Fenomenología didáctica del árbol de Stern-Brocot

VLADIMIR GARCÍA MORALES

Valencia, 26-7-2018

Resumen: El objetivo de este trabajo es presentar la fenomenología matemática y didáctica de la fracción mediante y del árbol de fracciones (árbol de Stern-Brocot), mostrando su carácter elemental, su historia y su interés y utilidad potencial para la Enseñanza Secundaria. Se muestra, asímismo, cómo el árbol de fracciones proporciona una construcción didáctica de los números racionales, abriendo nuevas perspectivas para la enseñanza de los mismos en el aula.

Palabras clave: Fracción mediante, Árbol de Stern-Brocot, Series de Farey, Fracciones continuas, Algoritmo de Euclides, Suma de los niños, Números racionales, Fenomenología, Didáctica de las matemáticas

Códigos Unesco: 5803.02 (Formación de profesores), 12 (Matemáticas) y 1299 (Didáctica de las Matemáticas)

Abstract: The aim of this study is to uncover the mathematical and didactical phenomenology of the mediant and the tree of fractions (Stern-Brocot tree), showing their elementary and fundamental character, their historical roots and their interest and potential usefulness for Secondary Education. It is also shown that the tree of fractions provides a didactical construction of the rational numbers, opening new perspectives for the teaching of this concept in the classroom.

Keywords: Mediant, Stern-Brocot tree, Farey series, Continued fraction, Euclidean algorithm, child's addition, Rational numbers, Phenomenology, Mathematics education

Unesco codes: 5803.02 (Teacher training), 12 (Mathematics) and 1299 (Mathematics Education)

Índice

1. Introducción

En la educación elemental las fracciones conducen a los alumnos a la constitución de un objeto mental nuevo que les llevará a la apropiación del concepto de número racional. Las fracciones presentan una complejidad considerable, relacionada con sus diferentes interpretaciones, usos, subconstructos o aspectos (Rubí, 2017). Es en estos sentidos que Freudenthal (1983) las llama "recurso fenomenológico del número racional".

El presente trabajo ofrece una contribución original a la enseñanza de los números racionales mediante nuevas herramientas: la *fracción mediante* y el *árbol de fracciones*, también denominado *árbol de Stern-Brocot* (Graham et al., 1994). Tomados de la investigación matemática actual, tanto la fracción mediante como el árbol de fracciones están ausentes del currículum de enseñanza secundaria. Este trabajo afronta el reto de mostrar su utilidad didáctica. Para ello, se ofrece un análisis fenomenológico de estos conceptos, exponiendo su fenomenología pura, histórica, didáctica y genética.

Este trabajo está motivado desde el aula, pues muchos alumnos, al sumar dos fracciones, ponen en juego por error a la fracción mediante (Alsina y Burgués, 2007), concepto íntimamente relacionado con el árbol de fracciones. En el capítulo 2 se plantea este problema y una serie de preguntas que motivan nuestra investigación. En el capítulo 3 se detallan los objetivos del trabajo.

En el capítulo 4 se presentan algunas de las nociones más importantes de la fenomenología de Husserl (1949), en la interpretación de Sokolowski (2012), así como de la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983). Estas contribuciones sirven para introducir y realizar nuestros análisis fenomenológicos de la fracción mediante y del árbol de fracciones con los que daremos respuesta a las preguntas de investigación. Mostramos entonces la relación directa de estos conceptos con el currículum de enseñanza secundaria a través de posibles aplicaciones a los contenidos del currículum y del diseño de actividades apropiadas. Aquí, los fenómenos organizados por el árbol de fracciones se consideran respecto al desarrollo cognitivo de los alumnos.

El capítulo 5 es la parte empírica de este trabajo y en ella discutimos una investigación sobre ordenación de fracciones realizada sobre alumnos de diferentes niveles del IES Luis Vives de Valencia a través de un mismo cuestionario con dos actividades diseñadas a partir del árbol de fracciones.

En las conclusiones se resumen los resultados más relevantes de este trabajo y se responden las preguntas de la investigación.

2. Planteamiento del problema y preguntas de investigación

> But teaching ideals to students who have never seen a hypocycloid is as ridiculous as teaching addition of fractions to children who have never cut (at least mentally) a cake or an apple into equal parts. No wonder that the children will prefer to add a numerator to a numerator and a denominator to a denominator.
>
> Vladimir I. Arnold (1998)

Mientras que la multiplicación de dos fracciones a/b y c/d es muy fácil de recordar y realizar (se multiplican numeradores y denominadores)

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{1}$$

la suma de fracciones presenta una complejidad inesperada para los alumnos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \tag{2}$$

Es por ello que, ante el problema de sumar dos fracciones, alumnos de todos los tiempos han realizado (o se han visto muy tentados de realizar) la siguiente operación:

$$\frac{a}{b} \& \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} \tag{3}$$

El símbolo $\&$, cuya utilización se justificará en este trabajo, denota lo que aquí llamaremos *operador compositor*. La reacción habitual de un profesor mínimamente competente será la de llamar la atención al alumno ante esto como un error que es necesario evitar. Llamaremos a la fracción $(a+c)/(b+d)$ *fracción mediante* (o, simplemente, *la mediante*) de las fracciones a/b y c/d.

Aunque *es un error* llamar a la expresión (3) la suma de las fracciones a/b y c/d, debido a la manifiesta naturalidad de la expresión (3) comparada con la manifiesta complejidad de la expresión (2), estamos autorizados a investigar su origen y a buscar soluciones didácticas que ayuden a impedir la aparición de este error o a darle una respuesta significativa apropiada. En nuestra opinión, la frecuencia con la que este error ocurre y el nivel tan elemental al que lo hace, nos pone bajo la pista de que estamos ante algo interesante que puede tener consecuencias didácticas profundas en la enseñanza de los números racionales. La investigación estará orientada a dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. *¿Qué significan la fracción mediante y la "operación" $\&$? ¿Cuál es el estatus fenomenológico de la fracción mediante y qué fenómenos organiza?*
2. *¿Bajo qué objetos matemáticos es organizada la fracción mediante?*
3. *¿En qué formas actúa el operador $\&$?*
4. *¿Qué relación hay entre el conjunto de las fracciones mediantes y los racionales?*
5. *¿Cuál ha sido la historia de las fracciones mediantes y de los objetos matemáticos que las organizan? ¿Qué problemas han motivado su aparición a lo largo de la historia?*
6. *¿Cuándo y cómo pueden introducirse en la enseñanza?*
7. *¿Qué aspectos del currículum actual pueden enriquecerse por el uso de la fracción mediante y qué actividades sugieren?*
8. *¿Qué actividades nuevas pueden diseñarse? ¿Cómo incorporarlas al currículum?*

Aunque, las preguntas de investigación no hacen referencia explícita al *árbol de fracciones*, éste constituye el "objeto matemático que organiza las fracciones mediantes". Utilizaremos este árbol, al que llamaremos, indistintamente, árbol de fracciones o *árbol de Stern-Brocot*, una vez introducido en la sección 4.4.1.2. *El árbol de fracciones* es el concepto central de este trabajo pero para llegar a él es necesario investigar en profundidad la fracción mediante.

En el espacio de este trabajo no podemos pretender ser exhaustivos en toda la extensión que requiere responder a algunas preguntas (por ejemplo, la quinta) pero se presentarán en detalle los aspectos esenciales.

3. Objetivos

Las preguntas de investigación anteriores sugieren una serie de objetivos que han de alcanzarse para estar en condición de responderlas satisfactoriamente. Detallamos en la siguiente tabla los objetivos, indicando la sección donde se abordan, así como la(s) pregunta(s) de investigación relacionadas.

Secciones	Objetivo	Preguntas
4.1-4.3	Exponer las bases de la fenomenología de Husserl-Sokolowski y la de Freudenthal relacionándolas entre sí y presentando las nociones que serán importantes en nuestros análisis	Todas
4.4.1.1	Establecer una fenomenología pura de la fracción mediante	1
4.4.1.2	Mostrar que el árbol de fracciones es el objeto matemático que organiza las fracciones mediantes y establecer una fenomenología pura del mismo	2-4
4.4.2	Establecer una fenomenología histórica de la fracción mediante y del árbol de fracciones	5
4.4.3	Establecer una fenomenología didáctica de la fracción mediante y del árbol de fracciones presentando una construcción didáctica original de los números racionales	3, 4, 6
4.4.4	Realizar un análisis del currículum de enseñanza secundaria indicando los puntos donde la fracción mediante y los árboles de fracciones pueden resultar de utilidad y enriquecerlo	7
4.4.4	Presentar aplicaciones de los árboles de fracciones dentro del dominio de las matemáticas que pueden resultar de utilidad y enriquecer el currículum	8
5	Presentar los resultados de una investigación empírica sobre la evolución de la noción de orden de los números racionales en alumnos de enseñanza secundaria utilizando la fracción mediante	6-8

4. Marco teórico

En este capítulo abordaremos la tarea de exponer algunas de las nociones más importantes de la fenomenología moderna cuyas bases están expuestas en la obra *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica* (Husserl, 1949). Puesto que la lectura de Husserl es muy difícil, nos vemos asistidos en ella por la interpretación que de ella hace Sokolowski (2012). Después exponemos el método de Freudenthal (1983) e indicamos cómo puede verse enriquecido bajo la luz de la fenomenología de Husserl-Sokolowski. Esto nos conduce a una reconsideración de la fenomenología didáctica de las fracciones, donde identificamos primero la región fenomenológica que corresponde a la fracción mediante para descubrir el árbol de fracciones como el medio que las organiza. El capítulo culmina con la fenomenología pura (sección 4.4.1), histórica (sección 4.4.2), didáctica (sección 4.4.3) y genética (sección 4.4.4) de estos conceptos.

Nuestro análisis sigue, principalmente, el método de Freudenthal (1983) descrito por Filloy et al. (2008) y Puig (1997), si bien se nutre también de nociones de la fenomenología de Husserl (1949) que, con ayuda del trabajo clarificador de Sokolowski (2012), ponemos en diálogo fructífero con Freudenthal. Con ello, nos apropiamos de nociones que consideramos valiosas –ausentes en (Freudenthal, 1983)– y que utilizaremos en nuestros análisis.

4.1. La fenomenología de Husserl-Sokolowski

En la época actual, cuando se habla de fenomenología se tiende a pensar en la fenomenología de Husserl –considerado el padre de la fenomenología moderna– y de sus discípulos. En esta línea, en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* puede hallarse la siguiente definición:

> La fenomenología es el estudio de las estructuras de la conciencia tal y como son experimentadas desde el punto de vista de la primera persona. (Smith, 2013)

La idea central de la fenomenología de Husserl es que todo acto de conciencia, toda experiencia consciente, es *intencional*: es esencialmente “conciencia de” (“experiencia de”) algo. Esto es lo que se conoce como *doctrina de la intencionalidad*: todo acto de conciencia está dirigido hacia un objeto de algún tipo; la estructura central de la experiencia es su intencionalidad. Cuando miramos, imaginamos, recordamos, pensamos o juzgamos estos actos están todos correlacionados con un algo, con un objeto intencionado que es aquello que miramos, imaginamos, recordamos, pensamos o juzgamos (independientemente, pues, de que este objeto sea perceptible a través de los sentidos o un constructo mental). Es importante notar aquí que *intencionar* o *intención* no deben confundirse como la voluntad o propósito que tenemos en mente al actuar (que son los usos habituales de esta palabra). El uso fenomenológico de las palabras *intención*, *intencionar* o *intencionalidad* se aplica a la teoría del conocimiento y no a la acción humana: estas palabras hacen referencia a intenciones mentales cognoscitivas y no prácticas (Sokolowski, 2012). Intencionalidad proviene del latín *intendere* ("tender hacia") y, fenomenológicamente, hace referencia al objeto hacia el que tiende la conciencia. Consideremos, por ejemplo, las siguientes oraciones en primera persona:

> Yo contemplo las gaviotas en el puerto.
> Yo recuerdo un poema de Alberti al ver las gaviotas en el puerto.
> Yo pienso los números racionales como un camino hacia los números reales.

El objeto intencionado por el contemplar, el recordar o el pensar coincide con el complemento directo de cada oración respectiva, "las gaviotas" en la primera oración, "un poema de Alberti" en la segunda y "los números racionales" en la tercera. Husserl introduce el termino *noesis* para referirse al acto de la conciencia (la "contemplación", el "recuerdo" y el "pensamiento" en estos casos) y *noema* para referirse al objeto intencionado ("las gaviotas", "un poema de Alberti" y "los números racionales") tal y como es experimentado por el sujeto concreto (el yo) en el instante y contexto específicos de su experiencia. *Noesis* y *noema* están, por tanto, correlacionados fenomenológicamente por la doctrina de la intencionalidad a través del *acto noético* (el contemplar, el recordar, el pensar). Aunque el concepto de noesis no ofrece controversia, no ocurre así con el de noema, donde diferentes fenomenólogos han hecho diferentes interpretaciones de Husserl. Estamos siguiendo aquí la de Sokolowski (2012).

Un *fenómeno* puede definirse como todo aquello que se nos aparece en la experiencia, como todo aquello que es susceptible en convertirse, mediante el acto noético, en objeto de la experiencia, en *noema* (Smith, 2013). Puesto que las modalidades de los actos de conciencia son diversas, así lo son los fenómenos, y estos no necesariamente tienen su origen en el mundo sensible: podemos tener una experiencia de lo abstracto a través, por ejemplo, de la experiencia estética que nos proporciona una ecuación. Los fenómenos son las cosas tal y como se nos aparecen en nuestra experiencia subjetiva como opuestas a las cosas independientes de esa experiencia. Con fenómenos nos referimos a objetos percibidos en cuanto opuestos a los que originan nuestra percepción; a objetos recordados en cuanto opuestos a objetos registrados por un dispositivo mecánico; a objetos matemáticos como triángulos y conjuntos en cuanto opuestos a las cosas vivas; a objetos pensados en cuanto opuestos a objetos pensados previamente y que son organizados por los nuevos, etc. Todos estos fenómenos pueden explorarse cuando nos damos cuenta de que la conciencia es conciencia *de* algo.

La doctrina de la intencionalidad unifica aspectos privados y externos de nuestra conciencia e implica que ella no constituye un mundo aislado. Junto al carácter privado, nuestra mente tiene un carácter público, y los dos aspectos de la mente constituyen momentos que no pueden escindirse: el mundo se nos manifiesta, las cosas del mundo se nos descubren, y nosotros, por nuestra parte, explicamos o mostramos, tanto a nosotros mismos como a los demás, la forma de ser de las cosas.

Encontramos en (Sokolowski, 2012) un ejemplo con sustancia matemática que permite ilustrar el concepto de intencionalidad. Consideremos la percepción de un cubo. Podemos ver el cubo desde un cierto ángulo o perspectiva pero no desde todos al mismo tiempo. Mi percepción del cubo es parcial: sólo una parte suya se me da directamente en cada momento. Sin embargo, no es cierto que sólo pueda experimentar los lados del cubo directamente visibles en mi presente. Conforme veo unos lados, *intenciono* los que están ocultos (mi conciencia *tiende a* completarlos) y "veo" más de lo que factualmente percibe el ojo. Lo visible está como rodeado por un halo de lo potencialmente visible pero factualmente ausente de mi percepción. Debido a la intencionalidad de mi conciencia, *los lados ausentes también forman parte de mi experiencia*. Lo experimentado a través de la vista es una combinación de lo presente y de lo ausente. Subjetivamente, mi percepción, es una combinación de intenciones llenas y vacías. Si giro el cubo, unas intenciones se llenan y otras se vacían.

Vemos en este ejemplo tres capas diferenciadas donde se entremezclan elementos objetivos y subjetivos: 1) los *lados* del cubo (6 en total), sólo algunos de ellos visibles; 2) los diferentes *aspectos* en que estas estructuras se nos presentan: un lado tiene la apariencia de un cuadrado visto de frente pero parece un trapezoide desde otros ángulos; 3) los diferentes *perfiles* de los aspectos, o visiones momentáneas y específicas del aspecto en que se nos presenta el cubo en el tiempo. En esta multiplicidad de capas *experimento el cubo como un todo*, en su *identidad*, dada *continuamente* en y a través de las multiplicidades de estas capas de apariencia. Pero la identidad del cubo pertenece a una dimensión distinta que la de lados, aspectos y perfiles y no es meramente la suma de ellos. Así, cuando percibimos un objeto no solamente tenemos ante nosotros un flujo de perfiles, una serie de impresiones; en y a través de todo ello tenemos uno y el mismo objeto dado, y la identidad del objeto es intencionada y es dada. Observemos también que esta identidad misma puede ser intencionada tanto en ausencia como en presencia, y que, por supuesto, podernos equivocarnos acerca de ella (Sokolowski, 2012).

El ejemplo del cubo muestra cómo una serie de fenómenos (capas de apariencia) se organizan en un objeto/medio (el cubo) al que tienen como correlato. También exhibe las tres estructuras formales más importantes de la fenomenología (Sokolowski, 2012):

- *Partes y todos*: Los *todos* constan de *partes* de dos tipos: *piezas* y *momentos*. Las piezas son partes que pueden subsistir separadas del todo (como los pétalos de una flor); los momentos son partes inseparables. Así, perfiles, aspectos y lados, o la identidad del cubo mismo, son todos momentos unos de otros en la presentación del cubo. Los lados no pueden presentarse más que a través de aspectos, que a su vez sólo se presentan a través de perfiles. El cubo mismo, como identidad, no puede presentarse perceptivamente sino a través de multiplicidades de lados, aspectos y perfiles.

- *Identidad en multiplicidades*: el cubo, como identidad, es distinto de sus lados, aspectos y perfiles y, sin embargo, se presenta a través de todos ellos.

- *Presencia y ausencia*: En la percepción del cubo aparecen *intenciones vacías* y *llenas*. Una intención vacía apunta a algo que no está ahí inmediatamente para el que intenciona; una llena apunta a algo que sí que está ahí presente.

Un análisis fenomenológico será tanto más complejo como ricas sean las multiplicidades de partes y todos fenoménicos y las identidades que conforman, así como las relaciones de presencia/ausencia involucradas en el intencionar. Siempre que queramos explorar un tema fenomenológicamente, debemos preguntarnos cuáles son las partes y los todos, las identidades y las multiplicidades, y las mezclas de ausencias y presencias activadas en el tema en cuestión.

Con miras a la aplicación de las estructuras formales arriba expuestas en didáctica de las matemáticas, podemos realizar la siguiente conjetura que llamaremos *conjetura de la fenomenología didáctica*:

> *Una forma de presentar un objeto matemático es tanto más didáctica cuanto mayor es la fuerza en la experiencia con que se hace manifiesta la identidad del objeto a través de multiplicidades. Específicamente:*

- *cuanto mayor es el número de piezas comparado con el de momentos;*
- *cuanto mayor es el número de intencionalidades llenas comparado con el de vacías.*

Esta conjetura nos guiará en nuestros análisis fenomenológicos, en el paso de un análisis fenomenológico puro a uno didáctico.

Todo análisis fenomenológico parte de una actitud denominada *actitud fenomenológica* que contrasta con la *actitud natural* que es la que tenemos por defecto. La actitud natural es el enfoque que tenemos inmersos en la mundanidad y con el que intencionamos cosas, situaciones hechos y cualesquiera otros tipos de objetos del mundo. Esta actitud natural es también la de cuando nos dedicamos a las ciencias naturales. El mundo *también* contiene entidades matemáticas como polígonos, conjuntos cerrados y abiertos, números racionales e irracionales. Las matemáticas requieren de tipos especiales de intencionalidades, pero a pesar de ello se presentan ahí dentro del mundo, aun cuando existan para la experiencia subjetiva de una manera distinta (en una modalidad distinta) a la del mar y las gaviotas.

La forma en que aceptamos todo lo mundano como dado, dentro de la actitud natural, está basado en *creencias* (más o menos fundadas) sobre lo dado. Cuando adoptamos la *actitud fenomenológica*, sin embargo, *tenemos el enfoque que proporciona la reflexión sobre la actitud natural y sobre todas las intencionalidades que tenemos en ella* y suspendemos nuestras creencias y nuestras tesis sobre lo dado (no es que dudemos de ellas, pues el dudar entra dentro de la actitud natural, sino que las desconectamos, las ponemos entre paréntesis). Esta es una actitud filosófica.

El paso de la actitud natural a la fenomenológica se produce mediante lo que se conoce como el proceso de *reducción fenomenológica* o *epoché* en la que el mundo queda puesto entre paréntesis y nuestros juicios y conocimientos sobre él quedan en suspenso, desconectados. Esto no significa que dudemos de nuestros conocimientos previos adquiridos sobre un tema o de las tesis que aceptábamos previamente. Tampoco significa que cuestionamos el mundo en un sentido escéptico o cartesiano como algo ilusorio ni una mera idea ni cualquier otra clase de impresión meramente subjetiva. En lugar de ello, *lo consideramos ahora precisamente como es intencionado por una intencionalidad en la actitud natural* (Sokolowski, 2012): un objeto percibido, lo examinamos como percibido; uno recordado lo examinamos como recordado; una entidad matemática la consideramos como correlacionada con una intención matemática. Husserl describe, al menos, dos caminos para lograr la reducción fenomenológica, la *vía ontológica* y la *cartesiana*. En el contexto de didáctica de las matemáticas, el que aquí nos interesa es el primero.

La vía ontológica comienza reconociendo que al explorar un dominio científicamente atesoramos conocimientos en forma de un sistema de proposiciones sobre las cosas en cuestión. Supongamos, por ejemplo, que hemos alcanzado un entendimiento profundo de biología, astrofísica o matemáticas. No importa cómo de profundo y completo pueda ser nuestro conocimiento de estos temas para sospechar que *puede que no hayamos explorado en absoluto los correlatos subjetivos de las verdades que utilizamos*. El aspecto objetivo puede ser conocido completamente, pero podemos haber despreciado o ignorar los logros subjetivos correlacionados con la adquisición de ese conocimiento objetivo: las intencionalidades que presentan las cosas que estudiamos, las maneras de verificación apropiadas a los objetos, los métodos seguidos, las formas de corrección y confirmación intersubjetivas, etc.

La fenomenología no es una mera clasificación de significados sino algo mucho más profundo. En juego está el apropiarse en última instancia de una *intuición eidética* que es el tipo de intencionalidad que revela los rasgos esenciales de las cosas, rasgos de los que las cosas no podrían prescindir. Esto conlleva una segunda reducción que hace el fenomenólogo, la *reducción eidética* donde lo contingente y accidental es puesto entre paréntesis, produciéndose ahora una concentración del fenomenólogo en lo esencial. Así, la evidencia lograda, la *evidencia eidética* no alcanza sólo el rango de verdad factual sino de verdad esencial.

4.2. La fenomenología de Freudenthal

Una búsqueda exhaustiva de los nombres 'Husserl' y 'Heidegger' en la obra educativa de Freudenthal produce sólo el resultado negativo contenido al comienzo del capítulo 2 ("El método") de *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (Freudenthal, 1983), donde Freudenthal niega explícitamente una relación de su fenomenología didáctica con las fenomenologías de Husserl o Heidegger. En una nota al pie se pregunta, incluso, si *es por accidente que -incluyendo a Habermas- los productores más pretenciosos de cháchara ininteligible de la filosofía alemana comiencen todos por H* (Freudenthal (1983), p. 28).

Aunque esta antipatía hacia el trabajo de los filósofos a los que está asociada la fenomenología moderna pueda parecer legítima y comprensible, la fenomenología de Freudenthal paga un alto precio por ella, en nuestra opinión. La importante noción de intencionalidad de la conciencia está ausente en el trabajo de Freudenthal (aunque está siempre en acción, profusamente, en todos sus análisis fenomenológicos). En nuestra opinión, ser (y hacer al lector) consciente de esta noción y de las partes/todos, presencias/ausencias y de la identidad a través de las multiplicidades, explicitándolas, puede conducir a una apropiación más eficiente del método de Freudenthal por parte del docente. Aunque sea necesario ver el método en acción para entenderlo, la conceptualización apropiada de sus rasgos más importantes pueden permitir transponerlo a situaciones nuevas de manera fructífera.

Entre las escasas nociones que Freudenthal introduce para explicar su método están las de *noumeno* y *fenómeno*. Freudenthal parte de la oposición entre estos dos conceptos, manifiesta su duda de que realmente haya una oposición entre ellos, e identifica el *noumeno* con el objeto matemático cuyo análisis fenomenológico se presenta y los fenómenos como las manifestaciones que el *noumeno* organiza. Así, conceptos, estructuras e ideas matemáticas permiten organizar fenómenos "tanto de las matemáticas como de la realidad" (Freudenthal, 1983).

Aunque Freudenthal no define exactamente qué es lo que entiende por fenómenos, lo que sostiene sobre ellos y sobre su organización es consistente con la definición que hemos dado en la sección anterior, en el espíritu de Husserl-Sokolowski. Freudenthal habla de que, por ejemplo, "por medio de las figuras geométricas uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos" (Freudenthal, 1983). La doctrina de la intencionalidad de la conciencia y la identidad a través de multiplicidades permiten entender por qué, ya que el medio de organización de Freudenthal no es más que una identidad aprehendida en y a través de las multiplicidades de partes-todos e intenciones llenas y vacías y es esta identidad, este invariante, lo que constituye la fundación del objeto matemático. "Uno tiene éxito" al establecer esta identidad (el *noumeno* de Freudenthal) porque observa el despliegue de intencionalidades llenas y vacías desde múltiples realizaciones concretas que proporcionan una perspectiva parcial (como mirar el cubo desde diferentes ángulos en el ejemplo de la sección anterior) hasta llegar a la identidad de la estructura (el cubo, la longitud, los conjuntos, el número racional, etc.) en y a través de las multiplicidades.

Aunque hablar de *noumena* y fenómenos pueda sugerir una filiación con la metafísica kantiana, esto nos parece equívoco y pensamos que es dentro de la fenomenología de Husserl donde mejor se ubica el trabajo de Freudenthal (a pesar de la negativa de Freudenthal). Su conexión con Kant no es clara ya que el noumenon aparece en Freudenthal como fenómeno dentro de estructuras matemáticas superiores y, por tanto, fenómeno y *noumeno* no se hallan en posición antitética.

Los conceptos de *noumeno* y fenómeno aparecen también en la definición de escepticismo que da el filósofo Sextus Empiricus (ca. 160 - ca. 210) en su obra *Esbozos pirrónicos*, introduciendo los *phainomena* (fenómenos) como representaciones sensibles −como algo que aparece− y los *noumena* como concepciones inteligibles. El fenómeno de Freudenthal no es, sin embargo, necesariamente un objeto de la percepción ya que los propios objetos de las matemáticas pueden convertirse en fenómenos en un nivel más alto de abstracción: como se ha dicho, lo que es un *noumeno* en un nivel es un fenómeno en el siguiente. *Noumena* y fenómenos no están tampoco, por tanto, en una oposición del tipo de la de Sextus Empiricus. Ni el noumeno está separado de la experiencia (podemos tener experiencias de objetos matemáticos), ni el fenómeno está separado de la posibilidad de comportarse como un noumeno en un nivel más bajo de abstracción (Puig, 1997).

El concepto de *noumenon* en Freudenthal está, por tanto, vaciado del sentido filosófico que le otorga la tradición y ha de entenderse a través del uso muy particular que le da Freudenthal en su libro. Para Freudenthal la fenomenología de un objeto matemático (concepto, estructura o idea) significa describir el *noumenon* en su relación con los fenómenos para los cuales es medio de organización, indicando cuáles son estos fenómenos y a cuáles puede ser extendido así como la forma en que actúa sobre ellos y el poder de que nos dota Freudenthal (1983). Aunque la fenomenología de Freudenthal se aclara brillantemente a través de los ejemplos de análisis fenomenológicos presentados en su libro, la conceptualización que Freudenthal hace de su propio método a través de su definición de fenomenología nos parece oscura por el empleo de este término.

Con las nociones presentadas en la sección 4.1, podemos ver que la correlación existente entre fenómenos y *noumenon* en Freudenthal corresponde, simplemente, a la correlación que establece el acto noético entre fenómenos e identidad a través de multiplicidades. Podemos decir, con Freudenthal, que esta identidad organiza los fenómenos. Así la definición general de fenomenología dada al principio de la sección 4.1 puede adaptarse para dar cuenta de los análisis fenomenológicos de Freudenthal:

> *La fenomenología de un objeto matemático es el estudio de las estructuras de la conciencia que ese objeto organiza, tal y como son experimentadas en primera persona. A partir de intencionalidades que surgen de la experiencia del propio objeto matemático, el análisis fenomenológico sugiere también modos en que éste entra como estructura de la conciencia en el análisis de otros objetos más avanzados.*

Nuestra definición evita el concepto de *noumenon* e incluye la especificación *tal y como son expe-*

rimentadas en primera persona porque el análisis fenomenológico del objeto matemático pretende acercarse a la experiencia subjetiva del objeto, a la constitución de objetos mentales y a su consiguiente apropiación por parte del sujeto. La reducción fenomenológica puede verse aquí como el proceso por el que el fenomenólogo de las matemáticas, siguiendo la vía ontológica descrita en la Sección 4.1 deja en suspenso su conocimiento matemático previo sobre el objeto para experimentar en primera persona un contacto primitivo con él, susceptible de ser utilizado de forma didáctica.

La meta del análisis fenomenológico de Freudenthal es servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas sin pretensiones de llegar a una explicación de la naturaleza de las matemáticas (Puig, 1997). Dependiendo del carácter de los fenómenos que se subrayan en torno al objeto matemático, el análisis fenomenológico es descompuesto por Freudenthal en las siguientes fases consecutivas (Puig, 1997):

- *fenomenología pura:* fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado en el momento (mundo) actual y considerando su uso actual;
- *fenomenología histórica*: fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos;
- *fenomenología didáctica*: fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza;
- *fenomenología genética*: fenómenos tomados respecto al desarrollo cognitivo de los alumnos.

4.3. Fenomenología didáctica de las fracciones y los números racionales

En la exposición de la fenomenología didáctica de las fracciones y los números racionales en Freudenthal pueden distinguirse diferentes momentos que describimos desde la perspectiva expuesta en la sección 4.1:

1. *Las fracciones son consideradas como objetos que organizan una serie de fenómenos en el lenguaje cotidiano.* Así, “yo” veo una fracción como un *instrumento*. *Con* una fracción:

    describo algo, comparo algo, divido algo, distribuyo algo, mido algo y en estos casos la fracción, el instrumento, es como un operador, como un *descriptor*, *comparador*, *fracturador*, *particionador* o *mensurador*, respectivamente. Dentro del comparar, podemos considerar el escalar algo manteniendo proporciones, mediante un operador *transformador*.

2. *Los aspectos de los actos noéticos (describir, comparar, dividir, distribuir, medir) son desplegados*. La fracción se revela como el medio que organiza una multiplicidad de experiencias (la identidad a través de todas las multiplicidades desplegadas). Sintetizamos los resultados en la siguiente tabla (véase Rubí (2017) para más detalles)

Aspectos	Objetos (noemas)	Ejemplos
Descriptor (Con la fracción describo:)	una cantidad o valor de magnitud a través de otra cantidad o valor de magnitud; un proceso cíclico o periódico; una razón	la mitad del camino; cuatro tercios de litro; vuelta y media al circuito; 4 de 5; 3 por (cada) 2; una oportunidad entre mil; cada tercer día
Comparador (Con la fracción comparo:)	dos objetos juntos o uno dentro de otro; dos objetos separados respecto a números o valores de magnitud mediante una razón; dos números, cantidades o valores de magnitud	tu pedazo es un tercio del pastel; este bastón es la mitad de largo que este otro; la población de España es la mitad que la de Alemania
Fracturador (Con la fracción divido:)	sustancias medidas por magnitudes	un pastel en partes iguales; un rebaño de 15 ovejas en tres grupos
Particionador (Con la fracción distribuyo:)	cantidades entre receptores/recipientes	un montón de manzanas en cestas iguales; una herencia
Mensurador (Con la fracción mido:)	magnitudes	longitud de un segmento de recta (sistema de medida)

La conjetura de la fenomenología didáctica que hemos enunciado en la sección 4.1 explica por qué es más sencillo ver una fracción como un número de porciones de un pastel dividido en partes iguales, que verla como resultado de una comparación de, pongamos, dos barras de distintas longitud. Mientras que en el pastel, *todas las intenciones están llenas*, ya que parte y todo son a la vez inmediatamente visibles, en la comparación entre dos barras de distinta longitud hay presentes intenciones vacías junto con las llenas, necesarias para *ver* cuál es la fracción en juego. La comparación entre barras de distintas longitudes se aclara con ayuda de procesos como los de *subdivisión* o *conmensuración*, que constituyen una forma de llenar las intenciones vacías. Sin embargo, como advierte Freudenthal (1983), el aspecto intuitivo de la fracción como parte de un todo (partes de un pastel) es limitado porque sólo produce fracciones propias y es necesario ir más allá.

3. *Se muestra la construcción del conjunto de los racionales como medio de organización de las fracciones.* Freudenthal (1983) presenta entonces dos construcciones de los números racionales: una *a posteriori* que es la usual, en término de clases de equivalencia de pares de números naturales (o enteros) y otra genética *a priori* donde Freudenthal utiliza el semigrupo conmutativo formado por la multiplicación de números naturales sobre los valores de una magnitud S. De esta forma, se llega a una construcción donde se contempla el medio que organiza el concepto de fracción en una entidad de carácter superior: el conjunto de todas las fracciones.

Freudenthal dedica todo un capítulo al análisis fenomenológico del aspecto de razón del número racional. Freudenthal distingue dos tipos de razones, las *internas*, formadas por números (o valores de magnitud) de un mismo sistema y que constituyen un número sin dimensiones y las *externas* formadas por por números (o valores de magnitud) de sistemas distintos y que corresponden al valor una magnitud formada a través de esos dos sistemas. Un ejemplo, lo proporciona la velocidad constante de un movimiento rectilíneo uniforme. Si partimos de un tiempo $t_0 = 0$ s y una posición $x_0 = 0$, y denotamos por s_1 y s_2 los espacios recorridos por una partícula en tiempos t_1 y t_2 respectivamente, la constancia de la velocidad del movimiento implica que

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} \tag{4}$$

donde s/t es un número con dimensiones (e.g. m/s). Las razones s_1/t_1 y s_2/t_2 son *externas*, pues numerador y denominador tienen una naturaleza distinta (espacio versus tiempo) perteneciendo a sistemas distintos. Sin embargo, podemos escribir (4) como

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1} \tag{5}$$

y aquí las razones t_2/t_1 y s_2/s_1 son números sin dimensiones, dentro de un mismo sistema y la razón es *interna*.

Freudenthal (1983) sostiene que la enseñanza de fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras al suponer de los estudiantes que pueden aprender desde una sola perspectiva. Pero el enfoque parte-todo, señala Freudenthal, es limitado no sólo fenomenológicamente sino también desde el punto de vista de las matemáticas, debido a que sólo produce fracciones propias. En este trabajo proporcionamos un enfoque diferente, sin pretensión alguna de constituir una tendencia unificadora, pero que produce *todas las fracciones* de forma sistemática y genética, permitiendo clasificarlas en ramas y niveles. En la exposición de nuestra fenomenología didáctica en la Sección 4.4.3 mostramos el carácter elemental de esta construcción.

4.4. Fenomenologías de la fracción mediante y del árbol de fracciones

La contribución original más importante de la presente investigación es indagar en un aspecto más de la fracción, mencionado por Freudenthal muy brevemente en sus ejemplos, véase p. 139 y p. 152, pero no traído al frente por él junto a los otros aspectos detallados en la sección anterior: la fracción puede ser utilizada para *componer* algo nuevo. Podemos ver una fracción como resultado de operar del siguiente modo

> Añado tres cucharadas de café a dos de azúcar.

El sentido de componer, de construir algo, va aparentemente en contra del sentido de fractura o distribución a los que más fuertemente tienden todas las intencionalidades del concepto de fracción. Es obvio que este ejemplo describe una razón parte-parte

$$\frac{\text{3 cucharadas de café}}{\text{2 cucharadas de azúcar}}$$

Esta fracción podemos verla bajo la óptica de un *compuesto* que se construye mediante la acción, el noema es un compuesto y el proceso noético está mediado por un operador, el operador *compositor*. Veremos que este operador es precisamente $\&$ y que el resultado de la composición es, precisamente, la *fracción mediante* $\frac{a+c}{b+d}$ de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ que mencionamos en la sección 2.

A continuación, investigaremos el estatus fenomenológico de este aspecto de la fracción como *composición* (propio de todas las recetas de cocina donde se trata de encontrar las mejores proporciones entre los ingredientes) y mostraremos que, con él, podemos construir de forma original el conjunto de los números racionales (podemos "cocinar" los racionales) y, es más, hacerlo de forma *didáctica*. Veremos que *todas las fracciones mediantes irreducibles son los números racionales positivos*.

El modo de proceder es el siguiente: en las secciones 4.4.1.1 y 4.4.1.2 hacemos un análisis fenomenológico puro de la fracción mediante y del árbol de fracciones ajenado del contexto didáctico. Después mostramos en la sección 4.4.2 la evolución a lo largo de la historia de estos conceptos y el tipo de fenómenos que fueron organizados por los mismos. Presentamos entonces la fenomenología didáctica en la sección 4.4.3 y discutimos cómo los conceptos se integran en el currículo de secundaria en la sección 4.4.4.

4.4.1. Fenomenología pura

4.4.1.1 La fracción mediante

La fracción mediante $\frac{a+c}{b+d}$ de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ es llamada *mediant* en inglés. El mismo término, *mediant* se utiliza para denotar el tercer grado de una escala musical que se halla, aproximadamente, a "medio camino" entre el primer grado (la tónica) y el cuarto (la subdominante). En el tono de do mayor, la tónica es do, la subdominante fa y la mediante mi. Es interesante que la lengua inglesa denote con este mismo término tanto a la fracción como a la nota musical sobre el tercer grado de la escala. Podemos indagar una conexión con esto en el fenómeno físico-armónico: Cuando un sonido suena en una cuerda vibrante, produce una serie de armónicos consigo que vibran junto con él. Si partimos de que la tónica está en relación de frecuencias $1/1$ consigo misma, la subdominante está en relación $4/3$ y la mediante está en relación $5/4$. Estas relaciones se derivan desde la física, al considerar los modos de vibración de una cuerda (Roederer, 2008). Nótese que

$$\frac{1}{1}\&\frac{4}{3} = \frac{1+4}{1+3} = \frac{5}{4} \tag{6}$$

por tanto, la relación de frecuencias entre tónica, subdominante y mediante es la misma que la que hay entre las fracciones $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$ y $\frac{1+4}{1+3} = \frac{5}{4}$. Como el término musical para denotar el tercer grado de la escala en español es *mediante*, elegimos traducir también la fracción como *fraccion mediante*, desviándonos de la propuesta de Alsina y Burgués (2007) que la llaman “fracción mediadora”.

El resto de las frecuencias relativas de las notas de la escala pueden obtenerse de forma similar, eliminando todas aquellas fracciones cuyos numeradores sean múltiplos de 7, 11, 13... El oído humano promedio interpreta como armoniosas las relaciones de frecuencias cuyos numeradores y denominadores tienen una descomposición en factores primos que involucran sólo potencias de 2, 3 y 5. Toda la escala musical en cualquier tonalidad (tomaremos do mayor) puede construirse así. Notemos que la tónica “do” de la octava superior está dada en una relación de frecuencias $2/1$ sobre el “do” fundamental. La dominante sol (razón de frecuencias $3/2$) puede derivarse a través de la tónica do (razón $1/1$) y la octava (razón $2/1$) como

$$\frac{1}{1} \& \frac{2}{1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \tag{7}$$

Igualmente, la subdominante fa (razón $4/3$) puede derivarse de tónica y dominante como

$$\frac{1}{1} \& \frac{3}{2} = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3} \tag{8}$$

La submediante (el sexto grado, “la” en la escala de do mayor) se construye entre la dominante y la octava como

$$\frac{3}{2} \& \frac{2}{1} = \frac{3+2}{2+1} = \frac{5}{3} \tag{9}$$

La fracción mediante puede utilizarse para construir escalas musicales aunque no podamos entrar en más detalles en este trabajo.

Nos interesan ahora, sin embargo, otros fenómenos que involucran a la fracción mediante. En lo que sigue consideraremos a, b, c y d números enteros no-negativos con b y d distintos de cero y dos fracciones $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$. Se tiene siempre que

$$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b} \tag{10}$$

Esto es sencillo de comprobar, pues

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{(b+d)d} = \frac{b}{b+d}\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) > 0 \tag{11}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ad-cb}{(b+d)b} = \frac{d}{b+d}\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) > 0 \tag{12}$$

Además se tiene que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \tag{13}$$

y como $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, necesariamente $ad-bc>0$, $ad-bc \in \mathbb{N}$. De aquí notamos un hecho muy interesante: si $ad-bc=1$ tenemos que

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{1}{(b+d)d} > 0 \tag{14}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{1}{(b+d)b} > 0 \tag{15}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd} \tag{16}$$

Es decir, las *distancias* entre las fracciones $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$ y $\frac{a}{b}$ sólo dependen del producto de los denominadores de estas fracciones y *no* dependen de los numeradores. En este caso, además, las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son *irreducibles* al satisfacer $ad-bc=1$, pues si a y b (o c y d) tuviesen un factor común $k \neq 1$, tal que $a=kn$ y $b=km$, tendríamos que $ad-bc=k(nd-mc)=1$, de donde $nd-mc=1/k$, pero esto es absurdo ya que $nd-mc$ sería un entero y $1/k$ no. Sorprendentemente, la fracción $\frac{a+d}{b+c}$ *también es irreducible*, pues, si consideramos esta fracción y, por ejemplo $\frac{a}{b}$, tenemos que $a(b+c)-b(a+d)=ab+ac-ba-bd=1$, luego $a+d$ y $b+c$ no tienen *tampoco* ningún factor común. Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son irreducibles, entonces $\frac{a}{b}\&\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ también lo es.

El siguiente hecho es también crucial: *toda fracción irreducible es una fracción mediante*. Para verlo, notemos que una fracción $\frac{a}{b}$ está siempre entre dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$, es decir

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'} \tag{17}$$

Las fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$ pueden tomarse como irreducibles, ya que cada número racional pertenece a la misma clase de equivalencia de una fracción irreducible. Mediante este representación, podemos tomar m y n por una parte y m' y n' por otra, tales que estos pares de números sean primos entre sí. Por tanto, se tiene, necesariamente, que

$$m'n - mn' = 1 \tag{18}$$

Ahora, conforme a la ecuación (17) pueden darse tres casos 1) $a/b = (m+m')/(n+n')$ y hemos terminado; 2) $a/b < (m+m')/(n+n')$ o 3) $(m+m')/(n+n') < a/b$. En el segundo y tercer casos reemplazamos las fracciones m'/n' y m/n, respectivamente, por $(m+m')/(n+n')$, por ejemplo, en el segundo caso pondríamos

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m+m'}{n+n'} \tag{19}$$

y en el tercero

$$\frac{m+m'}{n+n'} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'} \tag{20}$$

Volvemos a tener tres casos posibles y, si no hemos terminado, podemos seguir con este proceso. Pero no podemos hacerlo indefinidamente pues las condiciones

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{m'}{n'} - \frac{a}{b} > 0 \tag{21}$$

implican que

$$an - bm \geq 1 \qquad \text{y} \qquad bm' - an' \geq 1 \tag{22}$$

En consecuencia

$$(m'+n')(an-bm) + (m+n)(bm'-an') \geq m'+n'+m+n \tag{23}$$

De las expresiones (18) y (23) obtenemos que

$$a+b \geq m'+n'+m+n \tag{24}$$

Con los reemplazos de fracciones realizados, m o n o m' o n' se incrementa en cada reemplazo y, por tanto, como máximo, tras $a+b$ reemplazos obtenemos que la fracción $\frac{a}{b}$ es la fracción mediante de las fracciones a su izquierda y a su derecha en la relación de orden, respectivamente.

El operador $\&$ actúa sobre numeradores y denominadores separada e independientemente. Si llevamos, pues, los denominadores sobre un eje de abscisas y los numeradores sobre un eje de ordenadas, podemos representar una fracción a/b como un par de números naturales $[a, b]$. Los números racionales en este plano están todos representados por rectas que se cortan en el origen de coordenadas. El operador $\&$ es semejante a la suma de vectores en este plano pues $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$. Esto conduce a interpretar la mediante como el vector suma de $[a, b]$ y $[c, d]$. Este vector coincide con la diagonal de un paralelogramo con lados $[a, b]$ y $[c, d]$. El área del paralelogramo es, precisamente, $ad - bc$. De este modo $ad - bc = 1$ es la mínima área distinta de cero que podemos tener para uno de estos paralelogramos (si el área fuese cero significaría que $ad = bc$, las fracciones a/b y c/d siendo iguales).

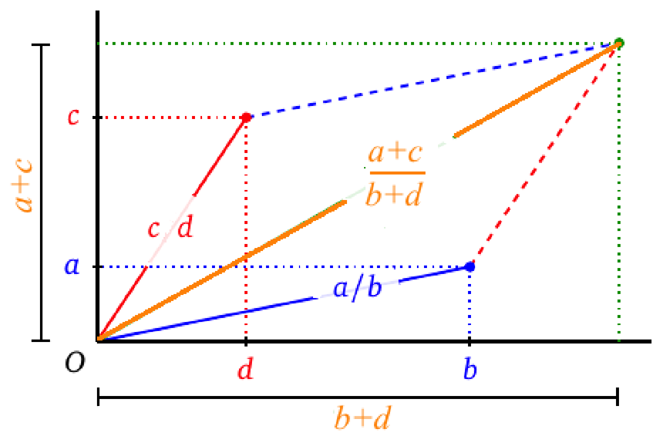


Figura 1: Interpretación vectorial de la fracción mediante

Las *secuencias de Stern-Brocot* de orden N, SB_N en el intervalo unidad se obtienen de forma iterativa, añadiendo nuevas mediantes, entre las fracciones ya existentes. Tenemos:

$$SB_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \tag{25}$$

$$SB_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \tag{26}$$

$$SB_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \tag{27}$$

$$SB_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \tag{28}$$

$$SB_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \tag{29}$$

Las fracciones irreducibles dentro del intervalo unidad y con denominador no superior a N ordenadas de menor a mayor, forman lo que se conoce como *serie de Farey de orden* N, F_N. Las secuencias de Farey son, pues, una subsecuencia de las series de Stern-Brocot. Hasta orden $N = 5$ estas series están dadas por

$$F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \tag{30}$$
$$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \tag{31}$$
$$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \tag{32}$$
$$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \tag{33}$$
$$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \tag{34}$$

Nótese que la serie de Farey F_{N+1} se construye a partir de la serie F_N insertando las fracciones mediantes. Nótese, igualmente, que cualesquiera dos fracciones consecutivas $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ en una serie F_N satisfacen la expresión (18). Además, se tiene que $n + n' > N$. En teoría del número, estas propiedades caracterizan las secuencias de Farey (Hardy y Wright (1949), pp. 28-44).

Aunque el número de términos en las secuencias de Stern-Brocot es, claramente, $2^{N-1} + 1$, el número de fracciones en las secuencias de Farey tiene una dependencia más complicada con N y crece asintóticamente como $\sim 3N^2/\pi^2$ (Guthery, 2011).

Las secuencias de Farey aparecen en los diagramas de resonancia de los aceleradores de partículas (Tomás, 2014) y, en general, en todos los campos de la física donde el fenómeno *resonancia* está presente. Los aceleradores padecen y pueden resultar dañados a corto/medio plazo si sus frecuencias de trabajo q_x y q_z a lo largo de dos ejes ortogonales se hallan en una línea de resonancia descrita por la ecuación

$$aq_x + bq_y = c \tag{35}$$

con a, b y c cualesquiera enteros tales que $|a| + |b| \leq N$ (donde N es el orden de la resonancia) y q_x y q_y números reales en el intervalo unidad. Claramente los puntos de corte con el eje $q_y = 0$ están dados por todas las fracciones h/k que satisfacen $ah/k = c$, de donde $a = pk$ y, como $a \leq N - |b|$ se tiene $1/k \geq p/(N - |b|)$. Estas líneas de resonancia están dibujadas en la Figura 2 para $k = 1$ y $N = 5$ (panel izquierdo) y $N = 8$ (panel derecho).

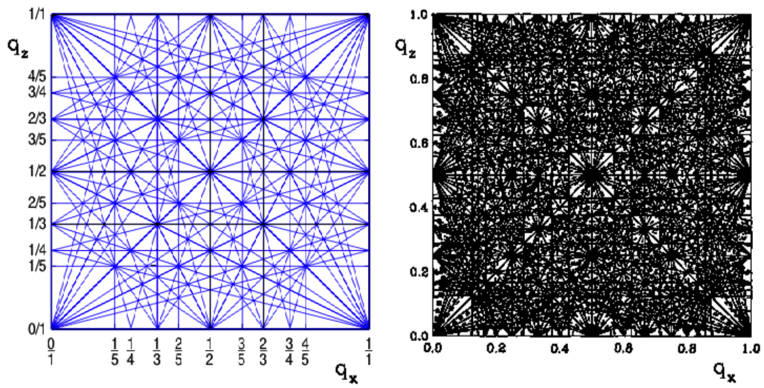


Figura 2: Líneas de resonancia de orden $N = 5$ (izquierda) y orden $N = 8$ (derecha), descritas por la ecuación (35)

Otro ejemplo lo constituyen las "lenguas de Arnold" (*Arnold tongues*) que aparecen en dinámica no-lineal y caos, en fenómenos de sincronización y resonancia entre osciladores no lineales acoplados globalmente a una señal armónica externa que actúa como *forcing*. Las lenguas de Arnold ocurren entre relaciones de frecuencias de los osciladores dadas por fracciones de Farey y son tanto más prominentes cuanto menor es el orden de la serie de Farey asociada. Estas lenguas determinan la región en el espacio de parámetros donde osciladores débilmente acoplados están en sincronía (Argyris et al., 2016) con la señal externa.

La operación $\&$ es conmutativa y asociativa, pues se reduce a la suma ordinaria por separado de numeradores y denominadores, que es trivialmente conmutativa y asociativa. Además, se tiene que, para cualquier fracción $\frac{m}{n}$

$$\frac{m}{n} \& \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n} \tag{36}$$

Nótese, sin embargo, que

$$\frac{a}{b} \& \frac{nc}{nd} = \frac{a + nc}{b + nd} \neq \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} \& \frac{c}{d} \tag{37}$$

por tanto, hemos de tener cuidado en aplicar la operación $\&$ sobre los números racionales en general ya que el resultado de esta operación es distinto para distintas fracciones dentro de la misma clase de equivalencia del número racional. No hay ningún problema en definir $\&$ restringiendo su operación a las *fracciones irreducibles*, sin embargo. De todas formas, veremos que, siempre y en todo caso, podemos atribuir un sentido a $\&$, sobre todas las fracciones (irreducibles o no).

Si aplicamos n veces $\left(\frac{a}{b}\&\right)$ a $\frac{c}{d}$ tenemos

$$\frac{a}{b}\&\frac{a}{b}\&\ldots\&\frac{a}{b}\&\frac{c}{d} = \frac{an+c}{bn+d} \tag{38}$$

de donde, si $n \to \infty$ la fracción mediante resultante tiende a $\frac{a}{b}$.

Si operamos en el resultado $\frac{an+c}{bn+d}$ obtenido en la expresión (38) con otra fracción $\frac{a'n+c'}{b'n+d'}$, obtenida de forma similar, tenemos

$$\frac{a'n+c'}{b'n+d'}\&\frac{an+c}{bn+d} = \frac{(a+a')n+c+c'}{(b+b')n+d+d'} \tag{39}$$

Es interesante comparar el resultado de actuar con $\&$ con la operación *composición de funciones* $\circ$ actuando sobre aplicaciones $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ de la forma

$$g(n; a, c, b, d) = \frac{an+c}{bn+d} \tag{40}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ es el argumento y los cuatro parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ especifican la transformación. Componiendo dos funciones $f(n; a'', c'', b'', d'')$ y $g(n; a, c, b, d)$ de este tipo se tiene

$$f \circ g = \frac{a''\frac{an+c}{bn+d} + c''}{b''\frac{an+c}{bn+d} + d''} = \frac{(a''a + c''b)n + a''c + c''d}{(b''a + bd'')n + b''c + dd''} \tag{41}$$

Nótese, entonces, que si $ad - bc = 1$ podemos tomar

$$a'' = (a+a')d - b(c+c') \tag{42}$$

$$b'' = b'd - bd' \tag{43}$$

$$c'' = ac' - a'c \tag{44}$$

$$d'' = a(d+d') - c(b+b') \tag{45}$$

y el resultado de actuar con $\circ$ es el mismo que el de actuar con $\&$. Podemos, así, pasar de los elementos generados actuando mediante el operador $\&$ a los obtenidos actuando mediante el operador $\circ$.

Aplicando n veces $\left(\frac{a}{b}\&\right)$ a $\frac{c}{d}$ y $m-1$ veces $\left(\&\frac{c}{d}\right)$ al resultado obtenemos la expresión

$$\frac{a}{b}\&\frac{a}{b}\&\ldots\&\frac{a}{b}\&\frac{c}{d}\&\ldots\&\frac{c}{d} = \frac{an+cm}{bn+dm} \tag{46}$$

de donde, dividiendo por m obtenemos, definiendo $r = n/m$,

$$\frac{a}{b}\&\frac{a}{b}\&\ldots\&\frac{a}{b}\&\frac{c}{d}\&\ldots\&\frac{c}{d} = \frac{ar+c}{br+d} \tag{47}$$

Esta expresión, que puede obtenerse de forma semejante a la de arriba, por composición funcional $\circ$, es similar a una transformación de Möbius,

$$w = f(z; a, c, b, d) = \frac{az+c}{bz+d} \tag{48}$$

si reemplazamos el racional positivo r por la variable compleja z. El conjunto de transformaciones de Möbius bajo la operación composición de transformaciones $\circ$ es isomorfo al producto de matrices 2×2 con coeficientes enteros y determinante distinto de cero. Si requerimos que r sea racional positivo y que a, b, c, d, sean todos enteros no-negativos y bajo la condición $ad - bc = 1$ obtenemos un monoide que es libremente generado por dos matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{R}$ de cuya construcción nos ocuparemos en la siguiente sección.

4.4.1.2 El árbol de Stern-Brocot

Las secuencias de Stern-Brocot y subsecuencias suyas, las secuencias de Farey, nos han mostrado procesos en que, comenzando desde dos fracciones, y actuando mediante el operador compositor $\&$, podemos generar de manera genética conjuntos cada vez mayores de fracciones, de tal modo que $-$siguiendo hasta el infinito$-$ podríamos generar conjuntos arbitrariamente grandes. Si para generar las series de Stern-Brocot no tomamos el intervalo unidad sino $0/1$ y $1/0$ como “fracciones” iniciales, e insertamos fracciones mediantes gradualmente, obtenemos los diferentes *niveles* de Stern-Brocot, $\widetilde{SB}_N$

$$\widetilde{SB}_0 = \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \tag{49}$$

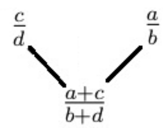
$$\widetilde{SB}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \tag{50}$$

$$\widetilde{SB}_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0} \tag{51}$$

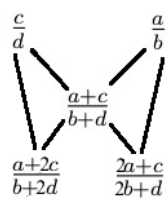
$$\widetilde{SB}_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0} \tag{52}$$

$$\widetilde{SB}_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0} \tag{53}$$

De dos fracciones existentes, $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ formamos la mediana $\frac{a+c}{b+d}$, como hemos venido haciendo. Luego podemos pensar en la mediana como un elemento descendiente generado por dos ancestros, conforme a la siguiente regla



Una nueva iteración sobre este descendiente y los anteriores produce entonces dos nuevos descendientes uno a la izquierda y el otro a la derecha del obtenido previamente,



Mediante este esquema, los niveles de Stern-Brocot pueden, pues disponerse en forma de árbol, el llamado *árbol de Stern-Brocot* o, también, árbol de Farey, como sigue

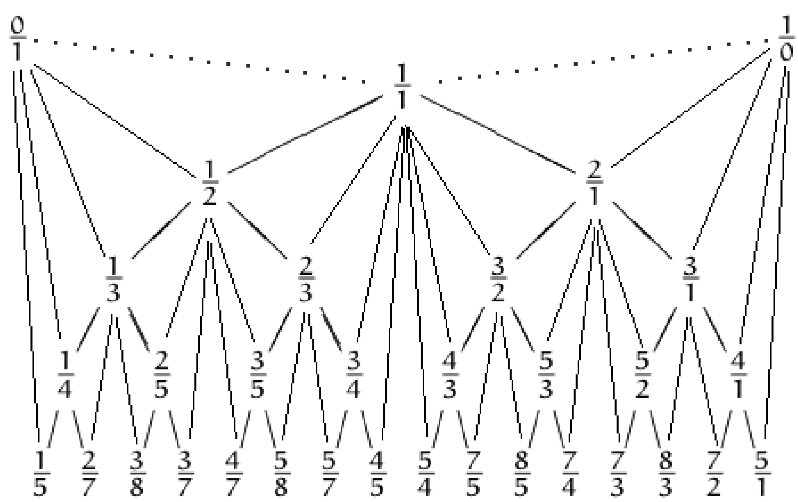


Figura 3: El árbol de Stern-Brocot hasta la quinta generación

El árbol de Stern-Brocot contiene todas las fracciones irreducibles, correctamente ordenadas de menor a mayor. Además, debido al proceso de insertar mediantes *cada fracción aparece en el árbol* *una sola vez*. Si leemos el árbol de arriba a abajo e izquierda a derecha, excluyendo las fracciones $0/1$ y $1/0$, tenemos, una enumeración de todos los números racionales positivos.

El árbol de Stern-Brocot reviste cierta complejidad: cada nueva fracción que aparece está asociada a dos ancestros. Dos líneas llegan a cada nodo del árbol pero cada fracción puede ser ancestro de infinitas fracciones (y, por tanto, parten infinitas líneas de ella que la conectan a sus descendientes). Podemos preguntarnos si es posible codificar las operaciones realizadas para construir el árbol de una forma sencilla en términos de operaciones familiares. La respuesta es afirmativa: podemos asociar a cada fracción mediante en el árbol $\frac{a+c}{b+d}$ una matriz 2×2 con coeficientes a, b, c, d. Para ello, notamos que si queremos que la fracción $1/1$ corresponda a la matriz identidad entonces, como inicialmente $a/b = 1/0$ y $c/d = 0/1$, podemos atribuir a $\frac{a+c}{b+d}$, en general, la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene determinante $ad - bc = 1$ y, por tanto, el producto de matrices de este tipo puede interpretarse siempre en conexión con una fracción irreducible. De este modo, podemos representar el árbol de Stern-Brocot en forma matricial como sigue (Stange, 2014)

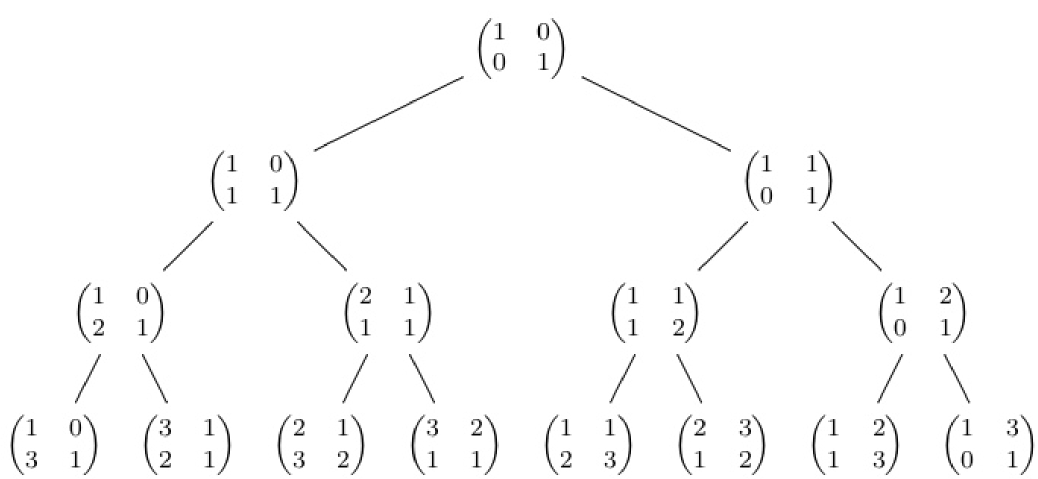


Figura 4: El árbol de Stern-Brocot en forma matricial hasta la cuarta generación

La ventaja de tener el árbol de esta forma es que la información de los ancestros inmediatos está contenida en las matrices de cada nodo, lo que lleva a reducir considerablemente el número de líneas que parten de los nodos. Nótese que de cada fracción $\frac{a+c}{b+d}$ parten dos líneas hacia las fracciones $\frac{a+2c}{b+2d}$ a la izquierda y $\frac{2a+c}{2b+d}$ a la derecha. Podemos preguntarnos si existen matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{R}$ tales que multiplicando sobre la matriz de cada nodo conduzca a las matrices de los nodos descendientes a izquierda y derecha, respectivamente. Para ello, basta con resolver las siguientes ecuaciones matriciales

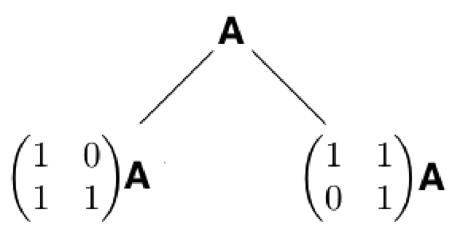
$$\mathbf{L}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\mathbf{R}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d & a+c \\ b & a \end{pmatrix} \tag{55}$$

de donde se obtiene

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

De esta forma, el proceso de construcción del árbol matricial equivalente al de Stern-Brocot se resume a aplicar iterativamente sobre cada nodo el siguiente esquema



partiendo de la matriz identidad $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, que corresponde a la fracción $1/1$. Esta forma de proceder simplifica considerablemente el aspecto del árbol de Stern-Brocot que, mediante la correspondencia hecha en cada nodo (Backhouse y Ferreira, 2008, 2011):

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \to \frac{a+c}{b+d} \tag{57}$$

queda, simplemente, como se muestra en la Figura 5

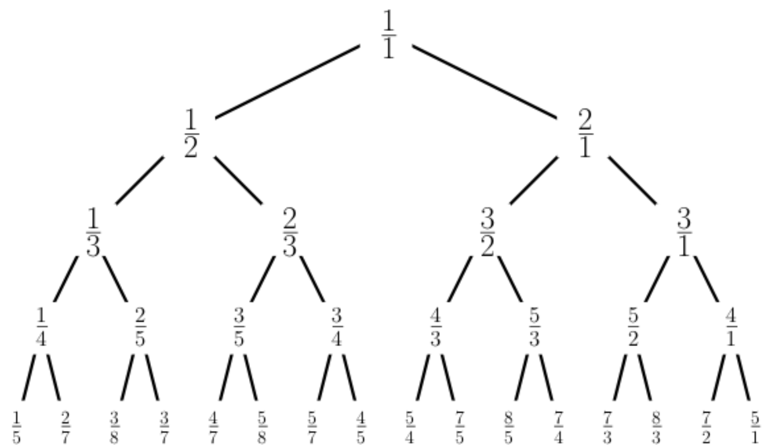


Figura 5: El árbol de Stern-Brocot, hasta la quinta generación, obtenido desde el árbol matricial

En el Anexo A1 mostramos una correspondencia distinta a la de (57) que conduce a un árbol de fracciones diferente, *el árbol de Calkin-Wilf* (Aigner y Ziegler, 2014; Calkin y Wilf, 2000), estrechamente relacionado con el de Stern-Brocot y también de un gran interés didáctico.

La representación matricial de las fracciones es útil para ubicarlas en el árbol y produce una representación elegante en términos de productos consecutivos de matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{R}$ operando sobre la matriz identidad. Estos productos se construyen simplemente siguiendo las ramas del árbol. Por ejemplo, $7/4$ en la Figura 5 corresponde a la matriz que resulta del producto $\mathbf{RRLRI} = \mathbf{R}^2\mathbf{LRI}$, que hace explícito el orden (siguiendo la lectura de las matrices en el producto de derecha a izquierda) en que nos desplazamos en el árbol, partiendo de $1/1$ hasta llegar al nodo $7/4$. El siguiente hecho que se desprende del árbol de Stern-Brocot es, pues, del máximo interés:

> Todo número racional se puede expresar por un producto *finito* de matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{R}$.

y hemos de investigar más profundamente esta forma de representación. Notamos, para ello, que un número racional positivo x puede escribirse como $n \leq x < n+1$, con $n \in \mathbb{Z}$. La función suelo $\lfloor x \rfloor$ de x proporciona el valor entero de x, $\lfloor x \rfloor \equiv n$ y la parte fraccional, está dada por $\{x\}$ como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Puesto que $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, podemos hacer la siguiente expansión

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\{x\}}} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\{x\}} \right\rfloor + \left\{ \frac{1}{\{x\}} \right\}} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\{x\}} \right\rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\left\{ \frac{1}{\{x\}} \right\}}}} = \ldots$$

etc. Esto es lo que se llama una *fracción continua*, que se expresa habitualmente con la notación siguiente

$$x = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{c_k + \frac{1}{1}}}}}} = [c_0; c_1, c_2, \ldots, c_k, 1] \tag{58}$$

donde

$$c_0 = \lfloor x \rfloor \quad c_1 = \left\lfloor \frac{1}{\{x\}} \right\rfloor \quad c_2 = \left\lfloor \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\{x\}} \right\}} \right\rfloor \quad c_3 = \left\lfloor \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\{x\}} \right\}} \right\}} \right\rfloor \quad \ldots \tag{59}$$

son todos números enteros no-negativos. Los coeficientes c_k son lo que se conoce como *cocientes parciales*.

Las siguientes son las estructuras de las fracciones continuas más sencillas:

$$\begin{aligned}
&[c_0; 1] = c_0 + 1 \\
&[c_0; c_1, 1] = c_0 + \frac{1}{c_1 + 1} = \frac{c_0 c_1 + c_0 + 1}{c_1 + 1} \\
&[c_0; c_1, c_2, 1] = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + 1}} = c_0 + \frac{c_2 + 1}{c_1 c_2 + c_1 + 1} = \frac{c_0 c_1 c_2 + c_2 + c_0 c_1 + c_0 + 1}{c_1 c_2 + c_1 + 1}
\end{aligned}$$

Estas fracciones se hallan todas sobre el árbol de Stern-Brocot. Nótese que estas expresiones tienen todas la forma de la ecuación (47), en que procedemos de la siguiente forma: partiendo de $\frac{1}{1}$ en el árbol de Stern-Brocot vamos c_0 veces hacia la derecha hasta hallarnos en el nodo $\frac{c_0+1}{1}$

$$\frac{1}{1} \& \frac{1}{0} \ldots \& \frac{1}{0} = \frac{c_0 + 1}{1} \tag{60}$$

luego vamos c_1 veces hacia la izquierda moviéndonos hacia la fracción $\frac{c_0}{1}$, a la izquierda de $\frac{c_0+1}{1}$

$$\frac{c_0}{1} \ldots \& \frac{c_0}{1} \& \frac{c_0}{1} \& \frac{c_0 + 1}{1} = \frac{c_0 c_1 + c_0 + 1}{c_1 + 1} \tag{61}$$

después vamos c_2 veces hacia la derecha, moviéndonos hacia la fracción $\frac{c_0c_1+1}{c_1}$ a la derecha de $\frac{c_0c_1+c_0+1}{c_1+1}$

$$\frac{c_0c_1+c_0+1}{c_1+1} \& \frac{c_0c_1+1}{c_1} \ldots \& \frac{c_0c_1+1}{c_1} = \frac{c_0c_1c_2+c_2+c_0c_1+c_0+1}{c_1c_2+c_1+1} \tag{62}$$

De aquí vemos, pues, que

$$\mathbf{R}^{c_k}\mathbf{L}^{c_{k-1}}\ldots\mathbf{L}^{c_3}\mathbf{R}^{c_2}\mathbf{L}^{c_1}\mathbf{R}^{c_0}\mathbf{I} \qquad \text{y} \qquad [c_0; c_1, c_2, \ldots, c_k, 1] \quad (k \text{ par}) \tag{63}$$

$$\mathbf{L}^{c_k}\mathbf{R}^{c_{k-1}}\ldots\mathbf{L}^{c_3}\mathbf{R}^{c_2}\mathbf{L}^{c_1}\mathbf{R}^{c_0}\mathbf{I} \qquad \text{y} \qquad [c_0; c_1, c_2, \ldots, c_k, 1] \quad (k \text{ impar}) \tag{64}$$

son representaciones equivalentes de la misma fracción. Habíamos visto que $7/4$ está representado por el producto de matrices $\mathbf{R}^2\mathbf{LRI}$. Por tanto, $7/4 = [1; 1, 2, 1]$, lo que es obvio, pues

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \tag{65}$$

La fracción inversa se obtiene intercambiando las matrices $\mathbf{L}$ por las $\mathbf{R}$ y viceversa. Así, para $7/4$, del producto $\mathbf{R}^2\mathbf{LRI}$ tenemos $\mathbf{R}^2\mathbf{LRI} \to \mathbf{L}^2\mathbf{RLI} = \mathbf{L}^2\mathbf{RLR}^0\mathbf{I}$, que corresponde a la fracción $4/7$, de donde observamos que $4/7 = [0; 1, 1, 2, 1]$, es decir, el movimiento sobre el árbol consistente en ir 0 veces a la derecha (quedarse en el mismo sitio), una vez a la izquierda, una a la derecha y dos a la izquierda. Nótese, pues que si una fracción tiene representación $[c_0; c_1, c_2, \ldots, c_k, 1]$, su inversa tiene, simplemente, la representación $[0; c_0, c_1, c_2 \ldots, c_k, 1]$.

Todo lo anterior nos muestra que dada una fracción en el árbol de Stern-Brocot por $[c_0; c_1, \ldots, c_k, 1]$ sus descendientes son $[c_0; c_1, \ldots, c_k+1, 1]$ y $[c_0; c_1, \ldots, c_k, 1, 1]$, mientras que su ancestro cercano, en el árbol simplificado, está dado por $[c_0; c_1, \ldots, c_k - 1, 1]$, si $c_k > 1$ y por $[c_0; c_1, \ldots, c_{k-1}, 1]$ si $c_k = 1$. El ancestro lejano está dado a su vez por $[c_0; c_1, \ldots, c_{k-1}, 1]$ si $c_k > 1$ y por $[c_0; c_1, \ldots, c_{k-2}, 1]$ si $c_k = 1$.

Es también claro, por todo lo precedente que la fracción $[c_0; c_1, \ldots, c_k, 1]$ aparece en el árbol de Stern-Brocot tras un número $\sum_{j=0}^{k} c_j$ de pasos.

Es interesante notar la relación entre el proceso de obtención de las fracciones continuas y el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor (mcd) de dos números. El algoritmo de Euclides procede de la siguiente manera:

1. Dados dos números A y B ($A > B$) restamos B de A tantas veces c_0 como sea posible. Si no hay resto, entonces B es el mcd de A y B.
2. Si se obtiene un resto C, éste es menor que B y repetimos el proceso, restando C de B tantas veces c_1 como sea posible. Si no hay residuo, entonces C es el mcd de A y B. En caso contrario, se obtiene un nuevo resto D tal que $D < C$.
3. Repetimos el proceso hasta que el resto sea cero. Entonces, el último resto diferente de cero será el mcd de A y B.

Por ejemplo, si tomamos dos números $A = 60$ y $B = 42$ aplicando este algoritmo tenemos

$$\begin{aligned} A &= 60, \quad B = 42 \\ C &= A - Bc_0 = 60 - 42 \cdot 1 = 18 \\ D &= B - Cc_1 = 42 - 18 \cdot 2 = 6 \\ E &= C - Dc_2 = 18 - 6 \cdot 3 \end{aligned}$$

es decir, el mcd de 60 y 42 es 6. Si construimos la fracción continua de $A/B = 60/42$, tenemos

$$\frac{60}{42} = 1 + \frac{\mathbf{18}}{42} = 1 + \frac{1}{\frac{42}{18}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{\mathbf{6}}{18}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{18}{6}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} \tag{66}$$

Vemos, pues, que el algoritmo es semejante. En general

$$\frac{A}{B} = c_0 + \frac{\mathbf{C}}{B} = c_0 + \frac{1}{\frac{B}{C}} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{\mathbf{D}}{C}} = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \ldots}} \tag{67}$$

Los cocientes parciales c_0, c_1, ..., c_k, de la fracción continua coinciden con los "números de veces que se sustrae un número más pequeño al anterior, más grande" en el algoritmo de Euclides. Toda fracción continua de un número racional es *finita* por el mismo motivo de que el mcd de dos números naturales siempre existe y el algoritmo de Euclides termina tras un número finito de pasos, al reducir el resto sucesivamente hasta que ya no es posible hacerlo más. Este es el método de *antiphairesis*, utilizado en la antigua Grecia, como demuestran los *Elementos* de Euclides.

Los *números irracionales* están, en cambio, descritos por fracciones continuas con un número *infinito* de cocientes parciales, que implica descender por ramas del árbol de Stern-Brocot hacia el infinito. Un ejemplo lo proporciona $\sqrt{2}$. Tenemos que $\sqrt{2}$ es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$.

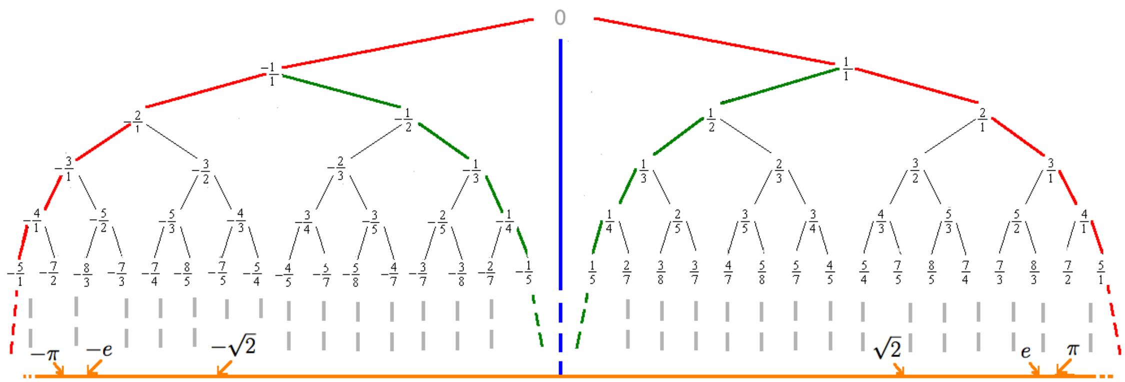


Figura 6: Los números enteros, los racionales y los reales, en el árbol de Stern-Brocot ampliado.

Luego, $x^2 - 1 = 1$, de donde $(x-1)(x+1) = 1$ y $x = 1 + \frac{1}{1+x}$. Podemos, por tanto, reemplazar x en el lado derecho de esta expresión recursivamente y obtenemos

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+x}}}}}} \tag{68}$$

siguiendo con el proceso recursivo hasta el infinito vemos que $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \ldots]$. Equivalentemente, $\sqrt{2}$ puede representarse mediante el producto de matrices $\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{R}^2\mathbf{L}^2\right)^n \mathbf{R}$. Es muy notable que el valor de la raíz cuadrada de 2 se obtiene realizando un movimiento repetido hasta el infinito dos veces a la izquierda, dos a la derecha, dos a la izquierda, etc. sobre el árbol de Stern-Brocot. Los números racionales $[1; 2, 1]$, $[1; 2, 2, 1]$, $[1; 2, 2, 2, 1]$, $[1; 2, 2, 2, 2, 1]$ son aproximaciones sucesivamente mejores al valor de $\sqrt{2}$.

Otro ejemplo clásico de número irracional es el *número de oro*. Sean dos segmentos de longitud x y $1-x$ tales que $1+x$ es a x lo que x es a 1, i.e. en la siguiente proporción $(1+x) : x = x : 1$ llamada la *divina proporción*. Tenemos que $x^2 = 1 + x$, de donde $(x-1)(x+1) = x$, con lo que

$x = 1 + x/(1+x) = 1 + 1/(1+1/x)$. Aplicando recursivamente este resultado iterándolo hasta el infinito obtenemos el número de oro φ como $\varphi = [1; 1, 1, \ldots]$, de donde φ está representado por el producto de matrices $\lim_{n\to\infty} (\mathbf{LR})^n$.

Es interesante notar que nos hemos centrado exclusivamente en los números racionales positivos. Para extender el árbol a los números negativos basta tomar la línea vertical que baja del cero como un eje de reflexión y reflejar todo el árbol de los racionales positivos en torno a dicha línea. Iterando el árbol resultante hasta el infinito se llega a la recta real, tal y como muestra la Figura 6, donde hemos incluído algunos números irracionales.

La condición previa $ad - bc = 1$ cambia de signo si cambiamos el signo de a y c. Pero esto es normal ya que, a través de la reflexión en torno a 0, la relación $\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ pasa a ser $-\frac{a}{d} < -\frac{a+c}{b+d} < -\frac{c}{d}$

4.4.2. Fenomenología histórica

El reciente libro de Guthery (2011), está dedicado a la historia de la fracción mediante y las secuencias de Farey y es una referencia valiosa para internarse en este campo.

Aunque el debate sobre alguna aparición ocasional más temprana de la fracción mediante está abierto, parece haber un acuerdo unánime entre los historiadores sobre el primer lugar donde aparece más claramente expuesta y utilizada: el tratado titulado *Le Triparty en la science des nombres* que Nicolas Chuquet escribió entre 1480 y 1484 y donde Chuquet enuncia la “regla de los valores intermedios” como sigue:

¶ La rigle des nombres moyens.

C Este rigle sert a trouuer tant de nombres moyens entre deux nombres prochains que lon veult. Par le moyen dicelle se peuēt trouuer plusieurs nombres et faire mains calcules que par la rigle de troys ne par vne posicion ne par deux posicions ne se peuent trouuer. Et pour ceste rigle entendre et scauoir pratiquer lon doit sauoir que $\frac{1}{2}$. est le premier et le comācemt̄ entre les nombres routz et dicellui sourdent et saillent deux progressions naturelles dont lune progredist en augmentant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. ꝛc. et laultre progredist en diminuant comme $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$ ꝛc. Lesquelles choses entendues senꝭ la Regle.

¶ Numerateur auec numerateur se adioustent et denoīateʳ auec denoīateur.

¶ Cest a entendre que quant entre deux nombres entiers prochains lon veult trouuer le premier moyen. Au moindre entier lon doit adiouster $\frac{1}{2}$. et ainsi lon aura vng nobre moyen plus grant que le moīdre | extreme et mineur du maieur extreme. Cōme entre 3. et 4. Le nombre moyen et le p̄mier si est 3. $\frac{1}{2}$.

Et qui entre .3. $\frac{1}{3}$. et 3. $\frac{2}{5}$. vouldroit trouuer vng moyen Il conuient negocier come dit la rigle et lon aura .3. $\frac{3}{8}$. Et par ceste maniere lon peult continuer a linquisicion des moyens Jusques a ce que lon ayt trouue cellui que lon serche.

Figura 7: El fragmento del tratado de Chuquet (1881), pp. 101-102, donde se menciona la fracción mediante

"Esta regla sirve para encontrar tantos números intermedios como uno desee entre dos números vecinos. Por medio de ella es posible encontrar muchos más números y hacer más cálculos que con la regla de tres o con una posición o dos posiciones. Y para entender y saber cómo poner en práctica esta regla uno debe saber que $\frac{1}{2}$ es la primera y el comienzo de todas las fracciones y de ésta surgen de forma natural dos progresiones, una creciente $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, etc. y la otra decreciente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. Una vez entendido esto, se sigue la regla:

Numerador se suma a numerador y denominador a denominador. Esto significa que si uno desea encontrar los primeros valores intermedios entre dos números enteros [no negativos] ha de sumar al principio $\frac{1}{2}$ al menor de ellos y así uno obtendrá un número medio que será mayor que el extremo inferior y menor que el extremo superior. [...] Y quien desee encontrar el valor medio entre $3\frac{1}{3}$ y $3\frac{2}{5}$ debe trabajar conforme a la regla y así obtendrá $3\frac{3}{8}$. Y, de este modo, uno puede seguir buscando valores intermedios hasta encontrar el que desea."

El propósito con el que Chuquet enuncia esta regla es el de resolver ecuaciones en una variable. En la segunda y tercera partes de la *Triparty* utiliza esta regla a tal efecto. La mediante ofrece algo que era importante para *algoristas* (quienes trabajaban en la computación para vivir) como Chuquet: *velocidad* (Guthery, 2011). Para quien trabajaba con tinta y pluma y había de iterar para resolver un problema, esta técnica era muy agradecida por su simplicidad. El tratado de Chuquet no se publicaría en prensa hasta 1881, varios siglos más tarde.

Para resolver ecuaciones con una variable $f(x) = 0$, Chuquet seguía el siguiente algoritmo:

1) Especifica una cota de error ϵ y encuentra dos fracciones x_1 y x_2 tales que $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$.
2) Calcula la mediante x_m de x_1 y x_2 y evalúa $f(x_m)$ para hallar el error cometido.
3) Si el error es positivo, reemplaza x_2 por x_m. Si es negativo, reemplaza x_1 por x_m.
4) Si $|f(x_m)| \geq \epsilon$ vuelve a 2). Si $|f(x_m)| < \epsilon$ termina el algoritmo.

Una aplicación concreta de este esquema es la de hallar aproximaciones racionales sucesivamente mejores a números irracionales. Por ejemplo, para calcular el valor de $\sqrt{2}$, tenemos que este valor es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Como para $x_1 = 1$, $1^2 - 2 = -1 < 0$ y para $x_2 = 2$, $2^2 - 2 = 2 > 0$, comenzando por $x_1 = 1/1$ y $x_2 = 2/1$, y especificando una cota de error de p. ej. ϵ =0.000001, las sucesivas iteraciones del algoritmo son como se indica en la siguiente tabla:

Paso	Fracción menor	Mediante	Fracción mayor	(Mediante)^2	Error
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{1}$	2.250000	$+$0.250000
2	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	1.777777	$-$0.222222
3	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{2}$	1.960000	$-$0.040000
4	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{2}$	2.040816	$+$0.040816
5	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{10}{7}$	2.006944	$+$0.006944
6	$\frac{7}{5}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{17}{12}$	1.993079	$-$0.006920
7	$\frac{24}{17}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{17}{12}$	1.998810	$-$0.001189
8	$\frac{41}{29}$	$\frac{58}{41}$	$\frac{17}{12}$	2.001189	$+$0.001189
9	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{58}{41}$	2.000204	$+$0.000204
10	$\frac{41}{29}$	$\frac{140}{99}$	$\frac{99}{70}$	1.999795	$-$0.000204
11	$\frac{140}{99}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{99}{70}$	1.999964	$-$0.000035
12	$\frac{239}{169}$	$\frac{338}{239}$	$\frac{99}{70}$	2.000035	$+$0.000035
13	$\frac{239}{169}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{338}{239}$	2.000006	$+$0.000006
14	$\frac{239}{169}$	$\frac{816}{577}$	$\frac{577}{408}$	1.999994	$-$0.000006
15	$\frac{816}{577}$	$\frac{1393}{985}$	$\frac{577}{408}$	1.999998	$-$0.000002
16	$\frac{1393}{985}$	$\frac{1970}{1393}$	$\frac{577}{408}$	2.000001	$+$0.000001
17	$\frac{1393}{985}$	$\frac{\mathbf{3363}}{\mathbf{2378}}$	$\frac{1970}{1393}$	2.000000	$+$0.000000

Nótese que la fracción que se reemplaza en cada paso por la fracción mediante depende del signo del error obtenido en el paso anterior: si este es positivo $(+)$, la fracción mayor se reemplaza por la mediante obtenida y si es menor $(-)$ se reemplaza la fracción menor. La fracción mediante obtenida al final del proceso $\frac{3363}{2378}$ =1.414213**6**... proporciona hasta 6 cifras significativas de $\sqrt{2}$. (El proceso de obtención de $\sqrt{2}$ sobre el árbol de Stern-Brocot lo hemos visto en la sección anterior de forma algebraica-recursiva en términos de una fracción continua.)

Hemos visto que el concepto de mediante está estrechamente relacionado con las fracciones de

Farey, así llamadas en honor del geólogo y escritor John Farey (1766-1826) quien publicó en 1816 una pequeña carta introduciendo estas fracciones (Farey, 1816) (mostrada en la Figura 8 c). Esta construcción había sido descubierta 14 años antes por Charles Haros (Haros, 1802). En la Figura 8 a) se muestra el fragmento donde Haros menciona la mediante. Farey cita las tablas de conversión de fracciones irreducibles a decimales publicadas por Henry Goodwin en 1816. Es incierto si Goodwin conocía el trabajo de Haros pero Guthery menciona una nota encontrada en los archivos de Goodwin donde este era consciente del concepto de mediante (Figura 8 b) si bien la fecha de la nota es incierta y tres años distintos son posibles.

a)

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions telles que $bc - ad = 1$; et proposons-nous de déterminer une fraction intermédiaire $\frac{x}{y}$, telle qu-on ait $bx - ay = 1$ et $cy - dx = 1$. En résolvant ces deux équations, on trouvera $x = \frac{(a+c)}{(bc-ad)}$ et $y = \frac{(b+d)}{(bc-ad)}$; mais, d'après l'hypothèse, $bc - ad = 1$; donc $x = a + c$, et $y = b + d$; par conséquent $\frac{x}{y} = \frac{(a+c)}{(b+d)}$. Ce résultat nous apprend que la fraction intermédiaire est égale à la somme des numérateurs des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, divisee par la somme des dénominateurs. Comme les trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{(a+c)}{(b+d)}$, $\frac{c}{d}$ diffèrent entre elles de $bc-ad = 1$, divisée par le produit de leur dénominateur, la fraction intermédiaire est donc irréductible, et se trouve en même temps la fraction la plus simple qui approche le plus de l'une ou de l'autre des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

C. Haros (1802)

b)

Take any three consecutive Vulgar Fractions in the Tabular Series of (Complete Decimal Quotients). The Sum of the Denominators of the 1^{st} and 3^{rd} will always be divisible by the Denominator of the 2^{nd} without Remainder. Also the Sum of the Numerator of the 1^{st} and 3^{rd} will also (sic) be divisible by the Numerator of the 2^{nd} without Remainder.

If the 2^{nd} or middle Denominator be multiplied by the quotient arising from the Sum of the 1^{st} and 3^{rd} Numerator divided by the second, the Product will equal the Sum of the 1^{st} and 3^{rd} Denominator.

H. Goodwin
(¿1812? ¿1813? ¿1817?)

c)

LXXIX. *On a curious Property of vulgar Fractions. By Mr.* J. Farey, *Sen.*

To Mr. Tilloch.

Sir, — On examining lately, some very curious and elaborate Tables of "Complete decimal Quotients," calculated by Henry Goodwyn, Esq. of Blackheath, of which he has printed a copious specimen, for private circulation among curious and practical calculators, preparatory to the printing of the whole of these useful Tables, if sufficient encouragement, either public or individual, should appear to warrant such a step: I was fortunate while so doing, to deduce from them the following general property; viz.

If all the possible vulgar fractions of different values, whose greatest denominator (when in their lowest terms) does not exceed any given number, be arranged in the order of their values, or quotients; then if both the numerator and the denominator of any fraction therein, be added to the numerator and the denominator, respectively, of the fraction next but one to it (on either side), the sums will give the fraction next to it; although, perhaps, not in its lowest terms.

For example, if 5 be the greatest denominator given; then are all the possible fractions, when arranged, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, and $\frac{4}{5}$; taking $\frac{1}{3}$ as the given fraction, we have $\frac{1+1}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ the next smaller fraction then $\frac{1}{3}$; or, $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$, the next larger fraction to $\frac{1}{3}$. Again, if 99 be the largest denominator, then, in a part of the arranged Table, we should have $\frac{15}{52}$, $\frac{28}{97}$, $\frac{13}{45}$, $\frac{24}{83}$, $\frac{11}{38}$, &c.; and if the third of these fractions be given, we have $\frac{15+13}{52+45} = \frac{28}{97}$ the second: or $\frac{13+11}{45+38} = \frac{24}{83}$ the fourth of them: and so in all the other cases.

I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been before pointed out?; or whether it may admit of any easy or general demonstration?; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers; and am

Sir,
Your obedient humble servant,
J. Farey.

Howland-street.

Vol. 47. No. 217. *May* 1816.

J. Farey (1816)

Figura 8: a) El fragmento de Haros (1802) donde se menciona la fracción mediante; b) una nota del archivo de Henry Goodwin, mencionada por Guthery (2011), p.95; c) la carta de Farey (1816).

La construcción de Farey había sido, pues, descubierta antes por Haros. Charles Haros era un geómetra que trabajaba en el *Bureau de Cadastre* francés, una institución que tenía el cometido, establecido por la revolución francesa, de convertir a Francia al sistema métrico decimal. Esto precisaba, entre muchos otras tareas, cambiar los números de la representación fraccional a la decimal. Charles Haros confeccionó una tabla con las 3003 fracciones irreducibles dentro del intervalo unidad con denominador inferior a 100 y su conversión a decimal. La forma de construir esta tabla es precisamente la serie de Farey de orden $N = 99$. Haros mostró en este artículo que la mediante entre dos fracciones irreducibles próximas es irreducible y comenzando por las fracciones

$$\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \frac{1}{97}, \ldots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{96}{97}, \frac{97}{98}, \frac{98}{99} \tag{69}$$

y aplicando la regla de insertar medianas, generó las 3003 fracciones buscadas. Por el árbol de Stern-Brocot, es obvio que este proceso permite construir todas las fracciones irreducibles con los requerimientos buscados, pues las fracciones iniciales están distribuídas a lo largo de un arco formado por las dos ramas del árbol que parten de $1/2$ cubriendo el intervalo unidad y que aparecen sombreadas en la figura

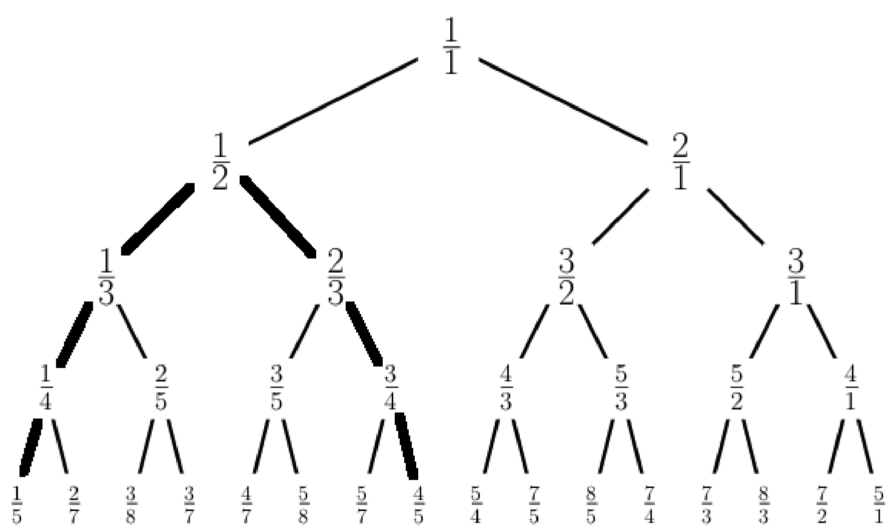


Figura 9: Localización del arco de Haros dentro del árbol de Stern-Brocot.

Como hemos visto tal secuencia de fracciones compuesta de dos subsecuencias, una creciente y otra decreciente, es la misma que la que Chuquet menciona en su tratado, si bien la inserción de mediantes se produce aquí sobre todos los intervalos separados por las fracciones iniciales.

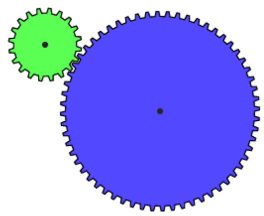
Quince años después Goodwin emuló el trabajo de Haros construyendo una tabla de conversión a forma decimal de las fracciones irreducibles del intervalo unidad con denominador menor o igual a 1024 (318913 fracciones en total). La tabla lleva por título *The First Centenary of a Series of Concise and Useful Tables of all the Complete Decimal Quotients, which can arise from dividing a unit, or any whole Number less than each Divisor by all Integers from 1 to 1024*. Es esta tabla la que Farey menciona en su carta. Goodwin no hace mención en ella a la fracción mediante y a la forma de construir la tabla, lo que da la oportunidad a Farey para notar las propiedades típicas de las series que llevan hoy su nombre. Sin embargo, Farey no demuestra ningún teorema ni proporciona ninguna explicación sobre el fenómeno, muy a diferencia de Haros.

Es debido a la autoridad de Augustin Cauchy a lo que se debe la atribución errónea del nombre de la secuencia a Farey. Cauchy leyó la carta de Farey y publicó un artículo titulado *Démonstration d'un Théoreme Curieux sur les Nombres* en 1816 demostrando de nuevo los resultados de Haros sin atribución. Cauchy se refirió a la mediante como "una propiedad notable de las fracciones ordinarias observada por J. Farey". Así, la secuencia ordenada de fracciones irreducibles con denominadores menores que un valor dado vino a llamarse secuencia de Farey, en vez de secuencia de Chuquet o secuencia de Haros, como habría sido más justo.

Cincuenta y nueve años después de que Haros publicase su artículo, el relojero Achille Brocot, investigando la confección de engranajes para los relojes, presentó nuevas tablas y series de fracciones al final de un extenso trabajo donde describe en detalle la fracción mediante y nuevas secuencias de fracciones (Brocot, 1861). Tres años antes, en 1858, Moritz Stern había descrito estas mismas secuencias en términos puramente matemáticos (Stern, 1858). Estas son las secuencias de Stern-Brocot que hemos expuesto en la sección 4.4.1.1.

A diferencia de las secuencias de Farey, las de Stern-Brocot no están limitadas al intervalo unidad sino que comienzan por las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$ y, además, no se requiere que el denominador de las fracciones sea menor que uno dado. El único mecanismo generativo de estas secuencias es, puramente, la inserción de la mediante. Todas las fracciones que resultan son irreducibles y, como hemos visto, todas las fracciones irreducibles son generadas mediante este mecanismo.

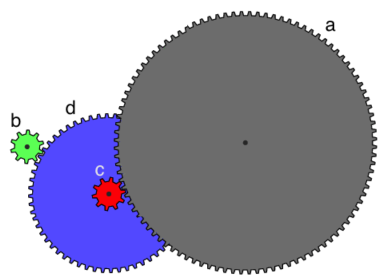
Describimos a continuación el problema que trataba de resolver Brocot. Imaginemos que tenemos un eje que gira a n_a revoluciones por segundo y queremos un segundo eje que gire a n_b revoluciones por segundo. Lo que hacemos es poner ruedecillas en los ejes con a_0 y b_0 dientes, respectivamente, de tal modo que $a_0 n_a = b_0 n_b$. Esto implica que $\frac{n_a}{n_b} = \frac{b_0}{a_0}$. Por ejemplo en la siguiente figura, la ruedecilla grande tiene $a_0 = 60$ dientes y la pequeña $b_0 = 20$ dientes (Austin, 2008):



Cuando la ruedecilla pequeña avanza un diente, así lo hace la grande. De esta forma, cuando la ruedecilla pequeña completa una vuelta, la grande completa $n_a/n_b = 20/60 = 1/3$ de vuelta. Si hay N ruedas intermedias, tendremos

$$\frac{n_a}{n_b} = \prod_{j=0}^{N} \frac{b_j}{a_j} \tag{70}$$

De este modo podemos tener una razón de frecuencias de giro n_a/n_b complicada producida por un sistema de ruedecillas con pocos dientes b_j, a_j. Un sistema de ruedecillas físicamente factible, requiere N, b_j y a_j lo más pequeños posible. En la siguiente figura (Austin, 2008):



la rueda a consta de 100 dientes, la b y la c de 10 dientes y la d de 60 dientes. Por tanto, una vuelta de la rueda b corresponde a $10/60$ de vuelta de la rueda d, que gira solidariamente con la rueda c, haciendo que la rueda a gire $10/60 \times 10/100 = 100/6000 = 1/60$ de vuelta. De este modo, si la rueda b representa el segundero del reloj, la rueda a puede representar el minutero. Por supuesto, podríamos haber generado la misma relación con una rueda de 10 dientes y una de 600, pero es mucho más difícil y costoso construir una rueda de 600 dientes que una de 100 dientes.

Imaginemos ahora que queremos diseñar una rueda que avance una fracción $1/720$ de giro cuando otra rueda da un giro completo. Podríamos tomar una rueda de 10 dientes y otra de 7200, pero esto no sería físicamente realizable. Sin embargo, notando que $720 = 2^4 \cdot 5 \cdot 9$, podemos escribir $\frac{1}{720} = \frac{1}{8}\frac{1}{9}\frac{1}{10} = \frac{10}{80}\frac{10}{90}\frac{10}{100}$ y, por tanto, podemos construir, por ejemplo un sistema de ruedas con $a_0 = 100$, $a_1 = 90$, $a_2 = 80$ dientes y $b_0 = b_1 = b_2 = 10$ dientes.

Imaginemos sin embargo que queremos construir un sistema de ruedecillas para producir la razón $\frac{163}{709}$. Como numerador y denominador son ambos números primos, la fracción es irreducible. El problema que se planteó entonces Brocot es el siguiente: *aproximar una razón cualquiera lo mejor posible a otra físicamente realizable*. La estrategia de Brocot es entonces buscar p y q pequeños tales que $\frac{p}{q} \approx \frac{163}{709}$, es decir que $\frac{p}{q} - \frac{163}{709} \approx 0$. Es interesante también calcular el número entero $A(p,q) = 709p - 163q$ pues da una idea de la distancia de la mediante obtenida a la fracción que deseamos aproximar. Para ello, Brocot sigue un algoritmo parecido al de Chuquet, pero disponiendo la fracción menor al final de la tabla y la mayor al comienzo y completando con la mediante, sucesivamente los huecos conforme al valor de la mediante. En la siguiente tabla se indican los pasos seguidos para completarla. Puesto que $163/709 \approx 0{,}23$, tenemos que esta razón tiene antepasados $1/5$ y $1/4$ en el árbol de Stern-Brocot y podemos comenzar desde estas fracciones

Paso	Mediante $\left(\frac{p}{q}\right)$	$A(p,q) = 709p - 163q$	Error $\left(\frac{p}{q} - \frac{163}{709}\right)$
0	$\frac{1}{4}$	+57	+0.0200
0	$\frac{1}{5}$	−106	−0.0299

Insertamos la primera mediante entre ellas y evaluamos $A(p,q)$ y el error cometido.

Paso	Mediante $\left(\frac{p}{q}\right)$	$A(p,q) = 709p - 163q$	Error $\left(\frac{p}{q} - \frac{163}{709}\right)$
0	$\frac{1}{4}$	+57	+0.0200
1	$\frac{2}{9}$	−49	−0.0078
0	$\frac{1}{5}$	−106	−0.0299

La segunda mediante la insertamos en la fila entre las dos en que cambia el cambio de signo de $A(p,q)$

Paso	Mediante $\left(\frac{p}{q}\right)$	$A(p,q) = 709p - 163q$	Error $\left(\frac{p}{q} - \frac{163}{709}\right)$
0	$\frac{1}{4}$	+57	+0.0200
2	$\frac{3}{13}$	+8	+0.0009
1	$\frac{2}{9}$	−49	−0.0078
0	$\frac{1}{5}$	−106	−0.0299

Y seguimos con este proceso hasta hallar una fracción que nos convenga

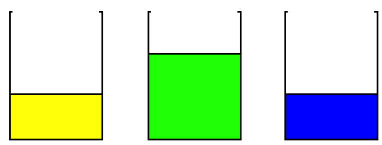
Paso	Mediante $\left(\frac{p}{q}\right)$	$A(p,q) = 709p - 163q$	Error $\left(\frac{p}{q} - \frac{163}{709}\right)$
0	$\frac{1}{4}$	+57	+0.0200
2	$\frac{3}{13}$	+8	+0.0009
...	...	...	...
	$\mathbf{\frac{163}{709}}$	**0**	**0**
7	$\frac{20}{87}$	−1	−0.0000(2)
6	$\frac{17}{74}$	−9	−0.0002
5	$\frac{14}{61}$	−17	−0.0004
4	$\frac{8}{35}$	−33	−0.0013
3	$\frac{5}{22}$	−41	−0.0026
1	$\frac{2}{9}$	−49	−0.0078
0	$\frac{1}{5}$	−106	−0.0299

Notamos pues, que con dos ruedas de 20 y 87 dientes produciríamos una aproximación $20/87$ bastante razonable de la razón $163/709$, cometiendo un error inferior al 0.01 %. Nótese que como $A(20, 87) = -1$, la fracción $\frac{20}{87}$ es el ancestro más cercano de $\frac{163}{709}$ *por la izquierda* en el árbol de Stern-Brocot.

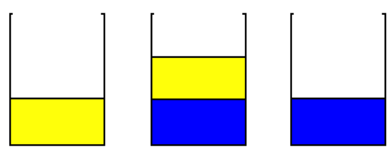
El uso histórico que se ha dado al concepto de mediante en la práctica ha sido, pues, el de proporcionar algoritmos y métodos para encontrar valores numéricos entre otros dados, aproximar números irracionales y fracciones con numeradores y denominadores altos y la resolución de ecuaciones en una variable $f(x) = 0$ de forma numérica. El énfasis en el concepto de *árbol de fracciones* como medio que organiza los números racionales es, sin embargo, típico de finales del siglo XX y comienzos del XXI, debido a las ventajas computacionales y a la riqueza combinatoria que ofrecen.

4.4.3. Fenomenología didáctica

Dadas dos cosas podemos juntarlas para hacer otra: podemos, por ejemplo, ensamblar dos piezas para hacer una compuesta o verter un líquido en un recipiente que contiene otro. En el primer caso tenemos un compuesto de piezas discretas como resultado. En el segundo caso tenemos un líquido que resulta de la mezcla de los dos anteriores. Los líquidos pueden verse como un continuo homogéneo. Tras el resultado de mezclarlos estos pueden ser, por ejemplo, miscibles, en cuyo caso la mezcla es asímismo homogénea (Alsina y Burgués, 2007)



o inmiscibles, en cuyo caso el compuesto resultante está formado por dos partes diferenciadas



En ambas mezclas hemos puesto el recipiente con el líquido resultante en el centro, sugiriendo que hemos vertido el contenido del recipiente de la izquierda y el de la derecha. Llamemos I al líquido de la izquierda y D al de la derecha.

En ambos casos partimos de una parte de líquido I y una parte de líquido D puras para formar un líquido compuesto de una parte de I y una parte de D. Este proceso de mezcla lo podemos denotar del siguiente modo

$$\frac{\text{1 parte de líquido } I}{\text{0 partes de líquido } D} \& \frac{\text{0 partes de líquido } I}{\text{1 parte de líquido } D} = \frac{\text{(1+0) partes de liquido } I}{\text{(0+1) partes de líquido } D} = \frac{\text{1 parte de líquido } I}{\text{1 parte de líquido } D}$$

Nótese que la fracción $1/0$, vista como *cociente* no tiene sentido. Sin embargo, las fracciones con numerador o denominador igual a 0 hacen referencia aquí a sustancias *puras* (líquido D puro o líquido I puro, respectivamente) que, por medio del proceso de mezcla, de la composición, producen un líquido compuesto descrito por una fracción. En ambos casos el resultado es el mismo, independientemente de que el líquido sea miscible o no: tenemos 1 parte de líquido I por 1 parte de líquido D.

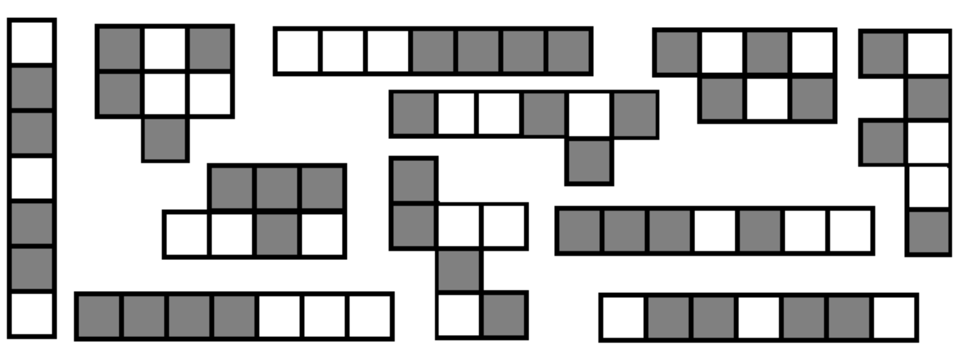
El operador $\&$ es responsable de la formación del compuesto y el resultado de componer es la fracción mediante de los componentes. En lo que sigue consideraremos compuestos separables en unidades discretas enumerables. Aunque todo lo que sigue puede hacerse también con continuos homogéneos miscibles, los compuestos formados por piezas separables son especialmente idóneos al comienzo.

Consideremos dos patrones distintos formados por cuadrados grises y cuadrados blancos. Podemos componer (yuxtaponer) ambos patrones para formar un patrón nuevo por medio de la operación $\&$:

Podemos traducir esto a números como sigue

$$\frac{\text{1 cuadrado blanco}}{\text{3 cuadrados negros}} \& \frac{\text{2 cuadrados blancos}}{\text{1 cuadrado negro}} = \frac{\text{(1+2) cuadrados blancos}}{\text{(3+1) cuadrados negros}} = \frac{\text{3 cuadrados blancos}}{\text{4 cuadrados negros}}$$

Es irrelevante cómo quedan configurados los cuadrados grises y blancos dentro de los componentes así como del compuesto final. Su forma también es irrelevante. Lo único importante es la relación entre el número de cuadrados grises y blancos y el total de estos cuadrados. Por tanto, todos los patrones siguientes son equivalentes



Consideramos aquí patrones yuxtapuestos horizontalmente de izquierda a derecha conforme al operador $\&$, para visualizar más rápidamente las operaciones. Supondremos que el número de cuadrados blancos va siempre en el numerador y el de cuadrados negros en el denominador y, en lo sucesivo, eliminamos las etiquetas "cuadrado(s) blanco(s)/negro(s)".

Por supuesto, podemos componer un mismo patrón consigo mismo cualquier número de veces. Si lo componemos consigo una vez tenemos, por ejemplo,

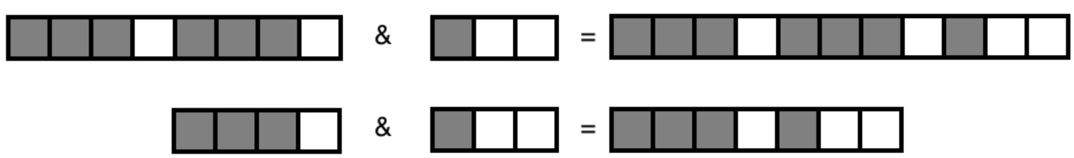
En números

$$\frac{3}{1}\&\frac{3}{1}=\frac{6}{2} \tag{71}$$

Si hubiésemos compuesto este mismo patrón consigo n veces tendríamos

$$\frac{3}{1}\&\ldots\&\frac{3}{1}=\frac{3n}{n} \tag{72}$$

En ambos casos, la relación de cuadrados blancos a cuadrados negros se mantiene inalterada e igual a $3/1$. Nótese entonces, sin embargo, lo siguiente:



En números, respectivamente

$$\frac{2}{6}\&\frac{2}{1}=\frac{4}{7} \tag{73}$$
$$\frac{1}{3}\&\frac{2}{1}=\frac{3}{4} \tag{74}$$

Es decir, el resultado de las dos operaciones es distinto, pese a que los componentes están descritos por las mismas razones. Aunque no hay ningún problema en operar como hemos hecho teniendo presente la situación que estamos describiendo mediante fracciones (la composición de dos componentes especificados) hemos de ser cuidadosos si en un enunciado verbal los componentes se nos presentan como razones y el todo es desconocido.

Podemos ver este problema con un ejemplo. Supongamos que tenemos un corral con 7 ovejas blancas y 2 ovejas negras y otro corral con 5 ovejas blancas y 3 ovejas negras. Si juntamos todas las ovejas en un sólo corral: ¿cuál es la razón de ovejas blancas a ovejas negras? Vemos que, en este caso,

$$\frac{\text{7 ovejas blancas}}{\text{2 ovejas negras}} \& \frac{\text{5 ovejas blancas}}{\text{3 ovejas negras}} = \frac{\text{(7+5) ovejas blancas}}{\text{(2+3) ovejas negras}} = \frac{\text{12 ovejas blancas}}{\text{5 ovejas negras}}$$

Considérese ahora, sin embargo, el siguiente enunciado: *Supongamos que tenemos un corral donde por cada 7 ovejas blancas hay 2 negras y otro corral donde por cada 5 ovejas blancas hay 3 negras. Si juntamos todas las ovejas en un solo corral: ¿cuál es la razón de ovejas blancas a ovejas negras?* Desconocemos el número de ovejas negras $2n$ del primer corral y $3m$ del segundo. Entonces, todo lo que podemos decir es que la razón buscada será

$$\frac{7n \text{ ovejas blancas}}{2n \text{ ovejas negras}} \& \frac{5m \text{ ovejas blancas}}{3m \text{ ovejas negras}} = \frac{(7n+5m) \text{ ovejas blancas}}{(2n+3m) \text{ ovejas negras}}$$

quedando indeterminada mientras no se especifiquen n y m. Nótese que el anterior problema es un caso particular de este con $n = m$. En el anterior problema especificamos el número de ovejas que forman cada corral. En este sólo las razones entre ovejas de un tipo y del otro. Para determinar la solución como en el primer enunciado, *es necesario sobreentender que la razón entre ovejas negras entre el segundo corral y el primero es* $3/2$ *y de ovejas blancas* $5/7$. En tal caso, $n = m$.

Desde la conjetura de la fenomenología didáctica que enunciamos en la Sección 4.1, podemos, ordenar estos enunciados por dificultad creciente. Nótese cómo el segundo problema es más difícil que el primero. En el primero todos los elementos están presentes y al descubierto, todas las intenciones están *llenas* en el sentido fenomenológico de la intencionalidad. En el segundo problema se dan intenciones *vacías* ya que la expresión “por cada x ovejas negras hay y blancas” encierra una mayor complejidad al ocultar cuántas ovejas hay realmente. El figurarse mentalmente distintas posibilidades, llenando intenciones vacías, es necesario para “ver” la solución y de qué forma está el problema indeterminado.

Estamos componiendo elementos discretos fácilmente señalables, pero también podemos componer movimientos. Considérese el siguiente problema: *Un coche ha recorrido 1300 metros en 2* *minutos y luego 800 metros en 1 minuto. ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche en todo el trayecto?*

La solución la proporciona la fracción mediante obtenida de componer los dos movimientos independientes

$$\frac{1300 \text{ m}}{2 \text{ min}} \& \frac{800 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{(1300 + 800) \text{ m}}{(2+1) \text{ min}} = \frac{2100 \text{ m}}{3 \text{ min}} = 700 \text{ m/min} = 42 \text{ km/h}$$

Nótese la diferencia con el siguiente problema *Un coche ha recorrido un trayecto a 1300 metros por cada dos minutos y otro a 800 m por cada minuto. ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche en todo el trayecto?*

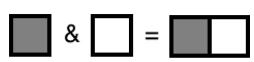
Desconocemos cuánto ha durado el primer trayecto en relación al segundo t_1/t_2. Todo lo que podemos decir es, por tanto, lo siguiente:

$$\frac{1300 t_1 \text{ m}}{2 t_1 \text{ min}} \& \frac{800 t_2 \text{ m}}{t_2 \text{ min}} = \frac{(1300 t_1 + 800 t_2) \text{ m}}{(2 t_1 + t_2) \text{ min}} = \frac{60(1300 t_1 + 800 t_2) \text{ km}}{1000(2 t_1 + t_2) \text{ h}}$$

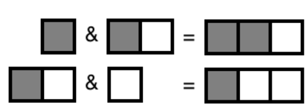
Si sobreentendemos que $t_1/t_2 = 1$ entonces obtenemos el resultado del primer enunciado.

Imaginemos que no existen los números racionales y que todo lo que tenemos son cuadrados negros y cuadrados blancos como meras unidades separadas. Inicialmente, entonces, tenemos

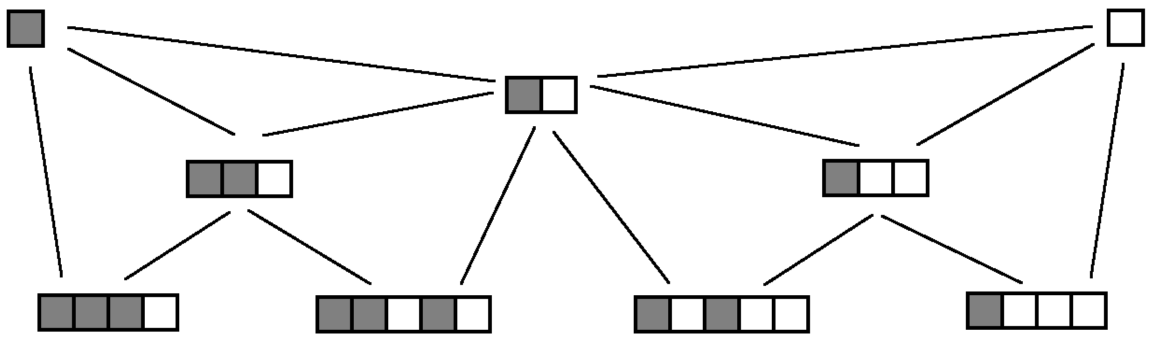
y denotamos a estos elementos por $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$. En la primera generación, componiendo estos elementos obtenemos



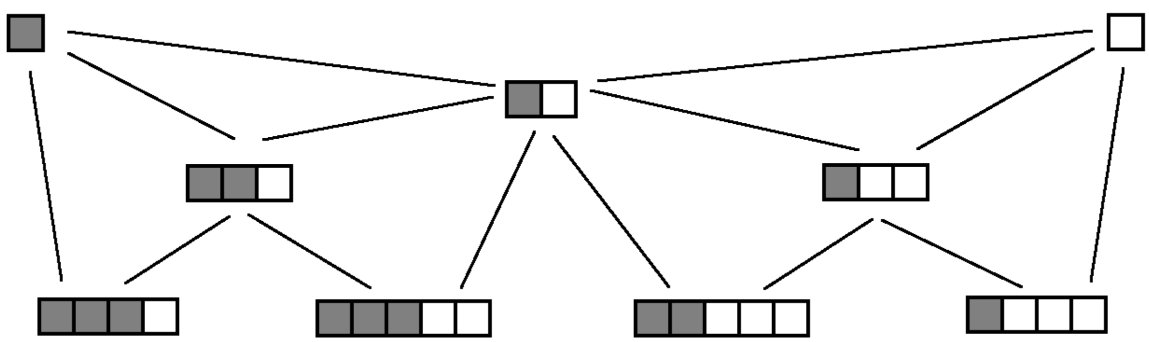
al que llamamos $\frac{1}{1}$. Ahora tenemos 3 elementos distintos. Los dos que había en la generación 0 y este nuevo que ha aparecido en la primera generación. Combinando este nuevo elemento con los dos anteriores, obtenemos



y, así pues, en la segunda generación asistimos al nacimiento de $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{1}$. Podemos seguir así con la generación tercera, la cuarta, la quinta,... hasta el infinito. Los números los ordenamos de izquierda a derecha en cada nivel conforme los vamos generando si procedemos sistemáticamente, como muestra el siguiente diagrama



donde mostramos también la tercera generación, con la aparición de los números $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{1}$ (de izquierda a derecha). Si seguimos con este proceso hasta el infinito obtenemos el árbol de Stern-Brocot cuando reemplazamos el patrón de cada nodo por la fracción $\frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de cuadrados blancos}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de cuadrados negros}}$. Las fracciones, todas irreducibles, quedan así ordenadas de menor a mayor. Debido a la equivalencia entre patrones arriba expuesta, podemos reordenar cuadrados negros y blancos dentro de cada patrón y presentar el árbol como:



es decir cuadrados negros a la izquierda y blancos a la derecha. Tales ordenaciones pueden escogerse dependiendo de la situación didáctica a conveniencia. Los cuadrados pueden sustituirse por otros objetos, etc. Nótese que los patrones de todos los nodos *son todos distintos* pues representan una relación distinta de una clase de objetos frente a otra. En el árbol de Stern-Brocot, *aparecen todas las fracciones irreducibles y cada vez que aparece una es única*. Podemos organizar los patrones para ver en ellos "códigos genéticos" de los números racionales que delaten su genealogía y cómo se han obtenido de los anteriores mediante composiciones (tal y como hacen los productos de las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{R}$ descritos en la Sección 4.4.1.2).

La construcción proporcionada en esta sección puede compararse con la de Peano de los naturales. Mientras que la imagen conceptual que se desprende de los axiomas de Peano es la de un dominó en que una pieza sigue a otra inexorablemente y donde podemos ver la acción de un operador si dejamos caer las piezas tirando la primera (el operador "siguiente"), en la construcción aquí presentada las piezas de dominó son sustituidas por "especies" que se mezclan con otras especies inexorablemente dando lugar a nuevas especies mediante el operador compositor $\&$.

¿Cómo se relaciona matemáticamente la construcción aquí presentada con la de los naturales? Si tenemos un número natural x, este tiene siempre un siguiente, dado por $y = x + 1$. Ahora bien, todo número natural tiene *al menos* dos divisores (si x es un número primo, los divisores de x serán 1 y x mismo). Sean a y d divisores de y y b y c divisores de x. Entonces de $y = x+1$ se obtiene $ad = bc+1$, es decir $ad - bc = 1$. Esta es precisamente la propiedad que satisfacen todas las fracciones vecinas en el árbol de Stern-Brocot y la clave para su construcción, descubierta por Haros. Pues dividiendo por d y b se obtiene $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$, de donde estas fracciones son irreducibles y $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$. Este ha sido nuestro punto de partida en todos los análisis que hemos realizado. Vemos pues cómo la construcción de los racionales emerge espontáneamente de la de los naturales.

Parece claro, por tanto, el estatus fenomenológico de la operación $\&$ en la enseñanza. Pensamos que este operador ha de enseñarse en clase a través de ejemplos y que su enseñanza ha de ser *anterior* a la de la suma de los números racionales, pues este operador es responsable de la *construcción genética* de los números racionales y puede verse como indisolublemente ligado a su existencia. A diferencia de la suma, este operador se ve inmediatamente en acción con multitud de ejemplos simples que pueden entender los niños a un nivel muy elemental y es, por tanto, ontológicamente anterior. Las fracciones están asociadas intuitivamente a cortar, plegar o fracturar. Aquí hemos visto otro uso de las fracciones, no menos elemental, que es *componer*.

4.4.4. Fenomenología genética

Hemos visto cómo el concepto de mediante y el árbol de fracciones pueden introducirse de forma didáctica. Exponemos ahora una fenomenología respecto al desarrollo cognitivo de los alumnos. Para ello revisamos los contenidos del currículum de enseñanza secundaria en la Comunitat Valenciana (Decreto 87/2015 de 5 Junio).

Contenidos	Criterios de evaluación	CC
1º ESO		
Divisibilidad de los números naturales. Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales de os cifras. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones y ordenación Números decimales. Representación y ordenación. Operaciones con fracciones. Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos. Resolución de problemas con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales.	BL2.1. Interpretar los números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, y sus propiedades (orden, recta real, divisibilidad, etc.) y utilizarlos en situaciones comerciales, sociales y científicas, de medida, expresión, comparación y descripción de conceptos numéricos. BL2.2. Operar con los números naturales, enteros, decimales, fraccionarios y porcentajes con estrategias de cálculo (mental, estimación, uso de calculadoras, aplicaciones de escritorio, web o para dispositivos móviles, etc.) y procedimientos (algoritmos convencionales u otros) más adecuados según la naturaleza del cálculo para evaluar resultados y extraer conclusiones en situaciones comerciales, sociales, científicas y otras.	CMCT CSC CMCT CAA
2º ESO		
Relación entre fracciones y decimales. Conversión Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos. Estimación y obtención de raíces aproximadas. Resolución de problemas con números enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes.	BL2.1. Interpretar los números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes, y sus propiedades (clasificación, proporcionalidad) y utilizarlos en situaciones comerciales, sociales y científicas, de medida, expresión, comparación y descripción de conceptos numéricos. BL2.2. Operar con los números naturales, enteros, decimales, fraccionarios y porcentajes con estrategias de cálculo (mental, estimación, uso de calculadoras, aplicaciones de escritorio, web o para dispositivos móviles, etc.) y procedimientos (algoritmos convencionales u otros) más adecuados según la naturaleza del cálculo para evaluar resultados y extraer conclusiones en situaciones comerciales, sociales, científicas y otras.	CMCT CSC CMCT CAA
3º ESO		
Números decimales y racionales. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Error absoluto y relativo. Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal. Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Operaciones con números expresados en notación científica.	BL2.1. Interpretar los números racionales, y sus propiedades (densidad, clasificación) y utilizarlos en situaciones comerciales, sociales, científicas y artísticas (encontrar pautas de belleza a través de los números en: fi, fractales, etc.), de medida, expresión, comparación y descripción de conceptos numéricos. BL2.2. Operar con los números racionales utilizando estrategias de cálculo (mental, estimación, uso de calculadoras, aplicaciones de escritorio, web o para dispositivos móviles, etc.) y los procedimientos (algoritmos convencionales u otros) más adecuados según la naturaleza del cálculo, para evaluar resultados, extraer conclusiones y tomar decisiones en situaciones comerciales, sociales, científicas y artísticas (encontrar pautas de belleza a través de los números en: fi, fractales,etc.) y otras.	CMCT CSC CMCT CAA
4º ESO		
Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. Representación de números en la recta real. Intervalos.	BL2.1. Interpretar los números reales y sus propiedades y utilizarlos en situaciones comerciales, sociales, científicas y artísticas (encontrar pautas de belleza a través de los números en: fi, fractales, etc.), de medida, expresión, comparación y descripción de conceptos numéricos.	CMCT CSC
1º Bachillerato		
Números reales: estudio para la comprensión de la realidad. Valor absoluto. Desigualdades. Distancias en la recta real. Intervalos y entornos. Aproximación y errores. Notación científica. Sucesiones numéricas: término general, monotonía y acotación. El número *e*.	BL.2.1 Utilizar los números reales y sus operaciones, con los procedimientos más adecuados (estimaciones, representaciones, detección de patrones y regularidades, etc.), para extraer conclusiones sobre informaciones numéricas en contextos científicos con el apoyo de herramientas tecnológicas apropiadas (calculadora y aplicaciones de escritorio, web o para dispositivos móviles).	CMCT CD CAA

En la tabla anterior se detallan los contenidos más relevantes del curriculum, los criterios de evaluación tal y como están establecidos en el Decreto así como las distintas competencias del currículo (abreviado CC en la tabla). Las otras abreviaturas en la columna de competencias son las siguientes: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT); Competencia digital (CD); Competencia aprender a aprender (CAA) y Competencias sociales y cívicas (CSC).

Es necesario indicar que en la tabla no se detallan todos los aspectos del currículum de secundaria que pueden verse enriquecidos por el árbol de fracciones y el concepto de fracción mediante. Se han escogido sólo los más relevantes y los que se hallan más directamente implicados. Podemos imaginarnos numerosas aplicaciones del árbol de Stern-Brocot a la estadística y la probabilidad, por ejemplo. Igualmente, hay una serie de actividades que pueden sugerirse para 2º de Bachillerato. La tabla recoge aquellos contenidos que se ven afectados por los conceptos de este trabajo a un nivel fundamental.

Discutimos a continuación curso por curso la aplicación de los contenidos de este trabajo.

Primero y segundo de ESO

En el primer curso de Enseñanza Secundaria puede enseñarse la construcción del árbol de las fracciones en el contexto de actividades que involucran también el descubrir el uso de éstas en comparaciones, descripciones, divisiones, distribuciones y medida (Rubí, 2017). Si un número es divisible por otro, el resultado de dividir se ubica en la rama $1/1, 2/1, 3/1, 4/1, \ldots$ del árbol de fracciones (los números naturales). El resto del árbol de fracciones contiene todas las razones posibles entre números naturales que no son divisibles uno por otro. Nos referiremos a este árbol a continuación tal y como se muestra en la Fig. 5, pero se sobreentiende que las ramas del árbol pueden continuarse hasta donde convenga. De hecho, creemos que es conveniente que un árbol de Stern-Brocot gigante con 8 niveles ($2^8 = 256$ fracciones en el octavo nivel) se diseñe, fotocopie, imprima y se utilice a lo largo del curso como carta de navegación para descubrir los números racionales, y para referirse a él en los ejercicios. Regiones del árbol o nodos concretos pueden colorearse para ilustrar aspectos concretos de subconjuntos de fracciones. También, regiones concretas pueden ampliarse a la resolución que se quiera y añadir tantas fracciones en ellas como sea necesario (igual que un atlas muestra imágenes del mundo y de países concretos o, mejor, igual que un planisferio celeste donde, a veces, se excluyen algunas constelaciones y se amplían otras con más detalle en algunas cartas).

Una rama muy importante del árbol de Stern-Brocot es $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \ldots$... Este camino milenario y armónico nos proporciona todas las fracciones egipcias. Resulta natural utilizar esta rama para ilustrar fracciones obtenidas de tomar pedazos tomados de un pastel dividido en partes iguales.

Un número compuesto n admite una única factorización en términos de números primos $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$. Por medio de ejemplos puede investigarse la relación entre la descomposición en factores de n y de $n+1$, haciendo variar n. Los alumnos descubrirán así (siempre a través de ejemplos) que n y $n+1$ no tienen ningún factor común. Y como estos números no tienen ningún factor común, forman fracciones irreducibles. En consecuencia, se hallan en el árbol de Stern-Brocot y los alumnos pueden buscar dónde. La pregunta es, por tanto, dónde se encuentran las fracciones del tipo $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{n+1}{n}$. Para ello, se da valores a n de tal forma que se construyen las secuencias $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \ldots$ y $2/1, 3/2, 4/3, 5/4, \ldots$.. Dos nuevas ramas importantes del árbol de Stern-Brocot comienzan a presentarse ante los alumnos.

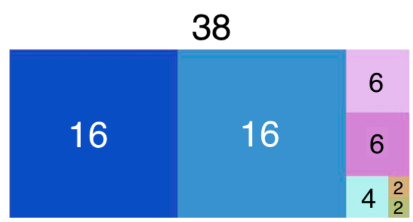
La fracción inversa m/n a cualquier fracción n/m se halla en el árbol de Stern-Brocot en posición simétrica respecto de una línea vertical que baja de la fracción $1/1$ perpendicular al fondo del árbol. Junto con operaciones que resultan de plegar papeles coloreados y explicar la inversa visualmente, el árbol de Stern-Brocot añade un elemento visual más para formarse una imagen mental del concepto de fracción inversa a una dada y ubicarla mentalmente. Las ramas del árbol con fracciones de la forma $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{n+1}{n}$ contienen fracciones que son unas inversas de las otras. Se van acercando a $1/1$ conforme la rama desciende hasta el infinito, una por la izquierda y la otra por la derecha en posición simétrica. Por contra, las ramas con fracciones de la forma $1/n$ y $n/1$ también inversas una de la otra, se alejan de $1/1$ conforme se desciende en el árbol. Los fenómenos que años más tarde quedarán organizados por el concepto de límite comienzan a manifestarse ya aquí en las experiencias de los alumnos, aunque éstos aún no las conceptualicen matemáticamente. El infinito también comienza a manifestarse de muchas maneras, no como algo infinitamente grande, sino también como infinitamente pequeño... ¡o infinitamente recóndito, infinitamente encajado en cualquier lugar! La imaginería de caminos, ramas, cartografías... abre un espacio donde puede habitarse y vivirse la maravilla estética que son las matemáticas.

¿Qué es lo que ocurre, por ejemplo, al multiplicar dos fracciones del árbol? El resultado caerá a la izquierda de $1/1$ si el producto de denominadores es mayor que el de los numeradores y a la derecha si el producto de los numeradores es mayor que el de los denominadores. Si el producto de numeradores y denominadores es igual, el resultado será $1/1$ (¡fracciones inversas!).

Si sumamos dos fracciones del árbol, el resultado siempre está a la derecha de las fracciones-sumandos. Por tanto, el error que se comete al tomar la fracción mediante en vez de sumar fracciones se puede corregir ahora incluso visualmente ya que la fracción mediante siempre “cae” en el árbol entre las fracciones originales, a diferencia de la fracción que resulta de sumarlas que siempre cae a la derecha.

Sobre el árbol resulta automático comparar fracciones: Si una está a la izquierda de la otra, entonces es menor que ella. Fracciones equivalentes a las que hay en el árbol no están, ellas mismas, sobre el árbol. De cada familia de fracciones equivalentes, el árbol sólo muestra a su representante más insigne: la fracción irreducible. Las fracciones equivalentes se construyen componiendo las irreducibles que hay en el árbol consigo mismas tantas veces como haga falta: las fracciones (o construcciones a las que las fracciones hacen referencia) representan la misma razón, el mismo número racional.

El máximo común divisor del numerador y denominador de cada fracción en el árbol es 1. El mínimo común múltiplo es el producto de numerador y denominador. Construyendo fracciones equivalentes a las dadas, el máximo común divisor de los nuevos numerador y denominador será el número por el que los hayamos multiplicado para construir la fracción equivalente. El mínimo común múltiplo sigue siendo el que era antes (el producto del numerador y denominador originales). El algoritmo de Euclides puede introducirse lentamente mediante ejemplos y de forma gráfica. La fracción continua puede introducirse también a través de estos ejemplos (nunca la representación general, nunca en forma algebraica) mostrando las conexiones entre todo lo que se pone en juego. Puede mostrarse la conexión entre el mcd de dos números naturales y el camino que se sigue en el árbol de Stern-Brocot. Un ejemplo gráfico de cálculo del mcd por el algoritmo de Euclides lo proporciona el siguiente gráfico que muestra la construcción que establece que el mcd de 38 y 16 es 2



Los números de veces que aparece cada cuadrado del mismo tamaño corresponden al número de movimientos en el árbol de Stern-Brocot en la dirección correspondiente. Completar cuadrados hacia la derecha significa moverse a la derecha en el árbol de fracciones. Completar cuadrados hacia abajo significa moverse hacia la izquierda. Es decir que

$$\frac{38}{16} = 2 + \frac{6}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{6}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{4}{6}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{6}{4}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} \tag{75}$$

y yendo dos veces a la derecha, dos a la izquierda, una a la derecha y una a la izquierda en el árbol de Stern-Brocot gigante, allí se encuentra la fracción $\frac{38}{16} = \frac{19}{8}$. Este tipo de explicaciones *no* sustituye a las ya existentes de estos conceptos sino que añade puntos de vista adicionales, que contribuyen a reforzar lo aprendido por formas tradicionales.

Sobre el árbol pueden ubicarse fracciones con denominadores de la forma $5^n 2^m$ (números decimales) y números que no son decimales. Con la calculadora podrá investigarse qué ocurre a unos números y qué a otros cuando llegue el momento. Las fracciones irreducibles se manifiestan así como entes individuales y distintos cada uno en su comportamiento: ¡Qué distinto es dividir 1 entre 5, 1 entre 3 y 1 entre 7!

Tercero de ESO

El problema de simplificar fracciones para obtener la irreducible puede abordarse básicamente de dos modos: Descomponiendo numerador y denominador en factores primos y cancelando todos aquellos divisores comunes o utilizando el método de Chuquet-Brocot, que puede explicarse en el aula indicando sobre el árbol el camino que se está siguiendo a cada paso. En nuestra opinión, ambos métodos habrían de abordarse.

Como problema se puede proponer, por ejemplo, simplificar la fracción $\frac{1073}{899}$. El método de descomponer en factores primos es trabajoso pues esta fracción se descompone como $\frac{1073}{899} = \frac{29 \cdot 37}{29 \cdot 31}$, lo que requiere dividir por todos los números primos hasta 29 tanto numerador como denominador (aunque ayudados por criterios de divisibilidad podamos descartar casos). Con el método de, por ejemplo, Brocot, se tiene que la fracción es mayor que $1/1$ y menor que $3/2$ y podemos tomar éstas como punto de partida. Buscamos p y q mínimos tales que $p/q = 1073/899$, es decir que $899p - 1073q = 0$. Entonces, iterando, y calculando $A(p,q) = 899p - 1073q$ a cada paso, tenemos que

Paso	Mediante $\left(\frac{p}{q}\right)$	$A(p,q) = 899p - 1073q$
0	$\frac{3}{2}$	$+551$
1	$\frac{4}{3}$	$+377$
2	$\frac{5}{4}$	$+203$
3	$\frac{6}{5}$	$+29$
9	$\frac{37}{31}$	0
8	$\frac{31}{26}$	-29
7	$\frac{25}{21}$	-58
6	$\frac{19}{16}$	-87
5	$\frac{13}{11}$	-116
4	$\frac{7}{6}$	-145
0	$\frac{1}{1}$	-174

En 9 pasos, por tanto, llegamos a la solución exacta, sin más que insertar fracciones mediantes y ver a qué lado caen de la fracción objetivo. Nótese como $A(p,q)$ revela, asímismo, el factor común (29) entre numerador y denominador.

Para estimar y obtener raíces de forma aproximada, puede emplearse igualmente el método de Chuquet o de Brocot. En todos estos casos será instructivo ir indicando qué camino vamos recorriendo en el árbol.

Como hemos indicado antes, las fracciones del árbol de Stern-Brocot pueden clasificarse en decimales y no-decimales. Para investigar números decimales exactos y periódicos pueden recorrerse sistemáticamente los nodos de los primeros niveles del árbol, relacionando los denominadores no divisibles por 5 ni 2 con la cantidad de cifras que obtenemos en los períodos tras la coma decimal.

Otros aspectos no incluídos en el curriculum también merecen investigarse, como por ejemplo la estructura de la fracción generatriz. Obtenida una fracción generatriz específica, ¿cuáles son sus antecesores y sus descendientes en el árbol? ¿cómo son las formas decimales de estos, comparados con los de la fracción generatriz? ¿pueden extraerse algunas conclusiones generales? Este tipo de preguntas pueden abordarse en el aula y trabajarse por grupos y puede conducir a pequeños descubrimientos, experiencias adicionales e incluso ideas nuevas.

Cuarto de ESO y primero de Bachillerato

Es en estos cursos donde el árbol de fracciones despliega quizá su mayor utilidad y plenitud, pues comienza a estudiarse el significado y la posibilidad de descender hasta el infinito por todas sus ramas. Estas ramas proporcionan sucesiones de Cauchy paradigmáticas: conforme el número de iteraciones tiende a infinito, cada nueva fracción mediante se inserta en un intervalo cada vez menor. El concepto de *intervalos encajados* es ilustrado de forma simple y directa a través de la inserción de la fracción mediante entre dos fracciones vecinas en el árbol. Puede mostrarse que todos los números racionales están representados por una fracción continua con un número *finito* de términos que se refieren al número finito de movimientos descendentes que hacemos por ramas del árbol. Existen, sin embargo, fracciones continuas que no terminan nunca, como vimos en la Sección 4.4.1.2. Esto puede explicarse de manera didáctica con ejemplos.

Si tomamos $\frac{7}{5}$, tenemos

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+1}} = [1; 2, 1, 1] \tag{76}$$

La suma de los cocientes parciales $1 + 2 + 1 + 1 = 5$ nos informa que esta fracción está en el quinto nivel del árbol de Stern-Brocot, como se comprueba fácilmente mirando el árbol. La fracción se obtiene yendo en el árbol una vez a la derecha, dos veces a la izquierda y una a la derecha partiendo desde $1/1$ (primer nivel).

Sin embargo, veamos qué sucede ahora por ejemplo con $\sqrt{6}$. Este número es la raíz positiva de la ecuación $x^2 = 6$. Por tanto, como $x^2 = 6 = 4 + 2$, tenemos que $x^2 - 4 = 2$, $(x - 2)(x + 2) = 2$, de donde

$$x = 2 + \frac{2}{2 + x} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} \tag{77}$$

Reemplazando x en el miembro derecho por el propio miembro derecho de esta expresión obtenemos

$$x = 2 + \frac{2}{2 + x} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2 + \frac{2}{2+x}}{2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}}}} \tag{78}$$

Podemos seguir con este proceso hasta el infinito, la fracción continua nunca termina y produce la representación periódica $[2; 2, 4, 2, 4, 2, \ldots]$. Es decir, $\sqrt{6}$ se alcanza en el infinito, realizando un movimiento en el árbol de Stern-Brocot que consiste en ir primero 2 veces a la derecha, luego 2 a la izquierda, 4 a la derecha, 2 a la izquierda, etc. Tal número es *irracional*, pues no puede hallarse en ninguna posición finita del árbol de Stern-Brocot, sino en la línea real, que se forma en el infinito.

Por supuesto, se puede ilustrar esto con otros ejemplos más sencillos que $\sqrt{6}$ (ya hemos considerado $\sqrt{2}$ y el número de oro en la Sección 4.4.1.2). Otros ejemplos de números irracionales notables son

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, \ldots] \quad (79)$$

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots] \quad (80)$$

Nótese que en el número e hay un patrón que puede discernirse. No es el caso del número π. Ambas fracciones continuas son infinitas y ambos números son, por tanto, irracionales.

Discutimos ahora otras actividades que involucran a la mediante y al árbol de fracciones, algunas de ellas matemáticamente ricas y que ilustran la belleza de las matemáticas.

Paradoja de Simpson

Consideremos el siguiente problema. *La tasa de mortandad en hombres en el ejército es $\frac{3}{5}$, siendo inferior a la de hombres en el cuerpo de bomberos $\frac{8}{13}$. La tasa de mortandad de mujeres en el ejército es $\frac{7}{10}$, siendo también inferior a la de mujeres en el cuerpo de bomberos $\frac{5}{7}$. Sin embargo, la tasa de mortandad de bomberos $\frac{8+5}{13+7} = \frac{13}{20}$ es inferior a la de soldados $\frac{3+7}{5+10} = \frac{10}{15}$.* (En este problema se sobreentiende, por supuesto, que la razón de hombres soldado a hombres bombero es de $5/13$ y de mujeres soldado a mujeres bombero de $10/7$.)

Para muchas personas, el hecho de que la tasa de mortandad de cada sexo sea menor en el ejército que en el cuerpo de bomberos sugiere que la tasa de mortandad de soldados es menor que de bomberos. La intuición conduce aquí a un resultado falso. No existe en realidad ninguna paradoja: las mediantes que resultan de mezclar las poblaciones de hombres y mujeres en cada oficio distinto no pueden comparse a la ligera con los resultados obtenidos de las poblaciones por separado.

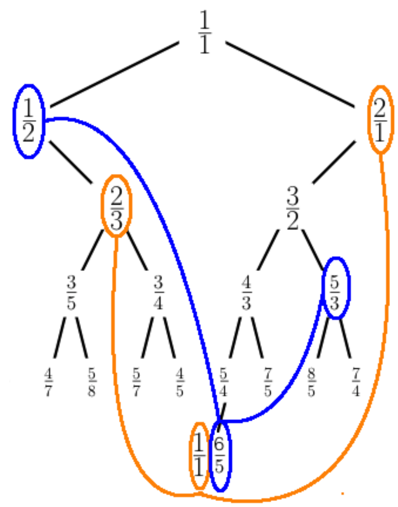


Figura 10: Pares de fracciones que pueden conducir a la paradoja de Simpson

En el fragmento de árbol de Stern-Brocot de la Figura 12 se observa que

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
$$\frac{5}{3} < \frac{2}{1}$$

Sin embargo

$$\frac{6}{5} = \frac{1+5}{2+3} > \frac{2+2}{3+1} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1}$$

Por tanto cuando estas relaciones concretas aparezcan en algún problema, se dará el resultado aparentemente contradictorio que conduce a la paradoja de Simpson. Sobre el árbol de Stern-Brocot pueden buscarse más pares de fracciones que obedezcan esta propiedad, y extraerse resultados generales sobre cuándo puede ocurrir la paradoja de Simpson. Nótese, por ejemplo, que si arriba sustituimos $2/3$ por $3/5$ o $4/7$, etc. se seguirán teniendo resultados "paradójicos".

Círculos de Ford

Tomemos la recta real y con centro en cada número racional hagamos descansar un círculo que tenga a la recta real por tangente. ¿Es posible hacer que todos los círculos hasta el infinito sean tangentes los unos a los otros sin solaparse jamás? ¿Cuál debe ser su radio? Este es un bonito ejercicio que lleva a la construcción de los círculos de Ford, llamados así en honor al matemático estadounidense Lester R. Ford que los descubrió. Estos círculos se muestran en la Figura 11. Con ellos puede "decorarse" toda la recta real, si bien el aspecto es el del dominio fundamental formado por el intervalo unidad $[0, 1]$ trasladado a lo largo de la recta real un número entero n de veces.

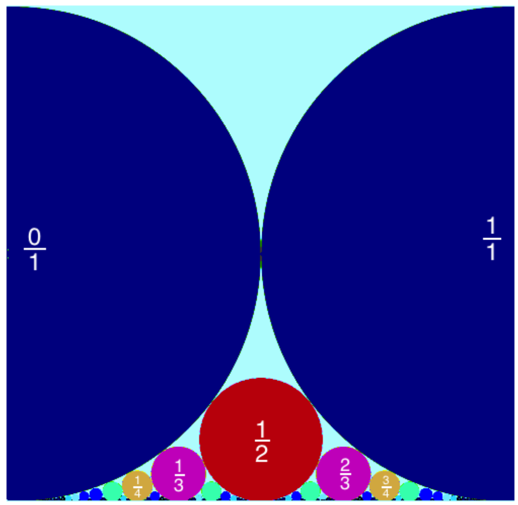


Figura 11: Círculos de Ford (dominio fundamental).

¿Cuál es el radio r_{ab} de un círculo asociado a una fracción a/b? Sabemos que el centro del círculo se halla en el plano en el punto $(a/b, r_{ab})$. La fracción adyacente c/d tiene asociado un círculo cuyo centro está en la posición $(c/d, r_{cd})$. El módulo de la distancia entre los centros está dado por

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + (r_{ab} - r_{cd})^2} = \sqrt{\frac{1}{(bd)^2} + (r_{ab} - r_{cd})^2} \tag{81}$$

donde hemos utilizado que $ad - bc = 1$ porque las fracciones son adyacentes en el árbol de Stern-Brocot. Para que los círculos se toquen tangencialmente, necesariamente esta distancia ha de ser igual a la suma de los radios de los círculos. Por tanto, se tiene que $d = r_{ab} + r_{cd}$. De aquí se obtiene que

$$r_{ab} + r_{cd} = \sqrt{\frac{1}{(bd)^2} + (r_{ab} - r_{cd})^2} \tag{82}$$

de donde, elevando al cuadrado ambos miembros

$$\begin{aligned} r_{ab}^2 + r_{cd}^2 + 2r_{ab}r_{cd} &= \frac{1}{(bd)^2} + r_{ab}^2 + r_{cd}^2 - 2r_{ab}r_{cd} \\ 4r_{ab}r_{cd} &= \frac{1}{(bd)^2} \qquad (83) \end{aligned}$$

y, así, obtenemos finalmente

$$r_{ab} = \frac{1}{2b^2} \qquad (84)$$

$$r_{cd} = \frac{1}{2d^2} \qquad (85)$$

Conclusión: el círculo de Ford correspondiente a la fracción $\frac{a}{b}$ del árbol de Stern-Brocot, tiene centro con posición en $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ y radio $r_{ab} = \frac{1}{2b^2}$.

Desde esta simple construcción muchos resultados de la aproximación diofántica se convierten en obvios. Por ejemplo, dado un número irracional x, hay infinitos números racionales $\frac{p}{q}$ tales que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q^2} \qquad (86)$$

Esto es obvio: todo número irracional x en la recta real se encuentra entre infinitos pares de fracciones adyacentes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en el árbol de Stern-Brocot. Si lanzamos una perpendicular a la recta real que pase por x, esta recta intersecta bien el círculo de Ford de a/b o bien el de c/d en cuyo caso hacemos p/q igual a esa fracción.

5. Parte experimental

Para mostrar que el concepto de mediante y el árbol de fracciones pueden ser relevantes en el currículum de enseñanza secundaria, se propone la realización de un pequeño cuestionario que permite indagar en cómo han interiorizado los alumnos el orden de los números racionales en la recta real y cómo esta representación mental del orden evoluciona a lo largo de los cursos de secundaria.

La hipótesis de trabajo que se pretende validar y que motiva esta investigación empírica está fundamentada en el currículum de secundaria y es la siguiente:

> La mayoría de los alumnos de primeros cursos de ESO manipulan fracciones para compararlas y no comparan formas decimales (obtenidas como cocientes). Esta situación desaparece a lo largo de la ESO: Tan pronto como los alumnos comienzan a obtener formas decimales con la calculadora, la comparación directa de fracciones por otros métodos queda en desuso y cae en el olvido.

Dentro de las severas limitaciones de este estudio (pequeñez de la muestra y brevedad del cuestionario) se diseñan dos actividades que emplean ambas la fracción mediante. El árbol de fracciones es utilizado en el diseño de las actividades, pero no aparece explícitamente en ellas: es necesario notar que el cuestionario se presenta a alumnos a los que no se ha introducido nunca antes el árbol de fracciones en la enseñanza y que la motivación del cuestionario es investigar la conjetura enunciada sobre estas líneas. La fracción mediante sí que puede introducirse en el cuestionario explícitamente, debido a su sencillez.

5.1. Metodología

Se propone un breve cuestionario que consiste sólo de dos preguntas y para el que se deja para su realización 30 minutos a los estudiantes. El cuestionario está diseñado haciendo uso de la fracción mediante y del árbol de fracciones. Los estudiantes *no* han sido introducidos nunca antes a estos conceptos y una pequeña introducción previa es necesaria para trabajar con la mediante. Aunque en el propio cuestionario se proporciona la receta para generar fracciones intermedias a partir de la mediante, los estudiantes de 2º de ESO aún no están familiarizados con el álgebra y se hace necesario mostrarles a través de ejemplos en la pizarra (antes de realizar el cuestionario) cómo funciona la fracción mediante.

1. Dadas dos fracciones $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, la fracción $\frac{a+c}{b+d}$ siempre cumple que

$$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$$

Las siguientes fracciones

$$\frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4},$$

están desordenadas. Completa con ellas los huecos del siguiente esquema ordenado:

$$\frac{1}{3} < — < \frac{1}{2} < — < \frac{2}{3} < — < \frac{1}{1} < — < \frac{3}{2} < — < \frac{2}{1} < — < \frac{3}{1}$$

2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < —— < \frac{878}{323}$$

Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

Figura 12: El cuestionario.

Se pregunta a los alumnos primero que ordenen una serie de fracciones sencillas que se les proporcionan desordenadas. Todas estas fracciones están tomadas del nivel cuarto del árbol de Stern-Brocot. Se les da las fracciones de los niveles anteriores todas ellas ordenadas y se les pide que introduzcan las que están desordenadas en los huecos, dejándolas ordenadas. El ejercicio se resuelve inmediatamente haciendo uso de la fracción mediante. En cualquier caso, las fracciones son muy sencillas de comparar y, por tanto, el ejercicio se concibe “para que lo hagan bien todos los alumnos” como *Warm-Up* para el segundo ejercicio.

En el segundo ejercicio se les da dos fracciones complicadas $\frac{492}{181}$ y $\frac{878}{323}$ y se les pide que encuentren una fracción $\frac{p}{q}$ entre ambas. Los alumnos no saben $-$ni necesitan saber$-$ que las fracciones de este segundo ejercicio son aproximaciones sucesivas al número e y que se hallan en los niveles 15 y 17 del árbol de Stern-Brocot, respectivamente. Así, la distancia de estas fracciones es $878 \cdot 181 - 492 \cdot 323 = 2$. Para encontrar una fracción intermedia, esto pueden hacerlo aplicando la fracción mediante, introducida en el primer ejercicio, o por cualquier otro método que se les ocurra. Sin embargo, se les pide que comprueben el resultado por al menos dos formas y es aquí donde se espera una disparidad de respuestas. Se explica a los alumnos que por *comprobar* se entiende aquí *mostrar* que la fracción es tal que $\frac{492}{181} < \frac{p}{q}$ y $\frac{p}{q} < \frac{878}{323}$. Se pide a los alumnos que comprueben el resultado por, al menos, *dos métodos distintos* que conozcan.

5.2. Resultados

El cuestionario se distribuyó a un total de 52 alumnos del IES Luis Vives de Valencia de 2º y 3º de ESO y 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales. El curso de 2º de ESO constaba de 16 alumnos, el de 3º de ESO de 19 alumnos y el de 1º de Bachillerato de 17 alumnos.

El primer ejercicio lo hicieron bien 51 de los 52 alumnos y la discusión del siguiente texto, mientras no se indique lo contrario, se refiere al segundo ejercicio. En este, aunque la inmensa mayoría escribió satisfactoriamente una fracción entre las dos dadas, tal y como se pedía en el ejercicio, la comprobación del resultado por dos métodos distintos sólo fue realizada satisfactoriamente por una alumna de 3º de ESO. El resto utilizó la mayoría un método (aunque hicieran tentativas con otros) y una gran parte de los alumnos no utilizó ninguno, no presentando ninguna justificación ni comprobación del resultado. De los 52 alumnos, sólo hubo en total 18 alumnos que comprobasen bien el resultado *al menos por un método*.

En la siguiente tabla se detallan los resultados generales del cuestionario, indicando el número de alumnos en cada caso, desglosado por niveles y por grado de realización de los ejercicios.

	2º ESO (16 alumnos)	3º ESO (19 alumnos)	1º Bachillerato (17 alumnos)	Total (52 alumnos)
Primer ejercicio				
Resultado correcto	16	19	16	51
Resultado incorrecto	0	0	1	1
Segundo ejercicio				
Resultado correcto	16	17	16	49
que comprueban:	10	13	12	35
- bien por dos métodos	0	1	0	1
- bien por un método	4	3	10	17
- de forma incompleta	3	7	0	10
- de forma incorrecta	3	2	2	7
que no comprueban	6	4	4	14
Resultado incorrecto	0	0	1	1
No dan resultado	0	2	0	2

Salta a la vista en la tabla la gran proporción de alumnos que no comprobó el resultado (14 alumnos) o que lo hicieron de forma incorrecta (7 alumnos) o incompleta (10 alumnos). En total, esto supone un total de 34 alumnos (el 65.3 % de la muestra). La proporción mayor de alumnos que no comprobó el resultado obtenido o que lo comprobó de forma incorrecta se concentra en 2º de ESO, lo que se justifica por la extrañeza causada por las fracciones puestas en juego (con numerador y denominador altos). La proporción mayor de alumnos que comprobó correctamente la solución por, al menos, un método se dio en 1º de Bachillerato, lo que se justifica por la facilidad del método de comparar formas decimales mediante la calculadora.

A continuación, describimos la comprobación correcta del resultado por cada uno de los métodos empleados por los alumnos. Para dar el resultado todos (menos el alumno que dio el resultado incorrecto) utilizaron la fracción mediante a las dos dadas y escribieron

$$\frac{492}{181} < \mathbf{\frac{1370}{504}} < \frac{878}{323} \tag{87}$$

Algunos de ellos simplificaron la fracción mediante dividiendo por el factor 2 que comparten numerador y denominador. El método al que nos referiremos por 'Método $ad > bc$' consiste en comparar primero la segunda fracción con la primera y después la tercera con la segunda multiplicando el numerador de una por el denominador de la otra y comparando los resultados. Esto conduce a comprobar que $1370 \cdot 181 > 504 \cdot 492$ y que $878 \cdot 504 > 1370 \cdot 323$ lo que se consigue meramente multiplicando.

El método 'Denominador común' es similar al método $ad > bc$ pero reduciendo las fracciones a denominador común y comparando los numeradores de las fracciones que resultan (el método se reduce pues al Método $ad > bc$ mediante esta operación).

Finalmente el método de las formas decimales consiste en tomar los cocientes que resultan de dividir numerador y denominador de las fracciones y comparar los números resultantes tomando un número suficiente de dígitos significativos. Se tiene que

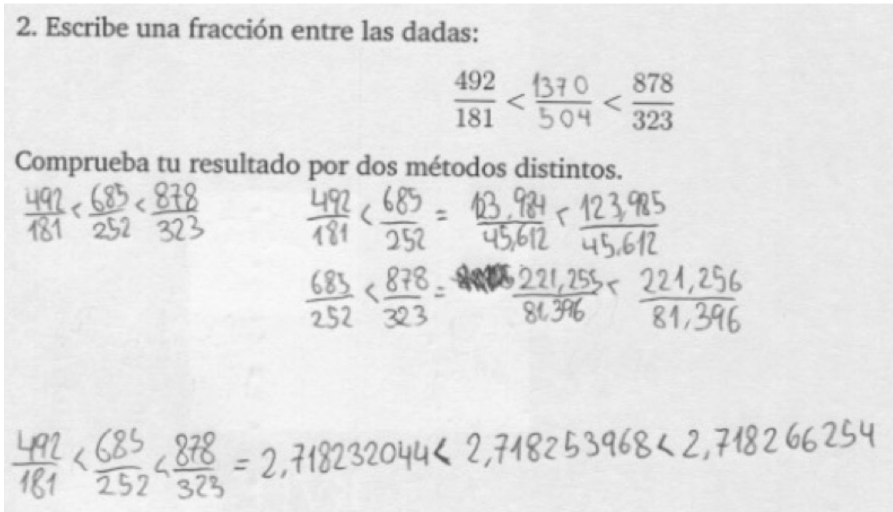
$$\frac{492}{181} = 2.71823204\ldots \qquad \frac{1370}{504} = 2.71825397\ldots \qquad \frac{878}{323} = 2.71826625 \tag{88}$$

de donde se sigue el resultado (87).

En la tabla siguiente, se muestra el método empleado por aquellos alumnos que comprobaron el resultado.

Método	2º ESO	3º ESO	1º Bachillerato	Totales
$ad - bc$	9	0	0	9
Denominador común	1	1	0	2
Formas decimales	0	12	10	22
Otros	0	0	2	2
Totales	10	13	12	35

Vemos que el método más utilizado por estudiantes de 2º de ESO fue el $ad > bc$, mientras que el más utilizado por 3º ESO y 1º Bachillerato fue el método de las formas decimales. En 3º de ESO, la única alumna del total de los 52 que comprobó el resultado por dos métodos distintos tal y como se pedía, utilizó el método del denominador común y la forma decimal, simplificando además la fracción mediante a $\frac{685}{252}$ (lo que simplificó también sus cálculos).



2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < \frac{1370}{504} < \frac{878}{323}$$

Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

$\frac{492}{181} < \frac{685}{252} < \frac{878}{323}$

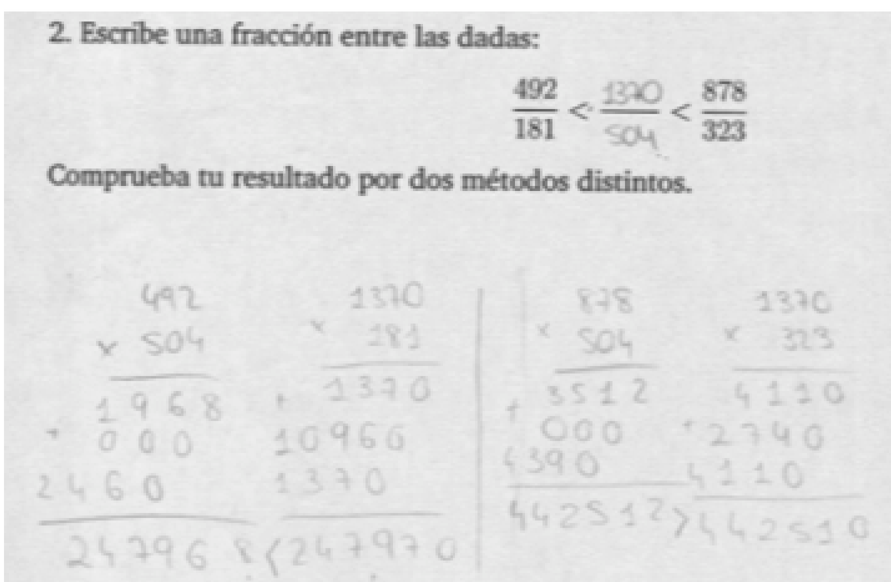
$\frac{492}{181} < \frac{685}{252} = \frac{123,984}{45,612} < \frac{123,985}{45,612}$

$\frac{685}{252} < \frac{878}{323} = \frac{221,255}{81,396} < \frac{221,256}{81,396}$

$\frac{492}{181} < \frac{685}{252} < \frac{878}{323} = 2,718232044 < 2,718253968 < 2,718266254$

El primer método que ofrece la alumna correctamente es el del denominador común. El segundo, el de las formas decimales.

Un ejemplo elegante de aplicación del método $ad > bc$ lo proporciona este estudiante de 2º de ESO, quien dispone los productos ad y bc de forma ingeniosa para desembocar en la comparación y comprobación del resultado



2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < \frac{1370}{504} < \frac{878}{323}$$

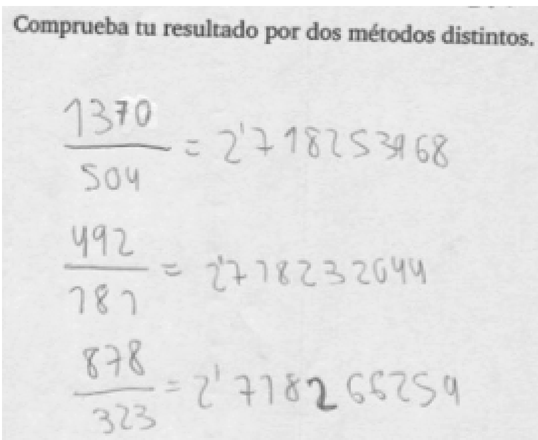
Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

492×504: 1968 + 000 + 2460 = 247968 ; 1370×181: 1370 + 10960 + 1370 = 247970 ; 247968 < 247970

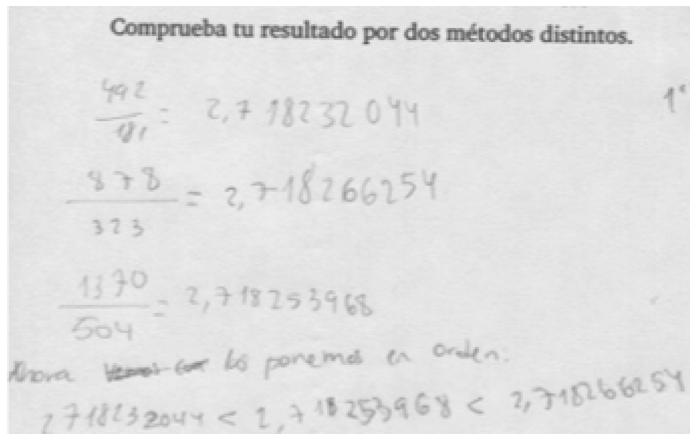
878×504: 3512 + 000 + 4390 = 442512 ; 1370×323: 4110 + 2740 + 4110 = 442510 ; 442512 > 442510

La diferencia en el empleo de las formas decimales entre alumnos de 3º de ESO y de 1º de Bachillerato es que la mayoría de los alumnos de 3º de ESO olvidó establecer la relación de orden mediante el signo $<$ (o justificando de palabra cuál de las fracciones es la mayor y cuál la menor) mientras que los alumnos de 1º de Bachillerato no olvidaron esto.

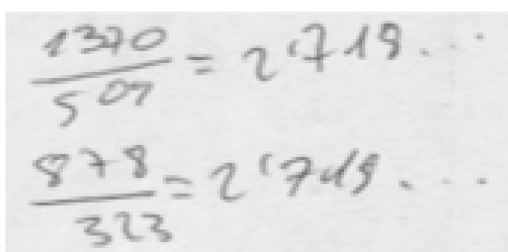
Realización típica
de alumno de 3º de ESO



Realización típica
de alumno de 1º de Bachillerato



Otro error típico de 3º de ESO es el de no tomar un número de dígitos significativos suficientemente alto que permita la comparación.

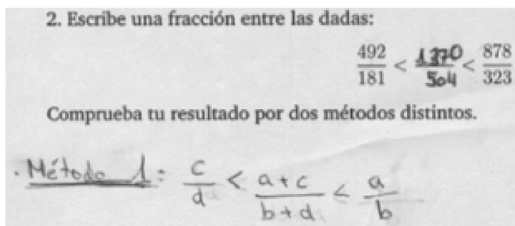


Aunque este error no se manifestó con frecuencia en los cuestionarios finales, en el aula de 3º de ESO se dieron varios casos en que mantuvimos una conversación como la siguiente:

ALUMNO: Cuando divido estas fracciones me sale lo mismo...
RESPUESTA: ¿Qué es lo que te sale?

ALUMNO: Me da dos coma setenta y uno.
RESPUESTA: ¿Y nada más?
ALUMNO: Sí, salen más números...

Un procedimiento típico de 1º de Bachillerato es el de "comprobar" el resultado utilizando la propia fracción mediante empleada para hallarlo, aceptando por fe que la fracción mediante cae entre las dos fracciones. Nótese que este es, en principio, el primer contacto de los estudiantes con la fracción mediante y que no conocen de ella, se supone, más que lo que se dice en el enunciado del primer ejercicio.

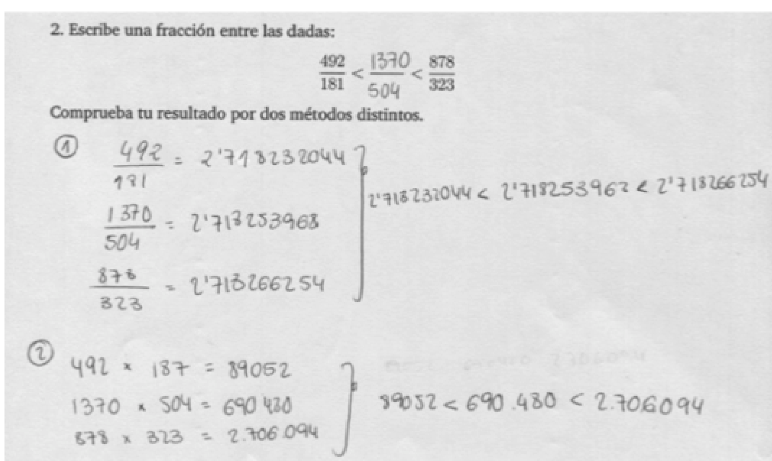

2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < \frac{1370}{504} < \frac{878}{323}$$

Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

· Método 1: $\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$

En este cuestionario, los alumnos de 1º de Bachillerato comprueban bien el resultado con formas decimales. Sin embargo, cuando utilizan operaciones y manipulaciones con fracciones lo hacen mal todos. En su primer método, el siguiente estudiante de Bachillerato emplea formas decimales correctamente. En su segundo método, sin embargo, compara muy incorrectamente las fracciones a través de los números enteros que resultan de multiplicar los numeradores y denominadores de cada una de ellas individualmente:


2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < \frac{1370}{504} < \frac{878}{323}$$

Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

① $\frac{492}{181} = 2'718232044$

$\frac{1370}{504} = 2'718253968$

$\frac{878}{323} = 2'718266254$

$2'718232044 < 2'718253968 < 2'718266254$

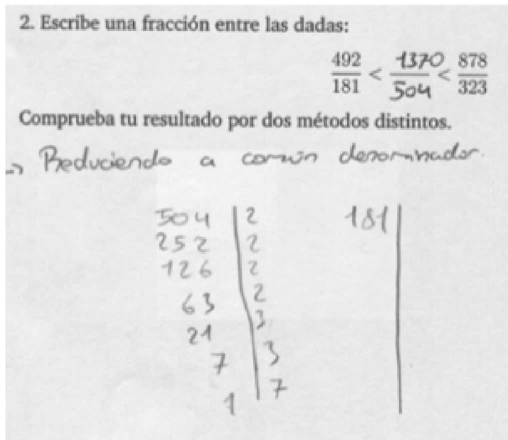
② $492 \times 181 = 89052$

$1370 \times 504 = 690.480$

$878 \times 323 = 2.706.094$

$89052 < 690.480 < 2.706094$

Otro ejemplo: una alumna de 1º de Bachillerato parece recordar algo de que para comparar fracciones es mejor reducirlas a un denominador común. Esto lo asocia ella inmediatamente a la descomposición en factores primos, que realiza sin saber adónde va y, finalmente, desiste.



2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < \frac{1370}{504} < \frac{878}{323}$$

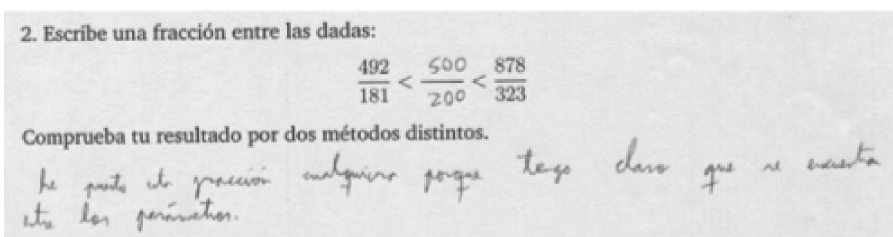
Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

→ Reduciendo a común denominador

504 | 2
252 | 2
126 | 2
63 | 2
21 | 3
7 | 3
1 | 7

181 |

El único alumno que realizó incorrectamente los dos ejercicios sitúa una fracción intermedia entre las dos dadas de manera arbitraria y la "comprueba" diciendo: "He puesto esta fracción cualquiera porque tengo claro que se encuentra entre los parámetros":



2. Escribe una fracción entre las dadas:

$$\frac{492}{181} < \frac{500}{200} < \frac{878}{323}$$

Comprueba tu resultado por dos métodos distintos.

He puesto esta fracción cualquiera porque tengo claro que se encuentra entre los parámetros.

Este alumno parece creer erróneamente que si el numerador y denominador de la fracción intermedia son intermedios a los numeradores y denominadores de las fracciones en los extremos (respectivamente), esto ya garantiza que una "fracción cualquiera" satisface el requerimiento del problema.

Este pequeño experimento permite, pues, comprobar la conjetura hecha al comienzo sobre cómo evoluciona el conocimiento de ordenación de los números racionales en la recta real a través de la enseñanza secundaria. Constatamos cómo los estudiantes tienden a olvidar determinadas manipulaciones de fracciones en favor del uso de la calculadora para producir formas decimales de los números racionales. En el curso de 3º de ESO parece hallarse la transición hacia esta forma de concebir los números racionales, consolidándose en los años siguientes.

El olvido de las manipulaciones de fracciones (el 'método $ad > bc$') no supone meramente la sustitución de un algoritmo por otro: la impresión es que el significado y la multiplicidad de sentidos latentes en la comparación de fracciones no se ha afianzado a nivel subjetivo.

Hemos mostrado, pues, a nivel empírico, cómo la fracción mediante y el árbol de fracciones pueden utilizarse también por el profesor para diseñar actividades que permiten indagar en el aprendizaje de los números racionales obtenido por métodos tradicionales.

6. Conclusiones

En este trabajo se han presentado elementos y materiales nuevos para el profesor de enseñanza secundaria con el objetivo de hacer más vívido y rico el aprendizaje de los números racionales y que cada vez haya más alumnos que no sólo sean usuarios competentes de fracciones, sino que puedan apreciar también la belleza de estos objetos, teniendo experiencias más profundas con ellos. En el trabajo se han introducido, a un nivel muy elemental, materiales ausentes en el currículum de secundaria como la fracción mediante, el árbol de fracciones (Stern-Brocot) y las fracciones contínuas, mostrándose la estrecha relación entre todos estos elementos. *Se ha presentado una fenomenología pura, histórica, didáctica y genética de estos conceptos* que sugieren formas en que podrían integrarse en el currículum de enseñanza secundaria y cómo podrían enriquecer significativamente la enseñanza.

Con la realización de este trabajo estamos ahora en condiciones de dar una respuesta sucinta a las preguntas de investigación formuladas en la Sección 2:

1. La fracción mediante se revela como resultado de una mezcla de dos componentes distintos que conducen a relaciones parte-parte y razones externas. El operador "compositor" $\&$ conduce a entender la fracción no sólo como descripción, comparación, división, distribución o medición sino también como *composición*.

2. Se ha mostrado que el árbol de fracciones es el medio de organización de las fracciones mediantes, proporcionándoles un orden y una genealogía. Asímismo, se ha mostrado que el árbol de fracciones, llamado también de Stern-Brocot, proporciona una construcción didáctica de *todos* los racionales así como una "cartografía" ordenada y completa de los mismos.

3. Hemos visto que el operador $\&$ toma su sentido de situaciones reales que involucran mezclar o componer algo desde constituyentes previos. En las operaciones con números racionales, el operador $\&$ permite navegar a través de los nodos del árbol de Stern-Brocot.

4. Hemos visto que el árbol de Stern-Brocot contiene todas las fracciones irreducibles una única vez. Como el árbol se construye enteramente por inserción de fracciones me-

diantes entre dos fracciones dadas (comenzando por $0/1$ y $1/0$) vemos, pues, que toda fracción irreducible puede interpretarse como una fracción mediante entre dos dadas. Esta interpretación se manifiesta en la enseñanza en el concepto de *intervalos encajados*.

5. Hemos expuesto la historia de la fracción mediante y los árboles de fracciones. Las conclusiones extraídas de estos textos nos han mostrado que la fracción mediante y el árbol de fracciones (en forma de tablas) se han utilizado en el pasado para hallar fácilmente valores medios entre dos dados, para resolver ecuaciones de forma númerica, aproximar números irracionales, simplificar fracciones, etc. Hemos visto que el problema de la construcción de mecanismos de relojes llevó a Brocot a descubrir las secuencias y el árbol que llevan su nombre, y hemos indagado en esta problemática.

6. Hemos mostrado que la fracción mediante puede introducirse tempranamente en la enseñanza elemental a través de numerosos ejemplos y que sería conveniente hacerlo antes de la suma de fracciones (que es una operación mucho más compleja). Además, hemos mostrado que el árbol de fracciones surge de manera didáctica de forma natural, cuando se emplea la fracción mediante, y que se puede construir el árbol de fracciones de forma radicalmente elemental, incluso sin hacer referencia a número alguno.

7. Aspectos como divisibilidad, conmensuración, la enseñanza del máximo común divisor y mínimo común múltiplo, la introducción de los números irracionales y la recta real, la aproximación de números irracionales con fracciones, la simplificación de fracciones, la equivalencia de fracciones, etc. pueden todos introducirse directamente desde la fracción mediante y el árbol de fracciones.

8. Los conceptos introducidos en este trabajo pueden sugerir una gran multitud de actividades nuevas en la enseñanza secundaria. Hemos puesto dos ejemplos, los círculos de Ford y la paradoja de Simpson, que muestran cómo el árbol de fracciones podría utilizarse en la enseñanza secundaria en los ámbitos de la geometría y la probabilidad y estadística, respectivamente.

La parte empírica de este trabajo ha mostrado una aplicación del concepto de mediante y árbol de fracciones al diseño de dos actividades que han permitido, a través de un cuestionario, indagar en cómo los estudiantes de enseñanza secundaria interpretan el orden de los números racionales y de qué maneras ordenan las fracciones, dependiendo del curso de enseñanza secundaria en que se encuentran.

Líneas futuras de investigación didáctica en relación con este trabajo serían, por ejemplo, la construcción de Modelos Teóricos Locales (Filloy et al., 2008) que incorporasen la didáctica de la fracción mediante y el árbol de fracciones dentro de la parte de modelos de competencia formales. En este sentido, extender la red expuesta en Real y Figueras (2015), Real et al. (2013) y Rubí (2017) para incorporar los contenidos del presente trabajo puede resultar fructífero en la confección de nuevos modelos de enseñanza de los números racionales.

Referencias

Aigner, M. y Ziegler, G. M. (2014). *Proofs from The Book*. Berlin: Springer Verlag. pp. 123-127.

Alsina, C. y Burgués, C. (2007). Los misterios de la fracción prohibida. *Suma*, 56, 39-42.

Argyris, J. H., Faust, G., Haase, M., Friedrich, R. (2016). *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*. Berlin: Springer Verlag.

Arnold V. I. (1998). On teaching mathematics. *Russian Mathematical Surveys*, 53, 229-236. Disponible en https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/∼munsteg/arnold.html (accedido en 24-6-2018).

Austin, D. (2008). Trees, Teeth, and Time: The mathematics of clock making. *AMS Feature Column*, Diciembre de 2008. Disponible en http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-stern-brocot (accedido en 24-6-2018).

Backhouse, R. y Ferreira, J. F. (2008). Recounting the rationals: twice! En *Mathematics of program construction*, volumen 5133 de *Lecture Notes in Computer Science* (pp. 79-91). Berlin: Springer.

Backhouse, R. y Ferreira, J. F. (2011). On Euclid's algorithm and elementary number theory. *Science of Computer Programming*, 76(3), 160-180.

Brocot, A. (1861). Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue Chronométrique*, 3, 186-194.

Calkin, N. y Wilf, H. (2000). Recounting the rationals. *American Mathematical Monthly*, 107, 360-363.

Chuquet, N. (1881). *Le Triparty en la science des nombres* Rome: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Farey, J. (1816). On a curious property of vulgar fractions. *Philosophical Magazine*, 47, 385-386.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de Aprendizaje en dos Modelos de Enseñanza de los Racionales* (Tesis doctoral). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D.F.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach.* Nueva York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Graham, R. L., Knuth, D. E., y Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Nueva York: Addison-Wesley, pp. 115-123.

Guthery, S. B. (2011). *A Motif of Mathematics*. Boston: Docent Press.

Hardy, G. H. y Wright, E. M. (2008). *An introduction to the theory of numbers.* Oxford: Oxford University Press.

Haros, C. (1802). Tables pour évaluer une fraction ordinaire avec autant de decimals qu'on voudra; et pour trouver la fraction ordinaire la plus simple, et qui approche sensiblement d'une fraction décimale *Journal de l'École Polytechnique*, 6, 364-368.

Husserl, E. (1949). *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica.* México D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Real, R., Gómez, B., y Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. *Épsilon* 30(3), 21-36.

Real, R. y Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of Didactical Phenomenology. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 346-353). Praga, República Checa: Charles University.

Roederer, J. G. (2008). *The Physics and Psychophysics of Music: An Introduction.* Nueva York: Springer.

Rubí, C. (2017). *Las fracciones como recurso fenomenológico de los números racionales en modelos de enseñanza*. Tesis Doctoral, CIEA-IPN, Unidad Zacatenco, México, D.F.

Smith, D. W. (2013). *Phenomenology.* En *Stanford Encyclopedia of Philosophy* En https://plato.stanford.edu/entries/phenomenology (accedida en 18-6-2018)

Sokolowski, R. (2012). *Introducción a la fenomenología.* Morelia: Jitanjáfora.

Stange, K. E. (2014). *An arborist's guide to the rationals.* arXiv preprint: https://arxiv.org/abs/1403.2928 (accedido en 24-6-2018)

Stern, M. A. (1858). Über eine zahlentheoretische Funktion. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 55, 193-220.

Tomás, R. (2014). From Farey sequences to resonance diagrams. *Physical Review Special Topics - Accelerator and Beams*, 17, 014001.

Anexos

A1. El árbol de Calkin Wilf

En el árbol matricial de la Sección 4.4.1.2, en vez de hacer la correspondencia (57) podemos hacer la siguiente (Backhouse y Ferreira, 2008, 2011):

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \to \frac{d+c}{b+a} \tag{89}$$

(sencillamente, hemos permutado a y d). Nótese que la fracción $\frac{d+c}{b+a}$ satisface también que $ad - bc = 1$ y, por tanto, es una fracción irreducible y mediante de dos fracciones irreducibles. Al aplicar la correspondencia (89) obtenemos el *árbol de Calkin-Wilf*, así denominado tras el trabajo de Calkin y Wilf (2000), que ofrecemos en la Figura 13 hasta 5 generaciones

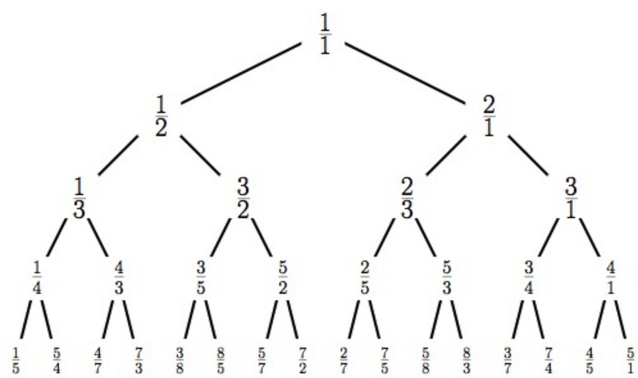
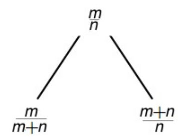


Figura 13: El árbol de Calkin-Wilf hasta la quinta generación

Nótese que todos los niveles contienen las mismas fracciones que las del árbol de Stern-Brocot, si bien están desordenadas.

Lo que es curioso de este árbol es que si observamos los nodos que emergen de uno dado (los descendientes del nodo) existe una relación sencilla entre las fracciones involucradas. Sea $\frac{m}{n}$ la fracción que aparece en un nodo concreto. Entonces, las fracciones descendientes en el nodo izquierdo y derecho, son respectivamente $m/(m+n)$ y $(m+n)/n$ conforme al siguiente esquema



Así, partiendo de $\frac{m}{n} = \frac{1}{1}$, podemos construimos un árbol de fracciones procediendo mediante esta regla hasta el infinito. Cada nodo del árbol tiene, pues, la misma estructura y $\frac{1}{1}$ es la fracción original de la que emanan todas las demás.

Aunque las fracciones no están ordenadas el árbol de Calkin-Wilf es una construcción útil que permite enumerar los racionales positivos: *El árbol de Calkin-Wilf contiene también todos los números racionales positivos y éstos aparecen en el árbol exactamente una sola vez.*

Mostremos esto mediante un argumento inductivo. La única fracción que no tiene ancestros, $1/1$, aparece en el árbol. Supongamos que r/s es la fracción con el menor numerador y el menor denominador que no aparece. Si $r > s$ entonces, su ancestro $(r-s)/s$ tampoco aparece y $r-s$ tiene menor numerador que r para el mismo denominador s, lo que contradice que r/s tenga menor numerador. Si $r < s$, entonces el ancestro $r/(s-r)$ tampoco aparece y, como $s-r < s$ esto contradice que r/s sea la fracción con mínimo denominador de las que no aparecen. Conclusión: todos los números racionales aparecen al menos una vez (Calkin y Wilf, 2000).

Veamos que sólo aparecen *exactamente* una vez. Este es el caso de la fracción $1/1$, pues no es posible que esta fracción tenga un ancestro r/s con $r \neq 0$ y $s \neq 0$: si lo tuviera, tendríamos que $1/1 = r/(r+s)$ o que $1/1 = (r+s)/s$, lo que no es posible para ningún valor de r y s. Supongamos que r/s aparece dos veces: entonces todos sus ancestros en generaciones anteriores también aparecen dos veces. Yendo hacia atrás en el árbol concluiríamos que $1/1$ aparece dos veces, lo que es absurdo.

El árbol de Calkin-Wilf contiene todos los números racionales *una sola vez*. Leyendo las fracciones de arriba a abajo y de izquierda a derecha, tenemos la *secuencia de Calkin-Wilf*

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots \tag{90}$$

con la que podemos *enumerar* todos los números racionales, i.e. establecer una biyección entre los naturales y los racionales. Esto implica que *el cardinal de los números racionales es igual al de los naturales* (Aigner y Ziegler, 2014).

Sea $x = m/n$ un número racional. Entonces su descendiente izquierdo es $m/(n+m) = x/(x+1)$ y el derecho es $(m+n)/n = x+1$. Yendo k veces a la derecha de $x/(1+x)$ y k veces a la izquierda de $x+1$ en el árbol de Calkin-Wilf, obtenemos dos fracciones que son consecutivas en la secuencia de Calkin-Wilf y que corresponden a un nivel que está k niveles por debajo de $x/(1+x)$ y $1+x$ en el árbol. Así, obtenemos los números racionales q_n y q_{n+1} de la secuencia de Calkin-Wilf, dados por

$$q_n = \frac{x}{1+x} + k \qquad q_{n+1} = \frac{x+1}{1+k(x+1)} \tag{91}$$

que son consecutivos, en algún lugar n de la secuencia. De aquí notamos que

$$\begin{aligned} q_{n+1} = \frac{x+1}{1+k(x+1)} &= \frac{1}{\frac{1}{1+x}+k} = \frac{1}{\frac{1}{1+x}+k+1-1} = \frac{1}{k+1-\frac{x}{1+x}} \\ &= \frac{1}{\left\lfloor \frac{x}{1+x}+k \right\rfloor + 1 - \left\{ \frac{x}{1+x}+k \right\}} = \frac{1}{\lfloor q_n \rfloor + 1 - \{q_n\}} \end{aligned}$$

lo que conduce a la elegante fórmula de Moshe Newman (Aigner y Ziegler, 2014)

$$q_{n+1} = \frac{1}{\lfloor q_n \rfloor + 1 - \{q_n\}} \tag{92}$$

que, partiendo de $q_1 = 1$ permite generar la secuencia de Calkin-Wilf.

Nótese que en la secuencia de Calkin-Wilf, el denominador de una fracción es el numerador de la siguiente. Por tanto, la secuencia tiene la forma $b(n)/b(n+1)$, donde $b(n)$, la secuencia de los numeradores, se conoce como la *secuencia diatómica de Stern*.

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4, \ldots \tag{93}$$

El valor n-ésimo de la secuencia diatómica de Stern está dado por la función fusc, $\mathrm{fusc}(n)$, que obedece las siguientes relaciones de recurrencia

$$\mathrm{fusc}(2n) = \mathrm{fusc}(n) \tag{94}$$

$$\mathrm{fusc}(2n+1) = \mathrm{fusc}(n) + \mathrm{fusc}(n+1) \tag{95}$$

partiendo de $\mathrm{fusc}(0) = 0$ y $\mathrm{fusc}(1) = 1$.

La función $\mathrm{fusc}(n)$ coincide con el número de coeficientes binomiales impares de la forma $\binom{n-1-r}{r}$, $0 \le 2r \le n-1$ y cuenta, asímismo, las formas de escribir $n-1$ como una suma de potencias de 2 de tal forma que cada potencia no entra más de dos veces en la suma. Ejemplo: $\mathrm{fusc}(7) = 3$, lo que significa que 8 puede escribirse de tres formas distintas como $8 = 2+2+4$, $8 = 4+4$ o $8 = 4+2+1+1$ de tal forma que las potencias de 2 involucradas no aparecen más de dos veces.