos o la estrategia para estimar su número. Un problema cuyos elementos son percibidos por el resolutor como ordenados en la superficie se relaciona con una mayor frecuencia de planes de resolución Linealización. Los problemas cuyos elementos son percibidos por el resolutor como desordenados en la superficie se relacionan con una mayor frecuencia de modelos iniciales bidimensionales. En particular, cuando el tamaño de los elementos es grande, este valor del contexto se asocia con planes de resolución Unidad base; y cuando el tamaño de los elementos es pequeño, se asocia con planes de resolución Densidad.

Tabla 5-3.: Distribución de planes de resolución por problemas de la secuencia 2 para 270 producciones completas.

		Recuento	**Linealización**	**Unidad Base**	**Densidad**	**Total**
P1'	Frecuencia	2	9	25	25	61
	% en P1'	3,3 %	14,8 %	**41,0** %	**41,0** %	100 %
P2'	Frecuencia	10	36	14	4	64
	% en P2'	15,6 %	**56,25** %	25 %	6,25 %	100 %
P3'	Frecuencia	1	8	61	5	75
	% en P3'	1,3 %	10,7 %	**81,3** %	6,7 %	100 %
P4'	Frecuencia	1	8	61	5	75
	% en P4'	1,3 %	10,7 %	**81,3** %	6,7 %	100 %
Total	Frecuencia	15	57	125	73	270
	% del total	5,6 %	21,1 %	46,3 %	27,0 %	100 %

5.2.2. Relación entre tipo de plan de resolución y contexto de los problemas en la secuencia 2 de la investigación B

El objetivo principal del diseño de la secuencia 2 fue, como se ha explicado, validar si las relaciones entre las características del contexto de un problema de estimación en contexto real y el tipo de plan de resolución se mantienen en secuencias alternativas a la secuencia 1. Con ello, queremos verificar que las relaciones encontradas en el apartado 5.2.1 no dependen de un contexto concreto (el porche y las personas; el espacio entre el gimnasio y la facultad con baldosas; la jardinera con césped; el aparcamiento y los coches) sino de los valores de la variable de contexto determinadas. Por ello, se diseñó la secuencia 2 que, desde el punto de vista del valor de la variable contextual, es isomorfa a la secuencia 1, y se realizó un análisis a partir de una tabla de contingencia homólogo al realizado en la primera secuencia.
Recordemos que la investigación B se llevó a cabo con una muestra de $N = 87$ futuros maestros. Del total de 348 producciones recogidas, se categorizaron 270 producciones en cuatro tipos de plan de resolución: Recuento, Linealización, Unidad Base y Densidad. Las 78 producciones restantes de categorizaron como Incompleta, por no desarrollar lo suficiente su respuesta como para ser consideradas un plan de resolución.
La Tabla **5-3** recoge, para cada uno de los cuatro problemas P1'-P2'-P3'-P4' de la secuencia 2, el número de producciones categorizadas en cada plan de resolución. También se recoge el porcentaje de cada plan de resolución en relación con el número total de producciones completas para cada problema.
El análisis estadístico de estos datos se realizó con el software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS). Se utilizó la prueba Chi-cuadrado de independencia de variables nominales, con $DF = 9$ y $N = 270$, a través del contraste de hipótesis. La hipótesis nula es

que ambas variables son independientes, es decir, que la elección del plan de resolución es independiente de cada problema. La hipótesis alternativa es que existe dependencia entre el tipo de plan de solución y el problema, escogido con unos determinados valores de variable del contexto. Fijamos un nivel de significación $\alpha = 0,01$, obteniendo un valor de $\chi^2(9; 270) = 143,526$ con $p < 0,0001$, lo que nos llevaría a rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, hay cinco celdas de la tabla de contingencia con valor menor que 5, lo que excede el 20 %, por lo que el resultado puede ser fiable o no. Para confirmar la fiabilidad, basamos el resultado en la prueba de razón de verosimilitud Chi-cuadrado. Así, fijando un nivel de significación de $\alpha = 0,01$, el valor del test de razón de verosimilitud Chi-Cuadrado es $LR = 135,953$ con una significación asintótica (bilateral) menor a $0,0001$. Por tanto, existe una relación significativa entre el tipo de plan escogido y la variable contextual del problema. Hemos medido la fortaleza de la correlación usando el coeficiente de contigencia de Pearson y la V de Cramer. El coeficiente de contingencia de Pearson tiene un valor de $0,589$ (en el rango entre 0 y $0,87$) con una significación igual a $0,001$, lo que indica que la relación entre el problema y tipo de plan de resolución es fuerte. Por otro lado, el valor de la V de Cramer es $V = 0,421$, con $p < 0,0001$, una fortaleza de asociación media-alta.
Pero no sólo se mantiene, para la secuencia 2, la existencia de una relación significativa entre características del contexto de los problemas y tipo de plan de resolución. Si se observan y comparan la Tabla **5-1** y la Tabla **5-3**, se comprueba con bastante claridad que la proporción de tipos de plan de resolución para cada problema P_i' es similar, con variaciones que no cambian la interpretación, a la que se obtuvo en cada problema isomorfo P_i.

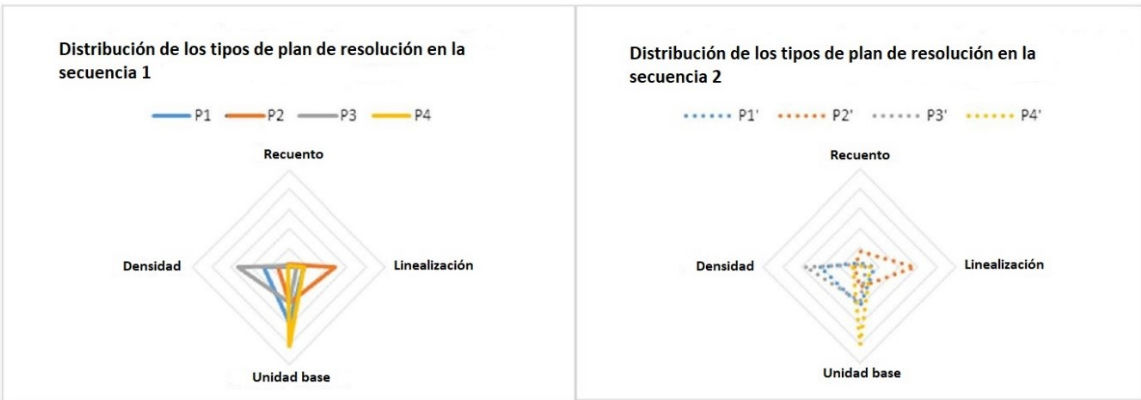


Figura 5-47.: Representación gráfica de los resultados del análisis del plan de resolución para las dos secuencias

La Figura **5-47** nos permite ver, a través de la representación gráfica, la similitud de las distribuciones de los tipos de plan de resolución en la secuencia 1 y la secuencia 2. Es muy relevante el hecho de que se mantenga la interpretación sobre cómo afectan los valores de la variable de contexto al plan de resolución. Nos permite confirmar que los resultados de la secuencia 1 no dependían de contextos concretos, sino del valor de determinadas carac-

terísticas relevantes (tamaño de los elementos, distribución de los elementos, forma de los elementos, etc.) que se habían identificado y escogido para el diseño de la secuencia.
En efecto, se observa que en *P2'-Ladrillos pintados*, de contexto isomorfo a *P2-Baldosas*, es decir, con una distribución ordenada de los elementos a estimar, de tamaño pequeño y forma regular, se mantiene la asociación con el plan de resolución Linealización. Un 48,4 % de las producciones de P2' se basaron en modelos iniciales unidimensionales, cuando la proporción sobre el total de producciones de la secuencia fue de solo un 21,1 %.
También se observa que en *P4'-Tablao flamenco*, de contexto isomorfo a *P4-Coche*s, es decir, con una distribución ordenada de los elementos a estimar (aunque no tan claramente percibida por el resolutor por tratarse de elementos ausentes del lugar del problema), y con tamaño de los elementos grande, se mantiene la asociación con el plan de resolución Unidad base (un 81,3 % del total de las producciones categorizadas en este problema).
Del mismo modo, en *P3'-Palomitas*, de contexto isomorfo a *P3-Césped*, es decir, con una distribución claramente desordenada y heterogénea de los elementos a estimar, cuyo tamaño es pequeño y de forma irregular, se mantiene la asociación con el plan de resolución Densidad.
En *P1'-Llaves robadas*, de contexto isomorfo a *P1-Personas*, es decir, con una distribución desordenada de los elementos a estimar, cuyo tamaño es mediano, hay una mayor proporción de planes de resolución Densidad que en P1, un 41 %, siendo el plan de resolución más utilizado por los resolutores junto a Unidad base. Esta mayor proporción de Densidad en P1' no sólo no cambia la interpretación de los resultados, sino que confirma la idea de que un tamaño mediano de los elementos, cuando se distribuyen de manera desordenada, se asocia tanto con Unidad base (vinculado al tamaño grande) como con Densidad (vinculado al tamaño pequeño).
En definitiva, las relaciones entre características del contexto y plan de resolución se mantienen, con independencia de las secuencias, es decir, de los lugares reales concretos en los que se sitúa el problema. Por tanto, se pueden asociar determinadas características del contexto a mayor uso de algunos tipos de plan de resolución.

5.2.3. Efecto de la complejidad de la estructura del enunciado de la secuencia 2 de la investigación B

El análisis de los resultados de la experiencia con la secuencia 2 nos ha permitido alcanzar el objetivo principal de la investigación B: validar que las relaciones entre contexto y plan de resolución de la secuencia 1 se mantienen cuando cambian los problemas, pero los contextos son similares. Pero, al diseñar la secuencia 2, como se ha explicado en el Capítulo 4, se introdujeron variaciones en la estructura sintáctica de los problemas. Esto permite emprender un estudio exploratorio en la Investigación B, abordando el objetivo OI 4: analizar el impacto que la estructura sintáctica del problema tiene en lo que habíamos definido anteriormente como rendimiento de éxito de los futuros maestros. Recordemos que el *éxito* es un primer indicador de rendimiento, que se asocia a las producciones completas (aquellas en las que se

Tabla 5-4.: Resumen de los resultados según el éxito de cada problema en la secuencia 1 y la secuencia 2.

		P1	**P1'**	**P2**	**P2'**	**P3**	**P3'**	**P4**	**P4'**
Éxito	NO	34	26	34	23	44	17	28	12
	SÍ	190	61	190	64	180	70	196	75
Total		224	87	224	87	224	87	224	87
Tasa de éxito		84,7 %	70 %	84,7 %	73 %	80,3 %	80,4 %	87,5 %	86,2 %

proponen planes de resolución). Este estudio exploratorio pretende abrir una vía de investigación en la línea de trabajos sobre la relación entre la estructura sintáctica del problema y el rendimiento en resolución de problemas verbales (Days y cols., 1976; Orrantia y cols., 2014), pero centrándonos en problemas de contexto real (Leiß y cols., 2019).

En la Tabla **4-4** se recogían los cambios en la variable de estructura de los problemas de la secuencia 2 respecto a los de la secuencia 1. En *P1'-Llaves robadas* se introduce mayor complejidad sintáctica en el enunciado mediante una situación narrativa breve que añade ambigüedad a la pregunta, pues como vimos en el estudio de casos de los planes de resolución de este problema, genera cierta confusión entre si lo que se pide es el número de personas que hay en las aulas o el número de personas que pueden llenar el pasillo. En *P2'-Ladrillos pintados* se introduce también una situación narrativa breve que implica formular la pregunta de manera indirecta, pues se pregunta por el número de estudiantes que se necesitan para pintar los ladrillos, pero los elementos cuyo número hay que estimar son los ladrillos. En *P3'–Palomitas* y *P4'-Tablao flamenco* se introduce mayor complejidad sintáctica en el enunciado mediante una situación narrativa que no añade ambigüedad a la situación del problema. Nos preguntamos si modificar estas variables de estructura de los problemas de la secuencia 2 afectará negativamente a la capacidad de los futuros maestros de desarrollar un plan de resolución.

Responder a esta pregunta supone encontrar si existe una relación entre la variable de estructura y el rendimiento de éxito en resolución de problemas de estimación en contexto real. Con ese fin, definiremos la *tasa de éxito de un problema* como la proporción de planes de resolución (es decir, excluyendo las producciones incompletas) respecto al total de producciones recogidas en el problema. Se trata de una medida que permite comparar el "éxito" en los problemas P1-P1', P2-P2', P3-P3' y P4-P4'. Para establecer estas comparaciones entre los problemas de las dos secuencias haremos un análisis de las diferencias en las proporciones problema a problema. La Tabla **5-4** resume las frecuencias de las producciones completas e incompletas para cada problema en cada secuencia, y mide la tasa de éxito de cada problema de la secuencia 1 y la secuencia 2.

Fijamos un nivel de significación $\alpha = 0,05$. Para analizar la comparación de la tasa de éxito de cada par de problemas isomorfos, se establece como hipótesis nula que no hay diferencia entre la tasa de éxito de un problema P_i y de su isomorfo P'_i. Considerando una prueba z de contraste unilateral derecho de proporciones, la hipótesis nula puede rechazarse para los pares de problemas P1-P1' (con $z = 2,9503$ y $p = 0,00159$) y P2-P2' (con $z = 2,3035$ y $p = 0,01072$). Sin embargo, para los pares de problemas P3-P3' y P4-P4' no se puede rechazar la hipótesis nula, pues las tasas de éxito son muy similares, como se observa claramente en la Tabla **5-4**.

Por lo tanto, introducir mayor complejidad sintáctica en el enunciado de los problemas de estimación en contextos reales cercanos a los futuros maestros sólo tiene impacto en su rendimiento de éxito cuando estas situaciones narrativas introducen cierta ambigüedad en la pregunta del problema (como ocurre con *P1'-Llaves robadas*), o cuando implican que la pregunta se formule de manera indirecta (como ocurre con *P2'- Ladrillos pintados*).

5.3. Evolución de los planes de resolución individual a las resoluciones grupales e in situ

Esta sección pone el foco en las resoluciones completas desarrolladas por los futuros maestros en el lugar real de los problemas durante la experiencia A2. En el apartado 5.3.1 se presentan los resultados de la categorización de los tipos de resolución, adaptando las categorías de plan de resolución individual a resoluciones grupales *in situ*, abordando así el objetivo OI 5. En el apartado 5.3.2 se analiza la evolución de los planes de resolución individuales a las grupales para determinar cuál es la influencia del trabajo en grupo y del trabajo realizando mediciones *in situ*. En concreto, se compararán los tipos de resolución empleados por los grupos en la experiencia A2 con los tipos de plan de resolución de los miembros del grupo en la experiencia A1, identificando qué tipos de acuerdos se han tomado y cómo se ha gestionado el consenso en la resolución grupal. También se estudiará qué aspectos del trabajo en el lugar del problema afectan a las resoluciones del grupo. Las preguntas C1 y C2 del cuestionario pos-experiencia nos permitirán completar este análisis cualitativo con las reflexiones recogidas sobre el trabajo en grupo y en el lugar real del problema. Esto responde al objetivo OI 6.

En el apartado 5.3.3 se exponen los resultados de la categorización de factores de complejidad para los planes de resolución individuales de la experiencia A1 y para las resoluciones grupales e *in situ* de la experiencia A2. Esto permite comparar los factores de complejidad en planes de resolución y resoluciones completas. Además, se identifica qué características del contexto real promueven que los estudiantes incluyan determinados factores de complejidad, tanto en los planes de resolución individual como en las resoluciones grupales. Se completa, por tanto, el objetivo OI 7. Los resultados de este apartado se publicaron en Segura, Ferrando y Albarracín (2021).

5.3.1. Tipos de resoluciones en grupo e in situ

Recordemos que en la experiencia A2, los mismos 224 futuros maestros que plantearon planes de resolución para los cuatro problemas de la secuencia 1, se volvieron a enfrentar a la secuencia 1 formando $N = 62$ grupos de entre 3 y 5 personas. En la experiencia A2 los grupos no debían plantear un plan de resolución, sino una resolución efectiva, que incluyera una estimación numérica del número de elementos que caben en la superficie del problema, pudiendo realizar para ello mediciones en los lugares físicos reales en los que se ubicaban los cuatro problemas.
Como se explicó en el Capítulo 4, durante el proceso de categorización de las 248 producciones recogidas en la experiencia A2 se empleó el mismo instrumento de análisis basado en los componentes de modelo inicial y estrategia asociada. La misma categorización utilizada en los planes de resolución era aplicable en este análisis con una fiabilidad muy alta. Con la excepción de la categoría Recuento, que no aplicó en ninguna producción, se encontraron las mismas categorías de lo que, en esta experiencia, denominaremos *tipos de resolución*: Linealización, Unidad base y Densidad. También se categorizaron algunas resoluciones como Incompleta. La diferencia con el análisis de tipos de plan de resolución descrito en el apartado 5.1.1, como se verá en los ejemplos que mostraremos a continuación, es que en las producciones recogidas en la experiencia A2 los procedimientos matemáticos se ejecutan y no sólo aparecen como una propuesta.
A continuación, presentamos los resultados del análisis cualitativo y descriptivo de los tipos de resolución de la experiencia A2. El análisis cualitativo no será exhaustivo porque es similar al descrito para los planes de resolución de la experiencia A1.

Linealización

Se han categorizado 14 producciones grupales como resolución basada en la linealización, un 6 % del total. La mitad de ellas en *P2- Baldosas*, y 4 en *P4-Coches*. Un ejemplo de resolución categorizada como Linealización es el del grupo 4ºI- G2. En la Figura **5-48** observamos que reducen el espacio del problema a un modelo inicial de dos magnitudes lineales, dos filas de ladrillos [baldosas pequeñas], a lo largo y a lo ancho. Miden la longitud con una unidad estándar, el metro. El procedimiento matemático asociado a este modelo inicial unidimensional es la densidad lineal: cuentan cuántas baldosas caben a lo largo en un metro, y cuántas baldosas caben a lo ancho en un metro. Esto les permite estimar el número de baldosas en la fila que recorre el largo del espacio, y el número de baldosas en la fila que recorre el ancho del espacio. Finalizan realizando un producto cartesiano para pasar de las estimaciones lineales a una estimación numérica del número de baldosas en toda la superficie.

Unidad Base

Se han categorizado 141 producciones grupales como Unidad base, un 57 % del total de

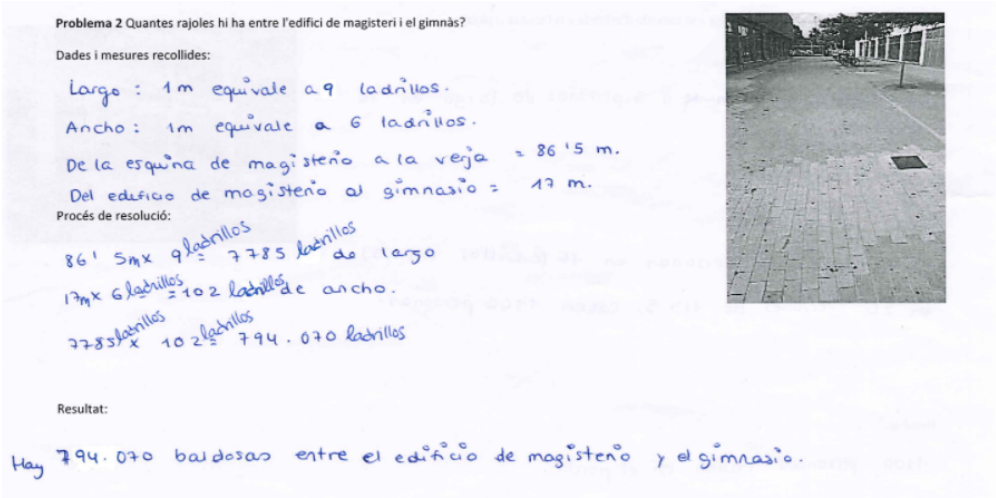


Figura 5-48.: Resolución grupal e in situ categorizada como Linealización para el problema *P2-Baldosas*.

producciones recogidas en la experiencia A2. La mayor frecuencia de este tipo de resolución se encuentra en los problemas *P2-Baldosas* (49 resoluciones) y en *P4-Coches* (58 resoluciones, un 93, 6 % de las producciones de este problema).

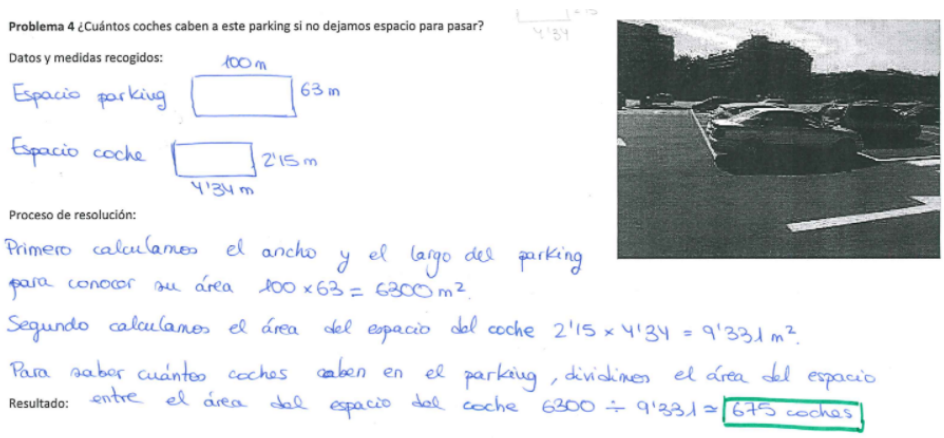
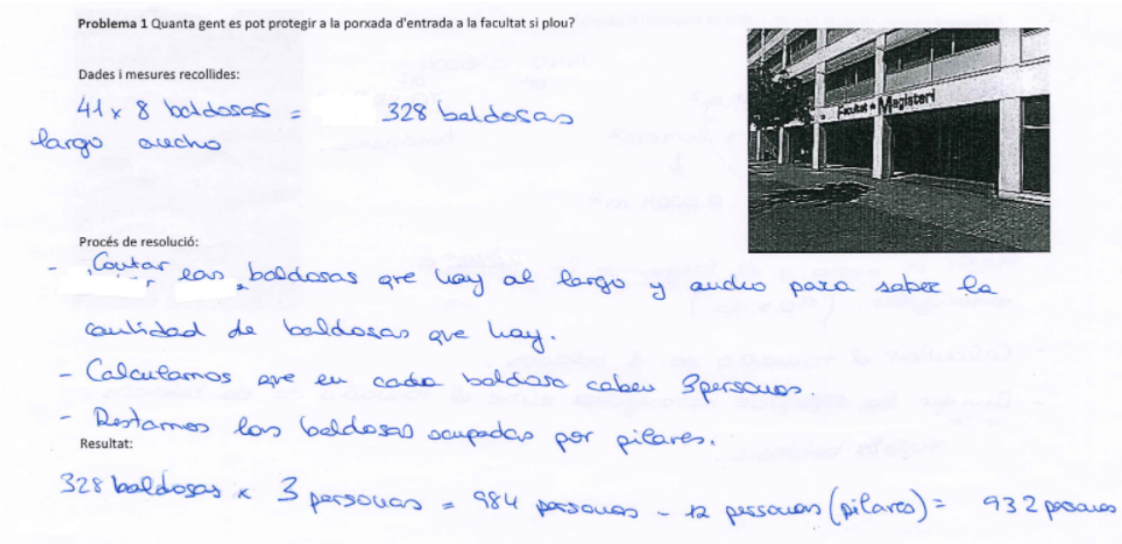


Figura 5-49.: Resolución grupal e in situ categorizada como Unidad base para el problema *P4-Coches*.

En la Figura **5-49** encontramos un ejemplo de resolución categorizada como Unidad base. Se trata de una producción del grupo 4ºD – G6, para el problema *P4-Coches*. Se observa cómo han establecido un modelo inicial del espacio real muy sencillo: una superficie rectangular para el aparcamiento y una superficie rectangular para el espacio ocupado por el coche, que se distribuye por la superficie del aparcamiento hasta completarla, sin seguir un orden en la distribución. Se miden las áreas de la superficie total y de la superficie de la unidad base (el coche), y luego, “para saber cuántos coches caben en el parking, dividimos el área del espacio [del aparcamiento] entre el área del espacio del coche".

Densidad

Se han categorizado 89 producciones grupales como Densidad, un 36 % del total. 47 corresponden al problema *P1-Personas*, y 37 al problema *P3-Césped*.



Problema 1 Quanta gent es pot protegir a la porxada d'entrada a la facultat si plou?

Dades i mesures recollides:

41 x 8 baldosas = 328 baldosas
largo ancho

Procés de resolució:

- Contar las baldosas que hay al largo y ancho para saber la cantidad de baldosas que hay.
- Calculamos que en cada baldosa caben 3personas.
- Restamos las baldosas ocupadas por pilares.

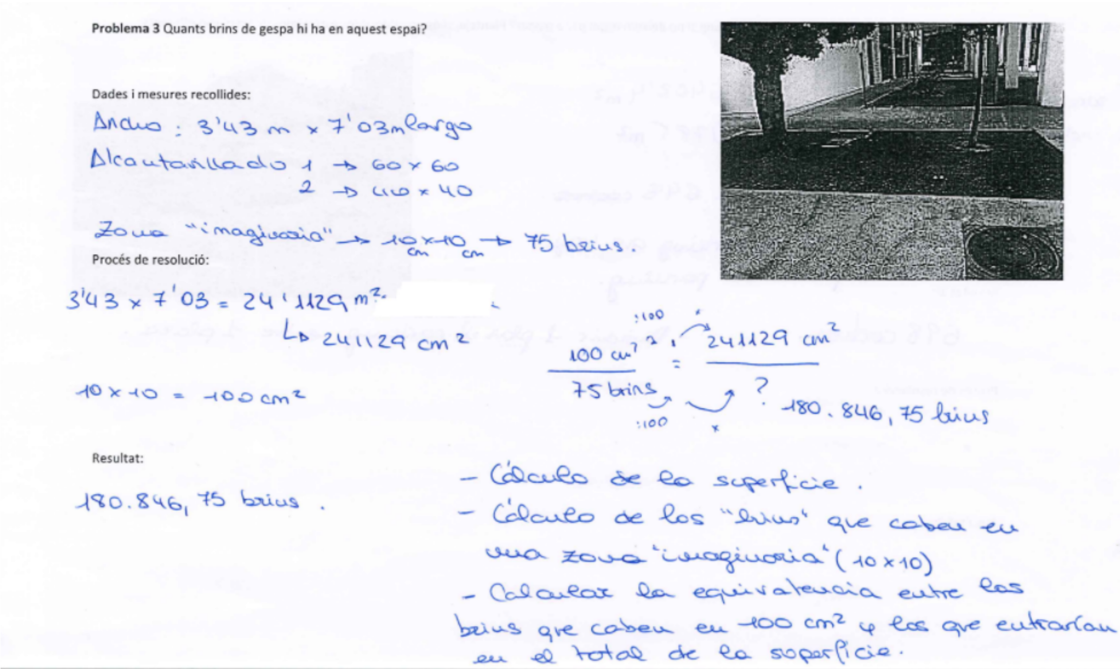
Resultat:

328 baldosas x 3 personas = 984 personas - 12 personas (pilares) = 932 personas

Figura 5-50.: Resolución grupal e in situ categorizada como Densidad para el problema *P1-Personas*.

Un ejemplo para *P1-Personas* es el de la producción del grupo 4ºI- G6. En la Figura **5-50** observamos cómo el grupo ha identificado que la superficie rectangular del porche está cubierta por grandes baldosas, lo que utilizan para establecer un modelo inicial en el que se considera la baldosa como subárea muestral, en la que caben 3 personas. Se considera, por tanto, la superficie del porche como un área en la que se puede establecer una partición por rectángulos (las baldosas) en las que colocar a las personas de manera uniforme (tres por baldosa). El grupo G6 cuenta las baldosas a lo largo y a lo ancho para encontrar el número de baldosas que cubren la superficie del porche. Una vez sabe cuántas veces cabe esta subárea muestral en el área total, sólo deben multiplicar este número por el número de personas que caben en una baldosa. En esta resolución, además, han restado 12 personas, que corresponden a las cuatro baldosas ocupadas por los cuatro pilares que pueden verse en la fotografía de la Figura **5-50**.

En la Figura **5-51** encontramos un ejemplo de resolución categorizada como Densidad para el problema *P3-Césped*. Se trata de la producción del mismo grupo G6. El grupo identifica unos obstáculos sin césped (dos alcantarillas) y calcula su área para descontarlos del área total de la jardinera. Se trata de un factor de complejidad para ganar precisión en la estimación, pero sobre este aspecto de las resoluciones nos centraremos en el apartado 5.3.3. El modelo de la resolución se basa en calcular el área "útil" de la jardinera rectangular ($241129cm^2$) y luego determinar una subárea muestral en la que calcular una densidad. El G6 ha llamado a esta subárea muestral, una superficie cuadrada de 10 centímetros de lado, "zona imaginaria". Es una forma de aludir al carácter de muestra arbitraria de esta zona que han determinado para contar cuántas briznas de césped hay (cuentan 75 briznas). A continuación, vemos que utilizan una proporción de razones (que llaman "equivalencia entre las briznas que caben en $100cm^2$ y las que cabrían en el total de la superficie" de $241129cm^2$) para dar una estimación numérica del número total de briznas de césped que cubren la jardinera.



Problema 3 Quants brins de gespa hi ha en aquest espai?

Dades i mesures recollides:

Ancho : 3'43 m × 7'03 m largo

Alcantarillado 1 → 60 × 60

2 → 40 × 40

Zona "imaginaria" → 10 cm × 10 cm → 75 brins.

Procés de resolució:

3'43 × 7'03 = 24'1129 m²

→ 241129 cm²

10 × 10 = 100 cm²

$\frac{100\ cm^2}{75\ brins} = \frac{241129\ cm^2}{?}$

? : 180.846, 75 brins

Resultat:

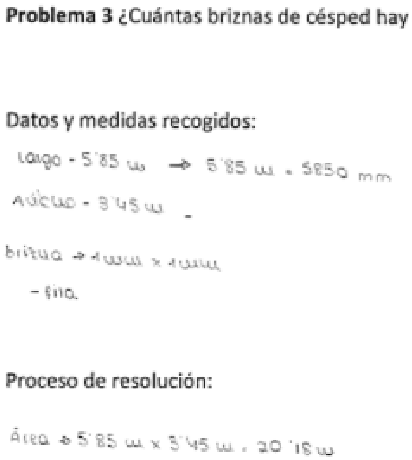
180.846, 75 brins.

- Cálculo de la superficie.
- Cálculo de los "brins" que caben en una zona "imaginaria" (10 × 10)
- Calcular la equivalencia entre los brins que caben en 100 cm² y los que entrarían en el total de la superficie.

Figura 5-51.: Resolución grupal e in situ categorizada como Densidad para el problema *P3-Césped*.

Incompleta

Por último, se han categorizado solamente 4 producciones como Incompleta, un 4 % del total. De ellas, tres corresponden al problema *P3-Césped* y una a *P2-Baldosas*. Una de las producciones categorizadas como Incompleta es la del grupo 4ºK- G6, en la que, como puede observarse en la Figura **5-52**, se calcula el área de la jardinera, pero no se ejecuta ningún procedimiento que lleve a una estimación del número de briznas de césped. Las otras tres producciones categorizadas como Incompleta son análogas: en todas ellas se calcula el área de la superficie total pero no se desarrolla ningún procedimiento matemático que conduzca a la estimación numérica del número de elementos.



Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Datos y medidas recogidos:

Largo - 5'85 m → 5'85 m = 5850 mm

Anchura - 3'45 m

brizna → 1mm x 1mm

- fina.

Proceso de resolución:

Área → 5'85 m x 3'45 m = 20'18 m

Figura 5-52.: Resolución grupal e *in situ* categorizada como Incompleta para el problema *P3-Césped*.

5.3.2. Influencia del trabajo in situ y en grupo en la evolución de los planes de resolución individuales a las resoluciones grupales

Recordemos que en la experiencia A2 participaron los mismos 224 futuros maestros que en la experiencia A1, enfrentándose a la misma secuencia 1 de cuatro problemas de estimación en contexto real, pero esta vez en grupos de entre 3 y 5 personas y trabajando en el lugar real de cada problema. Una vez analizados los tipos de resolución de las 248 producciones realizadas por los $N = 62$ grupos de futuros maestros, nuestro objetivo es analizar cómo las resoluciones grupales han cambiado respecto a los planes de resolución individuales de los miembros del grupo.

El primer paso en este análisis es comparar, para cada problema, la proporción de cada tipo de plan de resolución de la experiencia A1, recogida en la Tabla **5-1**, con la proporción de cada tipo de resolución grupal de la experiencia A2. Así, la Tabla **5-5** recoge, para cada uno de los cuatro problemas P1-P2-P3-P4 de la secuencia 1, el número de producciones categorizadas en cada tipo de resolución, excluyendo por tanto las cuatro producciones incompletas. También se recoge el porcentaje de tipo de resolución en relación con el número total de producciones completas para cada problema.

Si uno observa la Tabla **5-5**, encuentra que algunas de las relaciones entre características del contexto del problema y tipo de resolución se mantienen. En el caso de *P3-Césped*, el desorden de la distribución del césped y su tamaño pequeño e irregular se siguen vinculando a Densidad como tipo de resolución más utilizado por los grupos de futuros maestros (un $62,7\,\%$ de las resoluciones del problema). El tamaño grande de los elementos (coches) en *P4-Coches* también continúa vinculándose con la Unidad base, con un $93,5\,\%$ de las resoluciones categorizadas en esta tipología. La distribución ordenada de las baldosas, de tamaño

Tabla 5-5.: Distribución de tipos de resolución por problemas de la secuencia 1 para las 244 producciones completas de la experiencia A2.

		Linealización	**Unidad Base**	**Densidad**	**Total**
P1	Frecuencia	1	14	47	62
	% en P1	1,6 %	22,6 %	**75,8** %	100 %
P2	Frecuencia	7	49	5	61
	% en P2	11,5 %	**80,3** %	8,2 %	100 %
P3	Frecuencia	2	20	37	59
	% en P3	3,4 %	33,9 %	**62,7** %	100 %
P4	Frecuencia	4	58	0	62
	% en P4	6,5 %	**93,5** %	0,0 %	100 %
Total	Frecuencia	14	141	89	224
	% del total	25,7 %	57,8 %	36,5 %	100 %

pequeño y forma regular, también se asocia con un incremento de resoluciones basadas en la linealización, pero en la experiencia A2 este efecto es muy moderado (un $11,5\,\%$ de las resoluciones), y la mayoría de grupos han optado por resoluciones Unidad base. En el caso de *P1-Personas*, la distribución desordenada de elementos de tamaño mediano se sigue vinculando a Unidad base y Densidad, pero esta vez, al contrario que en la experiencia A1, es Densidad el tipo de resolución mayoritario (un $75,8\,\%$ de las resoluciones). Por tanto, aunque las asociaciones se mantienen, lo hacen en distinto grado, y con algunas diferencias en *P1-Personas* y *P2-Baldosas* que deben ser explicadas, como se verá a continuación, por algunos factores del contexto real del problema que son percibidos cuando se trabaja *in situ*.

Influencia del trabajo en el lugar real del problema en la resolución grupal

Un análisis comparativo entre la **5-1** y la Tabla **5-5**, mediante la comparación de proporciones, combinado con un análisis cualitativo que ayuda a interpretar estos resultados estadísticos, apoyado en las reflexiones de los propios resolutores sobre el trabajo *in situ* recogidas en el cuestionario post-experiencia, nos permitirá discutir la influencia que ha tenido el trabajo empírico en el lugar real del problema para los problemas de la secuencia 1.
La primera diferencia notable entre la **5-1** y la Tabla **5-5** es que, como ya hemos indicado, ninguna resolución grupal de la experiencia A2 ha sido categorizada como Recuento. Es cierto que en la experiencia A1 solamente 13 planes de resolución se categorizaron como Recuento (Tabla **5-1**), pero los resultados de la experiencia A2, que tuvo carácter empírico, porque los resolutores trabajaron midiendo y realizando estimaciones numéricas en el lugar real de los problemas, confirma la inviabilidad de este tipo de procedimiento para problemas en los que el número a estimar es muy grande. La percepción, en el lugar del problema, del

tamaño del espacio a estimar, y de la gran cantidad de elementos que caben, es un factor determinante que explica que ningún grupo haya optado por buscar una estimación a través del recuento, ni siquiera en los problemas en los que los elementos están presentes en el lugar del problema, *P2- Baldosas* y *P3- Césped*.

En *P1-Personas* hay un claro descenso del uso de Unidad base en las resoluciones grupales (22, 6 %) respecto de los planes de resolución individuales (57, 9 %, ver Tabla **5-1**). El tipo de resolución que se beneficia es la Densidad, que pasa del 26, 8 % en los planes individuales al 75, 8 % en las resoluciones grupales. Una prueba z de contraste unilateral derecho de proporciones nos permite asegurar que el cambio en la proporción de Unidad base en *P1-Personas* es significativo, fijado un nivel de significación $\alpha = 0,01$ (con $z = 4,8$ y $p < 0,0001$). El análisis cualitativo de las resoluciones, y las respuestas recogidas a la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia (ver R4 en la Tabla **5-6**), nos permitirán explicar qué aspectos del lugar real del problema influyen en este cambio del uso de Unidad base de los planes de resolución individual a las resoluciones grupales e *in situ*.

En *P2-Baldosas*, el uso de Linealización disminuye claramente en las resoluciones de la experiencia A2, pasando del 48, 4 % de los planes de resolución individuales (Tabla **5-1**) al 11, 5 % de las resoluciones grupales. El tipo de resolución que se beneficia es la Unidad base, que pasa del 7, 4 % de los planes de resolución individual al 80, 3 % de las grupales. Una prueba z de contraste unilateral derecho de proporciones nos permite asegurar que el cambio en la proporción de Linealización en *P2-Baldosas* es significativo, fijado un nivel de significación $\alpha = 0,01$ (con $z = 5,1$ y $p < 0,0001$). El análisis cualitativo de las resoluciones grupales no aclara las razones del cambio, pero algunas respuestas a la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia (ver R5 en la Tabla **5-6**) sí han permitido identificar qué aspectos del lugar real del problema han influido en el descenso del uso de Linealización.

En los problemas *P3-Césped* y *P4-Coches*, como ya se ha indicado, no hay diferencias significativas en la proporción del uso de los tipos de resolución respecto a los planes de resolución individuales. Esto nos permite interpretar que, durante la experiencia A2, en los lugares reales de los problemas P3 y P4 no hubo aspectos que condicionaran las resoluciones respecto a los planes de resolución de la experiencia A1. Esta interpretación se confirma con los resultados del cuestionario post-experiencia, ya que no se han recogido respuestas a C1 que aludan a la influencia del trabajo en el lugar real del problema para P3 y P4 (ver Tabla **5-6**).

Además de comparar los tipos de resolución y de plan de resolución, un aspecto importante de la influencia del trabajo grupal e *in situ* en la resolución de problemas de estimación real que debemos analizar es si trabajar de manera grupal, en el lugar real del problema, ayuda a mejorar el rendimiento. En la experiencia A1 se categorizaron como Incompleta 140 de las 896 producciones. La tasa de éxito de la secuencia 1 en la experiencia A1 fue, por tanto, de un 84, 38 %. En la experiencia A2, sin embargo, se categorizaron como Incompleta sólo 4 de las 248 producciones. La tasa de éxito de la secuencia 1 en la experiencia A2 fue de un 98, 4 %. Al analizar la comparación de las tasas de éxito para cada muestra (planes de resolución individuales y resoluciones grupales) mediante una prueba z de contraste unilateral derecho de proporciones, se puede rechazar la hipótesis nula (no hay diferencia entre la tasa de éxito) con una significación de $0,01$ (con $z = 5,9$ y $p < 0,0001$). Se puede inferir, por tanto, que el trabajo en el lugar del problema, y en grupo, es una herramienta de andamiaje que facilita la resolución de problemas de estimación contextualizados. Este resultado también se ve respaldado por algunas reflexiones de los resolutores recogidas en la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia (R6, R7 y R9 de la Tabla **5-6**), como se explicará a continuación.

En efecto, el cuestionario post-experiencia estaba compuesto por tres preguntas abiertas para recoger reflexiones de los resolutores sobre las experiencias A1 y A2. La primera pregunta, C1, era la siguiente:

> C1. ¿Medir in situ ha cambiado tu opinión sobre cómo resolver de la mejor manera posible alguno de los problemas? Explica en qué te ha influido a ti o al grupo hacer mediciones y en qué problemas esto os ha inducido a proponer una estrategia distinta a la que habías presentado de forma individual.

Las respuestas a esta pregunta permiten complementar el análisis descriptivo anterior, encontrando algunas claves que ayudan a interpretar los cambios de uso de resoluciones en P1 y P2, así como el incremento de la tasa de éxito en la experiencia A2. Como se explicó en el Capítulo 4, las $N = 105$ respuestas se categorizaron en nueve categorías de respuesta. Los resultados de esta categorización son los siguientes:

Tabla 5-6.: Frecuencia de las categorías de respuesta a la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia para N = 105 futuros profesores.

Categoría de respuesta	Frecuencia
R1. Incompleta / no contesta a la pregunta.	11
R2. El trabajo en el espacio del problema le ha permitido percibir/visualizar la situación del problema con claridad: considerar el tamaño del espacio, el gran número de elementos y observar los posibles obstáculos.	25
R3. Explica que el hecho de poder concretar las estimaciones mediante la realización de mediciones, así como de poder hacer pruebas en el lugar del problema, les ha llevado a ver que hay estrategias que no se pueden aplicar o a buscar otras más eficientes/precisas.	23
R4. Explica que al resolver *P1-Personas* en el porche han visto grandes baldosas, que no se ven en la fotografía del enunciado, y que eso les permite ganar en sencillez y rapidez si las utilizan como subárea de Densidad, ya que ni siquiera tienen que medir.	12

R5. Explica que en el lugar donde se encuentra el problema *P2-Baldosas* observan irregularidades en la disposición de las baldosas, que no habían considerado en la resolución individual y que les influye para cambiar el tipo de resolución.	6
R6. Considera que trabajar en el lugar del problema y con datos numéricos obtenidos de las mediciones es más fácil, y que los problemas abiertos sin datos son más abstractos y difíciles.	25
R7. Dice que trabajar en grupo en el lugar del problema permite comparar los tipos de resolución y comprobar cuál es el mejor.	6
R8. Afirma que el trabajo *in situ* le ha influido, pero no da las razones.	17
R9. Dice que trabajar *in situ* haciendo mediciones aumenta la motivación, la utilidad y/o el interés/diversión por resolver el problema.	4

La mayoría de las respuestas a la pregunta C1 sobre la influencia de trabajar en el lugar real en el que se localiza el problema han sido generales, poco concretas, como es el caso de la mayoría de las respuestas categorizadas como R2, R3 o R7 (respuestas como "ver los problemas [lugares] te hace ver si las soluciones son posibles"). No obstante, algunas de las respuestas de estas categorías sí permitieron inferir cómo el trabajo *in situ* permite validar las resoluciones (su modelo inicial y los procedimientos asociados) y ayuda a conseguir una mejor estimación. Por ejemplo, en una respuesta categorizada como R3, un participante señaló que:

> "Sí [el trabajo *in situ* me influyó] porque en la realidad no podíamos hacer cálculos como el de meter los coches hasta que ya no caben. También nos resultaba difícil calcular el tamaño de una brizna de hierba, ya que hay diferentes tamaños."

La reflexión de este resolutor que escribe "en la realidad no podíamos hacer cálculos como el de meter los coches hasta que ya no caben" refuerza nuestra discusión sobre la desaparición de la categoría Recuento en la experiencia A2, pues la aproximación empírica a la resolución de problemas de estimación conlleva confirmar la inviabilidad de estrategias basadas en recuento. El resolutor se ha dado cuenta de que su plan de resolución individual Recuento para *P4- Coches* no puede ejecutarse en la experiencia A2. Del mismo modo, este resolutor reflexiona sobre la dificultad que introduce la irregularidad de la forma de una brizna de césped en el trabajo de estimación *in situ* a partir del área de la brizna (Unidad base), lo que ha llevado a que la resolución del grupo en el que participa se base en Densidad, mientras que su plan individual se basaba en Unidad base. Esta reflexión confirma que trabajar en el mundo real permite percibir ineficiencias, imprecisiones o errores.
Cabe destacar que 12 participantes (el 11,4 % del total) reflexionaron sobre por qué cambiaron de plan de resolución Unidad base a una resolución grupal Densidad. Como se había indicado en el análisis descriptivo, estas reflexiones ayudan a interpretar los resultados sobre

el incremento del uso de Densidad en *P1-Personas* cuando se trabaja *in situ*. En efecto, las respuestas categorizadas como R4 explican que, durante el proceso de resolución *in situ* del problema P1, observaron que el piso del porche está dividido en una cuadrícula de baldosas grandes, por lo que el tipo de resolución más sencillo en este caso fue calcular cuántas personas caben en cada una de esas baldosas grandes y luego calcular el número total de baldosas (como puede verse en la Figura **5-50** y la Figura **5-53**). En realidad, esta estrategia implica no tener que hacer mediciones de las dimensiones del área total ni estimar cuánto ocupa una persona. Por ejemplo, en la siguiente transcripción de una respuesta categorizada como R4, un resolutor explica que utilizar la resolución de la Densidad con las baldosas del suelo es empírico, más sencillo y más preciso que calcular la superficie que ocupa una persona:

> "En el porche se propuso [el grupo al que pertenece el resolutor] otra [resolución] más sencilla [que su plan de resolución individual de la experiencia A1], ya que era más fácil contar cuántas personas ocupan una baldosa que encontrar su área exacta [la de una persona] (porque son objetos irregulares). Además, utilizamos la experiencia para comprobar cuántas personas caben en una baldosa, por lo que no tuvimos que utilizar un área para una persona, que sería más inexacta."

Es interesante porque este resolutor, como el de la transcripción anterior, considera que el cálculo de la densidad es un procedimiento empírico ("utilizamos la experiencia") más exacto que la Unidad base. En la última sección de este capítulo trataremos sobre los criterios de adaptabilidad y confirmaremos esta intuición de los resolutores.
También es destacable que 6 participantes (el $5,7\,\%$ del total) dieron una explicación (R5) a la disminución del uso de Linealización en las resoluciones grupales de *P2-Baldosas* en comparación con los planes de resolución individuales. Por ejemplo, en la siguiente transcripción de una respuesta categorizada como R5, un participante explicó que:

> "Sí [influyó el trabajar *in situ*, pues cambió su plan resolución Linealización por la resolución grupal Unidad base], en el problema de las baldosas [*P2-Baldosas*], ya que no estaban todas en la misma dirección"

Estas seis reflexiones nos permitieron explicar el descenso de uso de Linealización cuando se resuelve el problema *P2-Baldosas* en el lugar real en el que está localizado. De hecho, que hay franjas en las que cambia la orientación de las baldosas, y por tanto rompen el orden de su distribución, era un aspecto del espacio del problema que nos había pasado desapercibido en el diseño de la secuencia y que fue descubierto al analizar estas respuestas al cuestionario post-experiencia. El cambio muestra la capacidad adaptativa de los resolutores cuando trabajan en grupo en el lugar real del problema. Estudiemos el caso del resolutor que ha dado esta respuesta a la pregunta C1 del cuestionario.
En la Figura **5-53** encontramos su plan de resolución individual, el que dice que cambió cuando en la experiencia A2 tuvo que trabajar en grupo e *in situ*. En efecto, dibuja una distribución ordenada siguiendo un patrón de cuadrícula perfecto, y escribe que "contaría los

azulejos a lo largo y los multiplicaría por los de ancho". Es decir, se basa en una linealización de la superficie y una estimación lineal del número de baldosas (en fila y columna) usando estrategia de recuento, finalizando con un producto cartesiano para obtener una estimación del número de baldosas en toda la superficie.

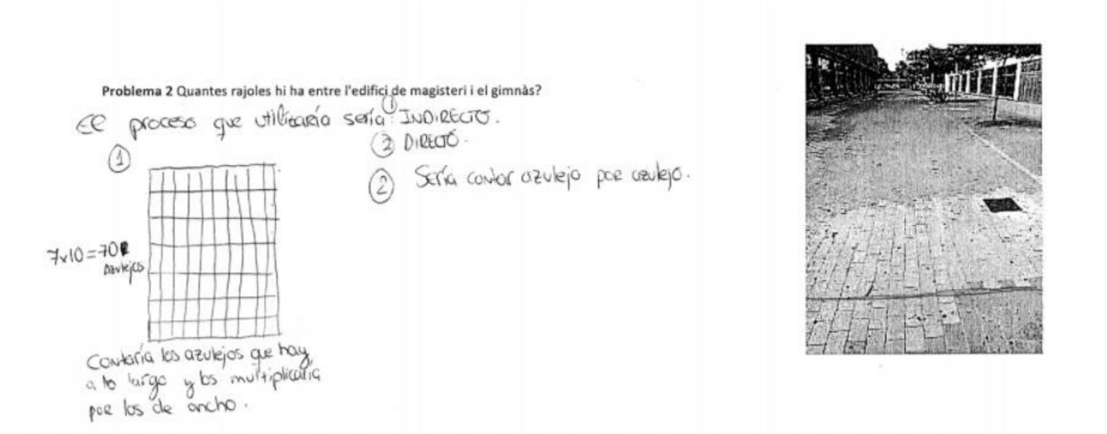


Figura 5-53.: Plan de resolución para *P2- Baldosas* de un resolutor que, en la experiencia A2, cambia a Unidad base en la resolución grupal porque, *in situ*, observa irregularidades en el orden de las baldosas.

Como explica el resolutor en la respuesta transcrita a la pregunta C1 del cuestionario, al trabajar durante la experiencia A2 en el lugar del problema, en su grupo observaron que las baldosas "no estaban todas en la misma dirección", lo que rompía el patrón de cuadrícula de su plan de resolución y hacía inexacto utilizar una resolución basada en la linealización. En la Figura **5-54** puede verse cómo cambian de dirección las baldosas en algunos tramos de la superficie del problema, lo que rompe el modelo lineal de distribución ordenada. Esto, indudablemente, es una de las influencias del trabajo *in situ* que ha afectado al descenso del uso de Linealización en este problema, pues este cambio de dirección es imperceptible en la fotografía que acompaña al enunciado y es difícil de percibir para alguien que no se fija en el suelo con atención.

Figura 5-54.: Detalle del suelo en el lugar de *P2-Baldosas*

En la Figura **5-55** podemos leer una respuesta de otro participante a la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia que sintetiza varias de las reflexiones comentadas: la inviabilidad del recuento; la dificultad que implica la irregularidad en la forma y tamaño de la brizna para implementar una resolución de tipo Unidad base; y los cambios de dirección en las baldosas que implican romper el modelo lineal.

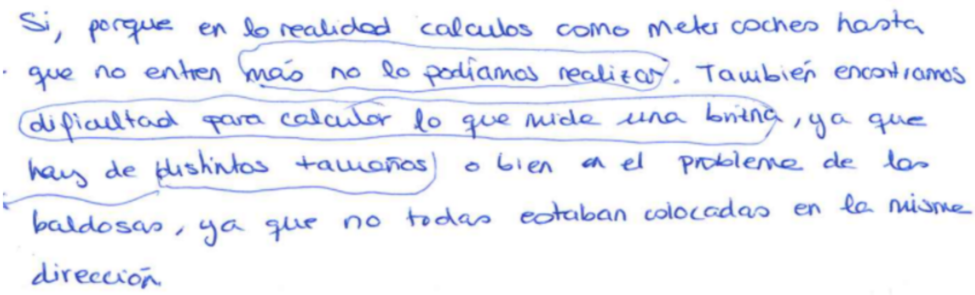

Si, porque en la realidad calculos como metes coches hasta
que no entren más no lo podíamos realizar. También encontramos
dificultad para calcular lo que mide una brizna, ya que
hay de distintos tamaños o bien en el problema de las
baldosas, ya que no todas estaban colocadas en la misma
dirección

Figura 5-55.: Respuesta de un participante a la pregunta C1

Por último, en relación a la pregunta C1 sobre la influencia de trabajar *in situ* realizando mediciones para apoyar las estimaciones en el lugar real del problema, la respuesta más frecuente (25 participantes), categorizada como R6, revela que muchos futuros profesores encuentran difíciles los problemas abiertos sin datos y prefieren "cerrarlos" tomando medidas "exactas" que les permitan llegar a un resultado numérico que perciben como una aproximación y no como una estimación. En este sentido, un participante escribe que:

> "Una vez que estás allí [en el lugar donde se localiza el problema] ves realmente las dimensiones [de la superficie, de los elementos] y puedes calcularlas con los instrumentos de medición para hacerte una idea aproximada. Algo imposible de ver con el planteamiento del problema sin datos."

En algunas respuestas a C1 se observa cierto rechazo a los problemas abiertos, considerando que son "abstractos" y difíciles (la relación entre abstracción y dificultad en problemas aparece en la investigación recogida en la Tabla **2-1** del Capítulo 2). En este tipo de problemas, la confusión de "abtracto" y "abierto" se podría relacionar con alguna de las investigaciones sobre limitaciones de los futuros maestros en el conocimiento sobre resolución de problemas incluidas en el Capítulo 2, en concreto con la confusión sobre qué significa matemáticamente tarea abierta, aunque los futuros maestros conozcan que eso implica más de una solución (Chapman, 2012). De hecho, varias respuestas hablan de "aproximación a la realidad" en lugar de estimación, o de "resultados muy dispares a la realidad", sin tener en cuenta que los resultados y las estimaciones están mediadas por un modelo matemático de la situación real. Es decir, algunos futuros maestros consideran los problemas de estimación en contexto real, que son una clase de problemas de modelización, como si fueran problemas aritméticos con una solución "real y exacta" que se alcanza mediante "un proceso lineal" de aplicación de un algoritmo. Esta visión limitada de problema abierto, estudiada por Chapman (2005), también aparecía en el Capítulo 2.

Consensos para la resolución grupal e influencia del trabajo en grupo en la elección de las resoluciones

Zawojewski y cols. (2003) sugieren que los alumnos, cuando trabajan en pequeños grupos, son capaces de ampliar y perfeccionar sus propias construcciones matemáticas para responder a las exigencias del problema planteado. También señalan que cuando los resultados se comunican a otros estudiantes, pueden producirse discusiones e intercambios de opiniones, que a su vez pueden llevar a una revisión del proceso seguido y a la construcción de nuevos modelos. Hemos analizado la influencia del trabajo *in situ*, que permite observar algunos aspectos del lugar real de los problemas, en el desarrollo de las resoluciones grupales. El trabajo en el lugar de los problemas y en grupo, en efecto, se asocia a una mejora de la tasa de éxito: se reduce drásticamente la proporción de producciones incompletas.
Pero, además, en la experiencia A2 cada grupo debía acordar una estrategia de resolución común. En el Capítulo 4 se categorizaron los tipos de consensos que se dan entre los miembros de un equipo para escoger la estrategia grupal. Recordemos que los escenarios posibles de consenso grupal eran los siguientes:

i) el grupo utiliza un tipo de resolución que ninguno de sus miembros había elegido individualmente en sus planes (todos cambian en la grupal);

ii) el grupo utiliza el tipo de resolución que una minoría de sus miembros había elegido individualmente en sus planes (minoría sobre la mayoría);

iii) el grupo utiliza el tipo de resolución que la mitad de sus miembros había elegido individualmente (mitad y mitad);

iv) el grupo utiliza el tipo de resolución que la mayoría de sus miembros había elegido individualmente en sus planes (mayoría sobre la minoría);

v) el grupo utiliza el mismo tipo de resolución que todos sus miembros habían elegido individualmente en sus planes (consenso directo entre todos los miembros).

La Tabla **5-8** muestra, para cada problema y para la secuencia 1 completa, la frecuencia absoluta (y la relativa) de cada escenario de decisión del grupo sobre la resolución grupal respecto a los planes de resolución individuales de los miembros del grupo.
Como era de esperar, considerando globalmente las cuatro tareas de la secuencia 1, el tipo de resolución consensuado por un grupo coincidió con la resolución individual escogida mayoritariamente por los miembros del grupo (el 33 % de los consensos son de elección de una resolución acorde con los planes previos de una mayoría sobre los planes distintos de una minoría).

Tabla 5-8.: Posibles escenarios al consensuar la resolución grupal, en relación a los planes de resolución individuales de los miembros del grupo, para N = 62 grupos.

	Todos cambian en la grupal	Minoría sobre la mayoría	Mitad y mitad	Mayoría sobre la minoría	Consenso directo entre todos
P1	**21(34 %)**	10(16 %)	7(11 %)	18(29 %)	6(10 %)
P2	**19(31 %)**	18(29 %)	3(5 %)	15(24 %)	7(11 %)
P3	4(6 %)	16(26 %)	9(15 %)	**26(42 %)**	7(11 %)
P4	1(2 %)	8(13 %)	6(10 %)	23(37 %)	**24(39 %)**
Total	45(18 %)	52(21 %)	25(10 %)	**82(33 %)**	44(18 %)

Sin embargo, cuando se examina la proporción de tipos de acuerdo entre los miembros del grupo problema a problema, hay diferencias importantes: la elección del tipo de resolución correspondiente al tipo de plan de resolución individual mayoritario entre los miembros del grupo no es el escenario más frecuente para los problemas *P1-Personas* y *P2-Baldosas*. En estos dos problemas, el escenario más frecuente fue otro: el tipo de resolución empleado por el grupo en la experiencia A2 fue distinto a todos los tipos de plan de resolución que habían usado sus miembros en la experiencia A1 ("todos cambian en la grupal"). Precisamente este escenario, que es el más frecuente en P1 y P2 (34 % y 31 % de los acuerdos, respectivamente), es el menos frecuente en P3 y P4 (6 % y 2 % de los acuerdos, respectivamente). Este hecho no sorprende, al contrario, es coherente con el análisis comparativo de la Tabla **5-1** y la Tabla **5-5**, como se recuerda a continuación.

En efecto, recordemos que en *P1-Personas* había una evolución significativa desde la Unidad Base como plan de resolución individual más utilizado, hasta la Densidad como resolución grupal más utilizada. Además, las respuestas a la pregunta C1 del cuestionario confirmaban que el suelo de baldosas había favorecido este cambio. Este aspecto del lugar real del problema debe tener, en consecuencia, un efecto en los escenarios de acuerdo entre los miembros del grupo, pues muchos de ellos habían escogido la Unidad base como tipo de plan de resolución individual en la experiencia A1. Así, es esperable que en una proporción alta de grupos todos los componentes hubieran escogido Unidad base en su plan individual, pero luego como grupo desarrollaron una resolución basada en densidad, no porque unos convencieron a otros de que su plan era mejor, sino porque el trabajo *in situ* les animó a adaptar su resolución a las características observables del espacio del problema (en este caso, encontraron que había una partición del suelo del porche en baldosas grandes).

Algo similar ocurre en *P2-Baldosas*. Los datos mostraron una disminución importante de la Linealización en las resoluciones grupales respecto a los planes de resolución individual. Algunas respuestas la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia permitían interpretar que esto se debía a las irregularidades en la disposición de las baldosas pequeñas. Este

cambio también tiene su incidencia en los escenarios de acuerdo entre los miembros de los grupos, pues lo que se observa es que en muchos grupos todos los miembros habrían elegido la Linealización de forma individual, y luego en la resolución grupal optaron por Unidad base. Lo que condicionó este cambio de todos los componentes del grupo también fueron los aspectos del lugar real del problema que no habían sido consideramos en el plan de resolución.
Para tener una visión más completa de la casuística, sería interesante saber qué aspectos del trabajo en grupo han influido para que una minoría de miembros imponga su resolución, o cómo se ha llegado a un consenso cuando la mitad de los miembros ha elegido un tipo de resolución y la otra mitad otro. Las respuestas a la pregunta C2 del cuestionario post-experiencia proporcionan algunas ideas. Recordemos que la segunda pregunta C2 del cuestionario era la siguiente:

> C2. ¿La estrategia de resolución presentada por tu grupo difiere de la que propusiste en tu resolución individual en alguno de los problemas? Explica en qué problemas has cambiado de estrategia de resolución, qué factores os han influido en ese cambio de decisión y cómo habéis tomado (y consensuado) en grupo esa decisión final.

En el Capítulo 4 se describió la categorización de las respuestas de los N = 105 participantes a esta pregunta en nueve categorías. En la Tabla **5-9** se presenta el análisis de los resultados.

Tabla 5-9.: Categorías de respuesta a la pregunta C2 del cuestionario para N = 105 futuros profesores.

Categoría de respuesta	Frecuencia
R'1. Incompleta / no contesta a la pregunta.	9
R'2. Informa de que la resolución del grupo cambia respecto a su plan de resolución individual en algunos problemas, pero no da razones sobre la influencia del grupo para explicar el cambio.	16
R'3. Explica que en la resolución grupal se han incluido algunos obstáculos del lugar real del problema porque es más fácil visualizar el espacio trabajando *in situ*, y que ahora gana en precisión.	9
R'4. Explica que en la puesta en común discuten que algunos planes de resolución son inaplicables, imprecisos o ineficaces, y cambian a una resolución mejor tras la discusión.	23
R'5. Explica que, trabajando *in situ* en la tarea *P1-Personas*, el grupo observa que utilizando Densidad con las baldosas grandes se gana en sencillez y rapidez.	19
R'6. Dice que la resolución grupal cambia respecto a su plan individual porque otros miembros del equipo han decidido la adoptada por todos, y dice que su plan de resolución era peor o que la nueva resolución decidida es más clara o adecuada..	12

R'7. Dice que no les fue difícil llegar a un consenso, porque todos vieron la resolución óptima al mismo tiempo, y que esa resolución coincide con su plan de resolución individual.	26
R'8. Dice que el trabajo conjunto con los compañeros le ayuda a descubrir los errores de su plan individual (confundir el volumen con el área, etc.), y que por eso en la resolución del grupo se dejan de cometer.	8
R'9. Asegura que el trabajo en grupo a través del intercambio de ideas ha permitido comparar visiones y enriquecer los planes de resolución individuales, llegando a una resolución consensuada.	15

Lo primero que se observa en las categorías de respuesta es que los futuros profesores confunden la influencia del trabajo *in situ* (C1) con la influencia del trabajo en grupo (C2), por lo que existen categorías como R'3 (que es casi igual a R2), R'4 (que repite las ideas de R3) y R'5 (que es igual a R4). Las respuestas clasificadas en estas categorías son generales y muestran que casi la mitad de la muestra de futuros profesores (51 de 105) no saben centrar su análisis en las características del trabajo en grupo y diferenciarlo de las características del trabajo en el lugar donde se encuentra el problema. A ellos hay que añadir los 9 futuros profesores que no supieron responder a la pregunta (R'1) y los 16 que no argumentaron su respuesta (R'2).
Sin embargo, las respuestas categorizadas como R'8 sí aportan información explícita sobre los posibles beneficios de la resolución de problemas en grupo: el intercambio con los compañeros y la confrontación de sus respectivas resoluciones individuales permite encontrar errores. Estas respuestas se ven reforzadas por el análisis de la tasa de éxito que hemos descrito anteriormente: había un aumento significativo de la tasa de éxito en las resoluciones grupales respecto a los planes de resolución individual. Esta mejora en el rendimiento relacionada con el trabajo en grupo, a través de la discusión e intercambio de ideas (algo que destacan los propios participantes al contestar a C2, como puede verse en las categorías de respuesta R'6, R'7, R'8 y R'9 de la Tabla **5-9**), concuerda con trabajos previos (Egerbladh y Sjodin, 1986; Stasson y cols., 1991; Szydlik y cols., 2003; Ärlebäck, 2009; Geiger, Galbraith, Niss, y Delzoppo, 2021). Así, si hay más resoluciones grupales completas, es porque, como se explica en las respuestas R'8, este intercambio entre compañeros permite encontrar errores que impiden el desarrollo de la resolución. Por ejemplo, un participante escribió la respuesta que transcribimos a continuación:

> "En el problema cuatro [*P4-Coches*] y en el problema uno [*P1-Personas*], al hablar con otros compañeros pude contemplar [comprobar] que confundí el concepto de volumen con el de superficie [área], por lo que mi resolución no fue la correcta en los problemas planteados."

Este participante explica que la discusión en grupo ayuda a que, como resolutor, reflexione sobre sus errores y confusiones, llevando a una revisión del proceso seguido en su plan de

resolución individual. Esto coincide con las conclusiones del trabajo de Zawojewski y cols. (2003).
Las respuestas categorizadas como R'9 completan esta idea, ya que estos futuros profesores afirman que el intercambio grupal, además de detectar errores, permite enriquecer las resoluciones. Lo mismo ocurre con las respuestas categorizadas como R'6, ya que permiten identificar que cuando algunos miembros del grupo (ya sean mayoritarios o minoritarios) imponen su plan resolución a los demás, es porque tienen más confianza o saben explicarlo con más claridad. Por ejemplo, un participante escribió:

> "Sí ha influido [el trabajo en grupo] ya que estábamos con un compañero con nociones de arquitectura y nos ha hecho ver el problema desde otra perspectiva y, por tanto, cambiar a su forma de resolver los diferentes problemas planteados."

En este caso, la formación inicial del compañero, que había comenzado estudios de Arquitectura, le ayudó a explicar con mayor claridad su propuesta de proceso de resolución, y/o le otorgó prestigio dentro del grupo, de tal modo que fue su criterio el que se siguió para consensuar la resolución grupal.
Por último, los 26 futuros profesores que han dado respuestas categorizadas como R'7 se vinculan al escenario de "consenso directo entre todos los miembros" del grupo, que se daba en 44 casos de los 248 posibles (62 grupos por cuatro problemas).
Como se ha visto, una combinación de análisis cualitativo de las resoluciones de la experiencia A2; de análisis comparativo de tipo descriptivo de los resultados de la categorización individual y grupal; y de análisis cualitativo de las respuestas a las preguntas C1 y C2 del cuestionario post-experiencia, nos ha permitido estudiar la evolución de los planes de resolución individuales a las resoluciones grupales, y determinar qué aspectos del trabajo *in situ* y del trabajo en grupo influyen en dicha evolución.

5.3.3. Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individual y resoluciones grupales e in situ

En este apartado, nos centraremos en lo que hemos denominado factores de complejidad, es decir, aspectos del contexto real del problema que pueden matematizarse y enriquecer el modelo matemático de la resolución con el fin de obtener una estimación más precisa. El objetivo será describir qué factores de complejidad enriquecen los planes de resolución de la experiencia A1, y cómo lo hacen; y cuáles son los que enriquecen las resoluciones grupales e *in situ* de la experiencia A2, y de qué manera lo hacen, comparándolos con los factores de complejidad aparecidos en los planes de resolución individuales. Además, se identifica qué características del contexto real promueven que los estudiantes incluyan determinados factores de complejidad, tanto en los planes de resolución individual como en las resoluciones grupales.
En el apartado 4.3.3 del Capítulo 4 se describió la categorización de los factores de complejidad y se explicó cada uno de ellos, ilustrándolos con ejemplos tomados de las producciones

de la experiencia A1. Recordemos que las categorías de factor de complejidad que emergieron del análisis de las producciones fueron: *eliminación de obstáculos*; *densidad media*; *tamaño medio*; *densidades diferenciadas*; y *tamaños diferenciados*.
A continuación, para cada problema de la secuencia 1, se presenta un análisis comparativo, de tipo cualitativo y descriptivo, de los factores de complejidad categorizados en los planes de resolución de la experiencia A1, y de los factores de complejidad categorizados en las resoluciones grupales e *in situ* de la experiencia A2. Lo que se observará es que, el hecho de que las producciones individuales analizadas sean planes de resolución, que esbozan cómo debería encontrarse la solución, y no resoluciones completas con estimaciones y cálculos ejecutados, determina que los factores de complejidad tengan carácter de propuesta; es decir, no son operativos y por tanto no pueden integrarse en el proceso de resolución. En el caso de las resoluciones grupales e *in situ*, veremos que, a diferencia del plan de resolución individual, los factores de complejidad sí están integrados en la resolución grupal, y son operativos en los procedimientos y cálculos asociados para obtener la estimación.

Factores de complejidad en P1-Personas

Experiencia A1. En los planes de resolución individual encontramos como factor de complejidad mayoritario (aparece en el 80 % de los planes de resolución que incorporan factores de complejidad en este problema) la categoría *tamaño medio*, es decir, la consideración de que las personas tienen distintos tamaños y por tanto la mención de estimar el área media ocupada por una persona. Sin embargo, ninguno de estos planes de resolución explicita cómo desarrollar el procedimiento, ya que hablan de calcular lo que ocupa una persona "en promedio", o de tomar una persona "media" o "estándar". Este factor de complejidad tiene, por tanto, carácter de propuesta, pues no se describe qué cálculos habría que hacer, como puede verse en la Figura **5-56**.
Aparece, aunque sólo en tres planes de resolución, el factor de complejidad *densidad media*; por ejemplo, el resolutor 4º D-I.1.2 explica que:

> "mediría con personas diferentes, varias veces, cuántas personas caben en un m^2. A continuación sacaría una media de las personas que caben por m^2."

Otro resolutor, el 4º I-I.4.3 escribe que:

> "multiplicaría los m^2 por la gente que cabe en 1 m^2. Deberíamos hacer una media por el ancho [el área que ocupan] de las personas con mochila."

Es decir, el resolutor I.4.3 interpreta que hay heterogeneidad en los tamaños de las personas que se distribuyen en la superficie y que esa diferencia de tamaños implica que hay que muestrear varias densidades y hacer una media para homogeneizar el modelo.
También aparece como factor de complejidad la *eliminación de obstáculos*. Lo encontramos en el 30 % de los planes de resolución que incorporan factores de complejidad. En estos planes de resolución, la mayoría de resolutores propone que deben descontarse los pilares del

1° Mediría cuanto mide el porche de la entrada, tanto de largo como de ancho.

2. Supondría las medidas de una persona promedio

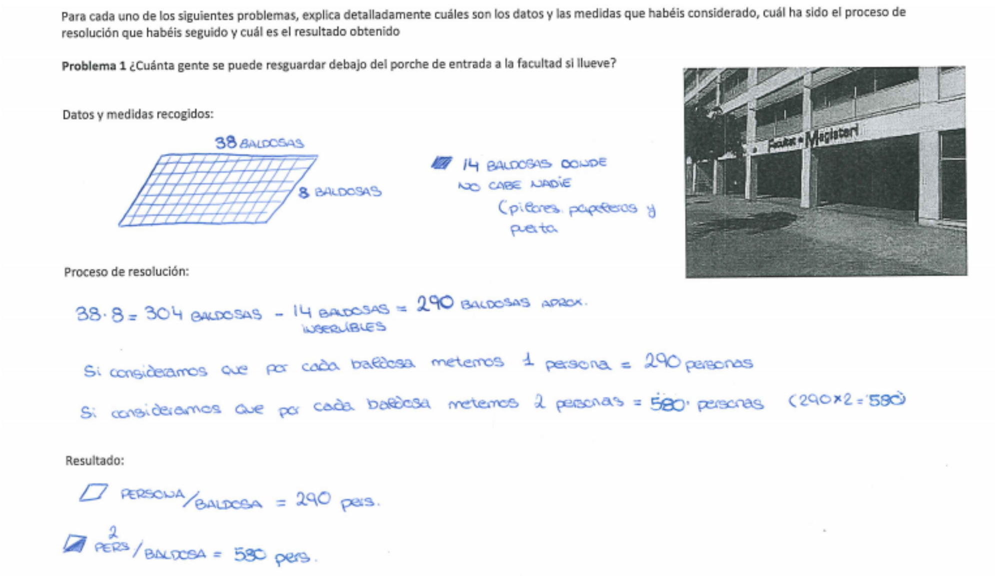
3. Con estos datos podemos dividir los tomados del porche entre los datos de la persona promedio y así obtendríamos las personas que podrían caber bajo el porche.

Figura 5-56.: Plan de resolución con factor de complejidad "tamaño medio" para *P1-Personas.*

porche (Figura **4-2**) como único obstáculo. Sólo dos planes de resolución añaden las puertas giratorias (ver Figura **4-21**). La mayoría de planes de resolución no explicitan los procedimientos para cuantificar el espacio ocupado por estos obstáculos y descontarlo del espacio útil. Por ejemplo, en la producción de la Figura **4-21**, se dice que "se tiene que descontar la superficie que ocupan las columnas y la superficie que ocupan las puertas giratorias", pero no se describen los procedimientos para calcular esas áreas.

Experiencia A2. En las resoluciones grupales el factor de complejidad dominante (que aparece en el 95 % de las producciones que consideran factores de complejidad) es la *eliminación de obstáculos.* En la mayoría de las producciones grupales que incluyen este factor de complejidad, aparece formulado dentro del modelo de manera más elaborada que en los planes individuales: además de pilares incluyen puertas giratorias y papeleras, cuantificando este espacio inútil (aproximando el área que ocupan). Algunas resoluciones descuentan unidades de área medida en baldosas grandes: como se observa en la Figura **5-57**, el grupo 4ºF-G2 resta del área total (medida en 304 baldosas) 14 baldosas, que son las que aproximan las áreas ocupadas por los pilares, las papeleras y las puertas. Otras resoluciones grupales que incluyen el factor complejidad *eliminación de obstáculos* calculan la superficie que ocupan en unidades del SI (metros cuadrados), como la que aparece en la Figura **5-58** del grupo 4ºD-G5.

En el 10 % de las resoluciones grupales e *in situ* que incluyen factores de complejidad aparece el factor de complejidad *densidad media*, calculando una media de personas por baldosa. Sólo una resolución grupal, la de la Figura **5-58**, contempla el tamaño medio de una persona (aunque no recogen en la resolución cómo lo han calculado). Además, en una de las resoluciones grupales, la de la Figura **5-57**, se identifica el factor de complejidad *densidades*



Para cada uno de los siguientes problemas, explica detalladamente cuáles son los datos y las medidas que habéis considerado, cuál ha sido el proceso de resolución que habéis seguido y cuál es el resultado obtenido

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Datos y medidas recogidos:

38 BALDOSAS

8 BALDOSAS

14 BALDOSAS DONDE NO CABE NADIE (pilares, papeleras y puerta)

Proceso de resolución:

38 · 8 = 304 BALDOSAS − 14 BALDOSAS INSERVIBLES = 290 BALDOSAS APROX.

Si consideramos que por cada baldosa metemos 1 persona = 290 personas

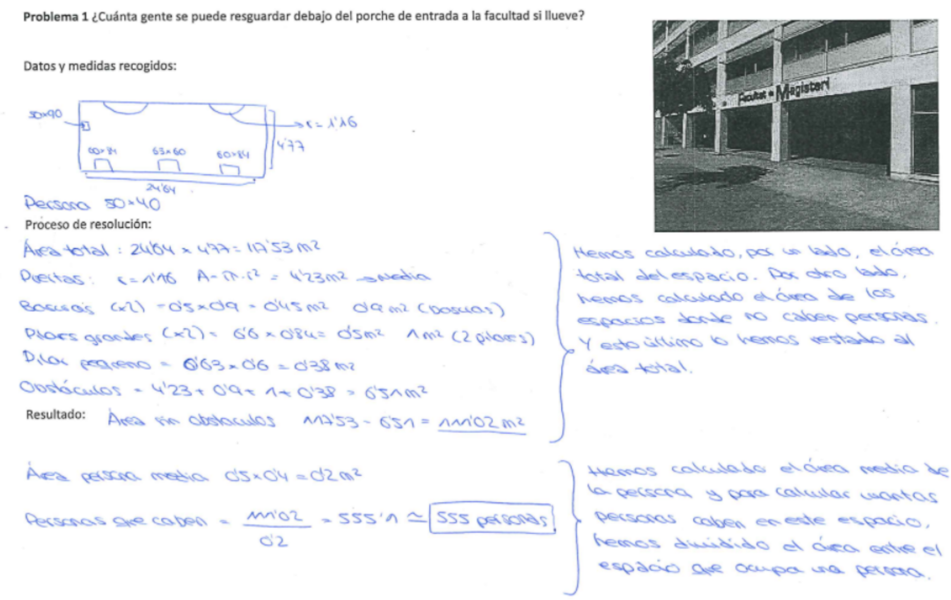
Si consideramos que por cada baldosa metemos 2 personas = 580 personas (290×2 = 580)

Resultado:

PERSONA/BALDOSA = 290 pers.

2 PERS/BALDOSA = 580 pers.

Figura 5-57.: Resolución grupal de *P1-Personas* que incluye los factores de complejidad "eliminación de obstáculos" (medidos en baldosas) y "densidades diferenciadas".



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Datos y medidas recogidos:

50×90

r = 1'16

4'77

60×84 63×60 60×84

24'64

Persona 50×40

Proceso de resolución:

Área total : 24'64 × 4'77 = 117'53 m²

Puertas: r = 1'16 A = π·r² = 4'23 m² → media

Bolsas (×2) = 0'5×0'9 = 0'45 m² 0'9 m² (bolsas)

Pilares grandes (×2) = 0'6 × 0'84 = 0'5 m² 1 m² (2 pilares)

Pilar pequeño = 0'63 × 0'6 = 0'38 m²

Obstáculos = 4'23 + 0'9 + 1 + 0'38 = 6'51 m²

Resultado: Área sin obstáculos 117'53 − 6'51 = 111'02 m²

Hemos calculado, por un lado, el área total del espacio. Por otro lado, hemos calculado el área de los espacios donde no caben personas. Y esto último lo hemos restado al área total.

Área persona media 0'5×0'4 = 0'2 m²

Personas que caben = $\frac{111'02}{0'2}$ = 555'1 ≃ $\boxed{555 \text{ personas}}$

Hemos calculado el área media de la persona y para calcular cuántas personas caben en este espacio, hemos dividido el área entre el espacio que ocupa una persona.

Figura 5-58.: Resolución grupal de *P1-Personas* que incluye la "eliminación de obstáculos" (medidos en m^2) y el "tamaño medio".

diferenciadas aplicado a densidad de personas por baldosa, obteniendo dos estimaciones posibles (290 personas con una persona por baldosa y 580 con dos personas por baldosa). No han distinguido zonas en la partición de baldosas del porche para poder dar una respuesta combinando estas dos densidades diferenciadas.

Factores de complejidad en P2- Baldosas

Experiencia A1. En los planes de resolución individual se encuentra como factor de complejidad mayoritario (en el 80 % de las respuestas que incluyen factores de complejidad) la categoría *eliminación de obstáculos*, mencionando que hay zonas sin baldosas: los alcorques y las alcantarillas. Por ejemplo, en la transcripción del plan de resolución del resolutor 4ºK-I.8.4, leemos que:

> "De igual forma que en el ejercicio anterior, tendríamos que contar las baldosas que [hay] a lo largo y cuántas a lo ancho. Posteriormente tendríamos que multiplicarlas [la estimación lineal del número de baldosas a lo ancho y la del largo], teniendo en cuenta la superficie que no está cubierta por baldosas, como la alcantarilla o el espacio que ocupa el árbol."

En este plan de resolución, como en el resto que incluyen este factor de complejidad, la *eliminación de obstáculos* está propuesta, pero no se describe el procedimiento para llevarla a cabo. De hecho, este plan de resolución se basa en linealización, pero luego el resolutor dice que hay que tener en cuenta "la superficie que no está cubierta por baldosas", lo que plantea un problema, pues no ha trabajado con superficies en el problema y no le sirve calcular el área y descontarla. Un procedimiento coherente con la Linealización sería estimar el número de baldosas que ocuparía cada obstáculo y restarlo, pero esto no se desarrolla en el plan de resolución anterior.
En el 20 % restante de las producciones que incluyen factores de complejidad se identifica la categoría *tamaños diferenciados*, diferenciando dos tamaños de las baldosas: entera y partida (media baldosa). Se propone calcular dos estimaciones distintas que deben sumarse para obtener el número total. En la Figura **4-25** que ya se analizó en el Capítulo 4 para explicar la categorización de este factor de complejidad, el resolutor escribe "si existen baldosas partidas, estas se dejarán a parte y, al final, se aproximaría el valor de todas estas y sumaría al total."

Experiencia A2. En las resoluciones grupales e *in situ* el único factor de complejidad encontrado en el problema *P2-Baldosas* es *eliminación de obstáculos*. Se incluye en el modelo matemático de manera muy similar a los planes de resolución, pero en estas resoluciones, categorizadas como Unidad base, se calculan las áreas de las zonas sin baldosas, medidas en metros cuadrados, y se restan al área total de la zona rectangular entre el gimnasio y la facultad de Magisterio.
La resolución *in situ* del grupo 4ºD-G5 (véase Figura **5-59**) es la más minuciosa de las analizadas, pues además de árboles y alcantarillas, se cuantifica el área perdida por otros obstáculos como ventilación, escalón, arquetas, tuberías, aparcamientos de bicicletas ("hie-

rros bicis") y farolas. Se ha destacado en amarillo el cálculo del área que ocupan todos los obstáculos y del área útil, restando el área de los obstáculos al área total.

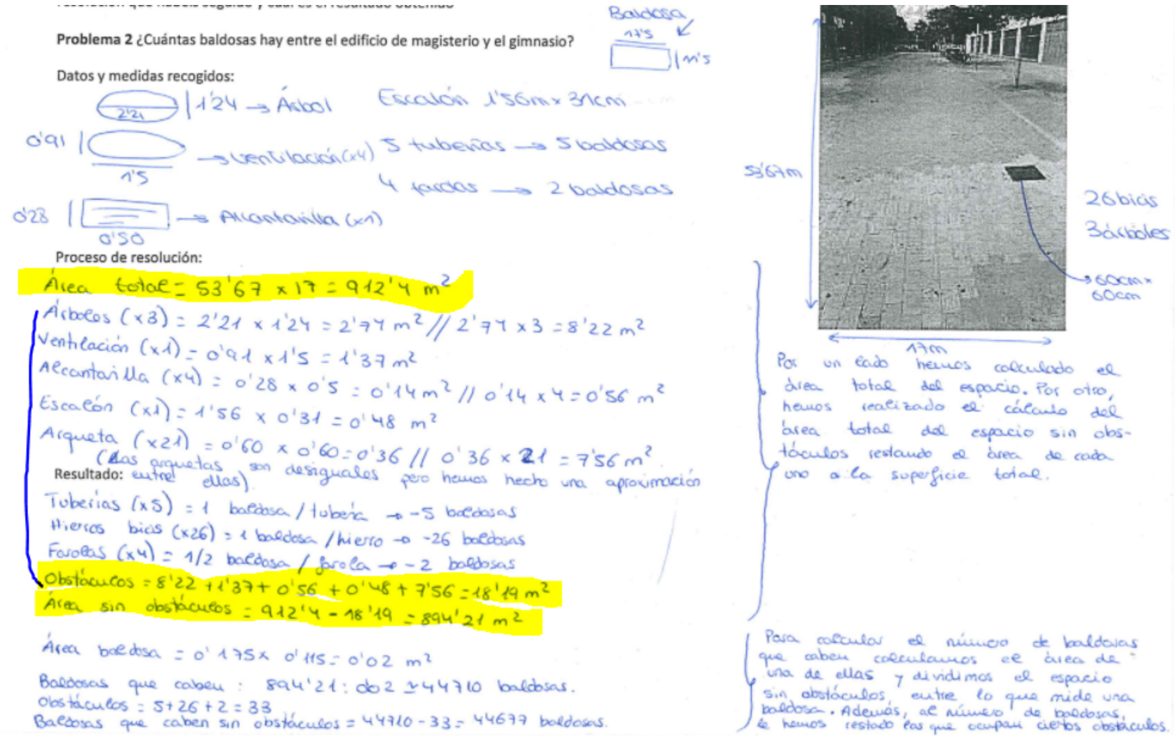

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?
Baldosa
1'15
1'15
Datos y medidas recogidos:
2'21
1'24 → Árbol
Escalón 1'56m x 31cm
0'91
1'5
→ Ventilación (x4)
5 tuberías → 5 baldosas
4 farolas → 2 baldosas
0'28
0'50
→ Alcantarilla (x1)
Proceso de resolución:
Área total = 53'67 x 17 = 912'4 m²
Árboles (x3) = 2'21 x 1'24 = 2'74 m² // 2'74 x 3 = 8'22 m²
Ventilación (x1) = 0'91 x 1'5 = 1'37 m²
Alcantarilla (x4) = 0'28 x 0'5 = 0'14 m² // 0'14 x 4 = 0'56 m²
Escalón (x1) = 1'56 x 0'31 = 0'48 m²
Arqueta (x21) = 0'60 x 0'60 = 0'36 // 0'36 x 21 = 7'56 m²
(Las arquetas son desiguales entre ellas) pero hemos hecho una aproximación
Resultado:
Tuberías (x5) = 1 baldosa / tubería → -5 baldosas
Hierros bicis (x26) = 1 baldosa / hierro → -26 baldosas
Farolas (x4) = 1/2 baldosa / farola → -2 baldosas
Obstáculos = 8'22 + 1'37 + 0'56 + 0'48 + 7'56 = 18'19 m²
Área sin obstáculos = 912'4 - 18'19 = 894'21 m²
Área baldosa = 0'175 x 0'115 = 0'02 m²
Baldosas que caben : 894'21 : 0'02 ≃ 44710 baldosas.
Obstáculos = 5 + 26 + 2 = 33
Baldosas que caben sin obstáculos = 44710 - 33 = 44677 baldosas.
53'67m
17m
26 bicis
3 árboles
60cm x 60cm
Por un lado hemos calculado el área total del espacio. Por otro, hemos realizado el cálculo del área total del espacio sin obstáculos restando el área de cada uno a la superficie total.
Para calcular el número de baldosas que caben calculamos el área de una de ellas y dividimos el espacio sin obstáculos entre lo que mide una baldosa. Además, al número de baldosas, le hemos restado las que ocupan ciertos obstáculos.

Figura 5-59.: Resolución grupal de *P2-Baldosas* con factor de complejidad "eliminación de obstáculos".

Factores de complejidad en P3- Césped

Experiencia A1. En los planes de resolución individual encontramos como factor de complejidad mayoritario (en el 85 % de las resoluciones que incorporan factores de complejidad) la categoría *eliminación de obstáculos*, que se refiere a descontar zonas sin hierba (árboles y alcantarillas, se perciben en la fotografía adjunta al enunciado, véase la Figura **4-4**). Como en los otros problemas, este factor de complejidad se incluye en los planes de resolución a modo de propuesta, sin explicitar qué procedimientos de medida y estimación habría que seguir para hacerlo. Un ejemplo lo encontramos en la Figura **5-14**, cuando el resolutor escribe que hay que "medir el área que ocupan los dos árboles" y, a continuación, "al área de ese espacio [la jardinera] le restamos la de los árboles para saber el área real [útil] que disponemos".

En el 15 % de los planes de resolución que incorporan factores de complejidad se ha identificado la categoría *densidades diferenciadas*, en la que el resolutor hace una partición de la jardinera en diferentes zonas con densidades de hierba variable, y propone que sean estimadas por separado. Encontramos un ejemplo cuando se explicó esta categoría en el Capítulo 4, en la Figura **4-24**. Otros consideran, en un primer momento, un modelo con densidades heterogéneas, pero luego asumen que por simplicidad trabajarán con un modelo homogéneo que dará un resultado “un poco intuitivo y aproximado”, es decir, que asume por hipótesis simplificar el modelo sabiendo que pierde precisión (veáse Figura **5-60**).

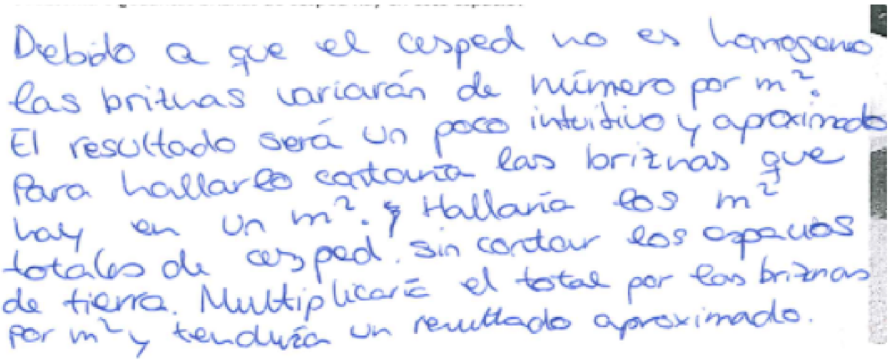
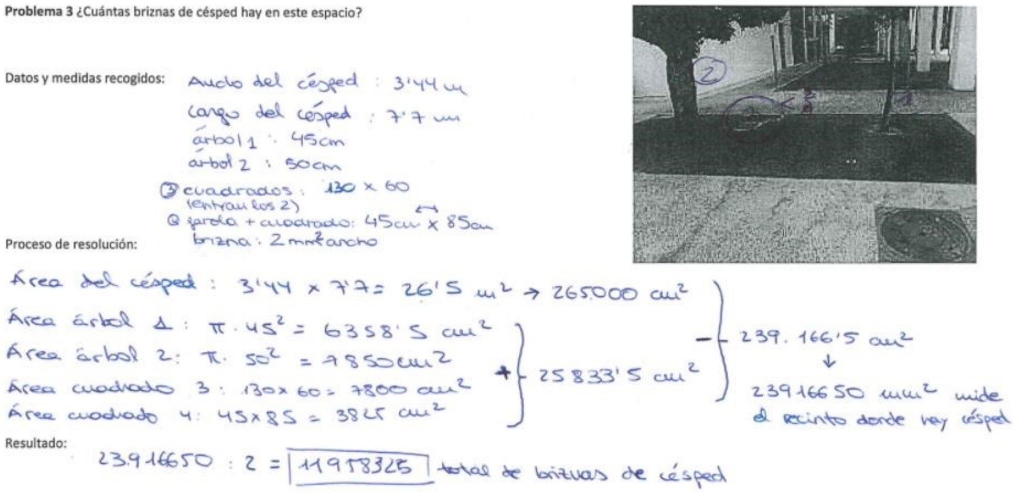

Debido a que el cesped no es homogeno
las britnas variarán de número por m².
El resultado será un poco intuitivo y aproximado
Para hallarlo contaría las briznas que
hay en un m². y Hallaría los m²
totales de cesped. sin contar los espacios
de tierra. Multiplicaré el total por las briznas
por m² y tendría un resultado aproximado.

Figura 5-60.: Plan de resolución para *P3-Césped* que asume explícitamente no abordar la heterogeneidad en la densidad de césped perdiendo precisión.

Se ha identificado también en algunos planes de resolución (un 8 % de los que incluyen factores de complejidad) el factor *tamaño/densidad media*, aunque sólo dos explicitan el proceso de obtención de la densidad media, el resto la proponen sin describir el procedimiento para obtenerla. Uno de los dos que sí proponen cómo calcular una densidad media también se tomó como ejemplo en el Capítulo 4 (Figura **4-22**). También hay resoluciones que proponen calcular una brizna de “tamaño medio“. La mayoría de ellas sólo inciden en procedimientos como “medir la superficie que ocupa una brizna de medida [tamaño] media” sin ofrecer detalles sobre los procedimientos de cálculo; algunas sí tratan de describir cómo obtener una brizna de tamaño medio, por ejemplo: “se calcula lo que ocupan varias briznas y se hace una media”.

Experiencia A2. En las resoluciones grupales el factor de complejidad *eliminación de obstáculos* aparece en todas las producciones que incluyen factores de complejidad. En la mayoría de las producciones grupales que incluyen este factor, éste aparece más elaborado que en los planes individuales: incluyen variabilidad en los tamaños de las zonas despejadas de los árboles y de las alcantarillas; se cuantifican estas zonas y se descuentan del área total de la región de césped. Por ejemplo, en la Figura **5-61** se observa que las medidas del área ocupada por los árboles se calculan a partir del área de dos círculos de radio distinto (45 cm y 50 cm), y que hay dos tamaños de alcantarilla (“cuadrado 3” y “cuadrado 4”).
Se identifica en una resolución grupal el factor de complejidad *densidades diferenciadas*, en la que la región de césped se divide en varias zonas con distinta densidad, aunque no se realizan estimaciones diferenciadas y se acaba optando por un modelo homogéneo.

Factores de complejidad en P4-Coches


Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Datos y medidas recogidos: Ancho del césped : 3'44 m
Largo del césped : 7'7 m
árbol 1 : 45cm
árbol 2 : 50cm
3 cuadrados : 130 x 60 (entran los 2)
4 farola + cuadrado: 45cm x 85cm
brizna : 2 mm ancho

Proceso de resolución:

Área del césped : 3'44 x 7'7 = 26'5 m² → 265000 cm²
Área árbol 1 : π · 45² = 6358'5 cm²
Área árbol 2: π · 50² = 7850 cm²
Área cuadrado 3 : 130 x 60 = 7800 cm²
Área cuadrado 4: 45 x 85 = 3825 cm²
\+ 25833'5 cm²
− 239.166'5 cm² ↓ 23916650 mm² mide el recinto donde hay césped

Resultado:
23916650 : 2 = 11958325 totales de briznas de césped

Figura 5-61.: Resolución grupal de *P3-Césped* con factor de complejidad "eliminación de obstáculos".

Experiencia A1. En los planes de resolución individual encontramos el factor de complejidad de la categoría *tamaño medio* de los coches en el 96 % de las resoluciones que incorporan factores de complejidad. En estas resoluciones se propone estimar un tamaño medio o estándar, pero la mayoría no describen el procedimiento para obtener ese tamaño medio (por ejemplo, véase la producción de la Figura **4-23**, discutida en el Capítulo 4). Muy pocos planes de resolución explican el proceso de obtención del tamaño medio ocupado por un coche: por ejemplo, en la Figura **5-62**, el estudiante escribe "mediría el ancho y largo de 5 coches distintos y haría la media [del área] del coche".

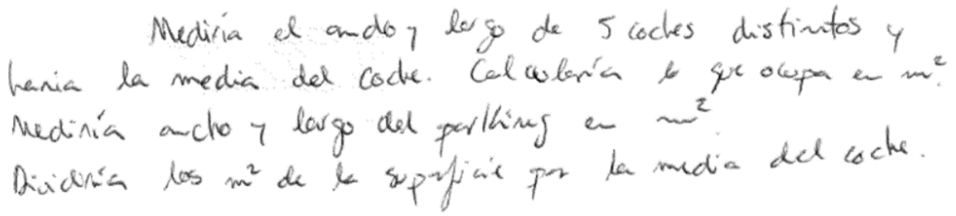

Mediría el ancho y largo de 5 coches distintos y
haría la media del coche. Calcularía lo que ocupa en m².
Mediría ancho y largo del parking en m²
Dividiría los m² de la superficie por la media del coche.

Figura 5-62.: Plan de resolución para *P4- Coches* con factor de complejidad "tamaño medio".

Experiencia A2. En las resoluciones grupales el factor de complejidad dominante (en un 71 % de las producciones que incorporan factores de complejidad) es, sin embargo, la *eliminación de obstáculos*, de manera muy similar a los planes de resolución, pero calculando las áreas de las zonas sin coches en unidades convencionales (metros cuadrados, disponían de un odómetro de rueda). En cinco resoluciones grupales aparece el factor de complejidad *tamaño medio* aplicado al tamaño variable de los coches, calculando el tamaño medio de una pequeña muestra de coches aparcados en el aparcamiento.

Resultados cuantitativos

En la Tabla **5-11** se recogen los datos relativos a la proporción de planes de resolución y de resoluciones grupales que incorporan cada uno de los tres factores de complejidad descritos cualitativamente con anterioridad: *eliminación de obstáculos*, *tamaño/densidad media* y *tamaños/densidades diferenciadas*.
Se observa que los problemas *P1-Personas* y *P4-Coches*, consistentes en estimar el número de personas y de vehículos, dan lugar a planes de resolución individuales que introducen en mayor proporción factores de complejidad, en particular la incorporación de un elemento de referencia con un tamaño "medio" o "estándar". Al observar las resoluciones grupales, la *eliminación de obstáculos* aumenta significativamente pero el *tamaño/densidad media* disminuye también de manera significativa. En las resoluciones grupales de los problemas *P2-Baldosas* y *P3-Césped* hay un aumento considerable de la incorporación del factor de complejidad *eliminación de obstáculos* (especialmente en P3). En cualquier caso, en el problema P2 la presencia de factores de complejidad es baja tanto en planes de resolución individual como en resoluciones grupales. Globalmente, se observa que en las resoluciones grupales disminuye la proporción que incluye el uso de un *tamaño/densidad media*, mientras que aumenta de forma significativa (sobre todo en el primer problema) el número de resoluciones grupales que consideran la *eliminación de obstáculos*.

Tabla 5-11.: Factores de complejidad en las producciones de las experiencias A1 (trabajo individual) y A2 (trabajo grupal *in situ*).

	Eliminación de obstáculos		Tamaño/densidad media		Tamaños/densidades diferenciadas	
	Individual	Grupal	Individual	Grupal	Individual	Grupal
P1	7 %	63 %	19 %	6 %	1 %	1 %
P2	4 %	16 %	0 %	0 %	1 %	0 %
P3	10 %	43 %	1 %	2 %	2 %	2 %
P4	1 %	16 %	21 %	8 %	0 %	2 %

El gran crecimiento del factor *eliminación de obstáculos* de la experiencia A1 a la experiencia A2 (Tabla **5-11**), se puede explicar por el hecho de que el trabajo *in situ* permite observar obstáculos que no se habían evocado en el plan de resolución en el aula. Esta idea la recogen los propios participantes, como se vio en la sección anterior, en las 25 respuestas a la pregunta C1 del cuestionario post-experiencia categorizadas como R6 (ver Tabla **5-6**). Por otro lado, el hecho de que en el aula los futuros maestros se hayan limitado a plantear individualmente un plan de resolución, y no una resolución completa, facilita que propongan procedimientos

Tabla 5-12.: Número de resoluciones individuales y grupales que incorporan factores de complejidad.

Cantidad de problemas en los que se consideran factores de complejidad	Individuales	Grupales
0	133(59 %)	11(17 %)
1	53(24 %)	24(38 %)
2	35(16 %)	18(29 %)
3	3(1 %)	7(11 %)
4	0(0 %)	3(5 %)
Total	224	63

cuya implementación es compleja, tales como calcular tamaños/densidades medias, que en la realidad implicaría hacer varias mediciones, lo que explicaría que este factor de complejidad descienda en las resoluciones grupales e *in situ* (ver Tabla **5-11**).
Respecto a la proporción de secuencias de resoluciones en las que se identifica uno o más problemas resueltos considerando factores de complejidad, en la Tabla **5-12** se muestran los resultados grupales e individuales. Se observa que el porcentaje de estudiantes que, individualmente, son capaces de incorporar factores de complejidad en más de un problema es muy bajo. En el caso de las producciones grupales el porcentaje es superior. Globalmente, sólo el 41 % de los estudiantes incorporan al menos un factor de complejidad en sus planes de resolución individuales al enfrentarse a la secuencia de cuatro problemas, mientras que una amplia mayoría (83 %) incorporan al menos un factor de complejidad en sus resoluciones grupales e *in situ* de la secuencia de cuatro problemas. Cabe pensar que el hecho de que las resoluciones grupales se realizaran *in situ* haya influido a la hora de identificar aspectos que no habían sido considerados previamente, lo que está en consonancia con los resultados del apartado 5.3.2 sobre la influencia que tiene trabajar en el lugar real del problema en las resoluciones de la experiencia A2.
Finalmente, se han cuantificado, para cada problema, las producciones que incorporan uno o más de un factor de complejidad en un mismo problema. Los resultados se presentan en la Tabla **5-13**. Hay pocos estudiantes que en sus producciones individuales propongan más de un factor de complejidad; esto ocurre, en mayor medida, en el primer problema *P1-Personas*, en el que siete estudiantes consideran la eliminación de obstáculos y un valor promedio para la densidad. Esta proporción es también reducida en las resoluciones grupales, en el primer problema solo tres grupos consideran un par de factores de complejidad (eliminación de obstáculos y densidad promedio, o eliminación de obstáculos y densidad diferenciada). Al analizar las producciones grupales esta proporción se multiplica, en particular en el problema *P4–Coches*.

Tabla 5-13.: Incorporación de uno o más factores de complejidad en la resolución individual y grupal según el problema.

	Producciones que consideran 1 factor de complejidad		**Producciones que consideran 2 factores de complejidad**	
	Individual	Grupal	Individual	Grupal
P1	21 %	58 %	3 %	4,5 %
P2	4,4 %	15 %	0 %	0 %
P3	10,7 %	37 %	0,8 %	3 %
P4	21 %	20 %	0,4 %	1,5 %

Los resultados de la Tabla **5-13** muestran que los futuros maestros no construyen modelos y estrategias muy refinadas para estimar cantidades, sino que ofrecen planes de resolución individuales y resoluciones grupales simples, en el mejor de los casos incluyendo un único factor de complejidad.

A partir de estos análisis cualitativos y cuantitativos de tipo descriptivo, especialmente de lo recogido en las Tablas **5-11** y **5-13**, se puede interpretar que hay características del contexto que promueven la incorporación de factores de complejidad. Puesto que, como se explicó en el Capítulo 4, los problemas P1-P2-P3-P4 se escogieron para diseñar una secuencia de problemas en la que contrastaran algunos valores de la variable de contexto (Tabla **4-3**), se pueden vincular estos valores de variables de contexto de los problemas y los factores de complejidad identificados en las producciones individuales y grupales.

En la Tabla **5-14** sólo se han incluido los valores de la variable de contexto para los que se interpreta, en base a lo observado en la Tabla **5-11**, una relación con la incorporación de factores de complejidad.

Las relaciones resumidas en la Tabla **5-14** ponen de manifiesto que existe una evolución desde los planes individuales a las resoluciones grupales. Por una parte, esta evolución implica la casi total desaparición del factor complejidad consistente en estimar en base a un área o densidad media en los problemas P1 y P4 (en P2 y P3 ya era bajo en los planes de resolución individual). Esto se explica porque la ejecución de los cálculos es más complicada cuando hay que promediar tamaños o considerar heterogeneidad que cuando solo hay que sugerir el procedimiento (en el plan individual), ya que implica un trabajo experimental sobre el terreno que los participantes no hacen, quizá porque sea costoso o tal vez por falta de tiempo. Sin embargo, el factor de complejidad consistente en considerar el área útil (eliminando obstáculos) aumenta en todos los problemas, pero especialmente en P1 y P3, donde ya era relativamente alto en los planes de resolución individuales. Esto se explica porque P1 y P3 son dos problemas con regiones de tamaño pequeño o mediano, en las que es sencillo hacer mediciones y estimaciones de las dimensiones del espacio, y por tanto calcular su área. En esa tarea relativamente asequible para sus instrumentos de medida (odómetros y metros extensibles), el hecho de considerar las partes de la región con obstáculos no supone una carga de trabajo excesiva. Cabe destacar que, en los problemas P2 y P4 los obstáculos (árboles y alcantarillas en P2; barreras en P4) ocupan un área muy pequeña en relación con la superficie total, que es grande; por tanto, en este caso, considerar o no el área útil no es significativo a la hora de estimar el número de elementos del área total. De hecho, en el problema P2, el tamaño de la región es grande y el de los elementos es pequeño, lo que explica la reducida proporción de producciones que incorporan factores de complejidad.

Tabla 5-14.: Relación entre variables del contexto del problema y factores de complejidad.

Variable de contexto del problema	Plan de resolución individual	Resolución grupal completa
Tamaño región: pequeño/ mediano	Los problemas P1 y P3 en los que la región tiene un tamaño medio o pequeño parecen promover, en las resoluciones individuales, la incorporación del factor de complejidad *eliminación de obstáculos*.	En las resoluciones grupales de los problemas P1 y P3 la incidencia de resoluciones que consideran la *eliminación de obstáculos* como factor de complejidad es muy alta, tanto en relación a los otros factores de complejidad, como en relación a los otros dos problemas.
Tamaño y forma elementos: mediano/ grande y heterogénea	Los problemas P1 y P4 en los que los elementos cuyo número se quiere estimar tienen un tamaño medio o grande, que además es percibido como heterogéneo, parecen promover, en las resoluciones individuales, la consideración de *densidad/tamaño medio*.	En las resoluciones grupales de los problemas P1 y P4, sin embargo, la incidencia de las resoluciones que consideran un *tamaño medio* se reduce en, aproximadamente un tercio.

5.4. Categorización y análisis de errores específicos para problemas de estimación en contexto real

En esta sección, que pretende abordar el objetivo de investigación OI 8, consta de cinco apartados. En la primera parte de esta sección se aborda la categorización específica de errores para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada. A partir del sistema de categorías de error presentado, en el apartado 5.4.2 se analizan las $N = 896$ producciones individuales de los futuros maestros en la experiencia A1, obteniendo resultados cuantitativos de tipo descriptivo sobre las categorías de error más frecuentes. En el apartado 5.4.3 se muestra y discute la relación de las categorías de error vinculadas al ciclo de modelización con algunas características del contexto de los problemas de la secuencia 1. Los resultados presentados en los tres primeros apartados se publicaron en Segura y Ferrando (2021).

En el apartado 5.4.4, a partir del análisis de los tipos de error descrito en los apartados precedentes, se definen tres niveles de rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real: un nivel cero (bajo) se vincula con cometer errores graves que conducen a producciones incompletas; un primer nivel de rendimiento (básico) se vincula a no cometer errores graves que conducen a producciones categorizadas como Incompleta, pero sí se cometen otros errores; un segundo nivel (alto) se vincula con no cometer ningún tipo de error.

Por último, en el apartado 5.4.5 se analizan los tipos de error en las producciones grupales e *in situ* de la experiencia A2, y se hace una comparativa entre los errores más frecuentes en esta experiencia y los más frecuentes en la experiencia A1, lo que permitirá abordar si el trabajo en grupo e *in situ* promueve mejoras en el niveles de rendimiento.

5.4.1. Clasificación de los errores específicos para problemas de estimación en contexto real

En el Capítulo 4 se describió el proceso de construcción del sistema de categorías de error, a partir de un análisis preliminar de errores y de la síntesis de algunos trabajos de investigación sobre errores en el proceso de modelización (especialmente, del trabajo de Moreno y cols., 2021) y en el proceso de medición y estimación de longitudes y áreas (Castillo-Mateo y cols., 2012). Los trabajos en los que se ha basado este sistema de categorías de error específico para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie se describieron con detalle en el Capítulo 2 (ver Tabla **2-4** para las categorías de Moreno y cols., 2021; y Tabla **2-5** para las de Castillo-Mateo y cols., 2012).

Se han tomado como base estos dos trabajos porque, como se explicó en el Capítulo 2, los problemas de estimación en contexto real que son objeto de nuestra investigación son problemas de modelización que requieren habilidades de estimación de medidas, especialmente de áreas y longitudes. Por tanto, se deben considerar tanto los errores inherentes al proceso de modelización como los errores en el proceso de estimación de medidas y cantidades. El análisis de los errores desde la perspectiva del conocimiento sobre resolución de problemas de los futuros profesores contribuirá a definir su rendimiento y aportar resultados sobre si son competentes en modelización y si son buenos estimadores. El sistema de categorías de error que presentamos como resultado, en la Tabla **5-15**, tiene en cuenta los procesos esenciales en la resolución de una tarea de modelización (el ciclo de modelización: simplificar para obtener el modelo inicial/real, matematizar para construir el modelo matemático, resolver aplicando una estrategia para encontrar una solución/estimación e interpretar/validar el resultado) y los procesos esenciales de estimación y sentido de la medida (concepto de unidad de medida, referente mental de la unidad de medida, uso de procedimientos de estimación). Se aplica a las producciones analizadas como sistema compuesto por modelo inicial y estrategia asociada. Los tipos de error específicos en la resolución de esta clase de problemas se clasifican en categorías de error en cada fase del ciclo de modelización. Algunos de estos errores tienen una naturaleza conceptual, pues están vinculados a la estructuración y matematización del contexto, y otros tienen una naturaleza procedimental, vinculados al trabajo matemático dentro del modelo.

La categoría de *error de simplificación* incluye la falta de desarrollo de un modelo inicial (real) de la situación real, que no se construye o queda incompleto, errores contemplados por Moreno y cols. (2021) en la Tabla **2-4**. Además, recoge los errores específicos de medición y estimación de la Tabla **2-5** de Castillo-Mateo y cols. (2012) que se relacionan con la percepción de las magnitudes que deben ser medidas o estimadas, y con la interiorización de los referentes de dicha magnitud, pues son procesos del sentido de la medida que intervienen en la fase de simplificación y estructuración de la situación real para este tipo de problemas. Algunos de los errores preliminares recogidos en la Figura **4-27** pueden ser ubicados en los tipos de error de esta categoría: "en blanco" formaría parte de E4, "referente inadecuado" formaría parte de E3, y "confunde área y longitud" de E2.

La categoría de error de matematización también incluye los errores contemplados en la Tabla **2-4** relacionados con la falta de desarrollo de un modelo matemático. Además, incluye errores específicos de cuantificación (asignación de una unidad de medida, uso de términos relacionados con la magnitud) de las magnitudes y referentes identificados en la fase anterior, relacionados con la Tabla **2-5**, pues son procesos indispensables para la construcción de un modelo matemático en este tipo de problemas. Algunos errores preliminares recogidos en la Figura **4-27** pueden ser ubicados en los tipos de error de esta categoría: "sin modelo matemático" y "modelo matemático sin desarrollar" formarían parte de E8, "asignación de medida incorrecta" formaría parte de E6 o de E7, "mezcla de dimensiones" y "falta de producto cartesiano" formarían parte de E5.

La categoría de *error de trabajo matemático*, como las precedentes, incluye aquellos errores contemplados por Moreno y cols. (2021) en la Tabla **2-4** que se relacionan con las estrategias y procedimientos para obtener una solución dentro del modelo matemático. En este tipo de problemas, estas estrategias están vinculadas a los procedimientos de cálculo y conversión de medidas, por eso también se recogen este tipo de errores de la Tabla **2-5**. Algunos errores preliminares recogidos en la Figura **4-27** pueden ser ubicados en los tipos de error de esta categoría: "error de inversión" ($b \div a$ en lugar de $a \div b$) formaría parte de E9, "cálculos incompletos" de E11, y "multiplicación por división" también formaría parte de E9.

La categoría de *error de interpretación* incluye los mismos errores contemplados en la Tabla **2-4**, pero al tratarse de problemas de estimación de medidas, se concretan adaptando errores de la Tabla **2-5** referidos a la ausencia de unidades de medida en la solución numérica y a que este valor numérico de la estimación sea incompatible con el rango de valores esperados. El único error preliminar de la Figura **4-27** que faltaba por reubicar, "sin unidad de medida",

Tabla 5-15.: Categorías de error y tipos de error asociados específicos de los problemas de estimación en contexto real.

Categoría	Tipos de error de la categoría	
Error de simplificación	E1. Modelo inicial incompleto asociado a la falta de consideración de aspectos (variables, relaciones, etc.) de la situación real. E2. Modelo inicial incorrecto debido a un error de percepción de la magnitud. E3. Modelo inicial incorrecto debido a una inadecuada interiorización de los referentes de la magnitud a estimar. E4. No construye un modelo inicial.	Conceptual
Error de matematización	E5. Modelo matemático incoherente con el modelo inicial debido a un error de significado de términos propios de la magnitud. E6. Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por inadecuada interiorización de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar. E7. Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por el uso de unidades de medida inadecuadas. E8. El modelo matemático no se construye o es incompleto porque no se cuantifican variables o relaciones del modelo inicial.	Conceptual
Error de trabajo matemático	E9. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos o errores de cálculo. E10. Error en la conversión de unidades de medida. E11. Procedimientos incompletos.	Procedimental
Error de interpretación	E12. Ausencia de unidades de medida en los resultados. E13. La estimación es claramente incompatible con la situación real.	Conceptual

formaría parte de E12.

Por lo tanto, tal y como se mencionó en el Capítulo 4, todos los errores detectados en la categorización preliminar pueden ubicarse dentro de las categorías y tipos de error de la Tabla

5-15. Además, al analizar las producciones de los futuros maestros con estas categorías y tipos de error, se identificaron errores que habían sido pasados por alto en la categorización preliminar, y que correspondían con alguno de los tipos de error de la Tabla **5-15**. En el siguiente apartado se presentarán los resultados del análisis de errores de los planes de resolución.

5.4.2. Análisis de errores de las producciones individuales de la experiencia A1

El análisis de los errores en las 896 producciones de los $N = 224$ profesores en formación, utilizando la categorización de la Tabla **5-15**, combina un análisis cuantitativo de carácter descriptivo y un análisis cualitativo que explica e interpreta cada tipo de errores en los planes de resolución. Siguiendo la metodología de análisis cualitativo de Moreno y cols. (2021) para las tareas de modelización, este análisis tampoco se realiza en comparación con una solución determinada, sino que se analiza la coherencia de los planes de resolución (modelo inicial y estrategia asociada) presentado.
La Tabla **5-16** muestra los resultados globales del análisis, basado en el sistema de categorías y tipos de error de la Tabla **5-15**, de las 896 producciones de la experiencia A1. Cabe destacar que, al analizar cada una de las producciones, todos los errores que aparecían en ellas fueron contabilizados.
A partir de la Tabla **5-16**, se observa que los futuros profesores cometieron un gran número de errores (461) al resolver la secuencia 1 de problemas de estimación en contexto real. De hecho, cometieron una media de 2,06 errores por futuro profesor (un error por cada dos producciones). De los $N = 224$ futuros profesores que participaron en la experiencia A1, 166 cometieron al menos un error, lo que representa el $74,11\,\%$ de la muestra. Si contabilizamos sólo a los 166 futuros maestros que cometieron errores, entonces la media es de 2,78 errores por resolutor.
La mayoría de los errores se concentraron en las categorías de error de simplificación $(37,31\,\%)$ y error de matematización $(39,91\,\%)$. Esto indica que hay dos fases del ciclo de modelización (Figura **2-4** y Tabla **2-2**) que generaron las mayores dificultades para los maestros en formación. Una es la fase en la que se comprende la situación real y se establece un modelo inicial (real) del espacio y de la distribución de los elementos a estimar (mediante la simplificación y la estructuración). La otra es la fase en la que se matematiza este modelo inicial, mediante la cuantificación de las magnitudes – áreas o longitudes - implicadas, para construir un modelo matemático que permita alcanzar una estimación. Los errores asociados a estas dos fases son de naturaleza conceptual.
Los futuros profesores también cometieron errores de tipo procedimental relacionados con la fase de trabajo matemático y la resolución del modelo $(20,39\,\%)$, aunque se trata de una proporción menor de errores. En cuanto a la categoría error de interpretación, su frecuencia fue muy baja $(2,39\,\%)$. Esto no se explica porque esta fase genere menos dificultades en los

Tabla 5-16.: Frecuencia de cada tipo de error en las 896 producciones de la experiencia A1.

Tipo de error	**Frecuencia**
E1	27 (5,86 %)
E2	100 (21,69 %)
E2	4 (0,87 %)
E4	41 (8,89 %)
Error de simplificación	172 (37,31 %)
E5	66 (14,32 %)
E6	7 (1,52 %)
E7	24 (5,21 %)
E8	87 (18,87 %)
Error de matematización	184 (39,91 %)
E9	44 (9,54 %)
E10	1 (0,22 %)
E11	49 (10,63 %)
Error de trabajo matemático	94 (20,39 %)
E12	2 (0,43 %)
E13	9 (1,95 %)
Error de interpretación	11 (2,39 %)
Total	461

futuros profesores, como muestra el trabajo de Moreno y cols. (2021), y como se verá en los resultados del análisis de la experiencia A2, en el próximo apartado. La explicación de una proporción tan baja de errores de interpretación se debe al carácter esquemático del plan de resolución, que no requería que realizaran estimaciones numéricas del problema y, por tanto, como se verá en el análisis cualitativo, en pocos planes de resolución se presentaba un resultado numérico que el resolutor debiera interpretar.
Una vez comentados los resultados globales del análisis descriptivo, presentamos los resultados del análisis cualitativo para cada tipo de error, que nos va a permitir explicar sus características. Introduciremos cada categoría de error y explicaremos los tipos de error asociados, apoyándonos en ejemplos de producciones de los futuros maestros.

Errores de simplificación

E1. *Modelo inicial incompleto asociado a la falta de consideración de aspectos (variables, relaciones, etc.) de la situación real.*
Representa el $5,86\,\%$ de los errores cometidos por los futuros profesores. En la fase de es-

tructuración de la situación real, el resolutor lo comete cuando no identifica las variables del modelo inicial ni los aspectos de la situación real que deben incorporarse a dicho modelo. En el caso de los problemas de secuencia 1, la mayoría de los errores de este tipo se producen porque el resolutor no considera que el espacio ocupado por los elementos es una variable del modelo para obtener la estimación de su número. Por ejemplo, en la siguiente transcripción de un plan de resolución para el problema *P1-Personas*, el resolutor 4ºD-I.8.1 no tiene en cuenta el espacio ocupado por cada persona, y tampoco considera que debe haber personas distribuidas en el área del porche:

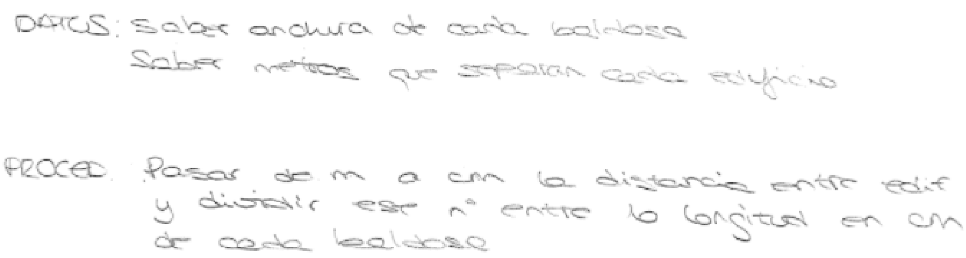
> "Primero tenemos que saber el tamaño total del porche. Para ello, tendríamos que estimar el total a partir de la longitud y la anchura [aquí termina la producción]."

Un error como el anterior imposibilita desarrollar una estrategia para obtener una estimación del número de elementos, por lo que esa producción se categoriza como Incompleta. De hecho, esta producción es muy similar a la del resolutor 4ºF-I.6.3 que comentamos en el apartado 5.1.1 como ejemplo de Incompleta (este resolutor escribía "Necesitamos saber el tamaño del porche en su conjunto. Tendríamos que medir el ancho y la longitud para poder obtener el total de metros cuadrados."). En efecto, el desarrollo de un modelo inicial es condición necesaria para plantear un plan de resolución que permita obtener una estimación, el error E1 conduce a producciones incompletas. En consecuencia, como este error impide resolver con éxito el problema en el que se comete, lo consideraremos un error grave.

E2. *Modelo inicial incorrecto debido a un error de percepción de la magnitud.*
Se confunden las magnitudes implicadas en el modelo inicial de la situación real, confundiendo longitud y área, o área y volumen. Este es el error más numeroso en el proceso de resolución de los problemas de estimación en contexto real de la secuencia 1, ya que apareció en 100 producciones, lo que representa el $21,69\,\%$ del total de errores. El error E2 es un indicador de profundas carencias en el sentido de estimación de magnitudes, ya que muchos futuros profesores no parecían diferenciar bien las magnitudes implicadas en los problemas de la secuencia 1, ni elegir la correcta. La mayoría de los errores categorizados como E2 se han registrado en *P2-Baldosas*, pues ha sido frecuente que el resolutor confunda la superficie entre el gimnasio y la Facultad de Educación (que es lo que se ajusta a la situación real que plantea el problema) con la distancia entre el gimnasio y la Facultad de Educación, como se puede ver en la siguiente transcripción de un plan de resolución:

> "Calcularía cuántas baldosas hay en x metros, o si no fuera exacto, contaría x baldosas y mediría cuánto mide ese grupo [en longitud]. Ejemplo: $20\text{baldosas} = 1m$. Luego mediría los metros entre los dos edificios y los multiplicaría por las baldosas en un metro."

En este caso, el plan de resolución está completo: la estrategia, basada en densidad lineal, es correcta, pero en el modelo inicial el espacio se ha estructurado sobre la magnitud longitud, se ha confundido la distancia entre los dos edificios con la superficie que delimitan los dos edificios. Otro ejemplo similar lo encontramos en la producción del resolutor 4ºK-I.4.2, pues como puede leerse en la Figura **5-63**, propone dividir la distancia entre los edificios del gimnasio y de la facultad entre la longitud de una baldosa (unidad base lineal), porque el resolutor I.4.2 ha percibido que la magnitud implicada en la situación del problema es la longitud, en lugar del área.


DATOS: Saber anchura de cada baldosa
Saber metros que separan cada edificio

PROCED. Pasar de m a cm la distancia entre edif
y dividir ese nº entre la longitud en cm
de cada baldosa

Figura 5-63.: Error E2, percepción de magnitud longitud en lugar de magnitud área, en el problema *P2-Baldosas.*

El tipo de error E2 también apareció en otros problemas, relacionado con una mala percepción de la magnitud elegida para expresar el espacio ocupado por el elemento a estimar. Por ejemplo, en *P3-Césped*, algunos futuros maestros confundieron el área de la hoja con el ancho de la hoja; mientras que en *P1-Personas*, encontramos planes de resolución en los que se confunde el área ocupada por una persona con la altura ocupada por una persona. Por ejemplo, encontramos este error de percepción de magnitud en la producción del resolutor 4ºK-I.11.1:

> "Habría que medir el porche de entrada [no indica cómo hacerlo ni qué medida de magnitud se quiere obtener] y medir la altura media de una persona, y dividir la medida del porche y la de la persona."

También se encontraron producciones que percibieron que problemas como P1 o P3 involucran la magnitud volumen. Por ejemplo, en la producción del resolutor 4ºK-I.3.3 que puede verse en la Figura **5-64**, hay una percepción (errónea) de que la situación real que plantea el problema *P1-Personas* implica magnitudes de volumen.


Calcular el volumen medio de una persona y calcular el volumen
del porche, y dividirlo

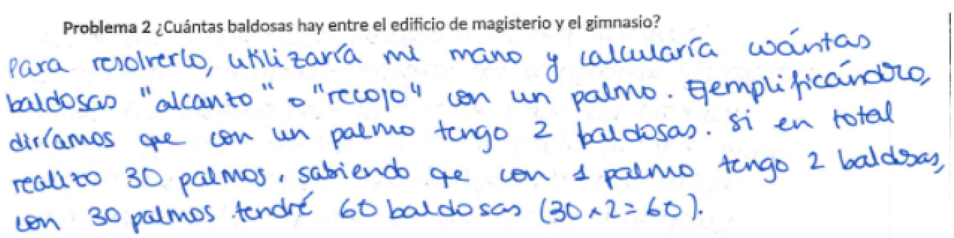
Figura 5-64.: Error E2, percepción de magnitud volumen en lugar de magnitud área, en el problema *P1-Personas.*

Como hemos visto, el tipo de error E2 no necesariamente conduce a producciones categorizadas como incompleta, porque no impide desarrollar un plan de resolución, aunque éste conduce a una estimación inservible por relacionarse con magnitudes que no se corresponden con el problema. En definitiva, el error E2 denota deficiencias serias en el sentido de la medida.

E3. *Modelo inicial incorrecto debido a una inadecuada interiorización de los referentes de la magnitud a estimar.*
Se produce cuando el resolutor no ha interiorizado una medida adecuada de algún referente de la magnitud a estimar, por ejemplo, cuando en P1 piensa que en una baldosa grande del suelo del porche cabe una persona (cuando pueden caber tres o cuatro). Este tipo de error representa un número reducido de errores (0,87 % del total), quizá debido al carácter esquemático del plan de resolución (la mayoría de los resolutores no se aventuran a estimar numéricamente el referente de magnitud, sino que sólo proponen su uso de forma cualitativa), pero también influye el hecho de que la secuencia 1 se desarrolla en un entorno familiar para los alumnos, por lo que pueden usar referentes conocidos. Por ejemplo, en el *P2-Baldosas*, encontramos el siguiente error del resolutor 4ºD-I.10.3 cuando se toma un paso como referente de la longitud de dos baldosas, porque claramente abarca más de dos baldosas, y el propio resolutor expresó sus dudas una vez propuesto:

> "(...) como la baldosa es más pequeña que un pie, es decir, no es tan larga, lo que haría es dividir el número de pasos que he contado entre dos, y eso me daría el número de baldosas. Creo que eso sería un error, por lo que tendría que medir una baldosa, tanto su anchura como su longitud."

El error está al confundir pie (que abarca algo menos que dos baldosas pequeñas) y paso (que abarca más). En efecto, después de proponerlo, el resolutor I.10.3 escribe que cree que es un error tomar un paso como referente de la longitud de dos baldosas, y finalmente, proponer usar el S.I. midiendo el ancho y el largo de las baldosas con un metro.
En la Figura **5-65** encontramos otro ejemplo de interiorización inadecuada del referente en *P2-Baldosas*, pues el resolutor 4ºK-I.7.1 compara un palmo de la mano con dos baldosas, cuando claramente una mano apenas abarca una baldosa pequeña.


Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Para resolverlo, utilizaría mi mano y calcularía cuántas baldosas "alcanzo" o "recojo" con un palmo. Ejemplificándolo, diríamos que con un palmo tengo 2 baldosas. Si en total realizo 30 palmos, sabiendo que con 1 palmo tengo 2 baldosas, con 30 palmos tendré 60 baldosas (30×2=60).

Figura 5-65.: Error E3, referente palmo inadecuado para dos baldosas, en el problema *P2-Baldosas.*

También se utiliza el palmo como referente para la superficie entre el gimnasio y la facultad de Magisterio, pero la comparación resulta también inadecuada, pues el resolutor I.7.1 piensa que con 30 palmos cubriría la superficie, cuando es manifiestamente perceptible que se necesitarían muchos más palmos para cubrirla, miles de ellos, y que es un referente inadecuado.

E4. *No construye un modelo inicial.*
Este tipo de error corresponde a las respuestas en blanco o a las respuestas del tipo “no he comprendido el problema” o “no sé hacer el problema”. E4 es un error numeroso (8, 89 % del total) porque hubo muchas respuestas de este tipo (26) en el problema *P3-Césped*. Se trata de un error grave porque indica que una producción está Incompleta, es decir, que el resolutor no ha tenido éxito en ese problema.

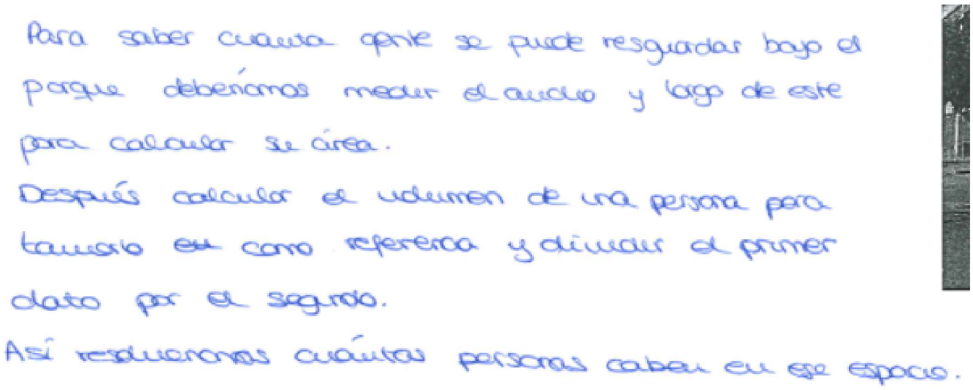
Errores de matematización

E5. *Modelo matemático incoherente con el modelo inicial debido a un error de significado de términos propios de la magnitud.*
E5 es el tercer tipo de error más frecuente (14, 32 % del total) de los errores analizados en las 896 producciones. Durante el proceso de matematización de las variables que intervienen en el modelo inicial, este error se produce cuando se utiliza de forma inapropiada un término relacionado con la magnitud involucrada. En la mayoría de los errores de tipo E5 analizados, este uso inadecuado se debe a confundir o utilizar simultáneamente diferentes magnitudes en un procedimiento sin respetar la homogeneidad dimensional. Por ejemplo, se encuentran planes de resolución que proponen que, para obtener el número de elementos, se dividan las medidas de magnitudes de diferente dimensión (por ejemplo, área del espacio total dividida por la anchura del elemento a estimar). Este error está vinculado con E2, pues para mezclar medidas de distinta dimensión se debe haber producido previamente algún error de percepción de magnitud de alguna de las variables del modelo. Encontramos un ejemplo en la siguiente transcripción de un plan de resolución para *P4-Coches*:

> “Datos [medidas que necesita obtener/estimar] → cuánto ocupa un coche y la longitud del aparcamiento. [Proceso:] Tomaría la medida del aparcamiento [la longitud] y la dividiría por la superficie del coche.”

Aunque hay varias omisiones, el resolutor indica que necesitaría obtener “la longitud del aparcamiento”, y que luego “tomaría la medida del aparcamiento” (entendemos que la longitud, pues era la magnitud que había mencionado como dato necesario) y la dividiría por la “superficie del coche”. Hay, como se decía, un error de tipo E2 al trabajar en su modelo con la magnitud “longitud” del aparcamiento y no con área, pero, además, luego trata de dividir una medida de magnitud unidimensional (longitud del aparcamiento) entre una medida de longitud bidimensional (área del coche), lo que supone un error de significado en términos de magnitud, es decir, categorizado como E5.
Otro error de este tipo lo encontramos en la producción del resolutor 4ºF-11.5, quien, después de confundir área ocupada por una persona con volumen ocupado por una persona (E2),

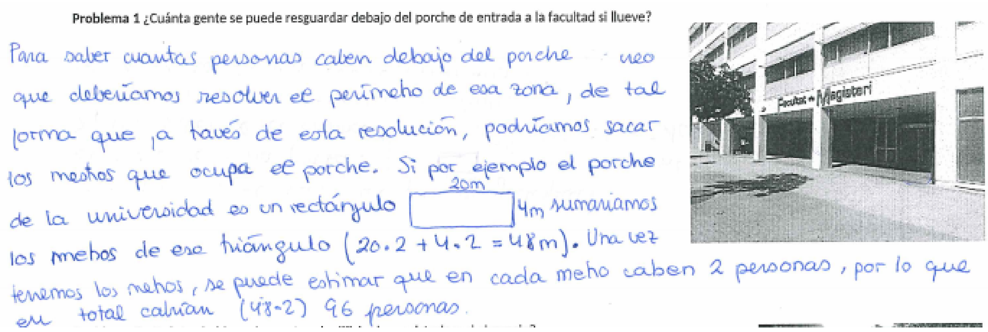
propone dividir el área de porche entre el volumen que ocupa una persona, como puede verse en la Figura **5-66**.



Para saber cuanta gente se puede resguardar bajo el porque deberíamos medir el ancho y largo de este para calcular su área.
Después calcular el volumen de una persona para tomarlo en como referencia y dividir el primer dato por el segundo.
Así resolveríamos cuántas personas caben en ese espacio.

Figura 5-66.: Error E5, dividir área entre volumen, en el problema *P1-Personas*.

En este punto, conviene apuntar que la diferencia entre la producción de la Figura **5-64** y la de la Figura **5-66** está en que en la primera hay solamente un error de percepción de magnitud, pues construye un modelo basado en volúmenes cuando no es lo que plantea la situación real del problema, pero el procedimiento en términos de la magnitud es coherente. Sin embargo, en la producción de la Figura **5-66**, además del error de percepción de una magnitud, el procedimiento en términos de las magnitudes implicadas es incoherente.
Otro ejemplo de E5 es la confusión del concepto de área y del concepto de perímetro. Es conocida la frecuente confusión entre área y perímetro, ya que su cálculo suele ir acompañado de fórmulas que estereotipan la comprensión y relación de los fundamentos espaciales de estos dos conceptos (Dickson y cols., 1991). Encontramos varios planes de resolución que cometen este error, por ejemplo, el de la Figura **5-67**.



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Para saber cuantas personas caben debajo del porche creo que deberíamos resolver el perímetro de esa zona, de tal forma que, a través de esta resolución, podríamos sacar los metros que ocupa el porche. Si por ejemplo el porche de la universidad es un rectángulo 20m 4m sumaríamos los metros de ese triángulo (20·2 + 4·2 = 48m). Una vez tenemos los metros, se puede estimar que en cada metro caben 2 personas, por lo que en total cabrían (48·2) 96 personas.

Figura 5-67.: Error E5, confusión de área y perímetro, en el problema *P1-Personas*.

El resolutor escribe que "deberíamos resolver el perímetro de esa zona" pues eso permitiría conocer "los metros que ocupa el porche". Pero lo cierto es que lo que ocupa el porche, es decir, el espacio útil sobre el que pueden distribuirse las personas, es su superficie, lo que implica calcular el área.

Entre los errores categorizados como de tipo E5 también se encuentra, con bastante frecuencia, uno que denominaremos como “linealización parcial”. Aparece en aquellos planes de resolución basados en linealización que estiman el número de elementos a lo largo y a lo ancho de una superficie, pero en los que el resolutor no realiza el producto cartesiano para pasar de estimaciones unidimensionales (parciales) a una bidimensional, por lo que comete un error en términos de la magnitud. Esto queda claro en la siguiente transcripción de un plan de resolución para *P2-Baldosas*:

> “Calcula [mide o estima] los metros de la base [del rectángulo que forma el espacio total entre el gimnasio y la Facultad], desde un lado del gimnasio al otro, averigua [cuenta] cuántas baldosas hay en un metro, y multiplícalo [para obtener el número de baldosas en la base]. Haz lo mismo con la altura [del rectángulo].”

En el plan de resolución anterior, observamos un modelo inicial basado en la linealización de la distribución de los elementos en el espacio (considera las baldosas por filas), y una estrategia correcta para estimar el número de baldosas en la anchura y la longitud de la superficie rectangular (estimaciones parciales, unidimensionales). Sin embargo, la magnitud “número de baldosas” corresponde a toda la superficie (bidimensional), siendo el resultado del producto cartesiano producto del número de baldosas en anchura por el número de baldosas en longitud. Puesto que el problema *P2-Baldosas* se relaciona con una mayor proporción de planes de resolución Linealización, esta clase de error de E5 aparece de manera mayoritaria en ese problema.

E6.*Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por inadecuada interiorización de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar.*
El tipo de error E6 se produce al cuantificar un referente en unidades de medida del S.I. asignándole un valor que no se corresponde con la realidad, por ejemplo, cuando se considera que un paso equivale a un metro. La diferencia con E3 es que aquel tipo de error afectaba a la relación entre el referente de medida y otras variables del modelo inicial (por ejemplo, entre un paso y las baldosas), mientras que en E6 la relación se establece entre el referente de medida y unidades de medida del S.I., es decir, que forma parte del proceso de matematización del modelo inicial. Se trata de un error en el sentido de la medida y la estimación, por no tener interiorizado, por ejemplo, qué significa 1 metro, o qué significa 1 centímetro cuadrado, etc. Encontramos un ejemplo en la producción del resolutor 4ºK-I.6.3, como puede verse en la Figura **5-68**. En este plan de resolución, el resolutor I.6.3 escribe que “(...) necesitamos saber lo que mide el área de cada brizna (...) Brizna $\rightarrow$ Ancho $= 1m$, Largo $= 3m$, [Área] $= 1 \times 3 = 3m^2$.”
Del ejemplo anterior se desprende que las unidades de medida del S.I. utilizadas para la longitud de una brizna de hierba no fueron bien interiorizadas por el resolutor, pues utiliza el metro para expresar la medida de la brizna, dando una cuantificación del tamaño de la misma (1 metro de ancho por 3 metros de largo) que claramente no se corresponde con la

realidad. Esto sólo puede ser explicado porque el resolutor no tiene una idea correcta de lo que significa el metro como unidad de medida.

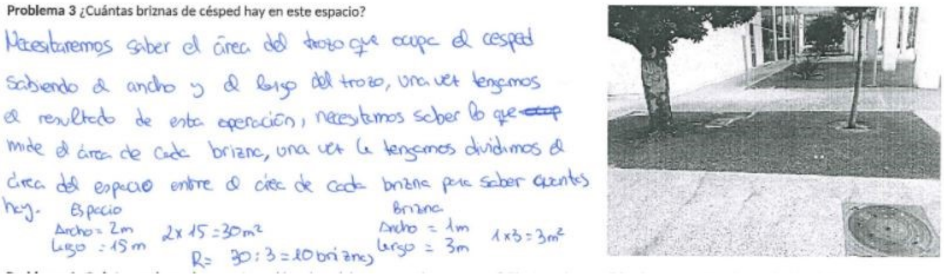


Figura 5-68.: Error E6, inadecuada interiorización de unidades de medida del S.I., en el problema *P3-Césped*.

E6 no es un error frecuente, aunque el carácter esquemático del plan de resolución puede explicar que sólo haya representado el $1,52\,\%$ del total de errores, ya que implica que el resolutor cuantifique las variables del modelo inicial (como ocurre en la producción de la Figura **5-68**). En la mayoría de planes de resolución, como ya se ha explicado, la matematización tiene carácter de propuesta, y no se incluyen valores numéricos. Es de esperar que este tipo de error E6 aumente en las resoluciones que requieren efectuar las estimaciones numéricas, como las de la experiencia A2.

E7. *Modelo matemático incoherente con el modelo inicial por el uso de unidades de medida inadecuadas.*
Aparece en 24 planes de resolución, lo que representa el $5,21\,\%$ del total de errores analizados. El tipo de error E7 se comete cuando el resolutor utiliza unidades de medida de una magnitud que no se corresponde con la que está midiendo; por ejemplo, cuando, para expresar la medida de una superficie, expresa el resultado en metros en lugar de en metros cuadrados. Este tipo de error se detecta, por ejemplo, en la siguiente transcripción de un plan de resolución del resolutor 4ºA-I.7.4 para *P1-Personas*:

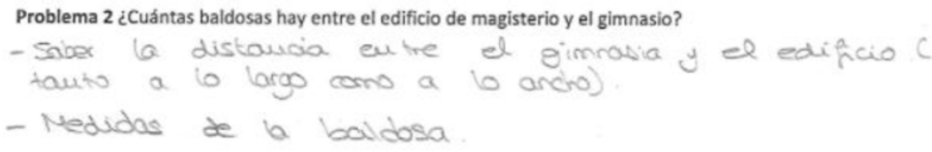
> "En primer lugar, mediría la anchura y la longitud del suelo del porche para calcular su área y así saber de cuántos metros disponemos. Luego establecería una medida [de superficie] por persona, por ejemplo, una persona ocupa un metro, para calcular cuántas personas caben en el porche de forma manera aproximada, dividiendo los metros totales del piso por la medida [de la superficie ocupada] de las personas."

En este plan de resolución se observa que el resolutor se refiere explícitamente al área del porche, pero la expresa en metros en lugar de en metros cuadrados, y luego se refiere a la medida de una persona, aquí hay cierta ambigüedad, pero el procedimiento empleado (Unidad base) ayuda a interpretar que el resolutor se refiere a la medida del área ocupada por una persona, que también expresa en metros. Este tipo de error E7, por tanto, no proviene de una percepción errónea de la magnitud (E2), porque el resolutor está utilizando en su modelo la magnitud área, sino de la incorrecta expresión de la medida de dicha magnitud, debida al uso de unidades de medida (el metro) que no se corresponden con la magnitud expresada (área).

E8. *El modelo matemático no se construye o es incompleto porque no se cuantifican variables o relaciones del modelo inicial.*
E8 es el segundo tipo de error más numeroso, representando el $18,87\,\%$ del total de errores analizados. Este error se comete cuando no se han matematizado/cuantificado todas las variables o relaciones del modelo inicial de la situación real, es decir, cuando el modelo matemático no está completo. También cuando la respuesta no se basa en la construcción de un modelo matemático.
Hay dos posibilidades dentro de esta categoría de error. Por un lado, hemos considerado que los planes de resolución basados en el recuento directo cometen un error de tipo E8, ya que su plan de resolución no se basa en un modelo matemático que permite una estimación razonada. No hay modelo matemático construido, y aunque en este caso no se considera como producción Incompleta, con la asignación del error E8 a Recuento se establece que es una propuesta de resolución limitada, como ya se había discutido en el apartado 5.1.1. En dicho apartado encontramos ejemplos de producciones basadas en recuento directo que estarían cometiendo un error de tipo E8 (ver Figura **5-1**, Figura **5-4** y Figura **5-5**).
La segunda posibilidad de error de tipo E8 es aquel en el que la producción no matematiza/cuantifica las variables del modelo inicial necesarias para proporcionar una estrategia que permita obtener una estimación del número de elementos que caben en la superficie delimitada del problema. Hay numerosos ejemplos de planes de resolución que no desarrollan completamente el modelo matemático. En la siguiente transcripción de una producción para *P4-Coches*, observamos que el resolutor no concreta la magnitud que mide en el aparcamiento, y no puede ser interpretada por otros elementos del texto. Además, el resolutor tampoco matematiza las relaciones entre las medidas, es decir, no indica los procedimientos para obtener la estimación del número de coches a partir de las variables consideradas (medida del aparcamiento y medida del coche):

> "Necesitaríamos saber las medidas [¿cuáles?] del aparcamiento y el tamaño de un coche para saber [¿cómo?] cuántos coches podrían caber."

En la producción anterior, la falta de desarrollo del modelo impide saber si el resolutor plantea un tipo de resolución basado en Unidad base o en Linealización, por lo que este error E8 se considera grave y conduce a que la producción sea categorizada como Incompleta. Un caso parecido es el de la producción para *P2-Baldosas* que aparece en la Figura **5-69**.
En la producción anterior, el resolutor indica que necesita "saber la distancia" entre los edificios "tanto a lo largo como a lo ancho" y también "las medidas de la baldosa". Sin embargo, con estas medidas del espacio entre los edificios y de las baldosas no podemos saber



Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

- Saber la distancia entre el gimnasio y el edificio (tanto a lo largo como a lo ancho).
- Medidas de la baldosa.

Figura 5-69.: Error E8, modelo matemático incompleto, en el problema *P2-Baldosas*.

qué quiere obtener el resolutor: podría calcular el área del espacio y el área de la baldosa, y dividir estas medidas (Unidad base), pero también podría calcular cuántas baldosas hay a lo ancho y cuántas a lo largo, y hacer el producto cartesiano (Linealización). No podemos interpretarlo porque, además de no haber mencionado las magnitudes con las que va a trabajar en su modelo, el resolutor tampoco ha explicado la relación matemática entre las variables (medidas de la baldosa y medidas del espacio delimitado por los edificios). Es una producción en la que, como la anterior, el error E8 conlleva que sea categorizada como Incompleta.

Como hemos visto en los dos ejemplos anteriores, en muchos de los errores categorizados como E8 hay una falta de definición de las variables relevantes para la resolución del problema y las dependencias entre estas variables, lo que indica profundas dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos derivados del modelo inicial de la situación real. Esto hace que el error E8 sea considerado, salvo en los planes de Recuento y en algunas producciones en las que ha faltado matematizar algún elemento menor que no ha impedido el desarrollo de un plan de resolución, como grave, ya que aparece frecuentemente asociado a las producciones categorizadas como Incompleta. En esos casos, E8 impide resolver con éxito el problema.

Errores de trabajo matemático

E9. *Uso de procedimientos de cálculo incorrectos o errores de cálculo.*

Los errores de tipo E9 se producen cuando el resolutor utiliza una fórmula inadecuada, o un procedimiento de cálculo incorrecto; por ejemplo, cuando escribe que el área de un rectángulo es la base más la altura. Se trata de un error numeroso en los planes de resolución de la secuencia 1 de problemas de estimación en contexto real: supone el $9,54\,\%$ del total de los errores analizados.

En esta tipología, el error más recurrente es el uso del *algoritmo inverso* (Ivars y Fernández, 2016), que consiste en que, para una situación con una estructura de división de la medida, se utiliza una multiplicación. En el caso de los planes de resolución categorizados como Unidad base, se comete este error cuando el procedimiento área de la superficie $\div$ área del elemento $=$ número de elementos se invierte en área de la superficie $\times$ área del elemento $=$ número de elementos. Encontramos un ejemplo de error en el uso del algoritmo inverso en la siguiente transcripción de un plan de resolución Unidad base del resolutor 4ºK-I.2.2 para *P1-Personas*:

> "Primero debemos medir el largo y el ancho del porche para averiguar el área del espacio. A continuación, sacaríamos la media [del área] que ocupa una persona y multiplicaríamos ambos datos."

El resolutor I.2.2 indica que debe multiplicarse el área del espacio del porche y el área media que ocupa una persona para obtener el número de personas que caben en el espacio, por lo que no ha comprendido que su resolución requiere un procedimiento de división de medidas. Otro ejemplo lo encontramos en el plan de resolución del resolutor 4ºA-I.2.4 para el problema *P4-Coches*, como se observa en la Figura **5-70**. El resolutor escribe que debe calcularse/estimarse qué superficie mide un coche y después multiplicar esta medida por la medida de la superficie de todo el aparcamiento.

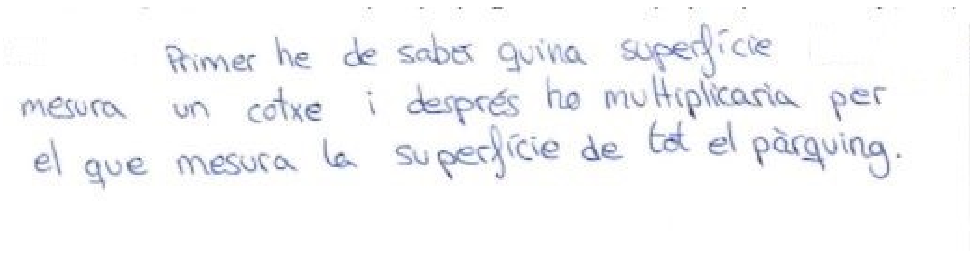

Primer he de saber quina superfície
mesura un cotxe i després ho multiplicaria per
el que mesura la superfície de tot el pàrquing.

Figura 5-70.: Error E9, uso de algoritmo inverso en plan de resolución del problema *P4-Coches*.

En el caso de los planes de resolución categorizados como Densidad, el error de utilizar el algoritmo inverso también aparece, y consiste en que el procedimiento de cálculo (número de elementos de la subárea muestral $\div$ subárea muestral) $\times$ área total de la superficie, se invierte en (número de elementos de la subárea muestral $\times$ subárea muestral) $\times$ área total de la superficie, es decir, en que la densidad de la distribución, que se obtiene por división de medidas, se calcula erróneamente como producto de medidas. Dentro de la tipología de E9, también aparecen, aunque con una frecuencia ligeramente menor, los errores de inversión , que implica invertir el orden en una razón entre dos medidas de magnitud (González-Calero, Arnau, y Laserna-Belenguer, 2015). En el caso de los planes de resolución categorizados como Unidad base, el error de inversión implica sustituir la razón área de la superficie $\div$ área del elemento $=$ número de elementos por la razón inversa, es decir, área del elemento $\div$ área de la superficie $=$ número de elementos. Lo encontramos, por ejemplo, en la siguiente transcripción de un plan de resolución para *P4-Coches*:

> "En primer lugar, necesitaría saber [la superficie de] el espacio total del aparcamiento y cuánto [superficie] mide una plaza [de coche]. Así que podríamos dividir [el área de] ese espacio por [el área de] todo el aparcamiento, y entonces podríamos saber cuántos coches cabrían sin dejar espacio."

El resolutor propone dividir el área de una plaza de coche entre el área del aparcamiento para obtener el número de coches que caben en el aparcamiento. Puede haber una explicación para

este fenómeno: la coincidencia en el orden de las palabras (Clement, 1982), que se debería a una conversión literal del orden de las palabras del enunciado a procedimientos matemáticos, sin una representación mental clara de la situación. En efecto, en el enunciado de *P4-Coches* (Figura **4-5**), la palabra "coches" aparece antes que la palabra "parking".
El error de inversión también se produce en los planes de resolución categorizados como Densidad, en los que, en el procedimiento de cálculo: número de elementos en la subárea muestral $\times$ (área total de la superficie $\div$ subárea muestral), la razón entre áreas se invierte, obteniendo el procedimiento erróneo: número de elementos en la subárea muestral $\times$ (subárea muestral $\div$ área total de la superficie), como se observa en la Figura **5-71**.

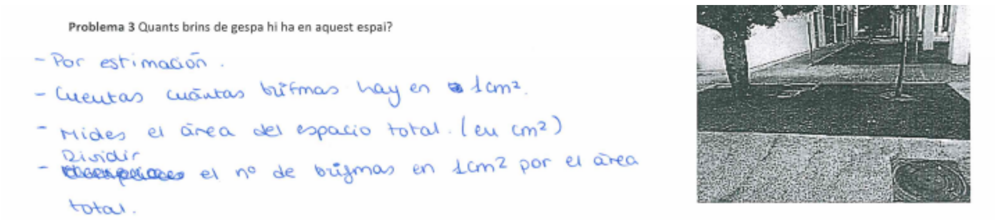
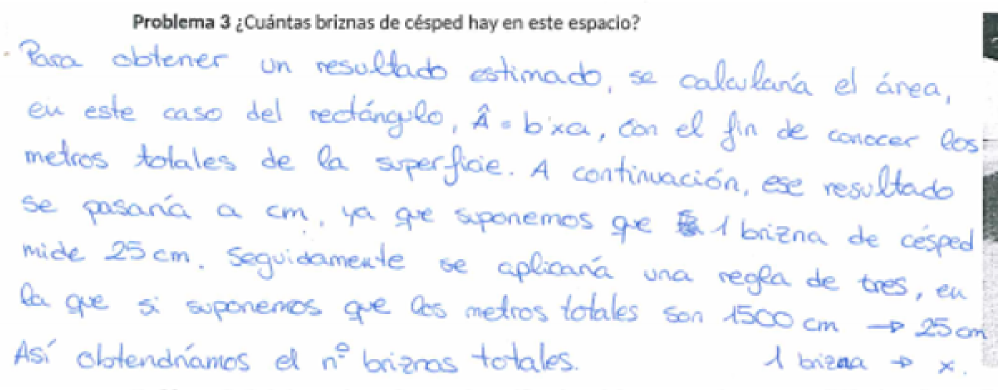


Figura 5-71.: Error E9, error de inversión en plan de resolución del problema *P3-Césped*.

En el plan de resolución de la Figura **5-71**, el resolutor escribe que, para obtener el número de briznas de césped que cubren la superficie total, debe "dividir el número de briznas en 1 cm^2 por el área total". El resolutor ha invertido la razón entre subárea muestral ($1cm^2$) y área total, por eso en lugar de multiplicar por el área total, dice que hay que dividir por el área total.
Al trabajar con este tipo de razonamientos basados en la proporcionalidad, algunos resolutores plantean procedimientos de regla de tres en sus planes de resolución. En este tipo de procedimientos también encontramos errores de inversión: en el uso incorrecto de la regla de tres, cuando se altera el orden de las tres cantidades conocidas. Por ejemplo, en el plan de resolución para *P3-Césped* de la Figura **5-72**, encontramos un procedimiento basado en una regla de tres invertida.
El resultado de aplicar la regla de tres planteada por el resolutor es dividir el área de una brizna, $25cm$ [cm^2, esto es un error de tipo E7], entre el área de total de la jardinera, $1500cm$ [cm^2]. El resolutor ha planteado en su regla de tres que el área total es al área de la brizna como 1 brizna al número total de briznas, cuando esto último debería tener el orden inverso. Este error se debe a utilizar un procedimiento mecánico en lugar de razonar sobre el significado de la razón entre dos áreas. Estos procedimientos mecánicos de resolución de problemas son un obstáculo para la comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados (Verschaffel y cols., 2000).

E10. *Error en la conversión de unidades de medida.*
Este error se produce cuando una unidad de medida no se convierte correctamente a otra



Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Para obtener un resultado estimado, se calcularía el área, en este caso del rectángulo, $\hat{A} = b \times a$, con el fin de conocer los metros totales de la superficie. A continuación, ese resultado se pasaría a cm, ya que suponemos que 1 brizna de césped mide 25 cm. Seguidamente se aplicaría una regla de tres, en la que si suponemos que los metros totales son 1500 cm → 25 cm
Así obtendríamos el nº briznas totales. 1 brizna → x.

Figura 5-72.: Error E9, error de inversión en regla de tres, , en el problema *P3-Césped.*

unidad de medida de la misma magnitud. Por ejemplo, cuando, para una medida de longitud expresada en metros, se calcula su valor en centímetros. Sólo apareció en una producción, la del resolutor 4ºF-I.9.2 para *P3-Césped*:

> "(...) contamos las briznas en ese espacio y multiplicamos, sabiendo que un metro cuadrado son 100 cm^2 o 10 dm^2."

El resolutor I.9.2 aplica mecánicamente que 1 metro es equivalente a 100cm o a 10dm, sin razonar sobre si esa conversión se mantiene para las unidades de medida de área, es decir, sin haber asimilado que 1 metro cuadrado (un cuadrado de un metro de lado) equivale a la cantidad de cuadrados de 1cm de lado que lo cubren, es decir, 100×100.
No se encuentran prácticamente errores de tipo E10 en esta parte de la experiencia ya que pocos futuros maestros trabajan con datos numéricos en sus planes de resolución. Es de esperar, como así veremos, que la proporción de este tipo de errores aumente en las resoluciones en las que se debe estimar o medir datos numéricos de la situación real, como ocurren en la experiencia A2.

E11. *Procedimientos incompletos.*
Se comete un error de tipo E11 cuando, una vez desarrollado el modelo matemático, los procedimientos que forman parte de la estrategia para obtener la estimación no aparecen completos o explicitados. El tipo de error E11 se diferencia del E8 (modelo matemático incompleto) en que aparece una vez el modelo matemático está desarrollado; es decir, que se encuentra en resoluciones en las que las variables del modelo sí están todas cuantificadas, pero alguna parte del procedimiento de cálculo de la estimación ha sido obviada. Es un error de naturaleza procedimental, no implica la falta de desarrollo de conceptos, como sí ocurre con el error E8.
Los errores E11 se pueden deber a que el resolutor asume implícitamente parte de los procedimientos de cálculo de la estimación, pero no los escribe, a pesar de que al comienzo de la experiencia A1 se les indicó que todos los pasos debían hacerse explícitos. El número de este

tipo de errores es alto, pues suponen un 10,63 % del total de los errores analizados. La proporción de este tipo de errores es alta debido al carácter esquemático y sintético del plan de resolución, que puede llevar al descuido en la explicación del procedimiento que escribe el resolutor; como veremos, cuando los resolutores deben desarrollar los cálculos numéricamente, como ocurre en la experiencia A2, este tipo de error desciende de manera significativa.
Todos los errores categorizados como E11 se asocian al plan de resolución Unidad base, y se concretan en que el resolutor no escribe explícitamente que debe dividir el área total de la superficie por el área ocupada por un elemento para hallar el número de elementos. Un ejemplo lo encontramos en el plan de resolución del resolutor 4ºF-I.7.1 que escribe:

> "DATOS: la profundidad y la medida del porche, cuánto ocupa una persona. Mediríamos el porche (profundidad y longitud) y luego mediríamos cuánto espacio físico ocupa una persona. Así, haríamos una operación para saber cuánta gente cabe."

Se observa que el modelo inicial del resolutor I.7.1, basado en la superficie del porche y en la superficie que ocupa una persona, se ha desarrollado y matematizado de manera completa, por lo que se reconoce el uso de la estrategia asociada a unidad base: cuántas veces cabe el área ocupada por una persona, como unidad de medida, dentro del área del porche. Sin embargo, el resolutor, una vez ha descrito los procedimientos para calcular esas dos áreas, termina su plan de resolución sin especificar que esa operación es una división de la medida del área del porche entre la medida del área asignada a una persona.

Errores de interpretación

E12. *Ausencia de unidades de medida en los resultados.*
Este tipo de error se comete cuando el resolutor estima un valor numérico o el resultado de una medición sin comunicar la unidad de medida a la que se refiere. Sólo aparece en dos planes de resolución, como se ha explicado, debido al carácter esquemático de los mismos. Encontramos un ejemplo en la Figura **5-73**. Se observa que el resolutor calcula el área ocupada por una brizna de césped como 2×3, sin escribir en qué unidades de medida está expresando ese resultado.

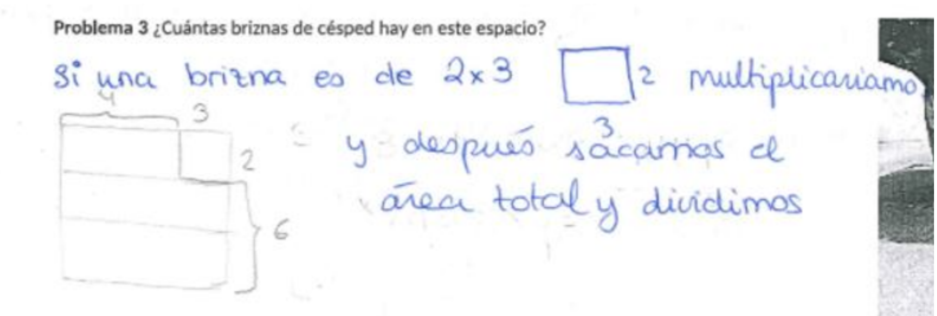


Figura 5-73.: Error E12, ausencia de unidades de medida en los resultados de *P3-Césped.*

E13. *La estimación es claramente incompatible con la situación real.*
E13 se comete cuando el resultado matemático no se interpreta en la situación real. Hay dos posibilidades relacionadas con este tipo de errores de interpretación: en la primera, se producen cuando se obtiene una estimación claramente inverosímil, que se percibe directamente como demasiado alta o demasiado baja. La otra posibilidad es que se produzca porque la naturaleza numérica del resultado es incompatible con realidad; por ejemplo, cuando el resolutor expresa la estimación del número de personas o coches con un número decimal. El carácter de propuesta del plan de resolución, en la que pocos resolutores aventuran cálculos y resultados numéricos concretos, influye en el bajo número de este tipo de error ($1,95\,\%$ del total). Es de esperar que esta proporción aumente cuando los resolutores deben ofrecer una estimación numérica, como ocurre en la experiencia A2. Un ejemplo de E13 lo encontramos en el plan de resolución de la Figura **5-68**. Como consecuencia de un error de tipo E6, es decir, de no haber asignado correctamente las medidas de ancho y largo de la brizna en SI, se obtiene una estimación del número de briznas de hierba claramente incompatible con la situación real, pues el resolutor responde que hay "$30 \div 3 = 10$ briznas". El resultado de la producción de la Figura **5-68** es claramente incompatible con la realidad porque, para cualquier jardinera como la que aparece en *P3-Césped*, es obvio a simple vista que hay muchas más briznas.

5.4.3. Relación entre categorías de error y características del contexto

Es interesante extender el análisis de la influencia del contexto de los problemas reales de estimación sobre los tipos de plan de resolución, descrito en la sección 5.2, al estudio de la relación entre la variable de contexto y el número y tipo de error cometido por los futuros profesores. La Tabla **5-17** muestra la frecuencia de aparición de cada tipo de error en cada problema de estimación en contexto real de la secuencia 1.
Para realizar un análisis estadístico de la relación entre las variables del contexto de cada problema de la secuencia 1 y los errores cometidos, agrupamos los tipos de errores por categorías según la fase del ciclo de modelización, como se muestra en la Tabla **5-18**. Realizamos un análisis inferencial basado en la prueba de independencia Chi-cuadrado ($DF = 9$, $N = 461$). Asumimos como hipótesis nula que no existe relación entre los problemas – seleccionados por contraste de valores de la variable de contexto – y las categorías de error ligadas al ciclo de modelización. Fijamos $\alpha = 0{,}01$ y se obtiene un valor $\chi^2 = 23,2873$ con $p = 0{,}006$, lo que lleva a rechazar la hipótesis nula. Dado que en cuatro casillas del cuadro 5 la frecuencia es inferior a cinco, lo que representa el $25\,\%$ de las casillas, y frecuencias inferiores a cinco no deben superar el $20\,\%$ del total, el resultado puede ser o no fiable. Para confirmar la fiabilidad, debemos basar nuestros resultados en la prueba de la razón de verosimilitud Chi-cuadrado (LR), que admite las celdas con frecuencias inferiores a cinco (Özdemir y Eyduran, 2005; McHugh, 2013). Así, fijando un nivel de significación de $\alpha = 0,01$, la razón de verosimilitud de la prueba de Chi-cuadrado fue $LR = 24,117$ con una significación asintótica (bilateral)

Tabla 5-17.: Frecuencia de cada tipo de error para cada problema de la secuencia 1.

Tipo de error	P1-Personas	P2-Baldosas	P3-Césped	P4-Coches
E1	9	4	10	4
E2	33	46	17	4
E2	1	2	0	1
E4	4	4	26	7
E5	20	17	14	15
E6	3	2	2	0
E7	5	7	8	4
E8	27	21	22	17
E9	8	11	13	12
E10	0	0	1	0
E11	18	3	13	15
E12	0	0	2	1
E13	3	3	2	1
Total	131	120	130	80

de $0,004$. Esto confirma que existe una relación estadísticamente significativa entre el tipo de problema, según sus características de contexto, y la categoría de error.
Se ha medido la fuerza de la correlación utilizando el coeficiente V de Cramer, obteniendo $V = 0,13$ con una significación de $0,006$. Este resultado nos informa de que, aunque la correlación es significativa, el tamaño del efecto es pequeño. El coeficiente de contingencia de Pearson tiene un valor de $0,22$ y el coeficiente phi es de $0,23$. Ambos resultados confirman que la correlación entre las características contextuales de los problemas de la secuencia 1 y la categoría de error existe, aunque la asociación es débil.
Es importante discutir la relación detectada entre las categorías de error y los problemas, y la Tabla **5-17**, al ofrecer mayor nivel de detalle en los tipos de error, puede ayudar a discutir los resultados obtenidos de la Tabla **5-18**. Observamos que *P1-Personas* y *P3-Césped* son los dos problemas en los que los futuros maestros han cometido mayor número de errores. Teniendo en cuenta las variables de contexto que se han tenido en cuenta para su diseño, P1 y P3 se diferencian del resto en que son problemas con elementos de forma irregular y distribución desordenada. De hecho, sabemos que *P3-Césped* se relaciona con mayor proporción de planes de resolución basados en la densidad (ver apartado 5.2.1), y que este plan de resolución suele ser más complejo que los demás para los estudiantes (Albarracín y cols., 2021; Ferrando y Albarracín, 2021). Esto concuerda con la mayor frecuencia de problemas sin desarrollar un modelo inicial (real) de la situación (error de tipo E4) en *P3-Césped* (véase la Tabla **5-17**; hay 26 errores E4 en P3, frente a 4, 4 y 7 en los otros problemas). De ahí que la

Tabla 5-18.: Frecuencia de aparición de cada categoría de error ligada al ciclo de modelización en cada problema de la secuencia 1.

Categoría de error	P1-Personas	P2-Baldosas	P3-Césped	P4-Coches
Errores de simplificación	47	56	53	16
Errores de matematización	55	47	46	36
Errores de trabajo matemático	26	14	27	27
Errores de interpretación	3	3	4	1
Total	131	120	130	80

mayoría de errores de P3 se concentren en la fase de estructuración/simplificación del ciclo de modelización.

Por otro lado, en *P1-Personas* el elevado número de errores puede estar relacionado con la irregularidad del tamaño y la forma de las personas. Así, el elevado número de errores E2 se debe a la confusión entre área y anchura de la persona. La frecuencia alta de errores de tipo E5 en este problema (ver Tabla **5-17**) se deriva de la confusión anterior, pues se debe a que los resolutores dividen el área del porche (bidimensional) entre la anchura de la persona (unidimensional). El número alto de errores en *P1-Personas* también puede explicarse porque el porche es un espacio más complejo espacio de modelar, debido a la presencia de columnas y puertas giratorias, ya que hay muchos modelos matemáticos incompletos E8 (27 frente a 21, 22 y 17, como puede verse en la Tabla **5-17**). Esto es coherente con los resultados del apartado 5.3.3, en los que se encontró que *P1-Personas* es el problema de la secuencia en el que los futuros maestros incorporan más factores de complejidad a su modelo matemático (ver Tabla **5-11**). La consciencia de que el espacio real es más complejo puede suponer un obstáculo para el desarrollo del modelo matemático, lo que explica el incremento de errores E8. Esta es la razón de que el mayor número de errores se concentra en la fase de matematización del ciclo de modelización.

En cuanto a *P2-Baldosas*, el número total de errores registrados también fue elevado, destacando los errores de tipo E2 (como se muestra en la Tabla **5-17**, hay 46 errores E2 en P2, frente a 33, 17 y 4). Este error E2 se debió en todos los casos a confusión entre distancia entre los dos edificios y área del espacio delimitado por los dos edificios. Sabemos, tal y como se ha explicado en el apartado 5.2.1, que *P2-Baldosas*, por la distribución ordenada de las baldosas y su regularidad, se relaciona con mayor frecuencia de planes de resolución Linealización. Esto explicaría la confusión entre distancia y área, que podría estar relacionada con el uso de este tipo de plan. De hecho, el orden en la distribución de los ladrillos (distribución

en cuadrícula), y su regularidad, promueve una “mirada lineal” al abordar el problema que puede generar dificultades con la percepción de la magnitud (E2). Esta es la razón por la que, en P2, el mayor número de errores se concentra en la fase de estructuración/simplificación de la situación real.
Por último, *P4-Coches* fue claramente el problema más fácil para los profesores en formación (ver total de errores en Tabla **5-18**). Teniendo en cuenta los valores de su variable de contexto, parece que plantear problemas de estimación contextualizados en los que los elementos a estimar ocupan un área grande, son relativamente regulares, y están dispuestos de manera ordenada en una superficie rectangular claramente delimitada y sin obstáculos, facilita que los resolutores cometan menos errores.

5.4.4. Niveles de rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real

A partir de las producciones categorizadas como Incompleta, habíamos definido un primer indicador de rendimiento (*éxito*) en resolución de problemas (Schoenfeld, 1982). Cuando un resolutor se enfrenta a un problema de estimación en contexto real debe ser capaz de desarrollar un plan de resolución; es decir, el resolutor debe: (i) concebir un modelo inicial de la superficie y de la disposición de los elementos en la misma; (ii) matematizar su modelo inicial y aplicar una estrategia que permita obtener la estimación. En la resolución de un problema de estimación, hemos definido el éxito cuando el resolutor es capaz de desarrollar un plan de resolución, y hemos utilizado este indicador de rendimiento para comparar la dificultad de las secuencias 1 y 2 (apartado 5.2.3), y para comparar el rendimiento individual y el grupal en las experiencias A1 y A2 (apartado 5.3.2).
El éxito clasifica el rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real en dos niveles: primero, aquellos que, limitados por su falta de estrategias para interpretar la información del enunciado o para reconocer el procedimiento adecuado a utilizar (Taplin, 1998), escriben una producción Incompleta (Nivel 0); y segundo, aquellos que sí son capaces de plantear un plan de resolución (Nivel 1).
En el análisis cualitativo de los tipos de error efectuado en el apartado anterior, hemos señalado que algunos errores debían considerarse como graves porque implican que la producción en la que aparecen sea categorizada como Incompleta. Se trata de errores asociados a la falta de desarrollo del modelo inicial (E1, E4), lo que necesariamente impide el planteamiento de un plan de resolución; o de errores asociados a la falta de desarrollo del modelo matemático, lo que impide elaborar una estrategia para obtener la estimación (E8, en algunas ocasiones). Por lo tanto, en términos de categorías y tipos de error (Tabla **5-15**), se puede redefinir el rendimiento de éxito (Nivel 1): un resolutor tiene éxito en la resolución de un problema de estimación en contexto real cuando no comete errores de tipo E1, E4 o, en la mayoría de ocasiones, E8. No cometer errores en la fase de estructuración/simplificación y en la fase de matematización es una garantía de alcanzar un rendimiento de éxito.

Además de los errores graves, tenemos los demás tipos de error, que conllevan tres posibilidades:

(i) carencias en el sentido de la medida de magnitudes (E2, E3, E5, E6, E7), asociadas a las fases de estructuración/simplificación y de matematización;

(ii) falta de habilidad en el trabajo matemático (E9, E10, E11);

(iii) dificultades para interpretar el resultado (E12, E13).

El sistema de categorías y tipos de error específico para problemas de estimación en contexto real (Tabla **5-15**) facilita avanzar en el análisis del rendimiento y refinar el Nivel 1 de éxito, dividiéndolo en dos niveles: entre aquellos resolutores que han sido capaces de plantear un plan de resolución, diferenciaremos los que cometen errores de lo que no los cometen. Los resolutores con éxito que cometen errores tienen un *rendimiento básico*(Nivel 1b), lo que indica que son capaces de desarrollar un plan de resolución pero tienen algunas carencias de tipo (i), (ii) o (iii). Por el contrario, diremos que un resolutor tiene un *rendimiento alto* (Nivel 1a) en resolución de problemas de estimación en contexto real cuando plantea un plan de resolución sin errores, lo que indica dominio de las técnicas y estrategias de resolución; en particular, de las habilidades relacionadas con la medida de magnitudes.
En la resolución de un problema de estimación en contexto real estableceremos, por tanto, los tres niveles – o indicadores – de rendimiento recogidos en la Tabla **5-19**.
Los niveles de rendimiento de la Tabla **5-19** miden la actuación de un resolutor cuando resuelve un problema de estimación en contexto real, estableciendo una clasificación que separa el Nivel 0 del Nivel 1, lo que hemos llamado el éxito. Dentro del Nivel 1 de éxito, se pueden establecer dos subniveles, el básico (Nivel 1b) y el alto (Nivel 1a). Además, esta clasificación del rendimiento se puede aplicar también a un conjunto de problemas. Es un instrumento que, en consecuencia, nos permite medir el *rendimiento de los futuros maestros cuando resuelven la secuencia 1* de la siguiente manera:

- *Nivel 0. Rendimiento bajo*: un resolutor tiene un rendimiento bajo cuando resuelve la secuencia 1 si alguna de sus producciones se categoriza como Incompleta.

- *Nivel 1b. Rendimiento básico*: un resolutor tiene un rendimiento básico cuando resuelve la secuencia 1 si: (i) ninguna de sus producciones se categoriza como Incompleta; (ii) comete algún error en alguno de sus planes de resolución.

- *Nivel 1a. Rendimiento alto*: un resolutor tiene un rendimiento alto cuando resuelve la secuencia 1 sin cometer ningún error.

Como se explicó en el apartado 2.5.3 del Capítulo 2, es complicado definir cuándo una resolución es mejor, o más eficiente, que otra (Heinze y cols., 2009) para un tipo de problema

Tabla 5-19.: Niveles de rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real.

Nivel de rendimiento	**Descripción**	**Relación con los tipos de error**
Nivel 0. Rendimiento bajo	La producción del resolutor se categoriza como Incompleta.	Asociado a los errores E1, E4 y E8. Se cometen en las fases de estructuración/simplificación o de matematización.
Nivel 1b. Rendimiento básico	El resolutor plantea un plan de resolución aunque con errores.	Aparecen errores, pero éstos no conllevan que la producción se categorice como Incompleta. Se cometen en cualquier fase del ciclo de modelización.
Nivel 1a. Rendimiento alto	Dominio de la resolución.	No aparecen errores.

determinado. En la última sección de este capítulo discutiremos cómo estudiar la adaptabilidad en este tipo de problemas, que es un aspecto que también puede vincularse a un rendimiento alto. Sin embargo, aún es más complicado definir si una estimación es "razonable", o establecer si una estimación es mejor que otra. Como señala Pizarro (2015, p. 33), las primeras investigaciones sobre estimación se centraban en estimar medidas de magnitudes conocidas, y las respuestas se clasificaban en "incorrecta", "razonable" o "correcta", pero esto no es posible cuando el problema es abierto y la solución, por tanto, no es conocida ni puede validarse de manera directa. De hecho, en los problemas *P2- Baldosas* y *P3-Césped*, en los que los elementos a estimar están presentes (Tabla **4-3**), sería muy costoso conocer el resultado por su gran número; y en los problemas *P1-Personas* y *P4-Coches* ni siquiera se puede conocer el resultado y una simulación ofrecería distintas posibilidades. Más adelante, otros autores proponían fijar un porcentaje de error para medir la precisión de la estimación (Swan y Jones, 1980), pero esto sigue siendo inaplicable a problemas abiertos como los de la secuencia 1. Por el contrario, el análisis de errores, a partir de la coherencia interna de las resoluciones, sin comparar con una solución determinada, es una vía operativa para abordar el rendimiento. A partir de los niveles de la Tabla **5-19** se pueden comparar planes de resolución de los futuros maestros y decidir si un resolutor tiene un rendimiento mayor que otro, eludiendo el problema del valor de la estimación.

A partir del análisis de errores desarrollado en el apartado anterior, tenemos la proporción de futuros maestros en cada nivel de rendimiento en la secuencia 1.

5.4.5. Comparación de errores entre planes de resolución individual y resoluciones grupales e in situ

En este apartado compararemos los errores cometidos en la experiencia A1 – es decir, cuando los futuros maestros resolvieron la secuencia 1 de manera individual y en el aula, proponiendo un plan de resolución – con los errores cometidos en la experiencia A2 – es decir, cuando los futuros maestros volvieron a resolver la secuencia 1 en grupos y realizando mediciones en el lugar de los problemas. Utilizando el sistema de categorías y tipos de error de la Tabla **5-15**, y los niveles de rendimiento de la Tabla **5-19**, afinaremos y completaremos el análisis comparativo del apartado 5.3.2, cuando vimos que trabajar en grupo e *in situ* se relaciona con una mayor tasa de éxito (en términos de los niveles de rendimiento, Nivel 1). En el Capítulo 4 se explicó que también se categorizaron los errores en las 248 producciones de la experiencia A2, usando los tipos de error de la Tabla **5-15**. En la Tabla **5-20** se recogen los resultados del análisis de tipos de error para los $N = 62$ grupos de la experiencia A2, y para facilitar la comparación, se recogen también los resultados del análisis de errores de la experiencia A1 previamente presentado en la Tabla **5-16**.

Como hemos visto en el apartado 5.4.2, de los 224 futuros profesores que participaron en la experiencia A1, 166 cometieron al menos un error, lo que representa el 74,11 % del total. Sin embargo, de los 62 grupos que participaron en la experiencia A2, 51 grupos cometieron al menos un error, es decir, un 82,26 % del total. Por tanto, la conclusión es que trabajar en grupos e *in situ* no influye en un alto rendimiento (Nivel 1a) en la resolución de la secuencia 1. Al contrario, hay una proporción superior de grupos que al menos cometen un error. Pero esta lectura debe ser matizada: si bien trabajar en grupo e *in situ* no garantiza el dominio de todas las resoluciones de la secuencia 1, esto no quiere decir que el rendimiento sea peor o similar. Primero, hay que tener en cuenta que las resoluciones de la experiencia A2 exigen desarrollar todos los cálculos numéricos, y no sólo trazar un plan como en la experiencia A1, por lo que podría haber mayores obstáculos y oportunidades de error. Además, es importante realizar una comparativa de las proporciones de cada tipo de error, para saber el número de errores que se cometen en cada experiencia y también conocer su naturaleza y gravedad.

El primer matiz al resultado anterior sobre el Nivel 1a nos lo proporciona la comparación de la media de errores por resolutor y por grupo. En la experiencia A1, la media es de $2,05$ errores por resolutor, y si nos restringimos a los 166 resolutores que cometieron algún error, la media se eleva a $2,78$ errores. En la experiencia A2, la media es de $1,9$ errores por grupo, ligeramente más baja que en la experiencia individual; y cuando nos restringimos a los 51 grupos que cometieron errores, la media es de $2,35$ errores por grupo. Así pues, aunque haya una menor proporción de grupos con rendimiento alto (sin cometer ningún error en toda la secuencia 1) que de resolutores individuales con rendimiento alto, los grupos cometieron menos errores que los resolutores individuales.

Pero este análisis global de la media de errores no es suficientemente descriptivo. Conviene comparar las dos experiencias por categorías de error, ligadas a las fases del ciclo de

Tabla 5-20.: Frecuencia de cada tipo de error en las experiencias A1 y A2

Categorías y tipos de error	**Frecuencia en la experiencia A1**	**Frecuencia en la experiencia A2**
E1	27 (5,86 %)	5 (4,17 %)
E2	100 (21,69 %)	7 (5,83 %)
E3	4 (0,87 %)	5 (4,17 %)
E4	41 (8,89 %)	0
Error de simplificación	172 (37,31 %)	17 (14,17 %)
E5	66 (14,32 %)	7 (5,83 %)
E6	7 (1,52 %)	25 (20,83 %)
E7	24 (5,21 %)	5 (4,17 %)
E8	87 (18,87 %)	3 (2,50 %)
Error de matematización	184 (39,91 %)	40 (33,33 %)
E9	44 (9,54 %)	7 (5,83 %)
E10	1 (0,22 %)	13 (10,83 %)
E11	49 (10,63 %)	1 (0,83 %)
Error de trabajo matemático	94 (20,39 %)	21 (17,49 %)
E12	2 (0,43 %)	3 (2,50 %)
E13	9 (1,95 %)	39 (32,50 %)
Error de interpretación	11 (2,39 %)	41 (35 %)
Total	461	120

modelización, y por tipos de error asociados, como veremos a continuación.

En la experiencia A1 el $37,31\,\%$ de los errores pertenecen a la categoría de *error de simplificación*, cuando el modelo real debe construirse a partir de la simplificación y estructuración de la situación real. En el apartado 5.4.2 hemos discutido los resultados del análisis cualitativo de los tipos de error asociados a esta categoría, obteniendo que, por un lado, hay un número muy alto de errores de percepción de magnitud (E2), confundiendo longitud y área; y por otro, que hay un número también alto de errores E1 y E4 (un $14,75\,\%$ entre los dos), que conllevan que las producciones queden incompletas y son considerados como errores graves. Los resultados para la experiencia A2, en grupos e *in situ*, son muy distintos para esta categoría de error, pues los errores de simplificación se reducen drásticamente, representando sólo el $14,17\,\%$, la categoría con menor frecuencia de errores. Es relevante que no haya ninguna resolución de grupo que no haya desarrollado un modelo inicial/real (E4), y que los errores graves en esta categoría (E1, E4) sólo representen un 4,17 % del total, frente al 14,75 % en la experiencia A1.

En cuanto a la categoría *error de matematización*, el número de errores es elevado tanto en

la experiencia A1 (39, 91 % del total de errores) como en la experiencia A2 (33, 33 %). Sin embargo, la naturaleza y la gravedad de estos errores son muy diferentes. Los errores más frecuentes en los planes de resolución individuales (E5 y E8) son los menos frecuentes en las resoluciones grupales. E5 se relacionaba con el uso inapropiado de diferentes magnitudes en un procedimiento, mezclándolas sin respetar la homogeneidad dimensional, y denota carencias profundas en el sentido de la medida. E8 se consideraba un error grave porque los modelos matemáticos incompletos frecuentemente conducen a resoluciones incompletas. Los errores E8 y E5, numerosos en los planes de resolución individuales (18, 87 % y 14, 32 %, respectivamente) son los más graves de esta categoría, pues denotan importantes carencias conceptuales. En cambio, en las resoluciones en grupo e *in situ*, el tipo de error de matematización más frecuente (20, 83 % del total de errores) es el E6, que se produce por asignar un valor a un referente en unidades de medida del S.I. que no se corresponde con la realidad; por ejemplo, considerar que un pie equivale a un metro. Se trata de un tipo de error que denotan falta de habilidades de medida y estimación, pero no es tan grave como E5. Además, en la experiencia A2, sólo se encontraron un 2, 50 % de modelos matemáticos incompletos (E8).
El análisis comparativo de los tipos de error en las fases de simplificación y de matematización para las experiencias A1 y A2, en el que vemos que los errores cometidos en grupo e *in situ* son de menor gravedad, explica los resultados de la sección 5.3.2 sobre la *tasa de éxito*. En efecto, vimos que en la experiencia A2 sólo se categorizaron un 1, 6 % de las producciones como Incompleta, frente a un 15,62 % de producciones categorizadas como Incompleta en la experiencia A1. Es decir, que trabajar en grupos e *in situ* sí se relaciona de manera significativa con un mejor rendimiento básico (Nivel 1b). El análisis anterior, además, nos permite afinar este resultando comparando tipos de error en las dos primeras fases del ciclo de modelización, que son las decisivas para separar rendimiento bajo (Nivel 0) de rendimiento básico (Nivel 1b).
Además, podemos comparar las siguientes categorías de error para obtener más información sobre las diferencias de actuación en la experiencia A1 y la experiencia A2. Así, en cuanto a la categoría de *error de trabajo matemático*, el número de errores es similar para los planes de resolución individuales (20,39 %) y los de grupo (17,49 %). Sin embargo, los tipos de error asociados también cambian drásticamente. En la experiencia A1 los más numerosos son E9 y E11, como vimos, vinculados a errores en los procedimientos de cálculo (normalmente asociados a la inversión de la proporcionalidad o de los algortimos aritméticos) o a dejar incompletos dichos procedimientos. En cambio, los errores E9 y E11 apenas aparecen en las resoluciones grupales e *in situ*. Esto parece implicar que trabajar con datos numéricos promueve cometer menos errores de procedimiento que cuando esos mismos procedimientos deben explicarse sin ejecutar los cálculos numéricamente. En la experiencia A2 el error más numeroso en esta categoría es E10 (un 10,83 % del total), que sólo aparece una vez en la experiencia A1. Recordemos que E10 se refería a errores en la conversión de unidades de medida; aparece sobre todo al convertir unidades de superficie (por ejemplo, de cm^2 a m^2 multiplicando por 100). Que aparezca tanto en la experiencia A2 comparada con la

experiencia A1 se debe a que en las resoluciones grupales e *in situ* se trabaja numéricamente a partir de los datos tomados en las mediciones, lo que a menudo conlleva realizar cambios de unidad de medida.
Por último, el cambio más importante se observa en la categoría de error de interpretación: de representar sólo el 2,35 % del total de errores en la experiencia A1, pasa a ser el más frecuente en la experiencia A2 (35 % del total). Como ya aventuramos en el análisis de errores de la experiencia A1, esto no se debe a que el trabajo en grupo e *in situ* dificulte la interpretación de los resultados, sino a que la mayoría de los planes de resolución se limitan a señalar cómo llegarían a una estimación sin proporcionarla. En las resoluciones de grupo, el error más frecuente es el E13, representando el 32, 50 % del total de errores. De hecho, es el error más frecuente de todos los analizados en la experiencia A2. Un análisis cualitativo muestra que la mayoría de estos errores se producen porque la naturaleza numérica del resultado es incompatible con la realidad. Por ejemplo, se da un número decimal como estimación del número de coches que caben en un aparcamiento (Figura **5-74**), o de personas que caben en el porche (Figura **5-75**). Este error se debe a que los resolutores no han comprobado el resultado numérico de la estimación y lo han presentado como solución sin interpretarlo previamente en la situación real. Este resultado tan contundente respecto a los errores de interpretación del resultado concuerda con los estudios referenciados en el Capítulo 2 sobre la incapacidad de futuros maestros de relacionar con éxito sus soluciones con la situación real cuando resuelven problemas contextualizados (Tirosh y Graeber, 1989; Tirosh y cols., 1991).

Figura 5-74.: Error E13, estimación incompatible con la situación real, en resolución grupal de *P4- Coches*.

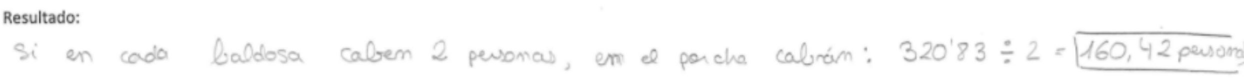


Figura 5-75.: Error E13, estimación incompatible con la situación real, en resolución grupal de *P1- Personas*.

Además, la Tabla **5-21** recoge la proporción de futuros maestros en cada nivel de rendimiento (bajo, básico y alto) para la experiencia individual A1, y hace lo mismo con la proporción de grupos de futuros maestros en cada nivel de rendimiento para la experiencia A2.
A partir del análisis comparativo y de los datos de la Tabla **5-21**, podemos sintetizar unos resultados para cada nivel de rendimiento:

Tabla 5-21.: Comparación entre los niveles de rendimiento en la experiencia A1 y en la experiencia A2

Niveles de rendimiento	Experiencia A1	Experiencia A2
Nivel 0. Rendimiento bajo	86 (38,39 %) resolutores.	3 (4,84 %) grupos.
Nivel 1b. Rendimiento básico	80 (35,72 %) resolutores.	48 (77,42 %) grupos.
Nivel 1a. Rendimiento alto	58 (25.89 %) resolutores.	11 (17.74 %) grupos.

(i) *Rendimiento bajo*: En la experiencia A2 se reduce drásticamente la proporción de grupos que son incapaces, en algún problema de la secuencia 1, de desarrollar un modelo inicial o su matematización completa. Esto explica que el porcentaje de producciones incompletas baja del 15,62 % en la experiencia A1 al $1,6$ % en las producciones grupales. El trabajo en grupo e *in situ*, por tanto, es una herramienta de andamiaje que, si bien no reduce el número de errores cometidos, sí reduce aquellos que son más graves.

(ii) *Rendimiento básico*: Hay una proporción mucho mayor de grupos en este nivel que de resolutores individuales. El trabajo en grupo e *in situ* reduce ligeramente el número de errores cometidos, pues los resolutores que cometen errores en la experiencia A1 tienen una media de $2,78$ errores, mientras que los grupos que cometen errores en la experiencia A2 tienen una media de $2,35$ errores. Además, los errores mayoritarios en la experiencia A1 se relacionan con carencias más importantes del sentido de la medida de magnitudes que los de la experiencia A2. En la experiencia A2, sin embargo, hay mayor proporción de errores de interpretación del resultado numérico.

(iii) *Rendimiento alto*: El trabajo en grupo e *in situ* no parece mejorar a nivel de dominio de las resoluciones, ya que desciende ligeramente la proporción de grupos que no cometen errores respecto a la de resolutores individuales que no los cometían. Esto puede deberse a que la experiencia A2 requiere mediciones y estimaciones numéricas, y un mayor número de procesos aumenta la posibilidad de que se cometa algún error o descuido.

5.5. Flexibilidad en la resolución de problemas de estimación en contexto real

En esta sección abordaremos el estudio de la flexibilidad en la resolución de problemas de estimación en contexto real. En el apartado 5.5.1 presentaremos un análisis cualitativo y descriptivo de los niveles de flexibilidad inter-tarea categorizados. También ofreceremos los resultados cuantitativos que muestran en qué medida los futuros maestros usan sus resoluciones de manera flexible al cambiar de problema en la secuencia 1. Esto permitirá concluir que el diseño por contraste de secuencias de problemas de estimación en contexto promueve la flexibilidad inter-tarea entre los futuros maestros, respondiendo así al objetivo OI 9.

En el apartado 5.5.3 presentaremos los resultados del estudio exploratorio sobre la flexibilidad intra-tarea en el problema *P4- Coches* de la secuencia 1. Se estudiará qué tipo de cambios de tipo de resolución son los más frecuentes y si existe una relación entre flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea.
Algunos de los resultados de las secciones 5.5.1 y 5.5.3 se publicaron en Ferrando y Segura (2020).
En el apartado 5.5.2 se ofrecen los resultados centrales en esta tesis. Así, la relación entre errores y flexibilidad inter-tarea es la última pieza que permite enlazar los resultados principales de las distintas experiencias que componen esta investigación: por un lado la categorización de los planes de resolución, y luego la relación entre características del contexto y tipos de plan resolución en la secuencia 1, son un paso previo para abrir una vía de estudio de la flexibilidad intra-tarea; por otro lado, el análisis de errores y los niveles de rendimiento es la otra vía que puede ser conectada con la anterior. La conexión se basa en estudiar si existe relación entre los niveles de flexibilidad inter-tarea y los niveles de rendimiento, abordando así el objetivo OI 10.

5.5.1. Flexibilidad inter-tarea en la resolución de problemas de estimación en contexto real

Empecemos recordando que Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009) definen la flexibilidad en resolución de problemas no rutinarios distinguiendo entre flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea:

> We consider strategy flexibility as the behavior of switching strategies during the solution of a problem, i.e., intra-task strategy flexibility, or between problems, i.e., inter-task strategy flexibility (p. 606).

En esta tesis nos centramos en la flexibilidad inter-tarea por dos razones que ya se explicaron en el Capítulo II: la primera, es que Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009) encontraron que la flexibilidad intra-tarea no estaba relacionada con el éxito en resolución de problemas no rutinarios; la segunda, es que el diseño por variación de contraste empleado en la secuencia 1 de problemas de estimación en contexto real se basa en promover que los resolutores vinculen tipos de resolución a determinadas características del contexto, por lo que el foco está en cuándo – y por qué – cambian de tipo de resolución entre problemas, es decir, en la flexiblidad inter-tarea. En este apartado analizaremos, precisamente, si la secuencia 1 promueve la flexibilidad inter-tarea.
Llegados a este punto, debemos adaptar la definición de flexibilidad a la clase de problemas empleados en esta investigación. En la definición de Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009), como en la de Star y Rittle-Johnson (2008), se refieren al uso de estrategias (procedimientos) de resolución. Como se argumentó en el Capítulo 2, para Star (2005) se trata de una destreza propia del conocimiento procedimental profundo. Puesto que en este

estudio empleamos la noción de plan de resolución como sistema compuesto por un modelo inicial y estrategia asociada (Ferrando, Albarracín, y cols., 2017), aplicaremos la flexibilidad a este sistema de dos componentes interrelacionadas. Definiremos *flexibilidad inter-tarea* en problemas de estimación en contexto real en resolución de problemas de estimación en contexto real como la capacidad de cambiar de tipo de plan de resolución de un problema a otro.

Sabemos que, en los problemas de la secuencia 1, hay cuatro tipos de planes de resolución: Recuento, Linealización, Unidad base y Densidad. Por tanto, son problemas de modelización con un espacio de tipos de resolución conocido de antemano, es decir, podemos considerarlas *multiple solution tasks* en el sentido de Levav-Waynberg y Leikin (2012). En otros problemas de modelización más complejos, por el contrario, no se puede delimitar de antemano un espacio de soluciones y su variabilidad y dependencia de las hipótesis iniciales del resolutor hace muy difícil estudiar la flexibilidad en el uso de resoluciones (modelos matemáticos). En el caso de los problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada, el enfoque de *multiple solution task* posibilita analizar en qué medida son flexibles los resolutores, tanto dentro de una tarea como entre tareas.

En el Capítulo 4 se ha descrito el proceso de categorización de la flexibilidad inter-tarea para los N = 224 futuros maestros participantes en la experiencia A1. En un primer análisis se diferenció entre *uso flexible de planes de resolución* (conoce más de un tipo de plan de resolución y cambia en algún problema) y *uso no flexible de planes de resolución*. Pero en un segundo análisis, para afinar el estudio, se establecieron tres niveles de flexibilidad inter-tarea, que explicamos a continuación.

- Uso no flexible de planes de resolución:
  - *Nada flexible*: el resolutor propone el mismo tipo de plan de resolución en las tareas completadas.
- Uso flexible de planes de resolución:
  - *Moderadamente flexible*: el resolutor propone dos tipos de plan de resolución diferentes, pero cambia sólo en un problema de la secuencia.
  - *Muy flexible*: el resolutor propone dos o más tipos de plan resolución, y cambia de tipo de resolución en dos o más problemas.

Naturalmente, las producciones categorizadas como Incompleta no computan como cambio de tipo de plan de resolución, pues no se desarrollan lo suficiente como para ser consideradas como tal. Ärlebäck (2009) describe los problemas de Fermi como accesibles, por lo que cualquier futuro maestro debería ser capaz de resolverlos; los problemas empleados en la secuencia 1, al tratarse de un tipo concreto de problemas de Fermi, son accesibles, y eso explica que ningún participante tenga más de dos producciones categorizadas como Incompleta.

La Tabla **5-22** muestra los resultados del análisis de la flexibilidad inter-tarea de los $N = 224$ futuros maestros participantes en la experiencia A1.

Tabla 5-22.: Distribución de los N = 224 futuros maestros en niveles de flexibilidad inter-tarea

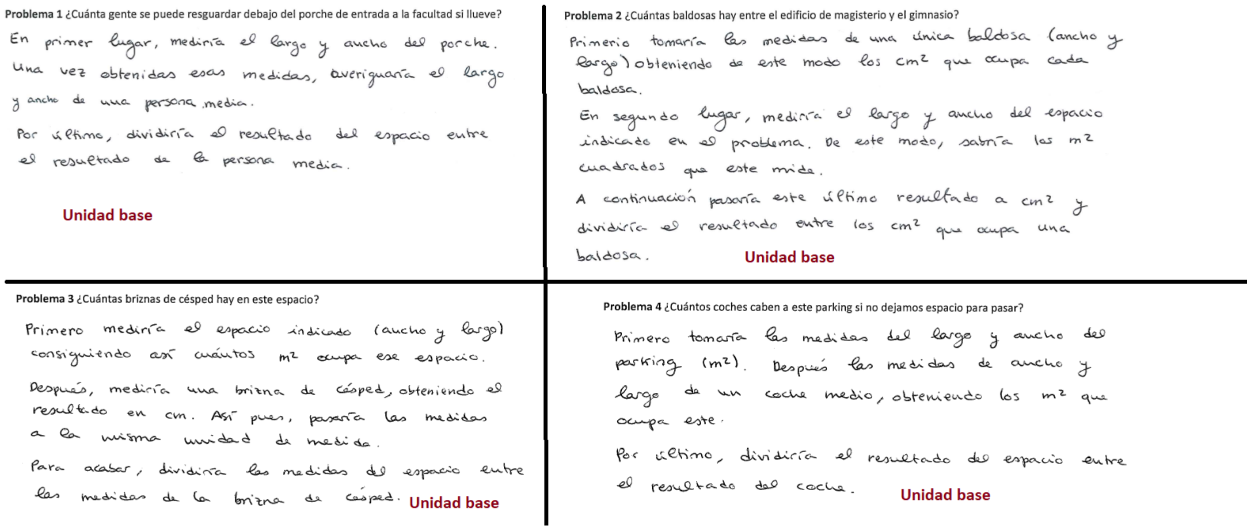
	Uso no flexible	**Uso flexible**	
	Nada flexible	**Moderadamente flexible**	**Muy flexible**
Frecuencia absoluta	63	92	69
Frecuencia relativa	28.1 %	41.1 %	30.8 %
Total	63 (28.1 %)	161 (71.9 %)	

Sólo un 28,1 % del total de futuros maestros presenta un uso no flexible de sus planes de resolución, es decir, que sólo utiliza un tipo de plan de resolución para toda la secuencia. Puede deberse a la seguridad de que ese plan funciona, con independencia de las variaciones en el contexto de los problemas, o porque no conoce otros, lo que podría traducirse en que alguna de sus producciones fuera Incompleta.
Se observa que una mayoría de futuros maestros (71,9 %) presenta un uso flexible de sus planes de resolución entre tareas, es decir, son mayoría los resolutores que proponen dos o más tipos de plan de resolución distintos cuando resuelven la secuencia 1. En consecuencia, una secuencia de cuatro problemas de estimación en contexto real, muy similares entre sí, pero escogidos por variación de contraste de algunos valores de la variable de contexto (véase la sección del Capítulo 4 dedicada al diseño de la secuencia), promueve que los futuros maestros cambien de tipo de plan de resolución, bien modificando su modelo inicial – de bidimensional a unidimensional, o vicecersa – o bien cambiando la estrategia asociada – de trabajar con el área de un elemento a trabajar con el número de elementos en un área unidad, o viceversa. Un alto porcentaje de futuros maestros, por tanto, parece percibir, consciente o inconscientemente, que algunos cambios en las características del contexto requieren un tipo de plan de resolución distinto. También podría deberse, en algunos casos, a la necesidad de probar otra vía de resolución en un problema cuando el resolutor tiene dificultades en aplicar la que conocen bien, lo que podría dar lugar a que alguna producción se categorice como Incompleta.
A continuación se van a describir, en base al análisis cualitativo de las producciones, los tres niveles de flexibilidad categorizados.

Nada flexible

Se han encontrado distintas posibilidades categorizadas como nada flexible. Recordemos que en la Tabla **5-1**, que recoge la distribución de planes de resolución para cada problema de la secuencia 1, se observa que Unidad base es el plan de resolución más utilizado para el total de los problemas, representando un 54 % del total de los planes de resolución categorizados en la secuencia 1. Esto implica que la mayoría de futuro maestros nada flexibles utilizaron Unidad base en todas sus producciones completas.

Un caso frecuente es el del resolutor no flexible que, sin embargo, domina un tipo de plan resolución (Unidad base) y utiliza con rendimiento de éxito básico (sin producciones incompletas) en todos los problemas de la secuencia 1. Por ejemplo, en la Figura **5-76** observamos los cuatro planes de resolución Unidad base del resolutor 4ºD-I.7.4.



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

En primer lugar, mediría el largo y ancho del porche. Una vez obtenidas esas medidas, averiguaría el largo y ancho de una persona media. Por último, dividiría el resultado del espacio entre el resultado de la persona media.

Unidad base

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Primero tomaría las medidas de una única baldosa (ancho y largo) obteniendo de este modo los cm² que ocupa cada baldosa. En segundo lugar, mediría el largo y ancho del espacio indicado en el problema. De este modo, sabría los m² cuadrados que este mide. A continuación pasaría este último resultado a cm² y dividiría el resultado entre los cm² que ocupa una baldosa.

Unidad base

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Primero mediría el espacio indicado (ancho y largo) consiguiendo así cuántos m² ocupa ese espacio. Después, mediría una brizna de césped, obteniendo el resultado en cm. Así pues, pasaría las medidas a la misma unidad de medida. Para acabar, dividiría las medidas del espacio entre las medidas de la brizna de césped.

Unidad base

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

Primero tomaría las medidas del largo y ancho del parking (m²). Después las medidas de ancho y largo de un coche medio, obteniendo los m² que ocupa este. Por último, dividiría el resultado del espacio entre el resultado del coche.

Unidad base

Figura 5-76.: Los cuatro planes de resolución Unidad base de un resolutor nada flexible.

El resolutor I.7.4 utiliza la misma estrategia – división de medidas entre el área total y el área de un elemento tomado como unidad – en los cuatro problemas. Observamos que en P3 comete un error E7 al expresar el área de la brizna en centímetros en lugar de centímetros cuadrados; y que en todas las producciones no ha descrito explícitamente el procedimiento para obtener el área. Son errores menores, por lo que se trata de un resolutor nada flexible con un rendimiento básico cercano al alto (Nivel 1a) para toda la secuencia 1.

También es un caso frecuente el de los futuros maestros que sólo utilizan el plan de resolución Unidad base pero que son incapaces de utilizarlo en algún problema de la secuencia y tienen una producción categorizada como Incompleta. Por ejemplo, el resolutor 4ºA-I.3.3 presenta las cuatro producciones recogidas en la Figura **5-77**.

Observamos que este resolutor no es capaz de aplicar el tipo de resolución Unidad base al problema P3, dejando un modelo inicial incompleto (E1, sólo considera la superficie de la jardinera) que comienza a matematizar de manera incompleta (E8, sólo describe el cálculo del área de la jardinera, considerada como un rectángulo). Además, el resolutor no describe los procedimientos de cálculo del área en P1 y P2 (E11), y confunde las fórmulas del área y del perímetro $(l + l + l + l)$ en P4, error de significado en términos propios de la magnitud (E5). Se trata, por tanto, de un resolutor no flexible y con un rendimiento bajo (Nivel 0) en

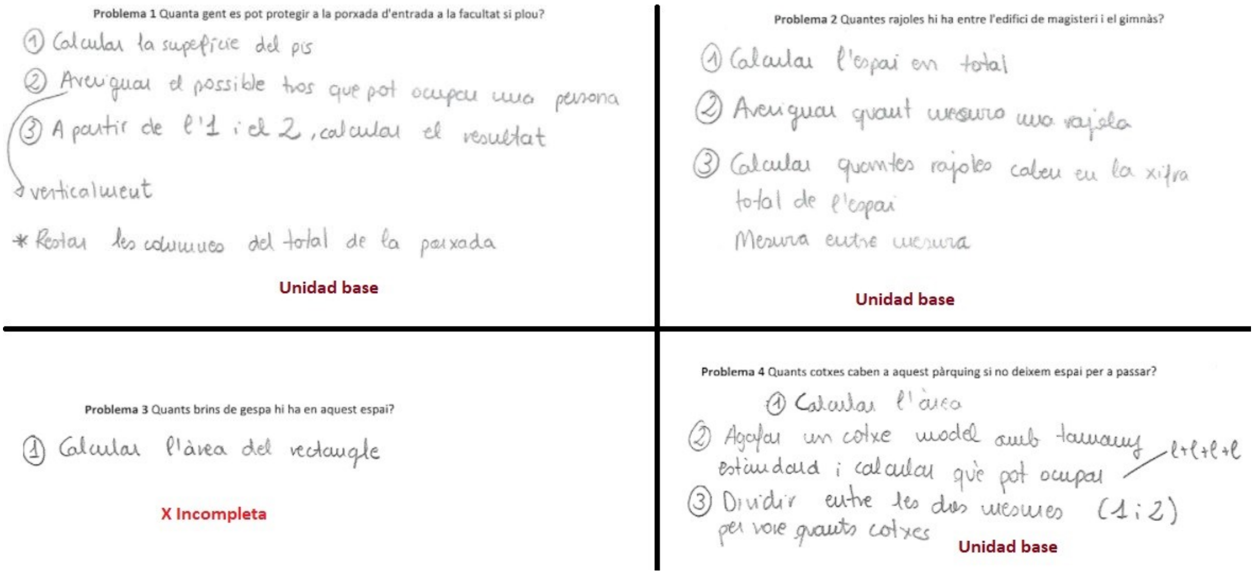


Figura 5-77.: Resolutor nada flexible con tres planes de resolución Unidad base y una producción Incompleta.

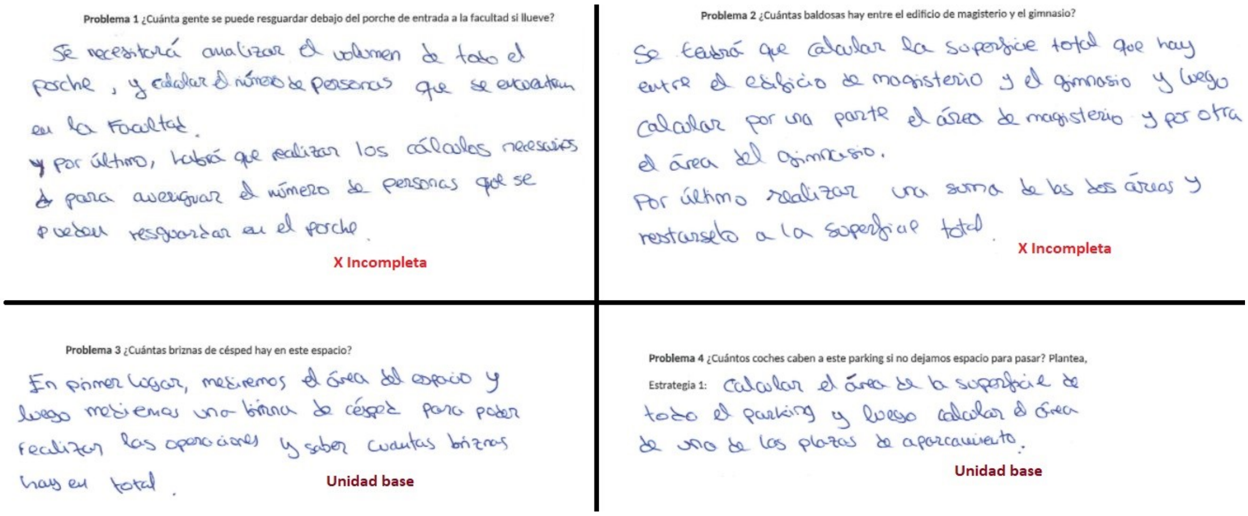
la secuencia 1.

Otro ejemplo de resolutor nada flexible con rendimiento bajo (Nivel 0) es el caso – menos frecuente – de aquellos con dos producciones categorizadas como Incompleta (Figura **5-78**), como ocurre con 4ºK-I.7.2. En P1 el resolutor confunde magnitudes área y volumen (E2) y además su modelo matemático está incompleto (E8). En el caso de P2, tanto el modelo inicial como el matemático están sin completar (E1, E8). En P3 y P4 se han considerado las áreas de la superficie y del elemento, pero no se describe el procedimiento de división de medidas para obtener la estimación (E11).

También encontramos otras casuísticas menos frecuentes entre los futuros maestros nada flexibles. Así, por ejemplo, pese a que Densidad o Linealización son tipos de plan de resolución con frecuencia de uso muy baja en algunos problemas (si se consulta la Tabla **5-1**, puede observarse que Linealización sólo representa un 8,3 % de los planes de resolución para P3; y que Densidad sólo se usa una vez en P4) existen casos de futuros maestros que sólo han utilizado Linealización o Densidad. Es el caso del resolutor 4ºD-I.7.1, quien utiliza Linealización para los cuatro problemas de la secuencia 1, como puede verse en la Figura **5-79**).

En este caso, observamos que en los cuatro planes de resolución se comete un error de significado en términos propios de la magnitud (E5), pues se confunde el producto cartesiano de los elementos por fila y columna con la suma. Se trata, en definitiva, de un resolutor nada flexible con un rendimiento básico (Nivel 1b) que ha utilizado Linealización en todos los contextos. Hay otros casos de resolutores que sólo utilizan Linealización, pero tienen una o dos producciones categorizadas como Incompleta.

Entre los casos poco frecuentes también se encuentra el de un resolutor nada flexible que utiliza Densidad en todos los problemas salvo P4, pues no es capaz de aplicarla a un contexto



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Se necesitará analizar el volumen de todo el porche, y calcular el número de personas que se encuentran en la facultad.
y por último, habrá que realizar los cálculos necesarios para averiguar el número de personas que se pueden resguardar en el porche.

X Incompleta

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Se tendrá que calcular la superficie total que hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio y luego calcular por una parte el área de magisterio y por otra el área del gimnasio.
Por último realizar una suma de las dos áreas y restárselo a la superficie total.

X Incompleta

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

En primer lugar, mediremos el área del espacio y luego mediremos una brizna de césped para poder realizar las operaciones y saber cuantas briznas hay en total.

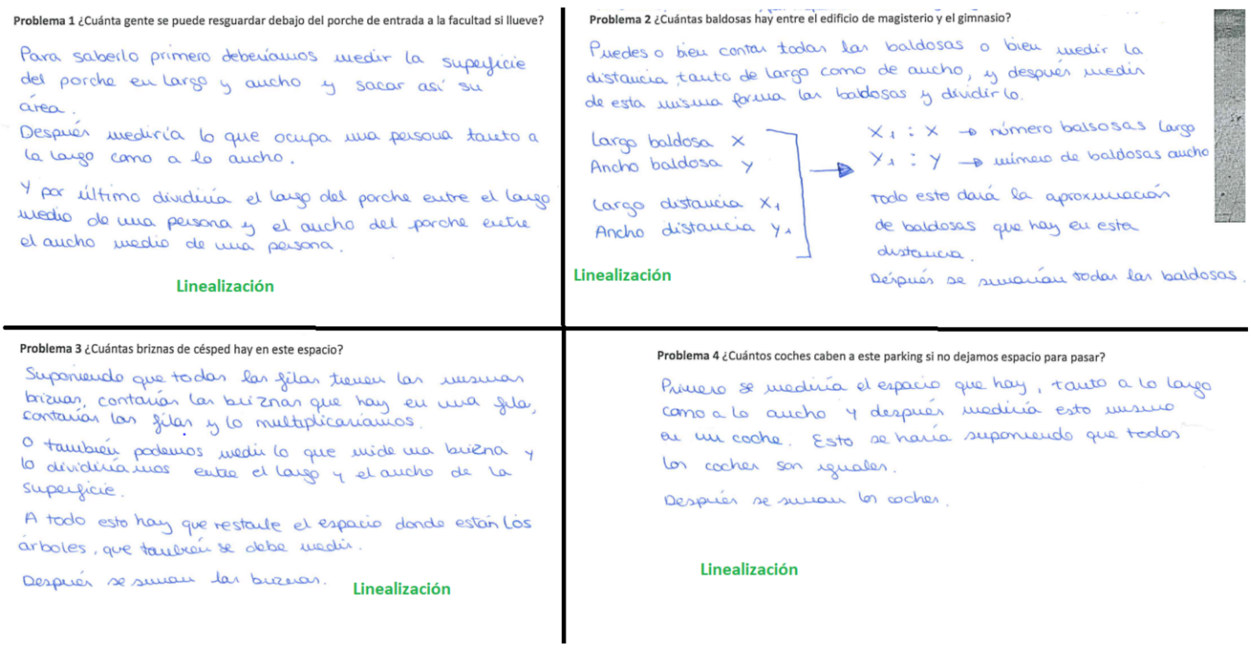
Unidad base

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar? Plantea,

Estrategia 1: Calcular el área de la superficie de todo el parking y luego calcular el área de una de las plazas de aparcamiento.

Unidad base

Figura 5-78.: Resolutor nada flexible con dos planes de resolución Unidad base y dos producciones Incompleta.



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Para saberlo primero deberíamos medir la superficie del porche en largo y ancho y sacar así su área.
Después mediría lo que ocupa una persona tanto a lo largo como a lo ancho.
Y por último dividiría el largo del porche entre el largo medio de una persona y el ancho del porche entre el ancho medio de una persona.

Linealización

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Puedes o bien contar todas las baldosas o bien medir la distancia tanto de largo como de ancho, y después medir de esta misma forma las baldosas y dividirlo.

Largo baldosa X
Ancho baldosa Y
Largo distancia X_1
Ancho distancia Y_1

$X_1 : X \rightarrow$ número baldosas largo
$Y_1 : Y \rightarrow$ número de baldosas ancho
Todo esto dará la aproximación de baldosas que hay en esta distancia.
Después se sumarían todas las baldosas.

Linealización

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Suponiendo que todas las filas tienen las mismas briznas, contarían las briznas que hay en una fila, contarían las filas y lo multiplicaríamos.
O también podemos medir lo que mide una brizna y lo dividiríamos entre el largo y el ancho de la superficie.
A todo esto hay que restarle el espacio donde están los árboles, que también se debe medir.
Después se suman las briznas.

Linealización

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

Primero se mediría el espacio que hay, tanto a lo largo como a lo ancho y después mediría esto mismo en un coche. Esto se haría suponiendo que todos los coches son iguales.
Después se suman los coches.

Linealización

Figura 5-79.: Los cuatro planes de resolución Linealización de un resolutor nada flexible.

en el que el tamaño de los elementos es lo suficientemente grande respecto al tamaño del aparcamiento como para que resulte artificial delimitar una unidad de área en la que contar los coches.

Moderadamente flexible

Se han encontrado variadas posibilidades en la actuación de los futuros maestros con nivel moderadamente flexible en la secuencia 1. La Tabla **5-1**, que recoge la distribución de planes de resolución para cada problema de la secuencia 1, proporciona información sobre los cambios de tipo de plan de resolución: los tipos de plan de resolución más empleados en cada problema, cuando difieren de Unidad base, que es el plan más usado globalmente, indican que ha habido cambios en dicho problema. En la Tabla **5-1** se observa que en *P2-Baldosas* el plan de resolución más utilizado es Linealización, mientras que en *P3-Césped* es Densidad. Esto nos indica, por tanto, que la mayoría de futuros maestros moderadamente flexibles, es decir, que cambiaron de tipo de plan de resolución en un problema, lo hicieron en P2 para usar Linealización, o lo hicieron en P3 para usar Densidad. Adaptaron, por tanto, sus planes de resolución a unos valores de la variable de contexto que, como se ha visto en secciones 5.1 y 5.2, favorecen una aproximación diferente: el orden y la regularidad de las baldosas (P2) se ajusta al enfoque lineal (modelo inicial unidimensional); el tamaño pequeño e irregular de las briznas (P3) se ajusta a fijar un área unidad pequeña en la que contar las briznas (densidad). Sin embargo, también hay resolutores moderadamente flexibles que hacen otros cambios puntuales de tipo de plan de resolución, pero son casos menos frecuentes y pueden deberse más a la vacilación, o a dificultades, que a la adaptación a las características del problema.

Un caso frecuente es, por tanto, el del resolutor con tres planes de resolución Unidad base (el más empleado) pero que cambia a Linealización en *P2-Baldosas*. Lo observamos, por ejemplo, en las producciones del resolutor 4ºD-I.1.1 recogidas en la Figura **4-30** del apartado 4.3.5). Si se observan los planes de resolución, no comete errores, ni en Unidad base ni en Linealización, por lo que se trata de un resolutor moderadamente flexible con alto rendimiento (Nivel 1a) en la resolución de la secuencia 1.

Otro caso similar es el del resolutor 4ºK-I.4.3, quien utiliza Unidad base como plan de resolución dominante, pero cambia en *P2-Baldosas* a Linealización. La diferencia, como se observa en la Figura **5-80**, es que no es capaz de aplicar ninguno de estos dos planes de resolución a P3, por lo que tiene una producción Incompleta.

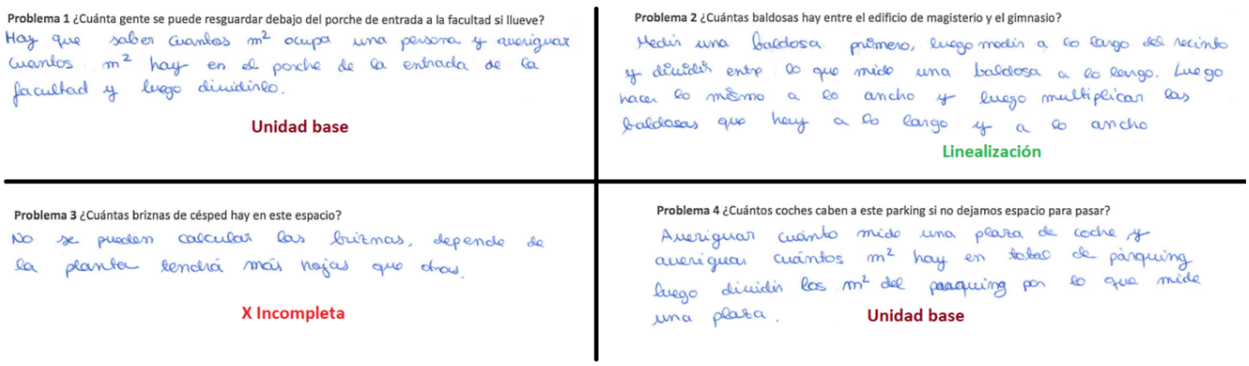
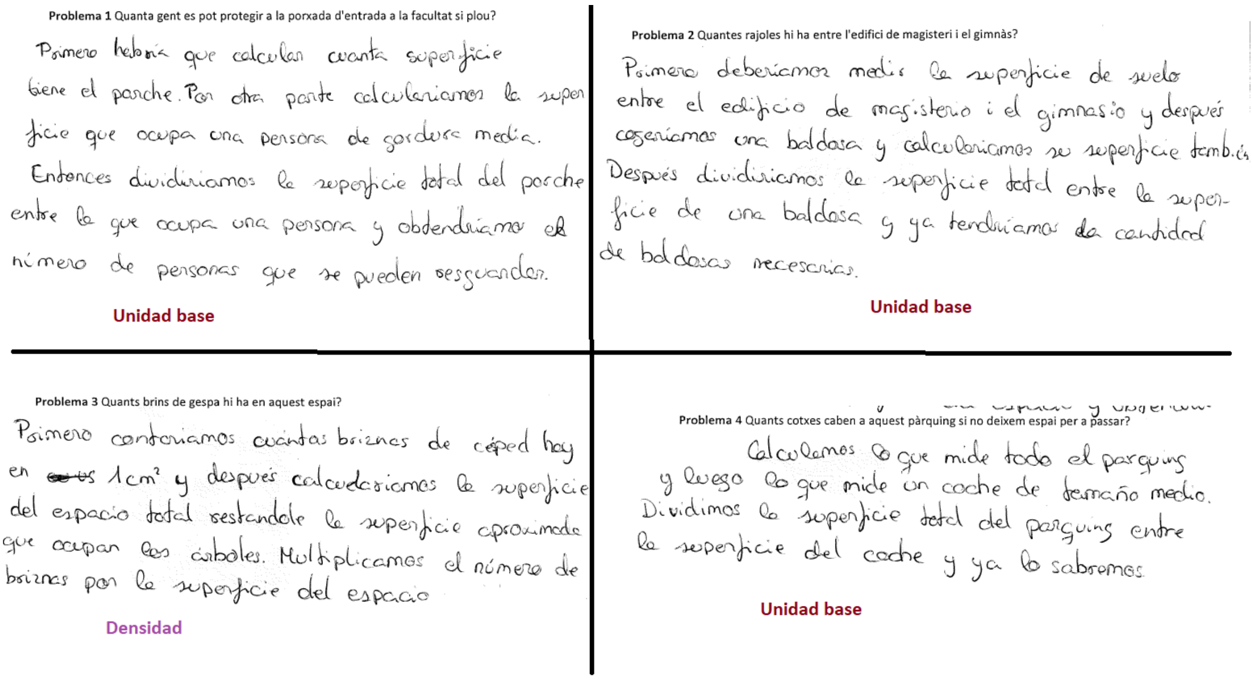


Figura 5-80.: Resolutor moderadamente flexible con dos planes de resolución Unidad base, un plan Linealización y una producción Incompleta.

Observamos que este resolutor no es capaz de desarrollar ni siquiera un modelo inicial para

la situación real de P3 (error E4), debido a que no es capaz de superar la dificultad de la irregularidad de forma y distribución de los elementos (briznas). Aunque en los tres problemas que resuelve el resolutor no comete errores, al no ser capaz de resolver la secuencia completamente, se trata de un resolutor moderadamente flexible con bajo rendimiento (Nivel 0) en la secuencia 1.
Otro de los casos más frecuentes, como se ha mencionado anteriormente, es el de los resolutores que utilizan la Unidad base en tres problemas de la secuencia y cambian a Densidad en P3- Césped. Por ejemplo, lo vemos en las respuestas del resolutor 4ºA-I.7.5 a la secuencia 1, en la Figura **5-81**. Observamos que en los tres planes de resolución Unidad base el resolutor no explicita el cálculo de las áreas (por ejemplo, "habría que calcular cuánta superficie tiene el porche"), pero se debe más bien a que no considera entrar en detalles que a una dificultad o error; el plan de resolución Densidad es correcto. Por tanto, el resolutor I.7.5 es moderadamente flexible con un rendimiento alto (Nivel 1a) en la secuencia 1.



Problema 1 Quanta gent es pot protegir a la porxada d'entrada a la facultat si plou?

Primero habría que calcular cuánta superficie tiene el porche. Por otra parte calcularíamos la superficie que ocupa una persona de gordura media. Entonces dividiríamos la superficie total del porche entre la que ocupa una persona y obtendríamos el número de personas que se pueden resguardar.

Unidad base

Problema 2 Quantes rajoles hi ha entre l'edifici de magisteri i el gimnàs?

Primero deberíamos medir la superficie de suelo entre el edificio de magisterio i el gimnasio y después cogeríamos una baldosa y calcularíamos su superficie también. Después dividiríamos la superficie total entre la superficie de una baldosa y ya tendríamos la cantidad de baldosas necesarias.

Unidad base

Problema 3 Quants brins de gespa hi ha en aquest espai?

Primero contaríamos cuántas briznas de céped hay en ~~una~~ 1cm² y después calcularíamos la superficie del espacio total restándole la superficie aproximada que ocupan los árboles. Multiplicamos el número de briznas por la superficie del espacio

Densidad

Problema 4 Quants cotxes caben a aquest pàrquing si no deixem espai per a passar?

Calculamos lo que mide todo el parquing y luego lo que mide un coche de tamaño medio. Dividimos la superficie total del parquing entre la superficie del coche y ya lo sabremos.

Unidad base

Figura 5-81.: Resolutor moderadamente flexible con tres planes de resolución Unidad base y un plan Densidad.

Se encuentra algunos casos en los que el resolutor utiliza dos planes de resolución distintos en dos problemas, y, sin embargo, no es capaz de desarrollar ninguno de los dos planes en los dos problemas restantes de la secuencia 1. Se trata de resolutores como 4ºF-I.3.2, moderadamente flexibles, pero con rendimiento bajo (Nivel 0). Como puede verse en la Figura **5-82**, el resolutor construye un modelo inicial que no se corresponde con la situación real (E4) en P1; mientras que en P2 su modelo inicial confunde las magnitudes superficie y distancia (E2), y falta desarrollar el modelo matemático (E8). En P3 presenta un plan de resolución basado en el número de briznas por metro cuadrado (densidad), aunque tiene un error de procedimiento de cálculo (divide el área entre dos) y le falta completar los procedimientos para obtener la estimación de briznas en el espacio total, pues no indica que debe multiplicar el número de briznas por m^2 por los metros cuadrados de la superficie total (E11). Se trata de un resolutor moderadamente flexible con rendimiento bajo (Nivel 0) en la secuencia 1.

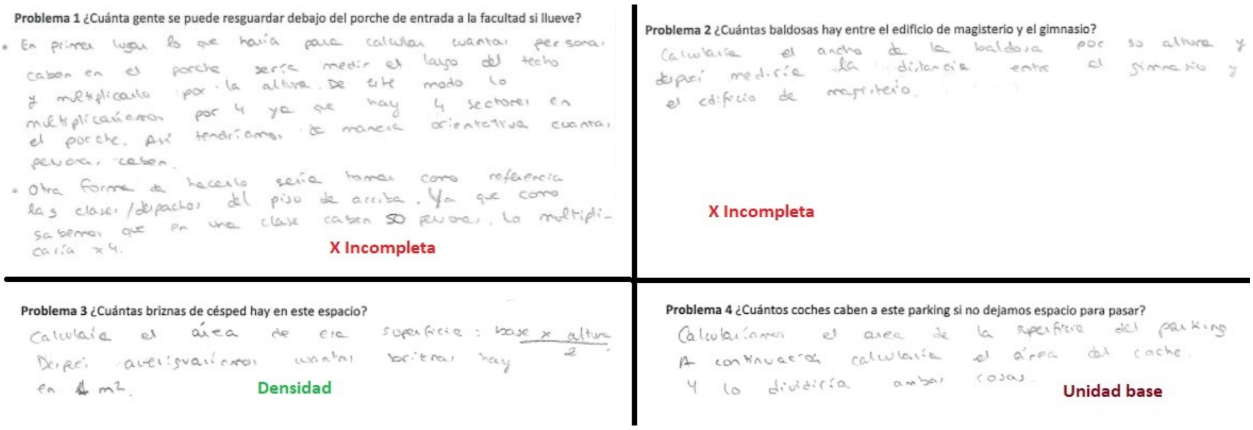


Figura 5-82.: Resolutor moderadamente flexible con un plan de resolución Unidad base, un plan Densidad y dos producciones Incompleta.

Hay otros escenarios, menos frecuentes, en los que el resolutor utiliza de manera dominante planes de resolución distintos a Unidad base y cambia de tipo de plan obedeciendo a razones menos claras que en los anteriores; posiblemente, en algunos casos, por vacilación o dificultades en desarrollar el plan de resolución que había utilizado en el resto de problemas. Es el caso, por ejemplo, del resolutor 4º K- I.1.3, quien utiliza Linealización para P1 y P4, pero cambia a Unidad base en P2, y deja incompleta P3. En este caso, se trata de un cambio extraño en P2, porque es el problema relacionado con la Linealización por las características de su contexto. Se trata de un resolutor con rendimiento bajo (Nivel 0), por lo que estos cambios se deberían, como se ha dicho, a dificultades en resolución de esta clase de problemas.

En otros casos de combinaciones de planes de resolución poco frecuentes, sin embargo, los resolutores muestran dominio (Nivel 1a) en la resolución de la secuencia 1. Por ejemplo, el resolutor 4ºA-I.6.3 utiliza tres planes de resolución Linealización y cambia en P3 a Densidad, como se observa en la Figura **5-83**. En este caso, el cambio sí se explica en relación a las características del contexto: adapta su resolución a la irregularidad en forma y distribución de las briznas, pues "linealizar" esa situación real en un modelo de filas por columnas es muy artificial. Si analizamos los planes de resolución del resolutor I.6.3 se observa que no comete errores en los problemas de la secuencia 1.

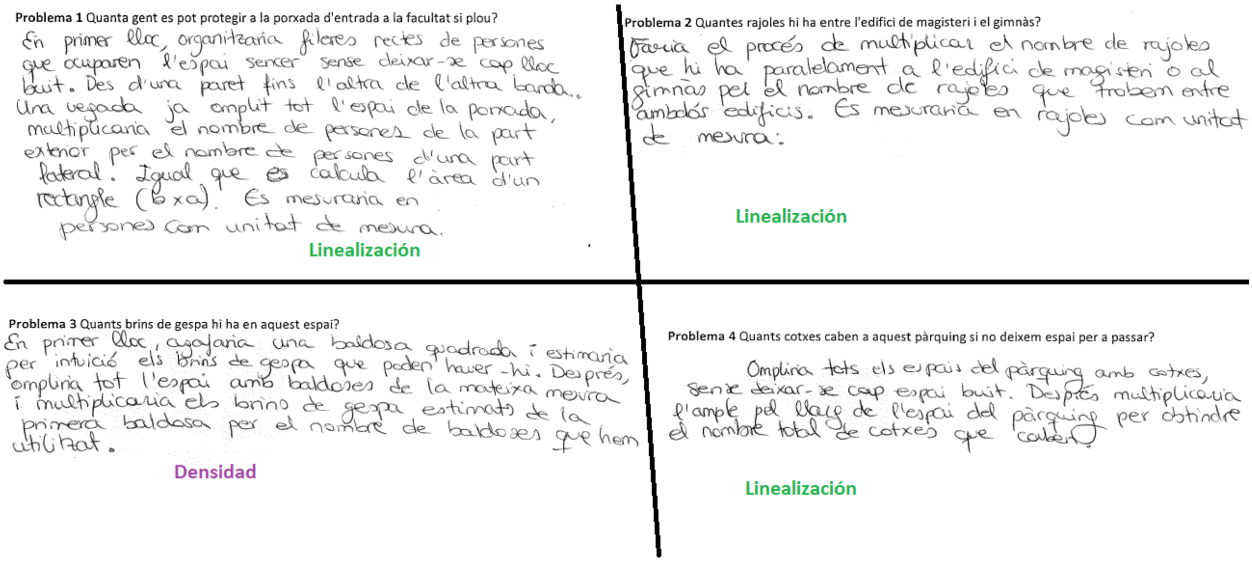


Figura 5-83.: Resolutor moderadamente flexible con tres planes de resolución Linealización y un plan Densidad.

Muy flexible

Se han encontrado variadas posibilidades en la actuación de los futuros maestros con nivel muy flexible en la secuencia 1. Como hemos discutido anteriormente, la Tabla **5-1** nos indica que la mayoría de futuros maestros muy flexibles usaron Unidad base en *P1- Personas* y *P4- Coches*, y cambiaron en *P2- Baldosas* para usar Linealización y también en *P3- Césped* para usar Densidad. Es el caso más frecuente, pero la casuística es muy variada.

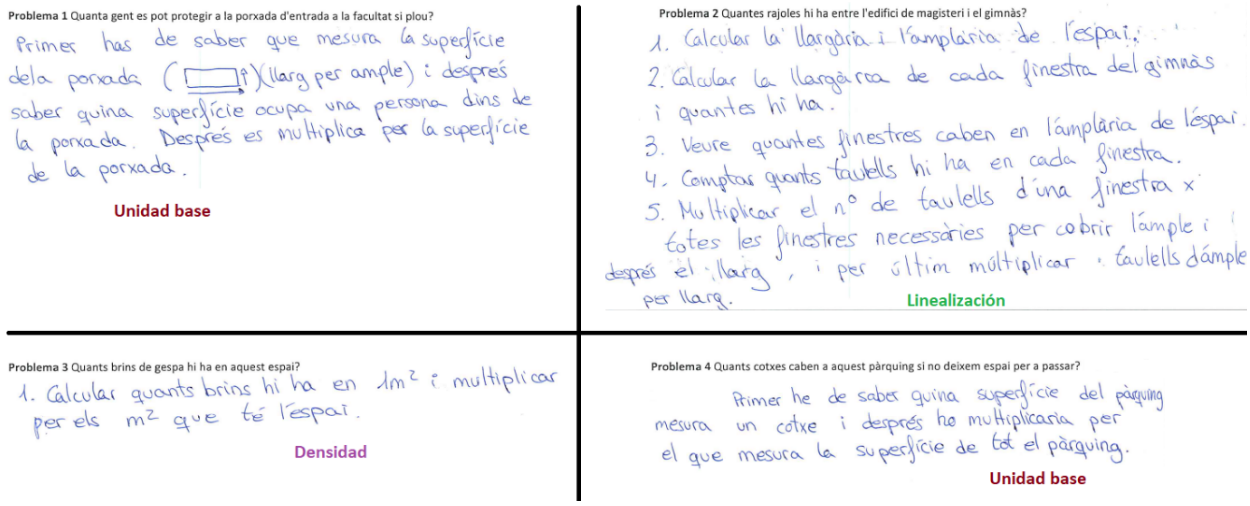


Figura 5-84.: Resolutor muy flexible con dos planes de resolución Unidad base, uno Linealización y uno Densidad.

Un ejemplo del caso más frecuente es el del resolutor 4ºA-I.2.4, como podemos ver en la Figura **5-84**. Si analizamos su rendimiento en las producciones, observamos que en el uso de Unidad base comete un error de algoritmo inverso (E9), es decir, en lugar de dividir el área total entre el área del elemento, multiplica ambas áreas. Tampoco explicita el procedimiento de cálculo para obtener las áreas en los tres problemas (P1, P3, P4) basados en un modelo inicial bidimensional, aunque más que a una dificultad se podría deber a que lo asume ("primer he de saber la superficie del parking"). Se trata, en consecuencia, de un resolutor muy flexible con rendimiento de Nivel 1b (básico), pues comete algún error en la secuencia 1.

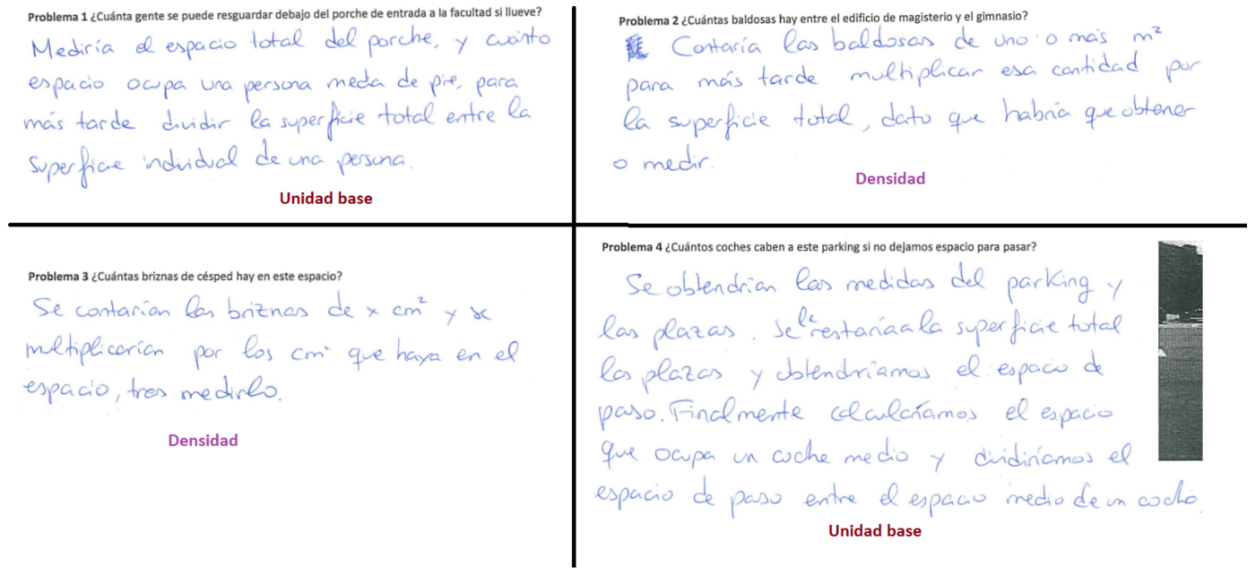
En la Tabla **5-1** también se observa que Densidad es el segundo tipo de plan de resolución más usado en *P1-Personas*, representando un 26.8 % de los planes categorizados en ese problema. Por tanto, otro escenario frecuente es el de los resolutores muy flexibles que utilizan Densidad en P1 y P3, cambian a Linealización en P2, y cambian a Unidad base en P4. Un caso lo encontramos en el resolutor 4ºD-I.12, cuyas cuatro producciones se recogen en la Figura **4-31** del apartado 4.3.5). Si examinamos las respuestas de este resolutor, encontraremos algunos errores en el uso de unidad de medida: en P3 propone calcular cuántas briznas hay en 5 cm^2, pero luego pasa a hablar de 5 m^2 (uso inadecuado de unidades de medida, E7); lo mismo ocurre en P4, cuando habla de "metros totales" de la superficie del aparcamiento debería referirse a metros cuadrados (E7). Se trata, por tanto, de un resolutor muy flexible con un rendimiento básico (Nivel 1b).

Como se ha comentado, entre los futuros maestros muy flexibles la casuística es variada, y hay escenarios distintos a los descritos anteriormente, mayoritarios. Encontramos, por ejemplo, la actuación del resolutor 4ºF-I.2.1 (Figura **5-85**), quien utiliza el plan de resolución Unidad base en P1 y P4, y el plan de resolución Densidad en P2 y P3. En este caso, el resolutor parece vincular la densidad con un tamaño pequeño de los elementos (baldosas y briznas), mientras que prefiere usar elementos de tamaño mediano o grande como unidad de medida (personas y coches).

En la Figura **5-85** observamos que, salvo algunos procedimientos de cálculo no explicitados porque se dan por supuestos ("superficie total, dato que habría que obtener o medir"), no hay errores en los planes de resolución. Se trata de un resolutor muy flexible con rendimiento alto.

En el resolutor 4ºD-I.8.4 encontramos una casuística similar a la anterior, es decir, el uso flexible de dos planes de resolución, cada uno en dos problemas, pero la combinación es distinta. Si observamos la Figura **5-86**, encontramos que este resolutor utiliza Densidad en P1 y P3, y Unidad base en P2 y P4. Además, los utiliza con dominio, sin cometer ningún error y describiendo con precisión los procedimientos para alcanzar la estimación. Se trata, por tanto, de un resolutor muy flexible con alto rendimiento (Nivel 1a).

También hay algún caso como el del resolutor 4ºD-I.4.4, quien pese a utilizar de forma flexible tres tipos de plan de resolución, no es capaz de desarrollar un plan de resolución completo en el problema P4. Como observamos en la Figura **5-87**, el resolutor utiliza con éxito Unidad



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Mediría el espacio total del porche, y cuánto espacio ocupa una persona media de pie, para más tarde dividir la superficie total entre la superficie individual de una persona.

Unidad base

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Contaría las baldosas de uno o más m² para más tarde multiplicar esa cantidad por la superficie total, dato que habría que obtener o medir.

Densidad

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Se contarían las briznas de x cm² y se multiplicarían por los cm² que haya en el espacio, tras medirlo.

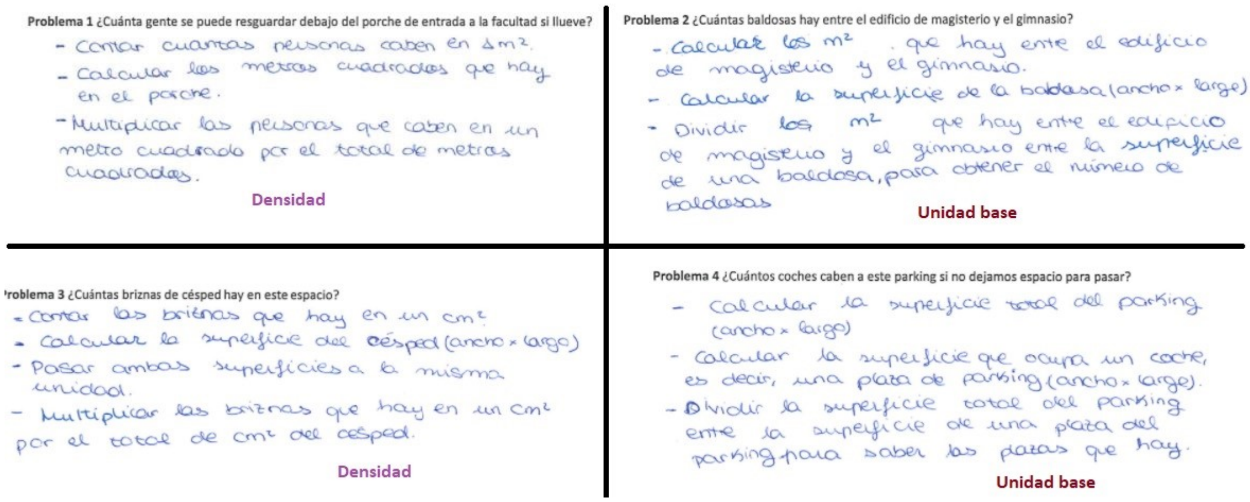
Densidad

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

Se obtendrían las medidas del parking y las plazas. Se le restaría a la superficie total las plazas y obtendríamos el espacio de paso. Finalmente calcularíamos el espacio que ocupa un coche medio y dividiríamos el espacio de paso entre el espacio medio de un coche.

Unidad base

Figura 5-85.: Resolutor muy flexible con dos planes de resolución Unidad base y dos planes de resolución Densidad.



Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

- Contar cuantas personas caben en 1 m².
- Calcular los metros cuadrados que hay en el porche.
- Multiplicar las personas que caben en un metro cuadrado por el total de metros cuadrados.

Densidad

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

- Calcular los m² que hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio.
- Calcular la superficie de la baldosa (ancho × largo)
- Dividir los m² que hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio entre la superficie de una baldosa, para obtener el número de baldosas

Unidad base

roblema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

- Contar las briznas que hay en un cm²
- Calcular la superficie del césped (ancho × largo)
- Pasar ambas superficies a la misma unidad.
- Multiplicar las briznas que hay en un cm² por el total de cm² del césped.

Densidad

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

- Calcular la superficie total del parking (ancho × largo)
- Calcular la superficie que ocupa un coche, es decir, una plaza de parking (ancho × largo).
- Dividir la superficie total del parking entre la superficie de una plaza del parking para saber las plazas que hay.

Unidad base

Figura 5-86.: Resolutor muy flexible con dos planes de resolución Unidad base y dos planes de resolución Densidad, en una combinación distinta a la de la Figura **5-85**.

base en P1, Linealización en P2 y Densidad en P3, que son los tipos de resolución más frecuentes en cada uno de los problemas. Sin embargo, en P4, en lugar de utilizar Unidad base – o, aunque sea minoritario en este problema, otro tipo de plan de resolución, por ejemplo, Linealización – no desarrolla un modelo inicial ni matemático completos (E1, E8), pues propone un recuento incompleto (el de las plazas dibujadas en el suelo del aparcamiento). Se trata de un resolutor muy flexible con rendimiento bajo (Nivel 0) en la secuencia 1.

Otro ejemplo, dentro de las posibles combinaciones de planes de resolución poco frecuentes, es el del resolutor 4ºF-I.4.1 (Figura **5-88**), quien utiliza dos veces el plan de resolución Li-

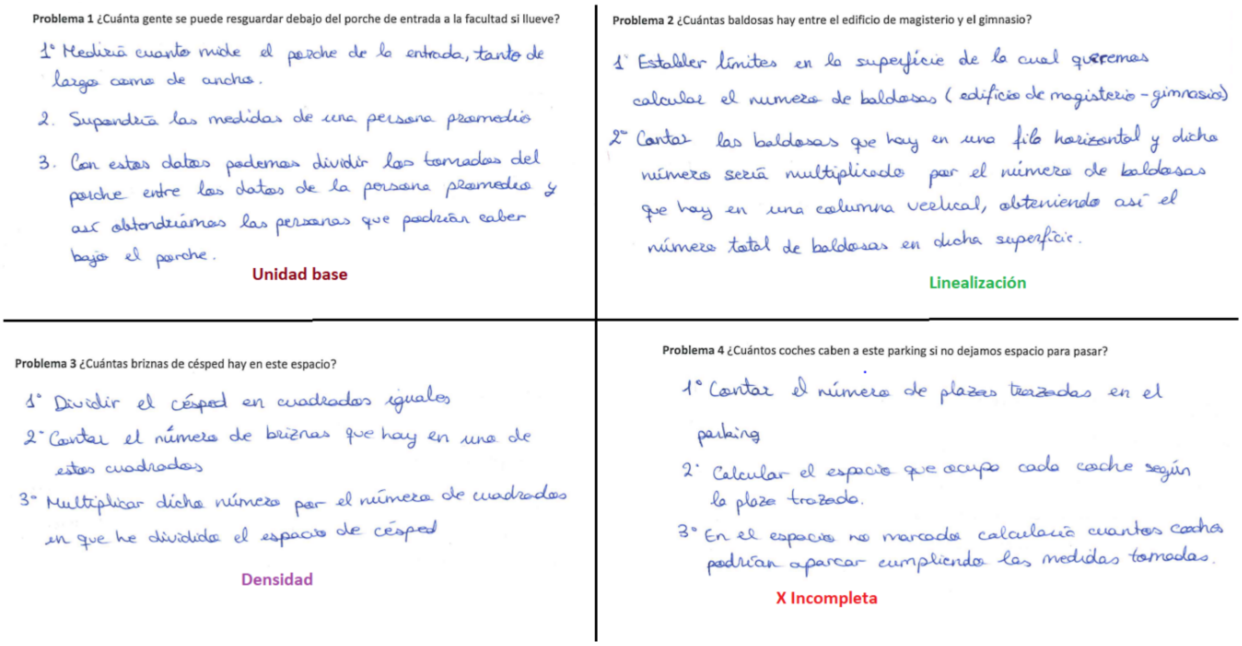


Figura 5-87.: Resolutor muy flexible con un plan de resolución Unidad base, un plan Linealización, un plan Densidad, y una producción Incompleta.

nealización (en P1 y P4), una vez Recuento (en P2), y una vez Densidad (en P3). Lo poco habitual es que no utilice en ningún problema Unidad base, siendo el plan de resolución más frecuente en toda la secuencia 1. Observamos, además, que este resolutor comete algunos errores: no desarrolla un modelo matemático para resolver el problema *P2-Baldosas*, pues propone un recuento exhaustivo que, por el gran número de baldosas, es ineficaz. Hay procedimientos de cálculo de áreas en P1 y P4 que no explicita. En resumen, se trata de un resolutor muy flexible con un rendimiento básico (Nivel 1b).

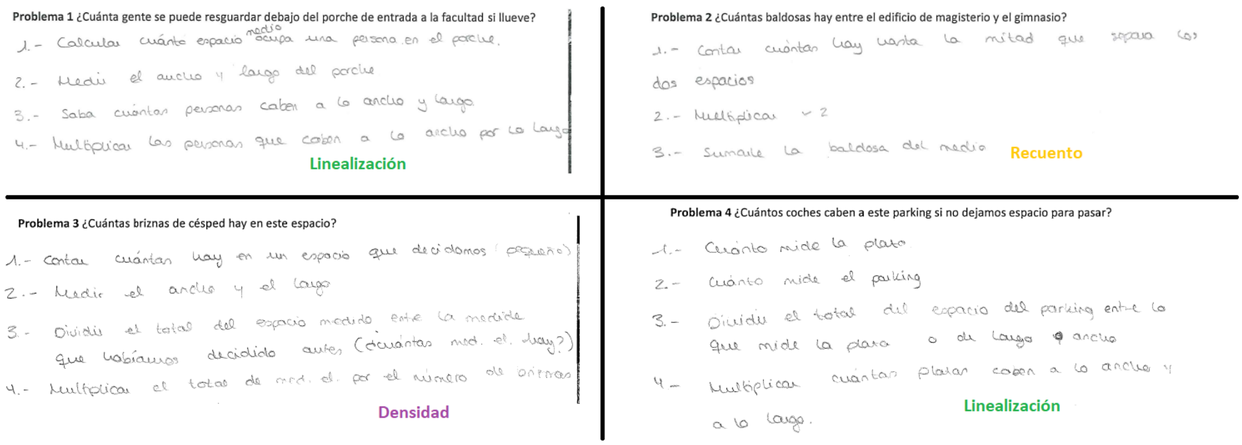


Figura 5-88.: Resolutor muy flexible con dos planes de resolución Linealización, un plan Recuento y un plan Densidad.

Se han encontrado otras combinaciones poco frecuentes entre los resolutores muy flexibles: por ejemplo, dos planes de resolución Unidad base y dos planes de resolución Linealización; un plan de resolución Densidad, un plan de resolución Unidad base y dos planes de resolución Recuento; dos planes de resolución Densidad y dos planes de resolución Linealización, entre otros. Este análisis cualitativo se ha realizado para complementar la Tabla **5-22**, interpretando algunos casos que permiten ilustrar y comprender los resultados cuantitativos de los tres niveles de flexibilidad inter-tarea categorizados. Además, se ha analizado cualitativamente, para cada ejemplo en cada nivel de flexibilidad, el rendimiento de los resolutores en la resolución de la secuencia de problemas de estimación en contexto real. En el siguiente apartado se mostrarán los resultados cuantitativos que permiten encontrar relaciones entre flexibilidad y rendimiento.

5.5.2. Análisis de la relación entre flexibilidad inter-tarea y rendimiento

Llegados a este punto, disponemos de los resultados necesarios para abordar el objetivo principal de esta tesis: averiguar si existen relaciones entre la flexibilidad (inter-tarea) de los maestros en formación y su rendimiento - definido a partir del análisis de errores - en la resolución de problemas de estimación en contexto real de la secuencia 1.

Flexibilidad y número de errores cometidos

Del análisis de errores sabemos que los 224 futuros maestros acumulan un total de 461 errores en sus resoluciones de los cuatro problemas de secuencia 1, una media de $2,06$ errores por resolutor. Sin embargo, no se distribuyen por igual según su nivel de flexibilidad inter-tarea:

- Los 69 futuros maestros muy flexibles cometen 58 errores ($0,84$ por resolutor).
- Los 92 futuros maestros moderadamente flexibles cometen 201 errores ($2,18$ por resolutor).
- Los 63 futuros maestros nada flexibles cometen 202 errores ($3,21$ por resolutor).

Es interesante disponer de más datos sobre cómo se distribuye el número de errores por resolutor según su flexibilidad inter-tarea. Para poder analizar la asociación entre flexibilidad y número de errores utilizando una prueba Chi-Cuadrado de independencia, se distingue entre los futuros maestros que hacen un uso flexible de dos o más tipos de plan de resolución (*uso flexible*) entre los problemas de la secuencia 1, y los que sólo utilizan un tipo de plan de resolución (*uso no flexible*). Por otro lado, se establecen los siguientes niveles de error en las resoluciones: *sin error* para aquellos resolutores que no cometen ningún error en sus cuatro producciones; *1 o 2 errores* para los que cometen uno o dos errores en sus cuatro producciones; *Entre 3 y 5* para los que cometen tres, cuatro o cinco errores en sus cuatro producciones;

Más de 5 para los que cometen más de cinco errores en sus cuatro producciones. La Tabla **5-23** muestra las frecuencias de estas categorías:

Tabla 5-23.: Relación entre número de errores cometidos y uso flexible de los planes de resolución.

Número de errores	**Uso no flexible**	**Uso flexible**
Más de 5	9 (14.29 %)	7 (4.35 %)
Entre 3 y 5	30 (47.62 %)	31 (19.25 %)
1 o 2 errores	15 (23.80 %)	74 (45.96 %)
Sin error	9 (14.29 %)	49 (30.44 %)

Hemos realizado la prueba de Chi-Cuadrado para la independencia ($DF = 3$, $N = 224$), con un nivel de significación de $\alpha = 0,01$, obteniendo un valor de $29,79$ con $p < 0{,}0001$. Además, hemos medido la fuerza de la asociación con la V de Cramer, obteniendo $V = 0{,}36$. En consecuencia, podemos afirmar que existe una relación significativa y moderadamente fuerte entre el uso flexible inter-tarea de varios tipos de plan de resolución y el número de errores cometidos por los futuros maestros. Si analizamos con mayor detalle los datos que subyacen a esta relación, encontramos diferencias aún más significativas:

- De los 7 futuros profesores con uso flexible que cometen más de cinco errores, ninguno tiene nivel muy flexible.
- Además, sólo 4 futuros profesores muy flexibles cometen entre 3 y 5 errores; los 27 futuros maestros restantes con uso flexible que cometen entre 3 y 5 errores son moderadamente flexibles.
- De los 49 futuros maestros con uso flexible que no cometen errores, 33 son muy flexibles.

Por tanto, los resolutores muy flexibles cometen un número menor de errores que el resto, lo que implica que en el nivel de rendimiento básico su actuación es mejor que la de los futuros maestros moderadamente flexibles o nada flexibles.
De hecho, si en la Tabla **5-23** excluimos a los 69 futuros maestros muy flexibles y aplicamos la prueba de Chi-Cuadrado ($DF = 3$, $N = 155$) para la asociación entre el número de errores y ser moderadamente flexible o nada flexible, seguimos encontrando una relación significativa con $\chi^2 = 10{,}08$ y $p = 0{,}018$, pero tenemos que aumentar el nivel de significación a $\alpha = 0,05$ y el efecto es más débil (Vde Cramer $= 0,26$). Las mayores desviaciones de los valores esperados se dan en 5 o más errores y 1 o 2 errores: hay una proporción mayor de la esperada ($+38,4\,\%$) entre los resolutores nada flexibles que cometen más de cinco errores, y una proporción menor de la esperada ($-35,3\,\%$) entre los resolutores nada flexibles que cometen 1 o 2 errores. De este análisis podemos concluir que los maestros en formación moderadamente flexibles cometen un número menor de errores que los nada flexibles.

Flexibilidad y naturaleza de los errores

Es importante conocer si los futuros maestros que utilizan de forma flexible dos o más tipos de plan de resolución entre problemas de la secuencia 1 cometen errores de distinta naturaleza que aquellos futuros maestros que no son flexibles intra-tarea. Afinando la cuestión: ¿podemos distinguir a los futuros profesores muy flexibles, moderadamente flexibles o nada flexibles por la naturaleza de los errores que cometen? Empleando las categorías de error asociadas a las fases del ciclo de modelización (*error de simplificación*, *error de matematización*, *matemático*, *error de interpretación*) obtenemos la Tabla **5-24** de distribución de frecuencias según el nivel de flexibilidad inter-tarea.

Tabla 5-24.: Distribución de los errores asociados a cada fase del ciclo de modelización por nivel de flexibilidad.

Categoría de error	Nada flexible	Moderadamente flexible	Muy flexible
Errores de simplificación	72	78	22
Errores de matematización	94	71	19
Errores de trabajo matemático	31	47	16
Errores de interpretación	5	5	1
Total	202	201	58

Si observamos la Tabla **5-24** , en relación a las fases del ciclo de modelización, no se observan grandes diferencias en la distribución de los errores por nivel de flexibilidad inter-tarea. En efecto, si asumimos como hipótesis nula que no existe relación entre las categorías de error asociadas al proceso de modelización y los niveles de flexibilidad inter-tarea, y fijamos un nivel de significación $\alpha = 0,01$, la prueba de Chi-Cuadrado para la independencia ($DF = 6$, $N = 461$) nos da un resultado de $\chi^2 = 9,3$ con $p = 0,16$. Este resultado no nos permite rechazar la hipótesis nula; por lo tanto, no hay razón para suponer que el nivel de flexibilidad inter-tarea de los maestros en formación esté relacionado con la fase del proceso de modelización en la que cometen errores. Como se explicó en la sección 5.4, dedicada al análisis de errores, todos los futuros maestros cometen la mayoría de los errores durante las fases de simplificación y matematización, y esto se mantiene en los niveles de flexibilidad inter-tarea.
Sin embargo, un examen detallado de los tipos de error cometidos por los futuros maestros revela diferencias significativas en la naturaleza de los errores según el nivel de flexibilidad inter-tarea (Tabla **5-25**). Puesto que el análisis de errores se realizó en la sección 5.2, nos

Tabla 5-25.: Distribución de los tipos de errores cometidos por los N = 224 futuros maestros en cada nivel de flexibilidad inter-tarea.

Tipo de error/ Fase de modelización	**Nada flexible**	**Moderadamente flexible**	**Muy flexible**
E1 Simplificación	17 (8 %)	10 (5 %)	0
E2 Simplificación	42 (21 %)	39 (19 %)	19 (33 %)
E3 Simplificación	1	3	0
E4 Simplificación	12 (6 %)	26 (13 %)	3 (5 %)
E5 Matematización	25 (19 %)	30 (15 %)	11 (19 %)
E6 Matematización	4	2	1
E7 Matematización	8	13	3
E8 Matematización	57 (28 %)	26 (13 %)	4 (7 %)
E9 Trabajo matemático	13 (6 %)	21 (10 %)	10 (17 %)
E10 Trabajo matemático	0	0	1
E11 Trabajo matemático	18	26	5
E12 Interpretación	1	1	0
E13 Interpretación	4	4	1

centraremos sólo en los tipos de error que contrastan entre los distintos niveles de flexibilidad inter-tarea (véanse los porcentajes en la Tabla **5-25**).
Respecto a los errores de simplificación, sólo 3 maestros en formación muy flexibles cometieron el error más grave (*E4. No construye un modelo inicial*), que lleva a que las producciones se categoricen como Incompleta. 26 futuros maestros moderadamente flexibles y 12 nada flexibles cometieron el error E4. En el caso de los resolutores nada flexibles, se trata también de una proporción baja. Sin embargo, ningún futuro maestro muy flexible comete el *E1. Modelo inicial incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la situación real*, mientras que lo cometieron 10 futuros maestros moderadamente flexibles y 17 nada flexibles. E1 aparece en resoluciones que no consideran todas las variables que intervienen en la situación real y es también un error grave que conduce a producciones incompletas. Aunque todos los futuros profesores cometen un número importante de errores de percepción de la magnitud (E2), la proporción es mayor entre los muy flexibles (el 33 % de los errores son E2, frente al 19 % entre los moderadamente flexibles y el 21 % entre los no flexibles) porque apenas cometen ninguno del resto en esta fase. Hemos visto que este tipo de error está asociado a carencias importantes en el sentido de la medición, pero no impide la elaboración de un modelo matemático completo, aunque sea incorrecto.
En cuanto a los errores de matematización, encontramos que los futuros maestros nada flexibles cometen 57 errores (un 28 % del total) por no completar el modelo matemático (E8),

que se asocian a bajo rendimiento porque suelen conducir a producciones categorizadas como Incompleta. Los futuros profesores moderadamente flexibles cometen 26 (13 %) errores del tipo E8 y los muy flexibles cometen 4 (7 %). Observamos que todos los futuros maestros, sin diferencias significativas según la flexibilidad, realizan un elevado número de errores de significado en términos de la magnitud (E5). Como se ha comentado en la sección 5.2, están relacionados con carencias en las habilidades de medición, pero no impiden el desarrollo de un modelo matemático.

En los errores de trabajo matemático, la única diferencia importante entre los niveles de flexibilidad inter-tarea está en los errores de procedimiento de cálculo (E9). Los futuros profesores muy flexibles cometen 10 errores del tipo E9, un 17 % del total de sus errores, mientras que los futuros profesores moderadamente flexibles cometen 21 (10 %) y los no flexibles 12 (6 %). Una explicación razonable de este hecho es que – como confirmaremos a continuación – los futuros profesores muy flexibles acumulan menos errores graves (E1, E4, E8) que suelen dar lugar a producciones incompletas, por lo que entre ellos encontramos más producciones en las que se proponen procedimientos de cálculo, y las oportunidades de equivocarse son mayores.

En definitiva:

- Los futuros maestros nada flexibles cometen un 42 % de sus errores en los tipos E1, E4 y E8, graves, asociados a un rendimiento bajo (Nivel 0) porque suelen asociarse a producciones incompletas.
- Los futuros maestros moderadamente flexibles cometen un 31 % de sus errores en los tipos E1, E4 y E8.
- Los futuros maestros muy flexibles cometen un 12 % de sus errores en los tipos E1, E4 y E8.

Por tratarse de errores graves, estos resultados apuntan a que pueda existir una relación que vincula un mayor nivel de flexibilidad inter-tarea con una disminución de bajo rendimiento en la secuencia 1. En el siguiente apartado trataremos de confirmarlo valiéndonos de la frecuencia de producciones incompletas.

Flexibilidad y rendimiento bajo

Recordemos que se categorizaron un total de 140 resoluciones incompletas (15.6 % del total). Si las relacionamos con los niveles de flexibilidad inter-tarea, encontramos lo siguiente:

- Los futuros maestros nada flexibles acumulan 82 producciones incompletas, lo que da una media de 1,3 producciones incompletas por resolutor no flexible.
- Los futuros maestros moderadamente flexibles acumulan 54 producciones incompletas, lo que da una media de 0,59 producciones incompletas por resolutor moderadamente flexible.

- Los futuros maestros muy flexibles acumulan sólo 4 producciones incompletas, una media de $0,06$ por resolutor muy flexible.

Las diferencias son significativas y confirman el análisis anterior de la relación entre la naturaleza de los errores y el nivel de flexibilidad inter-tarea. Es importante confirmar que, además, estos resultados implican que existen diferencias significativas en la proporción de futuros maestros que tienen alguna producción Incompleta según su nivel de flexibilidad. La Tabla**5-26** muestra el número de futuros maestros que tienen todas sus producciones completas (Nivel 1) y los que tienen alguna producción incompleta (Nivel 0) según su nivel de flexibilidad inter-tarea.

Tabla 5-26.: Número de futuros maestros con Nivel 0 de rendimiento y Nivel 1 de rendimiento en la secuencia 1 por nivel de flexibilidad.

Rendimiento	Nada flexible	Moderadamente flexible	Muy flexible
Tiene alguna producción Incompleta (Nivel 0. Rendimiento bajo)	39 (61.90 %)	43 (46.74 %)	4 (5.80 %)
No tiene producciones Incompletas (Nivel 1. Éxito)	24 (38.10 %)	49 (53.26 %)	65 (94.20 %)

Asumimos como hipótesis nula que no existe relación entre nivel de rendimiento y su nivel de flexibilidad. Realizamos la prueba de Chi-Cuadrado para la independencia ($DF = 2$, $N = 224$), fijando un nivel de significación $\alpha = 0,01$. La prueba nos da un resultado de $\chi^2 = 48,43$ y $p < 0,0001$ que nos lleva a rechazar la hipótesis nula. Además, hemos medido la fuerza de la correlación con la V de Cramer, obteniendo $V = 0,47$, por lo que existe una relación significativa, con una fuerza de tamaño mediano cercano a grande, entre el bajo rendimiento de un futuro maestro y su nivel de flexibilidad inter-tarea. La desviación de la frecuencia de los resolutores nada flexibles con Nivel 0 es mucho mayor de lo esperado ($+61,2\,\%$), mientras que la desviación de la frecuencia de los resolutores muy flexibles con Nivel 0 es mucho menor de lo esperado ($-84,9\,\%$). Por lo tanto, el éxito (Nivel 1) al completar la secuencia 1 de problemas de estimación en contexto real es mayor para futuros maestros muy flexibles. También los profesores en formación moderadamente flexibles tienen éxito en mayor proporción que los nada flexibles, aunque la diferencia es mucho menor. En efecto, se confirma que hay mayor proporción de resolutores con bajo rendimiento entre los nada flexibles.

Además de distinguir entre rendimiento bajo (Nivel 0) y rendimiento de éxito (Nivel 1), dentro del Nivel 1 conviene distinguir entre rendimiento básico (Nivel 1b) y rendimiento alto (Nivel 1a), y ver si – como los análisis anteriores parecen implicar – también existe una relación con la flexibilidad inter-tarea.

Flexibilidad y alto rendimiento

Hemos establecido que un resolutor tiene un alto rendimiento (Nivel 1a) en la resolución de la secuencia 1 cuando no comete errores, es decir, cuando tiene dominio en el desarrollo de los planes de resolución. En este primer análisis sobre la relación entre flexibilidad inter-tarea y alto rendimiento veremos si es significativa sobre el total de los $N = 224$ futuros maestros participantes en la experiencia A1.
Sabemos, por los resultados del apartado 5.4.2, que hay una proporción muy alta (74,11 %) de futuros maestros que comete algún error al resolver la secuencia 1 de problemas de estimación en contexto real. Así, sólo un 25,89 % de los $N = 224$ futuros maestros que participaron en la experiencia A1 tienen un alto rendimiento (Tabla **5-21**). A partir de los datos aportados por el análisis de errores descrito en la sección 5.4, es posible relacionar las categorías "Comete error" y "Alto rendimiento (Nivel 1a)" con los niveles de flexibilidad inter-tarea. Es decir, podemos analizar si existe una relación entre alto rendimiento (Nivel 1a) y nivel de flexibilidad inter-tarea. Como se observa en la Tabla **5-27**, esto introduce matices muy importantes a los resultados globales (Tabla **5-21**).
La proporción de futuros maestros con alto rendimiento en la muestra de $N = 224$ futuros maestros cambia según el nivel de flexibilidad. Para asegurar que existe una relación significativa entre el nivel de flexibilidad entre tareas de los futuros maestros y el Nivel 1a de rendimiento, hemos realizado un análisis estadístico basado en la prueba de Chi-cuadrado para la independencia ($DF = 2$, $N = 224$). Hemos asumido como hipótesis nula que no existe relación entre la variable flexibilidad y la variable presencia de errores. Fijamos un nivel de significación $\alpha = 0,01$ y la prueba nos da un resultado de $\chi^2 = 25,19$ y un valor $p < 0,0001$ que nos lleva a rechazar la hipótesis nula. Por lo tanto, existe una relación significativa entre el nivel de flexibilidad inter-tarea de los futuros maestros y el hecho de cometer o no errores. Además, hemos medido la fuerza de la correlación con la V de Cramer, obteniendo $V = 0,34$ con una significación de $p < 0,0001$. Aunque la V de Cramer tiende a producir medidas de correlación relativamente bajas, incluso para resultados altamente significativos, este valor nos informa de que la fuerza de la relación entre la flexibilidad y la existencia de errores es mediana (Acock y Stavig, 1979).

Tabla 5-27.: Relación entre alto rendimiento y los niveles de flexibilidad

	Nada flexible	**Moderadamente flexible**	**Muy flexible**
Comete error	54 (86 %)	76 (83 %)	36 (52 %)
Alto rendimiento (1a)	9 (14 %)	16 (17 %)	33 (48 %)
Total	63	92	69

En cuanto a los valores de las categorías relacionadas, la desviación porcentual de lo esperado (si se cumpliera la hipótesis nula) para la frecuencia de "resolutores muy flexibles con alto rendimiento" es de +84,7 %. Esta es, con mucha diferencia, la mayor desviación de lo esperado. Esto confirma que es el nivel muy flexible el que se distingue claramente en relación con el rendimiento alto (Nivel 1a). Aunque la proporción de futuros maestros muy flexibles que cometen errores, es decir, con un rendimiento por debajo del dominio, es alta (52 %), es casi la mitad de la del resto.
De hecho, no se observan diferencias significativas entre los maestros en formación nada flexibles y los moderadamente flexibles: la proporción de resolutores que cometen errores en estos niveles es similar (86 % de los nada flexibles frente al 83 % de los moderadamente flexibles). Es muy alta en ambos y, por lo tanto, los futuros maestros con una moderada flexibilidad inter-tarea no parecen estar relacionados con un rendimiento alto.

Flexibilidad y alto rendimiento entre los futuros maestros con éxito (Nivel 1)

Es importante contrastar con los resultados anteriores sobre la relación entre flexibilidad inter-tarea y alto rendimiento, realizados sobre toda la muestra de $N = 224$ futuros maestros, con lo que ocurriría si sólo tomáramos como muestra a los 138 maestros en formación con éxito (Nivel 1) en la resolución de todos los problemas de la secuencia 1, es decir, descartando a aquellos que tienen producciones categorizadas como Incompleta. Se trata de ver si dentro del Nivel 1 sigue existiendo una relación entre flexibilidad y rendimiento que separa los niveles 1b (básico) y 1a (alto). Es decir, la pregunta sería la siguiente: ¿entre los futuros maestros con éxito se mantiene la asociación entre niveles de flexibilidad inter-tarea y alto rendimiento? Como veremos, hay matices en los resultados.
En esta muestra de 138 futuros maestros con éxito (Nivel 1), los resolutores nada flexibles sólo conocen un tipo de plan resolución, pero son capaces de aplicarla (con o sin errores) para llegar a una estimación en los cuatro problemas. Los maestros en formación moderadamente flexibles cambian de tipo de resolución sólo en un problema, lo que puede indicar que están desorientados por ese problema o que consideran que otra estrategia se adapta mejor al contexto. Los maestros en formación muy flexibles cambian de tipo de resolución en dos o más problemas. Como hemos visto, conocer varios tipos de plan resolución y aplicarlos en diferentes contextos de un mismo tipo de problemas de estimación real parece dotar a los resolutores de recursos suficientes para evitar errores graves que lleven a respuestas categorizadas como Incompleta. Pero, ¿es una ventaja entre aquellos que ya tienen éxito al completar los problemas de la secuencia 1?
En el caso de los futuros maestros con rendimiento Nivel 1, se encuentran las siguientes proporciones de resolutores con alto rendimiento (Nivel 1a):

- 9 de 24 (37,5 %) resolutores nada flexibles;
- 16 de 49 (32,65 %) resolutores moderadamente flexibles;

- 33 de 65 (50,77 %) resolutores muy flexibles.

Se siguen observando diferencias a favor de la proporción de futuros maestros muy flexibles con alto rendimiento, como ocurría en la muestra total (Tabla **5-25**). Sin embargo, cuando nos restringimos a los resolutores con éxito, es decir, a aquellos que son capaces de completar los planes de resolución de los cuatro problemas de la secuencia 1, la proporción de resolutores con alto rendimiento aumenta significativamente entre aquellos que son nada flexibles y moderadamente flexibles. Es decir, en los futuros maestros con éxito, la proporción de alto rendimiento en los tres niveles de flexiblidad inter-tarea está más igualada, aunque todavía destacan los muy flexibles. Esto explica que, entre los resolutores con éxito (Nivel 1) en la secuencia 1, no se puede asegurar de manera significativa que exista una relación entre nivel de flexibilidad y alto rendimiento: el valor de la prueba de Chi-Cuadrado para la independencia ($DF = 2$, $N = 138$) es $\chi^2 = 4,01$ con $p = 0,13$. Hay una proporción claramente mayor de resolutores con alto rendimiento entre los muy flexibles, y parece apuntar a que podría existir esa relación, pero el tamaño de la muestra de los futuros maestros con rendimiento básico no permite asegurar que este hecho sea significativo.
Pero aún podemos afinar el análisis de la actuación de los 138 resolutores que completan los cuatro problemas de la secuencia 1. En esta submuestra de futuros maestros con éxito, el número medio de errores por resolutor, como era de esperar, desciende en todos los niveles de flexibilidad inter-tarea en relación con el número medio de errores de la muestra completa de 224 futuros maestros:

- 24 futuros maestros nada flexibles acumulan 35 errores ($1,46$ por resolutor).
- 49 futuros maestros moderadamente flexibles acumulan 73 errores ($1,49$ por resolutor).
- 65 futuros maestros muy flexibles acumulan 48 errores ($0,74$ por resolutor).

Para comparar las medias y medianas de tres muestras independientes no paramétricas, con el fin de comparar las diferencias en la distribución de los errores, utilizamos la prueba H de Kruskal-Wallis (2, $N = 138$). Asumimos como hipótesis nula que la distribución de los errores es la misma para los tres niveles de flexibilidad inter-tarea, es decir, que las medias (y medianas) de los tres grupos son todas similares. Fijando un nivel de significación $\alpha = 0,05$, obtenemos $H = 6,99$ con $p = 0,03$. Por lo tanto, se puede rechazar la hipótesis nula: al menos una muestra tiene una distribución de errores diferente, con una media o mediana diferente. Está claro que se trata de la muestra de los futuros maestros muy flexibles, pero para confirmarlo realizamos otra prueba H de Kruskal-Wallis (1, $N = 73$) para comparar las muestras de los resolutores con éxito moderadamente flexibles y nada flexibles. Se obtiene $H = 0,0058$ y $p = 0,94$, lo que descarta claramente que haya diferencias significativas en la distribución de los errores entre los dos grupos. Es el tercer grupo, el de los muy flexibles, el que introduce las diferencias entre los futuros maestros de Nivel 1 (éxito).

Así, incluso entre los resolutores que no tienen producciones incompletas, aquellos que son muy flexibles cometen significativamente menos errores (la mitad) que el resto. Sin embargo, la flexibilidad moderada no está relacionada con cometer menos errores.

En resumen, hemos visto que existen relaciones estadísticamente significativas entre niveles de rendimiento y niveles de flexibililidad de los futuros maestros que participaron en la experiencia A1. A través del análisis de errores, se constata que hay más futuros maestros muy flexibles que no cometen errores (Nivel 1a, alto rendimiento), y que cuando los cometen, lo hacen en menor cantidad y con errores de menor gravedad (Nivel 1b, básico). Al contrario, entre los futuros maestros nada flexibles se constata que hay una proporción significativamente mayor de resolutores que no son capaces de completar la secuencia (Nivel 0, bajo rendimiento).

5.5.3. Estudio exploratorio de la flexibilidad intra-tarea en problemas de estimación en contexto real

Como se explicó en el Capítulo 4, en el curso 2018/19 se hizo un añadido a la pregunta del problema *P4- Coches* de la secuencia 1, demandando una segunda forma de resolución alternativa (véase Figura **4-8**). La adenda de plantear dos tipos de resolución diferentes para P4 se hizo con la intención de estudiar la flexibilidad intra-tarea con los $N = 110$ futuros maestros que participaron en la experiencia A1 durante el curso 2018/19.

Definiremos flexibilidad *intra-tarea* (o intra-flexibilidad) en resolución de problemas de estimación en contexto real como la capacidad de utilizar dos planes de resolución distintos para proponer cómo alcanzar la estimación demanda por el problema. En el apartado 4.3.5 del Capítulo 4 se ha descrito el proceso de categorización en intra-flexible, cuando el resolutor es capaz de proponer un plan de resolución alternativo en P4; o en no intra-flexible, cuando el resolutor no propone un plan de resolución alternativo, no respondiendo o elaborando una producción Incompleta.

Por ejemplo, podemos ver la actuación de un resolutor intra-flexible en la Figura **5-89**, que muestra los dos planes de resolución propuestos por el resolutor 4ºI-I.7.2. En el primero ("Estratègia 1"), propone dividir el área del aparcamiento entre el área media que ocupa un coche, es decir, Unidad base. En el segundo ("Estratègia 2") propone estimar el número de coches a lo largo y el número de coches a lo ancho, y multiplicar (Linealización).

En la Figura **5-89** encontramos el caso contrario: el resolutor 4ºK-I.8.4 también es intra-flexible, pero primero utiliza el plan de resolución Linealización, y luego cambia a Unidad base.

El escenario más frecuente entre los futuros maestros no flexibles intra-tarea es dejar la respuesta a la "Estrategia 2" en blanco. También encontramos algunos casos en los que el resolutor repite en su producción alternativa el mismo plan de resolución, pero añade algún factor de complejidad o cambia algún procedimiento de medición (por ejemplo, primero propone medir en metros, usando el SI, y luego propone medir en pasos o alguna unidad de

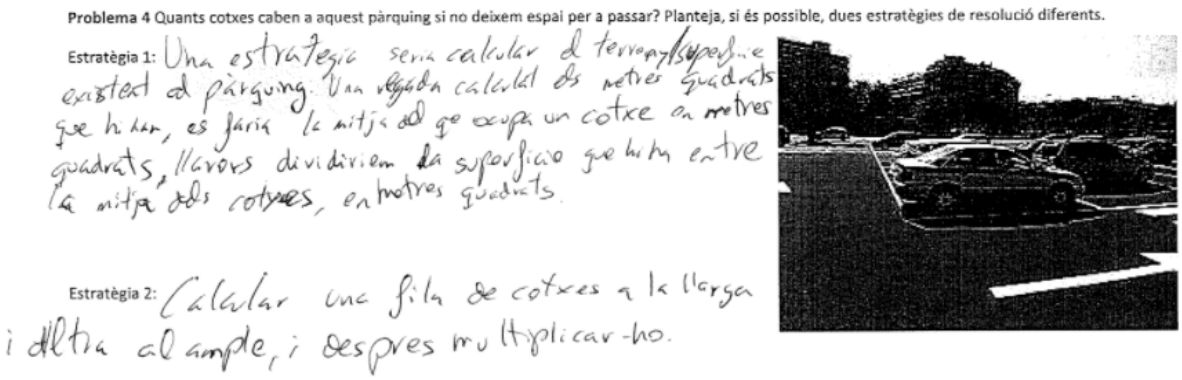


Figura 5-89.: Plan de resolución Unidad base y plan Linealización alternativo para el problema P4.

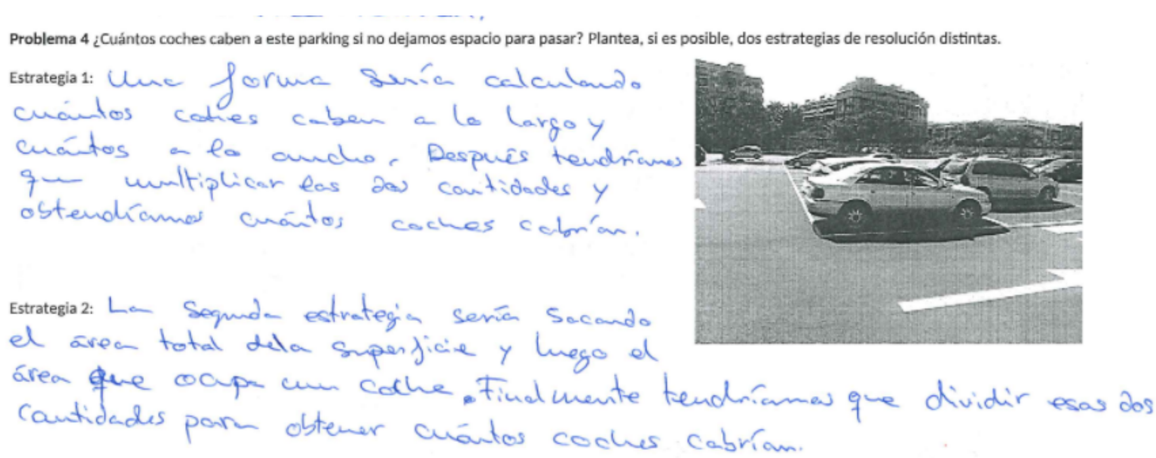


Figura 5-90.: Plan de resolución Linealización y plan Unidad base alternativo para el problema P4.

medida no estándar).

Sólo 35 de los $N = 110$ futuros maestros que participaron en este estudio exploratorio, lo que representa un $31,8\,\%$ del total, son flexibles intra-tarea en el problema *P4-Coches* de la secuencia 1. De esos 35 futuros maestros intra-flexibles, 31 (el $88\,\%$) había sido categorizado con un uso flexible inter-tarea de sus resoluciones en la secuencia 1 (es decir, con un nivel moderadamente flexible o muy flexible). La Tabla **5-28** detalla el número de futuros maestros intra-flexibles y no intra-flexibles en cada nivel de flexibilidad inter-tarea.

Para la muestra de $N = 110$ futuros maestros que participaron en la experiencia A1 durante el curso 2018/19, contrasta la alta proporción de futuros maestros con uso flexible de sus planes de resolución entre tareas (87 de 110, un $79.1\,\%$ del total) con la baja proporción de aquellos que son flexibles dentro del problema P4 (un $31.8\,\%$). Este resultado confirma que el diseño de la secuencia 1 por variación de contraste promueve la flexibilidad inter-tarea.

Tabla 5-28.: Distribución de futuros maestros por nivel de flexibilidad inter-tarea según su flexibilidad intra-tarea.

Niveles de flexibilidad inter-tarea	**No intra-flexible**	**Intra-flexible**
Nada flexible inter-tarea	19 (17.3 %)	4 (3.6 %)
Moderadamente flexible inter-tarea	32 (29.1 %)	18 (16.4 %)
Muy flexible inter-tarea	24 (21.8 %)	13 (11.8 %)
Total ($N = 110$)	75 (68.2 %)	35 (31.8 %)

La mayoría de futuros maestros moderadamente flexibles inter-tarea y, sin embargo, dan muestras de intra-flexibilidad en el problema *P4-Coches*. Y es llamativo que incluso entre los 37 futuros maestros muy flexibles inter-tarea, 24 (un 64.9 %) no son capaces de proponer dos planes de resolución para el problema P4. Las características del contexto favorecen que cambien dos o más veces de tipo de plan de resolución durante la secuencia 1, pero no son capaces de aplicar alguno de los dos o tres tipos de plan de resolución que conocen como alternativa en un solo problema.
De hecho, la proporción de resolutores intra-flexibles en cada nivel de flexibilidad inter-tarea es el siguiente:

- Un 17.39 % de los futuros maestros nada flexibles inter-tarea son intra-flexibles.
- Un 36 % de los futuros maestros moderadamente flexibles inter-tarea son intra-flexibles.
- Un 35.1 % de los futuros maestros muy flexibles inter-tarea son intra-flexibles.

Entre los futuros maestros con uso flexible de sus resoluciones entre problemas de la secuencia 1 (ya sea moderado o alto) la proporción de intra-flexibilidad es el doble que entre los nada flexibles inter-tarea. Sin embargo, el tamaño de la muestra de futuros maestros nada flexibles inter-tarea es bastante más pequeño, por lo que no se puede asegurar que esta relación entre flexibilidad inter-tarea y flexibilidad intra-tarea sea estadísticamente significativa. Es lo que ocurre cuando calculamos el test Chi-cuadrado de independencia de variables nominales, con $DF = 2$ y $N = 110$, pues obtenemos un valor de $\chi^2(2, 110) = 2{,}7973$ y $p = 0{,}24$, por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula, es decir, que no haya relación entre ambos tipos de flexibilidad. Agrupando los niveles de flexibilidad inter-tarea en dos categorías (*uso flexible inter-tarea* y *uso no flexible inter-tarea*), con una tabla de contigencia 2×2, y aplicando una prueba exacta de Fisher obtenemos $p = 0{,}074$, lo que tampoco nos permite rechazar la hipótesis nula. Una muestra mayor, o la ampliación de la adenda de resolver un problema de dos formas distintas a otros problemas de la secuencia, podría confirmar la relación entre los dos tipos de flexibilidad.

Tabla 5-29.: Distribución de los cambios de plan de resolución de los 35 futuros maestros intra-flexibles.

Cambio	a Recuento	a Linealización	a Unidad base	a Densidad	*Total en 1er plan de resolución*
De recuento ...	XXX	1 (3 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	2 (6 %)
De Linealización ...	0 (0 %)	XXX	6 (17 %)	2 (6 %)	8 (32 %)
De Unidad base ...	5 (14 %)	16 (46 %)	XXX	4 (11 %)	25 (71 %)
De Densidad ...	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	XXX	0 (0 %)
Total en 2º plan de resolucion	5 (14 %)	17 (49 %)	7 (20 %)	6 (17 %)	XXX

Otro aspecto de interés en el análisis de la flexibilidad intra-tarea es conocer qué planes de resolución alternativos proponen. El 71 % de los estudiantes intra-flexibles que propusieron un segundo plan de resolución al problema *P4-Coches* habían propuesto inicialmente Unidad base. El plan de resolución alternativo más frecuente es Linealización, usado por un 49 % de los futuros maestros intra-flexibles. La Tabla **5-29** presenta las frecuencias de las posibles combinaciones de dos planes de resolución propuestos en P4. Como se ha dicho, la mayoría de cambios se dan de Unidad base a Linealización (46 %); la segunda combinación más frecuente es la contraria, de Linealización a Unidad base (17 %).

5.6. Adaptabilidad en la resolución de problemas de estimación en contexto real

En esta última sección abordaremos los resultados de la Investigación C sobre criterios de adaptabilidad y su aplicación para analizar la adaptabilidad de los futuros maestros cuando resuelven los problemas de estimación en contexto real de la secuencia 1. En la primera sección se mostrarán los resultados de las respuestas a la pregunta C3 del cuestionario abierto post-experiencia, y éstas se relacionarán con los resultados del cuestionario cerrado para expertos. Estos resultados permitirán no sólo definir unos criterios de adaptabilidad para los problemas de estimación en contexto real, sino aplicarlos a cada problema para determinar cuál es el tipo de resolución más adecuado según las características del contexto, abordando así el objetivo 0I 11. En la sección 5.6.2 se aplicarán los criterios de adaptabilidad a los futuros maestros participantes en la experiencia A1 y se discutirán los resultados, relacionando adaptabilidad y niveles de flexibilidad, para alcanzar el objetivo OI 12.

5.6.1. Criterios de adaptabilidad para problemas de estimación en contexto real

Recordemos, como se explicó en el Capítulo 4, que la tercera pregunta del cuestionario abierto que respondieron los participantes en las experiencias A1 y A2 durante el curso 2018/19 servía para obtener unos criterios de adaptabilidad, categorizados a partir de las respuestas de los futuros maestros que habían experimentado la resolución de la secuencia 1, que se puedan aplicar de manera general a los problemas de estimación en contexto real. La pregunta C3 era la siguiente:

> C3. Imagina que un alumno/a te ha dicho que ha resuelto el problema de la mejor forma posible. ¿Qué piensas que quiere decir con la mejor forma posible?

La respuesta no es evidente, porque es complicado juzgar cuál es la mejor forma de resolver los problemas de la secuencia 1, pues se trata de un tipo de problemas de modelización que requieren una estimación abierta, que dependerá de las simplificaciones y decisiones que se adoptan en el modelo inicial de la situación real. Tampoco se conoce, por tratarse de un número muy grande de elementos, la respuesta. De hecho, las personas y los coches, en el caso de P1 y P4, ni siquiera están presentes llenando el lugar del problema; por tanto, no pueden contarse para obtener una respuesta con la que validar las estimaciones de los resolutores. Un análisis fundamentado de la adaptabilidad para problemas de estimación en contexto real consiste en dar respuesta a la pregunta de Heinze, Star y Verschaffel (2009, p. 256) sobre qué criterios son relevantes para considerar que un tipo de resolución es adecuado. Las respuestas de los $N = 105$ futuros maestros que respondieron a la pregunta C3 fueron analizadas y, como se explicó en el Capítulo 4, emergieron cuatro categorías, tres de las cuales pueden considerarse criterios de adaptabilidad: *rapidez/sencillez* (AD1); *precisión/fiabilidad* (AD 2); *rigor/cuidado* (AD 3). La cuarta categoría (AD4) se relaciona precisamente con la falta de criterios o con la opinión subjetiva, no fundamentada matemáticamente.

La Tabla **5-30** muestra la frecuencia de respuestas ubicadas en cada categoría. Puesto que se trata de un cuestionario abierto, algunas de las respuestas (21) de los participantes incluyen dos categorías. De estos 21 casos, lo más frecuente (16 casos) es combinar rapidez y precisión (AD1 y AD2).

Una vez analizadas las respuestas, lo que se obtiene son tres criterios de adaptabilidad para problemas de estimación en contexto real y un orden de relevancia establecido a partir de lo que opinan los futuros maestros que han experimentado la resolución de ese tipo de problemas. El siguiente paso, como se explicó en los Capítulos 3 y 4, fue utilizar estos tres criterios para la encuesta cerrada que respondieron $N = 81$ expertos (profesores de Matemáticas y/o de Didáctica de las Matemáticas, en Secundaria y Universidad).

Tabla 5-30.: Frecuencia de cada categoría de respuesta a la pregunta C3 del cuestionario post-experiencia

Frecuencia	Categoría de respuesta
AD 1. La mejor resolución es la más sencilla, la que permite ofrecer una estimación en menos pasos.	64
AD 2. La mejor resolución es la más precisa, la que ofrece la estimación más fiable.	28
AD 3. La mejor resolución es la que se basa en procedimientos más cuidadosos y empíricos.	13
AD 4. No argumentan criterios de adaptabilidad o se basan en el gusto personal.	21

La encuesta a los expertos permitirá comparar el orden de relevancia de los tres criterios entre futuros maestros que han resuelto la secuencia 1 y expertos que juzgan cuál es el criterio más adecuado. Pero, además, como se explicó en el apartado dedicado al diseño de esta encuesta de expertos, para cada problema de la secuencia 1 debían responder a dos preguntas:

- Elegir el tipo de resolución (Recuento, Linealización, Unidad base, Densidad) que consideraban más adecuado al contexto del problema. También podían escoger la opción de que no existe un tipo de resolución más adecuado (No hay).
- Luego, escoger el criterio de adaptabilidad que consideraban que mejor aplicaba en la elección anterior.

Así, a partir de los resultados de la encuesta a expertos, se puede asociar, a cada problema de la secuencia 1, el tipo de resolución más adecuado, y compararlo con los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes (Tabla **5-1**). Además, para cada problema, se puede argumentar qué criterio de adaptabilidad ha sido el más escogido por los 81 expertos para justificar la elección del tipo de resolución más adecuado. Se relacionarían, por tanto, tres variables:

- problema (P1, P2, P3, P4);
- tipo de resolución (Recuento, Linealización, Unidad base, Densidad);
- criterio de adaptabilidad (Rapidez, Precisión, Rigor).

Veamos, a partir de los datos recogidos en la encuesta a $N = 81$ expertos, cuyo perfil se ha detallado en el apartado 4.2.5 del Capítulo 4, los distintos análisis de las posibles relaciones entre las tres variables anteriores, discutiendo los resultados.

Relación entre problema de la secuencia y tipo de resolución más adecuado según los expertos

La Tabla **5-31** muestra cuál es la distribución de la elección, realizada por los $N = 81$ expertos, del tipo de resolución más adecuado para cada problema de la secuencia 1, incluyendo la opción de que no haya un tipo de resolución más adecuado.

Tabla 5-31.: Distribución de la elección, por N = 81 expertos, del tipo de resolución más adecuado para cada problema de la secuencia 1.

		Recuento	Linealización	Unidad Base	Densidad	No hay	Total
P1	Frecuencia	1	3	35	34	8	81
	% en P1	1,2 %	3,7 %	**43,2** %	**42** %	9,9 %	100 %
P2	Frecuencia	2	20	40	15	4	81
	% en P2	2,5 %	**24,7** %	**49,4** %	18,5 %	4,9 %	100 %
P3	Frecuencia	0	2	9	67	3	81
	% en P3	0,0 %	2,5 %	11,1 %	**82,7** %	3,7 %	100 %
P4	Frecuencia	2	26	30	19	4	81
	% en P4	2,5 %	**32,1** %	**37,0** %	23,5 %	4,9 %	100 %
Total	Frecuencia	5	51	114	135	19	324
	% del total	1,5 %	15,7 %	**35,2** %	**41,7** %	5,9 %	100 %

El análisis estadístico de estos datos se realizó con el software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS). Para confirmar la existencia de una relación estadísticamente significativa entre ambas variables - los problemas, caracterizados por su contexto, y los tipos de resolución más adecuados según los expertos – se utilizó la prueba Chi-Cuadrado de independencia de variables nominales, con $DF = 12$ y $N = 324$, a través del contraste de hipótesis. Fijando un nivel de significación $\alpha = 0,01$, se obtiene un valor de $\chi^2(12; 324) = 108,883$ con $p < 0,0001$, lo que llevaría a confirmar que existe tal relación. Sin embargo, hay más de un 20 % de las celdas con frecuencia menor que cinco, por lo que el resultado de la prueba puede ser fiable o no. Para confirmar la fiabilidad, debemos basar nuestros resultados en la prueba de razón de verosimilitud Chi-cuadrado (LR). Fijando un nivel de significación de $\alpha = 0,01$, el valor del test de razón de verosimilitud es $LR = 115,173$ con una significación asintótica (bilateral) menor a $0,0001$. Esto confirma que existe una relación significativa entre el tipo de resolución más adecuado según los expertos y el problema de la secuencia 1.

Además, el coeficiente de contingencia de Pearson tiene un valor de $0,502$ con una significación igual a $0,0001$, lo que indica que la relación entre el problema y tipo de resolución más adecuada es fuerte. Por otro lado, el valor de la V de Cramer es $V = 0,335$, con $p < 0,0001$, un tamaño del efecto medio.
En la Tabla **5-32** encontramos las desviaciones porcentuales de las frecuencias observadas de la Tabla 45 respecto al valor que se esperaría sobre la base de la hipótesis nula.

Tabla 5-32.: Desviaciones porcentuales de las frecuencias observadas de la Tabla 45 respecto al valor que se esperaría sobre la base de la hipótesis nula.

	Recuento	Linealización	Unidad Base	Densidad	No hay
P1	+20,9 %	−76,5 %	+22,8 %	+0,7 %	+68,4 %
P2	+60 %	+56,9 %	+40,4 %	−55,6 %	−15,8 %
P3	−100 %	−84,3 %	−68,4 %	+98,5 %	−36,8 %
P4	+60 %	+103,9 %	+5,3 %	−43,7 %	−15,8 %

Una vez tenemos los resultados cuantitativos, observamos que existen bastantes similitudes entre las Tablas **5-31** y **5-32**, por un lado, y las Tablas **5-1** y **5-2**, por el otro. Es decir, existen bastantes similitudes entre la elección de los expertos del tipo de resolución más adecuado para para problema de la secuencia 1, y el uso de los planes de resolución por los futuros maestros cuando resolvieron la secuencia 1. También existe alguna diferencia que comentamos a continuación.
En efecto, observamos que en el problema *P1-Personas*, como ocurría con las producciones de los futuros maestros de la Tabla **5-1**, son Unidad base y Densidad los dos tipos de resolución más escogidos por los expertos.
También ocurre, como se veía en las Tablas **5-1** y **5-2**, que la elección de Linealización aumenta en *P2-Baldosas* y en *P4-Coches*, aunque en el caso de los expertos no tanto en P2 y más en P4 (Tablas **5-31** y **5-32**), al contrario que con los futuros maestros.
Vuelve a haber coincidencia en *P3-Césped* con la elección de Densidad (ver Tablas **5-2** y **5-32**). En el caso de los futuros maestros, la Unidad base también se usaba bastante en este problema, pero para los expertos Densidad es la única alternativa viable (supone un 82.7 % de las elecciones).
En *P4-Coches* también coincide Unidad base como tipo de resolución dominante, pero en los planes de resolución de los futuros maestros lo era con mayor diferencia que en la elección de los expertos. En el caso de los expertos, la Linealización queda cerca en la elección de tipo de resolución más adecuado.
En el global de la secuencia 1, futuros maestros y expertos escogen con mayor frecuencia Unidad base y Densidad, pero aquí hay una diferencia: los expertos escogen con mayor proporción la Densidad como tipo de resolución más adecuado, siendo el más escogido de todos (representa un 41,7 % de los tipos de resolución elegidos como más adecuados en

toda la secuencia 1). En segundo lugar, queda Unidad base (un 35,2 % del total). Este desplazamiento de Unidad base a Densidad como tipo de resolución más escogido es coherente con los resultados de Ferrando y Albarracín (2021), expuestos en el Capítulo 2, quienes encontraron que la Densidad se correspondía con los resolutores con mayor madurez (ver Figura **2-8**). Los participantes en la encuesta de expertos tienen mayor madurez y formación matemática que los futuros maestros, lo que explica que escojan con mayor frecuencia la Densidad, tratándose del tipo de resolución más complejo.
En la Tabla **5-32** se han destacado en negrita, para cada problema, las dos elecciones mayoritarias de tipo de resolución adecuado para cada problema, salvo en P3, que sólo hay una alternativa sólida. El siguiente paso es vincular los tipos de resolución a criterios de adaptabilidad.

Relación entre el tipo de resolución y el criterio de adaptabilidad escogidos por los expertos

Para cada problema, una vez escogido el tipo de resolución que se consideraba más adecuado, cada experto debía marcar uno o varios criterios de adaptabilidad que justificaran su elección. Como se explicó en el Capítulo 4, se podía escoger entre los tres criterios categorizados para la pregunta C3 del cuestionario de futuros maestros, o se podía marcar la opción "otro", pudiendo escribir su criterio. En global, los criterios más relevantes para los expertos fueron:

- Precisión aparece 160 veces, un 37,8 % del total de elecciones.
- Rapidez aparece 151 veces, un 35,7 % del total de elecciones.
- Rigor aparece 99 veces, un 23,4 % del total de elecciones.
- Otros criterios aparecen 13 veces, un 3,1 % del total. Se refieren a que no hay un tipo de resolución mejor que otro, o bien tienen carácter subjetivo.

Hay dos diferencias que podemos destacar respecto a las preferencias de los futuros maestros: la primera es que para los expertos es la precisión, y no la rapidez, el criterio más relevante, aunque por poca distancia; la segunda es que la proporción de elecciones basadas en el rigor aumenta respecto a la de los futuros maestros.
La Tabla **5-33** muestra la relación entre el tipo de resolución escogido por un experto y qué criterio de adaptabilidad ha elegido a continuación, vinculado a ese tipo de resolución. Nos preguntamos si, a partir de las respuestas de los $N = 81$ expertos, podemos establecer una relación clara entre ambas variables, es decir, si podemos vincular cada tipo de resolución con un criterio de adaptabilidad concreto.
Para confirmar la existencia de una relación estadísticamente significativa entre los tipos de resolución más adecuados según los expertos y los criterios de adaptabilidad que justifican esa elección se utilizó la prueba Chi-Cuadrado de independencia de variables nominales, con

Tabla 5-33.: Relación entre tipo de resolución elegido como más adecuado y criterio de adaptabilidad que justifica la elección, en las respuestas de N = 81 expertos.

	Precisión	Rapidez	Rigor	Otro
Recuento	5	0	1	0
Linealización	**29**	**35**	8	0
Unidad base	44	**78**	17	0
Densidad	**78**	34	**72**	2
No hay	4	4	1	11

$DF = 12$ y $N = 423$. Fijando un nivel de significación $\alpha = 0,01$, se obtiene un valor de $\chi^2(12; 423) = 264,486$ con $p < 0,0001$, lo que llevaría a confirmar que existe tal relación. Sin embargo, hay más de un 20 % de las celdas con frecuencia menor que cinco, por lo que el resultado de la prueba puede ser fiable o no. Para confirmar la fiabilidad, debemos basar nuestros resultados en la prueba de razón de verosimilitud Chi-cuadrado (LR). Fijando un nivel de significación de $\alpha = 0,01$, el valor del test de razón de verosimilitud es $LR = 142,862$ con una significación asintótica (bilateral) menor a $0,0001$. Esto confirma que existe una relación significativa entre los tipos de resolución y los criterios de adaptabilidad.
Además, el coeficiente de contingencia de Pearson tiene un valor de $0,620$ con una significación igual a $0,0001$, lo que indica que la relación entre tipo de resolución y criterio de adaptabilidad es muy fuerte. De hecho, el valor de la V de Cramer es $V = 0,457$, con $p <$ 0,0001, un tamaño del efecto alto.
Por lo tanto, la asociación entre tipo de estrategia escogida como más adecuada y el criterio de adaptabilidad que la justifica es fuerte. Así, si examinamos la Tabla **5-33** encontramos destacadas en negrita esas relaciones concretas que permitirían dar una respuesta bien justificada, para problemas de estimación en contexto real, al reto de Heinze, Star y Verschaffel ((2009), p. 256) sobre cómo encontrar criterios de adaptabilidad en resolución de problemas.
En efecto, según los datos recogidos de $N = 81$ expertos en Matemáticas y/o en Didáctica de las Matemáticas, los criterios de adaptabilidad para problemas de estimación en contexto real serían los siguientes:

- Linealización se asocia a rapidez y precisión.
- Unidad base se asocia a rapidez.
- Densidad se asocia a precisión y rigor.

En la siguiente sección se aplicarán las relaciones encontradas entre problemas de la secuencia 1, tipos de resolución preferidas, y criterios de adaptabilidad, para poder analizar, a continuación, el nivel de adaptabilidad de los $N = 224$ futuros maestros que participaron en la experiencia A1.

5.6.2. Adaptabilidad de los futuros maestros en la resolución de la secuencia 1

Teniendo en cuenta el tipo de resolución escogido como más adecuado para cada problema por los $N = 81$ expertos, y los criterios de adaptabilidad vinculados a dicho tipo de resolución, podemos obtener dos posibilidades que nos permiten analizar la adaptabilidad de los futuros maestros participantes en la experiencia A1: la adaptabilidad entendida como la búsqueda del plan de resolución más eficiente y la adaptabilidad entendida como la búsqueda del plan de resolución más minucioso. Dado que entendemos que el resolutor adaptable busca siempre una estimación precisa, en el primer caso, el de la *adaptabilidad eficiente*, combinará la precisión con la rapidez (siendo ésta el criterio primario). En el caso de la *adaptabilidad minuciosa*, el resolutor adaptable busca un resultado preciso obtenido con rigor, por tanto el rigor será el criterio primario. Veamos para cada uno de estos dos tipos de adaptabilidad, en base a la información recogida en el cuestionario a expertos, cuál es el tipo de resolución idóneo en cada uno de los cuatro problemas.

- Si consideramos la *adaptabilidad eficiente*, obtenemos:
  - En *P1- Personas* el tipo de resolución más adecuado sería Unidad base
  - En *P2- Baldosas* el tipo de resolución más adecuado sería Unidad base.
  - En *P3- Césped* el tipo de resolución más adecuado sería Densidad.
  - En *P4- Coches* el tipo de resolución más adecuado sería Unidad base.
- Si consideramos la *adaptabilidad minuciosa*, obtenemos:
  - En *P1- Personas* el tipo de resolución más adecuado sería Densidad.
  - En *P2- Baldosas* el tipo de resolución más adecuado sería Linealización.
  - En *P3- Césped* el tipo de resolución más adecuado sería Densidad.
  - En *P4- Coches* el tipo de resolución más adecuado sería Linealización.

A continuación se detalla el análisis de la adaptabilidad de los futuros maestros que participaron en la experiencia A1, distinguiendo, por un lado, la *adaptabilidad eficiente* y, por otro, la *adaptabilidad minuciosa*. Es importante notar que no tiene sentido asignar un grado de adaptabilidad a aquellos resolutores que, por haber propuesto en todos los problemas el mismo plan de resolución, en algunos proponen el que se considera más apropiado (bien sea por eficiencia o por minucionsidad). Si se utiliza siempre el mismo tipo de plan de resolución no hay posibilidad de adaptación. Por tanto, consideramos que un uso flexible de las resoluciones (moderado o alto) entre problemas es condición necesaria para que un resolutor sea adaptable. Así, se descarta de esta clasificación a los 63 futuros maestros nada flexibles. Los futuros maestros no flexibles son, por definición, *no adaptables*.

Para analizar la adaptabilidad de los resolutores, nos basaremos en una escala de cinco niveles: 0 es *nada adaptable* (no propone en ningún problema el plan de resolución más apropiado); 0,25 es poco adaptable (sólo lo propone en un problema); 0,5 es *medianamente adaptable* (lo propone en dos problemas); 0,75 indica un resolutor *bastante adaptable* (propone el plan de resolución más apropiado en tres problemas); y 1 indica *muy adaptable* (es capaz de proponerlo para cada problema).

Análisis de la adaptabilidad eficiente en la experiencia A1

Entre los 161 futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución, los resultados de la categorización anterior por niveles de *adaptabilidad eficiente* se recogen en el diagrama de barras de la Figura **5-91**

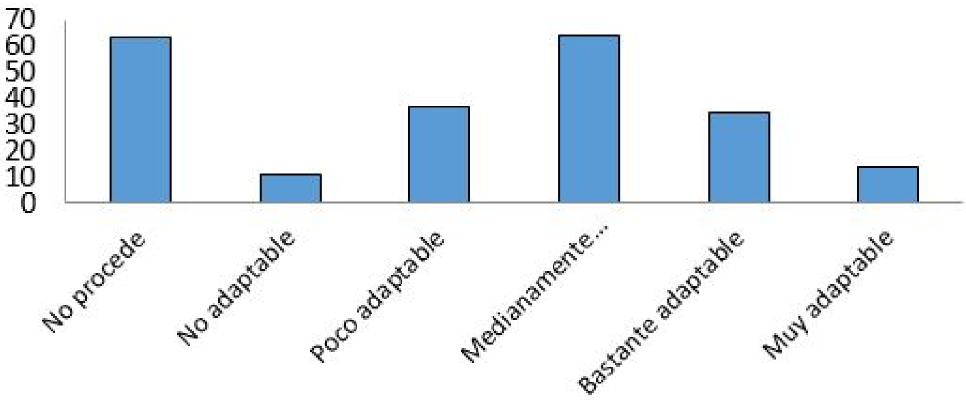


Figura 5-91.: Distribución de grado de *adaptabilidad eficiente* para los $N = 224$ futuros maestros de la experiencia A1.

Así, fijándonos en el grado de adaptabilidad eficiente, observamos que 11 futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución son nada adaptables desde el punto de vista de la eficiencia (la rapidez con precisión), es decir, que no escogieron la solución más eficiente en ninguno de los cuatro problemas de la secuencia 1. También es reducido el número de futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución que son muy adaptables desde el punto de vista de la eficiencia, pues solo hay 14. La explicación de estas frecuencias es clara: la adaptabilidad eficiente en todos los problemas de la secuencia 1 requiere un nivel de flexibilidad moderada, pues adaptar de forma eficiente los planes de resolución implica hacer solo un cambio de estrategia (en P3, pasar a Densidad). Encontramos, por tanto, que la mayor parte de futuros maestros con un uso flexible de estrategias son solo medianamente adaptables desde el punto de vista de la eficiencia.

En la Tabla **5-34** se recoge la distribución de resolutores en cada caso, teniendo en cuenta flexibilidad y adaptabilidad eficiente, lo que permite describir cómo se dan estas relaciones entre los futuros maestros.

Consideraremos que los resolutores presentan *adaptabilidad eficiente* cuando son bastante o

Tabla 5-34.: Distribución del grado de adaptabilidad eficiente según el nivel de flexibilidad.

	Nada adaptable	Poco adaptable	Medianamente adaptable	Bastante adaptable	Muy adaptable
Modera. flexible	9 (10 %)	24 (26 %)	42 (46 %)	3 (3 %)	14 (15 %)
Muy flexible	2 (3 %)	13 (19 %)	22 (32 %)	32 (46 %)	0 (0 %)

muy adaptables en relación a la eficiencia (escogen en al menos tres problemas de la secuencia 1 el tipo de plan de resolución más eficiente). En la Tabla **5-34** observamos las siguientes proporciones de futuros maestros que presentan adaptabilidad eficiente según su nivel de flexibilidad:

- El 82 % de los futuros maestros moderadamente flexibles no presenta adaptabilidad en la secuencia 1. El 18 % escogen en 3 problemas el plan de resolución más eficiente. Destaca la baja proporción (3 %) de resolutores moderadamente flexibles que escogen el tipo de plan resolución más eficiente en tres de los problemas de la secuencia 1.

- La adaptabilidad eficiente es superior en el caso de los futuros maestros muy flexibles, pues el 46 % tienen un grado de adaptabilidad suficiente (bastante) en relación a la eficiencia. Esto es considerable teniendo en cuenta que un alto nivel de flexibilidad es incompatible con una adaptabilidad eficiente en todos los problemas de la secuencia 1 (puesto que los muy flexibles hacen dos cambios de plan de resolución o más).

A partir de las proporciones entre no presentar adaptabilidad (nada, poco y medianamente adaptable) y presentar adaptabilidad (bastante y muy adaptable), se ha realizado una prueba Chi-Cuadrado para contrastar las hipótesis: H_0: no existe relación entre el nivel de flexibilidad y la adaptabilidad; H_1: existe relación entre el nivel de flexibilidad y la adaptabilidad. Se obtiene $\chi^2(DF = 1, N = 161) = 13,21$, lo cual permite descartar la hipótesis nula con un nivel de significación $p = 0,0003$. Por lo tanto, existe una asociación estadísticamente significativa entre ser muy flexible y presentar adaptabilidad eficiente, es decir, escoger el plan de resolución más eficiente en al menos tres problemas de la secuencia 1. Es llamativo que esto sea así, cuando la adaptabilidad eficiente en los cuatro problemas de la secuencia 1 sólo pueden alcanzarla los futuros maestros moderadamente flexibles. Lo que explica la asociación entre adaptabilidad eficiente y alta flexibilidad es, como hemos destacado antes, un número muy bajo de resolutores moderadamente flexibles bastante adaptables. Esto podría explicarse por el hecho de que muchos resolutores moderadamente adaptables cambian de plan de resolución por confusión, por no saber resolver un problema de la secuencia 1, y no con la intención de escoger una estrategia más eficiente en un determinado contexto.

Esta explicación concuerda con los resultados sobre la (escasa) relación entre flexibilidad moderada y rendimiento.

Análisis de la adaptabilidad minuciosa en la experiencia A1

Entre los 161 futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución, los resultados de la categorización anterior por niveles de *adaptabilidad minuciosa* se recogen en el diagrama de barras de la Figura **5-92**

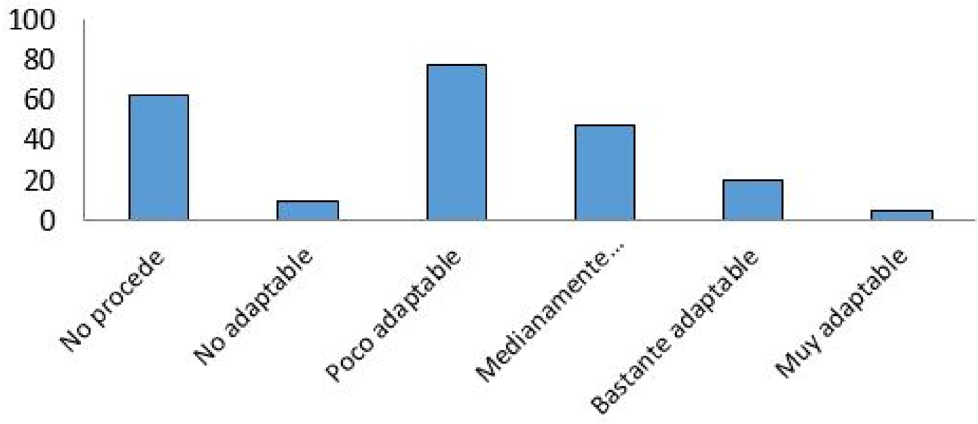


Figura 5-92.: Distribución de grado de *adaptabilidad minuciosa* para los $N = 224$ futuros maestros de la experiencia A1.

Así, fijándonos en el grado de adaptabilidad minuciosa, observamos que 10 futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución son nada adaptables desde el punto de vista de la minuciosidad (el rigor con precisión), es decir, que no escogieron la solución más minuciosa en ninguno de los cuatro problemas de la secuencia 1. Aún más reducido es el número de futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución que son muy adaptables desde el punto de vista de la minuciosidad, pues solo hay 5. Estas frecuencias son bajas, entre otras razones, porque la minuciosidad en los cuatro problemas de la secuencia 1 requiere de un alto grado de flexibilidad, pues adaptar en base al rigor y la precisión los planes de resolución implica hacer solo dos cambios cambio de estrategia. Encontramos, por tanto, que la mayor parte de futuros maestros con un uso flexible de estrategias son poco adaptables desde el punto de vista del rigor con precisión. La explicación de la baja adaptabilidad minuciosa (rigor con precisión, ver Figura **5-92**) respecto a la adaptabilidad eficiente (rapidez con precisión, ver **5-91**) es que en la segunda tiene gran relevancia el plan de resolución Unidad base, mayoritario en su uso entre los futuros maestros, mientras que no forma parte de la primera. Además, en las respuestas a la pregunta C3 sobre criterios para escoger la mejor resolución, rapidez/sencillez fue la más repetida por los futuros maestros, mientras que rigor/minuciosidad fue el criterio menos mencionado.

Tabla 5-35.: Distribución del grado de adaptabilidad minuciosa según el nivel de flexibilidad.

	Nada adaptable	Poco adaptable	Medianamente adaptable	Bastante adaptable	Muy adaptable
Modera. flexible	10 (11 %)	63 (68 %)	12 (13 %)	7 (8 %)	0 (0 %)
Muy flexible	0 (0 %)	15 (22 %)	36 (52 %)	13 (19 %)	5 (7 %)

En la Tabla **5-35** se recoge la distribución de resolutores en cada caso, teniendo en cuenta flexibilidad y adaptabilidad minuciosa, lo que permite describir cómo se dan estas relaciones entre los futuros maestros.
Consideraremos que los resolutores presentan *adaptabilidad minuciosa* cuando son bastante o muy adaptables en relación al rigor con precisión (escogen el tipo de resolución más riguroso/preciso en al menos tres problemas de la secuencia 1). De la Tabla **5-35** observamos que, según lo que hemos considerado como presentar adaptabilidad (ser bastante o muy adaptable), tenemos las siguientes proporciones:

- El 92 % de los futuros maestros moderadamente flexibles no presenta adaptabilidad en la secuencia 1. Solo el 8 % escoge en 3 problemas el plan de resolución más minucioso.
- La adaptabilidad minuciosa es muy superior en el caso de los futuros maestros muy flexibles, pues el 26 % presentan adaptabilidad minuciosa.

A partir de las proporciones entre no presentar adaptabilidad minuciosa (nada, poco y medianamente adaptable) y presentar adaptabilidad minuciosa (bastante y muy adaptable), se ha realizado una prueba Chi-Cuadrado para contrastar las hipótesis: H_0: no existe relación entre el nivel de flexibilidad y la adaptabilidad minuciosa; H_1: existe relación entre el nivel de flexibilidad y la adaptabilidad minuciosa. Se obtiene $\chi^2(DF = 1, N = 161) = 8,9$, lo cual permite descartar la hipótesis nula con un nivel de significación $p = 0,0029$. Por lo tanto, existe una asociación estadísticamente significativa entre ser muy flexible y presentar adaptabilidad eficiente, es decir, escoger el plan de resolución más eficiente en al menos tres problemas de la secuencia 1. Sabemos que esta relación era necesaria en el caso de los muy adaptables, pues en relación al rigor, sólo pueden serlo los muy flexibles. Sin embargo, es llamativo el bajo porcentaje (26 %) de adaptabilidad minuciosa incluso entre los resolutores muy flexibles, sólo explicable porque este criterio de adaptabilidad exige utilizar Linealización y Densidad, cuando el plan de resolución más utilizado por la mayoría de futuros maestros, en términos globales, es Unidad base (ver Tabla **5-1**). El rigor con precisión, vinculado a Densidad, en efecto, parece un criterio asociado a una mayor madurez matemática, por eso crece entre los expertos (ver Tabla **5-32**). Esto confirma y extiende los resultados de (Ferrando y Albarracín, 2021).

6. Conclusiones

En este capítulo se responderá a las siete preguntas de investigación planteadas en esta tesis doctoral. Se utilizarán los 12 objetivos de investigación (OI) abordados a partir del análisis y discusión de los resultados expuestos en el Capítulo 5. Por lo tanto, para cada pregunta se investigación se seguirá el mismo esquema:

- Síntesis de los resultados más importantes que permiten alcanzar los OI ligados a la pregunta.
- Relación con el marco teórico y estudios anteriores o recientes.
- Posibles limitaciones en el estudio y propuestas de mejora.
- Futuros temas de investigación a partir de los resultados.

En la sección 6.1 se responde a la primera pregunta de investigación, detallando los resultados del análisis de tipos de plan de resolución para la experiencia A1 y la experiencia A2 a la luz de trabajos anteriores. En la sección 6.2 se responde a la pregunta sobre la relación entre contexto y tipo de resolución, así como la influencia de la estructura sintáctica y semántica en los resultados. En la sección 6.3 se responde a la tercera pregunta de investigación, comparando los factores de complejidad en las experiencias A1 y A2, así como los tipos de resolución más empleados en ambas experiencias. En la sección 6.4 se sintetiza el análisis de errores de los planes de resolución y las resoluciones grupales, y cómo éste sirve para establecer niveles de rendimiento. En la sección 6.5 se responde a la pregunta sobre la flexiblidad de los futuros maestros en problemas de estimación de contexto real, recogiendo los resultados sobre los niveles de flexibilidad inter-tarea y sobre la flexibilidad intra-tarea. En la sección 6.6 se responde a la sexta pregunta de investigación, analizando las relaciones que existen entre los niveles de rendimiento, definidos a partir de los errores, y los niveles de flexibilidad inter-tarea. Por último, en la sección 6.7 se responde a la séptima pregunta de investigación, ofreciendo, a partir de los resultados del cuestionario a expertos, dos criterios de adaptabilidad justificados para problemas de estimación en contexto real de forma que éstos permitan analizar el nivel de adaptabilidad de los futuros maestros en la experiencia A1.

6.1. ¿Cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real?

Los problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada que utilizamos en esta investigación son un subconjunto de los problemas de Fermi, problemas de iniciación a la modelización accesibles para estudiantes de Secundaria y también del grado de maestro/a en Educación Primaria (Ärlebäck, 2009; Albarracín, 2011). En los apartados 2.4.3 y 4.3.1 se explicó que para categorizar los tipos de resolución de los futuros maestros se refinó el instrumento de análisis de las producciones desarrollado por Ferrando y cols. (2017) a partir de la definición de modelo de Lesh y Harel (2003). En efecto, el análisis de las producciones de los resolutores como un sistema de dos componentes interrelacionadas, modelo inicial y estrategia, es una simplificación del ciclo de modelización (Blum y Leiß, 2007; Borromeo-Ferri, 2018) que facilita la categorización en cuatro tipos básicos de resolución: Recuento, Linealización, Unidad base y Densidad. Estos cuatro tipos de resolución aparecían en los análisis de producciones en las etapas de Primaria (Albarracín y Gorgorió, 2019) y de Secundaria (Albarracín, 2011; Albarracín y Gorgorió, 2014; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017).

El primer objetivo de este trabajo (OI 1) era comprobar si la caracterización de las resoluciones de esta clase de problemas empleada para Primaria y Secundaria también funciona en la etapa universitaria, con futuros maestros. El análisis cualitativo y descriptivo, de naturaleza observacional (Lodico y cols., 2010), de la sección 5.1 del Capítulo 5 muestra que los planes de resolución de los $N = 224$ participantes en la experiencia A1 (es decir, sus propuestas de resolución esquemáticas sobre cómo obtener la estimación, realizadas individualmente y en el aula, evocando el espacio real de los cuatro problemas de la secuencia 1) podían categorizarse usando estos cuatro tipos de resolución.

Para completar la respuesta a esta pregunta de investigación, el OI 5 consistía en hacer este mismo análisis cualitativo y descriptivo de las producciones cuando los futuros maestros vuelven a resolver los mismos problemas (secuencia 1), pero en $N = 62$ grupos y trabajando de manera empírica en el lugar del problema, ejecutando una resolución que dé lugar a una estimación numérica (experiencia A2). En efecto, en el apartado 5.3.1 estas producciones se categorizan usando tres de los cuatro tipos de resolución, pues no aparece ninguna basada en el recuento, como se muestra en el análisis cualitativo y descriptivo en dicho apartado.

El hecho de poder clasificar las producciones de los futuros maestros en sólo cuatro tipos de resolución cerrados, aunque los problemas de Fermi que empleamos en este estudio sean abiertos, permite tratarlos como *multiple-solution tasks* (Levav-Waynberg y Leikin, 2012; Albarracín y cols., 2021) y conduce a la quinta pregunta de investigación, es decir, al estudio de la flexibilidad de los futuros maestros.

Más allá de verificar que es posible analizar las producciones de los futuros maestros a partir de los cuatro tipos de resolución establecidos en trabajos anteriores, el análisis cualitativo y descriptivo de planes de resolución y resoluciones grupales ayuda a describir con mayor precisión cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real. En los resultados de los apartados 5.1.1 y 5.3.1, se observa que, tanto en los planes de resolución individuales como en las resoluciones grupales, el tipo de resolución más empleado de manera global en los cuatro problemas de la secuencia 1 es Unidad base (modelo inicial bidimensional y estrategia a partir del área que ocupa un elemento); sin embargo, también son muy empleadas por los futuros maestros las resoluciones basadas en densidad, y apenas se utilizan resoluciones basadas en recuento. Estos resultados sobre cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real refuerzan el estudio de Ferrando y Albarracín (2021), que identificaba diferencias de madurez en el uso de los distintos tipos de resolución. Como se explicó en el Capítulo 2, Ferrando y Albarracín (2021) muestran que en Primaria los estudiantes no dominan el concepto de área y recurren a resoluciones basadas en recuento o en la linealización de la superficie, y que sólo en Secundaria las resoluciones evolucionan hacia Unidad base (ver Figura **2-8**). El tipo de resolución Densidad aparece sólo al final de la Secundaria (16 años). Nuestros resultados refuerzan el estudio longitudinal previo porque muestran que los futuros maestros, cuya formación pertenece a una etapa superior, presentan mayor madurez matemática que los estudiantes de Primaria y Secundaria, y, en consecuencia, hay un uso claramente mayor de los tipos de resolución Unidad base y Densidad (los dos juntos suponen 577 de las 896 producciones individuales analizadas, un $64,4\,\%$ del total; y 230 de las 248 producciones grupales analizadas, un $92,7\,\%$ del total), y apenas recurren al tipo de resolución menos sofisticado, el Recuento (13 de las 896 producciones individuales; ninguna de las grupales).

Además, en el análisis cualitativo y descriptivo de las producciones de los $N = 224$ futuros maestros que participaron en la experiencia A1 se observa que, para cada problema de la secuencia 1, hay ejemplos de todos los tipos de resolución (Recuento, Linealización, Unidad base y Densidad). Sin embargo, como se explica a lo largo del apartado 5.1.1, cada tipo de resolución no aparece con la misma frecuencia en cada problema. La respuesta a la primera pregunta de investigación apunta, por tanto, a la segunda pregunta de investigación: estudiar si existe una relación entre los problemas y los tipos de resolución.

Hemos visto, por tanto, que en la consecución de los objetivos OI 1 y OI 5 que responden a la primera pregunta de investigación, describiendo cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real a través de cuatro tipos de resolución, tienden puentes con trabajos precedentes, y a la vez apuntan a algunas de las siguientes preguntas de investigación. La descripción minuciosa en las secciones 5.1 y 5.3 sobre cómo resuelven los futuros maestros problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada cierra, de alguna manera, el estudio sobre las maneras de resolver estos problemas en Primaria y Secundaria (Albarracín, 2011; Albarracín y Gorgorió, 2014; Ferrando, Albarracín, y cols., 2017; Albarracín y Gorgorió, 2019; Albarracín y cols., 2021), añadiendo la etapa universitaria.

Una limitación en el estudio cualitativo y descriptivo de los tipos de planes de resolución y de resoluciones grupales de los futuros maestros es que la categoría Linealización engloba distintas estrategias asociadas (recuento, unidad base lineal, densidad lineal) a un modelo unidimensional de distribución de los elementos. Como se explicó en el Capítulo 4, el interés era oponer la resolución basada en reducir un problema bidimensional a un problema unidimensional (de cuántos elementos hay en la superficie a cuántos elementos hay en una fila) a las resoluciones propias de un modelo bidimensional de distribución de los elementos en la superficie (Unidad base y Densidad). Sería interesante, en un futuro, estudiar cómo resuelven los futuros maestros una secuencia de problemas de estimación de un gran número de elementos en una longitud, del tipo "¿cuántos coches caben en fila a lo largo de la avenida principal de tu ciudad?" o "¿cuántas personas son necesarias para hacer una cadena humana alrededor del campus universitario?", y describir las distintas categorías de resolución que aparecen, distinguiendo entre las estrategias lineales.

De hecho, una propuesta de investigación para el futuro es recoger todas las posibles variaciones, según la etapa educativa, en los tipos de resolución de problemas de estimación de una gran cantidad de elementos distribuidos en una, dos y tres dimensiones. En este sentido, en Pla-Castells y Segura (2019) se presenta un estudio exploratorio que analiza los tipos de resolución para problemas en tres dimensiones. Un trabajo como el propuesto, que compare y clasifique los tipos de resolución en cada dimensión, sintetizaría todo lo que conocemos sobre este tipo de problemas de estimación en contexto real. Además, sería interesante encontrar conexiones y ampliar el estudio con otras herramientas de análisis de producciones escritas al resolver actividades de modelización, como la desarrollada por Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada, y Adamuz-Povedano (2021).

6.2. ¿Hay alguna influencia del contexto y de la estructura del problema en la resolución desarrollada por los futuros maestros para los problemas de estimación de contexto real?

Se ha comentado en la respuesta anterior que en el análisis observacional sobre cómo resuelven los $N = 224$ futuros maestros los problemas de estimación en contexto real se observaban diferencias en la frecuencia de uso de cada tipo de plan de resolución según el problema de la secuencia 1. Así, hay claras variaciones en las proporciones de Recuento, Linealización, Unidad base y Densidad según el problema, como muestran los resultados de la Tabla **5-1**. El diseño la secuencia 1, como se explica en el Capítulo 5, estaba motivado precisamente para tratar de producir esa variación en los tipos de plan de resolución. Pero un análisis estadístico debe demostrar si esta relación es significativa, justificando la interpretación de esa dependencia entre problema y tipo de resolución.

Así, en el apartado 4.1.1 se describen los conceptos de variación por contraste (Ko y Marton, 2004; Marton y cols., 2004) y de variable de tarea – en particular, de variable de contexto

(Kilpatrick, 1978; Puig y Cerdán, 1988). Siguiendo las ideas de diseño de secuencias de tareas de modelización de Ärlebäck y Doerr (2015), en el apartado 4.1.2 se justifica cómo se utilizaron los valores de la variable de contexto para seleccionar una secuencia de cuatro problemas que configuraran un patrón de variación por contraste. Los valores de la variable de contexto para cada problema de la secuencia 1 están sintetizados en la Tabla **4-3**. Se refieren al tamaño de los elementos (pequeño, mediano, grande), a la distribución de los elementos en la superficie (ordenada, desordenada), al tamaño y forma de los elementos (regular, irregular) y al tamaño de la superficie (pequeño, mediano, grande).
El diseño de la secuencia 1 de problemas de estimación en contexto real justifica el análisis de la relación entre variable de contexto y tipo de plan de resolución más frecuente, que corresponde al objetivo OI 2. En efecto, esta relación existe y es estadísticamente significativa. De hecho, los resultados de la Tabla **5-1** y la Tabla **5-2** permiten identificar qué valores de la variable de contexto pueden asociarse con qué tipos de plan de resolución para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie rectangular.

- La distribución ordenada de los elementos en la superficie del problema se asocia con un mayor uso de planes de resolución Linealización.
- Una distribución desordenada de los elementos, así como la irregularidad de su forma y/o tamaño, se asocia con un incremento de planes de resolución Densidad, especialmente cuando su tamaño es pequeño.
- Un tamaño grande de los elementos, especialmente cuando su forma o tamaño es regular, se asocia con mayor uso de planes de resolución Unidad base.

Además, como se explica en el apartado 4.1.3, se diseñó una secuencia alternativa de cuatro problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie rectangular (secuencia 2) con un contexto isomorfo a la secuencia 1, es decir, con los mismos valores de la variable de contexto. Se encontró que siguen existiendo las mismas relaciones significativas entre características del contexto y tipos de plan de resolución. Este resultado es importante, y por eso se ha recogido como objetivo IO 3, ya que valida y refuerza las conclusiones sobre relación entre contexto y tipo de plan de resolución obtenidas para la secuencia 1, pues demuestra que no dependen de un contexto concreto (el de los cuatro problemas de la secuencia), sino de los valores de la variable de contexto, pudiendo generalizar los resultados.
Las respuestas a esta pregunta de investigación son la base para abordar temas muy importantes en este trabajo: la flexibilidad inter-tarea y la adaptabilidad. En efecto, para emprender un estudio sistemático sobre cómo cambian los futuros maestros de tipo de resolución de un problema a otro, era importante comprender cómo influye la variable del contexto en el proceso de resolución. Esto implica, además, que los futuros maestros adaptan sus planes de resolución a determinadas características del contexto, lo que supone un primer paso para abordar el estudio de la adaptabilidad, lo que requiere definir unos criterios sobre por qué se

considera que un tipo de resolución se adapta mejor que otro, respondiendo a la última pregunta de investigación. En cualquier caso, esta asociación entre características del contexto y tipo de plan de resolución apunta a que una proporción importante de futuros maestros tiene las capacidades, aunque sea de manera intuitiva, de apreciar las características estructurales [del contexto] importantes del problema y de notar semejanzas, diferencias y analogías, de identificar elementos críticos y seleccionar los procedimientos correctos. Como se explicó en el Capítulo 2, estas capacidades caracterizaban, entre otras, al buen resolutor según estado de la cuestión sobre resolución de problemas recogido por Lester (1994). Los problemas de estimación de contexto real, secuenciados siguiendo un patrón de variación por contraste de características del contexto evitan lo que otros estudios han encontrado que es una limitación de los futuros maestros en resolución de problemas: la tendencia a aplicar resoluciones estereotipadas a un problema (Leikin, 2003) vinculando un único tipo de resolución a los problemas de estimación en elementos en una superficie.

Una línea de trabajo futuro relacionada con estos resultados es el diseño de secuencias de problemas de Fermi, o de otro tipo de problemas de modelización que requieran estimaciones, basado en otros patrones de variación. De hecho, a partir del trabajo de Pla-Castells y Ferrando (2019) sobre el efecto de la lejanía del contexto en la accesibilidad de problemas de Fermi, hemos realizado una investigación sobre el diseño de secuencias de este tipo de problemas basadas en la graduación de la lejanía del contexto como forma de andamiaje para abordar problemas de Fermi más complejos (Albarracín y cols., 2021). Otra línea de trabajo futuro relacionada con el uso de contextos reales para el diseño de secuencias de problemas de modelización que involucran estimaciones es el *problem posing*: proporcionar a los futuros maestros – o estudiantes de otras etapas – una secuencia de descripciones de contextos reales sobre las que deben plantear un problema, siguiendo el trabajo de Hartmann, Krawitz y Schukajlow (2021). Puede estudiarse, por ejemplo, la relación entre cercanía-lejanía del contexto y la capacidad de los futuros maestros para plantear problemas reales de estimación. Las secuencias de tareas diseñadas para promover el aprendizaje autónomo de los estudiantes y la mejora de sus competencias en resolución de problemas son una herramienta de un enorme potencial didáctico que puede contribuir a mejorar la formación inicial de los futuros maestros y su conocimiento especializado del contenido matemático (Ball y cols., 2008).

Más allá del contexto, esta segunda pregunta de investigación también interroga sobre la relación entre la variable de estructura del problema – que se refiere a la complejidad sintáctica y semántica del enunciado (Days y cols., 1976) – y su resolución. El objetivo OI 4 responde a esta interrogación valiéndose de la secuencia 2: como se explicó en el apartado 4.1.3 del Capítulo 4, aunque la secuencia 2 es contextualmente isomorfa a la secuencia 1, se introdujeron situaciones narrativas en los enunciados de los problemas que introducen mayor complejidad sintáctica y/o semántica. En un problema (P1') la situación narrativa introduce ambigüedad (complejidad sintáctica y semántica), en otro (P2') la pregunta se formula de manera indirecta (complejidad sintáctica y semántica), mientras que en los otros dos sólo se añade complejidad sintáctica al enunciado. Los resultados expuestos en el apartado 5.2.3 muestran que la complejidad semántica (en P1' y P2'), añadiendo ambigüedad al enunciado mediante una situación o una pregunta indirecta, se relaciona de manera significativa con mayor proporción de producciones incompletas, que es lo que luego hemos definido como bajo rendimiento (Nivel 0) en resolución de este tipo de problemas. Esto confirma que los resultados de Leiß y cols. (2019) sobre cómo afecta la inclusión de información que añade ambigüedad a lo que se pregunta pueden extenderse a los problemas de estimación en contexto real resueltos por futuros maestros. También está acorde con otras carencias en resolución de problemas que destacábamos en el Capítulo 2: los futuros maestros, como los estudiantes de etapas no universitarias, tienen ciertas dificultades con problemas en los que la acción es implícita en el enunciado o la pregunta es indirecta (Silver y Thompson, 1984; Escolano-Vizcarra y cols., 2012). Por tanto, encontramos que, como ya estudiaron De Corte y Verschaffel (1987) con estudiantes de Secundaria, la estructura semántica del problema tiene fuerte influencia en la resolución de los futuros maestros, en particular, en su rendimiento básico. Sin embargo, añadir solamente complejidad sintáctica al enunciado, alargando un poco el enunciado de la tarea con información superflua, no afecta a la resolución de los futuros maestros: la tasa de éxito básico (planes de resolución completos) en P3' y P4' es igual que en los problemas análogos de la secuencia 1. Esto también confirma, para problemas reales de estimación resueltos por futuros maestros, los resultados de Moyer y cols. (1984) sobre que un formato telegráfico, con sintaxis sencilla, no influye en el desempeño de los estudiantes en problemas verbales o narrativos.

Una limitación de este estudio es que se han usado pocos problemas reales de estimación para contrastar el efecto de la complejidad semántica del enunciado en la resolución de los futuros maestros. Una línea de trabajo para el futuro podría ser ampliar este estudio a secuencias más largas de problemas, en las que se gradúe la complejidad en la variable de estructura. Esto se vincula con un campo amplio y fértil dentro de la Didáctica de la Matemática: los estudios sobre comprensión lectora y resolución de problemas (Taplin, 1998; Orrantia y cols., 2014; Sanz, González-Calero, Arnau y Arevalillo-Herraez, 2019). Futuras colaboraciones con expertos en lectura podrían abrir caminos en el estudio de la comprensión y la atención en problemas de modelización y del mundo real.

6.3. ¿En qué medida la resolución experimental en lugar físico del problema influye en las resoluciones?

Esta tercera pregunta de investigación complementa el análisis cualitativo y descriptivo que servía para responder a la primera pregunta, estableciendo un análisis comparativo entre los planes de resolución individual (experiencia A1) y las resoluciones grupales e *in situ* (experiencia A2). Este análisis comparativo aborda tres aspectos: la influencia del trabajo empírico en el lugar del problema (OI 6); la influencia del trabajo en grupo y cómo se consensúan las

resoluciones grupales (también OI 6); y los factores de complejidad que enriquecen el modelo matemático en el que se basa la resolución, buscando afinar la estimación (OI 7).
Los resultados del apartado 5.3.2 muestran que el trabajo empírico, realizando mediciones y estimaciones en el lugar del problema, estimula a los resolutores a adaptar adecuadamente sus resoluciones a características del contexto real que no habían sido evocadas previamente. De hecho, podemos afirmar que el trabajo *in situ* influye en el tipo de resolución elegido por los futuros profesores en los problemas *P1-Personas* y *P2-Baldosas*, en los que los futuros maestros introducen cambios en sus planes de solución adaptándolos a las características del contexto real del problema que no fueron evocadas en la experiencia A1. En *P3-Césped* y *P4-Coches* no hay estos cambios porque en la situación real no aparecen características nuevas del contexto no percibidas antes. Por tanto, parece que trabajar, primero individualmente y en clase, y luego en grupos y en el lugar real de los problemas, la resolución de secuencias de problemas de estimación en contexto real, facilita la visualización de hechos y relaciones especiales y la tendencia a seleccionar entre caminos de resolución alternativos, que son dos cualidades de la competencia en resolución de problemas según Lester (1994). En contraste, estudios anteriores mostraron que los futuros profesores de primaria tienen dificultades para relacionar con éxito sus soluciones con la situación real cuando resuelven problemas contextualizados (Tirosh y Graeber, 1989; Tirosh y cols., 1991), pero los resultados de este estudio muestran que el trabajo empírico *in situ* ofrece una posibilidad de superar estas dificultades. De hecho, la resolución *in situ* de tareas de modelización es importante porque la observación cuidadosa de las características específicas de cada contexto proporciona ideas que pueden alimentar con conceptos o procedimientos matemáticos los modelos matemáticos generados en la resolución. Además, esta manera de trabajar supera los obstáculos didácticos asociados a la resolución de problemas verbales rutinarios descritos por Verschaffel, Vicente y Van Doren (2008) en el Capítulo 2. Esto abre una línea de investigación futura, que es trabajar las secuencias de problemas de Fermi como *math trails* (Buchholtz, 2017), es decir, conformando una ruta matemática en la que los estudiantes trabajan en grupo y realizan mediciones, completando un itinerario en el que deben matematizar puntos concretos de su entorno. Que los futuros maestros experimenten la resolución de *math trails* es importante, porque esta forma de trabajar debe ser clave para desarrollar una competencia en la que hay que profundizar, que es la de identificar contenidos matemáticos útiles para explicar una realidad en un contexto cercano, y que debe ser un elemento que forme parte del conocimiento matemático especializado del profesor.
Sabemos, por trabajos como el de Chapman (2012), expuesto en el Capítulo 2, que los futuros maestros pueden tener dificultades para definir un plan de resolución para un problema abierto del mundo real sin datos ni experiencia en el lugar del problema. Algunas reflexiones recogidas en el cuestionario post-experiencia confirman esa dificultad. También sabemos que el trabajo en grupo, sin embargo, promueve un intercambio de ideas (Szydlik y cols., 2003) que facilita el desarrollo de resoluciones completas, en las que se presenta la estimación solicitada por el problema. Los resultados sobre la influencia del trabajo grupal desarrolla-

dos en el apartado 5.3.2 se alinean con esos resultados previos, mostrando que compartir y comparar los planes de resolución entre los miembros del grupo ayudó a aquellos resolutores que no habían podido finalizar un plan de resolución (Incompleto) a reelaborar, con el apoyo de otros miembros del grupo, la estrategia que condujo a una resolución completa del grupo. Los futuros maestros que participaron en la experiencia A2 pudieron ver que había diferentes enfoques para resolver los problemas de la secuencia cuando compararon sus planes de resolución. De hecho, el diseño de la experiencia les obligaba a escuchar e intentar comprender las propuestas de sus compañeros y decidir activamente qué propuesta elegir. Los resultados muestran que en los casos en los que algunas características del contexto real no pudieron anticiparse en el aula (*P1-Personas* y *P2-Baldosas*), los grupos han tenido que reelaborar sus ideas y se han producido varios cambios de estrategia. En cambio, cuando el problema puede resolverse tal y como se había planteado previamente (*P3-Césped* y *P4-Coches*), estas negociaciones se resuelven de forma más sencilla en la mayoría de los casos: la mayoría decide su criterio sobre la minoría. Involucrar a los futuros maestros, en grupos, en la puesta en común de diferentes puntos de vista sobre el contexto de un problema, o en la diferenciación de elementos de sus resoluciones, es un tipo de actividad que será esencial en su futura actividad docente, ya que forma parte de lo que habíamos denominado en el Capítulo 2 "conocimiento de las tareas matemáticas para la enseñanza" (Chapman, 2013), como parte del conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza (Ball y cols., 2008). Así, los maestros en formación podrán comprobar por sí mismos que los problemas de estimación en contexto real, cuando se trabajan en grupo, promueven discusiones matemáticas relevantes (Ärlebäck, 2009), por lo que necesitan una formación específica para dinamizar y gestionar las interacciones entre alumnos en sus futuras aulas.

Una limitación de este estudio sobre la influencia del trabajo en grupo y cómo se acuerdan las resoluciones grupales consensuadas es no haber recogido grabaciones durante el proceso de resolución en grupos e *in situ*, ni haber entrevistado a los miembros del grupo al terminar la actividad, por el gran número de participantes. Hemos perdido información que sólo se completa, parcialmente, con el cuestionario post-experiencia. De hecho, una línea de trabajo interesante para el futuro es diseñar un estudio observacional en detalle para recoger las discusiones y dinámicas que les llevan a acordar un tipo de resolución en problemas de estimación en contexto real.

El último aspecto contemplado en el estudio comparativo entre planes de resolución individual y resoluciones grupales e *in situ* que da respuesta a esta tercera pregunta de investigación eran los factores de complejidad. En el apartado 5.3.3 del Capítulo V se exponen los resultados. La primera conclusión es que se ha logrado determinar cuáles son los factores de complejidad que se incorporan en los planes de resolución individuales y en las resoluciones grupales, extendiendo el trabajo previo de Albarracín y cols. (2021) a futuros maestros, y perfeccionando su clasificación de factores de complejidad en problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada. También se observa que, aunque la proporción de propuestas que incorporan factores de complejidad es mayor en las resolucio-

nes grupales que en los planes de resolución individuales, el aumento es desigual en función de los factores de complejidad analizados. Mientras que el factor eliminación de obstáculos aumenta en todos los problemas de la secuencia 1, disminuye el factor tamaño/densidad media en los problemas P1 y P4. El crecimiento del factor eliminación de obstáculos se puede explicar por el hecho de que el trabajo *in situ* favorece la observación de obstáculos que no se habían evocado en la resolución individual en el aula. Este hecho está acorde con los resultados que acabamos de describir sobre la capacidad de algunos futuros maestros de adaptar su resolución a características del lugar real del problema que no habían sido anticipadas en el plan de resolución anterior en el aula. Por otro lado, el hecho de que en el aula los alumnos se hayan limitado a plantear individualmente un plan de resolución, sin desarrollar los cálculos numéricos, parece promover que incorporen procedimientos cuya implementación es laboriosa, tales como calcular tamaños/densidades medias, que en una resolución empírica implicarían hacer varias mediciones. En cualquier caso, esto se confirmaría replicando esta experiencia con la variación de las condiciones del trabajo individual, pidiendo en ese caso a los alumnos que no se limitaran a obtener un plan de resolución, sino que trataran de razonar con valores estimados.
La segunda conclusión es que se observa que los valores de la variable de contexto (véase Tabla **4-3**) de los problemas de la secuencia 1 también se relacionan con la presencia de determinados factores de complejidad que completan tanto el plan de resolución individual como la resolución grupal e *in situ*. La Tabla **5-14** resumía, en base a los resultados del análisis, dichas relaciones. Se observa que los planes de resolución se enriquecen en las resoluciones grupales, aunque esto no ocurre en la misma medida en todos los problemas. Entendemos que la experiencia A1, individual, pone a cada futuro maestro ante la necesidad de resolver el problema, pero que es la experiencia A1, grupal e *in situ*, la que le permite aumentar la precisión del modelo a partir de la observación de la realidad y su relación con los conceptos y procedimientos matemáticos usados para describirla con precisión. Además, más allá de esta investigación, y como propuesta para trabajar en la formación inicial de maestros, entendemos que en una actividad de tipo exclusivamente formativo es potencialmente posible proporcionar sugerencias a los alumnos que enriquezcan los modelos que construyen y aumenten las posibilidades de reflexión sobre la complejidad de la actividad.

6.4. ¿Qué rendimiento tienen los futuros maestros cuando resuelven problemas de estimación en contexto real?

El objetivo OI 8, formulado como "categorizar los errores específicos para problemas de estimación de un gran número de elementos en una superficie delimitada y analizar los errores en las producciones de los futuros maestros, estableciendo niveles de rendimiento", describe con exactitud cómo se responde a esta pregunta de investigación. La vía de aproximación en este trabajo a la medida del rendimiento en resolución de problemas (Schoenfeld, 1982), en particular, de problemas de estimación en contexto real, ha sido a través del análisis de los errores cometidos por los resolutores. Esta aproximación permite comparar producciones y medir el rendimiento de los futuros maestros esquivando la decisión sobre si una estimación es mejor o más razonable que otra, lo que resulta bastante difícil cuando trabajamos con problemas abiertos en los que la estimación depende de las hipótesis asumidas inicialmente (Carlson, 1997; Efthimiou y Llewellyn, 2007; Ärlebäck, 2009). Así, el primer resultado fue proponer un sistema de categorías y tipos de error asociados que fuera específico para problemas de estimación en contexto real (ver Tabla **5-15**), sintetizando varios trabajos sobre errores en modelización, medida y estimación (Crouch y Haines, 2007; Castillo-Mateo y cols., 2012; Klock y Siller, 2020; Moreno y cols., 2021). Las categorías de error están vinculadas a las fases del ciclo de modelización (Borromeo-Ferri, 2018) y, dentro de cada categoría, hay varios tipos de error, relacionados con el desarrollo del modelo inicial o del modelo matemático, con los procedimientos matemáticos o con el sentido y habilidades de la medida. Consideramos que esta categorización, realizada a partir del análisis cualitativo de un número considerable de producciones, puede ser útil para futuras investigaciones centradas en el análisis de errores en resolución de problemas reales de estimación con alumnos de diferentes niveles educativos. Además, como decíamos, el sistema de categorías de error nos permite definir y distinguir niveles de rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real. La primera distinción se da entre el Nivel 0, llamado rendimiento bajo, que se aplica a aquellos resolutores que dejan producciones incompletas, vinculadas a los errores E1, E4 y E8; y el Nivel 1, aplicado a los resolutores que tienen éxito al resolver la secuencia de problemas, es decir, que son capaces de completar los cuatro planes de resolución. La segunda distinción se da entre los resolutores con éxito: podemos distinguir aquellos que cometen errores, es decir, con rendimiento básico (Nivel 1b), de aquellos resolutores que no cometen ningún error en sus planes de resolución, esto es, que tienen alto rendimiento (Nivel 1a).

En cuanto a los resultados del análisis de errores (ver Tabla **5-16**), se encontró que la mayoría de los $N = 224$ maestros en formación cometen errores al plantear planes de resolución para los problemas de estimación en contexto real de la secuencia 1. Este análisis confirma que, como afirma Ärlebäck (2009), son problemas accesibles, porque sólo hay un $15,62\,\%$ de las producciones incompletas, aunque no es una proporción despreciable para tratarse de maestros en formación. De hecho, los errores encontrados reflejan dificultades profundas en la competencia de modelización y en la capacidad de estimación y medición de los futuros profesores, ya que la mayoría de ellos son conceptuales. Así, en los planes de resolución se identifican numerosos errores que implican dificultades conceptuales asociadas a las primeras fases del ciclo de modelización: la simplificación y estructuración de la situación real para obtener un modelo real (que, en los planes de resolución, hemos llamado modelo inicial), y la matematización de dicho modelo, que da lugar al modelo matemático. En estas dos fases se encuentran los errores más graves (E1, E4, E8), que se identifican con la falta de desarrollo del modelo inicial o del modelo matemático, relacionados con las dificultades para identificar las variables que intervienen en los modelos matemáticos que Widjaja (2013) encontró en

futuros maestros. Además de estos errores graves, en estas fases son numerosos los errores conceptuales en el sentido de la medida. Durante el proceso de simplificación y estructuración de la situación real (en particular, en la configuración mental de la superficie y la distribución de los elementos a estimar) la mayoría de los errores se relacionan con la percepción incorrecta de la magnitud (área, longitud) que hay que considerar, y reflejan carencias en la capacidad de visualizar e interpretar hechos y relaciones espaciales (Lester, 1994). En la fase de matematización se observan muchos errores de significado en términos propios de la magnitud, mezclando medidas de diferentes magnitudes o confundiendo área y perímetro. En la fase de trabajo matemático se identifican numerosos errores de tipo procedimental, aunque menos que los errores conceptuales asociados las dos fases anteriores. Los más frecuentes son el uso del algoritmo inverso y no especificar lo suficiente los procedimientos de cálculo para hallar la estimación. Por el contrario, apenas se encontraron errores en la fase de interpretación, pero esto se debe al carácter esquemático del plan de resolución, pues pocos resolutores proporcionan una estimación numérica que debe ser interpretada y contrastada con la situación real.
Para verificar esta conclusión y analizar si realmente los futuros maestros cometen errores de interpretación, en el apartado 5.4.5 se muestran los resultados del análisis de errores en las resoluciones grupales e *in situ*, y se comparan con los encontrados en los planes de resolución (Tabla **5-21**). Esto, además, completa la respuesta a la tercera pregunta de investigación, incorporando el análisis de errores al estudio de la influencia del trabajo grupal e *in situ*. Lo primero que encontramos es que trabajar en grupos e *in situ* no se relaciona con mayor proporción de futuros maestros sin errores, es decir, de alto nivel de rendimiento. Lo que desciende ligeramente es la media de errores cometida por los grupos respecto a los individuos. Hay dos resultados relevantes cuando se comparan los errores de ambas experiencias. Primero, que los errores que se cometen son distintos: los cometidos en la experiencia A1 apenas se repiten en la experiencia A2. Los errores mayoritarios en los planes de resolución individuales, como hemos explicado, se relacionan con carencias conceptuales importantes del sentido de la medida de magnitudes, y apenas aparecen en las resoluciones grupales e *in situ*: la resolución empírica en el lugar del problema, visualizando e interactuando con el espacio, y tomando medidas, ayuda a evitar errores en la percepción de magnitud o de significado en términos propios de la misma. En las resoluciones grupales e *in situ*, sin embargo, hay más errores relacionados con el uso de unidades de medida, al estimar el valor de un referente de medida o al convertir entre unidades de medida distintas. Este tipo de errores concuerdan con los resultados del análisis de las producciones de futuros maestros resolviendo problemas de modelización en situaciones de área y perímetro realizado por Montejo-Gámez y cols. (2017, 2019). Son errores que indican falta de competencia en las habilidades de medida, pero no son tan graves conceptualmente como los que se dan en la experiencia individual, evocando el espacio del problema y proponiendo un plan de resolución sin datos. La otra diferencia es que en las resoluciones grupales e *in situ*, que sí requieren encontrar una estimación numérica que dé respuesta a la demanda del problema, la proporción de errores de interpretación es

muy alta. Esto confirma que la baja proporción de esta categoría de errores en los planes de resolución individual se debía a su naturaleza esquemática, y no al dominio de los futuros maestros. Muchos grupos de futuros maestros no interpretan el resultado, ofreciendo como estimación números decimales que deberían referirse a personas o coches. El alto número de errores de los grupos de futuros maestros en la fase de interpretación y validación coincide con otros resultados (Kaiser, Schwarz, y Tiedemann, 2010; Moreno y cols., 2021) sobre errores de profesores de Secundaria en formación cuando resuelven problemas de modelización.
El segundo resultado relevante cuando se comparan los errores en los planes de resolución individual y las resoluciones grupales e *in situ* es que en estas últimas se cometen muchos menos errores graves, que conducen a producciones incompletas, es decir, a un rendimiento de bajo nivel. Por tanto, aunque trabajar en grupo e *in situ* no parece afectar al alto rendimiento, sin embargo, sí se relaciona con una reducción muy grande del bajo rendimiento y con mejoras sustanciales en el rendimiento básico. En grupo se cometen errores de menor gravedad, tanto aquellos que se relacionan con el desarrollo de los modelos inicial y matemático, como aquellos que se relacionan con el sentido de la medida.
Conocer las categorías y tipos de errores que cometen los futuros maestros ayuda a mejorar su formación inicial en resolución de problemas y modelización, incorporándolos como una oportunidad de aprendizaje. En este sentido, los resultados del apartado 5.4.3 muestran que se puede reforzar una u otra categoría de errores en función de las características del contexto de los problemas reales de estimación. En particular, en la formación inicial de los futuros maestros en modelización y estimación, es conveniente diseñar secuencias de problemas de Fermi que comiencen con problemas con las características contextuales de P4, en el que se cometen menos errores, y terminar con problemas con las características contextuales de P3 y P1, en los que la irregularidad de la distribución y forma de los elementos se relaciona con mayor número de errores. Además, si, por ejemplo, se quieren reforzar los errores asociados a la confusión de longitud y área, es aconsejable utilizar problemas similares a P2. Diseñar secuencias de tareas eficientes para fomentar el aprendizaje de la modelización y la resolución de problemas es un campo de investigación fértil e importante.
En cuanto a las limitaciones y cuestiones futuras, en el presente estudio nos hemos centrado en analizar las producciones escritas que incluyen los planes de resolución y las resoluciones grupales de los futuros maestros, por lo que hemos considerado exclusivamente los errores que aparecen escritos en las producciones, sin recoger aquellos que pueden aparecer en las discusiones grupales o en la comunicación del proceso de resolución o de los resultados. Sin duda, un análisis basado en entrevistas semiestructuradas o en grabaciones de las resoluciones podría completar este estudio. Además, las técnicas utilizadas, en particular la categorización de errores, pueden ser muy útiles en el análisis temporal de las resoluciones de los alumnos, combinando marcos como el MAD (Ärlebäck y Albarracín, 2019) y herramientas de registro y análisis como TaskTimeTraker (Pla-Castells y García-Fernández, 2020), como han hecho recientemente Pla-Castells, Melchor y Chaparro (2021). En efecto, identificar, durante el proceso de resolución en qué momento aparecen determinados errores puede ser clave para

encontrar relaciones de dependencia o jerarquías entre ellos. Esta es una limitación de nuestro análisis: sabemos que existen relaciones de dependencia entre los tipos de error, incluso podría investigarse si hay jerarquías entre algunos de ellos, pero no hemos emprendido este estudio que podría basarse en técnicas cuantitativas como el análisis de componentes principales o mediante un análisis estructural de un grafo que conecte los errores que aparecen juntos, lo que ayudaría a refinar el sistema de categorías y tipos de error, y, en consecuencia, los análisis de las dificultades de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de estimación en contexto real o de Fermi. Otra línea de trabajo futuro es estudiar si los futuros maestros son capaces de identificar los errores cuando analizan resoluciones de otros estudiantes de problemas de estimación en contexto real, extendiendo este trabajo sobre rendimiento del futuro profesor a una investigación sobre su conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986).

6.5. ¿Son los futuros maestros flexibles en la resolución de problemas de estimación en contexto real?

En la respuesta a la primera pregunta de investigación se apuntaba que disponer de una categorización limitada de tipos de resolución (Recuento, Linealización, Unidad base y Densidad), aproximándonos a los problemas abiertos como *multiple-solution tasks* (Levav-Waynberg y Leikin, 2012; Albarracín y cols., 2021), es una oportunidad para estudiar la flexibilidad de los futuros maestros. Puesto que, como explicamos en la respuesta la segunda pregunta de investigación, hay una relación entre las características del contexto de los problemas reales de estimación y los tipos de plan de resolución más utilizados, esto implica que una secuencia diseñada por contraste de estas características es un instrumento que debería promover que el resolutor cambie de tipo de plan de resolución – flexibilidad inter-tarea – para "adaptarse" a las características del contexto de cada problema. Sobre qué implicaciones tiene la adaptabilidad se discutirá en la última pregunta de investigación. Por lo tanto, el foco del estudio sobre la flexibilidad se pone, precisamente, en la flexibilidad inter-tarea a lo largo de la secuencia de problemas de estimación en contexto real (OI 9). Como se explicó en el apartado 2.5.2, la importancia de la flexibilidad inter-tarea fue enfatizada por el trabajo de Elia y cols. (2009) para problemas intra-matemáticos, pero puede ser aún de mayor relevancia en problemas de contexto real, por los motivos que acabamos de exponer.

Los resultados muestran que el diseño de la secuencia de problemas de estimación en contexto real efectivamente promueve la flexibilidad inter-tarea entre la mayoría de maestros en formación: aunque los problemas son muy similares, una mayoría de futuros maestros es identifica la necesidad, al menos en uno de ellos, de cambiar de tipo de plan de resolución (ver Tabla **5-22**). Que más de dos tercios de futuros maestros presenten un uso flexible de sus planes de resolución es importante porque estudios previos mostraban que, sobre todo en problemas intra-matemáticos, una carencia de los futuros maestros es la falta de flexibilidad

en la aproximación a la resolución del problema (Taplin, 1994; Chapman, 1999; Van Dooren y cols., 2003). En el apartado 5.5.1, mediante un análisis cualitativo y descriptivo, se muestran distintas posibilidades en la flexiblidad inter-tarea: desde aquellos resolutores que sólo plantean un tipo de plan de resolución para todos los problemas (menos de un tercio del total), hasta aquellos que cambian más de dos veces de tipo de plan de resolución (casi un tercio del total), pasando por lo que cambian sólo una vez. Para recoger esta variabilidad se han establecido, y esto es un resultado original de esta tesis, niveles de flexibilidad: nada flexible, moderadamente flexible y muy flexible. Esta categorización por niveles describe con mayor precisión la actuación de cada resolutor cuando resuelven la secuencia 1 y mide su flexibilidad: los tres niveles están repartidos en proporcionales similares, aunque la más alta es la de los resolutores moderadamente flexibles.
Es importante señalar que en la respuesta a la siguiente pregunta de investigación se concluye que esta medida de la flexibilidad inter-tarea se asocia con los niveles de rendimiento descritos en 6.4. En el Capítulo 2 justificamos que hay pocos estudios sobre el uso de múltiples estrategias de resolución para problemas del mundo real y de modelización (Nistal y cols., 2012; Schukajlow y cols., 2015; Achmetli y cols., 2019), por lo que esta tesis aporta una línea novedosa de aproximación a los problemas de Fermi o de estimación en contexto real, utilizando secuencias de problemas para estudiar la flexibilidad inter-tarea. Pero abordar la flexibilidad en problemas de contexto real en futuros maestros no sólo es relevante por la escasez de estudios previos, también es importante porque, como se explicó en el Capítulo 2, comparar distintas estrategias de resolución de un problema forma parte del conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza (Ball y cols., 2008), es decir, es una exigencia del ejercicio de la docencia. Puesto que nuestro interés es ofrecer unos resultados que puedan contribuir, en el futuro, a una formación inicial de maestros que potencie la matematización y el enfoque abierto de la EMR (Freudenthal, 1968, 1977; Van den Heuvel-Panhuizen, 2002), esta finalidad exige formar a un profesorado capaz de reconocer y comparar diferentes maneras de resolver problemas de contexto real o de modelización. Para formar de manera efectiva en este conocimiento especializado las matemáticas para la enseñanza, un paso previo necesario es que los propios maestros en formación sean flexibles resolviendo problemas del mundo real.
En lo que respecta al otro tipo de flexibilidad, la flexibilidad intra-tarea, los resultados del estudio exploratorio con un problema (*P4-Coches*) muestran que menos de un tercio de los futuros maestros fueron capaces de plantear dos tipos de plan de resolución para un mismo problema. Al contrario que la flexibilidad inter-tarea, la flexibilidad intra-tarea es minoritaria. Esto confirma que el diseño de la secuencia promueve la flexibilidad inter-tarea, pues cuando los futuros maestros deben plantear más de un tipo de plan de resolución en un problema, sin variación de las características del contexto, tienen muchas más dificultades para lograrlo. También se alinea con el trabajo de Elia, van den Heuvel-Panhuizen y Kolovou (2009), en el que encontraron que la flexibilidad inter-tarea era mucho más determinante para el éxito de los estudiantes que la flexibilidad intra-tarea. Además, aunque los resultados

del estudio exploratorio, como puede verse en la Tabla 37, muestran que la proporción de futuros maestros inter-flexibles que también son intra-flexibles dobla a la de aquellos no inter-flexibles que son intra-flexibles, no son concluyentes, y no puede afirmarse que exista una relación estadísticamente significativa entre los dos tipos de flexibilidad. Una limitación de este estudio es haber utilizado sólo un problema de la secuencia para analizar la flexibilidad intra-tarea. Es necesario, para profundizar en las relaciones entre ambos tipos de flexibilidad en resolución de problemas de contexto real, rediseñar el estudio para que futuros maestros deban resolver los cuatro problemas de la secuencia 1, cada uno de dos formas distintas. Con una muestra de futuros maestros similar a la de esta tesis, los datos obtenidos en ese estudio futuro podrían conducir a una relación significativa entre intra-flexibilidad e inter-flexibilidad, y además se podría analizar si se puede asociar mayor o menor flexiblidad intra-tarea a alguno de los problemas de la secuencia 1.

Otra propuesta de trabajo para el futuro es investigar cómo se pueden diseñar materiales que, del mismo modo que las secuencias por contraste promueven la flexibilidad inter-tarea, faciliten la flexibilidad intra-tarea en los futuros maestros. De hecho, esto entronca con un tema de investigación importante en torno a la flexibilidad: cómo enseñarla. Según Nistal y cols. (2012), en la comunidad de investigadores hay dos opciones: la primera es instruir explícitamente a los estudiantes sobre qué estrategias pueden emplear para cada tipo de problema posible, pero no hay acuerdo sobre la mejor manera de enseñar esto. La segunda opción es estimular a los estudiantes para que seleccionen su tipo de resolución preferida para cada problema teniendo en cuenta las características de la tarea, el tema o el contexto. En este estudio hemos optado por esta segunda opción, pues según Nistal y cols. (2012) es la que conduce al desarrollo de una verdadera flexibilidad. Estimular la flexibilidad intra-tarea implica ayudar a que los resolutores planteen dos tipos de resolución para un mismo problema, por lo que no aplica el recurso a la variación de las características de contexto usando varios problemas. Una posibilidad que debería ser explorada es utilizar secuencias de un mismo problema resuelto de maneras diferentes, en las que los resolutores, por parejas, deban comparar y discutir los distintos tipos de resolución, extendiendo a problemas de estimación en contexto real el diseño del estudio de Durkin, Star, y Rittle-Johnson (2017) sobre el uso de la comparación de múltiples estrategias para ecuaciones lineales.

6.6. ¿Existe relación entre flexibilidad de futuros maestros y su rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real?

Existe un consenso académico en que la flexibilidad en resolución de problemas es una componente de la competencia matemática (Nistal y cols., 2012), y que el uso de múltiples estrategias de resolución es un indicador de creatividad matemática, de rapidez y precisión, y de conocimiento procedimental profundo (Star, 2005; Heinze y cols., 2009; Levav-Waynberg y Leikin, 2012). A partir de investigaciones precedentes (Schukajlow y cols., 2015; Achmetli y cols., 2019), pero con una aproximación diferente, basada en el análisis de errores (6.4), se ha abordado el objetivo OI 10 descrito como "analizar las posibles relaciones entre el uso flexible de los planes de resolución de futuros maestros y su rendimiento en la resolución de los problemas de la secuencia, contemplando los errores cometidos y su gravedad". Se trata del objetivo principal de esta tesis, aunque no se podría abordar sin los resultados que aportan las respuestas a las preguntas de investigación precedentes. Es el objetivo principal porque aporta datos empíricos que refuerzan la relación entre flexibilidad y competencia en resolución de problemas para futuros maestros. Además, esta relación se estudia para problemas de contexto real, en los que la investigación es escasa (Schukajlow y cols., 2015; Achmetli y cols., 2019), y todavía menor tratándose de futuros docentes.

En los resultados expuestos en el apartado 5.5.2 se discuten detalladamente las distintas asociaciones entre los niveles de flexibilidad inter-tarea y los niveles de rendimiento definidos a partir de la naturaleza y número de los errores cometidos. Se demuestra que existe una relación estadísticamente significativa entre bajo rendimiento y nivel de flexibilidad: apenas hay resolutores muy flexibles con bajo rendimiento, mientras que son casi la mitad entre los resolutores moderadamente flexibles, y más del 60 % de los resolutores nada flexibles tienen rendimiento bajo. Los resolutores muy flexibles cometen muchos menos errores graves que los nada flexibles y los moderadamente flexibles. De hecho, a partir del análisis de errores se encuentra que existe una existe una relación estadísticamente significativa entre el número de errores cometidos y el nivel de flexibilidad entre los futuros maestros: los resolutores muy flexibles, si cometen errores, lo hacen en un número significativamente menor que los nada flexibles, que los doblan en número de errores de media por resolutor.

En lo que respecta al alto rendimiento, existe una relación significativa entre alto rendimiento – definido como no cometer errores – en la resolución de problemas de estimación en contexto real y una alta flexibilidad inter-tarea. Casi la mitad de los maestros en formación muy flexibles presentan alto rendimiento, pero esta proporción es muy baja para los moderadamente flexibles y nada flexibles. Cuando nos restringimos a los futuros maestros con éxito, es decir, a aquellos que completaron sus cuatro planes de resolución, la proporción de resolutores muy flexibles con alto rendimiento sigue siendo claramente mayor, aunque la relación entre alto rendimiento y nivel de flexibilidad no es significativa porque el tamaño de la muestra se hace menor.

En conclusión, a partir de la relación entre los datos recogidos sobre la flexibilidad inter-tarea y los resultados del análisis de errores, se encuentra que estos niveles de flexibilidad tienen importancia teórica más allá de su utilidad descriptiva para diferenciar casos, pues muestran que existe una graduación en la flexibilidad inter-tarea que tiene repercusiones en el rendimiento de los futuros maestros. Se trataría de un ejemplo de teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) que emerge directamente de las relaciones entre los datos. En las investigaciones precedentes sobre flexibilidad en resolución de problemas no se utilizó una graduación en niveles, quizá porque la mayoría se centran en el uso de dos estrategias dentro de un mismo problema. Así, la evidencia muestra que son los futuros maestros muy flexibles entre problemas quienes tienen mejor rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real, en consonancia con los resultados de Elia y cols. (2009) sobre inter-flexibilidad en problemas intra-matemáticos no rutinarios. También muestra que, sin embargo, conocer dos tipos de plan de resolución, pero cambiar sólo en un problema de la secuencia (moderadamente flexible), no garantiza un rendimiento significativamente mayor que utilizar sólo un tipo de plan de resolución para toda la secuencia (nada flexible). La asociación entre bajo rendimiento, o rendimiento básico, y falta de flexibilidad inter-tarea también se alinea con trabajos de referencia (Taplin, 1994; Chapman, 1999, 2015; Van Dooren y cols., 2003).

Nuestras conclusiones sobre la asociación entre flexibilidad inter-tarea y mejora del rendimiento en resolución de problemas de estimación en contexto real apuntan a la importancia de incorporar a la formación inicial de maestros la comparación de distintos tipos de estrategias en la resolución de problemas. En este sentido, a partir de estos resultados es importante consolidar y ampliar el diseño de secuencias de problemas y otro tipo de materiales didácticos que promuevan el uso de distintos tipos de resolución en problemas reales y de modelización, lo que contribuirá a mejorar el conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza de los futuros maestros.

Una limitación de este estudio sobre relación entre flexibilidad inter-tarea y rendimiento es no haberlo extendido a la flexibilidad intra-tarea. Como se ha explicado en la respuesta a la pregunta de investigación 6.5, el uso de secuencias diseñadas por contraste en las características del contexto de los problemas estaba dirigido al estudio de la inter-flexibilidad, pues se trata de registrar los cambios de tipo de plan de resolución entre problemas, influidos por dichas características del contexto. Además, conocíamos el resultado de Elia y cols. (2009) sobre que la flexibilidad inter-tarea es la relevante para tener éxito en resolución de problemas, y eso también apoyaba nuestro interés en este tipo de flexibilidad. En cualquier caso, sería interesante analizar si, para problemas de estimación de contexto real, la flexibilidad intra-tarea se asocia o no con el éxito o alto rendimiento al resolverlos, en consonancia con otros trabajos sobre el uso de dos estrategias distintas de resolución para un mismo problema de modelización y su relación con el rendimiento y los conocimientos conceptuales y procedimentales (Schukajlow y cols., 2015; Achmetli y cols., 2019). Para ello, una propuesta futura de trabajo sería utilizar el rediseño de este estudio mencionado en la respuesta a la anterior pregunta de investigación, usando la secuencia 1 pero pidiendo a los resolutores que resuelvan cada uno de dos maneras distintas. Este diseño permitiría también estudiar una posible asociación entre flexibilidad intra-tarea y rendimiento.

Aunque en este trabajo nos hemos interesado por los maestros en formación y su desempeño en la resolución de problemas de estimación en contexto real, sería interesante extender los resultados que hemos obtenido sobre flexibilidad inter-tarea y rendimiento a estudiantes de Primaria y Secundaria. Por ejemplo, una pregunta sobre la que existe controversia entre investigadores es cuándo empezar a enseñar flexibilidad (Nistal y cols., 2012). Conocer, para cada nivel educativo, en qué medida los estudiantes cambian de tipo de resolución en una secuencia de problemas de estimación en contexto real y cuál es su rendimiento puede ayudar a responder a esa pregunta en lo que respecta a este tipo de problemas. En lo que respecta a cómo sería esa enseñanza de la flexibilidad en resolución de problemas reales o de modelización, esta tesis propone algunas ideas que han sido fundamentadas y refrendadas por los resultados: la relevancia del uso de secuencias de problemas de contexto real diseñadas por contraste en el valor de la variable de contexto; la planificación basada en dos experiencias de resolución, la primera basada en el planteamiento individual de planes de resolución en el aula y la segunda en la resolución grupal e *in situ*; el análisis de los errores en las producciones. Esta tesis también ha ofrecido información sobre cómo resuelven esos futuros profesores este tipo de problemas, lo que ayudaría a mejorar su formación inicial en resolución de problemas. Como se destacó en el Capítulo 2, uno de los aspectos que garantizan la sostenibilidad de una enseñanza realista, competencial y funcional de las Matemáticas es la competencia de los docentes en problemas reales, de modelización, con múltiples soluciones y ricos (Szydlik y cols., 2003; Lott, 2007; Slavit y Nelson, 2010; Artigue y Blomhøj, 2013; Guberman y Leikin, 2013).

6.7. ¿Cómo hacen los futuros maestros un uso adaptativo de sus resoluciones en los problemas de estimación en contexto real?

La última parte de esta tesis trata de afinar más el estudio de la flexibilidad inter-tarea en secuencias de problemas de estimación en contexto real: si una proporción importante de futuros maestros cambia de tipo de plan en algunos problemas, ¿lo hace para adaptarse a ciertas características del contexto? ¿En cada tarea, cuál es el tipo de plan de resolución que mejor se adapta a dichas características del contexto? ¿Qué criterios pueden utilizarse para valorar que un tipo de plan de resolución es mejor que otro en un contexto dado?
Los objetivos OI 11 y OI 12 responden a estas preguntas, que son una concreción de la pregunta de investigación. En el apartado 5.6.1 se fundamentan tres criterios a partir de las respuestas de los futuros maestros participantes en la investigación y de la decisión de profesores en activo del área de Matemáticas o de su Didáctica, considerados, por su formación y profesión, como expertos. Los tres criterios son: rapidez (la mejor resolución es la más sencilla, la que se desarrolla en un número menor de pasos); precisión (la mejor resolución es la que ofrece una estimación más ajustada a la realidad, más fiable); y rigor (la mejor resolución es la más cuidadosa, la que contempla más elementos de la realidad en su modelo matemático). Además, a partir de las elecciones de los expertos, se encuentra una relación estadísticamente significativa entre el tipo de plan de resolución y el criterio de adaptabilidad en justifica su uso: Linealización se asocia a precisión en problemas en los que los elementos a estimar están dispuestos ordenadamente; Unidad base se asocia a rapidez

en todos los problemas; Densidad se asocia a precisión y rigor, y es especialmente adecuado en los problemas en los que los elementos están distribuidos desordenadamente y su forma o tamaño son irregulares. Para determinar un esquema de "problema – tipo de resolución más adecuado" entre las varias opciones que pueden obtenerse de estos resultados, hemos propuesto dos tipos de adaptabilidad:

i. La *adaptabilidad eficiente* se basa en la rapidez con precisión, lo que implica que se utilice Unidad base en P1, P2 y P4, y sólo se cambie a Densidad en P3, pues en este problema, por la irregularidad del césped, la rapidez es muy poco precisa.

ii. La *adaptabilidad minuciosa* se basa en el rigor con precisión, lo que implica que se utilice Densidad en P1 y P3, y Linealización en P2 y P4.

Este resultado es relevante porque responde de manera fundamentada a lo que investigadores referentes en el área (Threlfall, 2002; Star y Rittle-Johnson, 2008; Heinze y cols., 2009) consideran como un gran reto de investigación: conocer qué estrategia es más adecuada (o mejor) que otras bajo particulares circunstancias del problema.
Disponer de estos criterios permite completar el análisis de la flexibilidad de los futuros maestros con el de su adaptabilidad: ¿cuántos de los futuros maestros flexibles inter-tarea que cambian de tipo de plan de resolución presentan adaptabilidad eficiente? ¿cuántos presentan adaptabilidad minuciosa? En el apartado 5.6.2 se presentaron los resultados sobre estos dos tipos de adaptabilidad de los futuros maestros resolviendo problemas de estimación en contexto real. La respuesta es clara: tanto desde el punto de vista de la eficiencia como desde el punto de vista de la minuciosidad, la adaptabilidad de los futuros maestros es baja. Sólo un 30 % de los futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución escogen el tipo de resolución más *eficiente* (rapidez con precisión) en al menos tres de los cuatro problemas de la secuencia 1. Entre los resolutores muy flexibles inter-tarea, de hecho, esta proporción aumenta al 46 %. Se ha comprobado que la asociación entre futuros maestros muy flexibles y presentar adaptabilidad eficiente es estadísticamente significativa.
Aún es más baja la adaptabilidad minuciosa: sólo el 15, 5 % de los futuros maestros con un uso flexible de sus planes de resolución escogen el tipo de resolución más *minuciosa* (rigor con precisión) en al menos tres de los cuatro problemas de la secuencia 1. La proporción aumenta al 26 % entre los futuros maestros muy flexibles, y también existe una relación significativa entre alta flexibilidad y presentar adaptabilidad minuciosa. Que la adaptabilidad minuciosa sea aún más baja que la eficiente se explica porque la rapidez es el criterio de adaptabilidad más escogido por los futuros maestros y el tipo de resolución más empleado fue Unidad base. Por el contrario, rigor fue el criterio de adaptabilidad menos escogido por los futuros maestros. Sin embargo, mayor número de expertos escogió rigor como criterio, y Densidad, que es el plan de resolución vinculado a la minuciosidad, fue el más escogido por los expertos. Esto refuerza y extiende el resultado de (Ferrando y Albarracín, 2021) que vincula uso de la Densidad con madurez matemática.

Es evidente que la proporción de futuros maestros adaptables (tanto desde la eficiencia como desde la minuciosidad) es muy baja en relación con la de futuros maestros flexibles entre problemas. La respuesta a la pregunta de investigación 6.3 nos ofrece un camino para mejorar la adaptabilidad: hemos visto que trabajar *in situ*, experimentando en el lugar real del problema, favorece el desarrollo de la adaptabilidad porque los futuros maestros incorporaban aspectos de la situación real que no habían evocado previamente, y eso les hacía cambiar la resolución grupal respecto a sus planes de resolución individual. Como línea de trabajo futuro, sería interesante profundizar en los efectos sobre la adaptabilidad de esta planificación de una experiencia individual seguida de una en grupos y en el lugar real de los problemas. También creemos interesante estudiar la relación entre adaptabilidad y la fase de interpretación y validación de la estimación en el ciclo de modelización (Borromeo-Ferri, 2018).

Una limitación de este estudio es no relacionar adaptabilidad y rendimiento, lo que afinaría aún más las conclusiones en la respuesta a la pregunta de investigación anterior. Asumimos que, con los datos que disponemos, es una tarea que queda pendiente para el futuro inmediato. La pregunta de investigación sería: ¿tienen los futuros maestros adaptables mejor rendimiento que los futuros maestros muy flexibles, o no se observan diferencias significativas? El bajo número de futuros maestros que presentan adaptabilidad (eficiente o minuciosa) hace que la muestra sea insuficiente para establecer un análisis relacional entre ambos aspectos.

Ampliando el tema de investigación sobre cómo diseñar materiales que promuevan la flexibilidad, se podría estudiar también cómo enseñar de manera efectiva a escoger la mejor entre varias estrategias para resolver un problema, y cómo provocar la reflexión en los estudiantes sobre qué criterios emplear para dicha elección teniendo en cuenta las características del problema y del contexto.

6.8. Coda

> *Un rêve magnifique les occupa; s'ils menaient à bien l'éducation de leurs élèves, ils fonderaient un établissement ayant pour but de redresser l'intelligence, dompter les caractères, ennoblir le coeur. Déjà ils parlaient des souscriptions et de la bâtisse.*
>
> Flaubert, Bouvard et Pécuchet.

Las respuestas a estas preguntas de investigación ofrecen información valiosa sobre cómo resuelven los futuros maestros los problemas de estimación en contexto real, tanto de manera individual, planteando un plan de resolución sin datos numéricos, como *in situ*, de manera experimental y en grupos. El contraste entre las características del contexto, así como entre el plan de resolución que evoca la situación real del problema y la resolución en el lugar real del problema, promueve cambios en los tipos de resolución y facilita que los futuros maestros se adapten a aspectos del problema que no habían sido anticipados. Fomentar la flexibilidad y la adaptabilidad entre futuros maestros, experimentando ellos mismos la resolución de problemas de modelización, es un paso necesario para que en el futuro implementen este tipo de problemas en el aula y valoren el uso y comparación de múltiples resoluciones como una componente importante de la competencia matemática. El conocimiento de sus errores cuando resuelven problemas de estimación en contexto real, usando la comparación de distintas resoluciones para reflexionar sobre los mismos, es también otra vía de mejora de su conocimiento especializado del contenido matemático para la enseñanza.

En definitiva, que los maestros en formación experimenten estas formas de aprendizaje a través de la resolución de problemas reales podría convertirse en una referencia para su labor docente en el futuro. Es una razón para aventurar que la transferencia de estos resultados a la formación inicial de los maestros contribuiría, aunque sea modestamente, a que los docentes adopten una perspectiva funcional y competencial de las Matemáticas, centrada en los procesos de matematización, es decir, un compromiso con la Educación Matemática Realista.

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65.

Achmetli, K., Schukajlow, S., y Rakoczy, K. (2019). Multiple solutions for real-world problems, experience of competence and students' procedural and conceptual knowledge. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 1605–1625.

Acock, A. C., y Stavig, G. R. (1979). A measure of association for nonparametric statistics. *Social Forces*, *57*(4), 1381–1386.

Agulló, C., y Juan, B. (2012). *Orígenes, evolución y formas de acceso e integración de las mujeres en la Escuela Normal de Magisterio de Valencia (1867-1967).* Universitat de València. Unitat de Igualtat.

Aiken, L. R. (1996). *Rating scales checklists: Evaluating behavior, personality, and attitudes.* New York: Wilet.

Albarracín, L., Segura, C., Ferrando, I., y Gorgorió, N. (2021). Supporting mathematical modelling by upscaling real context in a sequence of tasks. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*.

Albarracín, L. (2011). *Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables.* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Albarracín, L., Ferrando, I., y Gorgorió, N. (2021). The role of context for characterising students' strategies when estimating large numbers of elements on a surface. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*, 1209-1227.

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 79-96.

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, *27*(2), 45-57.

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M. J. González, M. T. González, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119–127). Santander: SEIEM.

Anderson, P. M., y Sherman, C. A. (2010). Applying the Fermi estimation technique to business problems. *Journal of Applied Business and Economics*, *10*(5), 33-42.

Arbaugh, F., Lannin, J., Jones, D. L., y Park-Rogers, M. (2006). Examining instructional practices of CorePlus lessons: Implications for professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 517-550.

Arce, M., Marbán, J., y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 119–128). Zaragoza: SEIEM.

Ärlebäck, J., y Albarracín, L. (2019). An extension of the MAD framework and its possible implication for research. En *Eleventh congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(3), 331-364.

Ärlebäck, J. B., y Bergsten, C. (2010). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in Upper Secondary Mathematics. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 597–609). Boston: Springer.

Ärlebäck, J. B., y Doerr, H. M. (2015). Moving beyond a single modelling activity. En G. A. Stillman, W. Blum, y M. S. Beimbegut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education and Practice* (pp. 293–303). New York: Springer.

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*, 797-810.

Ball, D. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* (Tesis Doctoral). Michigan State University, East Lansing.

Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*(4), 373-379.

Ball, D., y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3–14). Edmonton, Alberta, Canada: Canadian Mathematics Education Study Group (Groupe Canadien d'étude en didactique des mathématiques).

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 1–34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. En M. Bosch y cols. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553–577). Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J., y Raj, L. L. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education [CERME 5]* (pp. 2050–2059). Larnaca: University of Cyprus.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings.* Buckingham: Open University Press.

Baturo, A., y Nason, R. (1996). Students teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(3), 235-268.

Begle, E. (1972). *Teacher knowledge and pupil achievement in algebra.* Tech. Rep. No. 9. Stanford, CA: Stanford University, School Mathematics Study Group.

Berk, D., Taber, S. B., Carrino, C., y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11(3)*, 113-135.

Bikner-Ahsbahs, A. (2019). The research pentagon: A diagram with which to think about research. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 monographs* (pp. 153–180). Cham: Springer.

Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 171–186). Barcelona: Graó Editorial.

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey, México* (pp. 1–17). Roskilde: Roskilde Universitet.

Blomhøj, M., y Højgaard, J. T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *22*(3), 123-139.

Blomhøj, M., y Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *38*, 163-177.

Blöte, A. W., Van der Burg, E., y Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*, 627-638.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En T. Breiteig, I. Huntley, y G. Kaiser-Messmer (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3–14). Chichester, UK: Horwood.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*, 149-171.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. international perspectives on the tea-*

ching and learning of mathematical modelling, vol 1. (pp. 15–30). New York: Springer.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Dordrecht: Springer.

Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., y Köller, O. (2006). *Bildungsstandards mathematik: konkret. sekundarstufe i: Aufgabenbeispiele, unterrichtsideen und fortbildungsmöglichkeiten.* Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, W. Blum, P. Galbraith, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Horwood: Chichester, UK.

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Boaler, J., Ball, D. L., y Even, R. (2003). Preparing researchers for disciplined inquiry: Learning from, in, and for practice. En A. Bishop y J. Kilpatrick (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 491–521). Dordrecht: Kluwer.

Boaler, J., y Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record*, *110*(3), 608-645.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2007). Modeling from a cognitive perspective: Individual modeling routes of pupils. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 260–270). Chichester: Horwood.

Borromeo-Ferri, R. (2014). Mathematical modelling—the teacher's responsibility. En A. Sanfratello y B. Dickmann (Eds.), *Proceedings of conference on mathematical modelling* (pp. 26–31). New York: Teachers College of Columbia University.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Cham: Springer.

Borromeo-Ferri, R., y Blum, W. (2009). Mathematical modelling in teacher education–experiences from a modelling seminar. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), *European Society for Research in Mathematics Education - Proceedings of CERME 6* (pp. 2046–2055). Lyon: INRP.

Borromeo-Ferri, R., y Blum, W. (2010). Insights into teachers' unconscious behavior in modeling contexts. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modelling students' mathematical modeling competencies* (pp. 423–432). New York: Springer.

Bryman, A. (2012). *Social research methods, 4th ed.* Hong Kong: Oxford University Press.

Buchholtz, N. (2017). How teachers can promote mathematising by means of mathematical city walks. En G. A. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 49–58). Cham: Springer.

Buchholtz, N. (2019). Planning and conducting Mixed Methods Studies in Mathematics Educational Research. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 monographs* (pp. 131–152). Cham: Springer.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 178-195.

Cabassut, R., y Ferrando, I. (2017). Difficulties in teaching modelling: A french-spanish exploration. En G. A. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 223–232). Cham: Springer.

Cajaraville, J. A. (2007). Estimación y aproximación. En J. M. Domínguez (Ed.), *Actividades para la enseñanza en el aula de ciencias. Fundamentos y planificación* (pp. 35–77). Santa Fe: Ediciones Universidad Nacional del Litoral.

Caldwell, J. H., y Goldin, G. A. (1987). Variables affecting word problem difficulty in secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 187–196.

Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies y curvilínies. procediments, recursos i estratègies.* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, *35*(5), 308-309.

Carreira, S., Amado, N., y Lecoq, F. (2011). Mathematical modelling of daily life in adult education: focusing on the notion of knowledge. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling, vol 1.* (pp. 199–210). New York: Springer.

Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E., y Molina, M. (2011). Estudio sobre la estimación de cantidades continuas: Longitud y superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 165–172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Castillo-Mateo, J. J. (2012). *Estimación de cantidades continuas: longitud y superficie.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E., y Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 63–74). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València.

Castro, , Prat, M., y Gorgorió, N. (2016). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: Their development after decades of research. *Revista de Educación*, *374*, 43-66.

CCSSI. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Washington, DC: NCTM.

Chapman, O. (1999). In-service teacher development in mathematical problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*, 121-142.

Chapman, O. (2005). Constructing pedagogical knowledge of problems solving: preservice mathematics teachers. En H. Chick y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education vol. 2* (pp. 225–232). Melbourne: PME.

Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *62*, 211-230.

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. *PNA*, *6*(4), 135 – 146.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 1 – 6.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *3*(1), 19-36.

Charles, R., y Silver, E. A. (1988). *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire.* 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. En S. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173–187). Dordrecht: Springer.

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan.* Madrid: MEC.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education.* New York: Routledge.

Comiti, C., y Ball, D. (1996). Preparing teachers to teach Mathematics: A comparative perspective. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* (pp. 1123–1153). Kluwer

Academia Pres: Utrecht.

Conant, J. (1963). *The education of american teachers.* New York: McGraw-Hill.

Conner, A., Wilson, P., y Kim, H. (2011). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *43*, 979–992.

Corbin, J., y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, *13*, 3–21.

Crouch, R., y Haines, C. (2007). Exemplar models: Expert-novice student behaviours. En C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics-ICTMA 12* (pp. 90–100). Chichester: Horwood Publishing.

Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling transition diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning,*, *18*(2), 77-106.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 137-159.

Darling-Hammond, L., Hammerness, K., Grossman, P., Rust, F., y Shulman, L. (2005). The design of teacher education programs. En L. Darling-Hammond y J. Bransford (Eds.), *Preparing teachers for a changing world* (pp. 390–441). San Francisco: Jossey Bass.

Days, H. C., Wheatley, G. H., y Kulm, G. (1976). Problem structure, cognitive level, and problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*, 135-146.

De Corte, E., Greer, B., y Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. En D. Berliner y C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491–549). New York: Simon Schuster Macmillan.

De Corte, E., y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 363-381.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* (pp. 49–97). Kluwer Academia Pres: Utrecht.

Demetriou, A. (2004). Mind intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence. En A. Demetriou y A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (p. 21—73). Cambridge University Press: Cambridge.

Denzin, N. K. (2009). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods (3rd ed.).* Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Dewey, J. (1983). The child and the curriculum. En J. A. Boydston (Ed.), *John dewey: The middle works, 1899-1924, volume 2: 1902-1903* (pp. 273–291). Carbondale: Southern Illinois University Press.

Dickinson, P., y Hough, S. (2012). *Using realistic mathematics education in uk classrooms.*

Manchester: Centre for Mathematics Education, Manchester Metropolitan University.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Editorial Labor-Ministerio de Educación y Ciencia.

Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(1), 3–24.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (p. 69-–78). Boston: Springer.

Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 110-136.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Dowker, A., Flood, A., Griffiths, H., Harris, L., y Hook, L. (1996). Estimation strategies of four groups. *Mathematical Cognition*, *2*(2), 113-135.

Dunkin, M. J., y Biddle, B. J. (1974). *The study of teaching.* New York: Holt, Rinehart, Winston.

Durkin, K., Star, J. R., y Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *49*(4), 585–597.

D'Ambrosio, U. (1989). Historical and epistemological bases for modelling and implications for the curriculum. En W. Blum, M. Niss, y I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving* (pp. 22–28). Chichester: Horwood Publishing.

Efthimiou, C. J., y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, *42*(3), 253–261.

Egerbladh, T., y Sjodin, S. (1986). Joint effects of group composition, group norm, type of problem and group vs individual responding. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *30*(1), 17 - 23.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge.* New York: Nichols.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., y Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 605-618.

Escolano-Vizcarra, R., Gairín-Sallén, J. M., Jiménez-Gestal, C., Murillo-Ramón, J., y Roncal-Gómez, L. (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del grado de educación primaria. *Contextos Educativos*, *15*, 107–133.

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en españa sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y A. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 43–64). Valladolid: SEIEM.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 220–242.

Ferrando, I., y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 61–78.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Boletim de Educação Matemática*, *31*, 220-242.

Ferrando, I., y Segura, C. (2013). Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte. *Modelling in Science Education and Learning*, *6*, 61-71.

Ferrando, I., y Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17*, 84-97.

Ferrando, I., Segura, C., y Pla-Castells, M. (2017a). Diseño de un curso de formación en línea para introducir la modelización como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *Actas VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 568–576). Madrid: FESPM.

Ferrando, I., Segura, C., y Pla-Castells, M. (2017b). Diseño y evaluación de un curso de formación continua en modelización. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 227–236). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Ferrando, I., Segura, C., y Pla-Castells, M. (2020). Relations entre contexte, situation et schéma de résolution dans les problèmes d'estimation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 557-573.

Ferrando, I., Segura, C., y Pla-Castells, M. (2021). Analysis of the relationship between context and solution plan in modelling tasks involving estimations. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 119–128). Cham: Springer.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*, 3-8.

Freudenthal, H. (1977). Antwoord door prof. dr h. freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat [Answer by Prof. Dr H. Freudenthal upon being granted an honorary doctorate]. *Euclides*, *52*, 336–338.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Frías, A., Gil, F., y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 447–502). Madrid: Síntesis.

Galbraith, P., y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics*

Education, *38*(2), 143-162.

Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial* (Tesis Doctoral). Universitat Politècnica de València., Valencia

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum, y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 265–275). Cham: Springer.

García, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Epsilon*, *30*(2), 57-68.

Geiger, V., Galbraith, P., Niss, M., y Delzoppo, C. (2021). Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. *Educational Studies in Mathematics*. Descargado de https://doi.org/10.1007/s10649-021-10039-y

Gibbs, G. (2007). *Analyzing qualitative data.* London: SAGE Publications.

Godino, J., Batanero, C., y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros [versión electrónica].* Universidad de Granada. Granada. Descargado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Goldhaber, D. D., y Brewer, D. J. (2000). Does teacher certification matter? High school teacher certification status and student achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *20*(2), 129–145.

Goldin, G. A., y McClintock, C. E. (1979). *Task variables in mathematical problem solving.* Ohio: Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University.

Goñi, J. (2011). Las finalidades del currículo de Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 9–26). Barcelona: Graó Editorial.

Goñi, J. M. (2009). El desarrollo de la competencia matemática en el currículo escolar de la Educación Básica. *Educatio Siglo XXI*, *27*(1), 33-58.

González-Calero, J. A., Arnau, D., y Laserna-Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 133-147.

Gordillo, J. J. T., y Rodríguez, V. H. P. (2009). Cálculo de la fiabilidad y concordancia entre codificadores de un sistema de categorías para el estudio del foro online en e-learning. *Revista de Investigación Educativa*, *27*(1), 89-103.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Grossman, P. L. (1989). A study in contrast: sources of pedagogical content knowledge for secondary english. *Journal of Teacher Education*, *40*, 24-31.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education.* New York: Teachers College Press.

Guberman, R., y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 33-56.

Gutiérrez, A. (2004). Investigación en didáctica de la geometría: La medida de áreas. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en educación matemática vol. 1* (pp. 83–108). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Hagena, M. (2015). Improving mathematical modelling by fostering measurement sense: An intervention study with pre-service mathematics teachers. En G. Stillman, W. Blum, y B. Maria S (Eds.), *Mathematical Modelling in Education research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 185–194). Cham: Springer.

Hartmann, L.-M., Krawitz, J., y Schukajlow, S. (2021). Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modelling problems? *ZDM–Mathematics Education*, 1–17.

Hein, N., y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En M. Murillo (Ed.), *Memorias del V Festival internacional de matemática.* (pp. 1–25). Descargado de `MicrosoftWord-P-2-Hein.doc(cientec.or.cr)`

Heinze, A., Star, J., y Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *41*, 535–540.

Heirdsfield, A. M., y Cooper, T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 57–74.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., ... Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth: Heinemann.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., ... Stigler, J. W. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study.* Washington: National Center for Education Statistics.

Hiebert, J., y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* (pp. 1–27). Hillsdale: Lawrence Associates.

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *The Arithmetic Teacher*, *30*(5), 50–54.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, *105*(1), 11–30.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511.

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal*, *42*(2), 371–406.

Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-280.

Hough, S., Solomon, Y., Dickinson, P., y Gough, S. (2017). *Investigating the impact of a Realistic Mathematics Education approach on achievement and attitudes in Post-16 GCSE resit classes*. Manchester Metropolitan University.

Howell, D. C. (2012). *Statistical methods for psychology*. Cengage Learning.

Hunkler, R. (2016). *Achievement of sixth grade pupils in modern mathematics as related to their teachers' math preparation* (Tesis Doctoral). Texas A. M. University, College Station., Texas

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación matemática*, *28*(1), 9–38.

Johnson, K., Herr, T., y Kysh, J. (2003). *Crossing the river with dogs: Problem solving for college students*. Springer Science & Business Media.

Joram, E. (2003). Benchmarks for measurement units. *Learning and teaching measurement (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)*, 195–207.

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 4–23.

Kaiser, G., Schwarz, B., y Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. En *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 433–444). Springer.

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302–310.

Kaizer, C., y Shore, B. M. (1995). Strategy flexibility in more and less competent students on mathematical word problems. *Creativity Research Journal*, *8*(1), 77–82.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163–180.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 7–20). Ohio: Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University.

Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(1), 101–116.

Kilpatrick, J., y Lerman, S. (2014). Competency frameworks in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 85–87). The Netherlands: Springer Dordrecht.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn* *mathematics*. Washington: National Academy Press.

Klieme, E., Bürgermeister, A., Harks, B., Blum, W., Leiß, D., y Rakoczy, K. (2010). *Leistungsbeurteilung und Kompetenzmodellierung im Mathematikunterricht. Projekt Co2CA*. Germany: Beltz Verlag.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of the new mathematics*. New York: St. Martin's Press.

Klock, H., y Siller, H.-S. (2020). A time-based measurement of the intensity of difficulties in the modelling process. En H. Wessels, G. A. Stillman, G. Kaiser, y E. Lampen (Eds.), *Mathematical modelling education and sense-making* (pp. 163–173). Dordrecht: Springer.

Ko, P. Y., y Marton, F. (2004). Variation and the secret of the virtuoso. En F. Marton y A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 43–62). Mahwah: Erlbaum.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Landis, J. R., y Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 159–174.

Larson, C. (2010). Modeling and quantitative reasoning: The summer jobs problem. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modelling competencies: ICTMA 13* (pp. 111–118). New York: Springer.

Lee, M. (2017). Pre-service teachers flexibility with referent units in solving a fraction division problem. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(3), 327–348.

Leikin, R. (2003). Problem-solving preferences of mathematics teachers: Focusing on symmetry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(4), 297–329.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. En R. Leikin, A. Berman, y B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Brill Sense.

Leikin, R., y Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in mathematics*, *66*(3), 349–371.

Leikin, R., y Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*(3), 233–251.

Leiß, D., Plath, J., y Schwippert, K. (2019). Language and mathematics-key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(2), 131–153.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses or problem-solving performance. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 309–329). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3–34). Mahawah: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2-3), 157–189.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. R. (2000). Principles for developing thought- Revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591–646). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763–802). Greenwich: Information Age Publishing.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660–675.

Levav-Waynberg, A., y Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73–90.

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S., y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*(3), 247–271.

Lodico, M. G., Spaulding, D. T., y Voegtle, K. H. (2010). *Methods in educational research: From theory to practice* (Vol. 28). John Wiley & Sons.

López-Roldán, P., y Fachelli, S. (2015). Metodología de la investigación social cuantitativa. *Bellaterra (Cerdanyola del Vallès): Dipòsit Digital de Documents, Universitat Autònoma de Barcelona*.

Lott, J. W. (2007). Correcting the Course of Math Education. *Principal Leadership*, *7*(5), 27–31.

Lynch, K., y Star, J. R. (2014). Teachers' views about multiple strategies in middle and high school mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(2), 85–108.

Maaß, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *24*(2-3), 61–74.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113–142.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 285–311.

Maaß, K., Barzel, B., Törner, G., Wernisch, D., Schäfer, E., y Reitz-Koncebovski, K. (2015). *Educating the educators: International approaches to scaling-up professional development in mathematics and science education.* Münster: WTM.

Maaß, K., y Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional Development of teachers in relation to mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling, vol 1.* (pp. 629–639). Dordrecht: Springer.

Maranhao, C., y Campos, T. (2000). Length measurement: Conventional units articulated with arbitrary ones. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME International Conference, Volume 3* (pp. 255–262). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, *41*(3), 3–11.

Marton, F., Runesson, U., y Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. En F. Marton y A. B. M. Tsui (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3–40). Mahwah: Erlbaum.

McHugh, M. L. (2013). The chi-square test of independence. *Biochemia medica*, *23*(2), 143–149.

Mengual, E. (2017). *Caracterización del contenido matemático subyacente al libro de texto en medida.* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Ministerio de Educación. (2020, Diciembre). *Ley orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación.* Boletín Oficial del Estado del 30 de diciembre de 2020.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2014, Enero). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.* Boletín Oficial del Estado núm. 3, de 3 de enero de 2015.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., y Adamuz-Povedano, N. (2019). ¿Cómo modelizan los futuros profesores en situaciones de área y perímetro? El papel de las unidades y de las fórmulas. *Modelling in Science Education and Learning*, *12*(1), 5–20.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., y Adamuz-Povedano, N. (2021). A tool for the analysis and characterization of school mathematical models. *Mathematics*, *9*(13), 1569.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jimenez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. Callejo, J. Carrillo, y C.León-Mantero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347–356). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Moreno, A., Martín, M., y Ramírez, R. (2021). Errores de profesores de Matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA. Revista de Investigación* *en Didáctica de la Matemática*, *15*(2), 109–136.

Moyer, J. C., Moyer, M. B., Sowder, L., y Threadgill-Sowder, J. (1984). Story problem formats: Verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 64–68.

NCTM. (1989). *A history of mathematics education in the United States and Canada, vol 32.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. En G. Papastavridis (Ed.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124). Athens: The Hellenic mathematical society.

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. L. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 1–32). New York: Springer.

Niss, M., y Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* Roskilde: IMFUFA.

Niss, M., y Jablonka, E. (2014). Mathematical Literacy. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 391–396). Dordrecht: Springer.

Nistal, A., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). Flexibility in problem solving: Analysis and improvement. En N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning.* (pp. 1302–1304). Boston: Springer.

OCDE. (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Madrid: MEC.

OECD. (2014). *PISA 2012 results. Creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (Volume V).* Paris: OECD Publishing.

Orrantia, J., Múñez, D., Vicente, S., Verschaffel, L., y Rosales, J. (2014). Processing of situational information in story problem texts. an analysis from on-line measures. *Journal of Psychology*, *17*, 1–14.

Özdemir, T., y Eyduran, E. (2005). Comparison of chi-square and likelihood ratio chi-square tests: Power of test. *Journal of Applied Sciences Research*, *1*, 242–244.

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' interactive modelling processes. En S. Ruwisch y A. Peter-Koop (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: towards 2010.* (pp. 454–461). Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and understanding mathematical modelling through Fermi-problems. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education.* (pp. 131–146). Dordrecht: Springer.

Pizarro, N. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria.* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Pla-Castells, M., y Ferrando, I. (2019). *Downscaling and upscaling Fermi problems.* Eleventh

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands.

Pla-Castells, M., y García-Fernández, I. (2020). Tasktimetracker: A tool for temporal analysis of the problem solving process. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*(1), 9-14.

Pla-Castells, M., Melchor, C., y Chaparro, G. (2021). MAD+ . Introducing misconceptions in the temporal analysis of the mathematical modelling process of a Fermi problem. *Education Sciences*, *11*(11), 747.

Pla-Castells, M., y Segura, C. (2019). Estrategias de resolución de problemas de Fermi en 3 dimensiones. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y A. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (p. 641). Valladolid: SEIEM.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En H. G. Steiner y B. Christiansen (Eds.), *New trends in mathematics teaching.* (pp. 232–248). Paris: United Nations Educational Scientific and Cultural Organization.

Polya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving (vol.1).* New York: John Wiley & Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares, col. Mathema.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* (pp. 61–94). Barcelona: Horsori / ICE.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, 275–294.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47–66.

Rittle-Johnson, B., y Star, J. R. (2009a). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 529–544.

Rittle-Johnson, B., y Star, J. R. (2009b). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 561–574.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., y Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, *101*(4), 836–852.

Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education*, *43*(1), 83–87.

Ross, J., y Ross, M. (1986). *Estimation and mental computation.* National Council of Teachers of Mathematics.

Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), 355–366.

Sanz, I., y Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 67–81). Salamanca: SEIEM.

Sanz, M. T., Gonzalez-Calero, J. A., Arnau, D., y Arevalillo-Herraez, M. (2019). Using reading comprehension to build a predictive model for the fourth-grade grade students' achievement when solving word problems in an intelligent tutoring system. *Revista De Educacion*(384), 37–64.

Schaap, S., Vos, P., y Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. En G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol 1.* (pp. 137–146). Dordrecht: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1982). Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 31–49.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schukajlow, S., Achmetli, K., y Rakoczy, K. (2019). Does constructing multiple solutions for real-world problems affect self-efficacy? *Educational Studies in Mathematics*, *100*(1), 43–60.

Schukajlow, S., Kaiser, G., y Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: A survey on the current state-of-the-art. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, *50*(1), 5–18.

Schukajlow, S., y Krug, A. (2012). Effects of treating multiple solutions while solving modelling problems on students'self-regulation, self-efficacy expectations and value. En T. Y. Sho (Ed.), *Proceedings of PME 36* (Vol. 4, pp. 59–66). Taipei.

Schukajlow, S., y Krug, A. (2013). Planning, monitoring and multiple solutions while solving modelling problems. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 177–184). Kiel: PME.

Schukajlow, S., y Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 497–533.

Schukajlow, S., Krug, A., y Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 393–417.

Schwab, J. J. (1964). Structure of the disciplines: Meaning and significances. En G. W. Ford y L. Pugno (Eds.), *The Structure of Knowledge and Curriculum.* Chicago: Rand McNally.

Segura, C., y Ferrando, I. (2021). Classification and analysis of pre-service teachers' errors in solving Fermi problems. *Education Sciences*, *11*(8), 451.

Segura, C., Ferrando, I., y Albarracín, L. (2021). Análisis de los factores de complejidad en planes de resolución individuales y resoluciones grupales de problemas de estimación de contexto real. *Quadrante*, *30*(1), 31–51.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, *41*(5), 619–625.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–23.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., y Strawhun, B. T. F. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 287–301.

Silver, E. A., y Thompson, A. G. (1984). Research perspectives on problem solving in elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 529–545.

Slavit, D., y Nelson, T. H. (2010). Collaborative teacher inquiry as a tool for building theory on the development and use of rich mathematical tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(3), 201–221.

Sol, L. (2009). *Anàlisi de les competències i habilitats en el treball de projectes matemàtics amb alumnes de 12-16 anys a una aula heterogènia.* (Tesis Doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182–197). Reston: NCTM.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 371–389). Reston: NCTM.

Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J., y Anderson, D. K. (1988). Cognitive flexibility theory: Advanced knowledge acquisition in ill-structured domains. En V. Patel (Ed.), *Proceedings of the 10th Annual Conference of the Cognitive Science Society.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The mathematics of estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange*, *40*(2), 205–223.

Sriraman, B., y Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, *38*(3), 247–254.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 404–411.

Star, J. R. (2007). Research commentary: A rejoinder foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 132–135.

Star, J. R., y Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, *41*(5), 557–567.

Star, J. R., y Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and instruction*, *18*(6), 565–579.

Star, J. R., y Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(3), 280–300.

Stasson, M. F., Kameda, T., Parks, C. D., Zimmerman, S. K., y Davis, J. H. (1991). Effects of assigned group consensus requirement on group problem solving and group members' learning. *Social Psychology Quarterly*, 25–35.

Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455–488.

Stein, M. K., y Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, *2*(1), 50–80.

Subramaniam, K. (2014). Prospective secondary mathematics teachers' pedagogical knowledge for teaching the estimation of length measurements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 177–198.

Swan, M., y Jones, O. E. (1980). Comparison of students' percepts of distance, weight, height, area, and temperature. *Science Education*, *64*(3), 297–307.

Szydlik, J. E., Szydlik, S. D., y Benson, S. R. (2003). Exploring changes in pre-service elementary teachers' mathematical beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(3), 253–279.

Taplin, M. (1994). Development of a model to enhance managerial strategies in problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *6*(1), 79–93.

Taplin, M. (1998). Preservice teachers' problem-solving processes. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(3), 59–75.

Thames, M. H. (2009). *Coordinating mathematical and pedagogical perspectives in practice-based and discipline-grounded approaches to studying mathematical knowledge for teaching (K-8)* (Tesis Doctoral no publicada). University of Michigan.

Thompson, A. G. (1985). Teachers' conceptions of mathematics and the teaching of problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 281–294). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 29–47.

Tirosh, D., y Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(1), 79–96.

Tirosh, D., Tirosh, C., Graeber, A., y Wilson, J. (1991). Computer-based intervention to correct preservice teachers' misconceptions about the operation of division. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *10*(2), 71–78.

Torregrosa, A., Albarracín, L., y Deulofeu, J. (2021). Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*, 89–111.

Treffers, A. (2012). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction— The Wiskobas project* (Vol. 3). Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En F. Lin (Ed.), *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education.* Taiwan: National Taiwan Normal University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713–717). Springer.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., y Bay-Williams, J. M. (2016). *Elementary and middle school mathematics.* USA: Pearson Education UK.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., y Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27–52.

Vasilyeva, M., Ludlow, L. H., Casey, B. M., y Onge, C. S. (2009). Examination of the psychometric properties of the measurement skills assessment. *Educational and Psychological Measurement*, *69*(1), 106–130.

Verschaffel, L. (2012). Los problemas aritméticos verbales y la modelización matemática. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática.* Barcelona: Graó.

Verschaffel, L., y De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 577–601.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and instruction*, *4*(4), 273–294.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse: Swets and Zietlinger Publishers.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., y Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), 335–359.

Verschaffel, L., Vicente, S., y Van Dooren, W. (2008). Usar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, *20*(4), 391–406.

Vorhölter, K., Kaiser, G., y Ferri, R. B. (2014). Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education. En Y. Li, E. A. Silver, y S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction* (pp. 21–36). Springer.

Vos, P. (2011). What is 'authentic' in the teaching and learning of mathematical modelling? En R. B. G. Kaiser W. Blum y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of* *mathematical modelling* (pp. 713–722). Springer.

Webb, L. F., y Sherrill, J. M. (1973). The effects of differing presentations of mathematical word problems upon the achievement of preservice elementary teachers. *School Science and Mathematics*(7), 559–565.

Webb, N. (1979). Content and context variables in problem tasks. En G. A. Goldin y C. E. McClintock (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving* (pp. 69–102). Filadelfia: The Franklin Institute Press.

Wess, R., Klock, H., Siller, H.-S., y Greefrath, G. (2021). *Measuring professional competence for the teaching of mathematical modelling: A test instrument.* Springer Nature.

Widjaja, W. (2013). The use of contextual problems to support mathematical learning. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *4*(2), 157–168.

Wilkie, K. J. (2016). Rise or resist: Exploring senior secondary students' reactions to challenging mathematics tasks incorporating multiple strategies. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(8), 2061–2083.

Wilson, P. S., Heid, M. K., Zbiek, R. M., y Wilson, J. W. (2010). Framework for mathematical proficiency for teaching. *Athens, GA: Center for Proficiency in Teaching Mathematics*.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). Sage Publications.

Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 237–243). Springer.

Zawojewski, J., Lesh, R., y English, L. (2003). A model and modelling perspective on the role of small group learning. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, teaching, and learning* (pp. 337–358). Lawrence Erlbaum Associates.

Índice alfabético

A. Anexo 1: Secuencia 1 para la experiencia A1

A.1. Secuencia 1 en el curso 2017/18

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar?

A.2. Secuencia 1 en el curso 2018/19

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar? Plantea, si es posible, dos estrategias de resolución distintas.

Estrategia 1:

Estrategia 2:

B. Anexo 2: Secuencia 1 para la experiencia A2

Nombres grupo: ____

Para cada uno de los siguientes problemas, explica detalladamente cuáles son los datos y las medidas que habéis considerado, cuál ha sido el proceso de resolución que habéis seguido y cuál es el resultado obtenido

Problema 1 ¿Cuánta gente se puede resguardar debajo del porche de entrada a la facultad si llueve?

Datos y medidas recogidos:

Proceso de resolución:

Resultado:

Nombres grupo: ____

Para cada uno de los siguientes problemas, explica detalladamente cuáles son los datos y las medidas que habéis considerado, cuál ha sido el proceso de resolución que habéis seguido y cuál es el resultado obtenido

Problema 2 ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de magisterio y el gimnasio?

Datos y medidas recogidos:

Proceso de resolución:

Resultado:

Nombres grupo: ____

Para cada uno de los siguientes problemas, explica detalladamente cuáles son los datos y las medidas que habéis considerado, cuál ha sido el proceso de resolución que habéis seguido y cuál es el resultado obtenido

Problema 3 ¿Cuántas briznas de césped hay en este espacio?

Datos y medidas recogidos:

Proceso de resolución:

Resultado:

Nombres grupo: ____

Para cada uno de los siguientes problemas, explica detalladamente cuáles son los datos y las medidas que habéis considerado, cuál ha sido el proceso de resolución que habéis seguido y cuál es el resultado obtenido

Problema 4 ¿Cuántos coches caben a este parking si no dejamos espacio para pasar? Utilizad, si es posible, dos estrategias de resolución distintas.

Datos y medidas recogidos:

Proceso de resolución 1:

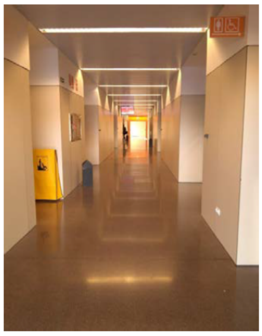
Resultado 1:

Proceso de resolución 2:

Resultado 2:

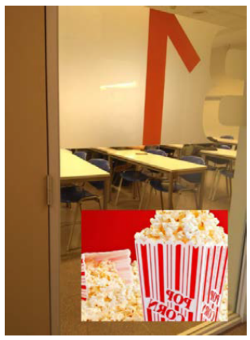
C. Anexo 3: Secuencia 2 para la investigación B

Problema 1. ¡Alerta, alguien ha robado las llaves de las aulas del aulario! Todos los alumnos están esperando en el pasillo para entrar a clase porque la cafetería está cerrada y llueve a cántaros. ¿Cuántos alumnos caben en el pasillo del aulario?

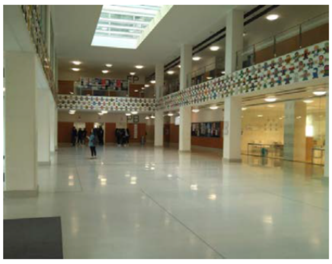


Problema 2. El decano ha decidido darle un toque de color al aulario y ha decidido poner unos andamios en el muro norte para que cada alumno de magisterio pinte como quiera uno de los ladrillos grises de la fachada, eso sí, cada alumno pintará sólo un ladrillo. ¿Cuántos alumnos podrán participar?

Problema 3. Sabéis bien que no está permitido comer en clase, pero hoy han proyectado una peli y, excepcionalmente, los alumnos han traído cajas de palomitas. Como era de esperar, el suelo del aula ha quedado cubierto de palomitas de maíz. ¿Cuántas caben?



Problema 4. Para celebrar la feria de abril, vamos a hacer una fiesta en el hall de la facultad. A falta de un buen escenario, usaremos mesas para cubrir el hall, y así alumnos (y profesores) podrán bailar como si estuvieran en un tablao flamenco. ¿Cuántas mesas necesitamos?



D. Anexo 4: Cuestionario post-experiencia

Nombre y apellidos: ____

Responde razonadamente a las siguientes preguntas sobre los problemas que resolviste individualmente y en grupo.

1. ¿Medir in situ ha cambiado tu opinión sobre cómo resolver de la mejor manera posible alguno de los problemas? Explica en qué te ha influido a ti o al grupo hacer mediciones y en qué problemas esto os ha inducido a proponer una estrategia distinta a la que habías presentado de forma individual.

2. ¿La estrategia de resolución presentada por tu grupo difiere de la que propusiste en tu resolución individual en alguno de los problemas? Explica en qué problemas has cambiado de estrategia de resolución, qué factores os han influido en ese cambio de decisión y cómo habéis tomado (y consensuado) en grupo esa decisión final.

3. Imagina que un alumno/a te ha dicho que ha resuelto el problema de la mejor forma posible. ¿Qué piensas que quiere decir con la mejor forma posible?

E. Anexo 5: Cuestionario de expertos

Enlace al cuestionario *google forms*:
`https://links.uv.es/Fkd80bU`

Cuestionario para determinar criterios de adaptabilidad en problemas contextualizados de estimación

Este cuestionario forma parte de una investigación sobre la flexibilidad y la adaptabilidad en la resolución de problemas contextualizados de estimación.

Los participantes en la primera parte del estudio (estudiantes del grado de Maestro/a en Educación Primaria) resolvieron una secuencia de cuatro problemas en los que debían obtener una estimación del número de elementos que caben en una superficie rectangular. Son problemas situados en un contexto familiar a los resolutores, del tipo: ¿Cuántos estudiantes caben en el hall de la Facultad? Además, se presentan sin datos (sólo se acompañan de una fotografía del espacio), por lo que requieren que el resolutor haga suposiciones sobre la situación del problema y estime cantidades relevantes para la obtención del resultado. Se ha observado que, pese a que se trata de cuatro problemas similares, los resolutores cambian de estrategia cuando se modifican algunas características del enunciado del problema.

Ahora queremos recoger los criterios de expertos para identificar si, desde su perspectiva, identifican como más adecuada una estrategia que otra en función de las características del enunciado.

En este cuestionario se presentará cada problema de la secuencia y se le pedirá que escoja y justifique cuál es la estrategia más adecuada para cada uno. Puede retroceder en el cuestionario si fuera necesario.

Muchas gracias por su colaboración.

Privacidad de los datos

a) Su participación en este estudio es voluntaria y anónima y puede decidir retirar su consentimiento antes de enviar el cuestionario, dejándolo sin respuesta, o simplemente no enviándolo; en este caso no utilizaremos tus datos;
b) Respondiendo a las preguntas y enviando el cuestionario, da su consentimiento a la utilización de los datos que se almacenarán de forma anónima;
c) En ningún momento se le pedirán datos de identificación personal;
d) Los datos que se deriven de la participación serán utilizado SOLO con fines de investigación, salvaguardado siempre el derecho a la intimidad y el anonimato;
e) Al final del estudio, los datos se harán públicos en una tesis doctoral y se publicarán de forma agregada;
f) Todos los datos relevantes para el estudio se recopilarán y almacenarán de forma anónima y de conformidad con la normativa vigente de protección de datos y el Reglamento General de Protección de Datos (UE) 2016/679 y siguiendo las recomendaciones éticas de la Declaración de Helsinki. Para más información: http://ir.uv.es/2tBayft.

Siguiente Borrar formulario

Datos profesionales

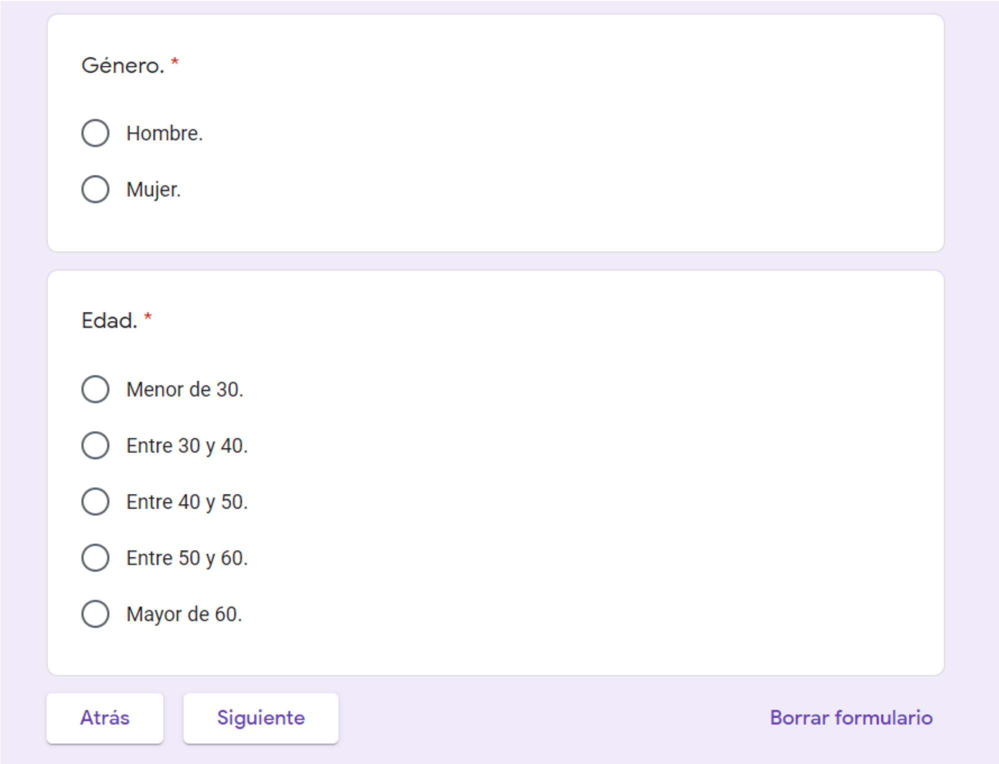
En esta sección le pediremos que nos dé algunos datos profesionales.

Formación. Indique todas las opciones que aplican en su situación: *

- [ ] Licenciatura/Grado en Matemáticas.
- [ ] Licenciatura/Grado en otras áreas (Física, Ingenierias, etc.).
- [ ] Doctorado en Matemáticas.
- [ ] Doctorado en Didáctica de la Matemática.
- [ ] Doctorado en Educación.

¿En qué niveles imparte docencia? Indique todas las opciones: *

- [ ] Asignaturas de Matemáticas y/o su didáctica en grados de Magisterio y/o en el máster de Secundaria.
- [ ] Asignaturas de Matemáticas en grados de Matemáticas, Físicas, Ingenierías, etc.
- [ ] Asignaturas de Matemáticas en ESO y Bachillerato.
- [ ] Actualmente no estoy impartiendo docencia.



Género. *

- Hombre.
- Mujer.

Edad. *

- Menor de 30.
- Entre 30 y 40.
- Entre 40 y 50.
- Entre 50 y 60.
- Mayor de 60.

Atrás

Siguiente

Borrar formulario

Problema 1. Día de lluvia.

Lea el siguiente problema y responda a las siguientes preguntas relativas a distintas estrategias de resolución.

P1. ¿Cuántos estudiantes pueden refugiarse bajo el porche de la facultad cuando llueve?

Nota aclaratoria

Aunque el problema se presenta sin datos, es un espacio familiar para el alumnado. En este caso, la fotografía puede no mostrar con claridad la situación del problema para quienes no conocen el espacio, así que aclararemos que el porche tiene una planta rectangular, de unos 15 metros de largo y 4 metros de ancho.

¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema? ∗

- ◯ Estrategia 1. Se propone contar los estudiantes que van accediendo al porche.
- ◯ Estrategia 2. Se estima el número de estudiantes que caben a lo largo del porche y se multiplica por el número de filas que cubren el ancho para obtener el número de estudiantes.
- ◯ Estrategia 3. Se calcula el área del porche y el área ocupada por un estudiante y se divide el área total entre el área de ocupada por un estudiante para obtener el número de estudiantes.
- ◯ Estrategia 4. Se determina una unidad de área dentro del porche y se estima cuántos estudiantes caben en ella. Se obtiene la densidad (nº estudiantes/unidad de área). Se calcula el área total del porche en unidades de área. Por último, se multiplica la densidad por el área total del porche para obtener el número de estudiantes.
- ◯ No hay una estrategia más adecuada que otra.

¿En cuál de los siguientes criterios generales se ha basado para escoger la estrategia más adecuada? (Se puede marcar más de una opción.) ∗

- ☐ La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más precisa.
- ☐ La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más rápida.
- ☐ La estrategia escogida se basa en unos procedimientos de cálculo más rigurosos/cuidadosos.
- ☐ Otro: ____________

Atrás | Siguiente | Borrar formulario

Problema 2. Baldosas.

Lea el siguiente problema y responda a las siguientes preguntas relativas a distintas estrategias de resolución.

P2. ¿Cuántas baldosas hay entre el edificio de la facultad y el gimnasio?

¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema? *

- ◯ Estrategia 1. Se propone contar las baldosas que cubren el espacio.
- ◯ Estrategia 2. Se estima el número de baldosas a lo largo de una fila y se multiplica por el número de filas que hay entre el edificio de la facultad y el gimnasio para obtener el número de baldosas.
- ◯ Estrategia 3. Se calculan el área entre el edificio y el gimnasio y el área de una baldosa , y se divide el área total entre el área de una baldosa para obtener el número de baldosas.
- ◯ Estrategia 4. Se determina una unidad de área en el espacio entre la Facultad y el gimnasio y se estima cuántas baldosas caben dentro de esa unidad de área. Se obtiene la densidad (nº de baldosas / unidad de área). Se calcula el área total del espacio en unidades de área. Por último, se multiplica la densidad por el área total del espacio entre la Facultad y el gimnasio para obtener el número de baldosas.
- ◯ No hay una estrategia más adecuada que otra.

¿En cuál de los siguientes criterios generales se ha basado para escoger la estrategia más adecuada? (Se puede marcar más de una opción.) *

- ☐ La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más precisa.
- ☐ La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más rápida.
- ☐ La estrategia escogida se basa en unos procedimientos de cálculo más rigurosos/cuidadosos.
- ☐ Otro: ____________________

Atrás | Siguiente | Borrar formulario

Problema 3. Briznas de hierba.

Lea el siguiente problema y responda a las siguientes preguntas relativas a distintas estrategias de resolución.

P3. ¿Cuántas briznas de hierba hay en esta parcela?

¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema? *

- ○ Estrategia 1. Se propone contar las briznas de hierba que hay en la parcela.
- ○ Estrategia 2. Se estima el número de briznas de hierba que forman una fila a lo largo de la parcela y se multiplica por el número de filas que cubren el ancho de la parcela para obtener el número de briznas.
- ○ Estrategia 3. Se calcula el área de la parcela, se calcula el área de una brizna de hierba como unidad base, y se divide el área total entre el área ocupada por una brizna para obtener el número de briznas.
- ○ Estrategia 4. Se determina una unidad de área en la parcela y se estima cuántas briznas caben dentro de esa unidad de área. Se obtiene la densidad (nº de briznas/unidad de área). Se calcula el área de la parcela en unidades de área y luego se multiplica la densidad por el área total de la parcela para obtener el número de briznas.
- ○ No hay una estrategia más adecuada que otra.

¿En cuál de los siguientes criterios generales se ha basado para escoger la estrategia más adecuada? (Se puede marcar más de una opción.) *

- ☐ La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más precisa.
- ☐ La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más rápida.
- ☐ La estrategia escogida se basa en unos procedimientos de cálculo más rigurosos/cuidadosos.
- ☐ Otro: ____________________

Atrás | Siguiente | Borrar formulario

Problema 4. Coches.

Lea el siguiente problema y responda a las siguientes preguntas relativas a distintas estrategias de resolución.

P4. ¿Cuántos coches llenan el parking de la facultad sin dejar espacio libre?

Nota aclaratoria

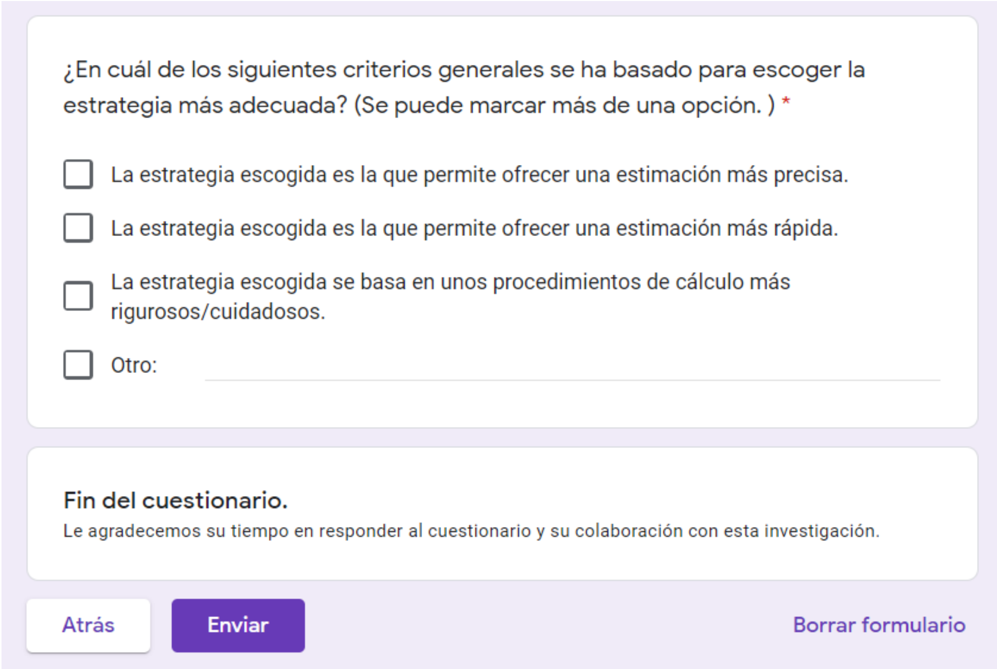
En este caso, se trata de completar el parking de la facultad cubriendo todas las zonas, tanto las plazas de aparcamiento como las de circulación de los coches. El parking es exterior y de planta rectangular.

Nota aclaratoria

En este caso, se trata de completar el parking de la facultad cubriendo todas las zonas, tanto las plazas de aparcamiento como las de circulación de los coches. El parking es exterior y de planta rectangular.

¿Cuál de las siguientes estrategias es la más adecuada para este problema? *

- ◯ Estrategia 1. Se propone contar los coches que llenan el parking.
- ◯ Estrategia 2. Se estima el número de coches que caben en una fila a lo largo del parking y se multiplica por el número de filas de coches que cubren el espacio obtener el número de coches.
- ◯ Estrategia 3. Se calcula el área del parking, se calcula el área ocupada por un coche, y se divide el área total entre el área ocupada por un coche para obtener el número de coches.
- ◯ Estrategia 4. Se determina una unidad de área en el parking y se estima cuántos coches caben dentro de esa unidad de área. Se obtiene la densidad (nº de coches/unidad de área). Se calcula el área del parking en unidades de área. Por último, se multiplica por el área total del parking para obtener el número de coches.
- ◯ No hay estrategia más adecuada que otra.



¿En cuál de los siguientes criterios generales se ha basado para escoger la estrategia más adecuada? (Se puede marcar más de una opción.) *

- [ ] La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más precisa.
- [ ] La estrategia escogida es la que permite ofrecer una estimación más rápida.
- [ ] La estrategia escogida se basa en unos procedimientos de cálculo más rigurosos/cuidadosos.
- [ ] Otro:

Fin del cuestionario.

Le agradecemos su tiempo en responder al cuestionario y su colaboración con esta investigación.

Atrás Enviar Borrar formulario