UNIVERSIDAD DE SALAMANCA, UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, UNIVERSIDADE DA CORUÑA, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA (ESTUDI GENERAL) Y CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

EL PROBLEMA DE LA INTUICIÓN EN LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA DE PHILIP KITCHER Y SU RELACIÓN CON EL PROBLEMA DE LA VISUALIZACIÓN EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Tesis doctoral presentada por

Lina María Peña Páez

dentro del
Programa de Doctorado en Lógica y Filosofía de la Ciencia.

Dirigida por
Drs. Jesús Alcolea Banegas y Vicente Manuel Claramonte Sanz

Valencia, abril de 2022

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Facultat de Filosofia i Ciències de l'Educació
Departament de Filosofia

AUTORIZACIÓN DE DIRECTORES
DEPÓSITO DE TESIS DOCTORAL

Nombre Doctoranda	LINA MARIA PEÑA PÁEZ
NIF/NIE/Pasaporte	EL77236
Título de la Tesis	ELPROBLEMA DE LA INTUICION EN LA FILOSOFIA DE LA MATEMÁTICA DE PHILIP KITCHER Y SU RELACIÓN CON EL PROBLEMA DE LA VISUALIZACIÓN EN LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

AUTORIZACION DEL DIRECTORES DE LA TESIS

El Dr. JESUS ALCOLEA BANEGAS, como codirector y tutor de la tesis, y el Dr. VICENTE MANUEL CLARAMONTE SANZ, como codirector de la tesis, en el Programa de Doctorado interuniversitario en Lógica y Filosofía de la Ciencia,

AUTORIZAN el depósito y la presentación de la tesis arriba mencionada para su defensa ante el tribunal correspondiente de acuerdo con lo establecido en la Normativa de Estudios de Doctorado de la Universitat de València.

Valencia, a 4 de abril de 2022

Los directores y tutor,

Fdo. Jesús Alcolea Banegas   Fdo. Vicente Manuel Claramonte Sanz

Resumen

En este trabajo desarrollamos la noción de intuición matemática, su papel en la teoría del conocimiento del filósofo Philip Kitcher y su relación con la visualización en matemáticas. Para la consecución de este propósito, en el capítulo uno presentamos los antecedentes sobre la noción de intuición en ámbitos como la filosofía, la matemática pura y la filosofía de la ciencia. Del recorrido por la literatura existente encontramos que la intuición es un proceso dinámico que proporciona conocimiento "evidente" el cual es producto de la experiencia (tanto física como intelectual), que puede llevar a la invención matemática y que requiere de la formalización para que sus resultados sean aceptados por la comunidad académica. En el segundo capítulo revisamos el papel de la intuición en dos matemáticos brillantes: Henri Poincaré y Kurt Gödel. Lo que nos llevará a preguntarnos sobre el rol de la intuición y el conocimiento matemático, en un tercer capítulo dedicado al dilema de Benacerraf. Luego de este recorrido entramos al estudio de la intuición matemática en la filosofía de Philip Kitcher, la importancia de la comunidad científica y la comunicación del conocimiento, desembocando en una de las ideas principales de Kitcher y es el protagonismo de la intuición cuando los grandes matemáticos (como se evidencia en la historia) están resolviendo problemas (capítulos 4 y 5). Finalmente, en el capítulo seis describimos la relación entre la intuición y la visualización; sus implicaciones en la práctica matemática y en la práctica educativa.

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer al Doctor Jesús Alcolea Banegas, quien con su dedicación, acompañamiento, orientación y paciencia fue un gran apoyo para el desarrollo de este documento y todas las actividades propias del doctorado.

A mis amigas y amigos quienes me animaron y me apoyaron con sus palabras y compañía durante estos años dedicados al estudio de la filosofía de la matemática.

Tabla de contenido

Introducción

La intuición matemática es una noción que ha sido abordada desde la filosofía, la educación, la filosofía de la ciencia y la matemática pura. El interés alrededor de la intuición no es algo reciente, hemos encontrado que se ha reflexionado en torno a ella desde la antigüedad y su interpretación ha mutado en diferentes épocas de la historia.

La literatura sobre la intuición matemática es bastante amplia y aun así no se tiene un consenso sobre lo que por ella debemos entender, "en algunos casos 'intuición' designa una facultad prerracional [...] en otros, una aptitud suprarracional [...] en otros, por fin, una variedad de la razón" (Bunge, 1996, p. 11). Más aún, los filósofos y los científicos encuentran significados opuestos para la intuición. Para los primeros, es por lo regular, una facultad de la mente que no es sensible, pero tampoco racional, se considera como un medio de conocimiento "a saber, una aprehensión súbita, total y exacta" (Bunge, 1996, p. 12). Para los segundos, la intuición es un conocimiento inferido y por tanto "mediato, parcial, inexacto y arduamente elaborado" (Bunge, 1996, p. 12). En general, la intuición ha sido usada cuando no se tiene una explicación plausible de la fuente de la que proviene una opinión o creencia.

Bajo este marco, cabe la pregunta: ¿cuál es el significado del término intuición en matemáticas? La respuesta no es posible de entender en un solo sentido. De hecho, la pregunta tendrá su propia forma de abordar dependiendo en cuál campo del saber sea realizada.

En la filosofía ha sido ampliamente abordada por pensadores como Descartes, Kant, Bergson, Husserl, entre otros. Y sus respuestas corresponden a la época y al contexto en que se dieron sus disertaciones.

En matemáticas, la intuición también ha sido tema de estudio como lo evidenciamos en Poincaré, Gödel, Hadamard, Brouwer y otros. Todos ellos han tenido interpretaciones diversas y han coincidido en que la intuición les ha permitido llegar a muchos de sus resultados asombrosos. Contra la idea de que el papel de la intuición en la matemática no ha cambiado desde Euclides, "lo que cambia no es el papel de la intuición, sino la intuición matemática" (Rodin, 2010, p. 53).

Algunos investigadores del campo de la educación también han acabado por plantearse el problema de la intuición. Uno de los más reconocidos en el campo de la resolución de problemas, George Pólya, adopta la intuición como tema clave en sus obras.

La filosofía de la matemática no ha escapado a esta pregunta y estudiosos de este campo disciplinar como Tieszen, Fischbein, Maddy y Kitcher, entre los más sobresalientes, se han ocupado del significado de la intuición en el desarrollo de sus obras.

En las últimas décadas, la filosofía de la ciencia ha adoptado como un tema fundamental la visualización, y esta situación ha llevado a un papel más relevante de la intuición matemática.

Como hemos descrito, la intuición es un tema de interés en la filosofía de la matemática. Por ello, nuestro trabajo tiene como propósito caracterizar la intuición matemática como un proceso dinámico. Para ello, hemos centrado nuestro interés en la concepción que tiene Philip Kitcher sobre la intuición, su relación con la práctica matemática y, finalmente, su influencia en la visualización.

La revisión de la bibliografía existente nos permite aproximarnos a una idea de intuición matemática como un proceso dinámico que tiene su "inicio" en el mundo real (sensible o matemático) del individuo que quiere acercarse a un conocimiento, donde las ideas propias de la disciplina, así como la formalización y aceptación de la comunidad académica forman parte de este proceso. La historia de la matemática nos ha mostrado que este proceso (denominado en este documento por intuición) puede ser interpretado como un esquema que ha llevado a la invención de conceptos, enunciados o teorías matemáticas.

En este trabajo la experiencia y el conocimiento matemático son necesarios para que este proceso que hemos llamado intuición matemática tenga resultados que puedan ser insertados en las teorías matemáticas existentes y puedan ser validados por los mecanismos que la ciencia dispone para ello.

Concebir la intuición matemática como un proceso dinámico, permite al individuo que "intuye" participar en la toma de decisiones y en la elección de los conceptos que le permitirán ahondar en los conocimientos que busca. Esto nos lleva a comprender que la intuición, a diferencia de lo que consideraban algunos filósofos, no es una "iluminación" que se presenta "de la nada". La intuición matemática puede ser aprehendida, lo que no desconoce las capacidades individuales de ciertos sujetos.

A la intuición se le ha asignado en muchos casos la característica de evidente (obvia, si se quiere). Pero algo será evidente para un individuo, una vez que tenga un manejo sobre el tema casi como un experto. La experticia en un tema es el producto de un esfuerzo intelectual, de un tiempo dedicado, lo que pareciera indicar que cuando se encuentran los resultados esperados estos son "obvios".

Estos conocimientos y creencias que los individuos han adquirido a lo largo de su práctica matemática, en particular, y de su vida, en general; hacen parte de eso que llamamos experiencia. Los grandes genios de la matemática han tenido un bagaje físico o intelectual (brindado por la academia, los libros, los maestros, colegas), es decir, es su experiencia en conjunto lo que ha permitido sus grandes avances en la matemática.

La invención en matemáticas es una de las curiosidades que han tenido muchos filósofos y educadores en la historia. ¿Se inventan las matemáticas? ¿Se descubren? ¿Son un producto social y cultural? Las respuestas a estas preguntas dependen en gran medida de la concepción que tengan los individuos frente a la naturaleza de los objetos matemáticos. Ahora bien, sostenemos en este documento que los matemáticos talentosos tienen una capacidad de invención. Y esta capacidad es el resultado de la intuición matemática, entendida como el proceso que implica la experiencia y la formalización.

Para el filósofo francés Henri Bergson, la invención es el resultado de convertir un esquema dinámico en imágenes claras y distintas (Bergson, 2015). Y por esquema dinámico podemos entender una actitud intelectual que puede implicar la preparación a la llegada de imágenes o la organización de ellas una vez están en la conciencia.

Bajo esta interpretación de Bergson, nosotros entenderemos la intuición matemática como ese esquema dinámico cuyos "resultados" más profundos llevarán al matemático al descubrimiento de nuevos conceptos, proposición de enunciados e invención de teorías.

La invención trasciende la experiencia y experticia del matemático que inventa; requiere de una idea general (muchas veces indefinida en sus inicios) y de su ejecución. Todo este proceso implica una serie de transiciones en el que el esquema por su carácter dinámico se va “adaptando” a cada parte del proceso de creación. Para que haya invención esta idea inicial debe ser alcanzable y se debe materializar en la realidad (matemática o sensorial). Ahora bien, dicha materialización puede evidenciarse gracias al lenguaje, las formas simbólicas y las estructuras lógicas, dado que estas son formas convencionales de aceptación.

En este proceso que hemos llamado intuición matemática, las imágenes difusas iniciales se incorporan en el cuerpo de proposiciones formales existentes y sus resultados deben ser validados por la comunidad académica. Entonces la formalización podría ser considerada como la última “etapa” de dicho proceso, creando de esta forma nuevas teorías.

Cabe preguntarse, en este punto, ¿los matemáticos en su práctica usan la intuición en términos de un proceso dinámico? ¿Muchas de sus creaciones son el resultado de la intuición matemática? En este trabajo las respuestas a estos interrogantes serán sí.

Ahora bien, si le hiciéramos la pregunta directamente a estos matemáticos eminentes, seguramente tendrían su propia interpretación de lo que es para ellos la intuición. Pero lo que la historia nos ha mostrado es que el proceso de invención es muy similar al que hemos entendido en este trabajo como intuición matemática.

Nosotros hemos tomado dos grandes de la historia de la matemática para ejemplificar dicho proceso, a saber, Henri Poincaré y Kurt Gödel.

Las ideas del matemático francés influyeron no sólo en la matemática pura sino en la filosofía de la ciencia. Revisando su literatura encontramos títulos como “Invención matemática”, “La intuición y la lógica en las matemáticas”, “Las ciencias y las humanidades”, entre otros. Podemos entonces notar el interés de Poincaré por el estudio del “método” de invención en matemáticas.

Usando su propia experiencia, que es extensa y significativa en el mundo de las matemáticas, nos muestra cómo la lógica por sí sola no lleva a la invención, para la creación se requiere de un proceso intuitivo, que guía el camino y permite organizar la información y tomar las decisiones correctas para llegar a un resultado, cuyo rigor y certezas serán validados por la lógica.

Un recorrido por la obra de Poincaré en torno a la intuición nos muestra que ésta aparece relacionada con creación, invención, imaginación, guía, elección, camino, organización, orden, experiencia, razonamiento, inteligencia. Términos que hemos utilizado cuando propusimos nuestra noción de intuición.

Para Poincaré, las ideas llegan y se organizan (en nuestras palabras en un esquema dinámico), luego de un trabajo previo, es decir, la experiencia cumple un papel fundamental. Las inspiraciones repentinas surgen luego de varios días de esfuerzos voluntarios. Y cuando este esfuerzo sea mayor, se dará paso a la invención. Con la lógica y el lenguaje usado por la comunidad científica, los avances matemáticos adquieren certeza, rigor y a la postre aceptación para ser incorporados en el cuerpo de la ciencia.

Si nos referimos a la naturaleza de las matemáticas, encontramos a Kurt Gödel en una orilla diferente a la de Poincaré. Sin embargo, el matemático centroeuropeo también mostró un gran interés por la intuición. En sus obras encontramos alusiones a la intuición. Para Gödel, la intuición matemática parece ser un factor epistémico necesario para el conocimiento, en particular, de las matemáticas abstractas.

Las consecuencias de sus teoremas de incompletitud influyeron en la filosofía de la matemática. En sus aseveraciones encontramos alusión constante al término intuición. No obstante, sus interpretaciones parecen ser diferentes en cada caso.

Para los intereses de este documento y siguiendo nuestra idea de intuición como proceso dinámico hemos identificado las diferentes acepciones de la intuición en Gödel y las hemos clasificado así: intuición como visión global, como conocimiento mediato, como verdad de los axiomas, como certeza (y hecho psicológico), como análoga a la percepción del mundo físico.

La última interpretación es la más "famosa" cuando se revisan escritos de filosofía de la matemática sobre Gödel. Afirma este matemático que, así como en la física tenemos una forma de acceder a sus objetos, la matemática también cuenta con una facultad y esta es la intuición.

Para llegar a esta interpretación, Gödel entiende la intuición como una "facultad" humana y no misteriosa. Así, al recorrer sus obras y encontrar los diferentes usos en los que la hemos clasificado notamos varios aspectos que aportan a nuestra definición de intuición como proceso.

Asumimos en nuestro acercamiento a la intuición matemática que esta requiere de ideas previas, de un bagaje, de experiencia. Así, cuando Gödel interpreta la intuición como una visión general, una guía o un camino, ¿cómo un matemático podría "ver" el camino de la solución si no tiene claros algunos de los conceptos que intervendrán en este camino?

La intuición no es un algo misterioso, ni una inspiración divina que llega a los elegidos, coincidiendo así también con Gödel para quien la intuición no es un conocimiento inmediato. Por otro lado, señalaremos que la intuición requiere de la formalización de los resultados, coincidiendo con la interpretación que Gödel le da a la intuición como fuente de los axiomas.

Para nosotros la intuición no puede estar alejada del mundo real, del mundo de los sentidos: para Gödel tampoco. De ahí que su interpretación más difundida sobre la intuición es aquella en la que la hace análoga a la facultad de la "percepción sensible" gracias a la cual se pueden conocer los objetos de la física. Para él, es la intuición la que permitirá el conocimiento de los objetos de la matemática.

Este punto sobre el conocimiento y la naturaleza de los objetos de la matemática ha estado rondando a los filósofos durante muchos siglos. Tal situación genera un dilema tal y como lo expresa Benacerraf en su artículo "La verdad matemática".

No podemos abordar el tema de la intuición matemática dejando de lado la epistemología y la ontología (los dos cuernos del dilema). Luego de exponer en qué consiste el dilema, su relación con las creencias y la teoría del conocimiento intentaremos plantear una posible solución al dilema recurriendo a la intuición matemática.

Plantear una disolución del dilema implica cambiar de perspectiva, para ello hemos recurrido a las ideas de Popper y Eccles en el libro *El yo y su cerebro*, pensadores que plantean que los objetos matemáticos pueden estar en un *mundo 3*, diferente al mundo de los sentidos (mundo 1) y al mundo de los estados de conciencia (mundo 2). En este *mundo 3*, no aplica la teoría causal y la naturaleza de los objetos matemáticos es diferente a la concebida desde el platonismo.

Si la intuición matemática es comprendida como un proceso dinámico, que requiere de la experiencia real e intelectual del matemático y que luego sus resultados impactan en este mundo "real", entonces podemos afirmar que la intuición puede ser una forma de conocer y acceder a los objetos que "habitan" en este mundo 3, pasando, por supuesto, por los mundos 1 y 2.

La idea de intuición planteada en los primeros capítulos de este documento no sólo es producto de las investigaciones revisadas o de los ejemplos tomados de la historia de las matemáticas, sino que fue "inspirada" en las afirmaciones del pensador Philip Kitcher.

Para el pensador inglés, la intuición matemática (que no tiene que ver con la intuición platónica, ni con el conocimiento *a priori*) tiene sentido cuando los matemáticos están haciendo matemáticas, específicamente, cuando resuelven problemas.

Kitcher nos propone tesis novedosas y alternativas a la concepción tradicional (y en contra del *apriorimo*) sobre el conocimiento matemático. Sus tesis incluyen el conocimiento del contexto de cada época, la trasmisión del conocimiento de una generación a otra, las prácticas de los matemáticos, la importancia de la comunidad científica y la comunicación de los saberes.

Para la idea que estamos intentando defender sobre la intuición, las ideas de Kitcher sobre la influencia de la comunidad científica y la necesidad de la comunicación son esclarecedoras.

Cuando afirmamos que la intuición matemática es un proceso que requiere de los conocimientos previos de la persona que intuye, no estamos asumiendo que todo el conocimiento está centrado en un solo individuo. Más aun, hemos afirmado que los resultados de este proceso deben ser validados por la comunidad científica. Aquí encontramos un punto coincidente con Kitcher, para quien el conocimiento es producto del esfuerzo de toda una comunidad. Para él, la epistemología de las matemáticas no puede ignorar la historia y mucho menos los avances que los predecesores han tenido cuando puntualizamos sobre las intuiciones de un matemático particular.

Esta tesis de Kitcher va de la mano de otra que él defiende en su teoría del conocimiento: la comunicación entre el individuo y la comunidad científica permite el avance de la matemática. ¿Qué implica esto? Que gran parte del conocimiento que ha adquirido el matemático es gracias a las percepciones (entendidas como observaciones, experiencias, creencias, paradigmas). Al igual que hemos sostenido, la intuición no sólo requiere de experiencias intelectuales sino sensoriales.

Las tesis planteadas y sustentadas por Kitcher en su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*, también lo llevan a dedicarle un capítulo al tema que es de nuestro interés: la intuición matemática. El pensador inglés, se aleja de lo que tradicionalmente se ha considerado por intuición y le otorga un papel preponderante en la resolución de problemas. Para él hace parte importante en el quehacer de los matemáticos. En particular, no la considera como una habilidad extraordinaria sino como un proceso de reconfiguración o de reorganización de información previa que brinda nuevos puntos de vista para abordar un problema que, a la postre, será correctamente (o no) solucionado.

Luego de recorridos estos cuatro capítulos del documento, nos preparamos para relacionar la intuición con la práctica matemática. Hemos considerado dos tópicos que, a nuestro parecer y teniendo en cuenta el rol docente, son básicos en el proceso educativo y en el pensamiento matemático: la resolución de problemas y la visualización.

Nos interesa abordar la práctica matemática desde la actividad mental del matemático, es decir, desde sus procesos de representación y sus imágenes mentales. Para nosotros la práctica matemática será considerada en los términos de Kitcher y su relación con los mundos 1, 2 y 3 (de Popper y Eccles), lo que implica la necesidad de concebir la intuición matemática como un proceso.

Para Kitcher, cualquier estudio sobre el desarrollo del conocimiento matemático debe partir de la noción de práctica matemática. Esta noción tiene como componentes el lenguaje, el trabajo experimental y teórico, los métodos de razonamiento, las preguntas relevantes, la resolución de problemas y los puntos de vista metamatemáticos. Tenemos así que la práctica como acción física se experimenta en el mundo 1, que la justificación de ella está mediada por las percepciones del mundo 2 y que sus elementos teóricos los encontramos en el mundo 3.

Bajo este marco y recordando que para Kitcher la intuición matemática es utilizada por los grandes genios en la resolución de problemas, encontramos que la práctica matemática, en su componente de resolución de problemas, requiere de la intuición matemática. Un matemático cuya intuición —entendida como proceso dinámico— sea más profunda, sustentada en los conocimientos previos y la experiencia, resolverá problemas —planteamiento de nuevos enunciados matemáticos, deducción de conceptos, descubrimiento de propiedades— más complejos y elaborados, tal como lo evidenciamos en la historia de las grandes hazañas de los matemáticos más talentosos.

Cuando se estudia el tema de la resolución de problemas en matemáticas, un referente es George Pólya. Revisando la bibliografía correspondiente, encontramos que, para el matemático húngaro, la intuición está presente tanto en el planteamiento como en la solución a un problema. Para él, es incluso un proceso presente tanto en los matemáticos como en los estudiantes.

Pólya, al igual que Poincaré e incluso Gödel, comparte la idea según la cual la práctica matemática requiere tanto de procesos formales como intuitivos. Incluso afirma que la intuición matemática al ser más *natural* que los argumentos de la lógica, ha permitido a grandes mentes resolver problemas matemáticos de gran nivel. Ser natural, en este contexto, significa ser espontáneo, y este es el resultado de la experiencia, del estudio y del conocimiento de enunciados puntuales interiorizados por los matemáticos durante todos sus años de práctica.

La resolución de problemas es una de las actividades donde con mayor claridad podemos evidenciar el proceso de la intuición matemática. Ello podría explicarse así: un matemático tiene en mente una idea que desea desarrollar, lo que podríamos traducir como un problema que desea solucionar. En su mente, al inicio del proceso, lo que a él se le presenta es una imagen difusa, gracias a la trasformación controlada de esta situación indeterminada, se llega a una determinada, donde las imágenes ahora son claras y distintas (dicha transformación es posible por la experiencia tanto matemática como física de quien está intentando resolver el problema). Este nuevo resultado será validado por la comunidad científica y, de ser aceptado, se insertará en el sistema formal de la matemática.

El que se le haya dado énfasis al lado de la historia dónde se exaltan las mentes extraordinarias, que han llegado a avances muy valiosos en el campo de la ciencia, no debe ocultar que estos “descubrimientos maravillosos” son el producto de mucho tiempo de trabajo, de grandes conocimientos no sólo en matemáticas sino en otros campos del saber, lo que nos lleva a comprender que este proceso de resolución de problemas, al igual que la intuición, se pueden aprender.

En el último capítulo de este documento nos centraremos en un componente de la práctica matemática que ha tenido un resurgir en las últimas décadas: la visualización. Nuestro interés se centra en mostrar que la visualización es un proceso, tal y como hemos entendido la intuición matemática.

La historia de la matemática ha mostrado la importancia de la visualización en muchos de los avances de grandes científicos (Euclides, Euler, Galileo, Descartes, Newton, Maxwell, Riemann, Einstein, Feynman, entre otros), sin embargo, al igual que con la intuición, el pensamiento verbal y el lenguaje simbólico ha predominado como la "mejor opción" de presentar los resultados a la comunidad científica y académica.

Cuando hablamos de visualización en matemáticas no encontramos un significado "habitual", menos aun cuando en la actualidad el espectro se ha ampliado con la incursión de los recursos tecnológicos tanto en el quehacer del matemático como en las aulas de clase. En la literatura existente, encontramos que la palabra 'visualización' se puede usar para describir gráficas, para describir procesos o como sinónimo de imágenes. Para el desarrollo de este trabajo nos interesa su uso como proceso.

Tanto para el análisis de una gráfica como en la construcción de imágenes en papel o con alguna herramienta tecnológica se requiere de la experiencia conceptual, visual o teórica de quien está inmerso en un proceso de visualización.

La visualización no es sólo "ver" una imagen, es un proceso que implica organizar la información disponible, es una reconfiguración de saberes que llevarán a la propuesta de una solución visual a un problema, que al igual que los resultados propios de la intuición, deberán ser validados por la comunidad académica para ser insertados en el cuerpo de nuevas teorías científicas.

En este mismo sentido encontramos que quien no está familiarizado con los diagramas, en general, con el pensamiento visual, tendrá ciertas dificultades para analizar una gráfica o construir un diagrama. Así, la visualización implica experiencia, práctica y conocimientos matemáticos sólidos.

Uno de los temas de interés para la filosofía de las matemáticas es lo que hace el matemático durante su práctica. La historia nos ha mostrado que la visualización y el razonamiento esquemático son recursos fundamentales para la epistemología de las matemáticas. En la actualidad, el uso creciente de herramientas tecnológicas ha permitido entre otras cosas, demostraciones de enunciados complejos. Así como la intuición, la visualización en la práctica de los matemáticos ha aportado en el desarrollo de la geometría, la topología y el análisis complejo. La visualización no es sólo una forma de comprobar o verificar, es una herramienta que permite deducir y “descubrir” propiedades y conceptos avanzados.

Si hablamos de práctica matemáticas, no podemos ignorar la educación matemática. Y en este componente, la visualización tiene mucho que aportar a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para Pólya, cuando nos enfrentamos a un problema, en muchas ocasiones, recurrimos al uso de figuras. Ellas nos ayudan a plasmar de una sola vez, muchos detalles, observaciones o información, que podría olvidarse cuando sólo se dispone de lenguaje simbólico. Ahora bien, en los procesos educativos, la visualización no es sólo esa parte en la que se enseña a construir gráficas, es un proceso más complejo.

La visualización en la educación matemática es un proceso que requiere de las ideas previas del estudiante, de sus habilidades visuales, de su experiencia con los gráficos, de su capacidad para reconfigurar y generar nuevas ideas. Las imágenes no son sólo para explicar, con un esfuerzo mayor permiten crear o inventar. Al igual que con la intuición estas nuevas ideas deben ser validadas por la comunidad científica.

Los objetos de la visualización han servido como modelos predictivos de fenómenos concretos, jugando un rol importante en la investigación científica. Las nuevas tecnologías han contribuido en la didáctica de las matemáticas y han potenciado el papel de las imágenes. Cuando los estudiantes aprenden a construir e interpretar gráficas lograrán controlar sus procesos mentales y desarrollar procesos intuitivos más avanzados.

Para el desarrollo de este trabajo hemos seguido los principios de la investigación básica o fundamental, puesto que se parte de un marco teórico y desde allí esperamos formular una nueva hipótesis que permita relacionar la perspectiva de Philip Kitcher sobre la intuición matemática con la visualización en el contexto de la práctica matemática. Para llegar a la verificación o no de la hipótesis, se requiere de una investigación documental, y nos apoyaremos en un análisis y en una discusión de las fuentes bibliográficas y hemerográficas en las que revisaremos la noción de intuición en el pensamiento de algunos matemáticos y filósofos de la ciencia.

Al considerar ejemplos de la historia de la matemática, se utilizará un método histórico crítico que nos permitirá comprender los ejemplos en su contexto, sin perder de vista la intuición y la visualización en matemáticas.

Gracias a la filosofía de la ciencia nos plantearemos y estudiaremos los elementos concernientes al conocimiento de la matemática y sus posibles soluciones en la práctica, así como el papel que ocupa la intuición en la epistemología y en la filosofía de la matemática.

Así mismo, desarrollaremos una investigación descriptiva para lograr caracterizar el papel de la intuición en la filosofía de Kitcher y la visualización en la práctica matemática, e indagar sobre su posible relación.

No hemos dejado de lado, analizar la postura de Kitcher en las últimas perspectivas sobre filosofía de la práctica matemática y en particular, el papel que, para él, cumple la intuición en la resolución de problemas. Como es obvio, todo ello irá parejo de los correspondientes informes sobre las posibles dificultades encontradas en el proceso.

1. Antecedentes sobre la noción de intuición

La intuición matemática es ampliamente abordada en diversos campos del saber. Ha sido de interés para filósofos, matemáticos, pedagogos y pensadores de la filosofía de la ciencia. La intuición es un tema sobre el que se ha reflexionado y estudiado desde la antigüedad, su significado ha mutado en los diferentes periodos de tiempo y la época actual no es la excepción.

La terminología relacionada con la intuición es bastante confusa, lo que evidencia la complejidad del tema. El término intuición, es usado en diversos contextos y de diferentes modos. Para algunos, por ejemplo, es una reorganización cognitiva que permite ver una nueva interpretación a un problema dadas unas condiciones. En otros casos, es sinónimo de revelación (religión), inspiración (arte), sentido común, interpretación empírica o "auto-evidencia". Esta diversidad de consideraciones, algunas de ellas contradictorias, está relacionada con una variedad de investigaciones cognitivas tales como resolución de problemas, imágenes y modelos, creencias y niveles de confianza, y etapas del desarrollo de la inteligencia.

Para la filosofía antigua, la intuición no tenía un papel predominante, como sí para la filosofía moderna. Para Aristóteles, por ejemplo, el conocimiento debía tener un punto de partida, así como ser seguro e incorregible, basado en premisas verdaderas y evidentes. Ello se conoce como la tesis fundamentista e infalibilista.

Descartes deja claro que para obtener conocimiento se requiere de la intuición y de la deducción, y define la idea de intuición como "una operación racional, por medio de la cual ciertas verdades son presentadas de un modo total e inmediato" (Bunge, 1996, p. 18), es decir, es la fuente de la absoluta certeza de las verdades.

Filósofos como Spinoza y Leibniz asumen la intuición como un tipo elevado del conocimiento, más aún la consideran como una *inferencia rápida*; sin embargo, coinciden en "que es insuficiente para establecer nuevos principios básicos de la matemática" (Bunge, 1996, p. 23).

Estudios recientes sobre la intuición en filosofía de la matemática remiten al filósofo alemán Kant, quién recurre a la noción de intuición para responder a la pregunta: ¿cómo es posible el conocimiento matemático? (Tieszen, 1989). Para

Kant la intuición constituye la posibilidad de la experiencia externa, es decir, la intuición es "una representación singular, que es una representación de un objeto simple" (Parsons, 1980, p. 147). De esta forma, encontramos que es gracias a la intuición que el conocimiento tiene una relación inmediata con los objetos (parece ser una presencia inmediata del objeto en la mente), lo cual tiene una analogía con la percepción en la física. Podría deducirse que la intuición es una *evidencia inmediata*. Las intuiciones para Kant se dan en el tiempo y en el espacio. Sin embargo, no ofrece explicaciones explícitas sobre lo que tiene que ver con la intuición de los objetos matemáticos. Él entiende por objeto, un objeto real, es decir, un objeto físico, y una intuición *a priori* "contiene únicamente la forma de nuestra sensibilidad" (Parsons, 1980, p. 149) y esto debe ser así porque de lo contrario ¿cómo podría intuirse un objeto si este no está dado *a priori*? La cuestión es si el objeto presente es un objeto físico o puramente matemático, lo anterior no es descartado por el carácter *a priori* de la intuición, podría ser una característica más de imaginación que de sentido.

En la *Crítica de la Razón pura*, Kant muestra la intuición como una manera propia de la matemática para "alcanzar" los conceptos:

> Que 5 ha de añadirse a 7, es cierto que lo he pensado en el concepto de una suma [...] pero no que esa suma sea igual al número 12. La proposición aritmética es, por tanto, siempre sintética y de esto se convence uno con tanta mayor claridad cuanto mayores son los números que se toman, pues entonces se advierte claramente que por muchas vueltas que le demos a nuestros conceptos, no podemos nunca encontrar la suma por medio del mero análisis de nuestros conceptos y sin ayuda de la intuición (Kant, 1978, B16).

En el párrafo siguiente Kant *vuelve* a la intuición, a propósito del principio geométrico (el cuál es sintético) que afirma "que la línea recta es la más corta entre dos puntos":

> pues mi concepto de *recta* no encierra nada de magnitud sino sólo una cualidad. El concepto de los más corto es enteramente añadido y no puede sacarse, por medio de ningún análisis, del concepto de línea recta; la intuición tiene pues que venir aquí a ayudarnos y por medio de ella tan sólo es posible la síntesis (Kant, 1978, B17).

Para Kant la intuición es una representación inmediata que, a su vez, es posible de verificación cuando se dan los objetos en la realidad: "la *intuición* es el modo por medio del cual el conocimiento se refiere inmediatamente a dichos objetos y es aquello a que apunta todo pensamiento en cuanto medio" (Kant, 1978, A19, B33).

El estudio de las ideas de Kant sobre la posibilidad de la matemática y su relación con la intuición se ha retomado para el caso de los sistemas formales, gracias al "enfoque constructivista y obligadas precisiones desde los teoremas de incompletud de la Aritmética de Gödel, indefinibilidad de Tarski, indecidibilidad de Church" (De Lorenzo, 1992, p. 10), y, sobre todo por lo que respecta a las diferencias entre razonamiento lógico formal y matemático, ha sido necesario retomar estudios anteriores a Frege, hasta incluir a Kant. En esta línea encontramos a autores tan relevantes como Kitcher, entre otros.

Para el sabio de Königsberg, la intuición es la facultad por medio de la cual los objetos son directamente "captados", aprehendidos, mientras que el entendimiento nos permite alcanzar el conocimiento conceptual. En Kant la intuición empírica se relaciona con el conocimiento sensorial, mientras la intuición intelectual simplemente no existe. (Fischbein, 2002). La intuición intelectual también se usa para designar las formas del conocimiento inmediato, no sensorial, que tratan con conceptos o relaciones formales (o teorías). Por ejemplo, el enunciado "cada número natural tiene un sucesor", es considerado como intuición intelectual, por el contrario "el peso o la velocidad de un objeto" corresponde a una intuición sensorial.

En nuestro recorrido encontramos a Henri Bergson, quien propone volver a la intuición, siendo para él, el método fundamental de conocimiento desde el interior del objeto que se quiere conocer. Ahora bien, no tendremos una intuición, mientras no se haya ganado suficiente confianza con sus manifestaciones superficiales, de lo que se infiere que, el conocimiento de lo nuevo es posible cuando el espíritu se refiere a lo ya conocido.

El espíritu se ha habituado a buscar puntos fijos (conceptos) que le marcarán el cambio de dirección y de tendencia, intentando comprender el movimiento a partir de estos conceptos que son inmóviles, más aún, se asume que el conocimiento parte de los conceptos. La invitación del filósofo es a reconocer que la intuición precede a la inteligencia, “que de la intuición puede pasarse al análisis, pero no del análisis a la intuición” (Bergson, 1956, 54).

Esta inversión del pensamiento no es fácil, sin embargo, la historia del cálculo infinitesimal es un perfecto ejemplo de lo que Bergson nos quiere decir sobre la intuición que precede al análisis:

> La matemática moderna es precisamente un esfuerzo para sustituir lo *ya hecho* por lo que *se hace*, para seguir la generación de las magnitudes, para asir el movimiento, no desde fuera y en su resultado manifiesto, sino desde dentro y en su tendencia a cambiar; en fin, para adoptar la continuidad móvil del dibujo de las cosas.(Bergson, 1956, p. 74)

Es decir, el desarrollo del cálculo y sus importantes aplicaciones ha sido posible, además de esta intuición que está en su origen mismo, por la invención de los símbolos, los cuales interviene en su aplicación.

Finalmente, un filósofo recurrente cuando se estudia la intuición es Husserl. Al referirse al conocimiento, él muestra la influencia de la tradición kantiana, es decir, el conocimiento es pensado como producto de lo que Kant llama conceptos e intuiciones. Husserl está interesado en buscar “la esencia inmutable” de las cosas más allá de las propiedades o leyes, y tal esencia es dada por una facultad denominada por él, intuición intelectual (la cual no es racional). El conocimiento de esta “esencia” es independiente del conocimiento fáctico, aunque se ocupa de los objetos materiales, sin importar si son reales o no, tal como es el caso de los objetos de la matemática que son reales, pero no materiales. Los juicios que tienen que ver con la esencia son juicios sintéticos *a priori*, lo que lleva a Husserl a determinar que las verdades de la fenomenología son definitivas, satisfaciendo de esta forma las dos tesis propuestas por Aristóteles, el conocimiento está fundamentado y es infalible, puesto que “las intuiciones adecuadas son completamente indudables” (Bunge, 1996, p. 42).

Las investigaciones de Husserl acerca de la justificación de los conceptos ideales en matemáticas sobre la base de la intuición le llevaron a concluir que las actividades orientadas al lenguaje de los matemáticos respaldan la noción de intuición. Más aún, “su idea de combinar el rol de nuestra actividad orientada al lenguaje y el rol de la intuición nos proporciona un nuevo marco para explicar los descubrimientos matemáticos, que es diferente de los tradicionales” (Okada, 2002, p. 77). Estos nuevos puntos de vista podrían explicar el 'descubrimiento' en matemáticas al entender la naturaleza de las actividades de adquisición de conocimientos, que se mueven entre actividades lingüísticas, por un lado, e intuiciones, por el otro.

En los escritos de Husserl se hace alusión a intuición en términos de intención, es decir, la intuición es entendida como la "realización" de la intención. Este enfoque es tomado por Tieszen para quien el punto de vista de Husserl en el contexto de la matemática va más allá de un interés histórico, puesto que contiene ideas relevantes para analizar problemas contemporáneos de los fundamentos de la matemática.

Husserl desarrolla una teoría de la evidencia racional basada en la analogía con la percepción, y "entiende la evidencia racional, en general, como intuición" (Parsons, 1980, p. 147), detallando los dos tipos de intuición que él ha encontrado, a saber, la intuición categorial y la percepción-sensorial. La primera se funda en actos tales como las percepciones ordinarias o imaginaciones, y en la segunda el objeto es inmediatamente dado.

Como hemos revisado, la intuición es un concepto controvertido, aceptado por unos como fuente de conocimiento matemático y rechazado por otros al considerarlo engañoso. Además de como un concepto, la intuición puede entenderse como un método, al que se acude en disputas filosóficas, fundamentos de la ciencia, ética, estética, pedagogía y, a veces, en psicología.

Una característica de la intuición es la credibilidad. Para algunos, la intuición es como "una conjetura global para la cual el individuo no puede ofrecer una justificación clara y completa" (Fischbein, 2002, p. 4). En muchas ocasiones se considera una forma primitiva de conocimiento opuesta a las concepciones e interpretaciones científicas. Para Poincaré, no hay creatividad si no hay intuición. Para Hahn es una fuente de errores que debe ser eliminada de la ciencia.

En pedagogía, la intuición se relaciona con un conocimiento sensorial primario, necesario para la educación intelectual, equivalente al conocimiento perceptual de la ciencia. Algunos defienden la necesidad de usar muchos objetos intuitivos, otros consideran que debe ser eliminada sobre todo en el ámbito de la matemática. En el mundo cotidiano un profesional puede usar el término intuición para referirse a la capacidad de resolver un problema complejo, cuya solución “parece surgir rápidamente solo sobre la base de una evaluación aparentemente resumida” (Fischbein, 2002, p. 5). Para Piaget, por ejemplo, apunta a una categoría de la cognición, que permite justificaciones o interpretaciones, mientras defiende la existencia de intuiciones espaciales y temporales, intuiciones empíricas u operacionales, etc.

Ahora bien, en esta amplia gama de interpretaciones, vemos que no resulta fácil definir con precisión qué debemos entender por intuición. Por tanto, hemos recogido las posturas tanto de matemáticos, como filósofos de la matemática para aproximar una noción de intuición matemática. Hemos caracterizado la intuición como un proceso dinámico, que parte de la experiencia (tanto matemática como física) del individuo, que puede ser fortalecida o mejorada haciendo que los logros que de ella se obtienen parezcan evidentes y que debe ser validada tanto por la comunidad científica como por la lógica para llegar al conocimiento matemático o a la invención de conceptos y teorías matemáticas.

1.1 La intuición matemática: un proceso de lo “evidente”

Asumir la intuición como un proceso dinámico implica, por un lado, que el individuo tiene una participación activa y, que, a su vez, la intuición matemática puede ser “educada”, es decir, se puede mejorar la disposición del matemático o estudiante para intuir los conceptos o teorías, incluso llegando a la invención. Para algunos pensadores la intuición tiene la característica de ser evidente, ¿por qué? Porque han acumulado tantos conocimientos y han dedicado mucho tiempo y esfuerzo a estudiar cierto tema que cuando llegan a sus resultados les parece obvio lo encontrado.

“Es posible que esa auto-evidencia sea el resultado de las habilidades conceptuales adquiridas cuando, en el pasado, se aprendió, por ejemplo, conjuntos, líneas y puntos” (Mariño & Peña-Páez, 2019, p. 75). Esa idea de que la intuición puede ser decisiva para el conocimiento matemático es la consecuencia del sentido histórico que el término ha adquirido según ciertas teorías epistemológicas, entre las que encontramos el rol de la introspección del estilo de la filosofía cartesiana o simples convicciones teológicas, las cuales buscan hacer moldes de “justificación inexpugnable” (Thompson, 1998, p. 282).

Bunge, en su libro *Intuición y razón*, afirma que los filósofos y los científicos no concuerdan en lo que debe entenderse por la palabra *intuición*. Para los primeros, es una facultad de la mente, diferente de la razón y de lo sensible, que es un modo de conocimiento autónomo, una aprehensión súbita, total y exacta. Para los segundos, es un conocimiento inferido, mediato, parcial, inexacto y elaborado.

Muchos de los científicos y filósofos de la matemática tienden a rechazar, producto de la tradición filosófica, todo conocimiento poco probable o inseguro, están siempre en la búsqueda de un conocimiento fundamental e infalible, esto conlleva a depositar toda la confianza en la lógica formal o en una intuición que podría parecer misteriosa. Lo que nos interesa resaltar es justamente que la intuición matemática no es una revelación dada a ciertos genios, sino que con la educación y motivación adecuada puede ser un proceso "aprendido".

La razón y la intuición son necesarias para la creación de teorías en matemáticas, lo que no implica afirmar que los productos de la razón sean necesarios y definitivos, como tampoco, asegurar que la intuición de una esencia existe, implica probar que hay esencias más allá de lo que estudia la ciencia. En este sentido, ahora sabemos que los axiomas no son verdades evidentes, sino que son el producto de un arduo trabajo, que la ciencia ya no es un conocimiento cierto e indudable, sino un conjunto de opiniones denominadas hipótesis que deben ser demostradas en un campo de referencia específico, "la búsqueda de una certidumbre definitiva y tranquilizadora —tan intensamente anhelada por los espíritus débiles— ha sido reemplazada por la minimización del error, que es más fácil de descubrir que la verdad" (Bunge, 1996, p. 51). De allí, que Bunge rechace afirmaciones en torno a que la intuición es un fundamento último y una certeza final, más aún que se le quieran dar el carácter de segura y capaz de evadir la crítica de la razón.

Esta crítica del autor argentino puede ser sustentada desde la historia de la ciencia, donde se evidencia que la evolución del conocimiento ha estado enmarcada por creaciones iniciales, que en su momento han sido catalogadas como inconcebibles, absurdas, insanas o hasta insensata. Cabe anotar que todas estas expresiones son propias de la psicología, no son señal de verdad, lo que implica que no son posibles de usar como argumentos para estar a favor o no de la intuición, o para erigir la razón como base de gran parte de la matemática contemporánea.

Matemáticos como Hilbert o Dieudonné han reconocido la intuición matemática como algo anterior al método axiomático. En general, "quien haya hecho algo de matemáticas admitirá que su dinámica es constructiva, que el matemático no aprehende ideas platónicas preexistentes y que la axiomática es casi siempre una reconstrucción *a posteriori*" (Bunge, 1996, p. 102). Esto no quiere decir que exista una intuición básica, oscura, como fuente de creación matemática, ni que la intuición sea la única fuente de certidumbre, como pretenden los intuicionistas.

Cuando se realiza cualquier trabajo científico, se recurre a la búsqueda y planteamiento de problemas, se intentan controlar las soluciones encontradas, se inventan hipótesis, se elaboran deducciones, todo este conjunto hace parte de la intuición y en todo este proceso

> intervienen la percepción de cosas, acontecimientos y signos; la imaginación o representación visual; la formación de conceptos de diverso grado de abstracción; la comparación que lleva a establecer analogías y la generalización inductiva junto con la loca conjetura; la deducción tanto formal como informal; análisis toscos y refinados…combinar y rechazar ideas, pues, digamos de paso, la ciencia está hecha de ideas y no de hechos. (Bunge, 1996, p. 120)

En estos casos, cuando no se sabe exactamente qué mecanismos han intervenido, que procesos inferenciales se han utilizado o que tan riguroso o sistemático ha sido el trabajo, se dice que ha obrado la intuición, la cual actuaría como "el cajón de sastre donde colocamos todos los mecanismos intelectuales que no sabemos analizar o nombrar con precisión" (Bunge, 1996, p. 121).

En la ciencia la intuición encierra modos tales como: percepción (percepción rápida), imaginación (creación), inferencia, síntesis, comprensión y evaluación. Estos modos de pensar son propios de todas las personas, sin embargo, aparecen más desarrollados en la mente de los científicos.

Cuando se habla de percepción, se habla de la "identificación rápida" de un objeto, un acontecimiento o un signo. El "éxito" de una intuición sensible, es decir, la aprehensión de un objeto físico "dependerá de la habilidad perceptual del sujeto, de su memoria, de su inteligencia, de su experiencia y de la información de la que disponga" (Peña-Páez, 2020a, p. 135) . Esta intuición sensible nos permite captar de manera directa y desarticulada los objetos concretos.

La percepción también tiene que ver con la comprensión del significado o de las relaciones entre los elementos de un conjunto (por ejemplo, en la matemática y la lógica formal se está interesado en las relaciones y estructuras, más que en los términos o las entidades singulares). La capacidad para comprender cadenas de símbolos dependerá del entrenamiento previo, "el principiante puede 'intuir' ciertos objetos, pero el iniciado captará además ciertas relaciones y complejidades que escaparán al novato" (Bunge, 1996, p. 123).

En la percepción, es importante la interpretación de signos artificiales, esta situación está relacionada con la "intuición física", algunos pueden ver en las ecuaciones algo más allá de símbolos matemáticos, comprender su interpretación física, tienen la habilidad de leer las fórmulas en términos de propiedades, sucesos o procesos, por ejemplo el físico reconocerá una integral de Fourier como un paquete de ondas, por tanto la "habilidad para simbolizar, cierta experiencia de interpretación y capacidad para relacionar con rapidez asuntos aparentemente inconexos, es todo cuanto se esconde bajo la palabra 'intuición' en este caso" (Bunge, 1996, p. 124).

La intuición no es una facultad misteriosa, es una facultad que puede ser entrenada, es decir, la intuición es un proceso, que puede ser semántico (los términos se usan sin reflexionar) o sintáctico (se captan directa o indirectamente algunas relaciones), entonces este proceso tiene que ver con presupuestos "obvios", en el que "el análisis lógico y semántico contribuyen a la elucidación de términos toscos, preanalíticos o intuitivos" (Bunge, 1996, p. 181). Las primeras ideas deben pasar por un proceso de refinamiento gradual, que incluye el rigor y las demostraciones correspondientes que puedan satisfacer los estándares establecidos, un ejemplo de ello lo encontramos cuando en el siglo XVIII las consideraciones intuitivas eran suficientes, diferente a los siglos posteriores donde lo necesario era la aritmetización del análisis.

Retomemos la idea de la intuición como aquella que parece darnos conocimientos obvios, es decir, evidentes. ¿De dónde viene esta idea? Se sabe que para un matemático M una condición necesaria para conocer una situación o fenómeno S, es que el matemático M crea en esa situación S, por lo tanto, la creencia de *M* sobre *S*, se producirá gracias a un proceso, en el cual se tiene una *evidencia* para sostener dicha creencia, entonces parece que "la evidencia es dada por la *intuición*" (Tieszen, 1989, p. 2). De allí, que cuando se afirma que el matemático *M* tiene evidencia sobre la situación *S*, entendemos que *M* "ve" a *S* de un modo directo, no diferencial, por lo que puede sostenerse que "la intuición ofrece algo como un *conocimiento directo*" (Tieszen, 1989, p. 2). Debemos notar que la evidencia dada por la intuición es conocimiento directo, lo que no debe confundirse con la justificación, que es propia de los procesos inferenciales y que tiene que ver con el conocimiento indirecto.

En la discusión sobre el conocimiento de un matemático sobre S, se puede distinguir entre la *intuición de* objetos y *la intuición de que* alguna cosa es. La diferencia radica en que, en el primer caso, se habla de intuir objetos particulares, elementos simples, mientras en el segundo caso se intuye un conjunto de enunciados. La intuición de objetos particulares ha estado presente en varias de las concepciones sobre los fundamentos de las matemáticas.

Para Richard Tieszen (1986), la intuición matemática es "como un proceso que produce *evidencia* para las creencias matemáticas de M, así como la *percepción directa* es un proceso el cual produce evidencia para las creencias de M acerca del mundo físico" (p. 66).

Como se ha indicado, la intuición está relacionada con la evidencia, la cual se ha manifestado en la historia de la matemática de dos formas:

1. Utilizar enunciados iniciales, cuyo criterio de elección fue la auto-evidencia (aparente), para construir una estructura lógica deductiva. Un ejemplo es Euclides con sus axiomas y postulados de la geometría.
2. La preocupación y esfuerzo de los matemáticos por evitar los efectos engañosos (aparentes) de los enunciados evidentes para crear un sistema racional y auto-consistente. En Platón, Aristóteles y Euclides, se evidencia una clara distinción entre los axiomas y los teoremas, los cuáles deben ser probados: "la historia de las matemáticas es, de hecho, la historia de los esfuerzos para lograr este programa" (Fischbein, 2002, p. 9).

Continuando con la historia de las matemáticas, encontramos que luego de la revolución copernicana, el auge de las geometrías no euclidianas, Cantor y el concepto de infinito real y otros hallazgos, la comunidad científica se ha dado cuenta de que la noción intuitiva de evidencia no es garantía de verdad, ni de certeza (Peña-Páez, 2020a). De hecho, "conceptos no intuitivos o contra-intuitivos han invadido cada vez más la ciencia y las matemáticas" (Fischbein, 2002, p. 10). En la matemática encontramos muchos ejemplos de afirmaciones teóricas verdaderas pero que no tienen un significado intuitivo en la realidad (¿cuál sería el significado intuitivo de la expresión $a^0 = 1$?). De la misma manera, no ha sido aceptada de manera fácil la afirmación lógica de "que un conjunto puede ser equivalente a uno de sus subconjuntos propios" (Fischbein, 2002, p. 10).

Tales situaciones tuvieron como consecuencia que la comunidad científica considerara las representaciones intuitivas como engañosas, fortaleciendo así, la forma lógica como medio de certidumbre de la convicción científica. Pasamos, entonces, de la intuición como forma absolutamente creíble de Descartes y Spinoza, a la intuición como conocimiento primitivo y engañoso de muchos filósofos en la actualidad. Esto muestra, sin embargo, que el término intuición sigue vigente en el debate filosófico, en los fundamentos de la matemática y en los discursos educativos, puesto que la intuición "no representa sólo una categoría de conocimiento, entre otras, aceptada o prohibida. Expresa una actitud necesaria profundamente arraigada en nuestro comportamiento adaptativo" (Fischbein, 2002, p. 11).

La historia de la matemática tiene ejemplos de cómo algunos conceptos dados por evidentes han sido desvirtuados y, aun así, no son abandonados por los científicos, los cuales, en cambio, siguen usando sus modelos intuitivos. No se trata de utilizar conceptos obsoletos que ya han sido refutados, se trata de reconocer que, para muchos matemáticos, la validez de un enunciado "se basa en el sentimiento de evidencia subjetiva". Sin importar cuantos conceptos hayan sido refutados en la historia, algunos matemáticos siempre buscarán "una rampa definitiva en la defensa de sus certidumbres, en la inextricable mezcla de argumentos lógicos [regresando] a su sentimiento personal, muy personal, de evidencia" (Fischbein, 2002, p. 11).

Los ejemplos de la historia parecieron mostrar que la función de la intuición es atribuir una certeza incuestionable a ciertas interpretaciones, aunque ella misma no es la fuente de la verdadera cognición. Es indudable la necesidad que tenemos de enunciados seguros que sustente nuestros comportamientos prácticos o intelectuales. Por ello, cada vez que afirmamos algo no podemos estar deteniéndonos a revisar la certeza de lo dicho, puesto que sería muy difícil terminar cualquier proceso. Es irresistible la tendencia a aceptar algunos argumentos como ciertos, y el criterio usado es la *auto-evidencia*.

Según relata Fischbein, en cierta ocasión Cantor preguntó a un grupo de colegas por la posibilidad de "la equivalencia entre dos conjuntos de puntos que pertenecen a multitudes continuas con diferentes números de dimensiones" (2002, p. 25). Aunque Cantor sabía que la respuesta era afirmativa, no descartaba que fuese negativa, porque no era intuitivamente tan evidente. Los conceptos involucrados en la hipótesis de Cantor, como el de infinito real y los de los elementos no dimensionales, no tienen ninguna correspondencia en la práctica. Rechazar la pretendida equivalencia, es una especulación hasta que no se realice la prueba. Sin embargo, los colegas de Cantor aceptaron la hipótesis como si fuera una verdad absoluta. El resultado es que se trata de "un conocimiento intuitivo, un tipo de conocimiento que no se basa en evidencia empírica suficiente o en argumentos lógicos rigurosos y, a pesar de todo, uno tiende a aceptarlo como cierto y evidente" (Fischbein, 2002, p. 26).

A pesar de la demostración obtenida, Cantor, a diferencia de los matemáticos de su época, estaba atrapado en dos intuiciones contradictorias "la intuición antigua, "natural", según la cual dos conjuntos continuos de puntos que tienen un número diferente de dimensiones no pueden ser equivalente y la nueva, la intuición cantoriana reclamando la equivalencia de los dos conjuntos" (2002, p. 26). Con este ejemplo, Fischbein quería mostrar como la necesidad de certeza atormenta a mentes tan brillantes como la de Cantor, quien comparte los mismos sentimientos, a otro nivel, por supuesto, de quienes buscan la auto-evidencia, la certidumbre y la coherencia, y no sólo en la evidencia completa y consistente de lo empírico.

¿Qué deberíamos entender por la auto-evidencia de una intuición? Que la intuición se explica por sí misma, no requiere ningún tipo de justificación para reconocer la verdad de una afirmación. Por ejemplo, el enunciado "el todo es más grande que cada una de sus partes". Autores como Descartes, Spinoza y Piaget coinciden en formular la auto-evidencia como una característica fundamental de la intuición. Sin embargo, no es tan sencilla de aceptar "la nueva evidencia, antes de convertirse en evidencia —e incluso después— entra en conflicto con la primera" (Fischbein, 2002, p. 43). Un ejemplo de ello fue la aceptación de los números irracionales, lo cuales parecían, en principio, estar en conflicto con los números ya conocidos. Esto no implica que no puedan coexistir dos verdaderas aparentemente contradictorias.

Es importante indagar el criterio por el que una intuición es autoevidente. En algunas ocasiones, se aceptan con mayor facilidad o parecen más evidentes enunciados complejos como "todo número tiene un sucesor" que otros más simples como la diferencia de cuadrados. La evidencia, en este caso, a diferencia de la evidencia de los objetos físicos no está mediada por la intervención de los sentidos, la evidencia se integra con un sistema algebraico, un enunciado intuitivo (verdadero o aparentemente cierto) que debe explicase por sí mismo. Entonces la evidencia está relacionada con los conceptos, creencias y teorías que el matemático ha adquirido a través de su experiencia y que implican todo un proceso de adaptación.

Ahora bien, la noción por sí sola no garantiza su propia evidencia, aunque esté vinculada con un sistema de invariantes. Es el individuo quien tiene que percibir el invariante, para 'adquirir' un sentimiento de evidencia. Para el enunciado que hemos tomado como ejemplo, su certeza depende de la intuición del número puro y la sensación de evidencia se adquiere al descubrir lo invariable del concepto. En suma, la auto-evidencia de la intuición tiene que ver con el sentido directo del comportamiento, el reconocimiento de la invariable de un concepto, el equilibrio interno de las transformaciones y el carácter analítico de una afirmación evidente.

De las afirmaciones anteriores, puede deducirse que la intuición tiene una estrecha relación con la necesidad de certeza. Una explicación del uso persistente de la intuición, a pesar de sus múltiples contradicciones, es que "la intuición expresa, más allá de su apariencia fenomenológica y psicológica cambiante, la creencia natural casi instintiva de todo ser humano en la existencia de alguna certeza última absolutamente fiable" (Fischbein, 2002, p. 7). El sujeto también busca las certezas últimas, las cosas fiables, pues no puede confiar solamente en las pruebas indirectas, necesita "ver" con la mente tal y como lo hace con los ojos.

De hecho, “para sobrevivir, tenemos que actuar de acuerdo con una realidad dada y creíble” (2002, p. 7). En este contexto creíble es sinónimo de significativo.

Fischbein asegura que el papel fundamental de la intuición es “conferir a los componentes conceptuales de un esfuerzo intelectual las mismas propiedades que garantizan la productividad y la eficacia adaptativa de un comportamiento práctico” (Fischbein, 2002, p. 19). De ahí que se intente asignar a los conceptos y a las operaciones formales un correspondiente comportamiento práctico específico que involucra tres tipos de interpretación:

1. *Global*, es decir, interpretación capaz de guiar todo el proceso.
2. *Dinámica*, que sugiera, a pesar de su apariencia estática, una actividad constructiva de las correspondientes representaciones.
3. *General*, es decir, que exceda a la representación particular. Esta construcción general, nos lleva a esperar la continuación de un proceso.

De lo anterior podemos, entonces, concluir que la función de la intuición es construir representaciones e interpretaciones que parezcan ser evidentes. Así la intuición

> resume la experiencia, ofrece una representación compacta y global de un grupo de datos, ayuda a superar la insuficiencia de información, introduce interpretaciones significativas en el comportamiento de un proceso de razonamiento y, por lo tanto, confiere a la actividad mental, las cualidades de continuidad flexible, de firmeza y eficacia que caracterizan un comportamiento activo, adaptativo. (Fischbein, 2002, p. 12)

A pesar de contar con todas estas características “positivas”, la intuición sigue siendo fuente de error, dado que la interpretación intuitiva puede producir una representación distorsionada de la realidad, lo que la lleva a predicciones, en ciertos casos, equivocadas.

En suma, la intuición matemática que permite la creación de teorías, conceptos y proposiciones implica que unas ideas que pueden ser difusas al principio del proceso van tomando forma gracias a la interrelación de ellas (las imágenes desordenadas iniciales) con ideas y creencias preexistentes. Y luego cuando ya se perciben, en palabras de Descartes, claras y distintas, nos parecen evidentes. En realidad, es que se han vuelto claras o habituales para nuestro entendimiento gracias a un proceso de aprendizaje.

1.2 La intuición matemática y la experiencia

La experiencia es ese conjunto de prácticas, conocimientos y creencias (científicas o no) que el individuo ha "acumulado" a lo largo de su vida. El proceso intuitivo no será posible sin ese bagaje del mundo físico y del mundo intelectual. Es decir, si la experiencia de un individuo no ha girado en torno a la matemática o la física será imposible que pueda crear teorías, conceptos o proposiciones en estos campos del saber.

La experiencia juega un papel fundamental en la configuración de las intuiciones, puesto que es ella la que, bajo ciertas condiciones, le permite a la intuición establecer expectativas estables. En este marco Fischbein (2002, p. 88) sostiene que "una intuición es una teoría, es un sistema de creencias, de expectativas aparentemente autónomas". Cuando las expectativas se vuelven estables y firmemente unidas a ciertas circunstancias, sucede, que el origen empírico desaparece en la conciencia del sujeto. Dicha asociación repetida crea un hábito, una costumbre y, aunque psicológicamente se reconozca el origen empírico, no quiere decir que las expectativas no se correspondan con propiedades y relaciones que objetivamente sí existen.

Por tanto, lo que afirma Fischbein (2002, p. 88) es "que las intuiciones se basan en expectativas estables y autoconsistentes organizadas como creencias que aparentemente son autónomas con respecto a circunstancias empíricas particulares pero que, de hecho, muy a menudo se generan y dan forma a partir de una larga experiencia". Es gracias a la experiencia que las intuiciones logran perseverar en la conciencia. Aunque la experiencia implica restricciones, también ofrece numerosas oportunidades para confirmar y reforzar algunas creencias.

En la configuración de las intuiciones, la experiencia juega un papel relevante. Fischbein (2002, p. 85) identifica tres aspectos fundamentales para la intuición:

(a) Los elementos generales, comunes de la experiencia humana.

(b) Los aspectos de la experiencia relacionados con el entorno geográfico y cultural particular en el que vive la persona.

(c) La práctica particular del individuo relacionada con varios dominios de su vida (por ejemplo, intuiciones profesionales).

En gran medida, las intuiciones están moldeadas por la experiencia, de ahí que tengan gran impacto en el esfuerzo productivo, teórico o práctico realizado por cualquier matemático. Dado que la experiencia siempre está limitada a las circunstancias, esto implica que el dominio de efectividad y confiabilidad de las intuiciones también es limitado: "sin embargo, las intuiciones, por su propia naturaleza y función de comportamiento, tienden a aparecer, subjetivamente, como seguras, autoconsistentes o representaciones universalmente válidas" (Fischbein, 2002, p. 90). A largo plazo, la experiencia produce sistemas estables de representación, lo que, a su vez, conduce a programas estructurados de acciones y expectativas. Siempre debe tenerse en mente que la experiencia sesga las interpretaciones dado que está restringida por las condiciones espaciales y por la naturaleza de la actividad, práctica o teórica, de la actividad conductualmente significativa (finitud, concreción, imposibilidad de ubicuidad).

En este contexto, la experiencia será abordada desde dos puntos de vista; la relación de la intuición con las experiencias sensoriales del individuo y su relación con las creencias matemáticas.

A principios del siglo XX, se aceptó como premisa aquella que afirmaba que "nuestra capacidad para la representación sensorial limita nuestra capacidad para la conciencia intuitiva" (Chudnoff, 2014, p. 17). Una de las implicaciones de esta premisa se evidencia en la teoría de conjuntos. Por ejemplo, nuestra capacidad sensorial podría permitirnos visualizar el proceso que genera el conjunto de Cantor [0,1/9], [2/9,1/3], [2/3,7/9], [8/9,1], etc., sin embargo, este conjunto desafía la ilustración: "la unidad de intervalo y el Conjunto de Cantor son significativamente diferentes desde el punto de vista de la ilustración, pero ambos son conjuntos perfectamente buenos de números reales desde el punto de vista del análisis real estándar" (Chudnoff, 2014, p. 18).

Este es un ejemplo donde la conciencia intuitiva parece poco confiable con respecto a lo que los objetos matemáticos pueden representar. Ahora, suponga el conjunto de Cantor, pero esta vez sin intentar dibujarlo. Aun cuando sabemos que este contiene puntos, la conclusión no se deriva de ninguna ilustración, se deriva de nuestro pensamiento sobre el conjunto de Cantor, no sobre su representación sensorial. Esta situación lleva a una idea pre-kantiana, regresando a Platón, de la intuición. Es decir, "desarrollar una descripción de la intuición matemática de acuerdo a la cual al menos algunas de las intuiciones matemáticas son cognitivas y no están limitadas por nuestra capacidad de representación sensorial" (Chudnoff, 2014, p. 19).

Bajo este marco fenomenológico, se tiene que la intuición matemática o bien puede basarse en imágenes, o sólo estar acompañada de imágenes o ser una cuestión del pensamiento puro (sin imágenes). Aunque aparece una cuarta opción, la cual indica que la intuición matemática no depende causalmente de los elementos en virtud de los cuales es verdadera. Revisemos este punto.

Como lo ha expresado Tieszen, la fenomenología en cuanto a la intuición matemática no supone la existencia de una relación causal entre el objeto y los mecanismos sensoriales del sujeto, puesto que la causalidad no entra en juego cuando se trata de investigar la estructura y la secuencia de los actos. Y esto sucede porque no se requiere un análisis sobre lo que causa que "M" crea que "S". En otras palabras, la analogía entre la intuición y la percepción es posible siempre y cuando se evite cualquier análisis sobre la condición de las causas.

La investigación central gira en torno a la relación que existe entre la intuición matemática y la perceptiva "en cuanto a la estructura de los actos y los procesos mentales en los que se dan los objetos" (Tieszen, 1989, p. 180), no sobre los objetos, dado que los objetos de la matemática no están relacionados de manera causal, como sí lo están los objetos perceptivos. Lo importante en esta analogía son "los procesos mentales que *M* puede emprender en matemáticas y que proporcionan evidencia de la creencia de *M* sobre S" (Tieszen, 1989, p. 180), siendo *S* algún enunciado matemático.

La fenomenología de Husserl implica que los objetos se dan inmediatamente a los sentidos y no son actos articulados, ni conectados, ni fundados sobre otros. En este sentido, la conciencia sensorial es básica y la experiencia intuitiva es una experiencia no básica que requiere de otras experiencias mentales, tales como la imaginación y los pensamientos.

En suma, las intuiciones no son causales y en realidad dependen de alguna propiedad invariable que cumplan los objetos matemáticos relacionados. Es decir, es la forma de la intuición la que le permite al sujeto elaborar pensamientos demostrativos sobre los objetos matemáticos. Chudnoff (2014) toma como ejemplo la afirmación: "los círculos son simétricos sobre sus diámetros" e intenta mostrar la posibilidad de un pensamiento demostrativo sobre la circularidad. Señala que, si la afirmación es cierta para alguna intuición particular, ésta dependería eventualmente de algunas experiencias que conllevaran a un pensamiento demostrativo sobre la circularidad. Sin embargo, "las experiencias no pueden permitir pensamientos demostrativos sobre la circularidad si no existe circularidad" (p. 28).

Revisemos la relación entre las creencias propias del matemático y la intuición matemática. No es habitual que nuestras creencias sean intrínsecas. Los enunciados en los que creemos han sido aceptados, bien sea por las pruebas que de ellos se han hecho, o porque están respaldados por libros o por profesores. Es decir, las cogniciones no han sido aceptadas intuitivamente. Ahora bien, en la actualidad la certeza absoluta de "algo" no convierte a ese "algo" es una verdad objetiva, aunque "el sentimiento de certeza sigue siendo un criterio para el conocimiento intuitivo" (Fischbein, 2002, p. 46). Algunos estudios realizados sobre la certeza y la intuición muestran que cuando el sujeto tiene unas intuiciones sólidas, con independencia de que sean o no correctas, perduran mucho más que otras, aunque sean contradichas por una instrucción formal sistemática.

Las formas de razonamiento del individuo son coaccionadas por las intuiciones, es decir, "las intuiciones se imponen subjetivamente sobre el individuo como representaciones o interpretaciones absolutas y únicas" (Fischbein, 2002, p. 47). La historia de la ciencia y de la matemática ha mostrado que la naturaleza coercitiva de las intuiciones ha permitido algunas interpretaciones equivocadas, a pesar de que hayan sido probadas lógicamente. Un ejemplo de ello es la idea de que el sol giraba alrededor de la tierra, mantenida durante siglos, y que impidió comprender la concepción copernicana de la dinámica del sistema solar.

Es importante señalar lo siguiente: "se debe hacer una distinción clara entre la coacción de un conocimiento intuitivo y la convicción inspirada por una prueba" (Fischbein, 2002, p. 49). Es fácil renunciar a una convicción si se encuentra que una prueba es incorrecta, pero si la convicción es intuitiva no se puede erradicar de forma sencilla, ya que forma parte integral de nuestro esquema mental. Lo imperativo de las intuiciones puede explicarse por el hecho de que no son, en general, concepciones mentales aisladas, y expresan limitaciones fundamentales que se organizan en estructuras integrales.

La intuición no es simplemente la percepción de un hecho dado. Cuando se perciben imágenes, como por ejemplo la igualdad de dos ángulos en líneas que se intersecan, esto no es una intuición, “lo que intuimos es la universalidad de la propiedad” (Fischbein, 2002, p. 50). Es decir, en la intuición se capta la universalidad de un principio, una ley o una invariante, y esto gracias a una realidad particular. La intuición es todo un proceso que puede ser expresada a través de un modelo, llámese paradigma, analogía, diagrama, etc.

Revisemos ahora la relación entre creencias e intuición. En este punto, encontramos a Penelope Maddy, quien está interesada en las creencias intuitivas y su relación con los conceptos, es decir, el problema del lenguaje. En este sentido, entiende que los conceptos se adquieren gracias a una interacción compleja entre el ser humano y el mundo. Por tanto, tener un concepto, es a la vez, tener capacidad para la adquisición de ciertas creencias: “lo que quiero señalar es que la adquisición de cada concepto viene acompañada por la adquisición de algunas creencias muy generales sobre cosas de [cierto] tipo” (Maddy, 1980, p. 185). Esta autora propone la siguiente situación: supóngase que construimos una figura con tres lados, de tal modo que el ojo se mueve de una esquina a otra, determinando tres ángulos; esta forma, que es la de un triángulo, garantiza que uno creerá que un triángulo siempre tiene tres lados lo que es obviamente una creencia general sobre los triángulos.

Ahora bien, una persona, por ejemplo, un niño, podría tener esta misma creencia sobre los triángulos y, sin embargo, carecer de un lenguaje técnico para expresarla. Lo que no es posible es tener tales creencias, pero no el concepto. Para Maddy, este tipo de creencias son denominadas “creencias intuitivas”, y observa, además, que no es necesario adquirir formas lingüísticas para adquirir los conceptos y las creencias intuitivas.

Es habitual encontrar individuos sin ninguna formación científica, pero con herramientas lingüísticas adecuadas para comprender conceptos como triángulo, objeto físico y conjunto, entendiendo tales conceptos como pre- lingüísticos y no en el sentido formal del teórico, del geómetra o del físico. Presentar estos conceptos de forma "amable", junto con una enseñanza exitosa, conlleva la comprensión de los siguientes enunciados: "1) los objetos físicos existen en el espacio y en el tiempo. 2) en algún momento dado, un objeto físico está en cierto lugar y moviéndose a cierta velocidad y 1') dados dos objetos cualesquiera, existe un conjunto cuyos elementos son justamente esos dos objetos. 2') algunas cosas pueden ser recolectadas en un conjunto" (Maddy, 1980, p. 186). Maddy asegura que los mencionados enunciados parecen forzarnos a aceptarlos como si fueran verdaderos, y la razón es que estas aseveraciones han sido formadas por las diversas creencias intuitivas prelingüísticas. De ahí, que las intuiciones o principios intuitivos se entiendan como los "intentos de formular creencias intuitivas en términos lingüísticos" (Maddy, 1980, p. 186). De esta descripción surgen dos situaciones.

En primer lugar, las intuiciones pueden ser falsas, bien sea por una interpretación incorrecta de las creencias intuitivas o porque la creencia intuitiva sea falsa, a pesar de que la formulación sea correcta. Para Maddy, "podríamos estar muy equivocados en los conceptos que formamos, y en las creencias intuitivas que van con ellos" (1980, p. 187), puesto que la estimulación que recibimos de los aspectos de las cosas puede llevarnos a incorporar características muy diferentes a las que las cosas en realidad tienen.

En segundo lugar, las intuiciones aumentan su exactitud cuando las creencias intuitivas son ampliamente compartidas, lo que deslegitima las creencias intuitivas de un sólo científico. Ahora bien, los científicos usan los términos "intuitivo" e "intuición", como ya lo explicaba Bunge, como *frónesis*. Es decir, el científico usa la intuición como una manera de "justificar" su elección de una teoría sobre otra y, mejor aún, si la teoría elegida es compartida por los científicos como la más favorable. Por el contrario, Maddy no considera la intuición como la que "orienta" la elección de una teoría sobre otra. De hecho, afirma que si esto llegase a darse es porque "la teoría favorecida es apoyada por la evidencia teórica, no por la intuición" (Maddy, 1980, p. 187).

Para Maddy, un adulto normal posee un conocimiento intuitivo y no-lingüístico de los conjuntos. Así mismo los principios intuitivos, como los axiomas más simples y la concepción iterativa, son justificados por la precisión con que son formulados y por sus méritos teóricos. Finalmente, cabe señalar que para la autora "las creencias intuitivas son *a priori* porque una vez que lo conceptos están en su lugar, no se necesita experiencia adicional para apoyarlos, y ninguna experiencia adicional contará en su contra (aunque la evidencia teórica podría contar en contra de sus expresiones lingüísticas)" (1980, p. 190).

Detengámonos en este tema de las creencias intuitivas *a priori*. Para los aprioristas la intuición puede justificar las creencias matemáticas. Kitcher, por el contario argumentará que, si la experiencia mostrara que la intuición condujo a creencias erróneas, esto quebrantaría el postulado de los aprioristas. Revisemos la propuesta de Mark McEvoy (2007), a propósito de las objeciones de Kitcher.

Para los aprioristas, la justificación de las creencias matemáticas es posible gracias a que se derivan, usando las reglas correctas, de inferencias de otras creencias más básicas. Y tales creencias básicas se justifican en un proceso de intuición matemática. Contraria a esta postura está la de Kitcher para quien "las creencias producidas por intuición no pueden ser *a priori*, ya que la orden de adhesión adjunta a tales creencias pueden ser socavadas por la experiencia" (McEvoy, 2007, p. 288). Para el autor, es posible una concepción *a priori* de la intuición que sobreviva a las objeciones de Kitcher. Más que una defensa al hecho de que el proceso de intuición exista, es un intento por mostrar que la opción de apelar a la intuición es un caso abierto.

Si se considera la intuición como una capacidad de la facultad de razonar, entonces se puede "argumentar que la razón es simplemente la capacidad para comprender relaciones estructurales y deducciones" (McEvoy, 2007, p. 228). Esto no implica que deba descartarse la intuición. Por ejemplo, tomemos el enunciado "los triángulos tienen tres lados", la razón comprende las conexiones necesarias que permiten llegar a conclusiones usando la deducción. Sin embargo, la intuición también puede comprender las conexiones entre los conceptos. De otro lado, se tiene que una garantía *a priori* puede ser falible. Por tanto, cualquier proceso de intuición, debería ser falible. La principal discordancia con Kitcher es que las creencias garantizadas *a priori* sólo pueden ser quebrantadas por consideraciones anteriores y no por la experiencia.

1.3 La intuición como esquema de invención

La idea de modelo mental está relacionada con el pensamiento abstracto, el mundo teórico de las matemáticas y con la experiencia del mundo real. Los modelos implican transformación y la intuición juega un papel en su estructuración. Efraim Fischbein, nos presenta una idea más sofisticada del modelo mental que denomina *esquema intelectual*. Revisaremos sus ideas en torno a la relación entre esquema e intuición anticipatoria.

Producir *esquemas intelectuales* es un proceso complejo y vacilante; y no secuencial. Una vez construidos los esquemas, la intuición constituye los estados de transición para que los esquemas puedan ser adaptados a las nuevas teorías o conceptos. El momento de transición debe conservar lo que está almacenado en los esquemas correspondientes. Para el autor, una respectiva intuición está basada en una estructura esquemática, que debemos ser capaces de identificar. Pero también, es necesario que conozcamos "los medios por los cuales la organización secuencial del esquema se convierte en un aspecto aparentemente global, autoevidente, que conduce y controla la reacción adaptativa respectiva" (Fischbein, 2013, p. 15).

En el *esquema intelectual* aparecen un tipo de intuiciones denominadas 'anticipatorias', las cuales intervienen cuando estamos intentando resolver un problema. El esfuerzo por encontrar una solución que no es directa; es un proceso complejo que pasa por varias fases.

En una primera fase, se conducen todos los esfuerzos en probar diferentes hipótesis, para ello se recurre "a esquemas y modelos previamente adquiridos para resolver problemas, rechazando soluciones inadecuadas" (Fischbein, 2013, p. 34). En esta fase, las estrategias utilizadas, en muchas ocasiones son utilizadas de manera consciente. En una segunda fase, que no sucede inmediatamente (algunas veces puede estar realizando otra actividad), 'de repente, tiene la sensación de haber encontrado la solución'. Sin embargo, esta solución no contiene todos los elementos formales, analíticos, ni las justificaciones deductivas propias del trabajo matemático: "lo que tiene en mente, durante el primer momento, es una representación global de la dirección principal que conduce a la solución" (Fischbein, 2013, p. 34). Y en este punto, tenemos una intuición anticipatoria, que algunos llaman el "momento de iluminación". Una característica de esta intuición es que representa un momento en el esfuerzo de resolución. Una fase final, implica la construcción explícita de los argumentos que sustentan la solución inicialmente "adivinada".

El concepto de esquema está relacionado con los sistemas adaptativos, que incluyen la cognición y la conducta, de ahí que "una intuición no puede ser cambiada como un dispositivo mental aislado. Las intuiciones cambian junto con todo el sistema adaptativo al que pertenecen" (Fischbein, 2013, p. 37).

Fischbein (2013, p. 36) recoge dos interpretaciones sobre el concepto de esquema:

> De acuerdo con una interpretación habitual y muy extendida, el término esquema indica un tipo de representación condensada y simplificada de una clase de objetos o eventos [...] Si tienes este esquema [de la cara humana] en tu mente, reconoces un rostro humano. La secuencia de los actos para resolver una cierta clase de problemas constituye el esquema de la solución.

Para la segunda interpretación, retoma lo expresado por Piaget:

> Como se sabe, según Piaget, el comportamiento adaptativo se logra a través de dos aspectos constitutivos básicos: la asimilación y la adaptación [...] Para identificar un determinado objeto, entender un texto, resolver un problema, uno tiene que procesar la información respectiva de acuerdo con esquemas de asimilación adecuados, e integrarla en nuestra organización mental. Por otro lado, los esquemas respectivos tienen que adaptarse a las propiedades específicas y particulares de los datos respectivos. Para entender un texto en inglés, uno tiene que movilizar la terminología, las reglas gramaticales de ese idioma específico, recuperar en nuestra memoria los significados de los términos respectivos, etc. (Fischbein, 2013, p. 37)

En esta segunda interpretación, la función del esquema es adaptar "lo nuevo" a nuestros esfuerzos cognitivo-conductuales. Aquí, el esquema es la condición anterior, que le permite a una persona procesar e integrar una información que ya posee, para luego responder adecuadamente a una clase de estímulos. El "éxito" de los esquemas depende tanto del entrenamiento como de la maduración intelectual del individuo.

Como se ha mencionado, la intuición no es una mera conjetura, sino que depende de un esquema estructural. Ahora bien, supongamos el enunciado: "el todo es más grande que una de sus partes", con un esquema intelectual respectivo para entidades finitas y con la intuición propia de edades tempranas no tendríamos problema en aceptar dicho enunciado. Sin embargo, si el esquema no se adapta a las entidades infinitas, y la intuición no está bien desarrollada; no podremos comprender el enunciado "**el cardinal del intervalo** $(0,1)$ **es el mismo cardinal de** $\mathcal{R}$**"**. Es decir, si las intuiciones no están relacionadas con esquemas adecuados podrían conducirnos a errores.

Las intuiciones anticipatorias dependen de las actitudes intuitivas y sólidas del individuo, es decir, estas intuiciones no son determinadas por los datos del problema que se desea resolver. Por tanto, si estamos interesados en conocer la estrategia de una persona para resolver un problema: "no es suficiente saber cuál es su conocimiento formal en el campo respectivo y los datos del problema dado. Uno tiene que tener alguna información confiable sobre las "líneas de fuerza" de sus agregados intuitivos y afirmativos" (Fischbein, 2002, p. 64).

Fischbein (2002) afirma que un modelo es una herramienta necesaria para dar forma a cogniciones intuitivas, más aún, que es un sustituto que se requiere para que una noción intuitivamente inaceptable pueda ser más accesible. Así, encontramos modelos abstractos e intuitivos.

Las fórmulas o funciones en matemáticas son ejemplos de modelos abstractos que son adecuados para ciertas realidades concretas: la función cuadrática $s = \frac{1}{2}at^2$ es un modelo abstracto para el movimientos acelerado, "la solución obtenida en el sistema abstracto es válida para el fenómeno concreto correspondiente y representa un elemento esencial" (Fischbein, 2002, p. 121). Por tanto, un modelo abstracto es una herramienta pertinente para predecir fenómenos con respecto a un evento concreto.

Por otra parte, el modelo intuitivo, por su propia naturaleza, es de tipo sensorial, es decir, puede ser representado y modificado como cualquier realdad concreta. Por ejemplo, para resolver problemas de probabilidad se utilizan en muchos casos los diagramas de árbol. Por tanto, "un modelo intuitivo no es necesariamente un reflejo directo de una realidad determinada, muy a menudo se basa en una interpretación abstracta de esa realidad" (Fischbein, 2002, p. 121). Entonces, puede afirmarse que la gráfica de una función puede entenderse como un modelo intuitivo. El punto es que muchos individuos, están capturados por el fantasma conceptual, que parece protegerlo de los efectos paralizantes producidos por la incertidumbre y la información incompleta; que "desprecian" la intuición.

Para Fischbein (2002, p. 191), "uno de los principales mecanismos para moldear las intuiciones es el de producir modelos de compromiso para representaciones intuitivamente conflictivas". Por ejemplo, un movimiento circular 'perfecto' representaba para Galileo un compromiso entre la necesidad de admitir la infinidad de un movimiento si ninguna causa lo detiene, y la necesidad intuitiva de evitar la representación inaceptable de la infinidad de espacio y tiempo. Otro ejemplo es el infinito dinámico, que representa el compromiso entre los esquemas mentales finitos y el infinito real de los matemáticos. Entonces, los esquemas tienen como función adaptarse de la mejor manera a las demandas de nuestra actividad mental. Pero, "por lo general, son 'representables', tienen un significado de comportamiento y se corresponden con los requisitos prácticos de nuestra vida terrestre" (p. 191). Los compromisos a los que se refiere Fischbein, no sólo se dan entre intuiciones, sino entre restricciones lógicas o entre restricciones intuitivas y de comportamiento.

Dado que las operaciones mentales se organizan en sistemas que funcionan según algún tipo de esquema, encontramos que la estabilidad y coherencia de los esquemas están relacionadas con la estabilidad de las intuiciones. Por ejemplo, esquemas como la clasificación y el orden son la base del concepto de número y a su vez, el número se organiza de acuerdo con los esquemas mentales de las operaciones, "la resistencia de las intuiciones a la alteración expresa la tendencia de los respectivos sistemas de esquemas a conservar su unidad, su jerarquía y su rol de comportamiento" (Fischbein, 2002, p. 194). Lo que indica, que es gracias a la experiencia duradera, que los mencionados esquemas se refuerzan y construyen en el tiempo.

En el proceso de razonamiento, aparecen estrategias para buscar soluciones. Tales estrategias están influenciadas por modelos que funcionan tácitamente, los cuáles se producen de forma automática o deliberada y que en ocasiones están más allá del control consciente directo. Estos modelos tácitos con frecuencia determinan la construcción de estructuras cognitivas.

Fischbein (2002) considera al modelo intuitivo como un sustituto que puede traducir un concepto en términos de un comportamiento sensorial. Para él, cuando una noción no puede ser representada intuitivamente, se tiene la

tendencia natural a producir un modelo que pueda reemplazar dicha noción en el proceso de razonamiento. Bajo esta perspectiva, este estudioso identifica diferentes tipos de modelos intuitivos:
Analógicos: cuando la situación original y el modelo pertenecen a sistemas de referencia diferentes. Ejemplo: una corriente eléctrica y el flujo de un líquido.
Paradigmáticos: cuando el original pertenece a cierta categoría de situaciones, y el modelo es construido gracias a un ejemplo de dicha categoría. Ejemplo: el agua como modelo para identificar cualquier líquido.
Relacionales: Cuando a partir de un fenómeno intuitivo se puede comprender el fenómeno original relacionado, que es más complejo. Ejemplo: el comportamiento de un resorte puede ayudar a comprender fenómenos donde interviene la conservación de energía.
Diagramáticos: son aquellas representaciones gráficas que permiten traducir relaciones abstractas del fenómeno original. Ejemplo: gráfica de funciones, diagramas Venn.
En general, los modelos deben tener las siguientes características:

a) Correspondencia, lo más fiel posible, en consistencia y estructura con el original.
b) Relación con las características del procesamiento de la información humana.
c) Ser autónomo con respecto al original, lo que implica que debe ser gobernado por sus propias leyes.

La idea de un buen modelo intuitivo implica que es autónomo y que es, a la vez, un medidor confiable entre la situación original y la actividad intelectual de quien está utilizando el modelo. Es decir, el modelo debe ser coherente tanto con la situación original como con la cognición humana.

> Esta situación impone a los modelos una serie de restricciones que no pueden ser fácilmente cumplidas simultáneamente por el mismo dispositivo mental. [...] En consecuencia, la mayoría de nuestros modelos tácitos e intuitivos son mediadores imperfectos, lo que a menudo lleva a interpretaciones incorrectas o incompletas. (Fischbein, 2002, pp. 125-126)

Revisando la historia de la ciencia, y de la matemática en particular, se encuentra que los grandes logros y avances han estado influenciados por “la profunda tendencia de los individuos a producir dispositivos tácitamente mentales que les permiten creer directamente en la validez objetiva de sus concepciones, incluso antes de que se alcance una justificación completa" (Fischbein, 2002, p. 211). Estos dispositivos son los esquemas mentales intuitivos, los cuales son necesarios para que el proceso de razonamiento sea fluido y productivo.

El esquema y la intuición implican una contradicción dialéctica. Por un lado, como estructura cognitiva; tienen la función de organizar la información (aunque esté incompleta) en unidades coherentes, significativas e internamente consistentes. Pensar productivamente requiere incentivos intuitivos. Por otro lado, la matemática es un sistema formal, axiomático y organizado, cada proposición debe ser probada, lo que implica que el razonamiento matemático debe eliminar todos los argumentos extra-lógicos. Entonces, "es muy esclarecedor comparar los obstáculos, dificultades y distorsiones que han aparecido en la historia de las matemáticas con las que emergen durante la infancia y en el proceso de instrucción. Básicamente, pueden ser identificados los mismos tipos de conflictos" (Fischbein, 2002, p. 212). Esta aparente contradicción, se presenta por el conflicto entre la naturaleza puramente formal de los conceptos matemáticos y la tendencia intuitiva, necesaria, para la actividad de razonamiento.

Aunque las matemáticas son un sistema deductivo de conocimiento, no puede desconocerse la invención, en el que inducciones, analogías y conjeturas juegan un papel fundamental, y cuyo resultado es cristalizado en las intuiciones anticipatorias. El proceso de resolución es automático, por tanto, no es posible controlar explícitamente cada paso en el esfuerzo de resolución.

De lo anterior podemos deducir que existe una relación entre *esquema*, *intuición* e *invención*. Estas tres nociones: *esquema*, *intuición* e *invención*, las encontramos desarrolladas en el pensamiento del filósofo Henri Bergson.

Para Bergson (2015), "la invención consiste precisamente en convertir el esquema en imagen" (p. 95). El filósofo francés concibe la invención como la materialización creciente de lo inmaterial. Un matemático tiene un problema que desea resolver, inicialmente la solución no es ni clara ni precisa, luego de organizar las ideas, llegará al resultado una vez que haya logrado desarrollar esa idea y expresarla de una manera tangible perceptible a los sentidos; en conceptos, en teoremas, o enunciados matemáticos.

Bergson reconoce que “el esquema es algo difícil de definir, pero que cada uno de nosotros siente, y cuya naturaleza entenderemos si comparamos los distintos tipos de recuerdos, especialmente los recuerdos técnicos o profesionales” (Bergson, 2015, p. 89). El filósofo identifica este esquema como un *esquema dinámico*, que puede entenderse como una actitud intelectual, que espera y prepara la llegada de las imágenes, así mismo organiza el movimiento de las imágenes que van a insertarse en el esquema, tal como sucede en la imaginación creadora.

Por naturaleza se concibe que un esquema es algo determinado. Sin embargo, para que la invención pueda ser posible, el esquema debe ser *dinámico*, es decir, móvil y elástico, de esta forma las imágenes pueden “entrar” en él, y gracias a la intuición estas ideas intangibles e incorpóreas se organizan para dar solución a un solo y mismo problema:

> ... Kepler dedicó parte de su vida tratando supuestos extraños hasta que, habiendo descubierto la órbita elíptica de Marte, toda su obra anterior tomó forma en un sistema organizado, en otras palabras, en lugar de un único modelo, inmóvil y rígido, que da inmediatamente el diseño distinto, puede haber un régimen elástico o movible, cuya mente se niega a detener los contornos, porque espera su decisión de las mismas imágenes que el esquema debe atraer para darse un cuerpo. Pero, ya sea que el esquema sea fijo o móvil, es durante su desarrollo en imágenes que surge el sentimiento de esfuerzo intelectual (Bergson, 2015, p. 96).

El mayor esfuerzo intelectual se producirá en el acto de invención, y allí la intuición es aquella que permite organizar las ideas al interior del esquema.

El filósofo argentino Mario Bunge también nos expone una relación entre intuición y creación. Un primer acercamiento a la imaginación, lo tenemos con la capacidad de representar “la intuición geométrica”. En este punto nos referimos a la habilidad que tiene un sujeto para visualizar o representar objetos ausentes, o su habilidad para construir imágenes, réplicas visuales o modelos de entidades abstractas, en cierto sentido podría ser considerada como algún tipo de interpretación, “la llamada intuición geométrica, o intuición espacial, es precisamente la habilidad para a) formar conceptos geométricos por abstracción de intuiciones sensibles y b) asociar conceptos aritméticos, algebraicos o analíticos con figuras geométricas" (Bunge, 1996, p. 129).

La representación geométrica se encuentra en el origen, en la enseñanza y en el desarrollo de la matemática. Un diagrama puede mostrarnos una propiedad y la validez de este argumento llegará gracias a la lógica que verificará nuestro proceder, se pregunta el autor en cuanto a los diagramas "¿por qué hemos de prescindir de ellos durante el periodo de construcción si son provechosos como los diagramas de Euler-Venn en el cálculo de clases?" (Bunge, 1996, p. 130). Sin embargo, no debe abusarse de este elemento, puesto que en muchos casos las intuiciones visuales no permiten llegar a razonamientos abstractos. En la actualidad, se han cambiado estas intuiciones geométricas por auxiliares intuitivos, tales como gráficos de dispersión de Feynman, que, aunque no representan literalmente al objeto, tienen un carácter simbólico que permiten ayudar al físico o al matemático en su trabajo científico.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que la representación imaginativa no reemplaza el raciocinio puro, simplemente lo refuerza, desde un punto de vista psicológico, limitarse sólo a las representaciones visuales podría obstruir la generalización y la aprehensión de las cualidades y relaciones que no se pueden visualizar, lo anterior no implica desechar la interpretación y la representación del trabajo teórico.

En la intuición como imaginación, también encontramos la imaginación creadora, es decir, la que permite hablar de invención y de inspiración. Este tipo de intuición aparece cuando se engendran nuevas ideas, sin aparente esfuerzo ni lógica explícita. Esta capacidad de invención y construcción, permite que el trabajo del matemático vaya más allá de lo algorítmico: "la invención de hipótesis y técnicas, y el diseño de experimentos son casos patentes de operaciones imaginativas o, si se prefiere, de actos intuitivos, opuestos a las operaciones "mecánicas" (Bunge, 1996, p. 138). Bajo esta realidad encontramos que la lógica permite el desarrollo de las buenas ideas, pero por sí sola no suministra puntos de vista nuevos. Sin embargo, esta situación no implica que las ideas novedosas surjan de la nada, es necesario que el individuo tenga cierto tipo de conocimiento previo que, gracias a la observación, la comparación y la deducción le permitan determinar los nuevos conocimientos, la lógica formal permite convalidar y decidir qué tan buena es una idea nueva.

La creación es un proceso, en el que surgen ideas muy simples, que posiblemente no satisfacen el correspondiente sistema axiomático, y entonces es necesario iniciar un camino de adaptación, de regresión, de ensayo y error, bajo la mirada de la construcción teórica; este proceso es metódico, y es aquí donde aparecen "chispazos" en el trabajo científico "pero sólo como sucesos en el seno del proceso creador racional y no como desencadenantes incondicionados" (Bunge, 1996, p. 141).

Las ideas anteriores no deben llevarnos a confusiones, para Bunge, en la invención, la intuición no es superior a la lógica, si entendemos por intuición, en este contexto, "visón", "relámpago intuitivo", "revelación natural" o "inspiración", debemos comprender, entonces, que éstas son el resultado de un proceso que requirió de mucho esfuerzo, de ensayar diversas hipótesis, de deducir consecuencias de éstas y finalmente de compararlas con los datos empíricos, "la imaginación científica es controlada; es constantemente puesta a prueba por el esfuerzo de hacerla compatible con el conjunto del conocimiento científico" (Bunge, 1996, p. 145), y este proceso de control lo ejerce la lógica, por ella no pasamos una "primera intuición" sino el producto de una elaboración racional.

Bunge señala, que la investigación científica requiere más que sólo razón y experiencia, y afirma que algunos llaman a ese algo "el sentimiento" o "la corazonada", podemos describir ese algo, como una idea esclarecedora que llega a la conciencia súbitamente y permite solucionar un problema de interés para quien tiene esa "corazonada", como lo habíamos mencionado, ella surge de un amplio conocimiento de los datos, pero va más allá de cualquier conclusión a la que una persona hubiese llagado conociendo únicamente los datos de que dispone.

Los científicos comprenden que la imaginación creadora es más exigente porque debe trascender la experiencia y el sentido común, no obstante, la invención requiere de una idea y de su ejecución. La invención es un proceso, no es sólo tener esa gran idea, que inicialmente puede ser imaginativa, se requiere que corresponda con la realidad alcanzable, más aún es una lucha entre el pensamiento y el mundo material, "la chispa inicial de la intuición puede desatar una reacción en cadena en el seno del conocimiento preexistente, pero el resultado final es comúnmente muy diferente de la chispa inicial” (Bunge, 1996, p. 166).

1.4La intuición y la formalización

El ser humano tiene una compleja estructura formada por la cognición y el comportamiento, en la que se ha creado una brecha gracias al lenguaje y al razonamiento. Por un lado, el razonamiento nos permite conocer más de lo que sabríamos por las formas directas perceptivas, pero esto implica la incertidumbre, propia de las formas indirectas de conocimiento (los conceptos). Para superar dicha incertidumbre, se inventaron las formas simbólicas. Ahora bien, el problema que surge tiene que ver con las estructuras lógicas que representan sistemas cerrados que son controlados por sus productos internos mentales, “lo que la lógica ofrece por sí misma no es una certeza absoluta prácticamente valiosa, sino una forma convencional de aceptación” (Fischbein, 2002, p. 7). La creencia instintiva en la existencia de certidumbres últimas surge de la necesidad de una certeza práctica no convencional.

En el esfuerzo científico por buscar el rigor en la estructura deductiva de la ciencia, han aparecido los efectos, tanto positivos como negativos, de la intuición. Éstos han servido, en matemáticas, para comprender, resolver, inventar y aprender. Por la naturaleza de la matemática y su estructura axiomática, los matemáticos han tenido sumo cuidado de aceptar evidencia intuitiva cuando intentan definir conceptos o construir estructuras deductivas.

Ahora bien, la capacidad de interpretación no es una actividad mecánica o automática, como afirman los semánticos, los símbolos que aparecen en las ecuaciones no agotan el significado. El significado de un sistema puede ser descrito por las reglas y los postulados, pero esto no será el contenido total del sistema, se requiere algo más, “la relación entre ciertas construcciones (símbolos, conceptos, proposiciones) y las correspondientes experiencias sensoriales no es lógica sino “intuitiva”, como lo señaló Einstein” (Bunge, 1996, p. 127). Cabe aclarar, que estas relaciones no pertenecen a las teorías científicas, sólo se valoran en la convalidación y aplicación de dichas teorías. La intuición está restringida a los signos artificiales y no al significado, puesto que se requiere del uso de herramientas científicas que permitan validar lo que la intuición nos brinda de primera mano.

Muchos anhelan una independencia absoluta de la matemática, como un mundo cerrado con sus enunciados formales, pero se ha demostrado que esto es imposible. Aparecen dos tipos de imposibilidades; una formal y otra psicológica. La primera es ampliamente conocida como consecuencia del teorema de incompletitud de Gödel: "formalmente, lógicamente, un sistema matemático nunca puede ser absolutamente cerrado; es decir, nunca puede poseer en sí mismo todos los requisitos formales necesarios para decidir sobre la validez de todos sus teoremas" (Fischbein, 2002, p. 16).

La imposibilidad psicológica tiene que ver con el hecho de la evidencia que muestra, que no es posible un razonamiento productivo, en matemáticas, recurriendo únicamente a los medios formales. Muchos matemáticos en sus autobiografías o apuntes aseguran que, aunque se cuenten con todos los axiomas, teoremas o definiciones, el sistema por sí mismo no puede producir resultados, en cuanto a la resolución de problemas o elaboración de pruebas, etc., "esto es lo que resulta de los estudios cognitivos y de los desarrollos experimentales" (Fischbein, 2002, p. 16).

A pesar del esfuerzo del pensamiento matemático por buscar la formalización de su saber, a través de una adaptación conductual, parece que el sistema se mantiene estéril al perder su contacto con las fuentes originales, auténticas y prácticas. El asunto es que las características intrínsecas de los fenómenos reales, tales como la credibilidad, la estructura y la riqueza, no son igual de convincentes y productivas que estas mismas cualidades en los objetos formales. Hilbert, uno de los creadores de la axiomática, reconoce tal situación, enunciado algunos ejemplos: "¿quién no siempre usa, junto con la doble desigualdad a>b>c, la imagen de tres puntos seguidos en una línea recta como la imagen geométrica de la idea "entre"?" (Fischbein, 2002, p. 17).

Para Fischbein, existe una tendencia a producir interpretaciones, más allá de lo conceptual, para edificar estructuras que les asignen credibilidad, consistencia y necesidad intrínseca a los conceptos para un comportamiento normal y productivo. El esfuerzo por rechazar estas interpretaciones pseudo-evidentes es infructuoso. Por el contrario, a diferencia del comportamiento práctico, el comportamiento simbólico, tiene medios de razonamiento que están más allá del control directo. Es posible controlar las fuentes del conocimiento, el significado o el razonamiento mismo, pero no la actividad heurística en sí misma. "En este nivel de estructura profunda, la mente produce una gran variedad de medios a través de los cuales lo plausible aparece como cierto, lo no visible como visible, lo infinito como comprensible, las relaciones abstractas como interpretables conductualmente" (2002, p. 20).

Un comportamiento mental es posible cuando se basa en datos intrínsecamente aceptables. Esta actitud mental es automática, puesto que nuestro comportamiento se basa en la creencia espontánea en la existencia absoluta de la realidad externa (Fischbein, 2002, p. 21). Estas mismas restricciones se extienden al comportamiento mental de la actividad matemática. Si se quiere que el razonamiento sea una actividad productiva, entonces los objetos mentales deben tener una consistencia intrínseca similar a la de los objetos reales. Por tanto, "una intuición es, entonces, una idea que posee las dos propiedades fundamentales de una realidad concreta, objetivamente dada; la inmediatez, es decir, la evidencia intrínseca, y la certeza (no una certeza convencional formal, sino una certeza inmanente prácticamente significativa)" (p. 21). Las representaciones intuitivas permanecerán, dado que forman parte de la actividad intelectualmente productiva. "La credibilidad basada formalmente (a través de una prueba formal) puede ser suficiente para producir una convicción convencional, pero no es suficiente para garantizar el progreso genuino de un esfuerzo de razonamiento" (p. 22).

Para Fischbein, aunque el pensamiento formal tiene mecanismos propios para conectar y estructurar información o para elaborar conclusiones creíbles, "la idea principal es que el mismo tipo de actitudes y esfuerzos mentales que caracterizan un intento empírico de solución también intervienen a nivel formal" (2002, p. 23). Tales mecanismos no son más que una lista de verificación que por sí misma no programa la selección de axiomas que lleven a enunciados significativos, para realizar de manera práctica las verificaciones correspondientes a la consistencia, la independencia y la completitud. Como cualquier otro comportamiento mental o productivo, la actividad matemática, incluso ante las estructuras axiomáticas, "recurre a las formas intuitivas de aceptación y extrapolación que pueden asegurar su firmeza de comportamiento requerida, su productividad, su consistencia dinámica y flexible" (p. 23).

Hemos estudiado como la matemática demanda tanto de la formalización como de la intuición. Así mismo, los sistemas estructurados requieren de la capacidad de síntesis que tiene un individuo, aquel que puede combinar elementos dispersos en un sistema conceptual, es decir, que sabe organizar las ideas en un núcleo común. Esta situación implica "una visión global", que es la que permitirá la argumentación coherente de las ideas. Ahora bien, esta idea unificada no se da en un primer momento, debe trabajarse sobre las ideas simples. Solamente los grandes matemáticos son capaces de desarrollar una gran idea o una visión unificada.

En algunos casos pareciera que las nuevas ideas van en contra del sentido común, algunas grandes teorías han sido el producto de ideas que inicialmente parecían inconcebibles, irrazonables o contra-intuitivas, pero que hoy son aceptadas, sin ningún inconveniente por el sentido común. Esta situación muestra que el sentido común puede educarse. La crítica a una nueva teoría y la búsqueda de mejores que las anteriores requiere abandonar toda manera de pensar vinculada a lugares comunes, es decir, que el sentido común es dinámico y avanza de acuerdo a los progresos científicos y tecnológicos, entonces se puede afirmar que: "ningún concepto es absoluta o inherentemente intuitivo o contra-intuitivo: *el grado de intuitividad de un concepto es relativo a determinado bagaje cognoscitivo*" (Bunge, 1996, p. 152). Por tanto, es necesario dejar a la intuición cumplir su función heurística y apartarla cuando pueda obstaculizar las formaciones conceptuales.

Cuando una persona elabora una conjetura, ésta es producto de su interés por un problema particular. Por tanto, aunque se tengan los axiomas, las herramientas adecuadas o las leyes de la lógica, estos insumos no bastan para llegar a conjeturar alguna teoría. Por ejemplo, si quiere demostrar que "*p*, entonces *q*", se necesita conocer el contenido de *p*, y llegar a *p* no es un asunto únicamente de lógica. Más aún, no se trata de un proceso lineal, sino que es de ensayo y error y esto requiere paciencia y acumulación de relaciones fértiles, "constituye un proceso "intuitivo" en la medida en que, aun siendo racional, no es completamente consciente, o, si se prefiere, no entra por entero en el foco de la conciencia. Por otra parte, tampoco se ajusta totalmente a las pautas lógicas; en el mejor de los casos no las viola" (Bunge, 1996, p. 171).

Se sabe que los científicos creadores pueden tener "revelaciones" o "iluminaciones", pero esto no sucede sin que antes se haya formulado, pensado o estudiado un problema. Las corazonadas o captaciones globales aparecen luego de un análisis paciente y cuidadoso de un problema. Es decir, que la frónesis aparece luego de mucha experiencia, "la mayor parte de las veces es necesario trabajar duramente para plantear el problema de una manera conveniente, esto es, de modo que pueda intentarse su solución con los medios disponibles" (Bunge, 1996, p. 199).

Finalmente, revisemos ahora la relación entre los conceptos intuitivos y la comunidad científica. La historia nos ha mostrado que situaciones aceptadas intuitivamente por un individuo han sido también aceptadas como verdaderas por la comunidad científica. Sin embargo, esta coincidencia no se presenta en todos los casos. Por ejemplo, se acepta intuitivamente que todo número tiene un sucesor, pero es difícil aceptar la equivalencia entre el conjunto de los naturales y los números pares positivos. También encontramos en la historia que afirmaciones aceptadas como verdaderas por la comunidad científica, en cierta época, han sido contradichas en periodos posteriores, es decir, que "los llamados "hechos" y "las razones lógicas" están sujetos a interpretaciones que son históricamente alterables" (Fischbein, 2002, p. 24). Las mencionadas situaciones, permiten distinguir entre los problemas filosóficos relativos a la "verdad" y los problemas psicológicos en cuanto a la relación del individuo y la aceptación intuitiva de un enunciado, y el valor de verdad que ese enunciado tiene para la comunidad científica.

En su relación con los sistemas conceptuales el individuo está sometido a tres factores, que a su vez podrían ser contradictorios. Estos son: "la concepción individual de un fenómeno, la concepción "clásica" de la comunidad científica con respecto al mismo fenómeno y una concepción que puede aparecer, en la misma época, como el fenómeno "nuevo", "controversial" y revolucionario" (Fischbein, 2002, p. 25).

En suma, los frutos de la intuición deben ser perfeccionados por la razón. Una vez que la imagen difusa inicial llega al pensamiento, se incorpora a un cuerpo de proposiciones lógicas ya existentes y se enlazan para nuevas construcciones conceptuales. Los ejemplos citados han mostrado que la intuición es anterior a la sistematización y que ésta no se elimina al entrar a la etapa de formalización, simplemente la intuición puede entrelazarse con las ideas formales y con ayuda de la lógica crear nuevas teorías. Las intuiciones por sí solas, son estériles, solamente cuando las teorías se ajustan a la lógica podrán vincular y refinar conceptos intuitivos para obtener conceptos exactos. (Peña-Páez, 2020a)

La intuición es una herramienta heurística, que sirve de apoyo al raciocinio. La intuición no se da de forma manifiesta en los comienzos de la ciencia, ni en la presentación final de las teorías, tampoco deja a la lógica todo el proceso constructivo, la intuición es "un aspecto de un proceso complejo en el cual la deducción y la crítica son por lo menos tan importantes como la inspiración" (Bunge, 1996, p. 185), por tanto, las formas de la intuición deben ser controladas para que puedan ser útiles. En matemáticas, la evidencia muestra que no es posible un razonamiento productivo, recurriendo únicamente a medios formales.{Formatting Citation}

2. ¿Cómo usan los matemáticos la intuición? Dos posturas influyentes

Para muchos filósofos, las tres escuelas fundacionales no alcanzaron los objetivos que perseguían. El logicismo se vio desbordado por la crisis de las paradojas lógicas, los intentos de solución de la crisis que introdujeron ciertas dificultades en relación con lo que podría considerarse un axioma puramente lógico, y, finalmente, por las implicaciones de los teoremas de incompletitud de Gödel. Estos resultados gödelianos también torpedearon los objetivos iniciales del programa formalista de Hilbert. Y el intuicionismo no logró mostrar las nuevas matemáticas lúcidas y purificadas que tanto había prometido.

Uno de los factores que han influido en este fracaso fundacional tiene que ver con las opciones metodológicas que se han basado en el empirismo, el formalismo, el intuicionismo y el platonismo. Todo ello se debe a una concepción equivocada, pues se tiende a eliminar la distinción entre la epistemología y la metodología de las matemáticas que, aunque están relacionadas, son diferentes: "la epistemología de las matemáticas trata de cómo es posible el conocimiento matemático, mientras que la metodología de las matemáticas se centra en qué métodos se utilizan en las matemáticas" (Crowe, 1988, p. 274). El interés de estudiar estos temas radica en que puede identificarse una influencia de la epistemología en las afirmaciones metodológicas. Por lo demás, hay una diferencia importante entre preguntarse por los métodos que han usado los matemáticos en la realidad y los que deberían usar.

Luego de la evidente problemática de los fundamentos de la matemática, de mano de los logicistas, de los formalistas y de los intuicionistas, a finales de los años sesenta y principios de los setenta del siglo pasado comenzaron a aparecer críticas a la ortodoxia platonista, y estas críticas han sido importantes en la configuración de la filosofía (post-fundacional) de las matemáticas. La filosofía de las matemáticas ha sido abordada por la epistemología psicologista, en la que no abundan "defensas detalladas de sus afirmaciones sobre enunciados básicos *a priori* y reglas de inferencia" (Kitcher, 1984, p. 38). A ello se ha añadido el abandono de interrogantes sobre el modo en que las pruebas implican conocimiento. Las investigaciones recientes se han interesado por el tema de la intuición en la práctica matemática y para ello han recurrido a ejemplos de los matemáticos más geniales y exitosos de la historia, entre los cuales encontramos a Henri Poincaré y a Kurt Gödel. A continuación, mostraremos sus posturas frente a la intuición.

2.1La intuición en Henri Poincaré

Poincaré ha sido muy influyente en los intuicionistas contemporáneos, quiénes afirman que “(1) Las matemáticas tienen no sólo un significado formal sino también un contenido y (2) Los objetos matemáticos son captados directamente por la mente pensante” (Heinzmann & Nabonnand, 2008, p. 163). La segunda tesis se puede interpretar de dos maneras: o los objetos matemáticos existen independiente de nuestra mente; o existen independientes de nosotros, pero se conocen a través de un proceso constructivo. Para el matemático francés no es posible afirmar que las entidades matemáticas existen independientemente de nuestra mente, “desde Kant, la intuición matemática se ha relacionado con la construcción. Pero el constructivismo no puede identificarse con el intuicionismo (antirrealismo) ni con el realismo” (Heinzmann & Nabonnand, 2008, p. 164).

Para Poincaré, las matemáticas tienen significado y van más allá de cualquier formalización. Por tanto, aunque entiende que el lenguaje matemático es necesario para la creación, por sí sólo no puede crear nuevas matemáticas. Así, el razonamiento matemático deja de ser una relación lógica entre proposiciones para convertirse en una relación epistémica entre juicios. Poicaré sólo usa la intuición en la aritmética en donde la secuencia de los números no es completamente independiente de la experiencia del mundo exterior.

Gracias al poder de la intuición en la mente, al individuo se le presentan esquemas de acción superiores, los cuales son resultado de la creación. Esto no implica que la experiencia sea fuente de todo conocimiento, su función es hacer consciente al individuo de ciertas estructuras en la mente, a las que la conciencia debe adaptarse. Revisaremos las ideas principales sobre la experiencia, desde el punto de vista de Poincaré.

En primera instancia, la experiencia tiene que ver con los cuerpos empíricos no con el espacio, por lo que la geometría, que se ocupa de los cuerpos ideales, no puede ser probada ni desaprobada por la experiencia. Asimismo, las proposiciones de la geometría no son verdaderas ni falsas, dado que son convenciones. En segundo lugar, la elección de las convenciones o de las diferentes geometrías viene dada por la experiencia y, en tercer lugar, la geometría no debe temer a la experiencia, dado que es la más convencional de las disciplinas.

Poincaré reconoce que es imposible argumentar que la geometría euclideana sea empírica, lo que le permite afirmar que existe una intuición del tiempo, que es "una forma *a priori* de la percepción del mundo de la experiencia" (Heinzmann & Nabonnand, 2008, p. 170). En realidad, gracias a la experiencia podemos considerar similares todos los tipos de espacios, incluso brinda la posibilidad de relacionar el espacio visual con los espacios táctiles. Por tanto, Poincaré puede explicar "por qué la tridimensionalidad del espacio geométrico es tan inmediata" (Heinzmann & Nabonnand, 2008, p. 175). Es decir, no es la experiencia la que muestra que el espacio tenga tres dimensiones, sino que lo que muestra es la conveniencia de atribuirle tres dimensiones al espacio.

La génesis de la geometría es un buen ejemplo de la manera en que la experiencia permite a las capacidades innatas manifestarse: "cuando no tenemos una opción, el rol de la experiencia llega a su fin y el resultado es un principio de razonamiento. Cuando tenemos una opción, la experiencia nos ayuda a elegir y el resultado es una convención". Sin embargo, las convenciones no son intuiciones: "son el resultado de la activación por la experiencia de las capacidades innatas de nuestras mentes" (Heinzmann & Nabonnand, 2008, p. 175). Por tanto, la experiencia le brinda a la mente la oportunidad de usar sus capacidades.

En el pensamiento de Poincaré, la experiencia es una oportunidad para usar la intuición directa, la cual puede entenderse como "mi devenir consciente de algo que se ha presentado ante mí" (Godlove, 2009, p. 783). Para Poincaré, la intuición matemática está fundamentada en la prioridad que la cognición da a la forma general sobre la forma singular. Como Kant, la ubica "en una forma de cognición caracterizada por la intuición de pluralidades homogéneas únicas, de unidades de partes homogéneas, generadas a partir de reglas o esquemas, cada uno de los cuales abarca actos de construcción ilimitados de un determinado tipo" (Godlove, 2009, p. 783).

El mundo de las matemáticas es un mundo ideal, en el que "pueden pasar las cosas, mientras podemos imaginarlas claramente" (Hersh, 2011, p. 37). En este mundo, por ejemplo, un número puede ser realmente positivo o arbitrariamente pequeño, pero en la realidad esto no es posible. Esto no implica que la matemática sea una ficción o un cuento de hadas. Es algo con sentido: “algo en lo que todos podemos estar de acuerdo y con lo que podemos trabajar, porque todos lo entendemos de la misma manera” (Hersh, 2011, p. 37).

En la vida práctica sabemos cosas, aunque a veces no sabemos cómo las sabemos: ¿cómo sabremos que no dejaron una trampa de osos al lado de mi cama cuando me levante? No lo sé, pero sé que eso no pasará. De la misma manera sabemos que lo que parece un límite en realidad lo es, aunque no podamos probarlo o explicarlo. Aunque es posible que pasen cosas ridículas (como la trampa de osos), lo que implica reconocer que en matemáticas que algo no sea cierto, no quiere decir que no podría serlo. Por tanto, el conocimiento práctico en matemáticas, es un tipo de conocimiento real, “aunque no sea demostrativo o conocimiento deductivo” (Hersh, 2011, p. 38).

Muchas veces en matemáticas, gracias a los aspectos prácticos, podría parecer que estamos obligados a aceptar la respuesta numérica como resultado de un cálculo determinado, “aunque, según los estándares de lógica rigurosa, aún resulta admisible la posibilidad de que podamos estar equivocados” (Hersh, 2011, p. 38). En algunas situaciones matemáticas, así como en las cotidianas, predomina el pensamiento plausible sobre el demostrativo.

Este tipo de razonamiento plausible también se llama intuitivo. En primer lugar, este razonamiento intuitivo es el que habitualmente encontramos en la ciencia empírica, en la tecnología y, en general, en “cualquier tipo de problema práctico o realista de la vida humana”. En segundo lugar, no es ni demostrativo, ni deductivo, ni concluyente, es decir, “estamos frente al conocimiento matemático que no es de un tipo diferente al del conocimiento humano ordinario” (Hersh, 2011, p. 39). La vida cotidiana no se basa en demostraciones, ni deducciones rigurosas, sino en la experiencia interpretada correctamente; y el conocimiento matemático, al igual que el conocimiento de la vida cotidiana, no es infalible, sino plausible e intuitivo.

El pensamiento de Poincaré está enmarcado en la filosofía de los fundamentos de la matemática. A diferencia de Frege, para quien todo lo que pensamos sobre una cuestión matemática está relacionado con los principios lógicos y los presupuestos racionales con los que se cuente, Poincaré considera que las definiciones legítimas deben rastrear lo oscuro hasta lo claro, donde las nociones de claridad y oscuridad se entienden psicológicamente.

Las ideas de Poincaré influyeron en muchos filósofos de la ciencia, él concebía las matemáticas como el producto del pensamiento de los seres humanos y de las relaciones entre los objetos matemáticos. Para él la claridad de los enunciados es juzgada por los estándares que los propios individuos inventaron para tal fin. Para Goldfarb (1988), las ideas de Poincaré permiten evidenciar no sólo los puntos débiles del logicismo sino comprender el enfoque naturalista contemporáneo.

Para el matemático francés, la intuición es una experiencia psicológica que es falible y que debe ser tenida en cuenta en cualquier filosofía realista de las matemáticas. Las intuiciones son "suposiciones o ideas obtenidas por un razonamiento plausible, ya sea totalmente consciente o en parte subconsciente" (Hersh, 2011, p. 44). La intuición está alejada de ese mito antiguo, en el que supera la lógica y se conecta directamente con lo trascendental.

Poincaré "separa explícitamente la intuición matemática de la imaginación y lo sensible" (Goldfarb, 1988, p. 63). Por tanto, cuando se afirma que una verdad matemática se nos da por intuición, significa que reconocemos su verdad y no necesitamos defenderla o probarla. Podemos interpretar que, para Poincaré, la intuición es un término psicológico, que él asume como 'convicción inmediata'.

Poincaré compara la lógica con un juego de ajedrez. Es decir, uno no entiende el juego sólo por saber las reglas. Para él la intuición es necesaria "para obtener una comprensión de las pruebas en el análisis". Más aún, es la intuición quien guía la elección "de las convenciones a adoptar y de las rutas a tomar hacia una prueba" (Goldfarb, 1988, p. 64). Actúa como la sagacidad matemática, "es decir, percibir el motivo interior que hace de esta serie de sucesivos movimientos una especie de todo organizado" (Poincaré, 1964, p. 7). La principal preocupación de Poincaré es con la psicología del pensamiento matemático, de acuerdo con la cual la intuición es una facultad que permite a las personas hacer matemáticas. Más adelante, admite que existe una diferencia entre invención (dónde se "ubica" la intuición) y contexto de justificación (donde están los lógicos).

Para Brouwer, Poincaré pertenece a esa larga tradición francesa del intuicionismo, en la que existe una separación entre la mente y la materia y la aceptación de la intuición como complementaria a la inteligencia. Gilbert Ryle describe la separación de la mente y la materia "como la 'doctrina del fantasma en la máquina' y el 'mito de Descartes' en el universo cartesiano" (citado en van

Stigt, 1990, p. 129). Para Poincaré, la intuición es necesaria para las etapas del proceso creativo, para la elección de axiomas y para tejer la secuencia del argumento lógico. El matemático francés rechazaba la tesis según la cual los símbolos y la lógica son suficientes para fundamentar las matemáticas. Aunque acepta que el lenguaje y los símbolos son una parte esencial, él distingue la invención (proceso mental de búsqueda, inspiración y construcción) de la prueba lógica; convirtiendo a la intuición en instrumento de invención.

Para Poincaré, la intuición no proporciona certeza, ni rigor. Por ejemplo, parece una verdad intuitiva que "toda función continua tenga derivada", hoy sabemos que algunas funciones continuas no la tienen. ¿Por qué nos engaña la intuición en este caso? Porque es casi imposible imaginarnos una curva sin ancho y bajo esta imagen siempre podemos encontrarle una recta tangente. Se requiere de un análisis riguroso para entender por qué la función valor absoluto no es derivable en cero. Para que el rigor aparezca en el razonamiento se requieren las definiciones, puesto que la mayor parte de los objetos con los que trabajan los matemáticos se consideran bien definidos.

Algunos matemáticos y filósofos de la ciencia aún piensan que se puede alcanzar el rigor absoluto, lo que contrasta con la idea de Poincaré (1964), para quien "la pura lógica nunca nos podría conducir a otra cosa que a tautologías; no podría crearse nada nuevo; de ella sola no podría surgir nunca un tema científico" (p. 4). Por tanto, para construir cualquier parte de la matemática se requiere algo más que la lógica.

Para el matemático francés, tenemos varios tipos de intuición. Uno de ellos implica apelar a la imaginación y a los sentidos, otro tipo es la generalización por inducción, que se puede entender como un reflejo de las ciencias experimentales, y, finalmente, el tipo de intuición del número puro, el cual permite crear un razonamiento matemático real. Aunque algunos de estos tipos de intuición no brinden certeza, no podría dudarse de aquel tipo que implica la aritmética: "ahora en el análisis cotidiano, cuando nos preocupamos de tomarnos la molestia de ser rigurosos, no puede haber nada más que silogismos o apelaciones a esta intuición del número puro, la única intuición que no nos puede engañar" (Poincaré, 1964, p. 5).

Poincaré critica a aquellos lógicos que pretenden eliminar la intuición, porque encuentra que los ideales de la lógica pueden apartarse de la realidad. Encarcelados en su torre de marfil renuncian a todo contacto con el mundo físico. Revisemos la siguiente situación:

Un matemático quiere mostrar una propiedad que le pertenece a un objeto, el cual a primera vista parece indefinible y, por tanto, intuitivo. Luego de varias aproximaciones al concepto, logra encontrar la propiedad precisa que permite establecer de manera irreprochable la propiedad buscada. Ahora bien, los filósofos se preguntarán si la definición encontrada corresponde con el objeto intuido originalmente "o bien que algún objeto real y concreto cuya conformidad con su idea intuitiva que cree usted reconocer de inmediato corresponde a su nueva definición" (Poincaré, 1964, p. 5). Entonces la dificultad no se ha desplazado, se ha dividido. La propiedad buscada estaba compuesta por dos verdades diferentes que en principio no eran fáciles de distinguir: "la primera era una verdad matemática, y ahora queda rigurosamente establecida. La segunda era una verdad experimental. Sólo la experiencia puede enseñarnos que un objeto real y concreto corresponde o no corresponde a una definición abstracta" (Poincaré, 1964, p. 6). Y, sin embargo, esta segunda propiedad no puede ser matemáticamente demostrada.

En matemáticas, aunque nos cercioremos de que cada enunciado de la lógica es correcto, no estamos seguros de comprender el verdadero significado de la manifestación, aunque por un esfuerzo de memoria seamos capaces de repetir una prueba sin olvidar ninguno de los pasos, no poseeremos toda la realidad, "no poseeremos algo importante, que hace que la unidad de la demostración nos eluda por completo" (Poincaré, 1964, p. 6), pero asume que la realidad más interesante es la idea global y no sólo la de los elementos aislados.

El análisis pone a nuestra disposición gran cantidad de procedimientos, cuya infalibilidad está garantizada y, aunque cada uno de ellos satisfaga lo que estamos buscando, ¿cómo identificar cuál de ellos nos llevará a la meta?: "Necesitamos una facultad que nos haga ver el final desde lejos, y la intuición es esta facultad" (Poincaré, 1964, p. 7). Explorar para elegir la ruta es tan importante, como saber por qué se eligió esa ruta.

Para Poincaré, la invención matemática "es el acto en el que el espíritu humano parece necesitar menos el mundo exterior, en el que no actúa o no parece actuar más que por sí mismo y sobre sí mismo" (1946, p. 40). Luego nos dirá que "inventar consiste precisamente en no construir combinaciones inútiles, sino en construir sólo las que puedan ser útiles, que no son más que una ínfima minoría. Inventar en discernir, es elegir" (1946, pp. 43-44). Y finalmente nos brindará el siguiente argumento: "pero antes de demostrar ha sido necesario inventar. No se inventa por deducción pura. Si toda la conclusión estuviera ya en las premisas conocidas ya no sería una invención, una creación, no sería más que una ejecución, una transformación" (Poincaré, 2017, p. 80).

Ahora bien, este acto de invención en matemáticas requiere ser validado por las leyes de la lógica cómo se mencionó en el capítulo anterior. Estas leyes son dominadas a la perfección por cualquier matemático, y, sin en embargo, aunque puedan seguir un razonamiento complejo, no todos son capaces de inventar algo nuevo. Incluso algunos matemáticos podrían ostentar una excelente memoria o una atención prodigiosa y, aun así, no crear nuevas teorías. El mismo Poincaré reconoce que, aunque su memoria es buena, y conoce todas las reglas del ajedrez, esto no le alcanza para ser un buen jugador. Así mismo, matemáticos que conocen todas las leyes de la lógica y los axiomas no logran llegar a la invención. ¿Por qué? Porque en realidad, la matemática no es una lista de silogismos, tiene que ver con el orden determinado en que son colocados:

> …y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición de este orden, de manera que me pueda dar cuenta rápidamente del conjunto del razonamiento, no debo temer más olvidarme de uno de los elementos, cada uno de ellos vendrá a colocarse en el cuadro que le he preparado, sin que haya hecho ningún esfuerzo de memoria (Poincaré, 1946, p. 43).

En su ensayo "La invención matemática", Poincaré describe cómo le surgió la idea de las funciones fuchsianas. Este relato permite comprender que sus ideas fueron conquistadas por la intuición y legitimadas por la lógica. Para el matemático francés, la invención ocurre en el pensamiento subconsciente, lo que no implica que sea dado por el azar. Por tanto, existe la posibilidad "de que el subconsciente sea en realidad más inteligente que la mente consciente" (Hersh, 2011, p. 42). Aunque no se dice explícitamente, otros escritores han sostenido "que el subconsciente es menos inhibido, más imaginativo, más creativo que el consciente” (Hersh, 2011, p. 42). Jacques Hadamard (1954), un matemático brillante, otorga un papel primordial al subconsciente en el descubrimiento matemático y su conexión con la intuición.

Poicaré no pretende asegurar que los matemáticos, capaces de inventar, recurren sólo a la intuición, sino que entiende la necesidad del cuerpo lógico y axiomático de la matemática. Ahora bien, existen varias clases de intuición, desde la del número puro que da paso a la inducción matemática rigurosa, hasta la intuición sensible; donde la imaginación es su principal contribuyente. Estos dos “extremos” de la intuición no tiene el mismo objeto y ponen en juego dos facultades diferentes de nuestro intelecto: “podríamos pensar en dos luces de búsqueda dirigidas a dos mundos extraños entre sí” (Poincaré, 1964, p. 9).

Son poco comunes los matemáticos que pueden inventar sin la ayuda de la imaginación. Algunos “iluminados” por la intuición del número puro y de las formas lógicas no sólo pueden demostrar sino también inventar. Estos pocos analistas son capaces de percibir a simple vista el plan general de un edificio lógico, sin la intervención (aparente) de los sentidos. Sin embargo, en la mayoría de los casos “no deja de ser cierto que la intuición sensible es en matemáticas el instrumento más habitual de invención” (Poincaré, 1964, p. 9).

En la configuración y persistencia de las intuiciones, es fundamental la experiencia. Los esquemas intuitivos que genera el individuo a partir de su experiencia serán a largo plazo sistemas estables de representación, convirtiéndose en programas estructurados de acciones y expectativas. Sin embargo, no debe olvidarse que estos sistemas deben ser validados por el aparato axiomático de la matemática, puesto que “la experiencia tiende a sesgar nuestras interpretaciones intuitivas primarias debido a sus limitaciones inmanentes: las condiciones terrestres (generales y específicas) y la naturaleza práctica y concreta de toda actividad conductualmente significativa (finitud, concreción, imposibilidad de ubicuidad)” (Fischbein, 2002, p. 95).

Autores como Poincaré, recurren a las convenciones y a los símbolos, producidos en la mente, para resolver el problema de la relación entre las experiencias y las leyes, tratando de imponerle a la naturaleza ciertas características por medio de operaciones activas de la mente. En la búsqueda a la solución del problema planteado, Poincaré encuentra que las convenciones son el sustituto, dentro del razonamiento matemático, de las sensaciones que nos obligan a centrar nuestra atención en la idea pura que llevamos en nosotros previamente.

Para Poincaré, la experiencia juega un papel importante en la génesis de los conceptos más fundamentales de la matemática, no es simplemente un apoyo para la abstracción ni algo que al final se reduce a la mera manipulación de los signos. Él muestra cómo el leguaje se convirtió en una herramienta esencial en la conceptualización de la matemática, más allá de su uso para memorizar y comunicar, y "es una parte integral de todo el marco experiencial en el que se basan nuestras facultades internas" (Heinzmann & Nabonnand, 2008, p. 177).

Para Poincaré, en el proceso de invención el yo inconsciente le presenta a la conciencia una cantidad de imágenes que deben organizarse, es decir, combinarse de forma tal que tomen sentido y sean fructíferas para la creación matemática. Ahora bien, el inconsciente deberá elegir entre todas las imágenes las que son más apropiadas y este no es un trabajo del azar, "entre todas las excitaciones de nuestros sentidos, por ejemplo, sólo las más intensas lograrán retener nuestra atención" (Poincaré, 1944, p. 50).

Para el matemático francés, la 'mejor combinación' tiene un carácter doble. Por un lado, el trabajo subconsciente no nos lo da *todo hecho*, sino que parece inicialmente desordenado y vago. Estos son los puntos de partida para que, después, en el trabajo consciente, las inspiraciones sean verificadas gracias a reglas estrictas. Por tanto, queda evidenciado que la invención se da gracias a esa dualidad o mejor aún a "los métodos de trabajo de los dos *yos*" (Poincaré, 1944, p. 53).

2.2 La intuición en Kurt Gödel

Para el matemático Kurt Gödel, la intuición parece ser un factor epistemológico básico en el conocimiento de las matemáticas abstractas, tales como la teoría de conjuntos. Al estar influenciado por una corriente pre-kantiana podría admitir que el conocimiento intuitivo es similar al conocimiento puramente conceptual.

Gödel no sólo fue un brillante matemático, sino que, gracias a las implicaciones de sus resultados de incompletitud, logró ser muy influyente en la filosofía de la matemática. Cuando en 1931 logró probar "que todo sistema formal que contenga un poco de aritmética es necesariamente incompleto y que es imposible probar su consistencia con sus propios medios" (Gödel, 2006, p. 13) revolucionó las ideas vigentes hasta el momento en filosofía de la matemática (Peña-Páez, 2021). Y son justo las consecuencias filosóficas de la obra de Gödel, más no sus resultados matemáticos, los que nos interesa revisar en este apartado:

> Gödel admite la existencia de un plano no intrínsecamente matemático; un plano de precisión y clarificación de conceptos, de fundamentación en una búsqueda de nuevos principios que clarifiquen lo ya logrado y orienten la búsqueda de nuevos elementos. En un plano propio del filósofo de la matemática. (de Lorenzo, 1979, p. 436)

Su postura filosófica se acerca más al platonismo cuando asume que "la verdad matemática es opuesta a la simple demostración", "no es posible construir un sistema formal que abarque a toda la matemática" o "la matemática no se puede reducir a un único algoritmo". Para Gödel, "los formalistas eran incapaces de distinguir verdad y demostrabilidad, pues analizaban la primera en términos de la segunda" (Gödel, 2006, p. 38). Es decir, con el teorema de incompletitud quedó demostrado que este análisis era erróneo y que su posición filosófica contraria era correcta.

Ahora bien, cuando se revisan las obras de Gödel es inevitable encontrarse con el uso de la palabra "intuición" en muchas de sus demostraciones, y en algunos casos no resulta evidente qué deberíamos entender por esta noción. Pareciera no haber una diferencia clara de la función de la intuición en los desarrollos matemáticos de Gödel. A veces, la usa indicando que es una facultad similar a la percepción de la física. En otras ocasiones, supone que es la encargada de validar los axiomas dotándolos de evidencia. Pero resulta curioso, por ejemplo, que no apele a ella cuando se refiere a la creatividad. Para Gödel, la intuición no parece ser un método de conocimiento. Lo que sí tiene claro es que la necesita para "hacer" matemáticas.

> El teorema de incompletitud produjo un giro en la filosofía de la matemática. Antes de los resultados del teorema, la comunidad

científica asumía que la verdad matemática consistía en la demostrabilidad, pero para Gödel no existía ningún método formal que permitiera demostrar todas las verdades de la matemática. Sus resultados más importantes repercutieron tanto en la lógica, como en la matemática. (Peña-Páez, 2021, p. 3)

Para Gödel los sistemas formales poseían determinadas propiedades metateóricas (que para él tenían un sentido intuitivo): la consistencia, la completitud y la decidibilidad. Revisemos la definición de cada una de ellas.

Consistencia: cuando un cálculo no es contradictorio, es decir, "cuando no es el caso que una de sus fórmulas y su negación sean demostrables en él" (Gödel, 1994, p. 25).

Completitud: cuando cada una de las fórmulas del sistema o su negación es demostrable en él.

Decidibilidad: cuando al aplicar, en un número finito de pasos, un procedimiento algorítmico (mecánico), se puede decidir o determinar "si cada una de las fórmulas aceptables es o no demostrable en él" (Gödel, 1994, p. 25).

Las tesis de Gödel sobre la imposibilidad de demostrar todas las proposiciones verdaderas en un sistema formal trajeron consecuencias filosóficas para la matemática:

1. La verdad de ciertos enunciados debe ser intuitiva. Puesto que la imposibilidad de demostrar un enunciado no implica que este no pueda ser verdadero, se concluye que verdad y demostrabilidad no son equivalentes. Esta distinción fue un éxito, como principio heurístico, acabando con el sueño de "una matemática segura, consistente, decidible, categórica, formalizable y completa" (Gödel, 1994, pp. 95–96), dando opción al paralelismo con la ciencia empírica.
2. Demostrar la consistencia de los sistemas formales con medios exclusivamente matemáticos es imposible. Para Hilbert consistencia es sinónimo de existencia. Mientras en la ciencia empírica la existencia depende de la experiencia y de la teoría, en matemáticas depende de la

consistencia formal. Pero gracias a Gödel, quien mostró que no puede probarse la consistencia, la intuición cobra un papel tan importante como la experiencia en las ciencias empíricas.

Los prejuicios filosóficos de otros lógicos impidieron el avance tal como lo hizo Gödel, en particular, con el uso de métodos no finitarios en matemáticas. Este fracaso es producto de la escuela de Hilbert, para quien el razonamiento finitario en matemáticas "está justificado sólo en la medida en que puede ser 'interpretado' o 'justificado' en términos de 'matemáticas finitarias'" (Parsons, 1995, p. 51). Para Gödel, en la teoría del continuo de Cantor, los axiomas de la teoría de conjuntos describen alguna realidad bien determinada. Bajo esta realidad la conjetura debe ser falsa o verdadera y su indecidibilidad a partir de los axiomas significa "que estos axiomas no contienen una descripción completa de esta realidad" (Parsons, 1995, p. 54).

Cuando se recorren los escritos de Gödel, es habitual encontrar el término "intuición" en muchas de sus declaraciones. Son frecuentes las expresiones como "teoremas intuitivamente claros" o "significado intuitivo de los términos primarios", entre otras. Hemos clasificado los diferentes "usos" que Gödel le ha dado a la intuición, a saber, como visión global, como conocimiento no inmediato, como garantía de verdad de los axiomas, como evidencia intrínseca y, finalmente, como una facultad análoga a la percepción de la física. (Peña-Páez, 2021)

2.2.1 La intuición como visión global

Para Gödel, la mente, en su uso, no es estática, está en constante desarrollo, lo que se ejemplifica "considerando la serie infinita de los axiomas de infinitud cada vez más potentes en la teoría de conjuntos, cada uno de los cuales expresa *una nueva idea o intuición*. Un proceso similar ocurre respecto a los términos primitivos" (Gödel, 2006, p. 197).

En cuanto a la aritmética, afirma que: "no tenemos una *intuición suficientemente clara* del universo de la teoría de conjuntos. Sabemos lo que son los números naturales y tenemos, por tanto, una *visión relativamente clara* del universo de la aritmética" (Gödel, 2006, p. 224). Luego, sobre la teoría de conjuntos, asumirá que: "nos proporciona una cierta *intuición* de la constitución del universo de la teoría de conjuntos (Gödel, 2006, p. 224). Todo ello apunta a una conexión entre intuición y visión.

En el libro *Ensayos inéditos*, encontramos que:

> Todo intento formalista de interpretar la matemática está destinado al fracaso, pues olvida que ha de ser nuestra *intuición matemática* la que nos sirva de *guía* en la construcción de los sistemas formales, que deben dar cuenta precisa de aquellos conceptos objetivos, mientras que tal intuición no puede reemplazarse por ningún tipo de prueba de consistencia, o por ningún otro recurso similar interpretado de forma 'reductiva'. (Gödel, 1994, p. 30)

Así, se concibe la intuición como "una *guía* que puede mostrar el camino para llegar a la construcción de conceptos y proposiciones" (Peña-Páez, 2021, p. 5). Ahora bien, para que esta guía pueda ser "provechosa", quien está inmerso en el camino debe tener conocimientos en los conceptos y teoremas matemáticos: "cuando Gödel "desarrolló" su teorema de incompletitud recurrió a todo ese conocimiento matemático que había "aprendido" durante años y que era como un cúmulo de saberes que interactuaba en su pensamiento" (Peña-Páez, 2021).

Con esto queremos mostrar dos situaciones: la necesidad de un bagaje matemático y la capacidad intelectual de cada individuo de "ver" o "intuir" lo que otros ante el mismo hecho no pudieron comprender.

Estas dos ideas se pueden evidenciar revisando que Gödel era una persona muy disciplinada. No exponía sus resultados hasta que no estaba muy seguro de ellos, y era un gran conocedor de los sistemas formales hasta el punto de que fue él quien logró estructurar toda la información producto de su experiencia, y la hizo "tangible" a la razón en su teorema de incompletitud. Recordemos una de las percepciones que se tiene sobre el matemático:

> Kurt Gödel daba la impresión a casi todo el mundo de ser una persona realmente extraña y con la que cualquier conversación suponía un reto formidable. Siendo una persona reticente, cuando Gödel hablaba lo

> más probable era que dijese algo para lo que no había respuesta posible. (Goldstein, 2005, p. 31)

También observamos que las leyes de la lógica y la matemática por sí mismas no condujeron a Gödel a sus resultados. No se puede ignorar el hecho de que, en su tiempo, muchos matemáticos tenían el mismo conocimiento que él y trabajan sobre los mismos temas. Sin embargo, gracias a esa intuición matemática altamente desarrollada en él, sus avances fueron más trascendentales. "Cuando Gödel se refiere a las nuevas intuiciones matemáticas, entiende que son *sugerencias plausibles* que aparecen después de la experiencia con el uso de algún sistema axiomático [...] Lo que se impone no es el producto de la intuición sino el producto de la reflexión sobre el concepto" (Peña-Páez, 2021, p. 5).

2.2.2 La intuición es conocimiento mediato

La intuición matemática nos permite formar conceptos a partir de los datos inmediatos. Por otro lado, los elementos cualitativamente nuevos no se producen en el pensamiento, en el pensamiento se reproducen y se combinan los elementos ya existentes. Por lo tanto,

> Puede notarse que la intuición matemática no necesita ser concebida como una facultad que proporciona un conocimiento inmediato de los objetos en cuestión. Más bien parece que, como en el caso de la experiencia física, formamos nuestras ideas también de esos objetos sobre la base de otra cosa que se da de inmediato. Solo que este algo no es, o no principalmente, las sensaciones. (Gödel, 1990, p. 268)

Al igual que Kant, Gödel considera que el conocimiento inmediato de los objetos (físicos o abstractos) no nos es dado ni por la percepción sensorial ni por la intuición. Entonces las ideas que son dadas en nuestro pensamiento son el resultado de un proceso, "dicho proceso requiere que haya una contribución abstracta y *a priori* que supere la pluralidad de sensaciones" (Folina, 2014, p. 42). Por tanto, la intuición matemática de los objetos básicos, "aparece" luego del procesamiento abstracto de la sensación dada en la experiencia (Peña-Páez, 2021).

Para Gödel la intuición matemática “no proporciona conocimiento inmediato, sino que formamos nuestras ideas sobre la base de algo dado, que aquí no son las sensaciones” (Gödel, 1994, p. 111). Entendemos por “algo dado” los objetos abstractos contenidos en las ideas empíricas. No diremos con esto que los datos sean subjetivos, sino que son de una clase diferente, un tipo de realidad entre el sujeto y su contexto (Peña-Páez, 2021).

Para Gödel, las contribuciones operativas y activas de la mente son las que permiten el acceso a la ontología de la teoría de conjuntos, “la intuición se desplaza así de la temporalidad espacial a las herramientas más abstractas de síntesis y la idea del objeto” (Folina, 2014, p. 45). De donde la intuición matemática se produce gracias a un “algo” que se agrega a la sensación para construir ideas, “la intuición no tiene consecuencias metafísicas u ontológicas [...] juega el papel epistémico de fundamentar nuestro conocimiento de principios generales” (Folina, 2014, p. 50).

Los conceptos de la lógica y de la matemática son exactos, dado que implican idealizaciones. Por tanto, la intuición se puede refinar y ajustar con el tiempo. Este fenómeno es evidente si se revisa la forma extraordinaria en que las teorías matemáticas se han extendido con nuevos axiomas: “la idea clave para recordar aquí es que estamos hablando de hacia dónde se puede dirigir la mente. La intuición debe entenderse solo en estos términos” (Tieszen, 2002, p. 375).

Desde el punto de vista de la intuición conceptual (o racional), los conceptos no son cosas en sí mismas separadas de la conciencia. Es decir, no son abstractos, “más bien, se dan como invariantes en nuestra experiencia hacia los cuales podemos ser dirigidos” (Tieszen, 2002, p. 384). Ahora bien, esta dirección no es una relación causal, ni espacial, ni temporal.

Gödel no escribe mucho sobre intuiciones diferentes a las que para él funcionan en la teoría de conjuntos o en la geometría, ni tampoco considera formas de intuición no sensoriales que no sean racionales. Para Gödel, “las intuiciones racionales no son el producto de la inferencia consciente, son observaciones más que conclusiones” (Burgess, 2014, p. 21). Estas intuiciones parecen abiertas, prometen observaciones adicionales, más aún este tipo de intuición se puede cultivar: “ya que a través de la experiencia se pueden desarrollar habilidades para una observación más cercana y más precisa” (Burgess, 2014, p. 21), muy importante es que son falibles. El mismo Gödel está afirmando que la intuición matemática no es un relámpago de creatividad que aparece en la mente de cualquier individuo. No. En realidad, requiere de la experiencia matemática y de las habilidades obtenidas en el trabajo continuo.

2.2.3 Intuición: fuente de la verdad de los axiomas

Para Gödel, aunque los objetos de la matemática son lejanos a los objetos de la experiencia sensible, existe “algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos” (Gödel, 2006, p. 427). En el análisis sobre la hipótesis del continuo de Cantor, Gödel argumenta que el que no se haya podido demostrar su verdad o falsedad, se debe al estado incompleto de la teoría axiomática de conjuntos, pero en su dimensión pragmática, la decisión sobre la verdad o no de ella, puede revisarse de forma inductiva, estudiando su éxito.

Para Gödel, la certeza de los axiomas se explica gracias a la intuición: “al igual que con los objetos físicos, el hecho de que conozcamos verdades intersubjetivas sobre conjuntos confirma su existencia objetiva e independiente” (Folina, 2014, p. 36). La intuición resulta ser la mejor explicación para el acuerdo y la certeza sobre los axiomas de la teoría de conjuntos, a su vez, que se convierte en el vínculo entre el conocimiento (axiomas de la teoría de conjuntos) y la realidad (universo de la teoría de conjuntos). Para Gödel, los axiomas nos fuerzan y algo debe hacer ese forzamiento.

Si se acepta la existencia objetiva del mundo externo, asume Gödel que también debe aceptarse la existencia objetiva de los objetos de la intuición matemática. Sin embargo, como ya se mencionó, “además de la intuición matemática existe otro (aunque sólo probable) criterio de la verdad de los axiomas matemáticos: su fertilidad en matemáticas y posiblemente en física" (Gödel, 1994, p. 111). La fertilidad de la que habla Gödel se refiere al interior de la matemática misma, aunque levemente aluda a otro tipo de aplicaciones, las que tienen lugar en la combinación con teorías físicas aceptadas.

> Gödel está interesado en la intuición como fuente de los axiomas que son la base para las deducciones matemáticas. Su interés no parece encaminado al cómo se descubren las matemáticas, como tampoco al proceso creativo que está detrás de ellas, lo cual resulta extraño siendo un creativo y brillante matemático que sabe que no se llegan a las grandes ideas siguiendo una receta, primero esto, segundo aquello, etc. (Peña-Páez, 2021, p. 11)

Por otro lado, en sus reflexiones sobre epistemología parece ignorar las conjeturas de las cuales no se tienen pruebas rigurosas. Otros matemáticos usan el término intuición en el sentido de cómo llegaron a sus "corazonadas". Donde aparece menos inmediatez, a eso se le llaman intuiciones heurísticas que no son del mismo "tipo" que las racionales o sensoriales nombradas por Gödel.

Gödel sospechaba que la hipótesis del continuo no se sigue de los otros axiomas de la teoría de conjuntos, "pues tiene consecuencias *intuitivamente* poco plausibles" (Gödel, 2006, p. 352). Entonces se pregunta

> ¿en qué podemos basarnos para buscar nuevos axiomas de la teoría de conjuntos? En dos cosas: en la *intuición matemática* (que corresponde a la sensación física) y en el apoyo indirecto que presta a una hipótesis (tanto en la física como en la matemática) el hecho que se sigan de ella consecuencias verificables (por ejemplo, resultados numéricos computables) difíciles de obtener sin ella y de que no se sigan de ella consecuencias indeseables. (Gödel, 2006, p. 352)

Gödel nos invita no sólo a "reconocer el hecho de la intuición con respecto a los conceptos y axiomas, sino también a darle crédito" (Parsons, 1995, p. 70). Para él, es obvio que los conceptos superiores de la teoría de conjuntos no son tan claros. Por tanto, la intuición no puede brindar conocimientos incuestionables.

Las referencias a la intuición matemática aparecen con mayor frecuencia, cuando Gödel aborda el problema del continuo. Para él, la búsqueda de nuevos axiomas en la matemática es un problema similar a la búsqueda de nuevas hipótesis en la física. No obstante, dado que los axiomas se justifican hipotético-deductivamente según sus consecuencias, la intuición no se puede aplicar a este tipo de enunciados:

> No es posible invocar la intuición como una especie de piedra de toque de la verdad para los nuevos principios. Decidir sobre una nueva extensión para establecer la teoría será una cuestión deliberativa y reflexiva en la que la experiencia matemática de uno con un sistema dado juega un papel, y también lo es nuestro conocimiento de los desarrollos matemáticos específicos en la teoría (Hallett, 2006, p. 119).

La cita nos indica que, para Gödel, la intuición no es la fuente de la verdad, ni siquiera en los niveles más básicos de la matemática, pero destaca la necesidad de la reflexión y la deliberación para el desarrollo de nuevas teorías, así como reconoce la importancia que juega la experiencia matemática y los conocimientos adquiridos a través de la practica matemática. Para Gödel es evidente la necesidad de apelar a la intuición matemática, no sólo para resolver los cuestionamientos que surgen en la teoría de conjuntos transfinitos, sino también en la solución de los problemas de la teoría de los números finitarios. Para Gödel, es gracias a la intuición matemática que es posible ver que ciertas proposiciones son verdaderas.

2.2.4 Intuición como certeza y hecho psicológico

Gödel (2006) afirma: "el axioma de elección resulta *intuitivamente* evidente para casi todos los matemáticos (excepto para los constructivistas)" (p. 351). Ahora bien, que un enunciado sea evidente para un individuo, tal vez no lo sea para otro, es decir, que estamos ante un hecho psicológico más que matemático. Gödel asume que el conocimiento de la matemática se da de una manera total y que es invariante y él está convencido por dos razones: "una basada en la intuición (aquí, de esencias) y otra basada en el éxito (de la razón en un área particular)" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 329).

Es necesario explicar la intuición para entender cómo la verdad de un axioma puede imponérsenos. Para Gödel, la existencia de la intuición es un hecho psicológico y esta es la manera de apoyar no sólo los axiomas sino el realismo. Para Gödel, los axiomas de la teoría de conjuntos se producen gracias a la existencia de una intuición lo bastante clara (lo cual es un hecho psicológico) y esto es suficiente para dar sentido, por ejemplo, a la verdad o falsedad de la hipótesis del continuo de Cantor. Del argumento de Gödel parece evidenciarse una relación circular entre la intuición y el realismo: "la intuición apoya el realismo sobre proposiciones no probadas. Pero la intuición también está respaldada por el realismo, por el hecho de que la verdad de los axiomas se nos impone" (Folina, 2014, p. 37). Sin embargo, esta circularidad desaparece gracias a la analogía con la verdad empírica.

Como revisaremos en el siguiente apartado, Gödel compara la intuición (abstracta) con la percepción sensorial. "Para él en la intuición se admiten errores, porque ella no es un asunto de todo o nada, viene en grados" (Peña-Páez, 2021, p. 8). Por ejemplo, en el caso del continuo de Cantor, el papel de la intuición es otorgarle "un significado bien definido a la pregunta y, de hecho, decidirla" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 333).

A veces usamos tanto un concepto que se nos vuelve evidente, y entonces tendemos a sobrestimar la claridad de percepción de las cosas, ahora bien, ser evidente no implica necesariamente certeza. Y aquí cabe el error: "es en el reconocimiento de que la intuición no es un asunto de uno u otro, sino que viene en grados (es decir, las intuiciones son, en general, parciales) que Gödel ve una respuesta al escepticismo" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 336).

Gödel consideraba que es indudable el hecho psicológico de la existencia de una intuición lo suficientemente clara, para producir los axiomas de la teoría de conjuntos dándole sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de la hipótesis del continuo de Cantor. Por tanto, "mediante una apelación a la psicología, Gödel sugiere que el significado y la capacidad de decisión puede ser asegurable sin recurrir al realismo" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 333).

Ni siquiera los seguidores de la escuela brouweriana pondrían en duda la existencia de la intuición como un hecho psicológico que es capaz de abarcar los axiomas de las matemáticas clásicas, aunque para ellos el hecho psicológico se explicará "por la circunstancia de que todos estamos sujetos al mismo tipo de errores si no somos lo suficientemente cuidadosos en nuestro pensamiento" (van Atten & Kennedy, 2009, p. 334).

En matemáticas "lo dado" tiene que ver con los elementos abstractos contenidos en los conceptos empíricos:

> el mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es lo bastante clara como para producir los axiomas de la teoría de conjuntos y una serie abierta de extensiones de éstos basta para dar sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de ideas tales como la hipótesis del continuo de Cantor. (Gödel, 2006, p. 428)

Recurrir a la intuición matemática no es sólo para obtener respuestas en la teoría de conjuntos transfinitos, sino para resolver problemas de la teoría finitaria de números.

Para Gödel, los expertos en teoría de conjuntos deben dirigir la mirada interna de su intuición a la contemplación del concepto de conjunto. Pero visto así, "esa supuesta intuición matemática no es más que echar mano de ligeras analogías y conexiones de la imaginación" (Burgess, 2014, p. 30).

Pareciera que los axiomas de la matemática clásica son evidentes y plausibles. Es decir, que la creencia en su versad es obvia, así Gödel considera que la función de la intuición matemática es producir convicción en los enunciados producto de la observación (o el cálculo), más aún, "subraya el hecho de que la intuición da lugar a una serie de extensiones "abiertas" de los axiomas" (Folina, 2014, p. 64).

De ahí que tenga sentido hablar de *intuición de conceptos* abstractos puesto que la experiencia matemática no es arbitraria ni aleatoria y está enmarcada en un trabajo sistémico. Entendemos por conceptos abstractos los que no tienen relación con objetos concretos, sino que se pueden establecer como estructuras de pensamiento y "en las demostraciones de proposiciones sobre estos objetos mentales se necesitan intuiciones que no derivan de una reflexión sobre las propiedades combinatorias (espacio-temporales) de los signos que los representan, sino de una reflexión sobre los *significados* involucrados" (Gödel, 2006, p. 434).

Gödel estaba interesado en fracturar por dentro el programa formalista de Hilbert, y es que la verdad no puede ser expresada en un lenguaje consistente: "Gödel concluyó, entonces, que de los teoremas de incompletitud se deriva que la certeza de las matemáticas no se asegura después de probar ciertas propiedades por una proyección sobre sistemas de símbolos ajustados a ciertas reglas de transformación. La certeza en las matemáticas debe tener otra fuente: la intuición matemática" (Cardona, 2002, p. 34). Es decir, que una clase especial de intuición es la que permite tener conocimiento de los conceptos abstractos.

2.2.5 La intuición matemática es análoga a la percepción en el mundo físico

Una de las ideas más conocidas de Gödel es aquella en la que "equipara la intuición matemática a la percepción sensible, y la cuestión de la existencia de las entidades matemáticas a la de la existencia del mundo externo" (Gödel, 2006, p. 422. Véase Panza & Sereni, p. 92)." Afirmará, además, que se debe tener la misma confianza en la percepción sensible como la intuición matemática, puesto que la intuición nos induce a construir nuevas teorías, con la esperanza que futuras percepciones concuerden con ellas. Es decir, nos permite creer en cuestiones no decidibles en el momento presente, que puedan tener significado en el futuro.
Pero, a pesar de la lejanía de la experiencia sensible, existe algo parecido a una percepción de los objetos en la teoría de conjuntos. De ahí, que no exista razón por la que se deba tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática que, en la percepción de los sentidos, que inducen a construir las teorías físicas. Incluso, es posible que una cuestión que no tenga sentido en el presente pueda ser solucionada en el futuro.

Ahora bien, la analogía propuesta entre percepción e intuición no toma tanto el carácter empírico de la matemática "sino el carácter 'intuitivo' de la ciencia empírica" (Gödel, 1994, p. 48). Este carácter intuitivo de la ciencia es propio de los cambios académicos por la época en que vive Gödel: una nueva concepción de la ciencia, mayor importancia a la creatividad, incorporación de modelos, etc. Los objetos con lo que trata Gödel (1994) no están en el mundo de los sentidos, entonces para que la analogía propuesta tenga sentido, le otorgará a la intuición matemática la función de ser aquella que permita “percibir los objetos matemáticos y escoger la construcción que mejor los represente, entre todas las posibles” (p. 76).

Tieszen enfoca la analogía entre los objetos de la percepción y los de la matemática en términos de la función que tienen los datos sensoriales en la intuición perceptiva, dado que son ellos los que pueden restringir o determinar los actos allí presentados. “Por ello, deberíamos poder distinguir una característica de la intuición matemática que constituye un “dado” que restringe y determina estos actos de una manera similar” (1989, p. 71).

Un argumento para justificar su analogía implica aceptar que las clases y los conceptos son objetos reales. Gödel acepta (“ignorando” su naturaleza) la existencia tanto de los objetos abstractos de la matemática como de los objetos físicos. El paralelismo está dado sobre el sistema que involucra los objetos, no sobre los objetos en sí. Este sistema puede ser conceptual o físico. Y entonces cabe preguntarse ¿por qué surgen las paradojas? Para Gödel son el resultado de la brecha entre la técnica y la teoría, es decir, entre la comprensión de los procedimientos y los conceptos involucrados. Por ejemplo, en la teoría de conjuntos el término “curva” tiene una definición diferente al mismo término en la geometría euclideana (Burgess, 2014). Y así como el mundo físico puede engañar, algunas veces, a los sentidos; así las paradojas “engañan” al mundo de la matemática. Así como en el mundo empírico las leyes se pueden falsarse: “lo mismo valdría en matemática si apareciera una inconsistencia, pues la falsación de leyes observables no es sino la inconsistencia entre diferentes métodos de detectar la misma cosa” (Gödel, 1994, p. 115).

Para Gödel, la ciencia es definida como el conjunto de conceptos primitivos y axiomas que determinan las relaciones conceptuales. Como nuestro pensador dice, la ciencia no está determinada por “el apoyo ‘perceptivo’ o ‘intuitivo’ intrínseco de ese aparato originario” (1994, p. 116). Teniendo en cuenta que la fertilidad y el éxito de su aplicabilidad conllevan aceptación del aparato, esto termina de confirmar el nexo que ha estado buscando.

El contenido de las proposiciones de la física como de la matemática se dan gracias a la existencia de los objetos de la física y de la matemática. Como dice Cardona (2002, p. 37), los primeros "nos son dados en la intuición sensible y los segundos en la intuición matemática".

Una intuición pura del espacio puede tener una etiqueta para su aspecto físico, que sería "lo espacial", y una etiqueta para su aspecto matemático que sería, "lo geométrico". Por tanto, Gödel asume "que la intuición espacial es sobre el mundo físico, pero solo es local y aproximadamente correcta, mientras que la intuición geométrica es global y exactamente correcta, pero es solo sobre cierta estructura matemática" (Burgess, 2014, p. 14). Sin embargo, algunos descubrimientos "contra-intuitivos" posteriores en matemáticas, como la curva sin tangentes, mostraron que la intuición geométrica no era tan perfecta como él creía.

Este argumento sugiere una idea que pretendemos defender: que la intuición matemática parte de un *contexto real o matemático*. Gödel parte de una visión global para comprender los componentes en su contexto, y también toma en cuenta la interacción entre las partes y el todo. Es decir, la conexión física de los axiomas depende de su papel en las teorías físicas. Si el papel cambia la conexión también. Pero todo depende del sistema en su conjunto.

Para finalizar este apartado, podemos afirmar que Gödel tomó distancia de la concepción positivista, en la que la verdad depende del significado de los objetos, es decir, de las convenciones. Él se inscribe en el platonismo ontológico, cuya tesis epistemológica fractura ese antiguo vínculo entre la intuición y la construcción de los objetos matemáticos. Para Gödel, "tenemos la capacidad de intuir las propiedades de los objetos independientes de la mente, y esto explica nuestro conocimiento de los principios básicos de la teoría de conjuntos" (Aspray & Kitcher (Eds.), 1988, p. 12). Más aún, en el futuro podría explicar los principios que se postulan para completar el conocimiento de la teoría de conjuntos. "Sin embargo, aunque puede ser relativamente fácil de entender, la visión de Gödel no es tan fácil de creer, ya que la noción de intuición en la que se basa parece algo nebulosa" (Aspray & Kitcher (Eds.), 1988, p. 12).

Para Tieszen (2002), el proceso de intuición de Gödel muestra que:

1. Es “forzado” por ciertos aspectos.
2. Es falible.
3. Es más o menos claro y preciso.
4. Los conceptos pueden ser inagotables.

Lo anterior muestra que en Gödel aparece una idea que involucra la intuición con un proceso dinámico, no con una facultad misteriosa, sino como una facultad en la que se puede educar a un individuo y que viene dotada de intencionalidad. Así mismo, también nos ha mostrado la necesidad de formalizar esa intuición: “el proceso dinámico en matemáticas tiene lugar entre la intuición y la formalización, esto es, se podría decir, entre lo que podemos entender y lo que podemos expresar y comunicar, o formalizar matemáticamente de la manera habitual. Ello se asemeja a la interacción entre expresión y contenido, o incluso entre un nombre abstracto y los individuos a que se refiere” (G. Sambin, 2008, p. 302).

3. La intuición y el dilema de Benacerraf

Abordar el dilema de Benacerraf y su posible disolución (gracias a la intuición) requiere de algunas explicaciones previas. En el primer apartado de este capítulo revisaremos la relación entre conocimiento, creencias e intuición matemática. En el segundo, explicaremos el dilema y finalmente plantearemos una posible solución.

3.1La intuición y el conocimiento matemático

La concepción de la intuición tradicionalmente ha estado ligada a la idea de cómo el individuo adquiere el conocimiento, y en el campo particular de la filosofía de las matemáticas, se desprenden problemas tales como, ¿el conocimiento matemático es *a priori*, analítico o necesario?, ¿las mentes superan a las máquinas?, ¿las matemáticas son, únicamente, operaciones mecánicas sobre símbolos? Y problemas sobre la naturaleza del infinito, el platonismo, la verdad matemática, los objetos abstractos, entre otros.

Los fundacionalistas tienen como objetivo justificar de manera adecuada las afirmaciones de la matemática, en este punto encontramos que existe una división entre los procedimientos de justificación, que pueden ser *a prio*ri o *a posteriori*. Por ejemplo, algunas de las afirmaciones de la aritmética no admiten justificación empírica ni intuición *a priori*. Para Frege, la aritmética era simplemente un desarrollo de la lógica y existía "un número muy pequeño de posibilidades para encontrar la justificación adecuada de las proposiciones aritméticas" (Kitcher & Aspray, 1988, p. 5).

También encontramos a Russell y a Whitehead, quienes suponían que nuestro conocimiento sobre la teoría de conjuntos viene de nuestro conocimiento sobre la aritmética, incluso siendo los principios de la aritmética *a priori*. Para ellos, la intuición matemática, supuestamente, brinda un conocimiento *a priori* de los postulados de Peano. Sin embargo, "conocemos los axiomas de la teoría de conjuntos al ver que son suficientes para sistematizar los postulados de Peano" (Kitcher, 1988, p. 296).

Hablar del conocimiento en matemáticas, nos remite a las reflexiones hechas por el filósofo Kant, para quién nuestro conocimiento surge de dos fuentes: la receptividad de impresiones y la facultad de conocer un objeto. Esta segunda se da mediante la representación de las imágenes, es decir, la espontaneidad de los conceptos. En el primer caso, es un objeto dado a la conciencia, en el segundo se piensa en relación con la representación de dicho objeto. Por tanto, la intuición y los objetos constituyen los elementos de nuestro conocimiento y se necesitan mutuamente (Kant, 1999, p. 193; A50/B74).

A diferencia de Kant, Descartes asumía que la conciencia intuitiva es independiente de nuestra capacidad de sensación. Para ejemplificar, toma una figura de mil lados, que a diferencia del triángulo no nos la podemos imaginar en su totalidad, aunque sí podemos tener una comprensión de toda la figura. Esto lleva a concluir que la imaginación y la comprensión son dos tipos diferentes de operaciones mentales. Su diferencia es de naturaleza y no de grado. Por tanto, para el filósofo francés, el pensamiento puede estar asociado con imágenes, pero tiene algo más que sólo imágenes. De lo anterior se deduce que el platónico debe ofrecer explicaciones no kantianas de cómo las intuiciones aparecen y se enganchan con el objeto de estudio de la matemática, una dificultad que puede aparecer es que en algunas oportunidades no se diferencia entre “pensar en algo y ser consciente de ello” (Chudnoff, 2014, p. 21).

Algunos “sostienen que no hay posibilidad de obtener conocimiento matemático sin el uso de ciertos procedimientos especiales” (Kitcher, 1988, p. 294). Para ellos, este procedimiento especial es la intuición, a partir de la cual se desprende una cadena de inferencias que van desde los axiomas hasta los teoremas. Tanto empiristas como naturalistas cuestionan la existencia de esos ‘procedimientos especiales’. La intuición platónica o constructivista proporciona conocimiento, “en la medida en que funciona, solo en el contexto de una experiencia amable que garantiza lo prometido” (Kitcher, 1988, p. 295).

Para Kitcher, la epistemología de las matemáticas debe tener una perspectiva semejante a la de las ciencias naturales y debe escapar a las filosofías fundacionalistas. En el naturalismo se considera innecesario el regreso a los axiomas como origen del conocimiento matemático:

> de hecho, desde el punto de vista naturalista, los axiomas de una teoría no son sus comienzos. Más bien son el resultado de una sistematización de un “cuerpo previo de afirmaciones” sobre los objetos de la teoría que han sido empleados tácita o explícitamente en el razonamiento. (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 836)

Kitcher nos presenta un ejemplo del naturalismo valiéndose de Cauchy y su introducción de la idea de límite algebraico en las definiciones de convergencia, continuidad y derivación. Si, como afirman algunos, las proposiciones de Cauchy "estaban respaldadas por una visión especial *a priori*, entonces es apropiado preguntar por qué esta idea no estaba disponible para sus predecesores" (Kitcher, 1988, p. 298), los cuáles también habían considerado la idea de límite para definir el cálculo diferencial. Kitcher se maravilla de que los poderes visuales de Cauchy pudieran ser superiores a los de Leibniz, Newton, Euler, Lagrange, etc. Esta observación puede resultar exagerada y, en el fondo, deja a un lado la labor argumentativa de Cauchy, pues el matemático "no invita a sus colegas matemáticos a intuir la exactitud de sus nuevas afirmaciones. Él muestra, en cierta medida, cómo son útiles para continuar con la práctica de las matemáticas" (Kitcher, 1988, p. 298). De ahí que para Kitcher, el naturalismo está más acorde con la historia de las matemáticas, en cuanto a la génesis y justificación del conocimiento, haciéndolo inseparable de su propio crecimiento.

Por tanto, "el conocimiento matemático es un producto histórico" (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 836). Seguir esta línea argumentativa implica asumir que el origen del conocimiento está basado en una práctica primitiva y que las experiencias son susceptibles de ser manipuladas por los expertos, lo que es una justificación para una práctica puede no serlo para otra, de manera que "esta noción de práctica matemática relativiza el problema del crecimiento del conocimiento matemático tanto histórica como culturalmente" (p. 836).

Para Mark Fedyk, tres argumentos deberían llevar al naturalista a pronunciarse sobre la relación entre el conocimiento matemático y la intuición.

a) Las verdades que se producen en la investigación son, a lo sumo, aproximadas. Un signo de progreso sucede cuando diferentes investigadores, trabajando sobre el mismo tema, llegan a "definiciones múltiples de conceptos aproximadamente equivalentes" (Fedyk, 2018, p. 89). La proliferación de conceptos lleva inevitablemente a considerar que ninguno de ellos debe tomarse como "la definición exacta, definitiva y absolutamente verdadera" (Fedyk, 2018, p. 89). Estas definiciones se pueden interpretar como nodos que, tomados en conjunto, pueden transmitir más información sobre los conceptos que la que se obtendría al revisar las definiciones por separado e individualmente. De allí que, los naturalistas deben concebir la proliferación de concepciones sobre la intuición, “como evidencia de que una teoría de la intuición es parte integral de la epistemología de las matemáticas” (Fedyk, 2018, p. 89). Dadas las diferentes definiciones de la intuición, la filosofía naturalista de la matemática puede explorar cuáles le son compatibles y revisar las ideas que motivan el tratamiento racionalista de la intuición. Independiente de la filosofía de la matemática que se elija, la epistemología de la intuición puede brindarnos elementos para comprender la función y la naturaleza de la intuición que hace posible el conocimiento matemático.

b) Negar la existencia de las intuiciones es contraria a la intuición misma. Desde niños hemos confiado en ciertas intuiciones básicas para darle sentido al mundo físico, matemático y social. Es evidente que las intuiciones hacen parte del sistema cognitivo humano, más aún, “es mucho más probable que las intuiciones apoyen en lugar de obstaculizar la formación del conocimiento” (Fedyk, 2018, p. 90).

c) De las posibles opciones, la mejor es aquella en la que la epistemología de las matemáticas da sentido a la relación entre intuición y creencias matemáticas. Esta conexión ha transitado un camino difícil. Prueba de ello es la cantidad de usos e interpretaciones que de ella se tienen, “a menudo es el término usado cuando uno no tiene una explicación plausible para la fuente de una creencia u opinión determinada” (Fedyk, 2018, p. 90). Por ejemplo, al revisar los prólogos de los libros de matemáticas, las biografías, los trabajos sobre la naturaleza de las matemáticas, los estudios psicológicos, cognitivos o didácticos, siempre aparece el tema de la intuición. Tal situación sugiere que la intuición juega algún papel destacado en las creencias matemáticas.

Para llevar a cabo una teoría naturalista de la intuición, debe, en primera instancia, identificarse qué fenómenos mentales han sido denominados por los filósofos racionalistas como “intuición”. El rango es amplio: la unidad en la conciencia de las representaciones perceptivas que son espacial y temporalmente inteligibles (Kant, 1978), la aprehensión consciente de una proposición supuestamente autoevidente, inclinaciones para creer, e incluso apariencias intelectuales simples.

Para Fedyk (2018) una descripción de la intuición acorde a la filosofía naturalista debe tener en cuenta las siguientes ideas:

(1) Las intuiciones son eventos mentales puesto que ocurren en la conciencia.

(2) La función de la intuición es generar un contenido a las creencias matemáticas.

(3) Las intuiciones tienen un carácter individualizado, es decir, si dos intuiciones tienen contenido proposicional diferente, entonces las dos intuiciones son diferentes.

(4) La intuición se produce en la imaginación, allí se crea una representación a la que se le aplica un concepto, que a su vez genera el contenido proposicional de la intuición: "el concepto que se está aplicando puede llamarse el concepto implicado" (Fedyk, 2018, p. 92).

(5) La intuición se produce en un contexto determinado, lo que le otorga una identidad al concepto y una relevancia de los detalles de la representación en sí misma. Esta representación imaginaria puede tomar diversas formas, de la más simple a la más compleja.

(6) Las intuiciones obtenidas por una persona que carezca del concepto implicado (concepto específico) no podrán ser las mismas de quien sí tenga el concepto. En muchos casos, el concepto implicado es el concepto de una propiedad, objeto o proceso observables.

(7) Las intuiciones se presentan en la conciencia como una "apariencia" lo que les da un carácter fenomenológico. Por tanto, no son objetivas, lo que las lleva a ser diferentes a las percepciones cotidianas.

La descripción anterior es del tipo de explicación de los naturalistas, puesto que no asume la intuición como fuente del conocimiento *a priori*, así mismo, esas ideas están sobre la base de la ciencia cognitiva contemporánea.

Dado que el conocimiento matemático no surge de manera espontánea en la mente, racionalistas y naturalistas requieren una teoría que explique cómo se forman las creencias matemáticas o una justificación de por qué no es posible el conocimiento matemático. Dentro de la investigación en epistemología de las matemáticas es parte importante la comprensión del papel de la intuición en su apoyo a la cognición confiable. El hecho de que la intuición permee muchos de los aspectos del conocimiento matemático implica prestarle atención sobre qué tipos de creencias puede justificar la intuición e incluso si puede o no ser fuente de conocimiento.

Aunque las intuiciones son ocurrencias mentales, en ciertas ocasiones, tanto filósofos como otros científicos las usan como evidencia, lo cual "sucede cuando el contenido proposicional de una intuición se toma para aumentar la garantía o credibilidad de una creencia" (Fedyk, 2018, p. 93). Entonces ¿qué tipos de aprendizaje son posibles cuando las intuiciones se usan como evidencia? La repuesta a esta pregunta implica diferenciar entre el uso de las intuiciones dirigidas por el mundo y las dirigidas por el sentido. La distinción radica en que la confianza en una intuición, por un lado, es cuestión del propósito para el que se está poniendo en uso, y, por otro, depende del contexto epistémico en el que ocurre la intuición. Es decir, la distinción es entre los contextos: unos dirigidos por el significado (aprender sobre el contenido representativo del concepto) y otros en los que se debe aprender si los objetos, propiedades, tipos, etc., vienen dirigidos por el mundo (instancias de las propiedades definidas por un concepto implícito en una intuición).

En suma, la distinción es la siguiente: en condiciones normales todas las intuiciones dan información confiable sobre algo, en particular, sobre el contenido del concepto implicado en las intuiciones del individuo que tiene la intuición. Ahora bien, si lo que deseamos es conocer el significado de un concepto para una persona concreta, es posible confiar en los usos de las intuiciones dirigidas por el significado. Si de lo que se trata es de aprender algo sobre el mundo, deben existir pruebas suficientes de que el contenido de la intuición es preciso para lo que se desea aprender, "cuando estamos en posesión de esta evidencia adicional, una intuición utilizada inicialmente como evidencia dirigida por el significado también puede usarse como evidencia dirigida por el mundo" (Fedyk, 2018, p. 95).

Una de las preguntas acerca del conocimiento matemático ha girado en torno a explicar si el enunciado referido por una situación *S* es la causa para que un matemático *M* crea en esa situación *S*. La condición para el conocimiento de una creencia de *M* sobre *S* es resultado de un proceso que dará la evidencia para la creencia, "el rol de la intuición en el conocimiento matemático es para dar la evidencia relevante" (Tieszen, 1989, p. 3). El rol que se le otorga a la intuición en matemáticas es similar al rol de la intuición perceptual de los físicos, es decir, proporciona evidencia para la existencia de los objetos físicos (matemáticos en este caso).

Es necesario un cambio de actitud sobre la forma en que los objetos le son dados al individuo, dejando de ser un objeto perceptivo directo, para ser considerado un elemento dentro de un conjunto, los objetos no son dados inmediatamente a la conciencia, dado que los actos se fundan gracias a la abstracción y a la reflexión, lo que lleva a comprender que la conciencia de los objetos matemáticos es una construcción.

Aunque los ejemplos se suelen presentar con partes muy elementales de la matemática, "el acercamiento a otras áreas de las matemáticas generalmente adoptaría la forma de la estrategia que hemos seguido" (Tieszen, 1989, p. 176). En primer lugar, se asume la existencia del análisis real, complejo, funcional, la topología, el álgebra abstracta, etc., y luego que los resultados de estas áreas proporcionan conocimiento. Entonces surge la pregunta: ¿cómo es posible este conocimiento?

Responder esta pregunta requiere un análisis sobre el origen, así como asumir que la intuición es una condición necesaria y suficiente para el conocimiento de los objetos matemáticos. Ahora bien, "las afirmaciones matemáticas de cualquier área de las matemáticas se pueden entender como expresiones de intenciones y, como tales, pueden cumplirse, cumplirse parcialmente, no cumplirse realmente o incluso ser probablemente vacías" (Tieszen, 1989, p. 176). Una intención será cumplida si se da un proceso de construcción, es decir, de intuición; dicho proceso dará como resultado encontrar el objeto al que se dirige la intención.

El punto de vista de la fenomenología considera la estructura y la secuencia de los actos en los que se dan los objetos, ya sean físicos o matemáticos. No es necesaria la existencia de una relación independiente entre estos procesos y los objetos, pues "lo que intenta hacer la fenomenología es analizar la experiencia o estructura de actos que es necesaria para el conocimiento de los objetos" (Tieszen, 1989, p. 177). Cabe observar que esta situación podría sugerir una similitud de la fenomenología con el idealismo, con respecto a los objetos matemáticos.

Bajo este marco, encontramos que la intuición matemática como proceso conduce a verdades aproximadas y esto lleva a considerar la necesidad de los conceptos técnicos para el éxito de la ciencia. El problema al que nos enfrentamos es al de tratar de decir que algunos hechos son exactos y precisos. Lo complejo está en encontrar el equilibrio entre precisión y exactitud. La precisión es un criterio importante que permite “manejar la complejidad del mundo de una manera epistémicamente constructiva” (Fedyk, 2018, p. 100). La precisión es creada por el lenguaje técnico y los conceptos introducidos en el vocabulario científico, estos nos permiten idealizar el mundo, de tal manera que podemos hablar sobre sus procesos como si fueran tan simples que podemos razonar sobre ellos de manera directa.

Por tanto, los conceptos y ecuaciones matemáticas en la práctica científica no se usan para describir exactamente el mundo, sino para “establecer marcos terminológicos lo suficientemente precisos como para permitirnos, por ejemplo, especificar las clases de contraste que impulsan algunas formas de explicación científica” (Fedyk, 2018, p. 101). En algunos casos, las afirmaciones matemáticas que se usan son inexactas, lo que no significa que sean falsas. Más aún tienen una utilidad inductiva y explicativa. Paradójicamente, si fueran lo más exactas y precisas posibles, las fórmulas que aparecerían serían tan complicadas para cualquiera que quisiera razonar. Lo que justifica el uso de un concepto matemático “es su capacidad para apoyar la inducción o la explicación” (Fedyk, 2018, p. 101) y, sin embargo, el concepto no debe usarse exactamente.

El individuo que intuye conoce muy bien un proceso causal del que hace una representación imaginaria. Por tanto, puede entenderse como una intuición dirigida por el mundo, una intuición cuyo contenido proposicional refleja la aplicación de un concepto matemático a dicha representación imaginaria. Por lo anterior, queda claro por qué no debe tratarse el contenido proposicional de dicha intuición como una verdad exacta, aunque al mismo tiempo esta intuición puede ser tratada como una intuición dirigida al mundo porque “existe una conexión causal entre los usos del concepto implicado en la intuición y el referente del mismo concepto” (Fedyk, 2018, p. 103).

Volvamos con lo de la representación imaginaria. Para Klein, la intuición hace que cuando pensamos en un punto no nos lo imaginamos, sino que lo sustituimos por algo concreto. Gödel afirmará que los axiomas de la teoría de conjuntos se nos imponen como verdaderos, a pesar de su lejanía con la experiencia sensorial, para esta percepción. La intuición matemática merece la misma confianza que la percepción sensorial (Gödel, 1990, p. 268). Los últimos resultados muestran que el sentido del número forma parte del conocimiento del *homo sapiens*, y está presente desde la infancia, lo que lleva a definir la intuición bajo tres criterios: "es rápida, automática e inaccesible a la introspección" (Chudnoff, 2014, pp. 3-4).

Lo común a la mayoría de las definiciones sobre la intuición es que parece ser una experiencia que lleva implícita la idea de certeza. Para Klein intuir *p* significa visualizar, imaginar de manera concreta un tema abstracto: "llamemos a esto la visión de la intuición como ilustración concreta" (Chudnoff, 2014, p. 4). Para Gödel intuir *p*, es una experiencia análoga a una percepción sensorial. Sin embargo, en *p* está implícito el objeto abstracto que se presenta en la mente, esta se denomina "la visión perceptualista de la intuición". Esta última visión nos permite comprender el fundamento del conocimiento intuitivo. Se ha considerado la percepción y la intuición matemática como fuentes del conocimiento no inferencial. La percepción sensorial "es una forma de obtener información sobre su ambiente inmediato" (Chudnoff, 2014, p. 7).

El conocimiento sobre los números y los conjuntos no se funda sobre lo que podamos aprender de los signos y sus propiedades en una sensación-percepción ordinaria. El conocimiento, en un especial sentido, se funda en la intuición, lo que no implica "que la intuición da una absoluta certeza fundacional de nuestro conocimiento" (Tieszen, 1989, p. 4). Por el contrario, si es dado por la intuición debe ser revisado, tanto si estamos hablando de la intuición perceptual, como de la intuición matemática, "la evidencia dada por la intuición en ambos casos viene en diferentes tipos y grados" (Tieszen, 1989, p. 4).

Bajo el enfoque de Tieszen "la función de la intuición matemática es proporcionar evidencia para la creencia de *M* sobre *S*" (Tieszen, 1989, p. 172). "S" es cualquier enunciado que exprese alguna intención matemática y la verdad de un enunciado sobre algún objeto es dada por la intuición matemática. En este caso, los objetos hacen referencia a los números naturales o los conjuntos finitos. También la intuición brinda evidencia sobre la verdad de enunciados generales, gracias a los procesos de reflexión y abstracción. Para objetos matemáticos particulares la intuición tiene un carácter de referencia, de allí que puede entenderse la función de la intuición matemática en el conocimiento matemático como análoga a la función de la percepción en el conocimiento del mundo físico. En el conocimiento perceptivo también se considera que los procesos intuitivos producen evidencias sobre las creencias. En este sentido, tanto en el conocimiento matemático como en el físico los objetos trascienden la intuición real.

En la analogía que propone Tieszen, entre la percepción y la intuición matemática, es importante señalar "la adecuación", la cual está dada por la intuición en cada caso. Para que "M" crea que "S" se requiere que la intuición brinde la evidencia sobre "S". En las teorías físicas, se puede observar cómo en ciertos casos, los enunciados que se refieren a objetos físicos no son captados por la percepción ordinaria, como mostrarían los "objetos" de la microfísica. Tales objetos son de un tipo diferente a los objetos perceptivos ordinarios. Y a pesar de tal situación, aún es posible argumentar que existe una diferencia entre una simple hipótesis y la observación de estos objetos, así como una diferencia entre el conocimiento y la mera conjetura.

En el siguiente apartado nos referiremos al dilema de Benacerraf, antes de estudiarlo, diremos algo más, sobre los objetos de la matemática y la intuición.

Desde un análisis fenomenológico de la intuición se puede argumentar que los objetos de la matemática, tales como los números naturales y los conjuntos finitos, son independientes de la mente. Ahora bien, se presentan dos situaciones:

En la primera se considera que las intenciones matemáticas se refieren a objetos que existen independientemente de nosotros. Por tanto, la preocupación es sobre el conocimiento matemático de "M" al cumplir las intenciones. En la segunda, las intenciones matemáticas se refieren a las expectativas que tenemos, en nuestra experiencia, con respecto a los objetos matemáticos y en este caso el cumplimiento o no de las intenciones es irrelevante. En el caso, por ejemplo, de los números naturales o los conjuntos finitos, lo que se intenta analizar son "las secuencias de actos mediante los cuales obtenemos conocimientos de los objetos" (Tieszen, 1989, p. 178), no preguntas metafísicas sobre los objetos.

La intuición tiene que ver con el carácter que involucra la relación de una persona con su objeto de conocimiento. Cuando nos referimos a la percepción de objetos físicos las expresiones para denotar esa relación son del tipo, "*a* ve *x*, *a* escucha *x*, *a* huele *x*, *a* percibe *x*" (Parsons, 1980, p. 146), el asunto, ahora, es cómo podrían "aparecer" estas expresiones en la idea de "intuición matemática". En verbos perceptuales como *ver* y *percibir* se encuentra un uso objeto-relacional, denominado actitud proposicional, es decir, que requiere de enunciados complementarios, tales usos los encontramos en la intuición matemática.

En la intuición matemática, las imágenes “percibidas” sólo pueden ser usadas, una vez la evidencia racional haya dado cuenta de ellas, puesto que es necesario distinguir claramente entre “una proposición que es genuinamente evidente y una que simplemente parece ser obviamente verdadera” (Parsons, 1980, p. 146). Pareciera evidente que los objetos matemáticos se nos dan de manera similar como los objetos físicos son percibidos por los sentidos y aunque muchos filósofos de la matemática no están de acuerdo con esta idea, la realidad es que la intuición funciona “en gran medida como un concepto empírico sencillo” (Parsons, 1980, p. 148).

Para Parsons es obvio que existe una intuición, por ejemplo, del número 7 o de un triángulo, o al menos “pareciera” como que intuimos el 7 o el triángulo, se pregunta además si ¿existe alguna experiencia a la que se pueda apelar que se encuentre cerca y sea tan indiscutible como el computador que estoy viendo? Si alguien no comprende la relación entre los casos anteriores, podría concluir que no existe una analogía entre la percepción sensorial y cualquiera que sea la consciencia que se tiene sobre los objetos matemáticos.

La percepción tiene que ver con una acción física del objeto percibido sobre los sentidos, al estar la percepción fundada sobre la acción, algunos pueden argumentar que una relación causal es condición necesaria para percibir un objeto, sin embargo, para Parsons no sería verosímil suponer “que en la intuición matemática hay una acción causal de un objeto matemático sobre nosotros (presumiblemente sobre la mente)” (Parsons, 1980, p. 148). Lo que es realmente esencial para los objetos matemáticos es la relación constituyente de las estructuras a las cuales estos objetos pertenecen.

3.2 Descripción del dilema de Benacerraf

En 1973, Paul Benacerraf escribió un artículo titulado “Mathematical Truth” en el cual presentaba un dilema que surgía al intentar acceder al conocimiento de los objetos matemáticos. En aquella época, los temas de principal interés para los filósofos de la matemática giraban en torno a la epistemología (la teoría del conocimiento) y la ontología (el modo de existir de los objetos), mientras que la teoría del cocimiento más aceptada era la teoría causal del conocimiento, y para el modo de existir de los objetos se había popularizado el platonismo.

En términos generales podría describirse el dilema de Benacerraf así: si la teoría causal funciona, entonces los objetos no pueden ser abstractos. Pero si los objetos son abstractos, entonces la teoría causal del conocimiento no funciona. Una posible solución es suponer que los objetos de la matemática están en un *tercer reino*, donde no se aplica tal cual la teoría causal y que es gracias a la intuición que podemos conocer los objetos. En general es un problema de epistemología versus ontología.

Benacerraf afirma que las motivaciones para estudiar la naturaleza de la matemática son dos:

1. Una semántica análoga a la del resto del lenguaje.
2. Una explicación epistemológica razonable.

Por tanto, una explicación adecuada sobre la verdad matemática deberá tener en cuenta las dos preocupaciones señaladas, situación que a juicio del filósofo ha sido ignorada: "me encuentro profundamente insatisfecho con cualquier propuesta de semántica y epistemología que pretende explicar la verdad y el conocimiento tanto dentro como fuera de la matemática" (Benacerraf, 2004, p. 234).

La pretensión de Benacerraf era buscar una teoría global de la verdad, que permitiera certificar cuándo una verdad matemática es en realidad la explicación de la verdad matemática: "la explicación debería implicar condiciones de verdad para las proposiciones matemáticas que sean condiciones de verdad de manera evidente (y no *simplemente*, digamos, de su carácter como teoremas en algún sistema formal)" (Benacerraf, 2004, p. 239). Lo que buscaba era una explicación de la conexión entre el carácter del teorema y la verdad; y tal cosa sólo se podría lograr con una teoría general: que cuando se afirme que un enunciado es una "verdad matemática", en realidad sea una "verdad".

Una explicación adecuada de la verdad matemática debería ser consistente con la posibilidad que implica que algunas verdades sean cognoscibles. Es decir, la verdad matemática debe conectarse con una explicación global del conocimiento, "de manera que haga inteligible cómo poseemos el conocimiento matemático que poseemos" (Benacerraf, 2004, p. 240). Bajo esta perspectiva, es viable pensar que los mundos matemáticamente posibles deberían coincidir con los mundos inteligibles. Entonces, puede considerarse que las verdades matemáticas no sean necesarias "ya que seguramente es contingente que el mundo sea inteligible. Sin embargo, es un consuelo que podamos decir *a priori* que cualquier mundo inteligible es realmente descrito por las matemáticas" (Hossack, 1991, p. 179). En general, la semántica y la epistemología deberían encajar de manera aceptable en la matemática.

Por aquella época, la teoría más exitosa del conocimiento era la teoría causal. En la ciencia muy pocos se atreverían a dudar de ella. Un individuo puede interactuar con los objetos físicos en una relación de causa-efecto, puede estudiar este objeto gracias a sus facultades perceptivas. Por ejemplo, si se observa una bacteria a través de un microscopio, ésta en esencia no ha cambiado nada, lo que ha sucedido es que se han potenciado las facultades perceptivas del observador gracias al uso de un instrumento. La bacteria sigue allí, se pueden estudiar sus propiedades y luego extraer algunas consecuencias: inventar algo para combatirla, conservarla para futuros estudios, en general, el individuo y la bacteria interactúan.

En los objetos matemáticos no se produce una relación de tipo causal. Por tanto, lo que sabemos sobre ellos se debe analizar en términos "de los actos y procesos mentales que producen evidencia de nuestras creencias sobre ellos" (Tieszen, 1989, p. 69). En segundo lugar, los objetos matemáticos no tienen la propiedad de manifestarse en el espacio y el tiempo, lo cual es imposible por su propia naturaleza. En tercer lugar, los objetos matemáticos no se dan de inmediato a la intuición, puesto que esta no es una propiedad de los objetos categoriales, al estar basados en actos subyacentes se dan de manera "mediata", es decir, después de un proceso de intuición. En cuarto lugar, puede decirse que los objetos matemáticos por sí mismos, independientes de alguna estructura, son indeterminados. Para la aritmética, por ejemplo, sólo serán relevantes las propiedades de los números que surjan de las relaciones entre sí, es decir, se requieren operaciones y leyes que se cumplan para cualquier objeto de la aritmética.

Mucho se ha escrito sobre los procesos requeridos para brindar evidencia tanto de los números naturales como de los conjuntos finitos. Así mismo, para diversos autores no es necesario un análisis causal para investigar las construcciones matemáticas. Entonces es obvio que las construcciones matemáticas pueden estudiarse independientemente de las consideraciones causales y “que, interpretadas adecuadamente, pueden considerarse como los procesos que proporcionan el conocimiento matemático” (Tieszen, 1989, p. 180). Aun cuando los objetos matemáticos son “abstractos” y no obedecen a relaciones causales, no tenemos impedimento para tener conocimiento sobre ellos.

En su intento por explicar la verdad y el conocimiento matemático, Benacerraf aborda dos concepciones: la estándar y la combinatoria.

Para él, la concepción estándar corresponde con la explicación platonista: “esta explicación asimila la forma lógica de las proposiciones matemáticas a la de las empíricas, aparentemente similares: tanto las proposiciones matemáticas como las empíricas contienen predicados, términos singulares, cuantificadores, etc.” (Benacerraf, 2004, p. 241). En el platonismo se asume que los objetos matemáticos están en un tercer reino, el cual no es ni físico, ni subjetivo.

Es claro que aprender las verdades matemáticas no es lo mismo que aprender que ciertas proposiciones matemáticas tienen condiciones de verdad. Por ejemplo, Ramanujan obtuvo su conocimiento matemático a pesar de no conocer las demostraciones, por lo que “el desafío de Benacerraf no era proporcionar una forma posible para que las personas adquieran conocimiento matemático, sino más bien explicar cómo las personas realmente obtienen conocimiento matemático si el platonismo es cierto” (Daly & Liggins, 2014, p. 231).

Ahora bien, si se acepta la teoría causal del conocimiento para los objetos físicos, la forma de interactuar con ellos es a través de la facultad perceptiva, de manera que no se requiere de un proceso de intuición. Sin embargo, si se acepta esta teoría, debería funcionar para conocer todos los objetos que yo tenga que conocer, es decir, que estén ahí, y yo pueda de alguna manera estudiar y justamente esto no ocurre en las matemáticas porque sus objetos de estudio son abstractos. Bajo esta postura el dilema de Benacerraf se hace más evidente, porque debería suceder una de dos cosas: o rechazamos el platonismo, es decir, el modo de existir de los objetos matemáticos como independientes de nosotros (no espacio-temporales) o renunciamos a la teoría causal del conocimiento.

Para muchos pensadores el conocimiento de los objetos matemáticos tiene un carácter empírico dado que nuestro conocimiento sobre ellos es *a posteriori*. Tal afirmación lleva al asunto tratado por el dilema de Benacerraf: ¿los objetos matemáticos cumplen la teoría causal? Aquí la causalidad se abordaría desde el papel que juegan los objetos dentro de la teoría científica: “es suficiente señalar que el desafío de Benacerraf al platonismo depende explícitamente de una ahora, en gran medida, desacreditada epistemología de la teoría causal del conocimiento” (Alcolea, 2006, p. 246). Nos interesa más que la existencia de los objetos matemáticos, la objetividad de los mismos, lo que lleva a una pregunta que siempre ronda ¿existen los objetos matemáticos?

La segunda concepción es la combinatoria, cuyas raíces son epistemológicas: “comienza con la proposición de que, aparte de lo que los “objetos” de la matemática puedan ser, nuestro conocimiento se obtiene de las demostraciones” (Benacerraf, 2004, p. 249). En este caso, el conocimiento matemático se obtiene gracias a las demostraciones, que son en efecto un medio de producción y transmisión lingüístico. Así que se busca el fundamento de la verdad en las demostraciones. Este tipo de concepción ha tenido una mayor aceptación, puesto que no está acompañada del halo de misterio en cuanto a cómo se obtiene el conocimiento: “añadamos esa toma de conciencia a la creencia de que la matemática es una criatura engendrada por nosotros, y no es sorprendente que uno busque actos de concepción para explicar el parto” (Benacerraf, 2004, p. 249).

Entonces, los formalistas consideran que un enunciado es verdadero si es posible su demostración a partir de axiomas y bajo un procedimiento que cumpla las leyes de la lógica: “así, la fuente básica del conocimiento matemático habitual es la demostración, técnica esencialmente sintáctica, que no necesita aceptar ningún tipo de semántica referencial” (Rodríguez Consuegra, 2004, p. 229). A pesar de que el teorema de incompletitud de Gödel mostró que no se puede identificar verdad con demostración, muchos matemáticos continuaban con esta relación, por tanto, aceptar una visión combinatoria del conocimiento sólo es posible en un sentido práctico y profesional, no teórico ni filosófico.

Podríamos introducir como una concepción combinatoria, la postura del intuicionismo. A diferencia de los platonistas, para quienes la mente es un espejo que no crea los objetos, sino que simplemente los refleja (reconoce), para los intuicionistas los objetos son dados a la mente, gracias a la intuición. En este caso no habría forma de separar el modo de existir de los objetos de su forma de conocerlos, es decir, que el intuicionismo fusiona la epistemología y la semántica, lo que significa que el individuo y su pensamiento son un solo aparato para construir objetos matemáticos. Si esto fuera así, al mismo tiempo que los construyo estoy sabiendo cosas de ellos y esa es la identificación entre la teoría del conocimiento, la epistemología y la semántica.

Para el intuicionismo la deducción no es la única técnica que permite probar una afirmación. Más aún, si se busca algo más que la lógica para realizar una prueba se debe recurrir a la intuición. Sin embargo, algunos asumen que, si no se confía en la deducción sino en la intuición de las propiedades, por ejemplo, de un diagrama, no se puede afirmar que se toma como un objeto arbitrario. Construir un objeto para los intuicionistas, implicaría que al mismo tiempo que es exhibido, pueda ser conocido y reconocidas sus características o propiedades. Por tanto, una proposición en matemáticas es verdadera si a través de la construcción de un objeto y la verificación de sus propiedades el individuo encuentra que corresponde con la proposición.

Estas concepciones combinatorias también fallan, dado que no explican cómo conectar las "llamadas 'condiciones de verdad' con la verdad de las proposiciones para las cuales son condiciones" (Benacerraf, 2004, p. 252). Establecer convenciones no garantiza la verdad, por el contrario, la existencia de la inconsistencia prueba que la verdad no se ha logrado. En suma, la definición implícita y la postulación convencional son incapaces de llevar a la verdad.

Como hemos estudiado, cualquier explicación sobre la verdad matemática debe tener en cuenta dos requisitos: uno semántico y otro epistemológico. La semántica es necesaria si estamos interesados en que los enunciados matemáticos se refieran a entidades reales y la epistemología es necesaria, si queremos que los enunciados matemáticos presupongan algún tipo de conocimiento de las entidades a las que se refieren los términos de esos enunciados. Algunos seguidores del realismo creen en la existencia de los objetos matemáticos y en la verdad de las afirmaciones independiente de las capacidades cognitivas de los individuos, "así, la cuestión ontológica básica se asienta en la naturaleza de esos objetos, resumiéndose — habitualmente — en la pregunta de si esas entidades son acontecimientos o productos mentales o existen independientemente de la actividad mental" (Moretti, 1991, p. 139).

El cuerno semántico del dilema de Benacerraf nos hace pensar en la necesidad de desarrollar una semántica exitosa que sea una alternativa a la usual. De lo contrario "no tendremos ninguna explicación de por qué las técnicas lógicas pueden reconstruir adecuadamente las inferencias aceptadas por los matemáticos, que conducen a teoremas cuya utilidad se hace sentir en la física" (Orayen, 1991, pp. 131–132), puesto que no es por casualidad que la teoría lógica se aplica de manera satisfactoria a las teorías matemáticas usuales. Por otro lado, adoptar el cuerno epistemológico del dilema implica "revisar nuestra explicación de la eficacia de la lógica en ciertos dominios y plantea algunos enigmas de interés" (Orayen, 1991, pp. 131–132).

Para Benacerraf, las explicaciones sobre la verdad matemática no han podido satisfacer estas dos condiciones, sólo una a expensas de la otra: cuando se aplica la semántica a los enunciados matemáticos, no se puede explicar cómo se conocen las entidades a las que se refieren tales términos. Y por el otro lado, si a los enunciados matemáticos se les aplica un patrón de conocimiento, debe dejarse de lado la semántica referencial. Se requiere del cuerno de la semántica y de la epistemología, pero elegir uno conlleva fallar en el otro. En general, la disputa entre los platonistas y sus contradictores tiene sentido cuando se hace referencia a la forma como se les atribuye el significado a las oraciones. Dado que lo fundamental es la objetividad de las oraciones aritméticas y no de los números, el problema en el realismo se convierte en un problema de tipo semántico.

Así, "las leyes se elaboran en términos generales, pero se inspiran en situaciones concretas, que son las que los legisladores tienen en mente al redactarlas" (Rodríguez Consuegra, 2004, p. 228). De esta forma el dilema de Benacerraf tiene como función denunciar a quienes sólo cumplen uno de los requisitos a expensas del otro. Como ya se mencionó, quienes incumplen son los platonistas (realistas como Gödel) y los formalistas que usan un esquema sintáctico de la verdad. Los primeros toman por verdaderos los términos a los que se refieren los enunciados matemáticos, pero fallan cuando intentan explicar cómo se pueden conocer esos términos involucrados. Los segundos (cuyo principal representante es Hilbert) aceptan el conocimiento que se obtiene por medio de las demostraciones, pero fallan al justificar ese conocimiento referencial, pues niegan que los términos que se toman por verdaderos designen entidades reales.

El dilema que plantea Benacerraf parece muy difícil de resolver: o se afirma que el lenguaje matemático se refiere a objetos abstractos (clases, números) o se niega este postulado. Si se acepta el primero sería muy difícil explicar el conocimiento matemático (teniendo en cuenta que la teoría predominante era la teoría causal del conocimiento). En el segundo caso, se pierde la explicación semántica (estándar) de la noción de verdad matemática. Para Benacerraf, ni la postura del conocimiento estándar (platonismo), ni la postura combinatoria (formalistas, intuicionistas o convencionalistas), en realidad explican qué es la verdad matemática.

Del dilema propuesto por Benacerraf, parece concluirse que lo que es necesario para la verdad matemática; hace imposible el conocimiento matemático. Esto parece increíble, "ya que desde la época de los griegos, las matemáticas se han tomado como el cuerpo de verdad más absoluto del que tenemos el conocimiento más seguro" (Hart, 1991, p. 87).

En la filosofía de la matemática un problema puede formularse desde un punto de vista metafísico o uno epistemológico. En el primero, "la verdad requiere que se haga referencia a objetos: así, puesto que es verdad que hay una infinidad de números primos, hay una infinidad de números primos" (Hart, 1991, p. 103). Por tanto, los números que son objetos abstractos y por ende completamente inertes no pueden entrar en una relación causal. En el segundo punto de vista, el epistemológico, "el conocimiento se entiende mejor en términos de una transacción entre el sujeto cognoscente y los objetos por virtud de los cuales es verdadero lo que él conoce" (Hart, 1991, p. 103). La percepción es el modo aceptado de tal transacción y ella es causal por naturaleza.

Así pues, por una parte, la verdad matemática requiere que haya objetos de los que estamos causalmente aislados mientras que, por otra parte, el conocimiento en general y, por esto, el conocimiento matemático en particular requiere que haya objetos a los que tengamos acceso causal. Dicho brevemente, lo que parece necesario para la verdad matemática, hace imposible el conocimiento matemático. (Hart, 1991, p. 103).

Benacerraf ha rechazado las entidades abstractas usando argumentos epistémicos: "los objetos que se conocen deben estar en alguna suerte de conexión causal, directa o no, con el sujeto cognoscente" (Orayen, 1991, p. 135). Lo que lo lleva a concluir que no es posible que el individuo pueda conocer las entidades abstractas, dado que ellas no están en el espacio-tiempo y son causalmente inertes: "el argumento no conduce a la recusación de entidades abstractas en general; más bien lleva el rechazo de entidades abstractas que puedan ser conocidas por nosotros" (Orayen, 1991, p. 135). Ahora bien, abandonar totalmente las entidades "causalmente inertes", traería como consecuencia una limitada capacidad de nuestras teorías para describir "hechos lógicos" que son plausibles en la realidad. Por ejemplo, los números son contables, lo que sería incompresible si no se tratara de objetos. A Frege también le parece claro "que los números no pueden ser objetos internos ni externos al modo del mundo físico. Esto es, de ellos no tenemos intuición alguna; no son dados ni al sentido interno ni al externo" (Rodríguez Consuegra, 1991, p. 147).

3.3 Soluciones al dilema de Benacerraf

Recordemos el dilema. Si los objetos de la matemática no existen como entes abstractos, deberían estar en el reino de lo concreto y bien sabemos que dichos objetos no son de la misma naturaleza que, por ejemplo, mi cuerpo que soy capaz de percibir con mis 5 sentidos. Por otro lado, la teoría del conocimiento reconocida por muchos era la teoría causal, propia de los objetos concretos. Lo anterior significa que o bien la teoría causal del conocimiento no es apta para las matemáticas, o bien el modo de existir de los objetos matemáticos no es apto para esa teoría del conocimiento, de modo que surge el dilema: aceptar la teoría causal del conocimiento implicaría la imposibilidad de conocer los objetos matemáticos, si es que existen. Pero si se acepta la existencia de los objetos matemáticos, entonces la teoría causal del conocimiento no permitiría conocerlos.

Una posible solución al dilema consistiría en mostrar que los objetos de la matemática están en un tercer reino, diferente al espacial y al interno. Y entonces una forma de tener conocimiento sobre el modo de existir de esos objetos es a través de la intuición. Ahora bien, debemos señalar que "cualquier solución aceptable al dilema de Benacerraf tendrá que ofrecer una explicación del conocimiento empírico y matemático que evite, entre ellos, un 'doble estándar'" (Godlove, 2011, p. 455).

Tenemos el mundo 1 de los objetos concretos, físicos (espacio), el mundo 2 de los estados de conciencia, del conocimiento subjetivo (tiempo) y un tercer mundo sería el mundo de los conocimientos objetivos.

Antes de abordar esta idea sobre el mundo 3, diremos algo sobre los mundos 1 y 2.

En el mundo 1 encontramos los eventos físicos, los biológicos, en fin, todo lo relacionado con el cuerpo y el mundo físico. En el mundo 2, encontramos los estados de conciencia, los psicológicos o mentales. Estos dos mundos se interrelacionan y uno puede ejercer influencia sobre el otro, "un dolor de muelas constituye un buen ejemplo de un estado que es a la vez mental y físico" (Popper & Eccles, 1993, p. 42). En el estudio de los problemas psicofísicos, algunos consideran que la interacción sucede en el cerebro, lo que implica una discusión sobre la relación "cerebro-mente". Por supuesto que este tema de la interacción es mucho más complejo de estudiar. Sin embargo, es necesario abandonar la idea de tener un conocimiento completo y pleno, por tener una descripción detallada que pueda brindarnos una comprensión parcial de la mencionada relación.

Si nosotros consideramos que la intuición matemática es ese proceso que se origina por el interés de comprender o resolver (mundo 2) un problema cuyo origen puede estar en un hecho físico o matemático (¿mundo 1 y mundo 2?) y que luego de la intervención de los actos de conciencia (mundo 2) y la experiencia matemática del individuo (¿mundo 1 exclusivamente?) puede ser resuelto y puesto a prueba bajo los formalismos (¿mundo 1 o 2?) de la comunidad académica, entonces pareciera que la intuición también se relaciona con el problema mente-cuerpo.

Este problema puede abordarse desde una nueva perspectiva, a saber, introduciendo un mundo 3, el mundo de los objetos del pensamiento, el mundo producido por la mente humana. "Por Mundo 3 entiendo el mundo de los productos de la mente humana, como las historias, los mitos explicativos, las herramientas, las teorías científicas (sean verdaderas o falsas), los problemas científicos, las instituciones sociales y las obras de arte" (Popper & Eccles, 1993, p. 44). Los objetos de este Mundo 3 son obra de los individuos, o grupos de ellos. En este mundo 3 "habitan" los objetos y las proposiciones de la matemática.

Supongamos que se desea resolver un problema. El primer paso será intentar comprender (mundo 2) el mencionado problema. Es decir "un intento procedente del Mundo 2 de captar un objeto del Mundo 1" (Popper & Eccles, 1993, p. 45). Ahora bien, aunque los libros existentes (mundo 1) permiten encontrar información, no siempre llevarán a la solución del problema, se requiere algo más, "tal cosa puede entrañar un esfuerzo creador, necesario para captar la situación problemática abstracta de un modo más adecuado que antes, si es que resulta posible" (Popper & Eccles, 1993, p. 45).

Una vez que se tiene la posible solución, esta es discutida y modificada según la lógica o nuevos experimentos, "tan sólo después de estos esfuerzos intensamente intelectuales puede descubrir alguien una posible aplicación técnica de gran alcance, que actúe sobre el Mundo 1" (Popper & Eccles, 1993, p. 45). Para algunos esto no explica suficientemente la idea de un Mundo 3, dado que esta puede ser la conducta académica y social de cualquier individuo. Lo que Popper quiere defender es el actuar de los científicos por lo que los problemas y las teorías deben ser objeto de estudio y crítica. Aunque las teorías son productos del pensamiento humano se puede aceptar que tienen cierto grado de autonomía, "objetivamente, pueden tener consecuencias en las que nadie ha pensado todavía y que pueden ser susceptibles de descubrimiento" (Popper & Eccles, 1993, p. 45). Entonces el Mundo 3 es un producto humano en su origen, pero una vez que las teorías existen parecen tener "vida propia" produciendo consecuencias que antes no eran visibles; que podrían desencadenar en nuevos problemas.

Muchos objetos del mundo 3 también están en el Mundo 1 (libros, computadoras, partituras), otros a su vez pertenecen al mundo 2 y al 3 (teorías, poemas), dado que sabemos de ellos por recuerdos o intenciones. Esto no implica que puedan existir objetos en el mundo 3 que sean incorpóreos o inintencionados, en este caso, encontramos los números, las teorías científicas o los problemas matemáticos. Los objetos del mundo 3 no están absolutamente desligados de los otros dos mundos.

Muchos de los objetos del mundo 3 ya existen antes de que nosotros accedamos de manera consciente a ellos, pero porque fueron creados o inventados por nuestros antecesores. Sin embargo, la búsqueda de un camino objetivo hacia su solución implica la independencia y la realidad de estos objetos. En esta interacción con los objetos del mundo 3 podemos plantear problemas nuevos u otras maneras de resolver problemas ya existentes. Algunos problemas insolubles en épocas antiguas han sido solucionados con nuevas teorías y otros han sido demostrados como imposibles de solucionar.

Es importante asumir que los objetos del mundo 3 pueden ser incorpóreos, de esta forma se puede erradicar aquella creencia que implica que la comprensión o captación de estos objetos abstractos, tiene que ver únicamente, con los objetos sensibles. Así, la forma de captar los objetos del mundo 3 no necesariamente depende de que los objetos estén relacionados con nuestros sentidos.

> Mi tesis es la de que la mente humana capta los objetos del Mundo 3 por un *método* que, si no siempre es directo, es el menos indirecto (y que discutiremos); un método que es independiente de su incorporación y que, en el caso de aquellos objetos del Mundo 3 (como los libros) que pertenecen también al Mundo 1, hace abstracción del hecho de su incorporación. (Popper & Eccles, 1993, p. 49).

Tal vez este *método* es la intuición, no al modo definido por Platón, sino como un proceso que puede "partir" del Mundo 1 o 2, que gracias a su interacción con los objetos del Mundo 3, los tranforma y lleva a la invención de nuevas teorías; para volver a ser insertados de una nueva manera en los mundos 1 o 2.

Ahora bien, en este tercer reino, el del conocimiento objetivo, encontramos lo que es independiente de nuestra consideración. Este mundo, en cierto sentido, es tan real como el de los objetos concretos puesto que es patrimonio común de muchos, es el mundo de las matemáticas y del lenguaje.

La doctrina que asegura que los objetos matemáticos pertenecen a un tercer reino, que no es físico ni subjetivo, es propio del platonismo, "caracterizamos los objetos abstractos solo negativamente: no están en el espacio ni en el tiempo, y no interactúan causalmente con la materia" (Hossack, 1991, p. 159). Ahora bien, la pregunta que surge es: ¿cómo es que sabemos algo sobre ellos? Para Gödel, la intuición matemática es la encargada de permitirnos el acceso intelectual a este mundo. Esta postura es un poco oscura, puesto que no es fácil entender cómo una mente material puede interactuar con objetos abstractos, más aún es complejo el proceso que la mente puede hacer para contemplar objetos sin la mediación de los sentidos.

Bien sabemos que los objetos de la matemática no están en el mundo de lo concreto. Brouwer, por su parte, creía que estaban en el mundo de los estados de conciencia, autodenominándose como un psicólogo introspectivo. Buscar los objetos de la matemática en la mente, implicaría que cada uno tendría una idea diferente de lo que se debería entender por el "número", dado que lo que está en la conciencia es privado y subjetivo. Por tanto, la idea del tercer reino parece la mejor alternativa.

Otros filósofos y matemáticos buscan la repuesta del acceso a los objetos de la matemática en las pruebas lógicas, pero esta consideración, también ha mostrado que el sólo dominio del lenguaje matemático no lleva a la construcción de grandes teorías, se requiere de la intuición. La prueba matemática debe mostrar un método puesto que "nuestro acceso epistémico al hecho matemático se compara mejor no con intuiciones de objetos, sino con la adquisición de una habilidad práctica" (Hossack, 1991, p. 169). Esta nueva perspectiva, cuestiona aquellas doctrinas que sostienen que los términos matemáticos se refieren a objetos y que las demostraciones son simples deducciones lógicas; "en su lugar, proponemos que captar un concepto matemático requiere dominar de forma típica una técnica o un procedimiento asociado, y que diferentes demostraciones cuentan con que nosotros reflexionemos acerca de qué resultados tendrán los procedimientos pertinentes" (Hossack, 1991, p. 181).

Los individuos interesados por la ciencia, por ejemplo, pueden extraer información del mundo de los objetos físicos. Más aún, podríamos afirmar que el origen de los objetos matemáticos está en este mundo, es decir, no son inspirados. Penelope Maddy nos ejemplifica esta idea cuando afirma que ver un cartón con 12 huevos, nos lleva a la noción de conjunto y gracias a nuestras facultades mentales tales como la abstracción podemos extraer conclusiones, profundizar y construir el concepto de "conjunto". Ahora bien, el primero que introdujo la idea de conjunto fue Cantor ¿por qué? Porque esta idea no surge directamente del contacto con la realidad y él tenía un conocimiento muy amplio de la matemática. Aunque en los siglos XIX y XX la matemática sufre un proceso brutal de abstracción (teoría de conjuntos, álgebra, geometría no euclidiana), no puede perderse de vista, que probablemente el origen último está en el mundo físico, no en vano los matemáticos sueñan con que todo lo que hacen vuelva a servir para estudiar algo que se encuentre en dicho mundo.

En la búsqueda de disolver el dilema encontramos las ideas de Georg Kreisel sobre rigor informal, recogidas en el artículo de expuestas en el artículo de Gregory Lavers "Benacerraf's dilemma and informal mathematics". Kreisel defiende la opinión de que los axiomas se alcanzan mediante un examen riguroso de nuestras nociones informales, en lugar de imponerse o "llegar" por ensayo y error. De ahí que "la visión resultante no hace frente a obstáculos metafísicos o epistémicos insuperables" (Lavers, 2009, p. 769). Es decir, se satisfacen los dos cuernos del dilema de Benacerraf. Para Kreisel, aunque la formalización en matemáticas es importante, el razonamiento comienza con el análisis de nociones intuitivas.

Visto así, el dilema de Benacerraf no dependería de la teoría causal y si las matemáticas son indispensables, como se han considerado habitualmente:

> ¿Cómo podría responder un indispensabilista a este desafío? La respuesta corta es que el argumento de indispensabilidad nos dice que alcanzamos el conocimiento matemático exactamente de la misma manera que alcanzamos otras formas de conocimiento, es decir, por los métodos hipotético-deductivos de la ciencia. (Alcolea, 2006, p. 247)

Para entender cómo proceden los matemáticos en su trabajo es necesario examinar las nociones intuitivas para determinar sus propiedades, lo que se denomina "rigor informal", postura rechazada por el pragmatismo, puesto que en esta doctrina lo importante es la fecundidad de las ideas más que su fidelidad, "el positivismo, por otro lado, sostiene que el contenido de nuestras nociones intuitivas reside exclusivamente en las operaciones formales que realizamos con ellos" (Lavers, 2009, p. 772). Sin embargo, para Kreisel, tenemos una comprensión que va más allá de lo que se puede alcanzar con las solas formalizaciones.

Cuando se desea refutar aquello de las "nociones intuitivas", se cita el problema de las paradojas, porque se asume que ellas muestran que la idea intuitiva de conjunto no era fiable. Ahora bien, lo que se olvida es que en la época se tenía un concepto vago producto de "una mezcla de tres nociones intuitivas: conjuntos de individuos, conjuntos de algo (que satisface solo un axioma de comprensión restringido) y propiedades o intenciones" (Lavers, 2009, p. 773). Entonces, gracias a este análisis intuitivo de la mezcla de nociones, es decir, la descripción de la estructura tipo, fue posible "llegar" a los axiomas, los cuales constituyen un registro y no un instrumento de aclaración.

Kreisel considera absurdo rechazar las nociones intuitivas sólo porque no satisfacen, en algunos casos, las explicaciones teóricas. Más aun, él no está interesado en encontrar una teoría que explique detalladamente como algunos matemáticos o físicos han llegado a sus nociones intuitivas exitosas: "por ejemplo, cómo los fundadores de la dinámica establecieron ecuaciones de movimientos para cuerpos rígidos o fluidos ideales sobre la base de impresiones cualitativas y conclusiones cuantitativas derivadas de estas ecuaciones” (Lavers, 2009, p. 774).

Podemos asumir, insistirá Kreisel, que “antes de la formulación de un sistema de axiomas, existe al menos una comunidad que comparte una noción informal” (Lavers, 2009, p. 775). Aun así, esta forma de hacer matemáticas no compromete ninguna visión metafísica en particular. Que no tengamos la capacidad de explicar completamente cómo funcionan las matemáticas informales, no implica que no podamos tener alguna idea de cómo funcionan.

Llegar a los axiomas gracias a las nociones intuitivas no es un proceso misterioso, pues allí han sido necesarias instancias directas. El punto es asumir que no se formulan los axiomas sobre el ensayo y error, sino sobre una matemática informal, es decir, que existen unas nociones intuitivas que se analizan antes de la formulación y en relación con la cual los axiomas son verdaderos.

> Si examinamos nuestras intuiciones con suficiente cuidado, podemos determinar, por ejemplo, una respuesta a la hipótesis del continuo… Deberíamos sostener que un examen de nuestras nociones intuitivas puede conducir a un axioma adicional que resuelva la hipótesis del continuo. Sin embargo, no veo por qué deberíamos sostener dogmáticamente la idea de que, en principio, todas las preguntas matemáticas interesantes pueden ser respondidas. (Lavers, 2009, p. 776)

No se está afirmando que las nociones intuitivas sean universales o innatas, sólo que algunos matemáticos tienen nociones informales coherentes que preceden la axiomatización y que, a su vez, les permiten reconocer la verdad de los axiomas. Para Kreisel “nuestras nociones intuitivas son una fuente de axiomas, pero no se afirma que estos axiomas sean independientemente verdaderos” (Lavers, 2009, p. 781).

Tener en cuenta esa idea de las “matemáticas informales” implica una comprensión más amplia de los objetos matemáticos, con muchas otras propiedades que las establecidas por los sistemas formales, de manera que podría ser una alternativa para disolver el dilema de Benacerraf. No existe ningún problema en hacer matemáticas informales, dado que según la opinión de Frege, mientras se establezcan las condiciones de verdad apropiadas se puede explicar el conocimiento de los objetos abstractos, es decir, desaparecen los "problemas epistémicos o metafísicos con respecto a nuestro conocimiento de verdades matemáticas" (Lavers, 2009, p. 784).

Desde la fenomenología se da una perspectiva diferente al dilema de Benacerraf, puesto que no se asume que la intuición proporcione un conocimiento completo de la verdad de los objetos matemáticos. Para Husserl, la verdad es una idea reguladora. Para una descripción tarskiana, la verdad tiene que ver con las condiciones de verdad "ideales" o "absolutas", que corresponden a un conocimiento máximo. Como se ha mencionado, en este caso las condiciones de verdad, pueden ser las condiciones bajo las cuales un enunciado matemático puede decidirse gracias a la intuición, en suma, "nuestro conocimiento solo puede aproximar el ideal en mayor o menor grado. Esperar más a la luz de los límites de nuestras habilidades intuitivas no sería razonable" (Tieszen, 1989, p. 181).

Para Husserl, no existe evidencia absoluta que se ajuste a la noción de verdad absoluta, cualquier verdad que "busquemos" caerá en las relatividades propias de su naturaleza, en este contexto, Husserl se pregunta ¿qué pasa si tanto la relatividad de la verdad o la verdad absoluta tuviesen legitimidad y cada una exigiera a la otra? Una respuesta implícita a esta pregunta conlleva una forma específica de ver la matemática, bien sea una concepción platónica de la verdad matemática o una concepción constructivista del conocimiento matemático.

Puede observarse que una "verdad ideal" se convierte en esa idea reguladora hacia la cual apunta el conocimiento "perfecto" o "completo". Podría afirmarse que una visión platónica implica una verdad completamente determinada, en este sentido Kant afirmaría que la razón conduce a esta postura y que es un estándar con el cual se puede medir nuestro conocimiento en cualquier momento. Sin embargo, este sentido absoluto no es tan evidente en las matemáticas altamente desarrolladas, puesto que su naturaleza involucra relatividades.

Husserl nos invita a entender la verdad matemática como una verdad dentro de sus posibilidades, lo que evitaría, por un lado, el relativismo escéptico y por el otro, un absolutismo lógico o matemático. La postura de Husserl no afirma, por ejemplo, que la teoría de conjuntos o el conocimiento aritmético elemental sean absolutamente ciertos y seguros, "simplemente no tenemos y no podemos tener la evidencia para garantizar eso" (Tieszen, 1989, p. 182), solo tenemos la evidencia de la verdad de algunas afirmaciones matemáticas. Ninguna de las dos posturas (la escéptica o la absolutista) podría darnos una imagen precisa del conocimiento matemático.

Como hemos mencionado, una posible solución al dilema propuesto por Benacerraf es la intuición matemática. Y uno de sus representantes es Charles Parsons quien, para empezar, diferencia entre los objetos cuasi-concretos y los abstractos puros, es decir, objetos que 'pertenecen' a objetos concretos de uno u otro tipo, y los objetos que no (conjuntos y números de varios tipos). Para Parsons, los objetos de la intuición matemática, "están restringidos a lo cuasi concreto. En particular, niega que pueda haber una intuición de los números naturales en sí mismos, y presumiblemente tomaría la misma opinión con respecto a cualquier otro tipo de objetos abstractos puros" (Hale & Wright, 2002, p. 105). Parsons reconoce un tipo de intuición esencialmente matemática, de tipos de símbolos y expresiones, que pueden ser reconocidos por el lenguaje común. La intuición matemática no es un concepto epistemológico aislado, que sólo se puede aplicar a las matemáticas puras, "sino que debe estar tan estrechamente relacionado con los conceptos por los cuales describimos la percepción y nuestro conocimiento del mundo físico" (Hale & Wright, 2002, p. 106).

El problema epistemológico de Benacerraf, puede ser resuelto de una manera novedosa, según los naturalistas. La respuesta que propone Fedyk (2018) es un análisis naturalista puesto que implica dividir "el proceso de formación de conceptos matemáticos y proposiciones del proceso de justificar creencias que involucran los mismos conceptos ya propuestos" (p. 91). Así mismo, asumirá que para captar y formar conceptos matemáticos se requiere de la intuición "inspiradora" y que la utilidad de estos conceptos se "mide" con relación a la evidencia de su verdad, lo que permite que sirva como justificación. Entonces "si bien las intuiciones son procesalmente instrumentales en la formación de creencias matemáticas (justificadas), una intuición en sí misma no es (normalmente) lo que transmite la justificación" (p. 91).

Benacerraf anhela una teoría integral de la verdad que se aplique a todos los casos tanto de las creencias matemáticas como de las no matemáticas. También busca la idea del concepto de verdad, como una verdad exacta. Este desafío de Benacerraf ha sido considerado desde nuevas perspectivas gracias a las diversas formas de representar fragmentos de la naturaleza, a saber, modelos, gráficas, tablas, etc.

Según esta alternativa, se debe rechazarla la visión de un mundo que consista sólo de hechos identificables, únicamente, con un conjunto de proposiciones. Por tanto, la idea de una representación exactamente verdadera no evidencia cómo esas verdades se corresponden con el mundo, es decir, los hechos son el tipo de cosas que se pueden describir a la perfección, aunque se use un lenguaje matemático. El dilema de Benacerraf invita a eliminar la idea de verdad como verdad exacta. Así, “un naturalista inspirado por este trabajo en filosofía de la ciencia puede buscar una teoría de cómo las afirmaciones matemáticas pueden ser inexactas o aproximadamente verdaderas” (Fedyk, 2018, p. 96), esto se explica con la distinción entre los usos dirigidos por el significado y los dirigidos por el mundo.

Este cambio, en el que las creencias matemáticas y las no matemáticas dejan de ser exactamente verdaderas, no excluye la existencia de una relación causal entre el discurso relevante y su objeto (segunda parte del desafío). Fedyk (2018) explica el problema de Benacerraf en los siguientes términos: así como las afirmaciones no matemáticas pueden ser aproximadamente verdaderas, las afirmaciones matemáticas también pueden ser aproximadamente verdaderas, es decir, “para que X sepa que S es aproximadamente cierta, debe haber alguna relación causal entre X y los referentes de los nombres, predicados y cuantificadores de S” (p. 96).

Una primera parte de la solución al problema es interpretar las intuiciones como ejemplos del uso de las intuiciones dirigidos por el significado que implican a su vez conceptos matemáticos específicos. El contenido proposicional de estas intuiciones son enunciados matemáticos. Estas intuiciones son evidencias sobre algo muy específico y limitado, “ya que no hacen más que explicitar el contenido de cualquiera de los conceptos matemáticos que estén implicados en las intuiciones relevantes” (Fedyk, 2018, p. 96), lo que muestra el error en que se incurriría al preguntar por la verdad o falsedad del contenido proposicional de una intuición.

La intuición dirigida por el significado deja el espacio para la distinción entre usar la prueba como vehículo para adquirir conceptos, y usarla para establecer ciertas verdades matemáticas,

> En este punto de vista, analizar las pruebas en la imaginación de uno es una forma de obtener la intuición de que los números racionales son densos en los reales sin tener que asumir necesariamente un compromiso ontológico con estos últimos. (Fedyk, 2018, p. 98)

Las intuiciones dirigidas por el significado implican conceptos matemáticos, los cuales son instrumentos para la producción del conocimiento matemático. La obtención de intuiciones conlleva la precisión de los conceptos. De ahí que utilizar una prueba matemática para obtener intuiciones dirigidas por el significado se convierte en un procedimiento instrumental para adquirir ciertos conceptos matemáticos, más no se sigue de esto que los conceptos así aprendidos sean falsos o verdaderos.

Bajo esta teoría, la intuición matemática es un proceso que permite al individuo formar creencias matemáticas. Estas creencias se producen gracias a los conceptos matemáticos, y estos conceptos a su vez, son adquiridos por el "uso de intuiciones dirigidas por el significado" (Fedyk, 2018, p. 103). Debe aclarase que no se están utilizando estas intuiciones dirigidas por el significado para captar un sinfín de conceptos matemáticos.

En suma, no se requiere encontrar en el mundo natural objetos que satisfagan de manera literal y exacta las afirmaciones más puras de las matemáticas, puesto que la mencionada teoría no pregunta por la verdad o falsedad de los contenidos proposicionales de las intuiciones matemáticas. Es decir, los contenidos de la matemática al igual que los de la no matemática, se pueden interpretar como verdades aproximadas. Tampoco se necesitan reformular los enunciados científicos para eliminar su contenido matemático. Lo que se pretende es tratar a los conceptos matemáticos con el mismo criterio de verdad y referencia que se usa en la práctica científica.

4. Philip Kitcher y la intuición matemática

En la introducción de su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*, Kitcher expone lo siguiente:

1. "Comprender cómo se obtiene el conocimiento matemático de la persona común y del matemático experto." (Kitcher, 1984, p. 3). La matemática ha sido considerada históricamente como un ejemplo brillante del conocimiento humano y un estándar que puede incluso medir el conocimiento en otras áreas. Esta misma brillantez ha traído creencias idealizadas sobre cómo es el conocimiento matemático. Al estar aparentemente alejada de experimentos y observaciones, la ha llevado a erigirse como una ciencia absoluta de conocimiento *a priori* y cuya fuente está en un "lugar" diferente a la experiencia perceptiva. Kitcher rechaza la tesis del apriorismo como forma del conocimiento matemático y afirma: "trataré de explicar cómo son posibles los orígenes perceptivos del conocimiento matemático ofreciendo una explicación de aquello acerca de lo cual trata la matemática, una imagen de la realidad matemática, si se prefiere" (Kitcher, 1984, p. 6).
2. Romper con esa idea que implica que el conocimiento matemático está contenido en una única persona y no en una comunidad de formadores, aunque estas comunidades tendrán un papel preponderante en la epistemología de las matemáticas. Con su explicación, Kitcher no intenta decir que los empiristas como Mill, Lakatos o Putman estaban equivocados, sino que su tratamiento del tema estaba incompleto.
3. Conferir importancia a la historia de la matemática. Kitcher asume que los avances de una generación son producto de los avances anteriores, "al intentar mostrar cómo el desarrollo histórico de las matemáticas puede verse como una secuencia de transiciones racionales, a veces haré historia con un énfasis diferente al habitual" (Kitcher, 1984, p. 7). El interés de Kitcher en la reconstrucción histórica no estará centrado en las grandes demostraciones del pasado, sino en otras cuestiones tales como el cambio del lenguaje matemático a través de cada época, la importancia que adquieren ciertas preguntas matemáticas en distintos periodos y la modificación de los cánones de las pruebas, "al plantear estas preguntas y

> sugerir cómo deberían ser respondidas, tengo la intención no solo de completar mi proyecto epistemológico sino también esbozar un enfoque novedoso de la historia de las matemáticas". (Kitcher, 1984, p. 7).

Para Kitcher, el conocimiento no puede ser *a priori*. Defiende la tesis de que el conocimiento es el producto de la transición del conocimiento en cada época, así como de la transmisión de generación en generación de los saberes y prácticas al individuo por parte de las autoridades académicas (maestros, libros, conferencias, etc.)

En la concepción de Kitcher, el apriorismo pasa a un segundo plano, dándoles relevancia a las comunidades actuales y ancestrales que han contribuido a la construcción del conocimiento matemático. En cuanto a la explicación sobre la realidad matemática "rechaza la visión platónica de las matemáticas, divergiendo también de las versiones anteriores de nominalismo y constructivismo. Y mi explicación del crecimiento del conocimiento matemático apunta a una nueva historiografía de las matemáticas". (Kitcher, 1984, p. 8).

Lo realmente importante para Kitcher es que el lector sea capaz de comprender su descripción sobre la secuencia de transiciones que han conducido del conocimiento matemático antiguo (perceptualmente justificado) a las matemáticas que conocemos en la actualidad. No se puede desconocer la importancia en este proceso de las inferencias no deductivas. (Véase Alcolea, 2011)

Kitcher no dejará de lado la creatividad, aunque pareciera mostrar al matemático como subordinado a la autoridad de la comunidad académica, la cual ha sido dominada por la tradición. La creatividad del matemático puede ser de dos tipos: el que necesita ingenio para demostrar usando los recursos existentes o el que cuestiona o transforma lo ya existente y que obliga a la comunidad académica a revisar lo ya existente. Y justamente esta postura será la que relacionaremos al final de este capítulo con nuestra idea de intuición.

Este capítulo está dividido en cuatro partes. En la primera se expondrán los argumentos por medio de los cuales Kitcher afirma que el conocimiento no puede ser *a priori*. En la segunda, nos acercamos a la idea que Kitcher tiene del conocimiento generado en el seno de la comunidad y que no se centra en un único y sólo individuo. En la tercera, se mostrará la comunicación en el desarrollo del conocimiento y sus transiciones interprácticas. En la última, se ofrecerán algunas reflexiones sobre la intuición en la filosofía de Kitcher.

4.1 La imposibilidad del *apriorismo* en el conocimiento matemático

Kitcher se plantea dos cuestiones: ¿acerca de qué tratan las matemáticas? y ¿cómo crece el conocimiento matemático? A su vez estas preguntas se relacionan con dos cuestiones centrales de la epistemología, a saber, ¿qué es el conocimiento? y ¿cuáles son las condiciones necesarias para decir que alguien sabe algo? Para algunos, en la tradición filosófica, la respuesta está en la psicología, incluso, suponían que los estados de conocimiento eran estados de creencia. Asumir esta idea, implica creer que si algo es verdadero es porque se puede explicar de manera apropiada.

En el siglo XX muchos filósofos de la ciencia se apartan de esta explicación psicológica. Deciden ignorar la vida psicológica del sujeto y centrarse sólo en las proposiciones lógicas, en los axiomas y las verdades *a priori*. El positivismo lógico esperaba defender el apriorismo en las matemáticas dejando de lado la psicología. Sin embargo, no encontró una condición suficiente para tal conocimiento. Y aunque se puede diferenciar entre descubrimiento y justificación, uno de los problemas es que etiquetan las proposiciones como autoevidentes, autojustificantes, etc. Y esto lleva a considerar lo que se llaman verdades *a priori*.

Ahora bien, las creencias no tienen necesariamente razones lógicas, "el epistemólogo psicológico afirma que los estados de conocimiento de que *p* se distinguen de los estados de mera creencia verdadera de que *p* por el carácter de los procesos que, en cada caso, producen la creencia de que *p*" (Kitcher, 1984, p. 17). Lo que implica que las garantías básicas para una creencia requieren de un proceso.

Para Kitcher, el conocimiento no es *a priori*, lo que en realidad puede ser *a priori* es un elemento del conocimiento: "el apriorista no es ipso facto un creyente del conocimiento innato. Por lo tanto, no podemos aceptar un análisis que implique que el conocimiento *a priori* podría haberse obtenido con experiencias mínimas" (Kitcher, 1984, p. 21). Así, el conocimiento dependerá de la experiencia total, tanto de la empírica como de la obtenida por el razonamiento deductivo. Dado que la experiencia de cada uno es diferente, "especificar un proceso que produce una creencia es elegir algún segmento terminal de la ascendencia causal de la creencia" (Kitcher, 1984, p. 25).

Para Kitcher, que las verdades matemáticas sean necesarias no implica que el conocimiento sea *a priori*. Es posible que existan verdades necesarias y los humanos no las conozcan. Más aún, algunas verdades matemáticas son tan complicadas que muchos humanos nunca las aprenden. De ahí, que no se pueda afirmar el carácter *a priori* del conocimiento matemático.

Una forma común del apriorismo matemático es afirmar que el conocimiento en matemáticas se basa en la prueba, la cual tiene que ver con la lógica y con el lenguaje. Las pruebas tienen que ver con la teoría formal estándar y es necesario determinar qué secuencias pueden ser llamadas pruebas. En general se podría entender por pruebas "secuencias de oraciones que hacen un trabajo en particular y, si tenemos predilección por las pruebas formales, es porque pensamos que las pruebas formales funcionan mejor que las informales" (Kitcher, 1984, p. 37). En matemáticas, las pruebas han tenido un papel preponderante, dado que codifican los procesos psicológicos que podrían producir un conocimiento *a priori* del teorema que se quiere demostrar. Quien sigue una prueba se involucra en un proceso psicológico porque ella es un patrón para el proceso.

No debemos confundir el conocimiento *a priori* con el conocimiento que se obtiene luego de seguir un proceso no empírico. Un proceso no empírico genera creencia.

¿Dónde se genera esta confusión? Cuando intentamos seguir todos los pasos de una prueba, nuestra capacidad de memoria debería ser tan amplia como para recordar todos los pasos y repetirnos una y otra el proceso que seguimos al realizar la prueba. Entonces almacenamos ciertos principios *a priori* y otros que surgen de manera deductiva y los usamos cuando los necesitamos, pero ignoramos su prueba. Kitcher supone que "en el estado ordinario de la práctica, los matemáticos carecen del poder para tener en mente algo más que un paso intuitivo y tres pasos inferenciales" (Kitcher, 1984, p. 44). Es decir, si la prueba tiene más de 4 pasos entraría la incertidumbre. El punto es que cognitivamente no estamos a la altura para atender simultáneamente todos los pasos de una prueba: "las nociones que se emplean en matemáticas son prodigiosamente abstractas, es decir, son el resultado de una elaboración que ya se encuentra muy adelantada" (Poincaré, 2017, p. 69).

Para Kitcher, los aprioristas de diferentes corrientes fallan cuando abordan la pregunta "¿cómo se tiene acceso *a priori* a nuestras construcciones mentales?" o "¿cómo se tiene acceso a la realidad independiente de la mente?" (Kitcher, 1984, p. 47). Él nos presentará argumentos que muestran cómo las ideas del constructivismo y del realismo sobre la manera de adquirir el conocimiento matemático básico *a priori* fallan, así como la idea de intuición que esas corrientes de pensamiento abordan.

Kant niega que la función de la intuición pura sea sólo conducirnos al conocimiento de las propiedades de las figuras particulares. Construir figuras en la intuición pura implica tomar conciencia de los principios y caracterizar nuestra existencia. La noción de Kant está ligada a una noción de la intuición que implica de alguna manera a los sentidos (dibujamos y vemos imágenes).

Nuestra psicología impone "reglas" a la experiencia. Entonces algo será verdadero si corresponde con esa estructura. Esta concepción presenta tres problemas: el de la irrelevancia (qué propiedades son de la estructura y cuáles accidentales), el de la imposibilidad (son posibles para nosotros) y el de la exactitud (tienen las propiedades que las llevamos a tener). Bajo este marco, Kitcher concluye que el problema no es la intuición, el problema persistirá mientras los objetos intuidos tengan los tres tipos de propiedades.

Kant asume que podemos tener conocimiento *a priori* de las propiedades generales de un triángulo dibujando uno en particular. El triángulo que presenta Kant tiene tres tipos de propiedades:

1. Las que son determinadas por el concepto de "triángulo".
2. Las propiedades impuestas por la experiencia.
3. Propiedades que resultan de los accidentes de la construcción.

Entonces, quien debe proporcionar la estructura de la experiencia, en este contexto, es la intuición. El número de intuiciones que podemos tener es finito (están limitadas por nuestra existencia). Quienes defienden el proceso de la intuición como la fuente de todo conocimiento *a priori* tendrían que argumentar que no hay axiomas matemáticos que sólo pudiéramos conocer a posteriori con una secuencia de intuiciones indefinidamente larga.

Lo anterior conduce a un dilema, o bien las matemáticas son triviales, o no podemos explicar cómo las construcciones mentales producen conocimiento. De lo que se siguen dos dificultades: la irrelevancia o la imposibilidad práctica. Expliquemos un poco más, este dilema.

Por un lado, si los enunciados matemáticos no simplemente describen las características de las entidades mentales, entonces, no es claro cómo la intuición pura genera conocimiento matemático (entendiendo por intuición el proceso por el cual se describen las entidades y se leen sus propiedades en ellas). De otro lado, si los enunciados matemáticos simplemente describen las entidades mentales, entonces existirán tantos enunciados como personas diferentes se encuentren y esto sucederá en diferentes tiempos, lo que implica que los enunciados matemáticos no parecen tener un contenido intersubjetivo permanente.

Si entendemos que los enunciados matemáticos describen "entidades mentales", entonces son "sus" entidades mentales, de modo que ¿cómo se comparten luego? En el caso del intuicionismo de Brouwer, que así pensaba (las entidades matemáticas son construidas por nuestra mente), es preciso pasarlas al lenguaje para que puedan ser compartidas, como si se "objetivizaran". Este paso puede estar sujeto a errores, pero éstos son corregidos por otros matemáticos, los cuales "critican" (lo que significa purgar de errores algo) lo hecho por otro matemático.

Kitcher (1984) señala que existen "problemas graves para tener un conocimiento *a priori* con un contenido común y para tener el mismo conocimiento *a priori* en dos momentos diferentes" (p. 56), en el constructivismo se afirma que es posible conocer *a priori* las características de la construcción que se tiene en la mente de alguna entidad matemática. De ahí que Kant se equivoque al insistir en que la intuición pura produce un conocimiento *a priori*. Finalmente, los constructivistas no aclaran la forma en que se aprehenden las construcciones matemáticas.

Para Kitcher, el proceso de intuición puede conducir a creencias falsas. Dirá él: supongamos que alguien se mueve entre imaginar que su vida consiste en parte de experiencias que arrojan dudas sobre los procesos y dudas sobre la conclusión a la que se llega por ese proceso. Entonces si para un proceso podemos establecer los antecedentes, ese proceso no es *a priori*. Si formamos nuestras creencias sobre bases no empíricas, cuando sospechemos de la fiabilidad de esas creencias caeríamos en la irracionalidad y el dogmatismo, otro cuerno del dilema.

Una segunda visión sobre el conocimiento *a priori* procede del realismo. Y al igual que en el constructivismo, Kitcher mostrará que la noción de intuición no cumple con los estándares básicos del apriorismo. Una de las tesis de realismo afirma que "los enunciados matemáticos son verdaderos o falsos en virtud de las características de la realidad matemática independiente de la mente" (Kitcher, 1984, p. 58).

Los objetos de este reino independiente de la mente son abstractos, no se pueden ubicar espacio-temporalmente ni cumplen la teoría causal. Para describir las características de este reino, los realistas recurren a una analogía con la ciencia natural. Así como en la ciencia se puede acceder a los objetos gracias una percepción sensorial, se espera que el matemático tenga un modo similar de acceso que algunos han denominado "intuición matemática".

Como los objetos son abstractos y por tanto independientes de la mente, para los platónicos las matemáticas tienen como función informar sobre los hechos de los objetos, entonces, primero: los procesos de intuición son entidades teóricas, pero esta teoría puede ser cuestionada puesto que puede presentar dificultades para dar cuenta de los fenómenos que trata o simplemente porque existe una teoría mejor. Segundo: sólo sabemos sobre los procesos de intuición lo que la teoría nos dice sobre ellos, por tanto, no será posible reconocer los procesos de intuición que se llevan a cabo.

Es importante aclarar que este reino de los platónicos es diferente al mundo 3 estudiado en el capítulo anterior. Revisemos algunas diferencias:

1. En el mundo de los objetos inteligibles de Platón las ideas son eternas, inmutables, atemporales y de origen divino. En el Mundo 3 los objetos son construcciones humanas y no tienen ninguna esencia, "no atribuyo ninguna condición a los objetos o referentes de nuestros conceptos y nociones" (Popper & Eccles, 1993, p. 49). Aunque podría verse el mundo de las ideas de Platón como una anticipación al mundo 3, los productos del mundo 3 existen no como esencias, dado que pueden ser, en algunos casos, conjeturas equivocadas.
2. En el mundo de Platón su método dialéctico tiene que ver con un método hipotético deductivo en el que no caben las conjeturas ni los problemas equivocados. Los cuáles sin tienen espacio en el mundo 3, dado que sus "habitantes" son construcciones humanas.

De estos dos puntos inferimos que “los objetos matemáticos son creaciones de la mente humana cuyo modo de ser depende del pensamiento. Tengamos en cuenta que tal tesis es bastante compatible con una visión realista sobre el universo físico y las declaraciones sobre sus propiedades físicas” (Alcolea, 2006, p. 234). Bien sabemos que los objetos de la matemática (mundo 3) comparten un estado ontológico similar al de los conceptos de la física (mundo 1), y se consideran indispensables para la teoría física (mundo 3).

Para refutar la teoría apriorista del conocimiento, Kitcher planteará una propuesta alternativa. Una revisión de las diferentes etapas de la historia muestra que el conocimiento de los individuos es generado por el conocimiento de los maestros o los libros, quienes enseñan o “transmiten” los avances que hasta ese momento ha tenido la comunidad científica. “El conocimiento de la comunidad es en sí mismo el producto de una larga serie de episodios, que se remontan a las simples observaciones con las que comenzó el conocimiento matemático” (Kitcher, 1984, p. 92). A esto Kitcher lo llamará una teoría evolutiva del conocimiento matemático.

Ahora bien, esta teoría no escapa a las preguntas convencionales ¿cómo comienza el conocimiento matemático? O ¿cómo se extiende? Por el momento diremos que este tipo de teorías tienden a invertir el orden epistemológico, por ejemplo, los axiomas son concebidos como el resultado de inferencias justificadas previas, dejando de ser el principio básico que han considerado los aprioristas.

La tesis de Kitcher parece sugerir que el conocimiento matemático proviene de las explicaciones del maestro. Pero esta tesis no parece fácil de aceptar por la comunidad científica. Por el contrario, se tiene una preferencia a creer que el matemático se sienta sólo en su estudio y que de una manera individual e independiente adquiere y conoce las verdades básicas. Kitcher por el contrario afirmará que esto es una apariencia y que lo que ocurre en el estudio del matemático “es sólo una extensión del proceso de formación” (Kitcher, 1984, p. 93).

¿Por qué esta creencia? Porque las creencias suelen estar causalmente sobredeterminadas. La creencia en alguna proposición matemática se debe a diferentes procesos causales: recuerdos, reconocimientos perceptivos o procesos adicionales.

Los aprioristas se equivocan al poner la carga epistemológica en los procesos que pueden cumplir la función útil de ser justificadores locales e ignoran que los experimentos mentales cumplen un papel importante en la pedagogía, éstos fijan la creencia de manera más eficaz que una simple afirmación autoritaria impuesta por el cuerpo axiomático de la matemática o de la lógica, la cual ayuda a fijar la creencia, pero no genera conocimiento.

Ahora bien, no necesariamente toda creencia es verdadera. Sin embargo, muchas afirmaciones o enunciados matemáticos son considerados por la comunidad científica y por las personas corrientes como verdaderas. Pero ¿por qué son verdaderas? Los platonistas responderán que es gracias a la existencia de objetos o construcciones mentales que no son espacio-temporales. Por tanto, las afirmaciones matemáticas serán verdaderas gracias a las propiedades de los objetos abstractos. Otro punto será el medio que permita conocer dichas propiedades.

Los formalistas responderán a esa misma pregunta afirmando que "lo que normalmente consideramos como enunciados matemáticos con valores de verdad son meras marcas producidas en juegos elaborados" (Kitcher, 1984, p. 104). Pero si esto es cierto ¿por qué las matemáticas son tan útiles en la realidad?

Kitcher abordará esa pregunta yuxtaponiendo dos tesis. La primera según la cual la matemática explica y predice el comportamiento de los objetos físicos; con una segunda tesis, la platónica, según la cual los enunciados matemáticos describen un reino de objetos abstractos. Si la matemática es una estructura de la realidad, el experimento de Kitcher devela un error en el platonismo: reemplazan "la imagen de las matemáticas como descripción de las propiedades estructurales que se manifiestan en una gran cantidad de casos concretos con la imagen de las matemáticas como descripción de entidades abstractas que manifiestan la estructura" (Kitcher, 1984, p. 106).

Kitcher propone un giro. Empezar suponiendo que la matemática es el descriptivo de la estructura, sin necesidad de ir a los objetos platónicos. Y no suponer que las matemáticas son sobre objetos abstractos, que cuando encuentran instancias de una estructura común se reinterpretan sus enunciados para que sean ejemplificados por sus objetos: "al hacer que la estructura matemática se refleje en las propiedades de las cosas ordinarias, podemos comenzar a disolver las perplejidades epistemológicas" (Kitcher, 1984, p. 107).

Esto no implica una brecha entre los objetos ordinarios y otras entidades intangibles que están detrás de ellos. Al final el objetivo de Kitcher es eludir las entidades abstractas para presentar una idea defendible de la realidad matemática.

4.2 El conocimiento matemático y la comunidad científica

Lo que deseamos subrayar de las ideas de Kitcher es su postura frente al conocimiento como producto del esfuerzo de toda una comunidad, como la construcción no de un solo individuo sino de toda una generación de predecesores al matemático a quien se le atribuye dicha invención.

Para muchos filósofos de la matemática, la historia ha sido epistemológicamente irrelevante, puesto que suponen que el proceso histórico a través del cual las matemáticas ha sido elaborada, es producto de esfuerzos individuales. La postura de Kitcher es diferente. Él explica el conocimiento de los sujetos, al rastrear el conocimiento de sus antecesores, es decir, asumirá que el conocimiento del individuo se basa en el conocimiento de las autoridades de las comunidades que han influenciado a dicho individuo. Más aun, Kitcher sostiene que se puede prever el conocimiento matemático de un individuo en el presente gracias a la cadena de conocedores anteriores.

> Varios milenios atrás, nuestros antepasados, probablemente en algún lugar de Mesopotamia, pusieron en marcha la empresa, aprendiendo a través de experiencia práctica algunas verdades elementales de aritmética y geometría. A partir de estos principios humildes las matemáticas han florecido en el impresionante cuerpo de conocimiento que hemos sido afortunados de heredar. (Kitcher, 1984, p. 5)

Kitcher se adelanta a críticas de su enfoque de la teoría del conocimiento y se pregunta si es posible que, de ese comienzo primitivo, surja el presente cuerpo de conocimiento abstracto, y su respuesta es: sí. Para él, existen patrones inferenciales racionales que llevan al matemático creativo a extender su conocimiento más allá de lo heredado por las autoridades de su pasado. Gracias a la suma de los esfuerzos racionales, el conocimiento de la comunidad matemática aumenta de generación en generación, como se evidencia en varios casos de la historia de la matemática.

Los desafíos sociales muestran que, aunque algunos insistan en ignorarlos, es pertinente recordar que la mayor parte del conocimiento de la humanidad tiene un carácter social. Nuestro saber sería ínfimo sin el apoyo de los demás, "incluso en el caso de la ciencia empírica, la mayor parte del conocimiento de cada individuo se basa, no en la experiencia directa, sino en las comunicaciones de los demás" (Kitcher, 1984, p. 91). Es decir, que la interacción con los demás es una fuente de conocimiento y una forma para derrotar nuestras propias creencias.

Las matemáticas tienen una historia. Sus inicios son prácticos (egipcios y babilonios), y poco a poco se alejan de lo práctico. Ahora bien, las matemáticas del presente están influenciadas por las del pasado. Una cadena mostraría que Cauchy o Lagrange extendieron lo hecho por Newton y Leibniz, que se basaron en Descartes y Fermat y este en Pappus o Euclides. De ahí que, para Kitcher (1984), "una cantidad muy limitada de nuestro conocimiento matemático puede obtenerse mediante observaciones y manipulaciones de cosas ordinarias. Sobre esta pequeña base, erigimos las poderosas teorías generales de las matemáticas modernas" (p. 92).

Para Kitcher, en muchos casos, el conocimiento de un individuo se explica por el conocimiento que le ha sido transmitido por las autoridades (profesores, libros, conferencias). Ahora bien, eso no significa que todos los conjuntos de creencias enseñados sean conocimiento autorizado. Por otro lado, tampoco es posible enseñar o comunicar toda la cadena de antecesores, más bien se "eligen" las particularidades individuales que aportan a lo que se desea conocer. "Lo que requerimos en el último caso es una idea sobre cómo el rasgo (quizás en forma rudimentaria) podría haber surgido originalmente y cómo la selección natural podría haber llevado a su fijación" (Kitcher, 1984, p. 96).

Para Kitcher, los filósofos han ignorado un tema crucial de la epistemología de las matemáticas: la evolución del conocimiento matemático. Es necesario reflexionar sobre los orígenes del conocimiento matemático. Esto implica ahondar en cómo los predecesores adquirieron su conocimiento y, escudriñando, se encontrará en el fondo una percepción sensorial ordinaria. Por supuesto, esto no significa que se deba eliminar la idea de que muchos de los enunciados matemáticos no pueden entenderse de esta manera. Así, "la tarea principal de explicar los orígenes del conocimiento matemático se convierte en proporcionar una imagen de la realidad matemática que se ajuste a la tesis de que nuestro conocimiento matemático puede originarse en la percepción sensorial" (Kitcher, 1984, p. 96).

Esta discusión lleva a Kitcher a estudiar el desarrollo o crecimiento del conocimiento humano, considerando, por un lado, "las formas en que los humanos realmente inferimos" y, por otro, "las afirmaciones de conocimiento que realmente hacemos" (Kitcher, 1984, p. 97). La epistemología parece ignorar los tipos de inferencias que los matemáticos hacen durante su práctica. Entonces Kitcher se propone la siguiente tarea: "sistematizar las inferencias y las afirmaciones de conocimientos hechas y avanzadas por investigadores anteriores y contemporáneos en una variedad de campos" (Kitcher, 1984, p. 98). Como resultado de dicha tarea podrá rechazar ciertos tipos populares de inferencias y, por ende, algunas afirmaciones sobre el conocimiento.

Para ejemplificar sus tesis usará la aritmética. Desde la infancia estamos manipulando objetos físicos, los segregamos y los recombinamos, "la aritmética es verdadera no en virtud de lo que podemos hacer al mundo, sino más bien de lo que el mundo nos permite hacerle" (Kitcher, 1984, p. 108). Es decir, la aritmética debe su verdad a la estructura del mundo. Para Kitcher la aritmética es una teoría idealizadora porque no es verdadera por lo que los agentes humanos reales hagan sino por las operaciones ideales que hagan los agentes ideales. El agente ideal del que habla Kitcher no es un sujeto misterioso con poderes sobrehumanos. "Decir que las matemáticas son verdaderas en virtud de las operaciones ideales es explicar la tesis de que las matemáticas describen la estructura del mundo" (Kitcher, 1984, p. 111). Esta postura enfatiza el rechazo de Kitcher sobre quienes afirman que se pueden conocer *a priori* las formas en que se debe hacer esa idealización.

La aritmética, por ejemplo, es una idealización. Ahora bien, el conocimiento actual que tenemos sobre ella, es producto de la transmisión que de sus propiedades y objetos que la sociedad le ha enseñado a un individuo, es decir, de la sociedad a su sucesor. Kitcher intenta explicar cómo obtuvieron el conocimiento aritmético los antepasados. Entonces se puede afirmar que: "la idealización como un proceso en el que abandonamos el intento de describir nuestro mundo exactamente a favor de describir un mundo cercano posible que se preste a una descripción mucho más simple" (Kitcher, 1984, p. 120).

Kitcher comparte con los constructivistas la tesis ontológica que dice "que las afirmaciones matemáticas verdaderas deben su verdad a la actividad constructiva de un sujeto real o ideal" (Kitcher, 1984, p. 142), siendo el sujeto ideal una idealización de nosotros mismos. "Mi afirmación central es que el conocimiento proto-matemático se puede obtener manipulando el mundo y observando las manipulaciones" (Kitcher, 1984, p. 148), estos humildes comienzos no impiden que la matemática se haya convertido en ese cuerpo impresionante que es hoy en día y que se ha erigido sobre una base teórica cada vez más refinada de la actividad constructiva del sujeto ideal.

Ahora bien, la historia de la ciencia y de la matemática en particular, es dinámica, atravesada por cambios, que en algunas oportunidades se les asignan a individuos en cada época. Lo que nos muestra Kitcher, es que los resultados individuales son producto de los avances, retrocesos y reformas que una comunidad o varios matemáticos han realizado en sus épocas anteriores.

Matemáticos actuales aceptan proposiciones que sus antecesores no aceptaban, por ejemplo, que una ecuación polinómica con coeficientes racionales tuviese raíces. Estos cambios no sólo se producen en el cuerpo teórico de las matemáticas, sino que incluyen cambios en el lenguaje, en el estilo, en el tipo de razonamiento, en el énfasis, en el tipo de problemas y hasta en puntos de vista sobre los alcances de la matemática.

Puesto que Kitcher está interesado en las motivaciones que generan los cambios en el desarrollo de las matemáticas, acaba por preguntarse: "¿Por qué los matemáticos proponen diferentes afirmaciones en diferentes momentos? ¿Por qué abandonan ciertas formas del lenguaje? ¿Por qué ciertas preguntas aumentan y disminuyen en importancia? ¿Por qué se modifican los estándares y los tipos de prueba?" (1984, p. 149). Esto implica investigar sobre la metodología de las matemáticas.

Cuando se estudia el desarrollo de las ciencias físicas es habitual encontrar afirmaciones tales como: "la observación [es] la fuente del cambio científico. Sin nuevas observaciones, la ciencia sería estática" (Kitcher, 1984, p. 151). Kitcher considera que esta tesis es insostenible.

Las grandes revoluciones de la ciencia: el paso de la cosmología aristotélica a la copernicana; o el reemplazo de la física newtoniana por las teorías generales de la relatividad, no se pueden explicar como simples modificaciones del cuerpo de conocimientos a la luz de nuevas observaciones. Para Kuhn las revoluciones científicas implican cambios conceptuales, imposibles de formular en un lenguaje común, produciendo una nueva forma de ver fenómenos familiares y "quizás lo más importante, los cambios metodológicos que, al modificar las reglas de justificación de las teorías científicas, hacen imposible la resolución racional de las diferencias entre las teorías anteriores y posteriores" (Kitcher, 1984, p. 152).

Para Kitcher, la observación no obliga racionalmente a la modificación de las creencias científicas. Ya Kuhn había encontrado que la coincidencia entre lo observado y la teoría no es perfecta, por lo que las teorías están siendo falseadas en todo momento. La discrepancia surge porque algunos científicos aceptan una forma general de construcción, tomando pedazos particulares y erigiéndolos como paradigmas. Escogen reglas, modifican y articulan todo con el fin de que sus respuestas correspondan con ese cuerpo de creencias o reglas que ellos mismos han "inventado".

> La observación y la experiencia pueden y deben limitar drásticamente la gama de las creencias científicas admisibles o, de lo contrario, no habría ciencia. Pero, por sí solas, no pueden determinar un cuerpo particular de tales creencias. Un elemento aparentemente arbitrario, compuesto de incidentes personales e históricos, es siempre uno de los ingredientes de formación de las creencias sostenidas por una comunidad científica dada en un momento determinado. (Kuhn, 1992, p. 25)

Para Kitcher, la observación no es la única fuente de conocimiento en la ciencia: "siempre hay 'tensiones internas' en la teoría científica, y estas proporcionan un estímulo para la modificación del corpus de creencias" (Kitcher, 1984, p. 154). Al igual que en la ciencia los cambios matemáticos son generados por conflictos, tensiones y desajustes.

En matemáticas todas las observaciones se recopilan al inicio de la investigación. El desarrollo de las teorías matemáticas responde a dichas observaciones, y al final del proceso los problemas y modificaciones serán teóricas. Los puentes de Königsberg de Euler son buen ejemplo de ello, se tenía un antecedente con Pascal y sus probabilidades de colorear mapas. Al igual que en la ciencia natural "la 'nueva' observación a menudo se refiere a algún fenómeno familiar cuya importancia no ha sido apreciada hasta ahora" (Kitcher, 1984, p. 154). En algunos casos, las dificultades de los enunciados matemáticos aparecen en el momento de su aplicación científica. Tanto en el cambio científico como en el matemático, se aprecia que la evolución del conocimiento no es necesariamente la respuesta a nuevas observaciones sino intentos de resolver “tensiones intra-teóricas preexistentes” (Kitcher, 1984, p. 155).

Otra tesis que se esgrime concibe el desarrollo acumulativo de la matemática. Lo que ha llevado a determinar que no existen las creencias falsas en la matemática, lo que por supuesto la historia ha mostrado que es un gran error. Se tiene la idea de que las teorías matemáticas parecen sobrevivir más tiempo que las teorías científicas. Por ejemplo, la geometría no euclideana no compite ni acabó con la geometría de Euclides, fue sólo una reinterpretación, y esto genera la idea de que no existe desarrollo acumulativo en la ciencia, pero sí en la matemática.

El punto de Kitcher es mostrar el innecesario paralelismo entre el cambio científico y el cambio matemático. Lo interesante son las transiciones por las que ha pasado la matemática a través de las diferentes etapas de la historia: “las matemáticas comienzan con el estudio de los fenómenos físicos, pero su objetivo es delinear las características estructurales de esos fenómenos” (Kitcher, 1984, p. 160). A partir de allí, se generan teorías que pueden ser modificadas para enriquecerse y susceptibles de comparación entre ellas. Tanto la nueva teoría como la antigua son asumidas como necesarias para estudiar diferentes estructuras. El papel de la comunidad científica es decidir cuál es la estructura que se adecua al fenómeno que se desea investigar y que puede tener una aplicación en la realidad.

Hemos observado como la teoría del conocimiento de Kitcher abandona el énfasis que se hace en el conocimiento particular, más que el general, es decir, la tradición tiende a olvidar que el conocimiento se da gracias al trabajo de una comunidad y no de un sujeto sólo construyendo todo el cuerpo de conocimientos de la matemática. Es claro para la mayoría que aprendemos de los demás, sin embargo, para muchos seguidores del apriorismo no es relevante, por el contrario, para Kitcher, este es un punto central de su teoría del conocimiento.

4.3 El desarrollo del conocimiento y la comunicación

Al desvirtuar el conocimiento *a priori*, estamos ante un escenario en el que el conocimiento se da gracias a la comunicación de los avances y desaciertos de los matemáticos de generación en generación.

Una de las tesis de Kitcher considera que gran parte del conocimiento del individuo es adquirido por su comunicación con los maestros. Lo que implica aceptar principios básicos y concepciones sobre la naturaleza del razonamiento matemático. Lo que lleva a una segunda tesis: mucho del conocimiento es adquirido gracias a las percepciones.

En este punto, entendemos percepciones en un sentido más amplio que la mera observación o experimentación propia de las ciencias naturales a las que ya hemos aludido. Las creencias que son aprendidas de los maestros, los libros o cualquier autoridad académica, son un tipo de percepción también. Las creencias se modifican y es allí donde Kitcher desea centrar nuestra atención.

Kitcher adoptará ideas análogas a las de Kuhn. Este último pensador, avanza de la idea empirista de un cuerpo de creencias a una idea de paradigma, que va más allá de la observación de índices en un momento dado.

> Después de que el descubrimiento había sido asimilado, los científicos se encontraban en condiciones de explicar una gama más amplia de fenómenos naturales o de explicar con mayor precisión algunos de los previamente conocidos. Pero este avance se logró sólo descartando ciertas creencias y procedimientos previamente aceptados y, simultáneamente, reemplazando esos componentes del paradigma previo por otros. (Kuhn, 1992, p. 112)

Los cambios científicos se han dado cuando se modifican más de un conjunto de enunciados. Kitcher, enfatiza su análisis del cambio científico en la concepción de la historia de un campo científico como la secuencia de sus prácticas. Para Kitcher, la práctica matemática consta de cinco componentes: “un lenguaje, un conjunto de enunciados aceptados, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como “importantes” y un conjunto de ideas metamatemáticas” (Kitcher, 1984, p. 163). Entonces el problema de explicar el crecimiento del conocimiento matemático es comprender la transición de una práctica a la siguiente y por qué ésta es una transición racional.

Ahora bien, el movimiento hacia una nueva práctica puede ser el resultado de que la anterior no estaba en equilibrio. En la matemática existe un cambio particular del leguaje que permite resolver los conflictos aparentes. Así, mientras en la ciencia se dice que una teoría fue reemplazada por otra, en la matemática lo que hay es un ajuste en el lenguaje. Entonces el cambio es acumulativo en matemáticas debido a la existencia de un tipo especial de transiciones interprácticas: "el conocimiento matemático se desarrolla a través de la modificación racional de las prácticas matemáticas" (Kitcher, 1984, p. 166).

Cuando hablamos de comunicación, es necesario hablar del lenguaje, el cuál es uno de los cinco componentes que menciona Kitcher en este cambio racional de la práctica matemática. En la ciencia tenemos un cambio conceptual estrechamente relacionado con el desarrollo del lenguaje: "nos referimos a un objeto con la intención de referirnos a aquello a lo que se refieren nuestros compañeros" (Kitcher, 1984, p. 166).

En este sentido y apoyados en la objeción epistemológica de Benacerraf al realismo, paralela a la objeción de la relación causal, en particular, encontramos el problema de la referencia. El realista sabe que los conjuntos existen e indaga por su naturaleza, "de acuerdo a la teoría causal, el éxito de la referencia a un tipo natural es logrado por medio de una cadena de comunicación desde el referente a un bautismo inicial" (Maddy, 1980, p. 166). Es decir, que uno de los miembros de la cadena podría adquirir una palabra gracias a la interacción causal con el enlace anterior, lo que significa, que puede aprender una nueva palabra porque la escucha, la lee o por cualquier medio sensorial, causada por el predecesor en la cadena. Esta cadena de comunicación funciona igual para los conjuntos que para las palabras.

Si se tiene una clase y se toma una muestra, entonces la palabra "conjunto" se refiere a la especie de que estas muestras son miembros. Lo importante de esta definición, es que no se necesita conocer los objetos para referirnos a ellos, por ejemplo, podemos decir que un objeto es de oro, sin saber que su número atómico es el 79, así mismo, el oro de la tierra o de otro planeta, o si no tiene aspecto de oro, todos ellos están incluidos en la clase "oro", lo importante es que son el mismo tipo de cosa. Igual sucede con los conjuntos.

Por tanto, no debemos dejar de lado ese tema fundamental en la enseñanza y en el trabajo diario de un matemático como es la notación, la cual, en matemáticas, tiene la función de abreviar expresiones existentes. La historia muestra cómo en muchos casos un avance o la invención de un nuevo concepto o proposición trae implícita una nueva convención, la cual se extiende a toda la comunidad académica. Para Kitcher, un cambio lingüístico puede aceptarse independiente de cualquier imagen de la realidad matemática.

Cada época tiene sus propios paradigmas, que a su vez fijan la referencia de los conceptos y términos asociados. Un ejemplo de ello es el concepto de función; que tiene una definición diferente tanto en los estudios de Leibniz como en los de Euler. La evolución de los conceptos consiste en reemplazar la referencia por medio de paradigmas. ¿Por qué los números imaginarios no fueron aceptados desde sus inicios? No porque no existiera el lenguaje matemático para ello, sino porque se tenía una idea diferente de lo que era un número.

Como ya se indicó el desarrollo del conocimiento matemático está compuesto por varios aspectos. Además del lenguaje, tenemos el que hace referencia al conjunto de enunciados aceptados en cada transición. Dichos enunciados son el conjunto de oraciones en un lenguaje propio de la época, que cualquier lector acucioso aceptaría. Estos cambios pueden ser de diferentes tipos. En un tipo "el corpus de los enunciados aceptados a veces conlleva el rechazo de lo que anteriormente se creía con firmeza" (Kitcher, 1984, p. 179). En el otro, se presenta una combinación entre las afirmaciones aceptadas y una transformación del lenguaje matemático. Un concepto (por ejemplo, el 'punto') podría tener un significado en el pasado, pero luego de la reafirmación de un lenguaje más "moderno" o profundo, cambia su 'definición' del pasado. Lo que se denominaría un cambio de perspectiva.

Los seres humanos no son sujetos cognoscentes solitarios, de hecho, muchas veces basan sus juicios en lo que dicen las autoridades. Muchos de los esfuerzos más significativos de la historia de la ciencia hubiesen sido imposibles sin algo de confianza en las autoridades, "el reconocimiento de nuestras asignaciones de autoridad debiera servir como el inicio de investigaciones epistemológicas" (Kitcher, 2001, p. 123). Para Kitcher, la atribución a la autoridad es uno de los componentes de la práctica matemática. Pero no sólo se tiene "confianza" en las autoridades o comunidades científicas, también en experimentos paradigmáticos e instrumentos: "como ocurre con los juicios particulares acerca de autoridades, aquí también las afirmaciones sobre casos individuales estarán respaldadas por criterios generales" (Kitcher, 2001, p. 123).

Todo esto constituye un componente denominado sabiduría experimental. Es importante conocer las opiniones del matemático acerca del método que describe su forma de proceder, tal como es importante su opinión sobre la verdad y la naturaleza de sus objetos de estudio. Por tanto, no existe un conjunto de reglas metodológicas que se apliquen en todas las ciencias todo el tiempo. No se tiene una metodología universal: "Kuhn y Feyerabend captaron la importante idea de que diferentes comunidades de científicos, trabajando en la misma área, pueden organizar los aspectos de la naturaleza que les interesan de maneras distintas" (Kitcher, 2001, p. 140).

Una concepción realista de la ciencia implica que los científicos descubran cosas de un mundo que es independiente de la cognición (mundo 2), a su vez que formulen enunciados verdaderos, usando conceptos, es decir, que recurran al lenguaje (mundo 3) para desarrollar esquemas aprendidos de las dependencias cognitivas.

Otro componente tiene que ver con las preguntas aceptadas como relevantes. Y aquí tenemos dos tipos de preguntas: las que son inducidas por el lenguaje y las que son generadas por la modificación de los enunciados aceptados.

Cuando la respuesta a una pregunta es veraz, la comunidad académica la inserta al cuerpo de conocimientos existentes y "rápidamente se hacen nuevas versiones de preguntas estándar" (Kitcher, 1984, p. 203). Es decir, si una nueva respuesta satisface teoremas o definiciones anteriores, se formulan nuevas preguntas, las cuales son análogas a las preguntas tradicionales sobre problemas de un tipo similar. Esto conlleva, en muchas ocasiones, la modificación del lenguaje, dado que se hace necesario el uso de nuevas expresiones para referirse a otros temas de sus predecesores. De este "proceso" se infiere una profunda relación entre responder una pregunta y presentar un teorema.

Como se ha mencionado, la matemática tiene un carácter acumulativo, lo que es reflejado en muchas preguntas que no se han podido resolver, la historia de la matemática "está llena de casos en los que los matemáticos respondieron preguntas sin poder probar los teoremas asociados" (Kitcher, 1984, p. 186). Una de las causas de esta irresolución está asociada con la evolución del lenguaje matemático, cuya insuficiencia, a veces, por analogía, genera "nuevas preguntas por analogía con las preguntas anteriores" (Kitcher, 1984, p. 187). En este contexto, la modificación del lenguaje matemático provoca la extensión de antiguas preguntas. En algunos casos, los matemáticos retoman preguntas que no fueron sustanciales para sus predecesores, mientas que, en otros casos, preguntas que para los antiguos eran centrales, resultan periféricas para los contemporáneos.

4.4 La intuición en el pensamiento de Kitcher

Como hemos estudiado en las secciones anteriores, Kitcher en su libro *The Nature of Mathematical Knowledge*, se opone al conocimiento *a priori*. Para los realistas los axiomas son conocimiento *a priori*. Kitcher usa la historia para mostrar que los axiomas requirieron de una serie de pasos anteriores y que no son absolutamente independientes de los sentidos. Más aún, defiende la tesis de acuerdo con la cual el conocimiento es producto de la construcción de una comunidad académica y que para llegar a una teoría o concepto han intervenido muchos matemáticos.

En este mismo sentido, en el capítulo "intuición matemática" del mencionado libro, Kitcher sostiene que, aunque no lo afirma directamente, Gödel anima a creer que la intuición matemática brinda un conocimiento *a priori*. Dado que la intuición matemática es un proceso no empírico, se pueden presentar confusiones que la consideran por fuera de todo tipo de experiencia. Ahora bien, la propuesta de Gödel se ha convertido en un desafío teórico que ha influido en discusiones recientes sobre el platonismo (como lo revisamos en el capítulo sobre el dilema de Benacerraf).

Para Kitcher, el constructivismo y el realismo se equivocan al considerar que el conocimiento puede ser *a priori*. Y ambos usan la intuición a su manera para sustentar dicha afirmación, lo que para Kitcher no se logra demostrar en ningún momento. La intuición no hará el trabajo que el apriorismo exige de ella. Y es que lo que parece claro y evidente para algunos, no lo es para todos. Las creencias de los matemáticos no siempre están sustentadas en hechos matemáticos. Las creencias matemáticas son sensibles a los desafíos sociales. No todo lo que el individuo cree es correcto, dado que puede tener una buena cantidad de motivos para su creencia y, a veces, esos motivos no se corresponden con la lógica. Las creencias se extienden y modifican según la cantidad de observaciones y experimentos realizados.

Para Kitcher, un platónico que quiera ser apriorista debe evitar concesiones que asumen que un proceso intuitivo que lleva a cabo una persona puede continuar con otra persona. Sin embargo, "esa intuición es prerrogativa de matemáticos talentosos (quizás excepcionales). Quizás podamos usar el testimonio de los matemáticos para mostrar que, para algunas personas, posiblemente una pequeña minoría, la intuición sirve como un modo de conocimiento básico" (Kitcher, 1984, p. 62). En particular, cuando algunos matemáticos hablan de intuición, están considerándola en el contexto de la resolución de problemas.

Para Gödel, un matemático realista, la intuición es un proceso empírico similar al de la ciencia natural. Pero esta postura ha traído críticas y dificultades tal y como lo muestra el dilema de Benacerraf. El dilema deja en evidencia las dudas sobre el proceso de Gödel para generar conocimiento. Frente a la postura de Gödel, Kitcher se plantea preguntas tales como: "¿tenemos la capacidad de someternos a tales procesos (intuitivos)?, ¿podría este tipo de proceso producir conocimiento *a priori*?, ¿cómo sabemos si tenemos una facultad gödeliana de intuición?" (Kitcher, 1984, p. 60).

Para los platónicos, los procesos de intuición forman parte de las entidades teóricas, es decir, se cree en la intuición porque se tiene una teoría particular. Pero bien se sabe que las teorías son susceptibles de cuestionamiento. Al ser considerada como un ente teórico, la intuición no puede ser un proceso que se identifique independientemente de los objetos abstractos y, sin embargo, los matemáticos creen que la intuición existe, y de ser así, la matemática sólo podría ser posible para los matemáticos talentosos. Solo para una minoría la intuición es considerada como un modo de conocimiento básico.

Aceptar que los matemáticos experimentan intuiciones platónicas, implica cuestionarse sobre los procesos actuales y preguntarse si son diferentes a los de sus predecesores, incluso, tal vez creer que los matemáticos anteriores estaban equivocados, pero esto no es así: "no podemos discriminar las intuiciones de los procesos conocidos (después de hecho) para producir creencias falsas" (Kitcher, 1984, p. 61).

Es común elogiar a grandes matemáticos por sus intuiciones, sin embargo, estas se dan en la resolución de problemas y no en el conocimiento de los axiomas, “no pensamos en el matemático como contemplando los objetos matemáticos y generando una idea fructífera. Las intuiciones de las que suelen hablar los matemáticos no son las que exige el platonismo” (Kitcher, 1984, p. 61). Es decir, que, aunque los axiomas nos parezcan “obvios” la creencia en ellos no es generada por un proceso del cual aprendamos directamente los objetos matemáticos. Por tanto, no es posible afirmar que alguien tenga un conocimiento de cómo obtener la comprensión de los objetos matemáticos, incluido Gödel. Los matemáticos talentosos tienen la habilidad de abordar el problema desde un nuevo punto de vista. Pueden “intuir” que cierta “maniobra” les permitirá evaluar una integral o deducir ciertas propiedades de un sistema por analogía con otro, su éxito radica en la capacidad de discernir rasgos de la realidad matemática.

Ahora bien, para el platonismo es relevante la afirmación de Gödel “los axiomas ejercen una fuerza que nos hace tenerlos por verdaderos”. Esto parece implicar la presencia de un sentimiento de familiaridad con los principios básicos y en particular para Gödel “señala el hecho de que nuestra creencia en ellos ha sido generada por una intuición de la realidad matemática. Este estado de ‘familiaridad’ podría usarse para identificar la ocurrencia de intuiciones en nosotros” (Kitcher, 1984, p. 62). Sin embargo, para Kitcher, que los axiomas nos parezcan no significa que la creencia en ellos sea generada por un proceso que nos permite “captar” directamente los objetos matemáticos.

La intuición matemática es un proceso que involucra tanto el mundo real (físico o intelectual) del matemático y el conocimiento generado de este proceso no está exento de error (los objetos de la matemática son creaciones de la mente humana y validados por una comunidad científica) y estos errores podrían tener como consecuencia creencias falsas. Al igual que en el mundo físico, la experiencia es la encargada, en muchos casos, de mostrar en el mundo de las matemáticas si las creencias son falsas o no:

> La existencia de los engaños a los sentidos no es un obstáculo para nuestro conocimiento de la física; es un obstáculo para la tesis de que los procesos sensoriales que realmente garantizan nuestras creencias

podrían continuar haciéndolo, sin que importe qué experiencia fuéramos a tener. Del mismo modo, las paradojas de la teoría de conjuntos no desafían la posibilidad del conocimiento matemático, sino que amenazan el apriorismo. (Kitcher, 1984, p. 63)

Kitcher no comparte la idea, expresada por algunos, que afirma que la intuición proporciona un conocimiento irrefutable de las matemáticas. La historia de la matemática nos proporciona varios episodios en los que los matemáticos han aclamado alguna cosa como evidentemente intuitiva y al final ha resultado ser falsa. Por ejemplo, Frege, Dedekind o Cantor avanzaron en un principio de "comprensión universal" tomando alguna propiedad para determinar un conjunto. Así mismo Gauss, Cauchy y otros matemáticos del siglo XVIII, se extraviaron al creer en la auto-evidencia de la ley de continuidad, enunciando que lo que va hasta el límite, se sostiene en el límite, lo que resultó una falacia natural. En suma, afirmará Kitcher, la historia de la matemática muestra que la intuición (de la que hablan los platónicos) es sospechosa.

Aunque en algunos casos la intuición haya resultado falsa, la consideración de las situaciones en las que la conjetura llevó con el tiempo a resultados verdaderos tiene una justificación, en lo que Kitcher denominará *transiciones interprácticas*. Por ejemplo, para los aprioristas, ampliar la noción de línea recta a geodésicas, parece algo contra-intuitivo, y esto sucede porque la rigidez de la geometría euclidiana parece ser arbitraria para decidir sobre la terminología de los nuevos dominios, tales como la mecánica cuántica o el cálculo de conectores (Thompson, 1998, p. 309). Esta perspectiva apriorista, ignora la evolución de los conceptos, así como las modificaciones de los esquemas intuitivos, dado que estos reajustes suceden cuando los nuevos conceptos son introducidos en los dominios del discurso.

Esta reticencia ante los nuevos esquemas, no impide que los nuevos sistemas conceptuales se incorporen a los antiguos y se produzca un desarrollo inevitable, aunque afirmen en su defensa, que los nuevos reajustes de los esquemas intuitivos luego de una conjetura, no son más que juegos del lenguaje, en un idioma diferente y aún más peligroso, "lo que es duro, sin embargo, es que mientras los patrones que estamos intentando reconocer son codificados como esquemas, los esquemas que estamos dispuestos a aplicar están pobremente sintonizados, no son adecuados para el contexto total o en su defecto cuando los proyectamos en nuevas situaciones" (Thompson, 1998, p. 313).

El carácter de la matemática ha sido transformado por las sucesiones de transiciones racionales. Muchos de los patrones de inferencia racional explicados en los apartados anteriores y sustentados por Kitcher, gracias a la historia de la matemática, llevan al matemático creativo a innovar y extender el conocimiento que le ha sido transmitido por sus maestros, libros o autoridades académicas. Para Kitcher, debe existir algún método para la "locura" de los matemáticos y considera que es filosóficamente importante explicarlo. ¿Será este método la intuición? Nosotros creemos que sí. Entendiendo la intuición no al modo de los platonistas sino como la explicamos en el primer capítulo del presente documento.

Volviendo con las *transiciones interprácticas*, uno de sus componente hace referencia a la metamatemática, donde se abordan las consideraciones que tienen los matemáticos sobre su campo de conocimiento: "las ideas acerca de cómo se hacen las matemáticas pueden ser simplemente inculcadas en el entrenamiento temprano sin ningún reconocimiento formal de su naturaleza o defensa de sus méritos" (Kitcher, 1984, p. 189). Aquí se incluyen los estándares para la prueba, el alcance de las matemáticas, el orden de las disciplinas o el valor de los tipos de investigación. La metamatemática articula las limitaciones de la investigación matemática.

Ahora bien, un matemático se enfrenta a un problema, para resolverlo recurre a los conocimientos que le han sido "transmitidos" de sus predecesores por las autoridades académicas. Pero es un proceso interno e individual lo que lo puede llevar a la articulación y reestructuración de toda esa información. Sin embargo, surge la pregunta ¿Kitcher considera que la creatividad y genio de grandes matemáticos también son un proceso colectivo generado por las transiciones interprácticas? Teniendo en cuenta los componentes de la práctica matemática considerados por Kitcher, podríamos responder afirmativamente esta pregunta.

Un matemático o un grupo propone una solución a una pregunta planteada por la comunidad académica, la resolución introduce un nuevo lenguaje, algunas proposiciones nuevas "que no solo no pueden estar respaldadas por razonamientos dados previamente, sino que incluso amenazan con contradecir los enunciados aceptados” (Kitcher, 1984, p. 193). Algunos de estos razonamientos podrían no integrarse al sistema que prevalece. Aunque se presenten algunas deficiencias, si se logran resolver las preguntas importantes planteadas, entonces se inserta en la práctica. “En el curso de estas actividades, se pueden agregar muchos razonamientos nuevos y poco rigurosos” (Kitcher, 1984, p. 193). Este matemático o grupo de matemáticos usarán el lenguaje para darle rigor a los razonamientos poco rigurosos que llevaron a resolver las preguntas importantes, tratando de hacer una presentación sistemática de los resultados acumulados.

Algunos consideran que los avances o grandes “descubrimientos” son producto de un solo individuo, Kitcher muestra que esto es resultado de todo un proceso donde cambia el lenguaje, aparecen nuevos axiomas, se derrocan puntos de vista matemáticos anteriores, se usan mecanismos no siempre rigurosos, lo que puede llevar a considerar que la nueva práctica es absolutamente diferente a la que inició el proceso. Ahora bien, ¿cuál es el papel individual de los grandes matemáticos? ¿Dónde quedaría la creatividad, el genio o el talento? Tal vez ellos, a diferencia de sus predecesores o sus contemporáneos, aunque todos contaran con la misma información, tuvieron un proceso interno diferente que los llevó a reorganizar las ideas nuevas con las antiguas y ser capaces de hacer la diferencia. Teniendo en cuenta las características expuestas en el primer capítulo, podríamos llamar a este proceso interno: intuición.

De nuestro recorrido anterior podemos sostener la siguiente tesis: para Kitcher, la intuición matemática es usada por los grandes matemáticos al resolver problemas, no en el momento de la creación de conceptos ni de la “búsqueda” de los axiomas.

Para Kitcher, la intuición descrita por el platonismo (o el realismo) no lleva al conocimiento (o descubrimiento) de nuevos axiomas (en el sentido de Gödel), sirve, con mayor frecuencia, para resolver problemas (más cercano a la idea de intuición de Poincaré). Un matemático talentoso (o un estudiante muy adelantado) observa un problema desde un punto de vista diferente, puede decirse que “intuye” que una decisión particular puede ayudar, por ejemplo, a evaluar una integral o a reducir un problema de la teoría de números a resultados previos de la teoría de funciones.

Esta idea de intuición de Kitcher, puede conectarse con la noción de intuición que hemos estado trabajado, en la que la intuición es un proceso, que permite transformar ideas difusas y “desordenadas” (que se dan en la conciencia luego de intentar resolver un asunto que tiene su origen en la realidad del matemático) en elementos claros como conceptos o enunciados matemáticas, que a la postre conducirán a la resolución de un problema que deberá ser avalado por la comunidad académica.

Hemos evidenciado, a lo largo de *The Nature of Mathematical Knowledge*, que para Kitcher es incorrecto usar la intuición como forma de acceder al reino de las ideas o como método de conocimiento de los axiomas. Su investigación se centra en si “un tipo particular de proceso estaría disponible para una persona con los tipos de facultades que las personas realmente tienen, no si tales procesos estarían disponibles para criaturas cuyas capacidades para adquirir conocimiento aumentan o disminuyen” (Kitcher, 1984, pp. 26–27).

Así, la intuición en el pensamiento de Kitcher podría interpretarse como el proceso que le permite a un matemático luego de haber recibido o estudiado los trabajos de sus predecesores, reestructurar sus imágenes propias y las del contexto de su época, para generar ideas novedosas que puedan cambiar las ya existentes con el lenguaje y la teoría apropiadas.

Algunos descubrimientos y avances en la matemática han sido el producto de conjeturas, las cuales se han producido por la asociación informal y no estructurada, en todos los casos, de métodos analíticos o cálculos deliberados. Entonces “cuando los matemáticos hablan de intuición, generalmente lo hacen en el contexto de discutir la resolución de problemas. Los grandes matemáticos creativos, como Euler, Riemann y Ramanujan, son a menudo elogiados por su capacidad de intuición” (Kitcher, 1984, p. 61).

Lo que se admira es la capacidad que tienen para reorganizar o configurar a partir de información previa (obtenida por la experiencia física o matemática) unas opciones nuevas de solución para abordar y resolver un problema. Es decir, lo que se evidencia en estos genios es una habilidad extraordinaria que permite obtener una singular y fructífera Gestalt de un problema.

> El talentoso matemático mira un rompecabezas recalcitrante desde un nuevo punto de vista, "intuyendo" que una maniobra particular ayudará con la suma de una serie o la evaluación de una integral, que

> un problema en la teoría de números se reduce a un resultado de la teoría de funciones. El secreto de su éxito no es una habilidad especial para discernir las características de la realidad matemática. (Kitcher, 1984, p. 61)

Cuando se elogian grandes matemáticos (o estudiantes muy brillantes) por sus 'poderes intuitivos', en realidad a lo que se hace referencia es a su grandiosa capacidad para resolver un problema: "la intuición de este tipo suele ser un preludio del conocimiento matemático. Por sí mismo no justifica la creencia, aunque puede desempeñar un papel heurístico importante y también servir como parte de un proceso de justificación" (Kitcher, 1984, p. 62). Es decir, la intuición se "ejerce" sobre la resolución de problemas y no para el conocimiento de los axiomas.

Esta habilidad extrema lleva a una sensación de evidencia, que algunos consideran como producto de la intuición. Para Kitcher esta interpretación no es acertada. En realidad esta sensación de lo obvio es el "resultado del ejercicio de esas habilidades conceptuales que hemos adquirido [...] O tal vez se deriva del adoctrinamiento que recibimos en nuestra juventud matemática" (Kitcher, 1984, p. 61). Las intuiciones son introducidas por la epistemología y no existe razón para creer que un matemático brillante (incluido Gödel) tenga una facultad "especial" para tener intuiciones.

En Kitcher, la intuición está implícita en el quehacer de los matemáticos (o incluso de los estudiantes), es decir, es un proceso que se presenta en la práctica matemática. Uno de sus componentes tiene que ver con el planteamiento de preguntas acertadas cuyas respuestas llevan a que la práctica tome uno u otro sentido. Este planteamiento y posibles respuestas podemos interpretarlo como la resolución de un problema. Y aunque se trabaje en conjunto, como miembro de una comunidad, la forma como se abordan las preguntas o se plantean las soluciones, también tiene un componente individual.

Otro componente relacionado con el cambio matemático es la respuesta a las preguntas, y un rastreo profundo de ellas podría llevarnos a su fuente práctica. En alguna de las etapas del desarrollo matemático, los matemáticos han evidenciado el poder de idealizar los temas y su comprensión sobre este poder los hace plantear más preguntas sobre operaciones que no están ligadas con la practica real del individuo: "continuamente surgen nuevas preguntas a medida que se modifica la cuenta del tema ideal, a medida que se agrega un nuevo lenguaje y se aceptan nuevos enunciados" (Kitcher, 1984, p. 202).

El genio y talento son necesarios para formular buenas preguntas y la historia nos muestra que existen dos tipos de preguntas en el contexto de la práctica matemática. Unas, denominadas intrínsecas, cuya respuesta permiten avanzar en el conocimiento matemático, acercándolo a nuevas discusiones. Otras, que tienen un valor más instrumental, cuya respuesta permite abordar otras preguntas. Cuando la respuesta a una pregunta es acertada y probada su veracidad, inmediatamente pasa a ser parte de los enunciados verdaderos, insertándose en el conjunto de razonamientos aceptados.

Plantear una buena pregunta puede ser el resultado de un análisis individual del matemático que actualizó el conocimiento transmitido por las autoridades académicas y su propio razonamiento reorganizándolo para tal fin. ¿Es la intuición ese proceso individual necesario que incluye el conocimiento de los predecesores, el contexto y la validación dentro del campo matemático y que permite al matemático ofrecer aportaciones a las nuevas prácticas? Nosotros creemos que Kitcher podría responder afirmativamente a esta pregunta.

5. La intuición en la práctica matemática

La aplicación de las matemáticas al campo empírico, que se ha considerado en capítulos anteriores como mundo 1 (Popper & Eccles, 1993), es una asunto que siempre ha intrigado a quienes piensan sobre la ciencia, dado que "mirar el mundo con ojos matemáticos ha facilitado, en más de una ocasión, enormes avances en la ciencia" (Alcolea, 2006, p. 242). Algunos han usado este hecho innegable para concluir que los objetos de la matemática son indispensables. Sin embargo, sólo lo son en tanto que objetos que sirven para cumplir los objetivos de la ciencia.

Por otro lado, también en capítulos anteriores y siguiendo a Popper & Eccles, estudiamos que los objetos matemáticos pertenecen a un mundo 3, el mundo de los conocimientos objetivos. La comprensión de los objetos del mundo 3 debe ser analizada en términos de la construcción o reconstrucción de los objetos de este mundo. (Teniendo en cuenta que la intuición es un proceso, es posible asumirlo como una reconstrucción, un esquema de organización, de construir y "ordenar" lo nuevo a partir de lo ya conocido). A diferencia de Platón, los pensadores Popper y Eccles no aceptan la existencia de un órgano del sentido, sino de una facultad para razonar y argumentar: "según mi manera de ver las cosas, podemos comprender la captación o comprensión de los objetos del Mundo 3 como un proceso activo. Hemos de explicarla como la construcción o recreación de dicho objeto" (Popper & Eccles, 1993, p. 50).

Siguiendo este razonamiento, para resolver un problema, que hace parte de la práctica cotidiana de un matemático; se deben ensayar distintas soluciones, redescubrir hasta entender el problema, así se entenderán las teorías una vez se haya comprendido la solución que ha inventado una teoría. Al entender las suposiciones que se presentan, el matemático puede comprender y reconstruir las demostraciones planteadas, "en todos estos casos, el conocimiento se torna 'intuitivo' tras haber adquirido la sensación de que podemos realizar el trabajo de reconstrucción a voluntad, siempre que queramos" (Popper & Eccles, 1993, p. 51). Lo anterior no supone la existencia de "ojos de la mente", sólo supone una capacidad para construir objetos, en especial, de carácter lingüístico, pero esta habilidad es resultado de la práctica. Lo fundamental es que aprendamos a hacer cosas y sólo aprenderemos haciéndolas en situaciones apropiadas. Y esto incluye situaciones culturales como aprender a leer y a argumentar.

El proceso de aprendizaje de los objetos del Mundo 3 es social y cultural. Poseemos una curiosidad innata que nos hace activos resolutores de problemas. En el campo cultural somos dados a aprender a hablar y luego a escribir, "así pues, aprendemos a construir objetos del Mundo 3, a comprenderlos y a 'verlos', no por visión o contemplación directa, sino mediante la práctica, mediante la participación activa". (Popper & Eccles, 1993, p. 53). Así mismo, debemos comprender que es posible que algunos problemas no se puedan resolver, es decir, a pensar de forma más abierta. A este mundo 3 pertenecen tanto las teorías como las relaciones lógicas, "los objetos del Mundo 3, incluso las posibilidades lógicas que no han sido examinadas plenamente, pueden actuar sobre el Mundo 2, es decir, sobre nuestras mentes, sobre nosotros, y nosotros, a su vez, podemos actuar sobre el Mundo 1" (Popper & Eccles, 1993, p. 53).

Para algunos, los enunciados de la matemática son verdaderos porque se aplican dentro de un contexto determinado en una matemática estándar aceptada por la comunidad académica. Para otros, lo importante son las estructuras y no los elementos que componen estas estructuras: "Para Quine y Popper, como para Kreisel, la orientación de las matemáticas es objetiva, pero también factual, porque se encarga de establecer hechos verdaderos sobre el mundo matemático real, un mundo que sobrepasa nuestra comprensión cognitiva" (Alcolea, 2006, p. 253).

De la cita podemos establecer la necesidad del mundo 3, para comprender la interrelación con los objetos de la matemática. Por otro lado, y como enunciamos en párrafos anteriores, la intuición entendida como un proceso dinámico, podría en este esquema de Popper entenderse como aquella que atraviesa y conecta los tres mundos. Para ello tengamos en cuenta los argumentos usados sobre la relación entre estos mundos:

1. Los objetos del mundo 3 son abstractos pero reales, dado que son herramientas que permiten cambiar el mundo.
2. Los objetos del mundo 3 tienen influencia sobre el mundo 1 dado que son creaciones humanas, y a su vez, la forma de "captarlos" o aprenderlos implica al mundo 2. Lo que muestra una interacción entre los 3 mundos.
3. Los objetos del mundo 3 son tan reales como los procesos del mundo 2. (Si quisiéramos hacer una relación con nuestra idea de intuición, podríamos hacer la siguiente "secuencia", la intuición es un proceso del mundo 2 que

puede “nacer”, algunas veces, en el mundo 1, utiliza los objetos del mundo 3 para luego insertarlos, en muchas aplicaciones prácticas, nuevamente en el mundo 1).

Algunas veces se hace hincapié en que el hombre es un animal constructor de herramientas. Con todo, si por herramientas se entiende objetos materiales, entonces resulta en extremo interesante constatar que ninguna de las herramientas humanas está determinada genéticamente; ni siquiera el palo. La única herramienta que parece tener una base genética es el lenguaje. El lenguaje es inmaterial, y aparece bajo las formas físicas más variadas; es decir, bajo la forma de sistemas de sonidos físicos muy diferentes. (Popper & Eccles, 1993, p. 56)

Los diversos lenguajes son productos humanos, son objetos culturales generados por necesidades culturales y mediados por las capacidades que se han establecido genéticamente. Todos los niños adquieren un lenguaje gracias a un trabajo activo. Podría decirse que la educación de un niño es producto de este mudo 3. Las percepciones no son algo dado, son construcciones y son el resultado de un proceso activo. (En el caso de aprender matemáticas estas no son dadas, son aprendidas y las creaciones han sido producto de un proceso de intuición). Algunos modos de comportamiento verbal permiten conectar creencias con otras, las cuales pueden ser aprendidas en los colegios: “estas disposiciones heredadas o aprendidas son lo que algunas personas llamarían ‘nuestras intuiciones lógicas’. Admito que existen, frente a lo que ocurre con los objetos en el Mundo 3” (Popper & Eccles, 1993, p. 88).

El lenguaje es uno de los aspectos esenciales en la práctica matemática de Kitcher, así como los enunciados aceptados, las preguntas aún sin resolver, los razonamientos, los puntos de vista metodológicos y el orden de las disciplinas, entre otros problemas. Para Kitcher, sólo existen operaciones humanas reales; no entidades misteriosas ideales. Para él “el objetivo de la matemática es proporcionar descripciones idealizadas de la estructuración de la experiencia” (Kitcher, 1988b, p. 530). Una vez esta empresa se ha puesto en marcha surgen preguntas, que aparentemente no tienen aplicaciones reales (mundo 1), pero que sí corresponden al cuerpo de conocimiento de la matemática (mundo 3), llevando a otra meta de las matemáticas: “la comprensión intelectual”. Por tanto, aparecen dos objetivos epistémicos de la matemática: producir historias idealizadas que permitan responder a la necesidad prácticas de las ciencias y una comprensión sistemática de las matemáticas que responda a preguntas generadas en el seno de la propia práctica matemática. El proceso de reinterpretación en matemáticas parece que nunca se detendrá, continuará adicionando modificaciones al marco conceptual, impidiendo que ella misma sea una disciplina estable.

A continuación, presentaremos algunas de las ideas de Kitcher sobre la práctica matemática y finalmente identificaremos la intuición como elemento importante en uno de los componentes del hacer de un matemático: la resolución de problemas.

5.1 La práctica matemática en la obra de Kitcher

El debate contemporáneo sobre filosofía de las matemáticas, gira en torno a los problemas gnoseológicos y ontológicos planteados por Benacerraf en sus dos artículos clásicos influyentes, su objetivo fue explicar cómo podemos tener acceso a los objetos matemáticos (Mancosu, 2016). Al enmarcar la discusión, solamente, en la teoría del conocimiento matemático, como observamos en el tercer capítulo, se dejó por fuera lo referente a la práctica matemática. (Mariño & Peña-Páez, 2019, p. 74)

Para la versión ontológica del realismo, los objetos matemáticos existen. Para la versión semántica los enunciados matemáticos son verdaderos y no dependen de convenciones ni lenguajes. Para la epistemología de la teoría de conjuntos, se requiere algo más que hechos acerca de los conjuntos particulares: es necesario revisar sus interrelaciones y cómo son conocidas de algún modo “cuasi-perceptual” o “intuitivo”. Al incluir todo ello algunos de los axiomas básicos de la teoría de conjuntos cuya evidencia es intuitiva, “nos queda el problema de cómo estas verdades generales básicas pueden ser conocidas” (Maddy, 1980, p. 184).

Los partidarios de la teoría realista de conjuntos afirman que la existencia de los conjuntos es independiente del pensamiento humano y que dicha teoría de conjuntos es la ciencia de semejantes entidades. El principal representante de esta corriente es Gödel quien ha sostenido una analogía entre la ciencia matemática y la física (como estudiamos en el capítulo 2). Asegura la práctica matemática guarda una relación con las matemáticas de la vida cotidiana, tal como la física teórica se relaciona con la ciencia física y el sentido común con el conocimiento del mundo:

> La percepción sensorial nos da conocimientos simples de hechos acerca de los objetos físicos, y una facultad de intuición matemática nos da el conocimiento de los conjuntos, de los números y de algunos de los axiomas simples concernientes a ellos. (Maddy, 1980, p. 163).

En ambos casos existe un proceso inobservable, el cual está detrás de la intuición matemática y permite explicar, predecir, y sistematizar los hechos elementales y al final juzgar si son o no exitosos.

Aunque Gödel tenía esperanza en la fenomenología para encontrar un método de solución de los problemas abiertos, esto no fue posible, puesto que "lo que fomenta la visión fenomenológica, entre otras cosas, es el reconocimiento de la existencia y la importancia del significado y los conceptos informales en la práctica matemática" (Tieszen, 2002, p. 377). Es decir, lo que aporta la fenomenología es una visión de la práctica matemática que desarrolla la comprensión del significado de los conceptos matemáticos por medio de actividades como abstraer, generalizar, especificar, hacer analogías, idealizar, formalizar, axiomatizar y permitir la libre variación de la imaginación. Esto da un sentido menos reduccionista que aquellos que sostenían que la matemática es un conjunto de tautologías sin contenido.

Ahora bien, cuando el centro de la filosofía matemática es cómo se *accede* al conocimiento, los matemáticos toman posturas al respecto; una de las más defendidas es el platonismo o la doctrina *a priori*. Kitcher se aleja de esta doctrina, y en su intento de postular una nueva teoría del conocimiento, se encuentra con la importancia de tratar temas como la historia y la práctica matemática.

En *The Nature of Mathematical Knowledge,* Kitcher propone una teoría sobre el conocimiento matemático, intentando entender cómo obtienen su conocimiento tanto los expertos como la persona del común. Las discusiones filosóficas de los matemáticos concluyen que el conocimiento de las verdades matemáticas difiere del conocimiento de las proposiciones de las ciencias naturales, esta perspectiva implicaría que la naturaleza del conocimiento matemáticos es diferente al de cualquier otra ciencia. Por ejemplo, no es habitual que los matemáticos realicen experimentos para corroborar sus resultados, y esta situación conduce a la creencia de que el conocimiento matemático se obtiene de una fuente diferente a la experiencia sensorial, es decir, se asume que el conocimiento matemático es *a priori*.

Justamente, esta es la doctrina que Kitcher abandona y su teoría del conocimiento rechaza el apriorismo matemático. Aunque algunos filósofos de la matemática han intentado controvertir la mencionada doctrina, recurriendo al empirismo, ninguna de ellas ha logrado explicar cómo un sujeto adquiere su conocimiento matemático. La crítica de Kitcher no es que la teoría sea equivocada, sino que está incompleta.

Otro punto que diferencia a Kitcher de las doctrinas anteriores, es que abandona el énfasis que se hace en el conocimiento particular, más que el general, es decir, la tradición tiende a olvidar que el conocimiento se da gracias al trabajo de una comunidad y no de un sujeto sólo construyendo todo el cuerpo de conocimientos de la matemática. Es claro para la mayoría que aprendemos de los demás, sin embargo, para muchos seguidores del apriorismo no es relevante, por el contrario, para Kitcher, este será un punto central de su teoría del conocimiento.

Un tercer punto de ruptura con los enfoques habituales; consiste en su énfasis en el desarrollo histórico de las matemáticas. Para muchos filósofos de la matemática, la historia ha sido epistemológicamente irrelevante, puesto que suponen que el proceso histórico a través del cual las matemáticas ha sido elaborada, es producto de esfuerzos individuales. Entonces Kitcher explicará el conocimiento de los sujetos, al rastrear el conocimiento de sus antecesores, es decir, asumirá que el conocimiento del individuo se basa en el conocimiento de las autoridades de las comunidades que han influenciado a dicho individuo, "podemos prever que el conocimiento matemático de alguien en el presente se explicará por referencia a una cadena de conocedores anteriores" (Kitcher, 1984, p. 5).

Su intención es comprender cómo inicia esta cadena de conocedores y, por tanto, apela a la percepción ordinaria, es decir, que el conocimiento matemático surge del conocimiento primitivo adquirido por la percepción.

Kitcher se adelanta a críticas de su enfoque de la teoría del conocimiento y se pregunta si es posible que, de ese comienzo primitivo, surja el presente cuerpo de conocimiento abstracto, y su respuesta es: sí. Para argumentar sus afirmaciones mostrará que existen patrones inferenciales racionales que llevan al matemático creativo a extender su conocimiento más allá de lo heredado por las autoridades de su pasado. Gracias a la suma de los esfuerzos racionales, el conocimiento de la comunidad matemática aumenta de generación en generación.

Centrar el análisis de la historia de las matemáticas, en mostrar cómo crece el conocimiento matemático, implica indagar por aspectos que habitualmente son ignorados, que en contraste sí se revelan en la historia y la filosofía de las ciencias, donde surgen discusiones sobre los tipos de inferencias, su rol en las elecciones teóricas y la interacción entre historia y filosofía. El foco pasa de cómo reconstruir las pruebas elaboradas por los grandes matemáticos a cuestiones tales como, por qué cambia el lenguaje matemático, de dónde provienen ciertas preguntas matemáticas o cómo se modifican las pruebas.

Bajo el marco esbozado, es evidente que Kitcher rechaza el apriorismo matemático y le atribuye a la comunidad actual como a las anteriores un significado epistemológico, generalmente no acreditado. Esta teoría del conocimiento puede ser elaborada desde la realidad matemática, explicando cómo la experiencia perceptiva de los inicios, gracias a patrones de transición racional ha llevado a las matemáticas de hoy, apuntando a una nueva historiografía de las matemáticas.

Cabe aclarar que el empirismo defendido por Kitcher, no está limitado a una visión utilitarista de las matemáticas, a pesar de que, como se ha explicado las raíces del conocimiento matemático están en la experiencia perceptiva y que éstas mismas experiencias simples dan lugar a elementos de reconocido valor práctico, no debe asumirse que el desarrollo de las matemáticas conserva el significado pragmático que se acumulan en los rudimentos. Más aún, las ciencias naturales muestran, que problemas que comienzan con hechos prácticos, pueden, en ocasiones, acabar en teorías que tienen poca utilidad práctica. En suma, la posición constructivista de Kitcher defiende que las matemáticas son una ciencia idealizada de las operaciones que se realizan en objetos del ambiente, específicamente, las matemáticas ofrecen una descripción idealizada de las operaciones.

Para Kitcher, algunos conceptos o nuevos principios son adoptados originalmente, por los motivos inadecuados, y es sólo después, que pueden ser probados, al ser exhibidos en una relación diferente a las presentadas en las matemáticas previas, esta situación implica que, en algunos casos, el orden epistemológico puede divergir del orden histórico, lo importante es identificar y describir las secuencias que conducen al conocimiento matemático. Esta situación es ejemplificada con las afirmaciones sobre los números complejos, que fueron aceptados inicialmente por razones muy pobres, pero que recientemente pueden ser utilizados para resolver una variedad de problemas matemáticos tradicionales.

De las consideraciones anteriores, surge la pregunta de cómo puede ser posible la creatividad en matemáticas, puesto que de las ideas expuesta por Kitcher pareciera que el matemático individual es un subordinado de la autoridad de la comunidad académica, sin embargo, la creatividad es posible de dos modos diferentes. Un primer modo consiste en agregar a los resultados matemáticos anteriores uno nuevo sin modificar el marco básico dentro del cual se realizan las matemáticas, esto requiere de genialidad, puesto que implica mostrar que los recursos existentes (conceptos, principios) son suficientes para probar una conjetura importante. El segundo modo, requiere que el matemático modifique, incluso transforme, los elementos de la práctica que heredó de sus maestros, esta situación es más compleja.

Ahora bien, lo que se encuentra en los argumentos de Kitcher es un alejamiento de los problemas gnoseológicos y ontológicos de la matemática, centrándose en aspectos de la metodología, ampliamente ignorados, tales como justificaciones para decidir a favor o en contra de nuevos axiomas, lo que para las filosofías tradicionales hace parte del "contexto del descubrimiento" y, por ende, no digno de investigación.

La teoría del conocimiento matemático se ha limitado a un único plano, consecuencia de su enfoque en el problema del *acceso* a los objetos abstractos, por tanto, renovar la filosofía de la matemática implicaría considerar la práctica matemática, lo que aseguraría que ciertos problemas propios de la filosofía florecieran cuándo el área apropiada de la matemática es tomada en consideración. Un ejemplo de esta situación es citado por Mancosu, al reconocer que la geometría o la topología pueden despertar interés en problemas de la filosofía matemática como la visualización y el razonamiento diagramático (Mancosu, 2016, p. 131).

Kitcher reacciona contra la tradición que pretende erigir la filosofía como fundamento de la matemática, mostrándose más fiel a Lakatos, es decir, reconociendo la importancia de la historia de la matemática y planteando nuevas inquietudes: ¿cómo se desarrolla la matemática?,¿cómo se relacionan los razonamientos formales con los informales?, entre otras.

Entonces, para Kitcher, la filosofía de la matemática parece haberse centrado en temas generales de la filosofía como la teoría del conocimiento, la metafísica y la filosofía del lenguaje, dejando de lado partes de la matemática como la lógica, la aritmética o la teoría de conjuntos, que son de interés para los matemáticos y los historiadores; lo que lleva a centrar el interés en la práctica matemática, "partiendo de la noción de una práctica matemática, el objetivo de Kitcher fue dar cuenta de la racionalidad del desarrollo de la matemática en términos de transiciones entre prácticas matemáticas" (Mancosu, 2016, p. 135). Entre los patrones de cambio estudiados se encuentran la generalización, el rigor y la sistematización.

Otra crítica de Kitcher tiene que ver con imponer la lógica como base para la filosofía de la matemática, puesto que ésta es ineficaz para explicar la dinámica del descubrimiento y el desarrollo histórico de la matemática, los conceptos y grandes avances de la matemática difícilmente surgen de seguir las estrictas leyes de la lógica. Por tal motivo debe revisarse cuidadosamente la práctica de los matemáticos para mostrar cómo es posible que surja una teoría del conocimiento.

Kitcher propone "una teoría del conocimiento y una ontología de la matemática unificadas y una teoría de cómo el saber matemático crece racionalmente" (Mancosu, 2016, p. 152), este estudio es un intento por extender los límites de la teoría del conocimiento más allá que sólo preguntarse cómo es posible acceder a los objetos abstractos.

Cuando Kitcher aborda la práctica matemática, parece muy interesado en la actividad mental y la vida psicológica de los científicos, más aún en sus procesos de representación, es decir, en el mundo 2 (Popper & Eccles, 1993). Las imágenes mentales, o en el caso de los matemáticos, los objetos y enunciados, son imágenes mentales con las que el individuo opera, y cuya existencia pertenece al mundo 3.

Para Kitcher la cognición humana tiene las siguientes características:

1. La percepción es un proceso, en el que el estado cognitivo se puede modificar ya sea para adquirir una nueva creencia o para reforzar las

preexistentes, pero esto dependerá del estímulo y del estado cognitivo previo.

2. El razonamiento y la resolución de problemas están relacionados con el hecho de recordar proposiciones.
3. El individuo desea alcanzar ciertas metas lo que, en algunas oportunidades, no siempre, puede ser su motivación para resolver problemas o tomar decisiones.
4. A veces en la resolución de un problema o en la toma de una decisión muy particular, los individuos se pueden dejar llevar por una inferencia que les permiten lograr exitosamente la meta propuesta.

Aunque Kitcher es un defensor de la construcción social del conocimiento y de las transiciones, dado que, para él los avances de un matemático brillante son producto de los trabajos de los matemáticos anteriores y serán el fundamento de los alcances de futuros matemáticos, no desconoce el aporte en el avance de la ciencia de la cognición de cada individuo.

> Johann Kepler y Tycho Brahe, contemplando juntos el amanecer, ven, respectivamente, que el sol comienza a verse debido al giro de la tierra y el inicio del viaje diario del sol alrededor de la tierra estática [...] El estímulo común que incide en Kepler y Tycho Brahe activa propensiones diferentes en los dos hombres debido al carácter de sus estados cognitivos antecedentes, especialmente debido a sus compromisos con sistemas de astronomía distintos. (Kitcher, 2001, p. 99)

Para Kitcher, se presentan cuatro tipos de variación subjetiva:

1. Los científicos podrían formarse creencias diferentes si tuvieran acceso a diferentes fragmentos de información, de manera que la memoria declarativa diferiría de un científico a otro.
2. Las proposiciones se pueden almacenar de manera diferente en la memoria declarativa de un científico a otro, así lo que para uno es fácil en la resolución de problemas para otro no lo es tanto.
3. Según el orden y la frecuencia de la información a la que accede un científico, es posible que se activen unas propensiones en lugar de otras. Así, aunque dos científicos están expuestos a las mismas propensiones,

unas pueden facilitarse más a uno que al otro, dependiendo del desarrollo intelectual de cada uno.

4. Los científicos pueden diferir en el contenido de la memoria procedimental, pues unas propensiones pueden estar en uno y no en el otro.

Algunos tipos de variación cognitiva han sido pasados por alto. Estos son los libros de texto, los manuales o los artículos de revisión, dado que en su homogeneización venden la ilusión de que el conocimiento en principio es accesible de la misma forma para todos, ignorando que en la resolución de problemas o en la toma de decisiones los elementos en la memoria declarativa que tiene cada científico son diferentes. Para algunos, por ejemplo, es más fácil reunir información a partir de libros, para otros de conferencias y para otros esta forma podría resultar muy difícil, "a menudo los colegas de una disciplina científica reconocen que entre ellos prevalecen estilos cognitivos distintos, cuando se enfrentan al mismo problema, los distintos científicos los plantearán y razonarán de maneras diferentes" (Kitcher, 2001, p. 104).

La idea de práctica matemática de Kitcher tiene elementos que sustentan, aunque tal vez no sea su intención, el mundo 3 propuesto por Popper. Podemos afirmar que la práctica como acción física se realiza en el mundo 1, que está justificada por el mundo 2 y sus elementos teóricos caen en el mundo 3. Para Kitcher los cambios teóricos del avance científico se pueden interpretar como una práctica científica que tiene elementos tales como: el lenguaje, las proposiciones, trabajo experimental y teórico, métodos de razonamiento, preguntas importantes, resolución de problemas, puntos de vista metacientíficos sobre la naturaleza de la disciplina, etc.

Siguiendo a Kuhn, Kitcher otorga un papel relevante a la historia y la entiende como una secuencia de prácticas. Con este punto de partida Kitcher propone una tesis análoga para la práctica matemática que contempla cinco componentes: "un lenguaje, un conjunto de declaraciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como "importantes" y un conjunto de puntos de vista metamatemáticos" (Kitcher, 1984, p. 163).

Para Kitcher, la práctica de un científico es multidimensional y debe tener en cuenta:

1. El lenguaje

2. Las preguntas
3. Los enunciados, incluyendo imágenes o diagramas.
4. Conjuntos de esquemas o patrones
5. Ejemplos estándar de información
6. Paradigmas de experimentación, instrumentos y herramientas confiables.
7. Metodología del científico (incluye razonamientos y criterios de evaluación de enunciados).

Kitcher se ocupa de dos tipos de problemas. El primero de las respuestas de los científicos a los otros. El segundo de los efectos de los esfuerzos individuales en la comunidad. En el primer grupo se toma la confianza como un elemento esencial de la actividad científica. Lo esencial para el segundo grupo es la distribución del esfuerzo en las comunidades científicas. "En general abordo ambos conjuntos de problemas echando mano de nuestras creencias sobre las posibilidades al alcance del razonamiento individual y la coordinación de los esfuerzos individuales" (Kitcher, 2001, p. 416).

Anotábamos antes que el aprendizaje de la tradición se daba en el mundo 3, dado que la invención de nuevas teorías o conceptos cuenta no sólo con decisiones individuales, sino sociales (Popper & Eccles, 1993). La vida cognitiva de los científicos es impregnada por la confianza en la autoridad. Esta se ve de tres formas. En primer lugar, dependencia epistemológica del pasado, la cual absorbemos por la enseñanza de padres o de otras autoridades. En segundo, la comunidad científica ha aceptado una autoridad epistémica dado que ya existen acuerdos sobre esto. Y en tercero, durante la investigación individual se aceptan las ideas de otros colegas, es decir, se tiene una interacción entre varios individuos.

Un punto que merece la pena destacar es la cooperación. Un científico que está interesado en resolver cierto problema debe contar con varios recursos a su disposición; entre ellos, elementos de información que pueden venir de autoridades o que han sido adquiridos directamente: "podemos suponer que la investigación consiste en un periodo en el cual se obtiene la información necesaria, seguido de un periodo en el que el científico intenta utilizarla" (Kitcher, 2001, p. 422). Ahora bien, debe resaltarse que los científicos son capaces de evaluar hasta qué punto son confiables los otros miembros de la comunidad. Un científico puede evaluar como genuino o como autoridad, a otro científico, a una revista, a un equipo de investigadores o una tesis. Se tienen dos tipos de autoridad: una no ganada, es decir, que se obtiene por pertenecer a una entidad prestigiosa (de la posición social del científico) y otra ganada, que es la credibilidad que tiene cierto científico, por sí mismo.

Al tratar la diversidad cognitiva se debe recurrir o a la psicología de los individuos o a las características del sistema social, ahora bien "quienes articulan alternativas inicialmente poco admisibles siguen adelante, al menos en parte, debido a varios tipos de presiones no epistémicas: la fascinación por una idea específica, la devoción a una tradición nacional, el deseo de ganar fama" (Kitcher, 2001, p. 471). Y entonces cabe preguntarse ¿Cómo puede aceptar un individuo alguna teoría nueva? Una respuesta posible es por la influencia de la tradición. En la comunidad científica pueden distinguirse tres grupos: 1. Los que siguen la teoría tradicional dominante. 2. Los rebeldes que se asocian a una teoría advenediza. 3. Los nuevos integrantes que aún no tienen una postura definida.

En la empresa epistémica comunitaria, las motivaciones, a veces alejadas de la práctica cotidiana de los matemáticos, afectan la toma de decisiones de un individuo perteneciente a esa comunidad científica, "es posible que un enfoque más realista de la cognición se pudiera formular con precisión suficiente para permitirnos lograr resultados claros acerca de las consecuencias de las decisiones tomadas por los integrantes de una comunidad" (Kitcher, 2001, p. 526).

Si se juzga con un criterio externo el progreso de los campos de la ciencia se cree que los científicos emplean estrategias cognitivas superiores a las de los demás. La tradición suele creer que "la relación social entre científicos no interfiere con el uso de razonamientos individuales epistémicamente virtuosos" (Kitcher, 2001, p. 527). Sin embargo, Kitcher muestra que considerar al científico como un indagador puro es un mito. Esa misma tradición que asume que los objetos de la matemática son independientes del pensamiento humano y a los que se accede de forma misteriosa, puede ser objetada si consideramos la postura de Popper & Eccles al plantear la existencia del mundo 3.

Kitcher está contra la idea que asume que la ciencia no avanza porque existen presiones externas y motivaciones no epistémicas. Tampoco comparte la idea de algunos filósofos de la ciencia para quienes no apelar a la razón y a la evidencia para entender la resolución de algún problema, genera un vacío "en el que ‘factores sociales’ indeseables sean los que muevan la comunidad en direcciones arbitrarias” (Kitcher, 2001, p. 527). Para Kitcher, el uso de razonamientos que parecieran contrarios al progreso de la ciencia pueden llevar, en ocasiones, al alcance de metas epistémicas: “Así como es importante descubrir reglas para dirigir correctamente la mente del individuo, así también es necesario entender hasta qué punto las estrategias comunitarias para hacer avanzar el conocimiento podrían estar bien o mal diseñadas” (2001, p. 528).

Kitcher toma un ejemplo de la historia, los trabajos de Lagrange sobre las ecuaciones. Lo que le interesa es revisar la idea realista de la matemática. Y es que Lagrange estaba interesado (mundo 2) en la naturaleza de una realidad abstracta (mundo 3). La primera tarea fue descubrir cuáles eran esas entidades y cuál su caracterización. A continuación, él y sus sucesores se concentran en los símbolos. Luego aparece el problema de la construcción, es decir, producir cierto tipo de ecuación dada una ecuación inicial, lo que lo lleva a examinar “el conjunto de técnicas creadas por sus predecesores para resolver tales problemas” (Kitcher, 2001, p. 526) e intenta comprender a la luz de las nuevas ecuaciones. Estas transiciones en la práctica de la matemática son objeto de preocupación para el realista.

Hemos observado como para Kitcher los procesos matemáticos no son consecuentes con el apriorismo. Dado que los procesos no están disponibles independiente de la experiencia (que puede ser una experiencia física del mundo 1 o una matemática del mundo 3). Tampoco se pueden justificar (mundo 2) independientes de la experiencia y pueden operar para producir una verdadera creencia, que puede ser aplicada a la realidad física (mundo 1) o a la realidad matemática (mundo 3).

5.2 La resolución de problemas

Para Kitcher, el proceso intuitivo tiene razón de ser en la práctica de los matemáticos. Uno de los componentes de la práctica matemática hace referencia a las preguntas y razonamientos aceptados, los cuales encontramos en la resolución de problemas, “éstos son razonamientos que nos permiten obtener una respuesta a una pregunta aceptada anteriormente como valiosa” (1984, p. 183). Para finalizar este capítulo, nos centraremos en las ideas de

Kitcher sobre la resolución de problemas y las ideas de Pólya a sobre este mismo tema.

5.2.1 La resolución de problemas en la obra de Kitcher

La historia, en Kitcher, se convierte en la descripción creciente de la racionalidad. No es solo una revisión sobre la racionalidad, la cual es producto de una reflexión sobre las prácticas presentes y pasadas, sino que es una visión que permite criticar inferencias y afirmaciones hechas por aquellos que la han estudiado habitualmente. Es decir, la práctica matemática es una idea importante para comprender el crecimiento del conocimiento matemático. Y un componente de esta práctica es justamente la resolución de problemas.

Ahora bien, como hemos revisado a lo largo de este trabajo, Kitcher sostiene que la intuición matemática es usada por los matemáticos e incluso por los estudiantes, en el contexto de la resolución de problemas. Para otros existe una relación entre la intuición, un esquema y la resolución de problemas (Bergson, 2015; Fischbein, 1999; Poincaré, 1946; Thompson, 1998). En Thompson parece quedar claro que "esquema" no es otra cosa que un patrón estratégico aplicable, por ejemplo, en la resolución de problemas. De hecho, dice que el papel de la intuición "radica en guiar nuestra búsqueda del esquema apropiado" (1998, pp. 283-284).

Por tanto, también la intuición nos ayuda a encontrar la estrategia o el patrón estratégico pertinente para resolver un problema (Poincaré, 1946). Lo cual significa que tiene que discriminar entre varios patrones y quedarse con uno que podrá resolver, al menos en principio, el problema. Si falla (la intuición es falible), se recurrirá a otro. En este sentido, la intuición puede jugar, como diría Kitcher, "un importante papel heurístico y también sirve como parte de un proceso de garantía", es decir, del proceso de justificación (1984, p. 61).

Para Kitcher, los problemas a los que se enfrentan los matemáticos pueden tener un carácter tanto teórico como empírico. Una descripción de la realidad matemática evidencia cómo la percepción puede llevar al conocimiento y cómo el desafío de los científicos es resolver problemas planteados por la teoría existente: "resolver un problema es descubrir una verdad sobre las operaciones matemáticas, y jugar con la notación o discernir analogías en él" (Kitcher, 1984, p. 131).

Pensadores de diferentes corrientes filosóficas han supuesto que la elección de una teoría científica particular esta mediada por el deseo “de alcanzar ciertas ‘virtudes’ tales como: simplicidad, poder explicativo, coherencia teórica, eficacia para la resolución de problemas, falsabilidad, etc.” (Kitcher, 1984, p. 99). Observamos cómo la resolución de problemas aparece como un tema de interés en la práctica matemática.

Así mismo el papel del matemático en la resolución de problemas es una crítica que los constructivistas y nominalistas le hacen al platonismo. Para estos últimos el matemático no está involucrado en la resolución de problemas o en la demostración de teoremas: “no parece participar en ninguna actividad que se interprete de manera plausible como ‘observar’ o ‘investigar’ objetos abstractos” (Kitcher, 1984, p. 130) . Si esto fuera así, Kitcher se pregunta ¿por qué cuando los matemáticos encuentran una dificultad no renuevan el conocimiento de los objetos que intentan caracterizar? ¿Por qué le dedican tanto tiempo a la manipulación simbólica? ¿Por qué cuando resuelven un problema los matemáticos parecen reconocer que este ‘logro’ es producto de las analogías presentes en su desarrollo?

Kitcher considera que responder estas preguntas es un trabajo que corresponde a la psicología de la investigación matemática. Esto no quiere decir que el comportamiento del matemático cuando resuelve problemas sea misterioso y ello es en parte por el doble funcionamiento de la notación simbólica: “resolver un problema es descubrir una verdad sobre las operaciones matemáticas, y jugar con la notación o discernir analogías en él es, en mi opinión, participar en esas operaciones matemáticas que uno intenta caracterizar” (Kitcher, 1984, pp. 130–131).

La historia del cálculo muestra cómo para los seguidores de Leibniz su método era más eficiente en la resolución de problemas, mientras que los newtonianos se sentían más orgullosos de haber preservado las características importantes de las matemáticas anteriores. Ambos métodos llevaron a la transformación de las matemáticas y de los problemas de la época. Otro caso interesante lo tenemos en el método griego de análisis, “este método fue identificado como un medio para resolver problemas que no contaba como una técnica de prueba” (Kitcher, 1984, p. 183). Sin embargo, para los griegos los análisis exitosos (resolución de problemas), una vez obtenidos, se transformaban en razonamientos que constituían pruebas, pero no soluciones a problemas. Aquí encontramos la asociación de dos técnicas, una que tiene que ver con la resolución de problemas y una que tiene que ver con la prueba.

En su idea de las transiciones de las prácticas, Kitcher aborda el tema de la resolución de problemas. Para él, el componente matemático de la práctica puede mantener de forma constante las preguntas de interés, mientras que, los razonamientos, los enunciados aceptados y el lenguaje son normalmente los que cambian. Una comunidad matemática aceptará un nuevo lenguaje, nuevos razonamientos y afirmaciones las cuales pueden surgir como las respuestas a preguntan planteadas al interior de la comunidad. Esto implica que los matemáticos deben contar con métodos que permitan demostrar que sus respuestas son correctas.

Veamos un ejemplo. Euler estaba preocupado por calcular sumas infinitas de series, para ello intentó técnicas generales para la resolución de esta clase de problemas, "verificando que el nuevo método daba respuestas de acuerdo con las aproximaciones reconocidas obtenidas al calcular sumas parciales y que, en aquellos casos en los que las soluciones exactas ya estaban disponibles, el nuevo método concordaba con los resultados establecidos" (Kitcher, 1984, p. 196).

Algunos pensadores objetan la extensión de las prácticas racionales que expone Kitcher, sin embargo, él recurre a los ejemplos que brinda la propia historia de las matemáticas para mostrar que esa extensión no es problemática: "los beneficios de la resolución de problemas deben medirse contra los costos de los nuevos métodos. Afirmo que es racional aceptar la práctica extendida cuando los beneficios percibidos son mayores que los costos percibidos" (Kitcher, 1984, p. 199).

Ahora bien, los beneficios que trae consigo la resolución de problemas, varían según la diversidad y la urgencia de las preguntas que se responden, "a veces la capacidad de la comunidad matemática para resolver problemas matemáticos centrales se magnifica enormemente por una extensión de la práctica" (Kitcher, 1984, p. 199). Ejemplo de ello son la geometría cartesiana y el cálculo infinitesimal (de Newton y Leibniz). Cuando se responden pocas preguntas significativas, pareciera que los beneficios de la resolución de problemas son pequeños y entonces la extensión que menciona Kitcher no es aceptada inmediatamente.

Los números complejos se consideraron con recelo durante mucho tiempo, en parte porque parecían traer solo pequeños avances en la respuesta a las preguntas: por lo tanto, la referencia a ellos podría denominarse como 'sutil e inútil'. Cuando el poder de resolución de problemas de los métodos de números complejos en el análisis se hizo evidente, las quejas sobre los números complejos se silenciaron. (Kitcher, 1984, p. 199)

Esto no quiere decir, que las nuevas técnicas de razonamiento, en algunos casos, produzcan resultados falsos (un ejemplo de ello son las técnicas para la suma de series del siglo XVIII). Es posible, también, que el camino hacia las conclusiones no sea muy claro, aunque las conclusiones como tal no sean del todo incorrectas, "en tales casos, el alcance de las soluciones recién obtenidas puede hacer que sea razonable aceptar la extensión y mantener que los razonamientos poco rigurosos eventualmente se integrarán en un sistema de pruebas" (Kitcher, 1984, p. 200). Esto sucedió con el cálculo, aun cuando Berkeley expuso muchas críticas a este nuevo método, por la naturaleza compleja de los infinitesimales, no dudó del éxito que éste método traía a la nueva ciencia, "si esas técnicas proporcionan suficientes soluciones a problemas cuya corrección puede verificarse, puede ser razonable adoptarlas, con la condición de que se verifiquen sus liberaciones y buscar formas de restringirlas que ya no den lugar a anomalías" (Kitcher, 1984, p. 200).

La práctica de las matemáticas conlleva costos y beneficios para resolver problemas. Esta situación justifica el uso de herramientas que en su momento pueden ser imperfectas, en este mismo sentido, se pueden adoptar soluciones a problemas que presentan algunas deficiencias o teorías científicas anómalas, confiando que con el tiempo estas "fisuras" se podrán superar, "aunque la discusión anterior sea cualitativa, creo que deja en claro que la respuesta a las preguntas puede ser una forma racional de extender la práctica matemática incluso cuando las técnicas introducidas para responder las viejas preguntas traen problemas propios" (Kitcher, 1984, p. 200).

Y entonces ¿cuáles son los costos? Para Kitcher, estos se cuentan en términos de soluciones de problemas que fueron aceptadas en el pasado y que hoy deben ser desechadas y no reemplazadas. Y ¿cuáles los beneficios? Estos se miden en términos de lo que la modificación de la práctica trajo "tanto en su revelación de por qué los razonamientos previamente mal entendidos fueron exitosos como en la eliminación de obstáculos del camino de la investigación de problemas actualmente identificado como significativo" (Kitcher, 1984, p. 217).

Para Kitcher, los razonamientos, aunque poco rigurosos, que demuestren su valor en la resolución de problemas previamente identificados, deben ser racionalmente aceptados. Ahora bien, cuando el lenguaje en el funcionamiento de soluciones a problemas sea tan inadecuado que no permita abordar problemas urgentes de investigación, el matemático debería preocuparse, en ese caso, por el rigor. Finalmente, si los beneficios que aporta la comprensión son mayores que los costos de la resolución de problemas, entonces se puede aceptar la idea de reemplazar los razonamientos poco rigurosos. En esta disputa de costos y beneficios, también se puede ganar en la investigación de problemas cuya solución previa no fue conseguida por la falta de rigor.

> En los casos en que la demanda previa de rigor era urgente —cuando las preguntas matemáticas interesantes no pueden abordarse debido a deficiencias en la comprensión matemática— los matemáticos pueden aceptar racionalmente una rigorización propuesta que no explica el éxito de todas las técnicas de resolución de problemas anteriormente adoptadas o que introduce nuevos acertijos propios. (Kitcher, 1984, p. 217)

El desarrollo del cálculo nos ofrece un ejemplo de cómo fue introducido un nuevo lenguaje, unos nuevos razonamientos y nuevas preguntas al campo de la matemática. Aunque al principio las nuevas expresiones no se entendían del todo y los nuevos razonamientos parecían oscuros, los cambios fueron aceptados por la comunidad matemática. Entonces, los avances de Leibniz y Newton demostraron que se podían obtener soluciones a problemas cuya importancia ya era previamente reconocida, "soluciones que sus predecesores habían logrado en pedazos; que podían responder, de la misma manera, preguntas que otros habían intentado responder sin éxito; y que podrían resolver problemas que "nadie antes se había atrevido a intentar" (Kitcher, 1984, p. 230).

Los métodos de Leibniz y Newton fueron precedidos por las incertidumbres de principios del siglo XVII. Los matemáticos del renacimiento heredaron de los griegos una serie de preguntas que sólo habían podido responder en casos muy particulares y para los cuales no se tenía ningún método general, "entre estos están los problemas de construir tangentes, construir normales, calcular la longitud de los arcos (rectificación), calcular áreas (cuadratura) y encontrar máximos y mínimos" (Kitcher, 1984, p. 230). Los predecesores de Newton y Leibniz estaban interesados en resolver estos problemas de manera general.

El procedimiento que lleva a los avances en el desarrollo del cálculo fue motivado por los siguientes factores:

1. La generalización de las preguntas planteadas y las respuestas de los griegos.
2. El interés por problemas físicos que llevan al tratamiento de ciertas curvas (cicloides, cisoides).
3. Los problemas resueltos por la geometría cartesiana. Gracias al álgebra, preguntas antiguas de geometría fueron reformuladas mostrando el camino hacia una posible solución. Fermat, por ejemplo, propuso un método para encontrar máximos y mínimos. Roberval se acercó, con cierto éxito, al problema de la tangente. Cavalieri, por su parte, ideó una técnica para el problema del "área bajo la curva".

La descripción anterior muestra un conjunto de técnicas, pero "no existía un método general para resolver ninguno de los problemas importantes, ni se apreciaba la relación entre las diversas clases de problemas" (Kitcher, 1984, p. 231). Por otro lado, muchas de las técnicas empleadas tenían razonamientos confusos o cálculos complejos en los asuntos más interesantes. Entonces el gran avance de Leibniz y Newton fue "diseñar" una técnica general para satisfacer la demanda previa de la matemática de principios y mediados del siglo XVII: "Newton y Leibniz proporcionaron algoritmos que podrían aplicarse para generar respuestas a dos preguntas fundamentales, inversamente relacionadas, y algoritmos subsidiarios para usar estas respuestas para resolver todos los problemas geométricos" (Kitcher, 1984, p. 231).

Esta nueva herramienta llamada "cálculo" permitió, de forma sistemática, resolver problemas importantes como máximos/mínimos y las tangentes, problemas que se habían considerado anteriormente de manera separada. Lo interesante, es que esta nueva "herramienta" supera las restricciones de los métodos precedentes y "se puede aplicar a las curvas especificadas por ecuaciones trascendentales (es decir, a curvas, como la cicloide, que no están dadas por ecuaciones polinómicas)" (Kitcher, 1984, p. 235).

Este ejemplo sobre el desarrollo del cálculo infinitesimal nos muestra cómo la práctica matemática, con sus transiciones racionales está estrechamente relacionada con la solución a problemas antiguos y la creación de nuevos problemas. La transición racional de la que habla Kitcher involucra a la comunidad académica y también al matemático individual. Tanto Leibniz como Newton lograron la unificación de su método gracias a un proceso intuitivo. Ellos partieron de problemas matemáticos y físicos propios de la época y gracias a su experiencia, conocimiento de los métodos y conceptos de la matemática llegaron a sus descubrimientos y avances. Es decir, que hablamos aquí de una intuición educada.

Es posible que Newton o Leibniz inicialmente no tuviesen tan claro el razonamiento y todo el proceso que los llevaría a su método unificado (lo que se evidencia en las críticas, por ejemplo, de Berkeley). Es decir, que sus primeras imágenes no estuvieran tan bien organizadas. Pero gracias a sus conocimientos y a la reconfiguración de sus nuevas ideas junto con las ideas de sus predecesores fueron capaces de ofrecer a la comunidad un método claro, eficaz, y que con el tiempo sus afirmaciones fueron demostradas y verificadas por Riemann, Cauchy o Weierstrass, entre otros matemáticos.

5.2.2 La resolución de problemas en la obra de George Pólya

Cuando se aborda el tema de resolución de problemas en matemáticas es inevitable considerar las ideas de George Pólya al respecto. Revisando estas ideas encontramos que el matemático húngaro hace referencia a la intuición, y quisiéramos precisar cómo la entiende.

Para Pólya, la resolución de problemas implica dos modos de percibir la verdad. Por ello, con frecuencia la intuición aparece en muchos de sus ejemplos y en parte de sus análisis. Vamos a ilustrar este hecho.

Uno de los "pasos" que él considera como necesarios para la resolución correcta de un problema alude a la "ejecución de un plan", es decir, desarrollar una idea que se ha concebido para la solución de un problema. Esto no es fácil, se requiere de unas circunstancias, conocimientos previos, hábitos del pensamiento, concentración, entre otros. También deben repasarse pacientemente todos los detalles, lo que implica una verificación constante de los resultados obtenidos, dirá Pólya que “podemos asegurarnos de la exactitud de un paso de nuestro razonamiento ya sea por ‘intuición’ o por medio de una ‘demostración formal’” (Pólya, 2002, p. 33).

Cuando se está ejecutando el plan diseñado para resolver el problema, surge la pregunta ¿qué podemos hacer? En primer lugar, debemos tener una compresión plena del problema, para realizar con todo detalle las operaciones algebraicas o geométricas, que previamente se han identificado como adecuadas con el plan, ¿cómo nos convencemos de la exactitud de cada paso? Responderá Pólya “mediante un razonamiento formal o por discernimiento intuitivo o por ambos medios, si es posible” (Pólya, 2002, p. 53).

Siguiendo en las etapas para la buena ejecución del plan establecido para resolver un problema, aparece la necesidad del matemático por asegurar la exactitud de sus proposiciones: “el matemático consciente trata de verlo intuitivamente y dar una demostración formal”. Sin embargo, la intuición no es sólo propia de los matemáticos, un estudiante inteligente también podría hacer uso de ella, mostrando que la intuición puede sacarle cierta ventaja a la formalización en matemáticas:

> Cualquier alumno inteligente, sin ningún conocimiento sistemático de geometría del espacio, puede ver, en el instante que concibe distintamente el significado de los términos, que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí (pudiendo estar las tres rectas en diferentes planos). Sin embargo, la demostración de esta constatación, tal como se da en la 9ª proposición del libro XI de los *Elementos* de Euclides, requiere una preparación larga, minuciosa e ingeniosa” (Pólya, 2002, p. 123).

Lo descrito no quiere decir que las reglas formales deban ser ignoradas o que no sean necesarias para resolver problemas, lo que nos muestra Pólya es que es útil e interesante usar los dos medios para “adquirir” y desarrollar conocimientos: “tratar de demostrar formalmente lo que se ha visto intuitivamente y de ver intuitivamente lo que se ha demostrado formalmente es un excelente ejercicio intelectual” (Pólya, 2002, p. 124). Si entendemos la intuición como un proceso podemos evidenciar que esta tesis de Pólya es frecuente en la práctica de los matemáticos cuando inventan o resuelven problemas. No así en la práctica educativa, donde suele ignorarse le proceso intuitivo y prestar mayor atención a la matemática formal.

Al igual que muchos matemáticos, entre ellos Gödel, Pólya también relaciona la intuición con la visión, “la intuición y la demostración formal son dos modos diferentes de percibir la verdad, comparables a la percepción de un objeto material por medio de dos sentidos diferentes que son: la vista y el tacto” (Pólya, 2002, p. 123). En su descripción sobre la solución de Jean Bernoulli al problema de la curva braquistócrona y su relación con la ley de Snell sobre refracción, Pólya concluye: “podemos ver intuitivamente sin recurrir a fórmulas, que la ley de Snell implica una ecuación diferencial [...] podemos ver intuitivamente la idea clave de la solución” (Pólya, 1954a, pp. 154–155).

Siguiendo cierta tradición, Pólya encuentra que la intuición puede considerarse como una guía que permite llegar a ciertos descubrimientos matemáticos. Por ejemplo, cuando nos expone el desarrollo del cálculo integral hecho por Arquímedes, afirma: “sucede que uno de los mayores descubrimientos matemáticos de todos los tiempos fue guiado por intuición física. Me refiero al descubrimiento de Arquímedes de esa rama de la ciencia que hoy llamamos cálculo integral” (Pólya, 1954a, pp. 154–155).

De ahí que, a veces, asuma que la intuición precede a la formalización, “al tratar un problema geométrico o físico algebraicamente, tratamos de expresar una condición sometida intuitivamente por nuestras ecuaciones” (Pólya, 1954a, p. 193).

A este respecto Pólya reflexiona sobre el hecho de las elecciones que hacen los matemáticos durante su práctica, algunos están más cercanos a la formalización y otros a la intuición. Aunque él considera que

> Todo el mundo prefiere la comprensión intuitiva a los argumentos lógicos formales, incluidos los matemáticos profesionales. Jacques Hadamard, eminente matemático francés de nuestro tiempo, lo expresó así: “El objeto del rigor matemático es sancionar y legitimar las conquistas de la intuición, y nunca hubo otro objeto para ello”. Sin embargo, si excluimos a los matemáticos profesionales, casi nadie queda en posición de apreciar adecuadamente los argumentos formales. *La intuición nos llega “naturalmente”*, los argumentos formales no. En cualquier caso, la intuición nos llega mucho antes y

> con mucha menos influencia externa que los argumentos formales que realmente no podemos comprender a menos que hayamos alcanzado un nivel relativamente alto de experiencia lógica y sofisticación. (George Pólya, 1980, pp. 127–128, las cursivas son nuestras)

Que *la intuición nos llega 'naturalmente'* no significa que sea una especie de llamado divino o algo misterioso. Es el resultado de la experiencia, del estudio y del conocimiento de los conceptos y proposiciones que ya han interiorizado los matemáticos durante su práctica. Tal vez, si a los estudiantes se les presentaran las demostraciones más cerca de la experiencia y contextualizadas como el producto del esfuerzo, no sólo de matemáticos individuales, sino de toda una comunidad académica, habría un espíritu más dispuesto a la invención y al descubrimiento en matemáticas.

Para Pólya, la intuición también está relacionada con la experiencia. Esto lo explica a través de una conversación que sostiene con un cirujano quién afirma que en muchos momentos cuando se ve abocado a tomar una decisión en corto tiempo, él recurre a la intuición más que a las reglas:

> El tiempo es demasiado corto para aplicar una regla correctamente, y cualquier patrón establecido podría desviarlo; lo que necesitas es una intensa concentración en la situación que tienes ante ti. Y entonces la gente llega a desconfiar de las 'reglas' y confiar en su 'intuición' o 'experiencia' o 'intuición-y-experiencia'". (Pólya, 1954b, p. 167)

Nuevamente, no consideramos que se trate literalmente de desconfiar o *ignorar las reglas*. Se trata de un conocimiento tan ampliamente dominado por el médico que las reglas ya se le volvieron algo mecánico. La intuición, es en realidad el proceso que lo ha llevado a interiorizar en su conciencia esas reglas. Un médico novato posiblemente tomaría una decisión equivocada en un momento donde el tiempo apremie. Lo que influye en la decisión acertada del médico es su experticia y la cantidad de veces que ha tomado decisiones, por lo que ya tiene confianza y domina más información que el aprendiz. En el caso de los matemáticos, cuando se refieren a una intuición que les llega para resolver cierto problema en que están interesados, en realidad están hablando de todo el proceso por el que ha pasado su conciencia desde que aparecieron unas primeras imágenes difusas y desordenadas, hasta que, luego de un esfuerzo intelectual (usando los términos de Bergson), organización y reestructuración en su conciencia de lo nuevo con lo conocido, las imágenes se reconfiguran y transforman en ideas claras que pueden ser expuestas a la comunidad científica para que sean demostradas y avaladas.

En sus principios sobre el aprendizaje, Pólya describe tres fases, la de exploración, la de formalización y la de asimilación. Para él la intuición forma parte de esa primera fase: "una primera fase exploratoria está más cerca de la acción y la percepción y se mueve en un nivel más intuitivo y heurístico" (Pólya, 1954b, p. 104). La segunda tiene que ver con los conceptos, definiciones, demostraciones, y la última es la que percibe el fundamento interno de las cosas. Estas fases podrían considerarse con las etapas de un proceso, tal vez, un proceso intuitivo.

Un estudiante interesado en aprender un asunto nuevo, debe revisarlo desde varios puntos de vista y tratar de hacerlo "encajar" dentro de su conocimiento existente donde pueda ser conectado convenientemente con hechos que estén relacionados con el asunto en cuestión: "entonces podrá ver ese nuevo conocimiento con el menor esfuerzo, lo más intuitivamente" (Pólya, 1954b, p. 135). Entonces para Pólya (1954b) la labor de un buen maestro es desarrollar ese proceso de aprendizaje en el estudiante, así: "encontrar formas de anclar un hecho nuevo en la experiencia del estudiante, conectarlo con hechos previamente aprendidos, cimentar su conocimiento mediante aplicaciones. Solo podemos esperar que el conocimiento del estudiante bien anclado, bien conectado, bien cimentado y organizado finalmente se vuelva intuitivo" (p. 135).

Para Pólya lo intuitivo tiene que ver con lo obvio, no en el sentido de elemental o indiscutible sino obvio en el sentido de algo que se vuelve claro o habitual para nuestro entendimiento gracias a un proceso de aprendizaje:

> Un buen orador debe ser capaz de separar de la prueba algún comentario decisivo y hacerlo intuitivo y obvio hasta que todos en la audiencia puedan entenderlo, llevárselo a casa y guardarlo para un posible uso posterior. Al hacerlo así, el hablante logra impartir información útil y, de hecho, sigue la segunda regla de Zermelo: "Insiste en lo obvio y deslízate ágilmente sobre lo esencial" (Pólya, 1980b, p. 142).

Pólya también usa la intuición como parte del proceso de verificación de las soluciones obtenidas después de la resolución de un problema. Él recomienda siempre verificar: “especialmente si existe un medio rápido e intuitivo para asegurarse de la exactitud del resultado o del razonamiento, no debe uno dejar de hacerlo” (Pólya, 2002, p. 88). Se pueden verificar tanto los avances intermedios del problema como el resultado final. Esta verificación puede ser hecha por el mismo matemático que está trabajando en el problema o por los miembros de la comunidad académica, “esta verificación puede igualmente aplicarse a las fórmulas que recordamos o a las que intuimos” (Pólya, 2002, p. 88).

También está la reconsideración del trabajo si no se ha logrado una solución pertinente, esto lleva a revisar el proceso desde varios puntos de vista o a preguntase por la dificultad del problema, la idea fundamental, los impedimentos para resolverlo o “puede buscar intuiciones simples como: ¿podría haberse obtenido el resultado de inmediato?” (Pólya, 2002, p. 96). También puede comparar y desarrollar nuevos métodos o comparar con otros que haya resuelto anteriormente. Finalmente podría inventar nuevos problemas puesto que “asimilando el problema que acaba de resolver, adquirirá conocimientos bien ordenados, que podrá utilizar en cualquier momento” (Pólya, 2002, p. 96).

En la práctica docente Pólya también recurre a la intuición. El profesor no debería presentar a los estudiantes todas las demostraciones de manera rigurosa, pese a su necesidad y absoluta validez, se recomienda llegar a las pruebas formales una vez el estudiante haya adquirido las herramientas y sobre todo que sea capaz de reconstruir la prueba por sí mismo, entendiendo la idea clave y no por mera repetición. “Parece también recomendable, en cierta medida, el método adoptado por algunos libros de texto, los cuales presentan en principio una especie de esquema intuitivo de la idea general para pasar luego a los detalles expuestos entonces en el orden euclidiano” (Pólya, 2002, p. 150). Para Pólya, el matemático los “ve” todos intuitivamente y luego realiza una demostración formal para asegurar la exactitud de su proposición.

La relación ente intuición y resolución de problemas ha dado paso a investigaciones didácticas, que buscan potenciar esta relación, teniendo en cuenta los aprendizajes acumulados de los estudiantes, tal como se evidencia en la historia de la matemática y lo han estudiado autores no sólo como Pólya, sino otros como Piaget (Malaspina, 2007).

En suma, podemos afirmar que para George Pólya la intuición aparece en el contexto de la resolución de problemas matemáticos, es decir, en el campo de la investigación. En su libro *¿Cómo plantear y resolver problemas?*, este matemático húngaro plantea un método que incluye la inducción, la analogía y el planteamiento de hipótesis, como parte de su propia experiencia (o práctica) matemática. Para él la resolución de problemas implica un pensamiento plausible, y en ocasiones, "una visión repentina que surge 'desde abajo'. Intuitivamente, se podría decir" (Hersh, 2011, p. 43).

Cuando se indaga por la definición de la palabra "problema", aparece, en muchos casos, una alusión al deseo. Sin embargo, el sólo deseo no garantiza que se tenga que resolver un problema. Así, podemos entender por un problema algo como: "buscar conscientemente alguna acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no inmediatamente alcanzable" (Pólya, 1980a, p. 117). Entonces resolver un problema es encontrar la mencionada acción. Si la acción es difícil de encontrar diremos que tenemos un gran problema, es decir, que si no hay dificultad no hay problema. También puede interpretarse como que resolver un problema es encontrar un camino: "la actividad humana más característica consiste en resolver problemas, pensar con un propósito, idear medios para algún fin deseado" (Pólya, 1980a, p. 118). Para muchos sería deseable un método para resolver todos los problemas.

La definición de problema lleva a Pólya a distinguir entre dos tipos de problemas: los que son "para encontrar" y los que son "para probar". Así: "el objetivo de un *problema a encontrar* es encontrar (construir, producir, obtener, identificar, ...) un determinado objeto, lo desconocido del problema. El objetivo de un *problema a probar* es decidir si una determinada afirmación es verdadera o falsa, probarla o refutarla" (Pólya, 1980a, p. 119).

En cualquiera de los dos casos, para Pólya resolver un problema implica diseñar un esquema, que contemple operaciones coherentes, lógicas, matemáticas o materiales que permitan llevar la hipótesis a una conclusión. Es decir, "de los datos a lo desconocido, de las cosas que tenemos que hacer a las cosas que queremos" (Pólya, 1980a, p. 123). Para Pólya, el tema de la resolución de problemas va más allá de buscar un simple método, es algo que lo acompañará durante toda su vida:

> Tratando de ver intuitivamente el progreso natural de la solución y la concatenación de las ideas esenciales involucradas, finalmente llegué a una representación geométrica del proceso de resolución de problemas. Este fue mi primer descubrimiento y el comienzo de mi interés de toda la vida por la resolución de problemas. (Pólya, 1980b, p. 1)

Nosotros hemos sostenido a lo largo de este documento que la intuición es ese proceso que transforma las imágenes desordenas que "llegan" a la conciencia, gracias a un esfuerzo, en ideas claras que pueden ser aplicadas, por ejemplo, en la resolución de un problema. Esta imagen desordenada no llega de una manera azarosa, es producto de las experiencias y conocimientos que tenga el matemático interesado en resolver un problema. Pólya al respecto considera que: "descubrir la solución es encontrar una conexión entre cosas o ideas que antes estaban separadas (las cosas que tenemos y las que queremos, los datos y lo desconocido, la hipótesis y la conclusión)" (Pólya, 1980b, p. 2). Para el matemático húngaro, si las ideas que queremos conectar parecen muy distantes, el crédito para quien encuentra la solución será mayor: "un hilo delgado se convierte en una mera línea geométrica, las cosas conectadas se convierten en meros puntos geométricos y surge, casi inevitablemente, una imagen esquemática, gráfica de la concatenación de conclusiones matemáticas" (Pólya, 1980b, p. 2).

Lo anterior implica que un solucionador de problemas debe tener práctica y haber solucionado problemas anteriores, tal vez, menos complejos. Detrás de la solución de un problema complejo, está una mente con una estructura muy elaborada, tal y como Bergson lo exponían en la descripción de su esquema dinámico (Bergson, 2015). Cada paso avanzado por el solucionador de problemas "aporta algún conocimiento relevante; reconoce alguna configuración familiar, aplica algún teorema conocido. Así, el trabajo de la mente del solucionador de problemas parece recordar elementos relevantes de su experiencia y conectarlos con el problema en cuestión, un trabajo de movilización y organización" (Pólya, 1980b, p. 12). Esto significa que quien se enfrenta a la solución de un problema matemático debe tener conocimientos previos en la materia y una "disciplina" mental que le permita la reconfiguración de las nuevas ideas con las ya conocidas. En nuestros términos, diríamos una intuición educada.

Esas imágenes o ideas novedosas que “llegan” a la mente del matemático (que como hemos explicado no aparecen de manera misteriosa), no son habituales. Para Pólya, “las ideas brillantes son raras” (Pólya, 1980b, p. 24). Otro asunto es que la solución a un problema llegue de manera abrupta. Sin embargo, la solución “aparecerá” en la mente del matemático luego de mucho tiempo de meditar, pensar, analizar, calcular, etc., sin un aparente progreso, esto es lo que algunos llaman “destello de inspiración”; pero en realidad no es más que el resultado de todo el proceso intuitivo desarrollado por el matemático. Pólya describe este momento usando la siguiente metáfora:

> Es como entrar en la habitación de un hotel desconocido a altas horas de la noche sin saber siquiera dónde encender la luz. Se tambalea en una habitación oscura, percibe masas negras confusas, siente uno u otro mueble mientras busca a tientas el interruptor. Luego, habiéndolo encontrado, enciende la luz y todo se aclara. Las masas confusas se vuelven distintas, adoptan formas familiares y aparecen bien dispuestas, bien adaptadas a su propósito obvio. (Pólya, 1980b, p. 54).

La cita nos invita a revisar algunos asuntos. Aunque la habitación es desconocida, algún interés tuvo que llevarlo allí, el matemático tiene un deseo por resolver una pregunta, aunque inicialmente el camino le es desconocido. No sabe dónde encender la luz, pero la busca. Así, el matemático busca teoremas, teorías, procedimientos, que él por su experiencia sabe que existen. Todo parece oscuro mientras busca el interruptor. El camino de la innovación y la resolución de problemas importantes en matemáticas están llenos de dificultades intelectuales, pero el matemático en su mente tiene toda esa información que parece inicialmente desordenada y hasta desconectada de su antigua “realidad”. Finalmente prende la luz, es decir, el matemático luego de su arduo trabajo logra “organizar” sus ideas, transformar sus imágenes confusas iniciales en teoremas, conceptos, procedimientos o teorías claras que serán aceptadas por la comunidad académica luego de la correspondiente validación: “tal puede ser la experiencia de resolver un problema; una clarificación repentina que aporta luz, orden, conexión y propósito a detalles que antes parecían oscuros, confusos, dispersos y esquivos” (Pólya, 1980b, p. 54).

Esta idea novedosa que parece surgir espontáneamente, en realidad es el resultado de la reconfiguración del esquema, gracias a las imágenes confusas iniciales, en ideas claras. Este esquema que tiene el matemático en su mente es transformado por esa imagen nueva y llamativa (como la ficha que le falta a un rompecabezas) que permite, usando el lenguaje, comunicarla a la comunidad, "una idea que surge repentinamente, que muestra un elemento nuevo espectacular en medio de un reordenamiento dramático, tiene un aire de importancia impresionante y conlleva una fuerte convicción" (Pólya, 1980b, p. 60).

Pólya no sólo se interesa por describir cómo puede un solucionador de problemas tener una idea brillante, sino en cómo se resuelve el problema, lo que también está relacionado con el proceso intuitivo. Y uno de los pasos importantes consiste en buscar conocimiento relevante, lo que se corresponde con la idea de los enunciados previos y la experiencia matemática que debe tener quien resuelve un problema, dado que, para Pólya, "la solución consiste esencialmente en conectar el problema propuesto con elementos apropiados de nuestro conocimiento previamente adquirido" (1980b, p. 81). Es claro que para un matemático es imposible examinar todos los conocimientos que se han adquirido previamente. Por ello, deberá revisar inicialmente aquel conocimiento que parezca más relevante para resolver su problema, "si está familiarizado con el dominio al que pertenece su problema, usted conoce sus 'hechos clave', los hechos que tuvo más oportunidad de utilizar" (Pólya, 1980b, p. 81).

El esquema que tiene el matemático en su mente se llenará con las imágenes desordenadas y luego transformadas en imágenes claras. Esto quiere decir que, en gran parte, el trabajo de quien intenta solucionar un problema implica movilizar elementos que tiene en su memoria y que pueden ser aplicados a su problema actual.

> El elemento que necesita recordar puede estar más asociado con un cierto aspecto o detalle de su problema y recordarlo más fácilmente que a través de otros aspectos o detalles. Pero el solucionador de problemas no sabe de antemano qué detalle o aspecto lo acercará más a su objetivo. Por tanto, debe considerar una variedad de aspectos o

> detalles, y ciertamente debe considerar todos los más básicos o prometedores. (Pólya, 1980b, p. 92)

El matemático *no sabe de antemano* qué concepto o procedimiento exacto le llevará a resolver su problema. Sin embargo, tiene una amplia experiencia (matemática) y *una variedad de aspectos y detalles*, tales como axiomas, teoremas, definiciones, demostraciones que permitirán intuir el resultado esperado. Vemos cómo esa intuición está basada en la experiencia y esfuerzo del matemático. Un problema debe examinarse como un todo indivisible, pues empezar por los detalles podría desviar la atención del matemático en aspectos tal vez irrelevantes. Si se permite que todo el problema trabaje en la mente se comprenderá completamente el objetivo del problema. Así como el esquema precede a las imágenes, aquí, el todo precede a las partes: "cuando tenga la impresión de que no puede beneficiarse mucho más de la consideración del problema como un todo y esté a punto de entrar en detalles, observe que hay algo así como una jerarquía de detalles" (Pólya, 1980b, p. 93).

Este elemento esencial de la movilización de los elementos relevantes del conocimiento del matemático para conectarlos a los elementos del nuevo problema puede ser abordado desde dos puntos de vista. Al primero Pólya (1980b) lo denomina *solucionar el problema desde dentro*: "puede permanecer dentro de su problema, desarrollándolo, escudriñando sus diversas partes y esperando que ese escrutinio atraiga algún conocimiento útil" (p. 93). Al segundo, *solucionar el problema desde fuera*: "vagando por varias regiones de su conocimiento y buscando piezas utilizables… pero es obviamente imposible pasar revista a todos nuestros conocimientos o recordar todo nuestro pasado punto por punto" (p. 93).

Siguiendo con su interés en cómo resolver problemas, surge la pregunta "¿por dónde empezar? Pólya sugiere considerar las principales partes del problema, lo que implica que deben estar "claramente dispuestas y concebidas, gracias a su trabajo previo, y cuando considere que su memoria 'responde'" (Pólya, 2002, p. 51). Este punto del trabajo previo es repetitivo en Pólya, pues siempre se deben buscar puntos de contacto con los conocimientos adquiridos previamente. Se deben revisar todas las partes, examinar todos los detalles repetidamente, pero de forma diferente, es decir, combinar entre sí los detalles de diversas formas abordándolos por diferentes lados. Esta descripción vemos que coincide con la idea expuesta sobre el esquema y su relación con la noción de intuición que defendemos en este escrito. Dirá Pólya:

> Trate de ver algún nuevo significado en cada detalle, alguna nueva interpretación del conjunto. Busque puntos de contacto con sus conocimientos previamente adquiridos. Trate de acordarse de lo que le ayudó en el pasado ante circunstancias análogas. Trate de reconocer algo familiar en lo que examina y de encontrar algo útil en lo que reconoce. (Pólya, 2002, p. 52)

Luego de este proceso, es posible encontrar esa idea útil o decisiva que permita llegar a la solución o parte de ella. Sin embargo, ¿qué podría hacerse con una idea incompleta? En primer lugar, no desecharla. Si parece ventajosa se debe introducir al problema y revisar los cambios que aporta, es decir, examinar cómo cambia el problema con esa idea útil. Es posible que la nueva idea no lleve directamente a la solución, que se requiera de otra idea, que lleve por el camino correcto, "incluso si, por un cierto tiempo, no se le presenta una nueva idea verdaderamente buena; considérese afortunado si su concepción del problema se torna más completa o coherente, más homogénea o mejor equilibrada" (Pólya, 2002, p. 52).

Hemos intentado hacer una aproximación a la noción de intuición matemática, en la que se asume como un proceso dinámico que no puede desconocer el contexto real del individuo (no necesariamente el físico). En principio, las ideas pueden presentarse a la conciencia de manera "desordenada", pero luego, gracias a lo ya conocido por el individuo y, en el caso de la matemática, por los conceptos y la lógica, se convierte en un acto real y comprensible para otros sujetos. Esta transformación es el resultado del proceso intuitivo llevado a cabo por el individuo.

Entendemos en este trabajo que, a partir de unas imágenes aparentemente difusas dadas en la mente del matemático, la intuición será el proceso que permita convertirlas en imágenes claras y distintas, que sean aceptadas por la comunidad científica, e insertadas en el sistema formal de la matemática. Y este proceso intuitivo se percibe con mayor claridad en la resolución de problemas, en donde con la transformación controlada de una situación indeterminada en una determinada, se pueden convertir los elementos constitutivos originales en un todo unificado. Para John Dewey, el ser humano posee una necesidad o impulso innato por expandir su grupo social, y también es la 'indagación' o la resolución de problemas, la que le permite que su familia se transforme en clanes, tribus, reinos e imperios: "ese mismo impulso, para encontrar proyectos, rompecabezas y direcciones para el crecimiento, para hacer distinciones y conexiones, y luego para hacer nuevas distinciones y nuevas conexiones, ha dado como resultado el imperio de las matemáticas que habitamos hoy" (Hersh, 2011, p. 48).

6. **La visualización como un proceso intuitivo**

Tal como lo evidenciamos en nuestro primer capítulo al abordar la noción de intuición, encontramos también aquí que el término visualización tiene varias acepciones:

> Al final, el término visualización no tiene ciertamente un "significado habitual". Fue utilizado en la literatura como sustantivo para describir una representación gráfica, como verbo que describe el proceso de creación de una representación gráfica y, por lo común, como sinónimo de imagen visual". (Phillips, Norris y Macnab, 2010, p. 18)

La visualización en matemáticas ha tenido un resurgir en las últimas décadas, debido al desarrollo de diferentes áreas como la informática, la educación matemática, la misma ciencia, la psicología y la filosofía. Lo que ha llevado a ampliar el espectro de la visualización en matemáticas, incluyendo "tanto la visualización por medio de imágenes mentales como las visualizaciones por medio de imágenes generadas por computadora o imágenes dibujadas en papel, por ejemplo, diagramas, etc." (Mancosu, 2005, p. 13). Es decir, podemos usar la visualización para describir una representación visual, para describir el uso dado a dicha representación o para describir la actividad cognitiva que implica imaginar una representación visual.

En el libro *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*, sus autores, Phillips, Norris y Macnab, nos presentan las siguientes distinciones sobre la visualización (2010, p. 26):

1. Objetos de visualización: objetos físicos que son vistos e interpretados por una persona con el propósito de comprender algo más que el objeto en sí.
2. Visualización introspectiva: la construcción imaginativa de alguna posible experiencia visual.
3. Visualización interpretativa: el acto de dar significado a un objeto de visualización o una visualización introspectiva interpretando información de los objetos o introspecciones y colocando cognitivamente la interpretación dentro de la red existente de creencias, experiencias y comprensión de la persona.

Nos interesa ésta última concepción sobre la visualización, dado que la asume como un proceso que involucra varios aspectos del individuo. Coincide esta interpretación con la de otros autores para quienes:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión. (Arcavi, 2003, p. 217, como se citó en Gómez-Chacón, 2012, p. 204)

Así, para iniciar el proceso de interpretación de una imagen, el individuo debe tener algún tipo de experiencia, habilidad, concepto o teoría. No reconocer los procesos de mediación entre lo que se visualiza y el "ojo" de la mente implicaría una confusión entre el objeto y lo que representa: "el uso de visualizaciones en cualquier modo o estilo implica no sólo una conciencia de las propiedades del objeto en sí, sino también una familiaridad con las formas de simbolización que aparecen en el objeto sustituto de la realidad" (Phillips, Norris y Macnab, 2010, p. 27).

La visualización va "más allá" de la gráfica representada. Es un proceso más complejo que implica la organización de toda la información disponible (tal como hemos asumido de la intuición a lo largo de los capítulos anteriores). Por tanto, la visualización en matemáticas es un conocimiento objetivo que, en muchos casos, podría ser la representación global de un problema.

> Como sugiere Fischbein, tales visualizaciones pueden desempeñar un papel en algún momento anticipando la solución, porque se basan en la forma en que están construidas y pueden ser manipulados, y como consecuencia de ello son de ayuda para transformar el problema en un problema de composición figurativa. (Giardino, 2010, p. 37)

Fischbein (2002) también ha afirmado que, cuando la visualización se incorpora en la actividad cognitiva, se convierte en un factor esencial que contribuye a la comprensión intuitiva. Así mismo, las representaciones visuales permiten la organización de la información en representaciones sinópticas, que conllevan un factor importante de globalización.

Otros autores afirman que "la visualización es la 'intencionalidad' que no está presente en el mero ver" (Gómez-Chacón, 2012, p. 204). Sabemos que, a medida que adquirimos conocimientos, nuestras intenciones llegan a ser más determinadas. Desde un punto de vista fenomenológico, “el conocimiento debe ser visto como un producto de intenciones e intuiciones” (Tieszen, 1989, p. 79). Así, los enunciados matemáticos (y en este caso los objetos matemáticos visualizados) son vistos como expresiones de intenciones. La intención es a su vez un objeto de un acto cognitivo y este acto se dirige a la intención (como objeto), “en la experiencia ordinaria, los actos se dirigen hacia tipos comunes de objetos, no hacia intenciones” (1989, p. 80).

Las intenciones, en este contexto, se refieren a procesos en los que se verificará la presencia de objetos, los cuales pueden existir independientemente de nuestras construcciones. Estas intenciones están asociadas con expectativas o anticipaciones sobre la experiencia que se tiene con los objetos. Ahora bien, existen intenciones vacías se dan cuando la expectativa pura acerca del objeto puede o no ser realizada. Por tanto, los significados de las constantes lógicas se entenderán en términos de cumplimiento de intenciones.

En este marco, debemos diferenciar entre los objetos de la percepción (meros objetos visuales) y los objetos de la matemática. Por ejemplo, la representación gráfica de un cuadrado es un objeto individual que cumple unas intenciones determinadas al ser un objeto particular. En el caso de los números naturales, un objeto único (por ejemplo, el número 0), no es considerado un objeto de intención, puesto que la intención expresada sobre un número no es proporcionada por la intuición perceptiva, es decir, el referente de la teoría de conjuntos y el número se relacionan en términos de objeto de representación.

Cuando hablamos de imágenes y visualización debemos referirnos también a la percepción. Volvamos con el ejemplo del cuadrado. Si observamos el cuadrado sobre una de sus puntas y no de la forma usual (sobre uno de sus lados completamente horizontal), ¿cómo se reconoce que es un cuadrado? Para responder a esto, necesitamos distinguir entre *mera percepción* y *reconocimiento perceptual*.

En la *mera percepción* se generan descripciones de lo que se percibe. En el *reconocimiento perceptual*, además de lo anterior, se debe adicionar un paso para encontrar la mejor coincidencia entre los descriptores generados y los almacenados para la apariencia convencional de la figura. Y aquí encontramos otra similitud con la idea de intuición que hemos trabajado: la reconfiguración de los saberes pasados con los nuevos.

En este punto, la percepción sobre un objeto y las creencias que de él se pueden formar tienen que ver con el conocimiento, en este caso, de las verdades geométricas (teniendo en cuenta el ejemplo del cuadrado). Como lo recuerda Giaquinto, "la historia comenzó con un relato de la percepción de la cuadratura en la que la detección visual de las simetrías de reflexión es crucial" (Giaquinto, 2005a, p. 50). El concepto de cuadrado lleva implícito un conjunto de descriptores y para llegar a su concepto geométrico es necesaria una ligera modificación de su concepto perceptual. Poseer estos (u otros) conceptos "implica tener ciertas disposiciones formadoras de creencias que se pueden activar al acceder al conjunto de descripciones almacenadas para los cuadrados, ya sea al ver algo como un cuadrado o al visualizar un cuadrado" (Giaquinto, 2005a, p. 50).

Las diferencias entre los tipos de objetos no prescinden del sentido de "observación", dado que se pueden entender como un proceso de verificación de la hipótesis que requiere de un procedimiento apropiado. Así, "estos procesos se construyen genéticamente a lo largo del tiempo a medida que nuestras intenciones con respecto a tales objetos se construyen, se refuerzan y se reforman en el crecimiento del conocimiento" (Tieszen, 1989, p. 174).

Podríamos inferir que una creencia adquirida luego de este proceso se considera como conocimiento, dado que, al mismo tiempo, "alguna experiencia visual es crucial para desencadenar la disposición relevante de formación de creencias; y es claro que esta forma de llegar a la creencia pasa por el desempaquetado de definiciones, el análisis conceptual o la deducción lógica" (Giaquinto, 2005a, p. 51). El punto es que estos procesos de verificación existen en las ciencias fácticas, lo que guarda analogía con la visualización y la intuición matemática. Por ello, "podemos afirmar que existe una analogía entre la intuición perceptiva y matemática en la medida en que en cada caso nos ocupamos de ciertos procesos que producen evidencia de las creencias de [un matemático] en estos respectivos dominios de conocimiento" (Tieszen, 1989, p. 174).

La creencia de un matemático en algún axioma probablemente lleva implícitos varios procesos causales diferentes. Así, como decía Kitcher, "recuerdos de lectura de textos y conferencias auditivas, reconocimiento perceptivo de que el axioma es válido para un segmento inicial de una secuencia de símbolos de trazo y, tal vez, algunos procesos adicionales” (1984, p. 93). A ello hay que añadir que no se deben descartar los procesos incorrectos, los cuales también pueden cumplir una función epistemológica como justificaciones locales.

Los procesos que garantizan creencias “correctas” dependen de que esas creencias de fondo sean las apropiadas.

> Podemos obtener creencias matemáticas garantizadas mediante el uso de la visualización mental si nuestra memoria y percepción mantienen creencias adecuadas (si, por ejemplo, sostienen la creencia de que otros no están en desacuerdo). También podemos obtener una creencia matemática justificada a través del uso de la memoria y la percepción solamente: esto ocurre cuando nuestro conocimiento de las verdades matemáticas se basa en experiencias de lectura de libros o audición de conferencias (o en recuerdos de tales experiencias) Aquí hay una asimetría y la asimetría es importante. (Kitcher, 1984, pp. 93–94)

La experiencia visual no debe ser usada como una forma de recordar el pasado o como una evidencia, “la experiencia visual sirve simplemente para desencadenar ciertas disposiciones formadoras de creencias” (Giaquinto, 2005a, p. 48). Ahora bien, aceptar cualquier creencia depende de la experiencia. Por tanto, la experiencia visual no puede ser un conocimiento *a priori*, como no lo es tampoco la intuición. Aunque la experiencia visual es necesaria para la formación de creencias, esto no implica dejar de lado las definiciones, los análisis conceptuales o el uso de la lógica.

Ahora bien, creencias como que “toda función continua debe ser diferenciable en todas partes excepto en puntos aislados”, o “la suposición de que las dos circunferencias dibujadas en la construcción del triángulo equilátero sobre cualquier segmento se encuentran en un punto (el vértice del triángulo equilátero)” parecen obvias desde lo visual, pero resultan ser injustificadas. En la matemática, estas situaciones generaron una especie de desconfianza en el proceso de visualización, concediéndole prioridad a lo lingüístico.

Por tanto, el uso de diagramas e imágenes se dejó para un nivel heurístico de las matemáticas y no para lo formal. Para algunos matemáticos una verdadera demostración debe ser independiente de las imágenes y figuras. Ahora bien, uno de los aspectos que repercute para que se vuelva a la visualización, tiene que ver con la aparición y aumento de técnicas de visualización en informática y su posterior impacto en la matemática. Los gráficos por computador o las tablas son una forma de tener una comprensión visual rápida. Pero, "la función epistémica de la visualización en matemáticas puede ir más allá de la meramente heurística y ser de hecho un medio de descubrimiento" (Mancosu, 2005, p. 22). Es decir, las representaciones gráficas ayudan a visualizar objetos complejos y de esta forma captar sus propiedades. Por tanto, la capacidad visual también depende de la práctica.

Tenemos, por ejemplo, el caso de los gráficos de Cayley (CG), los cuales se basan en geometría y teoría de grafos:

> Las imágenes de los CG no son ilustraciones casuales: están construidas de manera sistemática en correspondencia con la teoría. Existe un vínculo teórico preestablecido entre las etapas: el grupo y el CG, y el CG y la imagen, es decir, la correspondencia grupo-CG está definida con precisión y la sintaxis de la "notación" (dibujo) de los CG es uniforme y precisa; el razonamiento pictórico con CG parece ser confiable. La apelación a la técnica de construcción geométrica y gráfica bien desarrollada hace que las manipulaciones prácticas con CG sean procedimientos matemáticos correctos. En este sentido, se puede repensar el punto de vista estándar sobre las demostraciones matemáticas: los CG juegan un papel clave en la mayoría de las demostraciones en la teoría de grupos geométricos y sus imágenes pueden considerarse como parte del razonamiento justificativo. (Starikova, 2010, p. 50)

Establecer sistemas esquemáticos de razonamientos formales permite hacer un análisis lógico de una afirmación y, a diferencia de lo que muchos creen, los sistemas visuales no serán más "engañosos de lo que puedan ser los sistemas lingüísticos". Tanto en el uso de sistemas visuales o lingüísticos, se presupone una base adecuada de "primeros principios" o conceptos relevantes que permitan justificaciones de sus afirmaciones locales. El conocimiento puede ser proporcionado por la práctica lingüística, aunque existen otras disciplinas matemáticas que pueden defender estos principios recurriendo a procesos visuales.

Tal y como sucede con la intuición, "aunque la discusión filosófica del pensamiento visual en matemáticas se ha concentrado en su papel en la prueba, el pensamiento visual muestra más a menudo su valor en el descubrimiento que en la prueba" (Mancosu, 2008, p. 32).

Sin embargo, el pensamiento visual es fundamental en la práctica matemática, aporta a la comprensión de fórmulas, algoritmos, pero también aporta para decidir si un método de prueba es correcto o no. Es decir, es fundamental para la explicación matemática. Sin embargo, muchos consideran que las representaciones visuales no son confiables, y de allí que nos son consideradas como pruebas.

La historia de la matemática evidencia que las demostraciones han sido consideradas como secuencias de pasos lingüísticos, mas no esquemáticos, dado que serían considerados argumentos "superfluos". No obstante, desde la década de los 90 se han diseñado programas destinados a elaborar sistemas de razonamientos formales recurriendo a diagramas que puedan establecer su validez. En general,

> La práctica matemática casi nunca procede por medio de sistemas formales [...] de hecho hay razones para evitar volverse formal: en una versión formalizada de una prueba, la línea de pensamiento intuitiva original puede verse oscurecida por una multitud de pasos minuciosos. (Mancosu, 2008, p. 32)

No debería existir oposición entre los razonamientos visuales y los lingüísticos. Esta supuesta "confrontación" radica en la enunciación de la "pregunta sobre la visualización matemática dentro del marco tradicional" (Giardino, 2010, p. 31). En el planteamiento de la pregunta, no son claros los criterios para distinguir los sistemas lingüísticos de los visuales y porque, para muchos, sólo los primeros son considerados como los que transmiten pruebas rigurosas.

Intentar dar a la visualización el carácter riguroso y dogmático de la formalización "parece privar a la visualización de su eficacia y sencillez, que son por el contrario sus aspectos más interesantes desde un punto de vista cognitivo" (Giardino, 2010, p. 32). Las "pruebas visuales" también tienen un paso a paso como las pruebas lingüísticas. Así mismo, en el proceso de "descubrimiento" vamos encontrando una justificación de lo que queremos probar. Casos en la historia muestran ejemplos de ello y "demuestran cómo el pensamiento intuitivo o las visualizaciones son elementos adecuados en el proceso de encontrar una solución a un problema o sentimiento justificado en nuestras creencias" (Giardino, 2010, p. 33). Por tanto, podemos rechazar la premisa que induce a una oposición entre los procesos visuales y los lingüísticos en el razonamiento matemático.

Las matemáticas son un fenómeno complejo y van más allá de la prueba o del dogma de la lógica. Si se toma el caso de la enseñanza y la investigación, no se ve la necesidad (por ejemplo, en Poincaré o Gödel) de tener que elegir entre la lógica moderna (formalización, rigor) y el mérito multimodal (razonamientos prácticos). Es importante reconocer que los objetos de visualización son elementos que pueden conducir a pruebas matemáticas. Cualquier profesor de matemáticas puede confirmar que explicar una prueba plena no sirve para la comprensión inmediata del estudiante, "de hecho, a menudo, las imágenes o argumentos informales desempeñarán un papel 'ideal' de explicación, mientras que una plena prueba no será ninguna explicación en absoluto en ese contexto" (Giardino, 2010, p. 32).

Cuando no se sale del dogma de la lógica se le da prioridad a la actividad de "probar" menospreciando la idea de "buscar razones". El desarrollo de las matemáticas parece mostrar que la necesidad de un teorema se encuentra después de excavaciones profundas y de centrar su atención en las posibilidades que brinda ese teorema. En este mismo sentido, muchos matemáticos no están tan sólo interesados en probar sus conjeturas sino en encontrar las razones por las que la conjetura es verdadera. Demostrar una proposición no ofrece las razones de por qué "funciona".

Uno de los "peligros" en que se puede incurrir en la visualización (tal como en la intuición) es el de conducir a conclusiones falsas. Otro peligro es que la figura sea tan familiar para nosotros que confundamos las cifras. Podría surgir, por ejemplo, una confusión: ¿cómo saber si se está indagando por las propiedades de la figura y no por el teorema que ella representa? Sin embargo, debemos anotar que no es la figura la que nos conduce al error, "más bien, lo que es engañoso es el razonamiento que hay 'detrás' de la figura [...] el error está en el razonamiento informal que está detrás de la construcción de estas figuras" (Giardino, 2010, p.

36). Otras veces los errores son post-visuales, es decir, se hacen conjeturas equivocadas sobre la figura dibujada.

En el desarrollo de este capítulo hemos logrado identificar algunas características de la visualización que nos recuerdan la noción de intuición que estamos proponiendo en los capítulos precedentes. A continuación, intentaremos describir más puntualmente las similitudes entre la visualización y la intuición en matemáticas.

6.1 Visualización e intuición

A lo largo de este documento, hemos mostrado que la intuición está relacionada con la visión: "de hecho, una forma alternativa de describir la intuición matemática sería definirla como la capacidad de perpetuar la función de la visión, pero por medios distintos de los ojos" (Giardino, 2010, p. 30). Para Kant, por ejemplo, era necesario "usar la imaginación visual como un medio para obtener conciencia intuitiva de objetos abstractos" (Chudnoff, 2014, pp. 5–6).

Recordemos de nuestro primer capítulo que la intuición en matemáticas no tiene una definición en la que tanto matemáticos como filósofos e incluso educadores coincidan completamente. Por ejemplo, algunos la han asumido como "el tercer ojo" que sólo tienen matemáticos prodigiosos como Ramanujan. Otros la han utilizado para representar "lo informal, o no riguroso, o *visual*, u holístico, o incompleto, o tal vez incluso convincente a pesar de la falta de pruebas" (Tieszen, 1989, p. 11).

Recordemos que una de las características es su aparente inmediatez que, como ya hemos estudiado, se refiere a que luego de revisar varias veces una teoría cuando vemos algunos de sus resultados nos parece obvia, pero es por toda la experiencia matemática que se tiene detrás de esta teoría. Y en este contexto, Fischbein sugiere que el principal factor que contribuye a este efecto de inmediatez es la visualización. Y aunque parece trivial no deja de ser cierto "que uno tiende naturalmente a pensar en términos de imágenes visuales y que lo que uno no puede imaginar visualmente es difícil de lograr mentalmente" (Fischbein, 2002, p. 103). Tal es así que matemáticos como Poincaré denominaron geómetras a quienes para él tenían un pensamiento más intuitivo y "Hilbert, al describir las formas en que piensa un matemático, nos recuerda el papel fundamental de las imágenes" (Fischbein, 2002, p. 103).

De ahí que algunos autores relacionen fuertemente la intuición con la visión: “la práctica matemática revela que las intuiciones juegan un papel indispensable y que las visualizaciones son herramientas importantes para generar fuertes intuiciones. Esto ocurre no sólo en la geometría, sino también en las teorías algebraicas” (Horsten & Starikova, 2010, p. 2). En casos especiales, es posible inferir teorías o proposiciones matemáticas correctas a partir de imágenes, del mismo modo que después de un proceso intuitivo podríamos llegar a conclusiones verdaderas. Las representaciones visuales tienen un papel en el conocimiento, nos permiten reconocer e identificar propiedades, hacer inferencias y, por qué no, equivocarnos. De allí que podamos concebir los objetos visuales como dispositivos que aportan al proceso de intuición matemática.

Para *Fischbein, no es posible pensar puntos o líneas geométricas sin visualizarlas, y estamos “atrapados” en las representaciones intuitivas, pues pareciera imposible pensar el tiempo sin espacializarlo*. El punto es que dichas representaciones no son posibles de manipular conceptualmente (Bergson, 1956). Para Bergson, el tiempo espacializado es diferente al tiempo de la conciencia, a la que él llama duración (Bergson, 1999) y sólo la intuición es capaz de captar esta duración: “consideramos que la representación espacializada del tiempo es también una cuestión de elaboración intuitiva” (Fischbein, 2002, p. 8). El individuo está traduciendo constantemente las operaciones en representaciones espaciales que luego se convierten en imágenes (en representaciones visuales, para el asunto de este capítulo). Así:

> Las visualizaciones pueden ser realistas o esquemáticas y pueden representar lo directamente visualizable o lo no visualizable. Además, la eficacia de las representaciones visuales está relacionada con los contextos en los que se utilizan; no hay camino directo de la visualización a la comprensión. (Phillips, Norris y Macnab, 2010, p. 9)

Retomemos la última frase de la cita “no hay camino directo de la visualización a la comprensión”. Esto nos lleva a entender la visualización como un proceso, tal y como hemos entendido la intuición en este documento. Sabemos que la actividad matemática implica diversos recursos cognitivos y que la intuición requiere de conocimientos previos del individuo y de su habilidad para reconfigurar lo nuevo a partir de lo ya conocido. Y justamente una representación visual podría ser una de esas maneras en que la intuición muestra sus conclusiones y generalidades. Por tanto, ni la intuición, ni la visualización son formas de conocimiento inmediato de los hechos matemáticos. Así, de acuerdo con Giardino, entenderemos la actividad matemática como "el resultado de las interconexiones entre los conocimientos adquiridos y las creencias inestables: el sistema de conocimiento matemático es dinámico y está siempre abierto a la reconfiguración". De hecho, los resultados de la práctica matemática muestran que "la intuición y la visualización son partes interrelacionadas de una vasta red de conocimientos" (2010, p. 39).

Gracias al proceso intuitivo se preservan las interconexiones permitiendo llegar a generalidades, conclusiones y la estabilidad de ciertas creencias. Se puede afirmar que:

> Los procesos intuitivos y la visualización aparecen como algo profundamente natural, tanto en el nacimiento del pensamiento geométrico como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias de la actividad matemática (Gómez-Chacón, 2012, p. 203).

Investigaciones en torno a la visualización sugieren que en la práctica matemática las imágenes son necesarias para el desarrollo de la intuición. Aunque se les ha relegado un poco, estudios recientes también muestran que las gráficas proporcionan algo adicional e importante para los conocimientos matemáticos y las demostraciones.

Históricamente se le ha dado mayor importancia a la visualización y a la intuición en la geometría. Sin embargo, las gráficas de *Cayley* son un buen ejemplo de cómo expandir su importancia al álgebra y al análisis real para comprender la noción de grupo: "la evolución de la teoría geométrica de grupos sugiere fuertemente que la intuición matemática, en ciertos casos, como una cuestión de hecho empírico, ha dependido de representaciones pictóricas para su crecimiento y desarrollo" (Starikova, 2010, p. 41). Aquí se está usando la idea de intuición "como algo que es capaz de desarrollo por medio de un razonamiento teórico sistemático y de una comprensión cada vez más profunda y variable de los conceptos" (Starikova, 2010, pp. 41–42).

Por tanto, no estamos asumiendo que, al observar una representación gráfica, nos será evidente el concepto o entenderemos inmediatamente una teoría. Al igual que la intuición, una buena gráfica requiere de unos preconceptos, de un conocimiento de lo que se quiere ejemplificar o demostrar con dicha representación visual. Si no tenemos una idea, por ejemplo, de lo que significa un grupo, o una intuición educada en este campo de estudio, no será fácil comprender, por ejemplo, las gráficas de *Cayley*. Si a un estudiante que nunca ha revisado algo como la definición de grupo se le presenta una gráfica de *Cayley*, ¿podrá deducir qué es lo que significa ese grafo? ¿Podrá comprender su construcción? La respuesta es no. Al igual que en la intuición el conocimiento se produce luego de un proceso, no es un conocimiento inmediato, y sólo será obvio lo que nos "dice" la gráfica una vez que tengamos claros los conceptos sobre lo que es un grupo y conozcamos previamente ciertos conceptos geométricos:

> Consideremos una representación de grupos como simetrías de objetos geométricos. Es fácil entender cómo actúa el grupo cuando está determinado por algún objeto (geométrico). El medio para esta intuición podría ser una imagen o un modelo en papel de un triángulo equilátero, en el que se pueden realizar giros y rotaciones. Esto da una intuición física o geométrica de la operación de grupo: la composición de los movimientos; el axioma de la existencia de un elemento inverso sería intuido como realizando una transformación hacia atrás: si hacemos girar un triángulo 120 grados en el sentido de las agujas del reloj podemos girarlo hacia atrás y obtener el estado inicial. (Starikova, 2010, p. 46)

Es decir, el grafo es el resultado de un proceso de intuición. Muchos de los "descubrimientos visuales" tienen implícitas consideraciones matemáticas. Y justamente se llega al descubrimiento porque se activan todos los conceptos, teoremas, proposiciones y demás elementos de que dispone el matemático a la hora de realizar dicho descubrimiento: "lo que desencadena la activación de estas disposiciones es la experiencia visual consciente, de hecho, atenta; pero la presencia y funcionamiento de estas disposiciones está oculta al sujeto" (Giaquinto, 2008, p. 33). Y aunque el proceso visual de identificación parece fácil o inmediato, ocurre una sensación de obviedad (como sucede con la intuición), pero no es ni obvia ni inmediata: lleva todo un proceso oculto que sólo quienes han estado familiarizados con los conceptos matemáticos "ocultos", podrían entender lo que se está intentando probar.

La visualización también aporta un elemento importante, pues nos permite entender un problema de manera global:

> Una de las principales funciones de las representaciones pictóricas en los procesos de razonamiento es producir un relato global, simultáneo y panorámico de lo que en realidad es un proceso, una sucesión de eventos. La globalización no conduce necesariamente a una aceptación intuitiva, pero puede contribuir a producir o mejorar una aceptación intuitiva. Se puede suponer que los efectos de varios mecanismos de globalización suelen estar combinados. (Fischbein, 2002, p. 120)

Cuando se concretan las imágenes visuales, aparece en el individuo una sensación de evidencia o inmediatez. Al igual que cuando algo parecía obvio se relacionaba con la intuición. Sin embargo, lo que está detrás de la visualización es una organización de los datos disponibles de estructuras que ya le son significativas al matemático o al estudiante. Los gráficos pueden servir como guía —como era una de las concepciones de Gödel sobre la intuición, estudiado en el capítulo 2— para desarrollar una solución. En palabras de Fischbein: "las representaciones visuales son un dispositivo anticipatorio esencial" (2002, p. 104). En este sentido, podemos entender la inmediatez no como "algo" que se percibe directamente, sino que involucra al individuo, desde su emocionalidad o su realidad matemática y sus experiencias en otros ámbitos.

> La intuición, como hemos subrayado con frecuencia, implica una especie de empatía, un tipo de cognición a través de la identificación interna directa con un fenómeno. Una representación visual con sus detalles ricos y concretos media una participación tan personal, generalmente mucho mejor que un concepto o una descripción formal [...] Las representaciones visuales y, en general, las imágenes mentales juegan un papel considerable en la actividad creativa. (Fischbein, 2002, p. 104)

Entonces tenemos que "la intuición, así como la visualización no son una especie de acceso directo a los hechos matemáticos, sino que están mediadas por el conocimiento y la experiencia" (Giardino, 2010, p. 33). Es decir, la experiencia y el conocimiento matemático del individuo se requieren tanto para la intuición como para el análisis propio del proceso visual.

Cuando se plantea un problema y éste quiere ser representado con una figura, el matemático debe tener claros varios conceptos que intervendrán en la solución. Por ejemplo, si se pide demostrar la semejanza de triángulos, se debe conocer la definición de triángulo, de proporcionalidad, de congruencia, al igual que en la intuición, si no se tienen unos conceptos matemáticos o de experiencia en el tema adquiridos no se podrá llegar a ninguna solución. Si se desea construir una figura que cumpla las condiciones de determinado problema, es necesario que se comprenda el problema y que se cuenten con los conocimientos necesarios para que la figura en realidad represente lo que estamos interesados en solucionar. Es decir, el conocimiento matemático es el conocimiento de hechos interconectados. La figura no es un simple hecho aislado, sino que es un elemento de un vasto sistema de conocimientos. Esto no quiere decir que no se presenten errores, recordemos que tanto la intuición como la visualización son procesos que pueden ser falibles. Sin embargo, al estar entrelazados con el resto del sistema compartido de conocimientos, prácticas y procedimientos se tiene una cierta garantía de fiabilidad.

Ahora bien, siempre será necesario comprobar que "(i) las hipótesis introducidas son correctas y coherentes con el sistema de conocimiento que se presupone (comprobación de errores pre-visuales), y que (ii) el medio visual no introduce restricciones propias en la representación del área objetivo (comprobación de errores post-visuales)" (Giardino, 2010, p. 38). Comprobar (i) y (ii) se puede hacer en el trascurso de la práctica. Más aún, esto es precisamente lo que han hecho los matemáticos en su quehacer cotidiano.

Al ser falible este proceso de visualización, se pueden presentar errores en las deducciones, una podría ser por plantear una hipótesis errónea sobre cómo dibujar una figura o la hipótesis errónea se realizar sobre las propiedades de la figura. ¿Acaso no se han deducido propiedades falsas en la matemática usando el lenguaje simbólico? La historia de la matemática también nos ha mostrado que no es necesariamente cierto que saber las definiciones implique visualizar el camino correcto —esta discusión ya la tuvimos en el capítulo 2 a propósito de los escritos de Poincaré sobre lógica e intuición—: lo que se necesita es saber cómo usar dichas definiciones y proposiciones para visualizar de manera adecuada.

A propósito de la experiencia para el conocimiento matemático, autores como Fischbein sostienen que presentar objetos concretos para estudiar objetos abstractos permite una mayor familiarización con estos últimos y unas interpretaciones más significativas. En este mismo sentido, Giardino:

> La absorción de las técnicas, así como las prácticas más intuitivas, tales como visualización, están controladas por la experiencia. No hay nada como la intuición matemática *ex nihilo*: todo depende de cuánto estamos familiarizados con las relaciones en nuestra red de conocimiento matemático, así como de la experiencia que tengamos con las manipulaciones matemáticas. (2010, p. 39)

En este sentido, Fischbein (2002) nos recuerda que las representaciones visuales no son en sí mismas un conocimiento: "las imágenes visuales son un factor importante en la inmediatez, pero la inmediatez no es una condición suficiente para producir la estructura específica de una cognición intuitiva" (Fischbein, 2002, p. 103). Aunque se perciba el esquema de un dispositivo electrónico, no se garantiza una comprensión profunda de su funcionamiento, esto sólo será posible si se ha recibido una formación especial. Es decir, se requiere de la experiencia matemática o del "mundo real" para entender su funcionamiento.

Podemos entender las imágenes visuales como aquel dispositivo que facilita el proceso de intuición. De allí, que podamos establecer una conexión entre la experiencia sensorial y la observación en matemáticas que, en términos de Gödel, es análoga a la intuición matemática: "están conectados en otro sentido: uno ve un diagrama (percepción sensorial) que induce una intuición (percepción matemática) de algo muy diferente. Esto es lo que sucede cuando una imagen no es simplemente una ayuda heurística, sino una prueba real" (Brown, 2005, p. 66).

La visualización y la intuición no deben ser consideradas únicamente como sistemas de reacciones automatizadas. Parecieran automáticas porque la mente está educada en conceptos y teorías, porque existe una experiencia matemática previa y la interiorización de los enunciado matemáticos lleva a que sea una reacción aparentemente evidente e inmediata. En realidad, son sistemas de creencias con expectativas autónomas donde la experiencia juega un papel fundamental "porque, en ciertas circunstancias, configura expectativas estables. Tales expectativas se volvieron tan estables, tan firmemente unidas a ciertas circunstancias que su origen empírico puede, aparentemente, desaparecer de la conciencia del sujeto” (Fischbein, 2002, p. 88). Por tanto, la experiencia puede generar intuiciones visuales estables y sistemas de creencias organizados y aparentemente autónomos.

Como hemos mencionado, algunas situaciones dadas en la práctica matemática no se generan de manera natural y directa desde las nociones científicas o matemáticas, a veces una representación visual podría ser un “puente” para la comprensión o ser ella misma generadora de conocimientos. Este último punto podemos evidenciarlo con el ejemplo antes mencionado de las gráficas de Cayley. Estos grafos han sido considerados como objetos matemáticos, no sólo como herramientas útiles para visualizar grupos.

> La riqueza y variedad de intuiciones de los gráficos de Cayley producen un vínculo con otras áreas de las matemáticas, como la teoría de grafos, pero también producen un vínculo fructífero entre el álgebra y la geometría. El impacto más importante e intrigante de los CG en álgebra es la nueva geometría: se relacionan con la noción de ‘grupo’. (Starikova, 2010, p. 47)

Pareciera casi imposible tener una intuición de los grupos sin la intermediación de las gráficas de Cayley, pues gracias a las imágenes se puede tener un conocimiento de los grupos y usar un lenguaje geométrico. Además de la idea de estructura de grupo, gracias a estos grafos, podemos evidenciar en la práctica cómo se combinan elementos geométricos/diagramas con conceptos algebraicos y la misma idea de grupo.

> La principal función de la intuición en este caso pone de relieve la estructura de los objetos matemáticos. Esto se logró mediante la introducción de una “nueva presentación” de los objetos matemáticos abstractos, grupos que no son fácilmente intuidos, a través de objetos de otras áreas de las matemáticas (en nuestro caso, gráficos). (Starikova, 2010, p. 51)

Este es un gran ejemplo de cómo los diagramas son poderosos instrumentos que pueden facilitar el proceso intuitivo y que a su vez pueden ser un buen comienzo para nuevas intuiciones que finalmente conducirán “a vínculos conceptuales avanzados con la geometría y la introducción de un amplio arsenal para el álgebra geométrica” (Starikova, 2010, p. 51). Más aún, también es claro que el uso y entendimiento de estos grafos implica un bagaje, una experiencia matemática del individuo que se enfrenta a este nuevo conocimiento.

Hasta este punto hemos mostrado que la visualización, como la intuición, es un proceso que requiere de la experiencia del matemático. En el siguiente apartado describiremos algunos ejemplos de cómo los matemáticos han usado la visualización en la práctica: creando y demostrando nuevas teorías, así como el papel de ella en el proceso educativo.

6.2. La visualización y la práctica matemática

El foco de la filosofía de la matemática está centrado en la teoría. Muchos filósofos están interesados, por ejemplo, es revisar si un sistema es consistente, si los teoremas son verdaderos, en cuáles son los objetos de cierta teoría, entre otros. Y aunque en los últimos años existe un interés creciente por reivindicar la práctica matemática, “cuando se les pide a los filósofos de las matemáticas que consideren la actividad matemática, en oposición a los cuerpos de las matemáticas establecidas, tienden a pensar en la actividad investigadora de los matemáticos profesionales, típicamente, probando teoremas” (Giaquinto, 2005b, p. 75). Pareciera que esa es la única actividad que pueden hacer. Ignoran todo un campo de otras posibilidades, tales como, la creatividad, las aplicaciones, los nuevos conocimientos, las justificaciones parcialmente verdaderas, la explicación sobre la comprensión de los objetos de la matemática, entre otras.

En este abanico de posibilidades, Mancosu (2008), en la introducción de su libro *The Philosophy of Mathematical Practice*, afirma que:

> Procesos de visualización (por ejemplo, por medios de imágenes mentales) son fundamentales para nuestra actividad matemática y recientemente esto se ha convertido una vez más en un tema central debido a la influencia de las imágenes de computadora en la geometría diferencial y la teoría del caos y al llamado a enfoques visuales de la geometría, la topología y el análisis complejo. (p. 14)

Para el autor, es cada vez más significativo el uso heurístico de las representaciones visuales, y no puede seguir siendo un tema ignorado cuando se estudia el pensamiento matemático. Su importancia es clara: “incluso los algoritmos que nos enseñan en la escuela secundaria para el cálculo de varios dígitos son de naturaleza viso-espacial" (Mancosu, 2008, p. 39). Recordemos que el pensamiento visual aporta en el "descubrimiento", es fundamental para la epistemología de las matemáticas y, a pesar de esto, es un camino al que le falta mucho por explorar.

Para Mancosu, existe una necesidad apremiante de extender la teoría del conocimiento matemático donde se aborden temas gnoseológicos, que incluyan "fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación, y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales respecto del problema del acceso a 'objetos abstractos'" (Mancosu, 2016, p. 132).

La renovación de la filosofía de la matemática debe incluir un aspecto fundamental como la práctica matemática. Algunos problemas filosóficos se vuelven relevantes sólo cuando se toma en consideración cierta área de la matemática:

> Por ejemplo, la geometría, la teoría de nodos y la topología algebraica seguramente despertarán interés (y desconcierto filosófico) sobre el tema del razonamiento diagramático y visualización, mientras que otras áreas de la matemática, por ejemplo, la teoría elemental de los números, pueden tener mucho menos para ofrecer en esa dirección. Además, para teorizar acerca de estructuras en filosofía de la matemática parece sensato ir más allá del álgebra elemental, y observar con atención que está sucediendo en áreas avanzadas, como la cohomología, donde el razonamiento «estructural» es generalizado. Finalmente, algunas áreas de la matemática pueden brindar verdaderamente a la filosofía de la matemática herramientas útiles para abordar importantes problemas filosóficos. (Mancosu, 2016, p. 132)

En este mismo sentido, encontramos los procesos de visualización, que se han convertido en un tema central de interés gracias al desarrollo de las imágenes por computador en la geometría diferencial, la teoría del caos, la topología, la geometría y el análisis complejo. La visualización matemática juega un rol epistémico dado que los recursos visuales son fundamentales en la captación cognitiva de estructuras. En discusiones recientes sobre la filosofía de la matemática, ha tomado relevancia el tema de la visualización y el razonamiento esquemático.

Gracias a la incursión de los sistemas computarizados para la visualización de gráficas complejas fue posible tener una guía para llegar a demostraciones matemáticas de enunciados muy complejos. En las últimas décadas se ha visto una "revolución" contra las matemáticas puramente simbólicas, haciendo un llamado de atención sobre los métodos visuales: "su llamado a un regreso a la intuición y a la visualización es más profundo y tiene sus raíces en una apreciación de la importancia de la intuición visual en áreas como la geometría, topología y análisis complejo" (Mancosu, 2005, p. 20). De hecho, las investigaciones en el campo de la psicología cognitiva muestran que el papel de las imágenes está restringido al razonamiento.

Sin embargo, también están cobrando mayor relevancia las demostraciones visuales, no sólo en el campo de la matemática misma sino de la educación. Una demostración basada en imágenes o diagramas, es decir, sin palabras, pueden ayudar a "entender por qué se cumple una afirmación matemática; nos muestran vívidamente el motivo por el que una propiedad es verdadera y, a veces, incluso nos sugieren cómo demostrarla de una manera formal" (Luque, 2013, p. 89). Este tipo de demostraciones se han dejado en el olvido gracias a ese ímpeto y casi obsesión de la matemática moderna por el rigor, "desde hace unas décadas, rescatadas primero por la didáctica y ahora reivindicadas desde el cómputo por ordenador y la matemática experimental, ocupan su merecido espacio" (Luque, 2013, p. 89).

Como se ha mencionado, la visualización no ha tenido el papel preponderante como el de la representación simbólica: "de hecho, el progreso de las matemáticas en la historia podría fácilmente verse como algo que va de la mano de una renuncia gradual a la intuición geométrica, en beneficio de una abstracción cada vez mayor" (Longo & Viarouge, 2010, p. 18). No obstante, en los últimos años los resultados de investigaciones sobre visualización han expuesto sus beneficios para la interpretación, el planteamiento y solución de problemas y su función de puente para relacionar conceptos matemáticos con otros conceptos de cualquier campo del saber.

La visualización en la historia de la ciencia tiene una larga trayectoria desde la geometría de Euclides, pasando por la idea de perspectiva, la geometría cartesiana, los grafos de Euler y las gráficas por computador de la actualidad. Científicos como Galileo, Descartes, Newton, Maxwell, Riemann, Einstein, Feynman, entre otros han usado la visualización expandiendo su alcance gracias a intentos de representar ciertos fenómenos de la naturaleza que, en muchos casos, son casi imposibles de observar directamente:

> Entonces, ¿por qué los científicos se *molestan* en dedicarse a la visualización? La naturaleza empírica de la ciencia implica que los científicos a menudo se dedican a dar sentido a los datos que han recopilado y a comunicarse con otros científicos al respecto. La visualización puede facilitar estos procesos al presentar los datos de una manera más accesible que, digamos, una tabla de números o un relato verbal. (Braga, Phillips & Norris, 2012, p. 126, las cursivas son nuestras)

Tal vez no sea *molestia* sino una larga tradición en la cual el pensamiento verbal y lingüístico ha sido aceptado como la "mejor" forma de presentar los resultados de la ciencia. Ahora bien, en contraste con esta tradición, la historia de la ciencia está llena de ejemplos donde grandes pensadores han usado las imágenes para ilustrar sus hallazgos, aunque las demostraciones de sus teorías sólo incluyeran un lenguaje simbólico.

Por ejemplo, Galileo plasmó en sus dibujos los principios de perspectiva y su interpretación de ciertos fenómenos físicos. Descartes y sus ilustraciones sobre fuerza magnética y las ópticas humanas, Newton y su manera rigurosa de presentar los estados físicos específicos de los fenómenos. Podemos continuar con los dibujos de Maxwell de la distribución de las fuerzas magnéticas en el espacio (una buena manera de entender esa tradición de representar gráficamente datos que no se observan a través de los sentidos). También tenemos a Riemann y sus gráficas de análisis complejo. Luego está Feynman y su conjunto de diagramas que representaban la interacción entre las partículas (diagramas que representaban geométricamente las funciones de probabilidad), lo que suponía una importante diferencia con las ideas de visualización anteriores, en la medida en que se intentaron representar fenómenos invisibles. Tampoco podemos olvidar a Gödel que relaciona el proceso intuitivo con el proceso de visualización. Y así podríamos seguir con más ejemplos que nos proporciona la historia de las matemáticas. A continuación, presentaremos algunos hechos de la historia significativos para nuestro estudio.

Empecemos con Descartes y Newton (véase Alcolea, 2021, pp. 234–237). Ellos hicieron uso de la visualización para representar la estructura y las relaciones entre los fenómenos científicos examinados, al considerarlos de gran interés para sus avances en el campo de la matemática y la física. Cuando los científicos usan imágenes no sólo están interesados en mostrar cómo se ve el mundo, sino cómo funciona:

> Descartes y Newton son dos científicos que utilizaron numerosas ilustraciones en su trabajo científico. Si bien la mayoría de sus teorías científicas han sido reemplazadas desde hace mucho tiempo, muchos de sus descubrimientos y logros todavía se mencionan en la educación científica contemporánea. Este es ciertamente el caso de la óptica donde sus obras, y ocasionalmente sus objetos de visualización, todavía son encontrados. (Braga, Phillips & Norris, 2012, p. 136)

Figura 1
Ilustración de Descartes sobre el proceso óptico

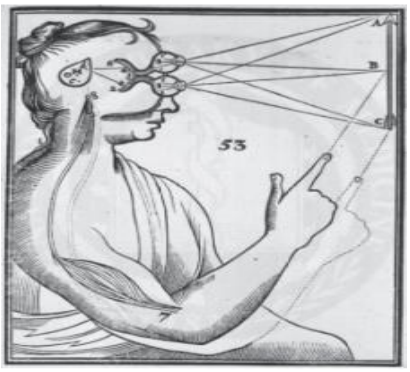
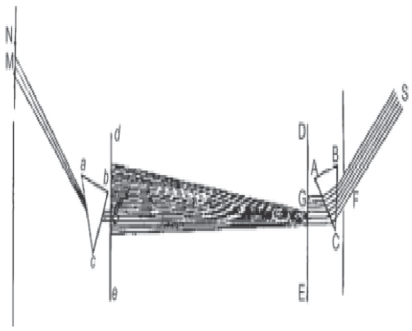


Figura 2*
Ilustración de Newton sobre el proceso óptico



* Ambas figuras proceden de Stephen P. Norris, (2012), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 137-138.

De la figura 1. notamos que además de su realismo, ella se centra, literalmente, en el fenómeno de la visión. Las ilustraciones de Descartes tenían además otro propósito; convencer no sólo a los científicos, sino a los laicos sobre cómo funcionaba el mundo, su intención era ayudar a cambiar el concepto. En esta ilustración debe hacerse énfasis en las demandas interpretativas que se buscan, es decir, se debe identificar qué elementos son importantes y cuales irrelevantes para la visión humana. Lo que implica la necesidad de un complemento textual, es decir, se requieren conocimientos sobre óptica para comprender mejor la imagen. Por ejemplo, debe entenderse que las líneas que penetran los ojos son de vital importancia porque muestran el camino de los rayos de luz desde la flecha hasta sus ojos. Finalmente, reconocemos que la analogía en la ilustración es más directa (aunque aparecen más distracciones) y, a su vez, requiere menos exigencia cognitiva.

En contraste con la figura del filósofo francés, encontramos ahora la figura 2. Aquí notamos que el estilo de Newton es más diagramático. Para el físico inglés, lo importante es concentrarse en el fenómeno que describe la visión. Aquí, las ilustraciones estaban dirigidas a los científicos, cuya intención era ayudarles a descubrir cómo reproducir sus experimentos, como una forma de resolución de problemas. Más aún, él mismo estableció sus propias convenciones: “dado que las convenciones de Newton son las antepasadas directas de las nuestras, su imagen puede parecer menos extraña a pesar de ser mucho menos realista que la imagen de Descartes” (Braga, Phillips & Norris, 2012, p. 137).

La figura de Newton es completamente esquemática, la correspondencia entre sus elementos y la realidad no es muy precisa. Es evidente que las demandas interpretativas de esta figura son más desafiantes que las de la figura de Descartes. Newton logró eliminar las distracciones, aunque la interpretación cognitiva es mucho más exigente.

En general el avance de la ciencia ha llevado a los científicos a centrar sus esfuerzos en aspectos de la realidad que se alejan de la experiencia visual. Entonces los matemáticos han tenido que buscar un “leguaje” para describir objetos inobservables, lo que ha dado a las matemáticas su función de ser el lenguaje de la ciencia, pero, además, se le ha otorgado otra tarea: visualizar las expresiones matemáticas que aparecen en el uso de gráficos científicos.

Muchos gráficos científicos evidencian un alto grado de abstracción, alejándose cada vez más de la realidad, lo que conlleva la dificultad de conectar los elementos del gráfico con los fenómenos físicos que representan. Recientemente encontramos que “los teóricos e investigadores utilizan actualmente ‘visualización’ como una etiqueta para procesos sorprendentemente diferentes dentro del aprendizaje de las matemáticas” (Simmt, Sookochoff, Mcfeetors & Mason, 2012, p. 148).

Para grandes matemáticos como Dedekind, Hilbert y Russell, las intuiciones visuales eran poco fiables, más aún, afirmaban que en un buen libro no debería existir ninguna figura. Sin embargo, a finales del siglo XX se produjo un cambio a favor de la visualización, lo que puede evidenciarse con los títulos de algunos libros como “geometría visual y topología” o “análisis visual complejo”. Se inicia una atención pedagógica especial a la visualización y las imágenes generadas por computadora empiezan a tener frutos en la investigación. En lo que aún no tenemos un acuerdo es sobre el papel del pensamiento visual en la epistemología de las matemáticas.

Ahora bien, en ocasiones, aunque la prueba de un enunciado matemático sea correcta, no necesariamente implica que estemos convencidos de comprender dicho argumento, parece que se necesita algo más. “Una de las muchas razones aceptadas en la práctica para preferir una formulación sobre otra es que una forma de encuadrar y abordar un tema puede ser más fructífera que otra” (Tappenden, 2005, p. 152). Para algunos, que un argumento sea más fructífero que otro, es algo que se asume como una cuestión “natural” que pareciera llevar “más fácilmente” a la comprensión.

Bajo este marco, tenemos el ejemplo de Riemann y el uso de dispositivos visuales para representar funciones complejas. A inicios del siglo XX surgió una división en cuanto a los métodos de prueba en el análisis complejo. Las dos “corrientes” fueron lideradas por Weierstrass y Riemann, el primero con un enfoque netamente algorítmico centrado en encontrar representaciones explicitas de funciones, y el segundo, centrado en lo conceptual: “tenía como objetivo describir funciones en términos de propiedades generales y demostrar resultados de existencia de funciones indirectas que no necesitan estar vinculadas a representaciones explícitas” (Tappenden, 2005, p. 149).

El enfoque de Riemann implica el uso de superficies que permiten visualizar fácilmente funciones complejas, su referencia a la visualización contribuyó a la fecundidad de las conexiones en tanto que los ejemplos se volvieron más elementales y manejables. Así, un caso difícil como el análisis complejo, en una escala más pequeña, es ejemplificado en la aplicación de la geometría proyectiva clásica en la estática gráfica. Encontramos aquí una posibilidad de visualizar los argumentos y el análisis del marco teórico.

Las superficies de Riemann no sólo fueron muy útiles por ser consistentes, sino que de manera sistemática han continuado facilitando la comprensión y el descubrimiento. Sus dispositivos visuales dieron frutos novedosos e inesperados, por lo que la comunidad académica los aceptó como un contexto adecuado para estudiar funciones de interés en el análisis complejo, convirtiéndolos en "un componente esencial indispensable de la teoría; no un suplemento, más o menos artificialmente destilado de las funciones, sino su tierra natal, el único suelo en el que las funciones crecen y prosperan" (Tappenden, 2005, p. 152).

En la elección de un enfoque sobre otro en matemáticas, tienen que ver, muchas veces, aspectos considerados del mundo de la psicología. Sin embargo, para el caso que estamos abordando, el que la metodología de Riemann sea más natural y que sus resultados sean fructíferos no tiene que ver con la subjetividad del individuo, más aún, sobre sus resultados se han construidos nuevos conocimientos interesantes. Cuando se estudian las formulaciones "más naturales" se hace en el contexto del descubrimiento y para algunos matemáticos esto hace parte de la psicología y no de la metodología o de la práctica matemática. Pero estos juicios deben ser más amplios: "las ventajas y deficiencias del enfoque de Riemann para el análisis complejo en comparación con el enfoque de Weierstrass es sólo uno de los muchos ejemplos concretos que ilustran y anclan el punto" (Tappenden, 2005, p. 154).

La visualización hace parte de la práctica matemática y puede ser una buena manera de formular un problema o una teoría. Por ejemplo, el aspecto geométrico intuitivo ha influido en la topología y aunque no podemos decir que haya sido su impulso principal, sí es el resultado de visualizar otros problemas como el análisis complejo con Riemann, la mecánica con Poincaré y la teoría de grupos con Denh. Es posible describir la importancia de la visualización en el razonamiento matemático, dejando de lado la naturaleza en sí de la visualización y reconociendo su utilidad y eficacia en la práctica matemática.

Con la visualización sucede a menudo lo que sucede con la intuición matemática, algunos filósofos la han ignorado y les parece poco interesante porque asumen que son "fenómenos" accidentales, pragmáticos, subjetivos o psicológicos. Algunos sólo le dan a la visualización el lugar de apoyo para recordar algunas proposiciones "complicadas". Lo interesante en el caso de Riemann no es sólo reconocer que la "conexión con la visión es una ventaja interesante y útil, [sino que] las cuestiones planteadas por la oposición Riemann-Weierstrass son de interés de forma independiente" (Tappenden, 2005, p. 157).

Un punto importante que se ha observado en el avance de las teorías físicas y matemáticas más sobresalientes de los últimos siglos obedece a la idea de unificación (Newton, Maxwell, Friedman). Para Friedman, por ejemplo, "al menos en algunos casos importantes, proporcionar una explicación de un evento es proporcionar los recursos para comprender este evento, y motiva su relato en consecuencia" (Tappenden, 2005, p. 159). Es decir, lograr la unificación de hipótesis o teorías que parecen inicialmente dispares es un gran avance. Tenemos por ejemplo a Newton y la unificación de la teoría celeste con la terrestre, Maxwell y la unificación de los fenómenos ópticos, magnéticos y eléctricos y las teorías físicas actuales que intentan unificar la mecánica cuántica y la gravitación.

Bajo esta idea de la unificación, encontramos el enfoque de la teoría de funciones complejas de Riemann, en la que se "admite una variedad de puntos de vista, en parte porque efectuó la unificación de la teoría de funciones complejas con la teoría de curvas y superficies complejas" (Tappenden, 2005, p. 159). Así mismo, uno de los sellos que identificó la propuesta del matemático alemán fue la elección apropiada de definiciones y principios básicos unificadores. El ejemplo de Riemann es una invitación para mejorar la idea "de cómo este tipo de conexión indirecta con la visión puede informar nuestra elección de los marcos teóricos" (Tappenden, 2005, p. 180).

Aunque en algunos casos, la visualización de una representación que se da en la mente del matemático no conduce directamente a una demostración rigurosa, si conlleva un esbozo o en palabras de Poincaré a una "especie de certeza moral". Un ejemplo de este caso lo encontramos con Klein quien, al estudiar cuestiones abstractas de la teoría de funciones, reemplaza su superficie de

Riemann por una superficie metálica cuya conductividad eléctrica varía según ciertas leyes. Además, conecta dos puntos con dos baterías: "la señal, dice, debe pasar, y la distribución de esta corriente en la superficie definirá una función cuyas singularidades serán precisamente las pedidas por el enunciado del problema" (Poincaré, 1964, p. 2). Para Klein esta situación no es sólo una representación pasiva de la realidad, sino que esa representación que había visualizado en su mente contribuía a una solución que podría ser global, la cual era preliminar, que aún estaba inacabada pero que a su vez mostraría el camino de la solución definitiva.

> La representación visual era más que una imagen; fue la solución intuitiva a un problema en el cual la estructura sensorio-mental desempeñaba un papel fundamental. De hecho, no son solo las imágenes visuales las que ayudan a estructurar las intuiciones- aunque ciertamente son la forma más común de apoyo imaginario. Sonidos, en el caso de los músicos; representaciones musculares, motoras y táctiles, en el caso de escultores, etc. desempeñan un papel fundamental en la actividad creativa artística. En una discusión con Max Wertheimer, uno de los fundadores de la psicología de la Gestalt, Einstein declaró una vez refiriéndose a la creación de la teoría de la relatividad: "estos pensamientos no vinieron en ninguna formulación verbal. Rara vez pienso en palabras. Viene un pensamiento, y luego puedo intentar expresarlo con palabras" (Wertheimer, 1961, p. 228). Las imágenes mentales son, de hecho, parte de un dominio psicológico más complejo [...], a saber, el dominio de los modelos mentales. (Fischbein, 2002, pp. 105–106).

Como lo revisamos en nuestro segundo capítulo, luego de los teoremas de incompletitud de Gödel, mucha de la literatura posterior evidencia que, para demostrar o plantear nuevas proposiciones, se requiere de la intuición y de habilidades que van más allá del programa formalista o del uso exclusivo de la lógica como lo pretendía Hilbert:

> Gödel sugiere en otro lugar que dar una prueba de consistencia constructiva para las matemáticas clásicas significa "reemplazar sus axiomas (los de las matemáticas clásicas) sobre entidades abstractas de un reino platónico objetivo por percepciones sobre las operaciones

> dadas de nuestra mente". Varios lógicos han sugerido que existe una especie de evidencia intuitiva que corresponde a las partes constructivas, pero no finitistas de las matemáticas. (Tieszen, 1989, pp. 13–14)

El intuicionismo parece apoyar esta idea. Por ejemplo, Gentzen apeló a la "visualización" de pasos en la inducción transfinita para su prueba de consistencia en la teoría elemental de números. Nociones similares a la de visualización han aparecido en muchos casos cuando se revisa la historia de la matemática.

> Cabe señalar también que la idea de visualizar la secuencia de copias de una estructura que podemos visualizar, junto con la reflexión sobre el concepto de co-iteración, y la idea de que podemos reflexionar sobre el *proceso de reflexión*, puede verse como el marco epistemológico subyacente en el desarrollo de ciertas progresiones autónomas transfinitas de teorías debidas a Kreisel y Feferman. (Tieszen, 1989, p. 14, las cursivas son nuestras)

Podemos deducir que se está intentando defender que la idea de visualización, así como la de intuición son procesos constructivos, que tienen significados en sí mismo. Veamos un ejemplo, algunos matemáticos o profesores usan expresiones tales como: "el orden geométrico de los enteros", en realidad podríamos hablar de un proceso intuitivo que está relacionado con la estructura espacial de los números, es decir, que se podría "ver en los espacios mentales" la secuencia discreta y creciente de los números enteros, lo que conduciría a afirmar que "un subconjunto genérico no vacío tiene un elemento mínimo". Aquí encontramos reflejada la idea de un *proceso de reflexión* o "un ejemplo de 'reflexión de significados' en el sentido que escribió Gödel, sobre la intuición de conceptos y de estructuras matemáticas (que organiza conceptos). Se usa ampliamente en la práctica matemática y en las demostraciones" (Longo & Viarouge, 2010, p. 20).

Lo interesante es el papel que pueden jugar estos procesos en el momento de una explicación filosófica sobre el conocimiento matemático. Aquí, por ejemplo, encontramos otro problema que la filosofía de la matemática podría indagar, cómo el proceso de visualización, identificado por algunos como un genuino proceso intuitivo, permite brindar evidencia más allá de la lógica y de los sistemas formales de la matemática. Aunque este es un campo aún poco investigado.

En palabras de Poincaré:

> Los dos tipos de mentes son igualmente necesarias para el progreso de la ciencia; tanto los lógicos como los intuicionistas han logrado grandes cosas que los otros no podrían haber hecho [...] pero es interesante estudiar en la historia de la ciencia más de cerca la parte que corresponde cada uno. (Poincaré, 1964, pp. 2–3)

Esta situación, de los *dos tipos de mentes*, no es exclusiva de los matemáticos más brillantes, en los salones de clase también se evidencia que algunos estudiantes prefieren abordar los problemas con una perspectiva analítica, mientas que otros son más dados a lo intuitivo y lo visual. Trataremos a continuación la visualización en el campo de la educación.

6.3 La visualización y la práctica educativa

La visualización en la educación matemática ha sido un componente importante para los procesos de enseñanza, podemos tomar cualquier libro de colegio y encontraríamos ilustraciones, diagramas, dibujos o esquemas. Así mismo, cada día es más común el uso de software especializado o de calculadoras graficadoras. Y a pesar de este auge de materiales de visualización disponible, el apoyo empírico para su uso es mínimo.

Como lo señalamos en el apartado anterior, los diagramas, esquemas y objetos de visualización han sido importantes a lo largo de la historia de la matemática. También encontramos que las distinciones en la idea de visualización giran en torno a los objetos físicos, mentales o a los procesos cognitivos. También hemos sostenido que la visualización, al igual que la intuición, son considerados como procesos, lo que, para este caso, implica que los estudiantes cuando abordan esquemas visuales para su construcción, comprensión e interpretación, requieren de acercamiento previo a las imágenes y los gráficos:

> Podría ser que, si las matemáticas se enseñaran de manera visual y si las representaciones visuales fueran una parte esencial de la evaluación y la calificación, los estudiantes pudieran comenzar a

> trabajar y a comunicarse más a menudo de esta manera. [...] es precisamente esta creencia la que motiva gran parte de la explosión actual de la visualización basada en computadora en la educación matemática. (Macnab, Phillips & Norris, 2012, p. 105)

La historia de la matemática nos ha mostrado algunos episodios en los que un razonamiento visual ha conllevado errores que luego han sido corregidos de manera simbólica. Estas situaciones han llevado a grandes matemáticos, profesores y estudiantes a enfatizar las demostraciones simbólicas sobre las visuales. No obstante, resultados de investigaciones recientes evidencian beneficios de la visualización en el aprendizaje y aplicación de los conocimientos matemáticos, a saber, generan estructura para explorar operaciones visuales, sirven como puntos de referencia para derivar teoremas, permiten generalizaciones visuales, proporcionan una forma para rastrear casos y alternativas y ayudan a expandir la memoria de patrones espaciales. (Norris (Ed.), 2012)

Cuando nos referimos a representaciones visuales, no sólo estamos hablando de imágenes estáticas bidimensionales, sino a imágenes interactivas y tridimensionales, y esto último gracias a la incursión de la tecnología. Recordemos que nuestro interés está en la idea de visualización interpretativa, es decir, la visualización como acción de interpretar la información que se puede obtener de los objetos y el papel que ella juega en los individuos, individuos, que, a su vez, están inmersos en una red de creencias, experiencias y su propio proceso cognitivo de comprensión.

> A través de la visualización interpretativa, el estudiante se esfuerza por obtener una noción clara de los fenómenos físicos que representa el objeto de visualización. Este esfuerzo implica tanto interpretar el significado de la imagen como contextualizar el significado dentro del conocimiento previo del estudiante. Lograr este fin requiere que el estudiante haga y sepa ciertas cosas. Un lugar de partida para este proceso es el objeto de visualización en sí. [...] El otro punto de partida es con el conocimiento científico previo necesario. El estudiante puede poseer este conocimiento de cursos anteriores y de experiencias de la vida, o el educador puede introducirlo junto con el objeto de la visualización. (Braga, Phillips & Norris, 2012, pp. 130–131)

La utilidad de la visualización en la ciencia parece tener mucho que ver con la correspondencia entre la actividad y el resultado deseado. La visualización a menudo implica el uso de diagramas esquemáticos o simbólicos como ayuda computacional. En estos casos, los objetos visuales tienden a ser simples y directos. Para la comprensión conceptual, los objetos más ricos en combinación con la instrucción verbal o textual ofrecen la posibilidad de experiencias ricas para los estudiantes. El componente verbal parece esencial, porque las visualizaciones rara vez pueden ser independientes. Esto parece ser especialmente cierto en la educación científica, donde los objetos difíciles de imaginar se pueden representar dinámicamente para que los estudiantes aprecien cómo estos objetos cambian con el tiempo. Finalmente, parece haber conceptos importantes que no se pueden aclarar visualmente y grandes disputas sobre si las visualizaciones tienen algún lugar. (Phillips, Norris & Macnab, 2010, p. 74)

La visualización al ser un proceso requiere de conocimientos previos, habilidades y destrezas intelectuales. Pero, además, la visualización requiere por parte del estudiante o del matemático un esfuerzo para que tenga resultados exitosos: “tendremos la sensación de un esfuerzo mayor cuando la actividad que estemos realizando tome más tiempo del esperado, cuando los obstáculos para el desarrollo de nuestro trabajo sean más evidentes” (Peña Páez, 2013, p. 155).

Es decir, que no sólo se requiere de una conciencia de las propiedades del objeto sino también familiarizarse con las formas que simbolizan los objetos como sustitutos de la realidad. Ahora bien, el otro lugar de partida es el conocimiento científico. Este puede ser académico (adquirido en cursos anteriores) o de experiencia de su mundo “real”, lo que quiere decir que se debe establecer una conexión entre la imagen y la realidad, para que de esta forma la imagen tenga algún significado útil, desde un punto de vista didáctico.

En el proceso de visualización todo el “aparato” cognitivo está en juego, de no ser así, las imágenes sólo serían datos ópticos. Tal como sucede con la demostración verbal, si un estudiante no tiene idea del significado de los símbolos, no utiliza estrategias inferenciales o deductivas adecuadas, nunca podrá resolver un problema o entender la interpretación de la solución.

En las investigaciones presentadas por Phillips, Norris y Macnab en su libro *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education* (2010), se muestra la efectividad de las imágenes tanto en la educación matemática como en la resolución de problemas. Así mismo, algunos de los resultados nos muestran la visualización como apoyo al desarrollo de conceptos, permitiendo identificar dos concepciones sobre la función de la visualización, una teórica (los objetos de visualización como entidades matemáticas), y la otra práctica (la eficacia de los objetos de visualización). En el ámbito educativo los resultados muestran que "con una mayor aptitud para la visualización espacial, los estudiantes tendrán la capacidad de usar imágenes esquemáticas más sofisticadas al resolver problemas matemáticos" (2010, p. 46).

El proceso de visualización involucra la abstracción de las características de un prototipo dado, "un estudiante aprende sobre triángulos, por ejemplo, mirando triángulos prototípicos y abstrayendo las características que separan los triángulos de otros tipos de objetos" (Phillips, Norris & Macnab, 2010, p. 58). Lo interesante de estos prototipos es que provienen de la experiencia, lo que en un momento dado puede generar errores, los cuales en el proceso educativo pueden ser aprovechados para construir a partir de ellos conceptos más firmes. No debemos olvidar que, para el aprendizaje de los estudiantes, las situaciones presentadas dentro de un contexto prexistente en sus vidas permiten afianzar mejor los nuevos conocimientos. Bajo esta descripción, cobran mayor relevancia los objetos de visualización para explicar, desarrollar y aprender conceptos en el campo de la ciencia, y, agregaríamos, en el campo de la educación.

De ninguna manera se puede afirmar que la sola presentación de objetos de visualización puede ayudar a la construcción de un concepto o al aprendizaje del mismo. La percepción de este objeto, su interpretación y posible explicación depende de qué tan familiarizado esté el estudiante que interactúa con el objeto con sus propiedades. Si no existe una experiencia o un conocimiento previo en visualización, no será posible esperar resultados apropiados, bien sabemos que la utilidad de la visualización en el aprendizaje está ligado al grado de correspondencia entre una actividad y su resultado esperado.

En educación los resultados también son "medidos", se espera de los estudiantes más sobresalientes que realicen mejores análisis y tengan mayor capacidad en la resolución de problemas. Y aquí el proceso de visualización es el protagonista: “la explicación matemática a menudo involucra imágenes, representaciones, diagramas o imágenes mentales. La justificación se relaciona con la forma en que un resultado se presenta, se defiende, se justifica en una comunidad investigadora” (Gómez-Chacón, 2012, p. 204). No estamos hablando sólo de un contexto meramente científico, incluimos a la comunidad educativa.

Por ejemplo, en el capítulo anterior estudiamos a Pólya, quien afirma que cuando se intenta resolver un problema se sugiere realizar una figura. ¿Por qué? Es posible que si lo dejamos todo en nuestra imaginación olvidemos algún detalle importante, mientras que, al dejarlo plasmado en papel o computador, estos detalles permanecen y nos recuerdan nuestras observaciones anteriores cuando intentemos recapitular la información disponible durante la resolución de un problema. Sin embargo, el uso de figuras y gráficos también depende en gran medida, no sólo del uso de instrumentos (por ejemplo, el computador), sino del propio problema que se está intentando resolver, así “como de las preferencias y habilidades visuales personales” (Gómez-Chacón, 2012, p. 209).

Para algunos investigadores, los diagramas pueden actuar como descriptores superiores a los verbales, “para resolver ciertos tipos de problemas [...] los diagramas pueden organizar la información relevante muy cerca, lo que permite a los operadores buscar, comparar y hacer inferencias más fácilmente que con el texto enunciado” (Phillips, Norris & Macnab, 2010, p. 37). Para otros investigadores, es beneficioso para el aprendizaje de los estudiantes integrar la información visual con la verbal. Algunos resultados incluyen que aquellos estudiantes que recibieron explicaciones tanto visuales como verbales produjeron más soluciones creativas a los problemas: “los estudiantes que tenían un conocimiento previo bajo se beneficiaron enormemente al recibir instrucción integrada para las pruebas de resolución de problemas [...] Los objetos visuales, sin importar cuán hábilmente estén animados, no son beneficiosos sin una narración explicativa” (Phillips, Norris & Macnab, 2010, p. 38).

Ahora bien, si se tiene en cuenta el modelo de Van Hiele, encontramos diferentes niveles de razonamiento y uno de ellos es la visualización. No obstante, muchas veces sólo se enseña a construir imágenes, y esto no es un proceso completo de visualización, debe pasarse de una comprensión local a una global.

En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear. En la otra, la imagen tan solo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal (discursivo). (Gómez-Chacón, 2012, p. 215)

En el proceso educativo, es necesario que el profesor distinga las posibles funciones que le otorgará a las figuras e imágenes. Por un lado, puede pensar en su función heurística para innovar o crear o su función meramente ilustrativa, para explicar, comprobar hipótesis, deducir propiedades, lo que está más relacionado con la aprehensión discursiva.

Por ejemplo, encontramos la geometría. Esta puede ser concebida como un cuerpo axiomático, aunque también en palabras de Pólya puede ser descrita como "una habilidad de los ojos y de las manos". Para algunos la geometría hace parte de la física y para otros de la matemática, lo importante es que la geometría es "un campo donde podemos hacer descubrimientos intuitivos o inductivos y verificarlos posteriormente mediante el razonamiento" (Pólya, 1980b, p. 125). La geometría es fuente de símbolos con lenguaje preciso, útil y esclarecedor. La geometría permite a los estudiantes un conocimiento visual de las formas, la visualización del espacio y el descubrimiento gracias a "la poderosa ayuda al pensamiento que ofrece la representación esquemática" (Pólya, 1980b, p. 125).

La naturaleza visual de la geometría, el uso de grafos en la teoría de grupos, las gráficas de las funciones, comprenden todas esas habilidades mentales relacionadas con la comprensión, reorganización visual de las relaciones: "Brown y Wheatley (1989) encontraron que la habilidad espacial está asociada con una comprensión relacional de conceptos matemáticos" (Booth & Thomas, 1999, p. 170). Los dibujos o gráficas se aproximan, en muchos casos a objetos reales, que permiten resaltar algún aspecto de ellos, pero también pueden representar un proceso simbólicamente:

> utilizando formas geométricas para representar objetos o eventos reales, los diagramas pueden mostrar la relación entre objetos o eventos o representar el proceso de una actividad. En tales casos, es posible que no presenten todo el objeto; en cambio, pueden centrar la atención de la lectura en un aspecto, parte o relación en particular. (Booth & Thomas, 1999, p. 184)

En este mismo sentido los objetos de visualización también han sido utilizados como modelos intuitivos o herramientas para predecir eventos con respecto a fenómenos concretos.

> Un modelo intuitivo es, por su propia naturaleza, de un tipo sensorial. Puede ser percibido, representado o manipulado como cualquier otra realidad concreta. Por ejemplo, para representar magnitudes vectoriales (fuerzas similares) se utilizan segmentos de línea orientados. Para representar los números dirigidos, se utiliza la imagen de la recta numérica con un origen convencional en ella. Para resolver problemas estocásticos o combinatorios, se puede recurrir al diagrama de árbol. La gráfica que representa una función es también un ejemplo de un modelo intuitivo. Un modelo intuitivo no es necesariamente un reflejo directo de una realidad determinada, muy a menudo se basa en una interpretación abstracta de esa realidad. La gráfica de una función es un modelo intuitivo de esa función y la función, a su vez, es el modelo abstracto de un fenómeno real. (Fischbein, 2002, p. 121)

Por ejemplo, el fenómeno de un cuerpo que cae puede ser modelado por la función cuadrática, representada gráficamente por la parábola, este objeto visual nos permite evidenciar la relación dinámica entre las variables involucradas. También es interesante cuando se les presenta los números imaginarios a los estudiantes, haciendo uso de su representación geométrica, ofreciéndoles un sentimiento de familiaridad, la posibilidad de manipular su estructura de este modelo visual de unos entes tan abstractos como los números complejos. Los diagramas de árbol, que normalmente se usan en los cursos de probabilidad, pueden ser usados para representar el orden de las operaciones, por ejemplo, cuando se desea resolver una integral usando la regla de sustitución. (Peña-Páez, 2020b, p. 57)

> Los diagramas juegan un papel importante en la investigación científica. Pueden desempeñar un papel didáctico importante al ofrecer al estudiante medios visuales para sintetizar datos, representar

> relaciones abstractas y resolver varios tipos de problemas. Pero, sobre todo, el alumno, al aprender a producir y utilizar diagramas de varios tipos, desarrolla su propia capacidad para aprovechar las enormes capacidades heurísticas de las representaciones visuales, conceptualmente controladas. (Fischbein, 2002, p. 165)

Dentro de las ventajas que encontramos en el campo educativo del uso de objetos visuales, tenemos que ofrece al estudiante el modelo de un concepto ya elaborado de una realidad dada. Si logramos que el estudiante aprenda a construir e interpretar gráficos, obtendrá un control sobre sus propios procesos mentales, desarrollando procesos intuitivos más avanzados.

Para Fischbein (2002), los modelos deben tener características muy puntuales para que puedan ser útiles: (1) el modelo y la estructura original deben tener un alto grado de correspondencia y consistencia. (2) El modelo debe ser coherente con la forma como se procesa la información humana, es decir, en lo visual, el comportamiento, la finitud, entre otros. (3) El modelo debe ser en la medida de las posibilidades autónomo, es decir, debe tener sus propias leyes que le den coherencia y estructura interna. Un modelo que depende en cada paso de los dictados del original es heurísticamente inútil.

El uso de modelos visuales en la educación y resolución de problemas viene acompañado de otras ventajas. Por ejemplo, un objeto visual presenta al estudiante de manera simultánea gran parte de la información de una situación planteada. Así mismo, "una imagen visual es más personal y está más involucrada en el comportamiento que una estructura conceptual" (Fischbein, 2002, p. 204).

El desarrollo histórico del concepto de número, las diversas geometrías, el cálculo infinitesimal, el concepto de infinito, la teoría de grupos, entre otros, han sido influidos por procesos de visualización, gracias a su practicidad, a las interpretaciones de su comportamiento y a sus expresiones visuales espacialmente consistentes. Fenómenos similares ocurren durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Muchos estudiantes, incluso cuando trabajan con conceptos muy abstractos, tienden a representarlos de alguna manera accesible para ellos: “tendemos a recurrir automáticamente a representaciones de comportamiento y pictóricas que pueden conferir a conceptos los abstractos el tipo de características manipuladoras a las que nuestro razonamiento se refiere” (Fischbein, 2002, p. 212).

Así mismo, ocurre que, aunque el estudiante ya tenga el conocimiento abstracto de alguna teoría o concepto matemático, el modelo intuitivo inicial sobre el que construyó su conocimiento sigue influyendo en su uso e interpretación. Es difícil, por ejemplo, pensar en un punto o una recta sin hacer referencia a su representación gráfica.

En la práctica de la ciencia encontramos la creación de modelos (que pueden ser físicos, visuales o mentales) que sirven para representar fenómenos, objetos o procesos. Así mismo, los modelos en matemáticas tienen una gran importancia cuando se trata de hacer predicciones. En educación, por ejemplo, “los modelos están destinados a ayudar a los estudiantes a conectar nuevas ideas con lo que ya saben, visualizar ideas abstractas y construir una comprensión útil de conceptos difíciles” (Gustafson & Mahaffy, 2012, p. 165). Lo que siempre debe estar claro es que todo modelo tiene fortalezas y limitaciones.

No es un secreto que en la actualidad las herramientas de modelado y la visualización mediada por recursos tecnológicos han hecho grandes aportaciones a la investigación tanto en el campo científico como el educativo y su influencia va en aumento. Estas herramientas “ayudan a comprender e ilustrar problemas, ya que los fenómenos en los campos aplicados pueden describirse mediante modelos matemáticos bastante complejos” (Karsai, Rácz, Schwenk & Kalus, 2003, p. 24). Gracias a la incursión de la tecnología en las aulas, nuestros estudiantes pueden explorar, experimentar y visualizar conceptos complejos, y pueden afianzar sus conocimientos y ponerlos en práctica. Por supuesto que esto traerá, tal vez, para la educación otro tipo de retos y dificultades, pero sobre la influencia de la tecnología en la educación habrá mucho más que escribir en futuras investigaciones.

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo pretendía resolver preguntas como: ¿cuál es la definición precisa de la expresión “intuición matemática”? Más aún, ¿existe un consenso entre matemáticos, educadores y filósofos de la matemática sobre lo que es la intuición matemática? ¿Cuándo usan los matemáticos la intuición matemática? ¿Cuál, de existir, sería el rol de la intuición en la epistemología de las matemáticas? ¿Cómo se relaciona la intuición y la práctica matemática?

Para Bergson, el trabajo intelectual en el que una persona se introduce para inventar o resolver un problema, implica una idea inicial, la cual es simple, abstracta e incorpórea. Luego de un esfuerzo máximo los resultados de esa idea se reflejarán en el mundo tangible de una manera clara y distinta. Este trabajo es justamente el resultado de un esfuerzo intelectual, que intentó plasmar de manera clara una idea inicial que giraba en torno a la intuición matemática.

Una de las preguntas que nos interesaba resolver era sobre el papel que juega la intuición en la matemática. Ahora bien, al revisar la literatura existente nos encontramos con que no existe una definición universal sobre la intuición matemática. De hecho, la concepción sobre la intuición depende en buena medida de cómo se aborde la pregunta y quién la responde. Y aquí encontramos una primera idea: no existe un consenso entre matemáticos, educadores, ni filósofos de la matemática sobre lo que debería entenderse por ‘intuición matemática’.

Más allá de ser un obstáculo, esta diversidad de acepciones del término, esta riqueza de interpretaciones, nos llevó a plantear nuestra propia definición de intuición matemática (tomando elementos significativos y experienciales de las diferentes definiciones estudiadas). Es importante reconocer que gracias a la intuición tenemos “nuevas situaciones sobre las que se podría conjeturar, usando esquemas conceptuales extraídos de la experiencia sensorial, gracias al intelecto limitado por el lenguaje e influenciado por la acumulación de fuentes de un patrimonio cultural y científico” (Mariño & Peña-Páez, 2019, p. 76).

En este documento hemos entendido la intuición matemática como “un proceso dinámico, que está relacionado con la experiencia, con los conocimientos matemáticos del individuo que intuye y finalmente, que requiere de las matemáticas formales para validar sus creaciones” (Peña-Páez, 2020a, p. 6). Para el desarrollo de este escrito, la intuición no se da de una manera repentina, este proceso tiene sentido cuando la mente de quien intuye ha estado inmersa en un contexto propio de las matemáticas. Cuanto mayor sean nuestros conocimientos en el área de estudio, mejores resultados obtendremos del proceso intuitivo.

Esta definición fue alimentada y reforzada al revisar algunos ejemplos de la historia de la matemática, gran fuente de la práctica de los matemáticos al trabajar en sus grandes teorías, conceptos y avances científicos. Tomamos como ejemplo, las ideas de Henri Poicaré y de Kurt Gödel. Al leer las obras de estos dos pensadores nos encontramos con el uso de la expresión “intuición matemática” al referirse a sus “descubrimientos” en los campos de la matemática en que fueron absolutamente sobresalientes.

La intuición matemática concebida por Gödel es tomada desde diversos puntos de vista: como guía, conocimiento mediato, fuente de los axiomas y como una facultad análoga a la percepción del mundo físico. Entonces podemos afirmar que, para el pensador centroeuropeo, la intuición matemática es necesaria para la epistemología (en particular para el conocimiento de las matemáticas más avanzadas). Esto no implica que los resultados del proceso intuitivo sean incuestionables o verdaderos. En este mismo sentido encontramos a Poincaré para quien la intuición matemática es una experiencia psicológica y por tanto puede ser falible. Para el pensador francés la intuición es el instrumento de la invención. Para él, el sólo uso de la lógica o de los teoremas no permitirán llegar a grandes avances, se requiere de algo más, de un “sentimiento”: de una forma de organización. Y esta forma de organización será tanto más clara cuanto mayor haya sido el trabajo realizado con el tema a lo largo de un proceso dinámico: la intuición matemática.

El rol que juegue la intuición matemática en la epistemología depende de la postura que se tenga frente a la naturaleza de los objetos de la matemática. Este dilema entre la epistemología y la ontología forman los cuernos del dilema de Benacerraf. Encontramos que el dilema puede tener una solución viable si nos apartamos del platonismo, donde los objetos de la matemática están en un mundo de ideas eternas e inmutables y consideramos un mundo 3 (Popper & Eccles, 1993), en el que los objetos son construcciones humanas. De esta forma, cobra sentido considerar la intuición matemática como un proceso que ocurre en la conciencia (mundo 2) que funciona en un contexto determinado (mundo 1) y cuyos resultados volverán a incrustarse en forma de conceptos y teorías en el mundo 3.

Bajo este marco de una concepción alternativa de la epistemología de las matemáticas, encontramos al filósofo de la ciencia Philip Kitcher, quien se aparta de las ideas tradicionales sobre *apriorismo* en el conocimiento matemático y confiere una mayor validez a ideas poco convencionales pero muy valiosas para un enfoque naturalista del conocimiento. En su teoría, Kitcher atribuye gran protagonismo a la comunidad científica, a la comunicación del conocimiento y a la intuición matemática.

En este contexto, la intuición matemática para Kitcher tiene un papel protagónico en la práctica matemática. Y dentro de la práctica de los matemáticos a través de la historia tenemos dos elementos significativos: la resolución de problemas y la visualización.

Kitcher y Pólya comparten la necesidad de la intuición en la resolución de problemas. La intuición matemática es usada por los grandes matemáticos y por estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Aquí la intuición juega un papel heurístico, a su vez, que es útil como proceso de justificación. La relación entre intuición y resolución de problemas forma parte de investigaciones didácticas en el campo de las matemáticas. Esta relación incluye los saberes acumulados de los estudiantes y cómo los usan al resolver una situación plateada, tal y como se evidencia en la historia de la matemática.

El otro elemento de la práctica que discutimos a lo largo de este documento fue la visualización. Al igual que la intuición, la visualización no tiene una definición única, sin embargo, ambas han tenido un resurgir en las últimas décadas y su papel ha venido siendo más preponderante tanto en la matemática pura como en la investigación educativa. Para nosotros la visualización como la intuición son procesos que parten del mundo real de quien "intuye" o "visualiza", requieren de la experiencia y conocimientos de conceptos y teorías (entre más experticia en el tema, los resultados serán más profundos e impactantes) y deberán, al final, ser validados por la comunidad académica especializada.

Hemos intentado resolver algunas de las preguntas que nos planteamos al inicio del doctorado, y hemos experimentado todo un proceso de intuición en la consecución de este documento, los resultados de esta investigación no son verdades absolutas, ni irrefutables, pueden ser falibles y discutibles. Nuestra intención ha sido la de llevar a cabo una aportación que permita motivar nuevos estudios sobre la intuición matemática y explorar y profundizar sobre la resolución de problemas y la visualización. Temas puntuales que bien pueden ser analizados desde los ejemplos que nos proporciona la historia de las matemáticas y experimentados en el campo de la educación matemática.

Referencias

Alcolea, J. (2006). Ontological and Epistemological Problems of Mathematics. In W. J. González & J. Alcolea (Eds.), *Contemporary Perspectives in Philosophy and Methodology of Science* (pp. 233–257). A Coruña: Netbiblo.

Alcolea, J. (2011). Kitcher's Naturalistic Epistemology and Methodology of Mathematics. In W. J. González (Ed.), *Scientific Realism and Democratic Society: The Philosophy of Philip Kitcher* (pp. 295–326). Amsterdam/New York, NY: Rodopi.

Alcolea, J. (2021). On Mathematical Language: Characteristics, Semiosis and Indispensability. In W. J. González (Ed.), *Language and Scientific Research* (pp. 223–245). Cham: Palgrave/Macmillan. (https://doi.org/10.1007/978-3-030-60537-7_8)

Arcavi, A. (2003). The Role of visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. (doi.org/10.1023/a1024312321077)

Aspray, W. & Kitcher, Ph. (Eds.) (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Benacerraf, P. (2004). La verdad matemática. *Ágora. Papeles de Filosofía*, 23, 233–253.

Bergson, H. (1956). *Introducción a la metafísica y la intuición filosófica*. Buenos Aires: Ediciones Leviatan.

Bergson, H. (1999). *Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia*. Salamanca: Ediciones Sígueme.

Bergson, H. (2015). El esfuerzo intelectual. En *La energía espiritual* (pp. 84–103). Buenos Aires: Cactus.

Booth, R. D. L. & Thomas, M. O. J. (1999). Visualization in Mathematics Learning: Arithmetic Problem-Solving and Student Difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169–190. (doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00027-9)

Braga, J., Phillips, L. M. & Norris, S. P. (2012). Visualizations and Visualization in Science Education. In S. P. Norris (Ed.), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education* (pp. 123–145). Rotterdam: Sense Publishers.

Brown, D. L. & Wheatley, G. H. (1989). Relationship Between Spatial Ability and Mathematics Knowledge. In C. A. Maher, G. A. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 143–148). New Brunswick, NJ: Centre for Mathematics, Science, and Computer Education.

Brown, J. R. (2005). Naturalism, Pictures, and Platonic Intuitions. In P. Mancosu, K. Frovin & S. Pedersen, S. (Eds.), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 57–73). Dordrecht: Springer.

Bunge, M. (1996). *Intuición y razón*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Burgess, J. P. (2014). Intuitions of three kinds in Gödel's Views on the Continuum. In J. Kennedy (Ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays* (pp. 11–31). Cambridge: Cambridge University Press. (doi.org/10.1017/CBO9780511756306)

Cardona, C. (2002). Algunas consecuencias filosóficas del trabajo de Kurt Gödel. *Diánoia*, XLVII(49), 23–50.

Chudnoff, E. (2014). Intuition in Mathematics. In L. M. Osbeck & B. S. Held (Eds.), *Rational Intuition: Philosophical Roots, Scientific Investigations* (pp. 174–191). Cambridge: Cambridge University Press. (doi.org/10.1017/CBO9781139136419.010)

Crowe, M. J. (1988). Ten Misconceptions about Mathematics and Its History. In W. Aspray & P. Kitcher (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics* (pp. 260–277). Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Daly, C. & Liggins, D. (2014). Nominalism, Trivialist Platonism and Benacerraf's Dilemma. *Analysis*, 74(2), 224–231. (doi.org/10.1093/analys/anu03)

de Lorenzo, J. (1979). Logica y matemática en Gödel. *Estudios filosóficos*, 28(79), 391–453.

de Lorenzo, J. (1992). *Kant y la matematica. El uso constructivo de la razón pura*. Madrid: Tecnos.

Fedyk, M. (2018). Intuitions, Naturalism, and Benacerraf's Problem. In S. Bangu (Ed.), *Naturalizing Logico-Mathematical Knowledge* (pp. 89–105). New York: Routledge.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning.

Educational Studies in Mathematics, 38, 11–50. (doi.org/10.1007/978-94-017-1584-3_2)

Fischbein, E. (2002). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dordrecht: Reidel.

Folina, J. (2014). Gödel on How to Have Your Mathematics and Know It Too. In J. Kennedy (Ed.), *Interpreting Gödel: Critical Essays* (pp. 32–55). Cambridge: Cambridge University Press. (doi.org/10.1017/CBO9780511756306)

Giaquinto, M. (2005a). From Symmetry Perception to Basic Geometry. In P. Mancosu, K. Frovin & S. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 31–53). Dordrecht: Springer.

Giaquinto, M. (2005b). Mathematical Activity. In P. Mancosu, K. Frovin, & S. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 75–87). Dordrecht: Springer.

Giaquinto, M. (2008). Visualizing in Mathematics. In P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (pp. 22–42). New York: Oxford University Press.

Giardino, V. (2010). Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. *Topoi*, 29, 29–39. (doi.org/10.1007/s11245-009-9064-5)

Gödel, K. (1990). Collected Works. Vol. II. Edited by F. Solomon, J. W. Dawson Jr, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay & J. van Heijenoort. New York: Oxford University Press.

Gödel, K. (1994). *Ensayos inéditos*. Edición de F. Rodríguez Consuegra. Barcelona: Mondadori.

Gödel, K. (2006). *Obras completas*. Edición de J. Mosterín. Madrid: Alianza.

Godlove, T. F. (2009). Poincaré, Kant, and the Scope of Mathematical Intuition. *The Review of Metaphysics*, 62(4), 779–801.

Godlove, T. F. (2011). Hanna, Kantian nNon-Conceptualism, and Benacerraf's Dilemma. *International Journal of Philosophical Studies*, 19(3), 447–464. (doi.org/10.1080/09672559.2011.595195)

Goldfarb, W. (1988). Poincaré Against the Logicists. In W. Aspray & P. Kitcher (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics* (pp. 61–81). Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Goldstein, R. (2005). *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*.

New York: Atlas Books.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Visualización matemática: intuición y razonamiento. En *Contribuciones matemáticas en honor a Juan Tarrés*. Madrid: UCM, pp. 201–219.

Gustafson, B. J. & Mahaffy, P. G. (2012). Introducing Grade Five Students to the Nature of Models. In S. P. Norris (Ed.), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education* (pp. 165–180). Rotterdam: Sense Publishers.

Hadamard, J. (1954). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover.

Hale, B. & Wright, C. (2002). Benacerraf's Dilemma Revisited. *European Journal of Philosophy*, 10(1), 101–129. (doi.org/10.1111/1468-0378.00151)

Hallett, M. (2006). Gödel, Realism and Mathematical 'Intuition'. In E. Carson & R. Huber (Eds.), *Intuition and the Axiomatic Method* (pp. 113–131). Dordrecht: Springer.

Hart, W. D. (1991). Benacerraf's Dilemma. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23(68), 87–103.

Heinzmann, G. & Nabonnand, P. (2008). Poincaré: Intuitionism, Intuition, and Convention. In M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau & G. Heinzmann (Eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007). The Cerisy Conference* (pp. 163–177). Basel: Birkhäuser.

Hersh, R. (2011). Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey). *Montana Mathematics Enthusiast*, 8(1-2), 35–49.

Horsten, L., & Starikova, I. (2010). Mathematical Knowledge : Intuition, Visualization, and Understanding. *Topoi*, 29, 1–2. (doi.org/10.1007/s11245-009-9062-7)

Hossack, K. (1991). Access to Mathematical Objects. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23(68), 157–181.

Kant, I. (1978). *Crítica de la razón pura*. Madrid: Alfaguara.

Karsai, J., Rácz, É. V., Schwenk, A. & Kalus, N. (2003). Visualization and Art in the Mathematics Classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 35(1), 24–29. (doi.org/10.1007/bf02652763)

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

Kitcher, P. (1988a). Mathematical Naturalism. In W. Aspray & P. Kitcher (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics* (pp. 293–325). Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Kitcher, P. (1988b). Mathematical Progress. *Revue Internationale de Philosophie*, 42(167), 518–540.

Kitcher, P. (2001). *El avance de la ciencia*. Mexico: Universidad Nacional Autónoma de Mexico.

Kuhn, T. (1992). *La estructura de las revoluciones científicas*. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.

Lavers, G. (2009). Benacerraf's Dilemma and Informal Mathematics. *Review of Symbolic Logic*, 2(4), 769–785. (doi.org/10.1017/S1755020309990153)

Lindström, S., Palmgren, E., Segerberg, K. and Stoltenberg-Hansen, V. (2009). *Logicism, Intuitionism, and Formalism*. Dordrecht: Springer.

Longo, G. & Viarouge, A. (2010). Mathematical Intuition and the Cognitive Roots of Mathematical Concepts. *Topoi*, 29, 15–27. (doi.org/10.1007/s11245-009-9063-6)

Luque, B. (2013). Demostraciones visuales. *Investigación y Ciencia*, 445 (octubre), 88–90.

Maddy, P. (1980). Perception and Mathematical Intuition. *The Philosophical Review*, 89(2), 163–196.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(3), 365–399.

Macnab, J. S., Phillips, L. M. & Norris, S. P. (2012). Visualizations and Visualization in Mathematics Education. In S. P. Norris (Ed.), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education* (pp. 103–122). Rotterdam: Sense Publishers.

Mancosu, P. (2005). Visualization in Logic and Mathematics. In P. Mancosu, K. Frovin & S. Pedersen, S. (Eds.), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 13–29). Dordrecht: Springer.

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. New York: Oxford University Press.

Mancosu, P. (2016). Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática. *Disputatio. Philosophical Research Bulletin*, 5(6), 131–156.

Mancosu, P., Frovin, K. & Pedersen, S. (Eds.) (2005). *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics*. Dordrecht: Springer.

Mariño, O. Y. & Peña-Páez, L. M. (2019). El rol de la intuición matemática. Una mirada a la luz de las ideas de Paul Thompson. *Humanizarte*, 1, 72–81.

McEvoy, M. (2007). Kitcher, Mathematical Intuition, and Experience. *Philosophia Mathematica*, 15(2), 227–237. (doi.org/10.1093/philmat/nkm0

Moretti, A. (1991). La objetividad de los números fregeanos. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23(68), 139–156.

Norris, S. P. (Ed.) (2012). *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Okada, M. (2002). Ideal Concepts, Intuitions, and Mathematical Knowledge Acquisitions in Husserl and Hilbert (A Preliminary Report). In S. Arikawa & A. Shinohara (Eds.), *Progress in Discovery Science. Final Report of the Japanese Discovery Science Project* (pp. 40–77). Berlin: Springer.

Orayen, R. (1991). La lógica y el dilema de Benacerraf. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23(68), 127–137.

Panza, M. & Sereni, A. (2013). Plato's Problem. An Introduction to Mathematical Platonism. New York: Plagrave Macmillan.

Parsons, C. (1980). Mathematical Intuition. *Procedings of the Aristotelian Society*, 80, 145–168.

Parsons, C. (1995). Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 1(1), 44–74.

Peña-Páez, L. M. (2013). El acto de invención como acto libre en la filosofía de Henri Bergson. Una aproximación desde el Ensayo sobre los datos inmediatos de la conciencia. *Franciscanum*, LV (160), 135–161.

Peña-Páez, L. M. (2020a). Consideraciones sobre la intuición matemática. *Agora. Papeles de Filosofía*, 39(2), 127–141.

Peña-Páez, L. M. (2020b). La importancia de la intuición matmática en los procesos de enseñanza. *Revista Internacional de Aprendizaje en Ciencia, Matemáticas y Tecnología*, 1, 51–59.

Peña-Páez, L. M. (2021). Filosofía de la matemática: La intuición en el pensamiento de Kurt Gödel. *Filosofia Unisinos*, 22, 1–13. (doi.org/10.4013/fsu.2021.222.06)

Phillips, L. M., Norris, S. P. & Macnab, J. S. (2010). *Visualization in*

Mathematics, Reading and Science Education. Dordrecht: Springer.

Poincaré, H. (1946). La invención matemática. En *Ciencia y método* (2ª edición, pp. 40–54). Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina.

Poincaré, H. (1964). La intuición y la lógica en las matemáticas. En *El valor de la ciencia* (pp. 1–9). Recuperado de http://casanchi.com/ref/logicaintuicion01.pdf 1905.

Poincaré, H. (2017). *Las ciencias y las humanidades*. Edición de F. González. Oviedo: KRK Ediciones.

Pólya, G. (1954a). *Mathematics And Plausible Reasoning*. Vol. 1. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954b). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol. 2. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1980a-b). *Mathematical Discovery. On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving. Combined Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Pólya, G. (2002). *Cómo plantear y resolver problemas*. 15th ed. Mexico: Trillas.

Popper, K. & Eccles, J. (1993). *El yo y su cerebro*. Barcelona: Labor.

Rodin, A. (2010). How Mathematical Concepts Get Their Bodies. *Topoi*, 29, 53–60. (doi.org/10.1007/s11245-009-9066-3)

Rodríguez Consuegra, F. (1991). Números, objetos y estructuras. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 23(68), 7–86.

Rodríguez Consuegra, F. (2004). Lo que es y lo que no es la verdad matemática. *Ágora. Papeles de Filosofía*, 23(2), 227–232.

Sambin, G. (2008). Two Applications of Dynamic Constructivism: Brouwer's Continuity Principle and Choice Sequences in Formal Topology. In M. van Atten, P. Boldini, M. Bourdeau & G. Heinzmann (Eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007). The Cerisy Conference* (pp. 301–315). Basel: Birkhäuser.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (4th ed., pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer.

Simmt, E., Sookochoff, S., Mcfeetors, J. & Mason, R. T. (2012). Curriculum Development to Promote Visualization and Mathematical Reasoning:

Radicals. In S. P. Norris (Ed.), *Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education* (pp. 147–163). Rotterdam: Sense Publishers.

Starikova, I. (2010). Why do Mathematicians Need Different Ways of Presenting Mathematical Objects? The Case of Cayley Graphs. *Topoi*, 29, 41–51. (doi.org/10.1007/s11245-009-9065-4)

Tappenden, J. (2005). Proof Style and Understanding in Mathematics I: Visualization, Unification And Axiom Choice. In P. Mancosu, K. Frovin & S. Pedersen, S. (Eds.), *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 147–214). Dordrecht: Springer.

Thompson, P. (1998). The Nature and Role of Intuition in Mathematical Epistemology. *Philosophia*, 26(3–4), 279–319. (doi.org/10.1007/BF02381494)

Tieszen, R. (1989). *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer.

Tieszen, R. (2002). Gödel and the Intuition of Concepts. *Synthese*, 133(3), 363–391. (doi.org/10.1023/A:1021247624209)

van Atten, M. & Kennedy, J. (2009). 'Gödel's Modernism: On Set-Theoretic Incompleteness,' Revisited. In S. Lindström, E. Palmgren, K. Segerberg & V. Stoltenberg-Hansen (Eds.), *Logicism, Intuitionism, and Formalism* (pp. 303–355). Dordrecht: Springer.

van Stigt, W. P. (1990). *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: Elsevier Science.