



Mecànica I:

1. Coordenades curvilínies

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



- Coordenades curvilínies α, β, γ : Conjunt de paràmetres en correspondència biunívoca amb les coordenades cartesianes x, y, z :

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1)$$

$$y = y(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2)$$

$$z = z(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3)$$

- Punt: $P(x, y, z) \equiv P(\alpha, \beta, \gamma)$
- Vector de posició:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \quad (4)$$

- Línies coordenades $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$ a P : Són les corbes que passen per P , i s'obtenen variant α, β, γ , respectivament, en la correspondència biunívoca.
- Superfícies coordenades $s_{\beta\gamma}, s_{\gamma\alpha}, s_{\alpha\beta}$: Són les superfícies que contenen a P , i s'obtenen amb α, β, γ constants, respectivament, en la correspondència biunívoca.



- Referència local a P : Vectors unitaris tangents a línies coordenades:

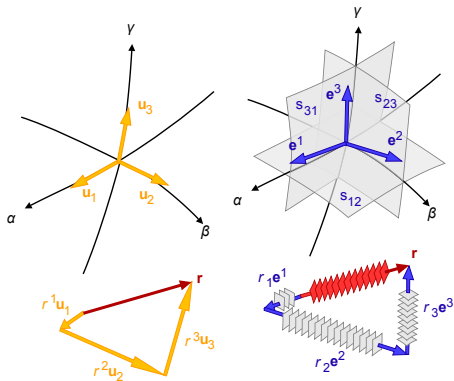
$$\hat{u}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial \alpha} \quad (5)$$

$$h_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2} \quad \Leftarrow \text{factors d'escala} \quad (6)$$

Anàlogament \hat{u}_β i \hat{u}_γ (suposeu $\{\hat{u}_i\} \equiv$ linealment independents).

- Referència dual a P : Vectors (no necessàriament) unitaris ortogonals a plans coordenats

$$\vec{e}^\gamma = \frac{1}{\hat{u}_\gamma \cdot (\hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta)} \hat{u}_\alpha \times \hat{u}_\beta, \quad \gamma \neq \alpha, \beta \quad (7)$$



- Coordenades curvilínies ortogonals:
 $\hat{u}_\alpha \cdot \hat{u}_\beta = \hat{u}_\beta \cdot \hat{u}_\gamma = \hat{u}_\gamma \cdot \hat{u}_\alpha = 0.$
- Coordenades curvilínies ortogonals
 \Rightarrow Referència dual = Referència local.

Figura: Referència local (esquerra) i dual (dreta) en coordenades curvilínies.



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques

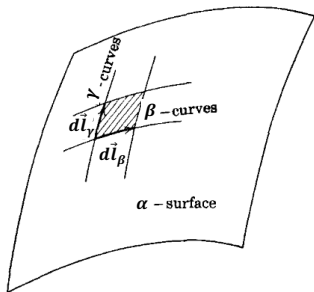


Figura: Element d'àrea sobre una s_{23} -superfície (α -superfície). Adaptada partint de la figura 4 del llibre de Stratton.

- Diferencial de la posició:

$$\vec{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \quad (8)$$

$$= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \quad (9)$$

$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} d\gamma \quad (10)$$

Per tant, usant Eq.(5)

$$d\vec{r} = (h_\alpha d\alpha) \hat{u}_\alpha + (h_\beta d\beta) \hat{u}_\beta + (h_\gamma d\gamma) \hat{u}_\gamma \quad (11)$$

- Elements de línia:

$$d\vec{l}_\alpha = (h_\alpha d\alpha) \hat{u}_\alpha, \quad |d\vec{l}_\alpha| = h_\alpha d\alpha. \quad (12)$$

Anàlogament per a $d\vec{l}_\beta$ i $d\vec{l}_\gamma$.



- Elements de superfície

$$d\vec{s}_{\alpha\beta} = d\vec{l}_{\alpha} \times d\vec{l}_{\beta} = (h_{\alpha}h_{\beta}d\alpha d\beta)\vec{u}_{\alpha} \times \hat{u}_{\beta} \quad (14)$$

$$|d\vec{s}_{\alpha\beta}| = h_{\alpha}h_{\beta}d\alpha d\beta \sqrt{1 - (\hat{u}_{\alpha} \cdot \hat{u}_{\beta})^2} \quad (\dagger) \quad (15)$$

$$= h_{\alpha}h_{\beta}d\alpha d\beta. \quad (\text{c. ortogonals}) \quad (16)$$

Anàlogament per a $d\vec{s}_{\beta\gamma}$ i $d\vec{s}_{\gamma\alpha}$.

- Element de volum:

$$dv = d\vec{l}_{\alpha} \cdot (d\vec{l}_{\beta} \times d\vec{l}_{\gamma}) = h_{\alpha}h_{\beta}h_{\gamma}d\alpha d\beta d\gamma \hat{u}_{\alpha} \cdot (\hat{u}_{\beta} \times \hat{u}_{\gamma}) \quad (17)$$

$$= h_{\alpha}h_{\beta}h_{\gamma}d\alpha d\beta d\gamma. \quad (\text{c. ortogonals}) \quad (18)$$

(\dagger) Càlcul de $|\hat{u}_{\alpha} \times \hat{u}_{\beta}|$:

$$|\hat{u}_{\alpha} \times \hat{u}_{\beta}| =$$

$$= \sqrt{(\hat{u}_{\alpha} \times \hat{u}_{\beta}) \cdot (\hat{u}_{\alpha} \times \hat{u}_{\beta})}$$

$$(\text{Eq. (13)}) = \sqrt{|\hat{u}_{\alpha}|^2 |\hat{u}_{\beta}|^2 - (\hat{u}_{\alpha} \cdot \hat{u}_{\beta})^2}$$

$$= \sqrt{1 - (\hat{u}_{\alpha} \cdot \hat{u}_{\beta})^2}$$

$$\text{Producte escalar quàdruple: } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (13)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques

Camps escalars i vectorials I

- Camp escalar $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ és una funció de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} .
- Superfície de nivell: Són superfícies on el camp escalar és constant,

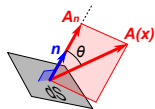
$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}$$

- Camp vectorial

$$\vec{A}(\alpha, \beta, \gamma) = A_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)\hat{u}_\alpha + A_\beta(\alpha, \beta, \gamma)\hat{u}_\beta + A_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)\hat{u}_\gamma \quad (19)$$

és una funció de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 .

- Flux \mathcal{F} d'un camp vectorial \vec{A} a través d'una superfície S és la **quantitat de camp que passa a través de la superfície**[†]



$$\mathcal{F} = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (20)$$

Si el camp és perpendicular al vector superfície (paral·lel al pla de la mateixa), $\vec{A} \perp d\vec{s}$, llavors el flux val zero.

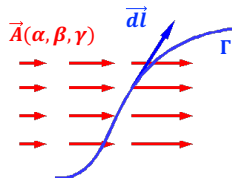
[†] Exemples de flux de camp:

- gravitatori:
 $\mathcal{F}_g = -4\pi Gm$
- elèctric:
 $\mathcal{F}_e = Q/(\epsilon_r \epsilon_0)$

- Circulació \mathcal{C} d'un camp vectorial \vec{A} al llarg d'un camí Γ és la "quantitat neta de camp que va en la direcció del camí"[†]

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (21)$$

($d\vec{l}$ és el mateix que $d\vec{r}$). Si el camp és perpendicular al camí, $\vec{A} \perp d\vec{l}$, la circulació val zero (condició suficient).



[†] Exemple de circulació de camp:

- Llei d'Ampère:
 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_T$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



Biblio: Griffiths (1999), T.1 i Ap. A

- **Gradient d'un camp escalar** $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$: Siga $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ un camp escalar. El gradient de Φ és un camp vectorial, tal que:

$$d\Phi = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot d\vec{r}. \quad (22)$$

1 Expressió en coordenades ortogonals

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \equiv \vec{\nabla} \Phi = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \hat{u}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \hat{u}_\beta + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \hat{u}_\gamma. \quad (23)$$

- 2 Propietat: $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ és perpendicular a la superfície de nivell $\Phi = \text{const.}$ (noteu que $\Phi = \text{const.} \rightarrow d\Phi = 0$, de la qual cosa, usant (22), $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \perp d\vec{r}$)

■ **Divergència d'un camp vectorial** $div\vec{A}$:

Siga $\vec{A} = A_\alpha \hat{u}_\alpha + A_\beta \hat{u}_\beta + A_\gamma \hat{u}_\gamma$. La divergència de \vec{A} en un punt P és un camp escalar que representa el flux per unitat de volum a través de les cares ∂c del volum elemental dv en aquest punt

$$div\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{dv} \int_{\partial c} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (24)$$

$$\equiv \frac{1}{dv} \sum_{\text{cares}} \vec{A}_c \cdot d\vec{s}_c \quad (25)$$

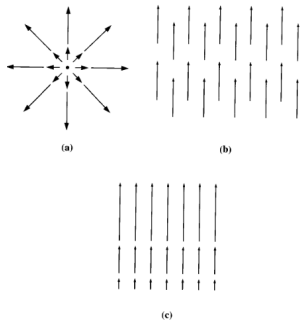


Figura: Diversos exemples de camps vectorials amb divergència (a) $div\vec{A} > 0$, (b) $div\vec{A} = 0$, (c) $div\vec{A} > 0$ (Griffiths Fig. 1.18).

- Expressió en coordenades ortogonals: Triant el vector superfície cap a fora de les cares, el balanç en dues cares oposades serà el flux sortint menys l'entrant. En sumar el flux per parelles de cares oposades tenim

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[d_\alpha (A_\alpha h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma) + d_\beta (A_\beta h_\gamma h_\alpha d\gamma d\alpha) + d_\gamma (A_\gamma h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta) \right]$$

on $d_\alpha B(\alpha) \equiv \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha = B(\alpha + d\alpha) - B(\alpha)$, amb el que arribem a

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\alpha h_\beta h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\beta h_\gamma h_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (A_\gamma h_\alpha h_\beta) \right] \quad (26)$$

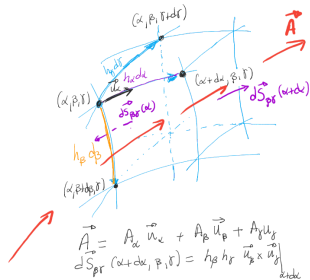


Figura: Divergència en coordenades curvilínies.

Propietat: $\operatorname{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow$
No hi ha fonts ni embornals en el punt considerat (*Camp Solenoidal*; p.e. el camp magnètic)

- **Laplacià d'un camp escalar** $\Delta\Phi = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi)$. Explícitament tindrem

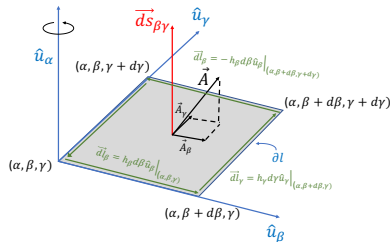
$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right) \right] \quad (27)$$

- **Rotacional d'un camp vectorial** $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$: Siga $\vec{A} = A_\alpha\hat{u}_\alpha + A_\beta\hat{u}_\beta + A_\gamma\hat{u}_\gamma$.

El rotacional de \vec{A} en un punt és un camp vectorial, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$, tal que cada component, com ara $(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})_\alpha$, representa la circulació al llarg dels costats ∂l de la superfície elemental $ds_{\beta\gamma}$ a P segons la direcció α , per unitat de superfície. És a dir,

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})_\alpha = \frac{1}{ds_{\beta\gamma}} \int_{\partial l} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (28)$$

$$= \frac{1}{ds_{\beta\gamma}} \sum_{\text{costats}\beta\gamma} \vec{A}_l \cdot d\vec{l} \quad (29)$$



Anàlogament per a les altres components.

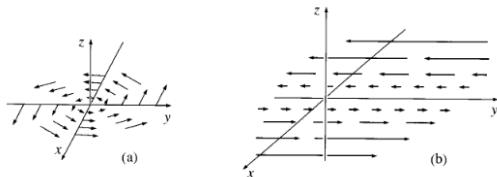


Figura: Exemples de camps vectorials amb rotacional no nul [Griffiths Fig. 1.19].
Tots els exemples de la Figura 4 tenen rotacional no nul.

- Expressió en coordenades ortogonals. Circulant a dretes pel que fa a \hat{u}_α tenim

$$(\vec{rot} \vec{A})_\alpha = \frac{1}{h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma} [d_\beta (A_\gamma h_\gamma d\gamma) - d_\gamma (A_\beta h_\beta d\beta)] \quad (30)$$

$$= \frac{1}{h_\beta h_\gamma} \left[\frac{\partial (A_\gamma h_\gamma)}{\partial \beta} - \frac{\partial (A_\beta h_\beta)}{\partial \gamma} \right] \quad (31)$$



- De forma compacta per a les tres components tindrem

$$\overrightarrow{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \hat{u}_\alpha & h_\beta \hat{u}_\beta & h_\gamma \hat{u}_\gamma \\ \partial/\partial\alpha & \partial/\partial\beta & \partial/\partial\gamma \\ h_\alpha A_\alpha & h_\beta A_\beta & h_\gamma A_\gamma \end{vmatrix} \quad (32)$$

$$= \eta_{ijk} \partial_j (h_k A_k) h_i \hat{u}_i, \quad i, j, k = \alpha, \beta, \gamma \quad (33)$$

on $\eta_{ijk} \equiv \epsilon_{ijk}/(h_\alpha h_\beta h_\gamma)$, $i \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$, $x_j = \alpha, \beta$ o γ .

- Propietat: $\overrightarrow{rot} \vec{A} = 0 \Rightarrow$ Circulació nul·la al voltant del punt considerat (*Camp Irrotacional*; p.e. camp gravitatori).
- **Exercici.** Mostreu que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} \Phi) = \vec{0}$
- **Exercici.** Mostreu que $div(\overrightarrow{rot} \vec{A}) = 0$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes**
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



Teorema de la divergència (Gauss) I

Siga S una superfície tancada que envolta V .

Llavors

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (34)$$

Demostració: Siga $\{dv_n\}$ una partició de V formada per volums elementals dv_n . Tenint en compte que $\vec{A} \cdot d\vec{s}$ es va cancel·lant en les cares contigües dels volums elementals, arribarem a que

$$\int_V (\operatorname{div} \vec{A}) dv = \sum_n (\operatorname{div} \vec{A})_n dv_n \quad (35)$$

$$= \sum_n \int_{\partial c_n} \frac{\vec{A} \cdot d\vec{s}}{dv_n} dv_n \quad (36)$$

$$= \sum_{\partial c_{ext}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_{ext} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (37)$$

on $d\vec{s}_{ext}$ són els vectors superfície de les cares externes ∂c_{ext} del conjunt dels volums elementals dv_n de la partició de V .

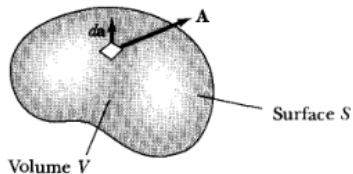


Figura: [Thorton & Marion Fig. 1.23]. da en la figura es correspon amb $d\vec{s}_{ext}$ en el text.



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



Teorema de Stokes I

Siga Γ un circuit frontera de la superfície S .

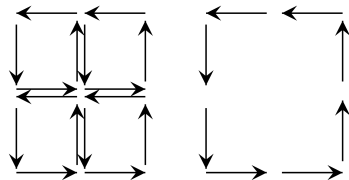
$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (38)$$

Demostració: Siga $\{ds_n\}$ una partició de S

$$\int_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \sum_n \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right)_n \cdot d\vec{s}_n \quad (39)$$

$$= \sum_n \int_{\partial l_n} \frac{\vec{A} \cdot d\vec{l}}{ds_n} ds_n \quad (40)$$

$$= \sum_{\partial l_{ext}} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{ext} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (41)$$



on $d\vec{l}_{ext}$ són els vectors dels costats externs ∂l_{ext} del conjunt de les superfícies elementals ds_n de la partició de S .



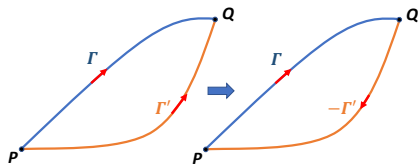
Teorema de Stokes II

- Independència de camí.** El teorema de Stokes es pot enunciar també com segueix. Si $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$ llavors la circulació de \vec{A} al llarg d'una corba Γ_{PQ} , que uneix els punts P i Q és independent del camí, és a dir, si Γ_{PQ} i Γ'_{PQ} són dos camins distints que van de P a Q , llavors

$$\int_{\Gamma_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma'_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (42)$$

Demostració: En efecte, siga S una superfície, la vora de la qual és el camí tancat $\Gamma_{PQ} - \Gamma'_{PQ}$. Pel teorema de Stokes tenim

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{\Gamma'_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \\ \int_{\Gamma_{PQ} - \Gamma'_{PQ}} \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \\ \int_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s} &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$





Teorema de Stokes III

- La independència de camí és equivalent a l'existència d'un camp escalar Φ tal que $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$. En efecte, a causa de la independència de camí, podem definir el camp escalar

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \int^{P(\alpha, \beta, \gamma)} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (44)$$

Aquest camp Φ verifica, doncs, que

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (45)$$

Per tant, de la definició de gradient (Eq. (22)), se segueix el resultat. La implicació inversa és també verdadera. Si $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ llavors

$$\int_P^Q \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_P^Q d\Phi = \Phi_Q - \Phi_P \quad (46)$$

és a dir, la circulació només depend dels punts inicial i final, però no del camí que els uneix.



Teorema de Stokes IV

A més, la independència de camí ens porta al fet que $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$. En efecte, hi existeix $\vec{A} = \text{grad } \Phi$ i ja vam indicar que $\text{rot}(\text{grad } \Phi) = \vec{0}$. Tenim així l'equivalència de les tres propietats: $\text{rot } \vec{A} = \vec{0}$, $\vec{A} = \text{grad } \Phi$ i independència de camí.

- Una manera de trobar la funció $\Phi(x, y, z)$ quan hi ha independència de camí per \vec{A} és, triar un camí poligonal paral·lel als eixos coordenats des de l'origen O a un punt arbitrari $P(x, y, z)$. Explícitament,

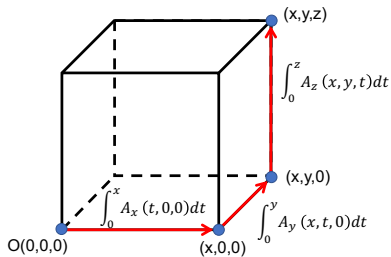


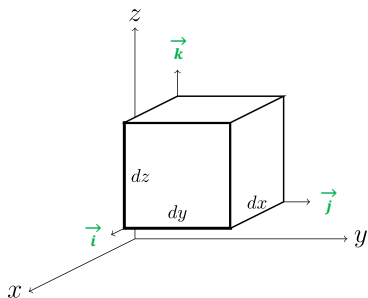
Figura: Càlcul pràctic de $\Phi(x, y, z)$.

$$\Phi(x, y, z) = \int_0^x A_x(t, 0, 0) dt + \int_0^y A_y(x, t, 0) dt + \int_0^z A_z(x, y, t) dt \quad (47)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



■ Definició:

$$x = x, \quad (48)$$

$$y = y, \quad (49)$$

$$z = z. \quad (50)$$

Figura: Element infinitesimal en coordenades cartesianes.

■ Referència local (també base canònica):

$$\hat{u}_x = (1, 0, 0) = \hat{i}, \quad (51)$$

$$\hat{u}_y = (0, 1, 0) = \hat{j}, \quad (52)$$

$$\hat{u}_z = (0, 0, 1) = \hat{k}. \quad (53)$$



- Elements de línia: $dx, dy, dz \Rightarrow d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$.
- Elements de superfície: $dydz, dx dz, dx dy \Rightarrow d\vec{s} = dydz \hat{i} + dx dz \hat{j} + dx dy \hat{k}$.
- Element de volum: $dx dy dz$
- Gradient:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{k}. \quad (54)$$

- Divergència:

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (55)$$



■ Rotacional:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (56)$$

Desenvolupant

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} \quad (57)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} \quad (58)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (59)$$

■ Laplacà:

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \right) = \vec{\nabla}^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (60)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques

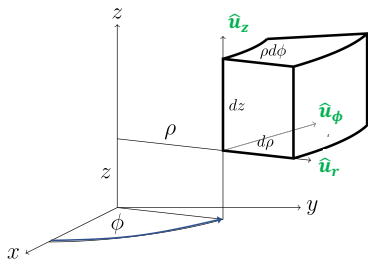


Figura: Element infinitesimal en coordenades cilíndriques.

■ Definició:

$$x = \rho \cos \phi, \quad (61)$$

$$y = \rho \sin \phi, \quad (62)$$

$$z = z. \quad (63)$$

amb $\phi \in [0, 2\pi)$.

■ Referència local:

$$\hat{u}_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 0), \quad h_\rho = 1, \quad (64)$$

$$\hat{u}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad h_\phi = \rho, \quad (65)$$

$$\hat{u}_z = (0, 0, 1), \quad h_z = 1. \quad (66)$$



Matriu de canvi de base:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_\rho \\ \hat{u}_\phi \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (67)$$

- Vector posició \vec{r} : Tenint en compte que la rotació passiva es transforma com el canvi de base, tenim

$$\begin{pmatrix} r_\rho \\ r_\phi \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$= (x \cos \phi + y \sin \phi) \hat{u}_\rho + (-x \sin \phi + y \cos \phi) \hat{u}_\phi + z \hat{u}_z \quad (69)$$

$$= \rho \hat{u}_\rho + z \hat{u}_z \quad (70)$$

- Elements de línia:

$$d\vec{r} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\phi \hat{u}_\phi + dz \hat{u}_z. \quad (71)$$



Coordenades cilíndriques III

- Elements de superfície:

$$d\vec{s} = \rho dz d\phi \hat{u}_\rho + \rho d\rho dz \hat{u}_\phi + \rho d\rho d\phi \hat{u}_z. \quad (72)$$

- Element de volum:

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (73)$$

- Gradient:

$$\vec{\text{grad}} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{u}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{u}_z. \quad (74)$$

- Divergència:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (75)$$



■ Rotacional:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{u}_\rho & \rho \hat{u}_\phi & \hat{u}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} \quad (76)$$

Desenvolupant

$$\overrightarrow{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{u}_\rho \quad (77)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{u}_\phi \quad (78)$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{u}_z. \quad (79)$$

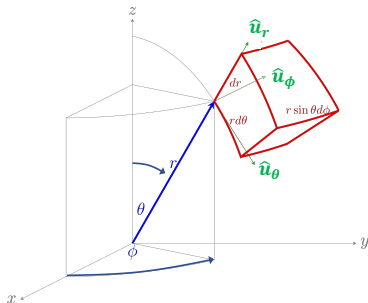
■ Laplaciana:

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (80)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Elements Diferencials
- 3 Camps escalars i vectorials
- 4 Operadors diferencials
- 5 Teoremes de Gauss i Stokes
 - Teorema de la divergència (Gauss)
 - Teorema de Stokes
- 6 Coordenades cartesianes
- 7 Coordenades cilíndriques
- 8 Coordenades esfèriques



■ Definició:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (81)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (82)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (83)$$

amb $\phi \in [0, 2\pi)$ i $\theta \in [0, \pi]$.

Figura: Element infinitesimal en coordenades esfèriques.

■ Referència local:

$$\hat{u}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad h_r = 1, \quad (84)$$

$$\hat{u}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad h_\theta = r, \quad (85)$$

$$\hat{u}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad h_\phi = r \sin \theta. \quad (86)$$



Matriu de canvi de base:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (87)$$

- Vector posició \vec{r} : És obvi, de la definició de coordenades esfèriques que

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \quad (88)$$

- Elements de línia:

$$d\vec{r} = dr\hat{u}_r + r d\theta\hat{u}_\theta + r \sin \theta d\phi\hat{u}_\phi. \quad (89)$$

- Elements de superfície:

$$d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi\hat{u}_r + r \sin \theta dr d\phi\hat{u}_\theta + r dr d\theta\hat{u}_\phi. \quad (90)$$

- Element de volum:

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (91)$$



- Angle sòlid:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (92)$$

L'angle total d'una superfície esfèrica serà

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \quad (93)$$

Els angles esfèrics es mesuren en estereoradians.

- Gradient:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{u}_\phi. \quad (94)$$

- Divergència:

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (95)$$



■ Rotacional:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\hat{u}_\theta & r \sin \theta \hat{u}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} \quad (96)$$

Desenvolupant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{u}_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \hat{u}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{u}_\phi. \end{aligned} \quad (97)$$

■ Laplacà:

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \quad (98)$$



Mecànica I:

2. Cinemàtica

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu

- La **cinemàtica** estudia les quantitats que descriuen el moviment d'una partícula. L'estudi de la causa del moviment és la dinàmica.
- Unitat d'espai (metre): $1\text{ m} \equiv$ distància que viatja la llum en $1/299\,792\,458$ segons.
- Unitat de temps (segon): $1\text{ s} = 9\,192\,631\,770$ períodes de transició hiperfina de l'estat fonamental del cesi 133.
- Sistema de referència $S(O; X, Y, Z)$. Cada punt P de l'espai queda caracteritzat per tres coordenades x, y, z en un sistema d'eixos ortogonals OX, OY, OZ amb origen O .
- Vector posició: Siga $P(x, y, z)$, llavors el vector posició es defineix com a

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1)$$

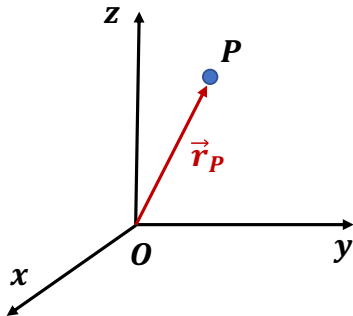


Figura: Sistema de referència.



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu

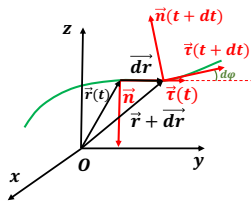
Trajectòria i espai recorregut I

- Trajectòria: És una funció $\vec{r}(t)$ de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 que ens dona la posició en el transcurs del temps

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (2)$$

- Element de trajectòria: És la distància entre dos punts propers, \vec{r} i $\vec{r} + d\vec{r}$, d'una trajectòria

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (3)$$



- Espai recorregut entre dos punts de la trajectòria és la suma de distàncies elementals recorregudes entre els punts intermedis

$$s = \int_{\Gamma} ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (4)$$

on $\dot{x} \equiv dx/dt$, etc.

- Vector $\vec{\tau}$ tangent a la trajectòria: és el vector unitari

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (5)$$



Trajectòria i espai recorregut II

- Radi de curvatura R : És la relació entre “l’arc” ds i l’angle $d\varphi$ entre els “radis” perpendiculars a la trajectòria en les posicions \vec{r} i $\vec{r} + d\vec{r}$. Però l’angle entre els radis és igual que l’angle entre les tangents, per tant,

$$d\varphi = \frac{|d\vec{r}|}{|\vec{r}|} = |d\vec{r}| \quad (6)$$

El radi de curvatura és, doncs,

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{|d\vec{r}|} \quad (7)$$

- Vector normal a la trajectòria \vec{n} : Per a construir-lo, notem que \vec{r} és un vector de mòdul constant i, per tant, es compleix que^(†) $\frac{d\vec{r}}{ds} \perp \vec{r}$. Amb açò podem construir el vector unitari

$$\vec{n} = \frac{d\vec{r}/ds}{|d\vec{r}/ds|} = R \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (8)$$

que serà perpendicular a \vec{r}

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 0 \quad (9)$$

(†) $\vec{r} \cdot \vec{r} = 1 \Rightarrow 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = 0$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat**
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu



- Velocitat: És la variació del vector de posició respecte al temps

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (10)$$

En funció de les components

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} + \dot{z}(t) \hat{k} \quad (11)$$

- Celeritat: És el mòdul de la velocitat

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = \frac{ds}{dt} \quad (12)$$

L'espai recorregut es pot expressar, doncs, com a

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (13)$$

El vector velocitat es pot expressar com a $\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$ o, cosa que és el mateix, $\vec{\tau} = \vec{v}(t)/v(t)$.



- Velocitat en coordenades cilíndriques: A la base local de coordenades cilíndriques es tindrà (noteu que els vectors de la base NO són constants com en el cas cartesià!):

$$\hat{u}_\rho = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \quad \dot{\hat{u}}_\rho = (-\dot{\phi} \sin \phi, \dot{\phi} \cos \phi, 0) = \dot{\phi} \hat{u}_\phi, \quad (14)$$

$$\hat{u}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \Rightarrow \dot{\hat{u}}_\phi = (-\dot{\phi} \cos \phi, -\dot{\phi} \sin \phi, 0) = -\dot{\phi} \hat{u}_\rho, \quad (15)$$

$$\hat{u}_z = (0, 0, 1) \quad \dot{\hat{u}}_z = (0, 0, 0) = \vec{0}. \quad (16)$$

Com que

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \hat{u}_\rho + z(t) \hat{u}_z, \quad (17)$$

per tant,

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\rho} \hat{u}_\rho + \rho \dot{\hat{u}}_\rho + \dot{z} \hat{u}_z \\ &= \dot{\rho} \hat{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \dot{z} \hat{u}_z \end{aligned} \quad (18)$$



- Velocitat en coordenades esfèriques: En la base local de coordenades esfèriques es tindrà (noteu que els vectors de la base NO són constants com en el cas cartesià!):

$$\hat{u}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad \dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta} \hat{u}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_\phi, \quad (19)$$

$$\hat{u}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \Rightarrow \dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{u}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{u}_\phi, \quad (20)$$

$$\hat{u}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad \dot{\hat{u}}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{u}_\theta. \quad (21)$$

Com que

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{u}_r, \quad (22)$$

per tant,

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\hat{u}}_r \\ &= \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{u}_\phi \end{aligned} \quad (23)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració**
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu



Acceleració I

- Acceleració: És la variació de la velocitat respecte al temps

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad (24)$$

En coordenades **cartesianes**: $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j} + \ddot{z}(t) \hat{k}$ (25)

- Acceleració en coordenades cilíndriques: Derivant la velocitat en **cilíndriques** (eq. (18)) obtenim

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \ddot{\rho} \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \dot{\hat{u}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{u}_\phi + \rho \dot{\phi} \dot{\hat{u}}_\phi + \ddot{z} \hat{u}_z \\ &= \ddot{\rho} \hat{u}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{u}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{u}_\rho + \ddot{z} \hat{u}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{u}_\phi + \ddot{z} \hat{u}_z \end{aligned} \quad (26)$$

- Acceleració en coordenades **esfèriques**: Derivant la velocitat en esfèriques (eq. (23)), obtenim

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{u}_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{u}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) \hat{u}_\phi \end{aligned} \quad (27)$$



- Components tangencial i normal de l'acceleració: Derivant $\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$ i usant les definicions del radi de curvatura (eq. (7)) i vector normal (eq. (8)), obtenim

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(t) &= \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + v(t) \frac{d\vec{\tau}}{dt} \\
 &= \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + v^2(t) \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\
 &= \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2(t)}{R} \vec{n}
 \end{aligned} \tag{28}$$

tenim, doncs, les components de l'acceleració

$$\begin{aligned}
 a_{\tau} &= \frac{dv}{dt}, && \text{acceleració tangencial} \\
 a_n &= \frac{v^2}{R}, && \text{acceleració normal}
 \end{aligned}$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular**
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu

Moviment circular I

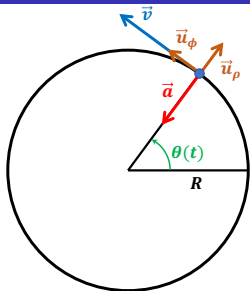


Figura: Moviment circular.

- Definició: Moviment en el pla XY , descrivint una circumferència de centre $(0, 0, 0)$ i radi R . Inicialment en $(R, 0, 0)$ i prenent angles $\theta(t)$ a partir de l'eix OX .

$$x(t) = R \cos \theta(t), \quad (29)$$

$$y(t) = R \sin \theta(t), \quad (30)$$

$$z(t) = 0. \quad (31)$$

Suposarem que $\theta(t)$ és una funció creixent, i això implica el recorregut antihorari de la circumferència.

- Vector de posició: $\vec{r}(t) = (R \cos(\theta(t)), R \sin(\theta(t)), 0) \quad (32)$

- Velocitat: $\vec{v}(t) = R w(t) (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0) \quad (33)$

amb $\dot{\theta}(t) = w(t) > 0$, ja que la funció és creixent.

- Celeritat: $v(t) = R \dot{\theta}(t) = R w(t). \quad (34)$



Moviment circular II

■ Vector tangent:
$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0) \quad (35)$$

■ Vector normal:
$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{d\vec{\tau}/dt}{|d\vec{\tau}/dt|} = \frac{w(t)(-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0)}{|d\vec{\tau}/dt|} \\ &= (-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0) \end{aligned} \quad (36)$$

(cap al centre de la circumferència)

■ Acceleració:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \dot{v}(t)\vec{\tau} + R\omega^2\vec{n} \\ &= R\dot{\omega}(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0) + R\omega^2(-\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t)), 0). \end{aligned} \quad (37)$$

■ Considerant la definició de radi de curvatura, l'equació que defineix el lloc geomètric del centre de curvatura (coneguda també com a *evoluta*) és

$$\vec{OC}(t) = \vec{r}(t) + R\vec{n}(t) = (0, 0, 0). \quad (38)$$



Moviment circular III

- Si $v(t) = v_0 = \text{const}$ (**moviment circular uniforme**; MCU) llavors de eq. (34), s'infereix que $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 = \text{const}$ i $w(t) = w_0 = \text{const}$, per tant,

$$v(t) = v_0 = R\dot{\theta}_0 = R w_0 \quad (39)$$

amb la qual cosa

$$\dot{\theta}(t) = w_0 t. \quad (40)$$

En aquest cas, el moviment només té acceleració normal ($a_\tau \propto \dot{v}(t) = 0$)

$$a_n = R w_0^2. \quad (41)$$

- **Nota.** Usant coordenades cilíndriques / polars tenim

$$\rho = R, \quad \phi = \theta(t), \quad z = 0, \quad (42)$$

i, a més,

$$\vec{n} = -\hat{u}_\rho, \quad \vec{\tau}(t) = \hat{u}_\phi. \quad (43)$$

aleshores

$$\vec{r}(t) = R\hat{u}_\rho(t), \quad (44)$$

$$\vec{v}(t) = R w(t)\hat{u}_\phi(t), \quad (45)$$

$$\vec{a}(t) = -R w^2(t)\hat{u}_\rho(t). \quad (46)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet**
- 7 Transformacions de Galileu

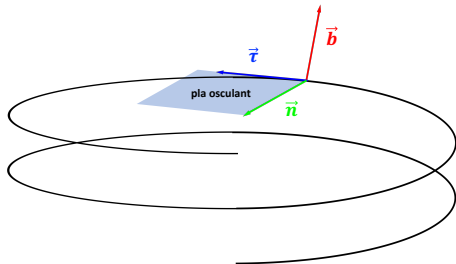


Figura: Triedre de Frenet sobre una trajectòria corba amb forma d'hèlix.

- Triedre de Frenet: Es defineix com la següent base ortonormal "a dretes"

$$\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}\}. \quad (47)$$

El vector \vec{b} s'anomena vector binormal. El pla que conté els vectors $\vec{\tau}$ i \vec{n} (i del qual \vec{b} és el vector unitari normal) s'anomena **pla osculant**. Es té, per tant, que

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{n} &= \vec{b} \cdot \vec{\tau} = \vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0, \\ \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = \vec{n} \times \vec{b} \quad (48) \\ |\vec{\tau}| &= |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1 \end{aligned}$$



Triedre de Frenet II

■ Fórmules de Frenet:

1a F. de Frenet

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n}. \quad (49)$$

El paràmetre R es diu **radi de curvatura**.

Demostració: Trivial partint de la definició de vector normal eq. (8).

2na F. de Frenet:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\chi\vec{n} = -\frac{1}{\sigma}\vec{n}. \quad (50)$$

El paràmetre σ es diu **radi de torsió** i $\chi = 1/\sigma$ és la **torsió**. La torsió pot interpretar-se com la velocitat de canvi del pla osculant de la corba.

Demostració: Com que \vec{b} és un vector de mòdul constant, $d\vec{b}/ds$ pertany al pla perpendicular a \vec{b} ; per tant, $d\vec{b}/ds = \alpha\vec{\tau} + \beta\vec{n}$, llavors

$$\alpha = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} \stackrel{(1)}{=} -\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{b} \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{R}\vec{n} \cdot \vec{b} = 0.$$

(1) s'obté derivant $\vec{b} \cdot \vec{\tau} = 0$

(2) usant 1a F. de Frenet (49)

Per tant, $d\vec{b}/ds \parallel \vec{n}$, i tindrem que $\beta = (d\vec{b}/ds) \cdot \vec{n} \implies \sigma = -((d\vec{b}/ds) \cdot \vec{n})^{-1}$.

3ra F. de Frenet:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\sigma}\vec{b} - \frac{1}{R}\vec{\tau}. \quad (51)$$

Demostració: Com que $d\vec{n}/ds = \alpha\vec{\tau} + \beta\vec{b}$, llavors

$$\alpha = \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \stackrel{(1)}{=} -\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{n} \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{R}\vec{n} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{R},$$

$$\beta = \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \stackrel{(3)}{=} -\frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\sigma}\vec{n} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sigma}. \quad (52)$$

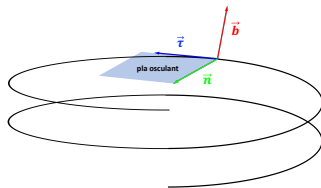
- (1) s'obté derivant $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$
- (2) usant la 1a F. de Frenet (49)
- (3) s'obté derivant $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$
- (4) usant la 2a F. de Frenet (50)

Fórmules de Frenet

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\chi\vec{n} = -\frac{1}{\sigma}\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\sigma}\vec{b} - \frac{1}{R}\vec{\tau}$$



Triedre de Frenet. Exemple I

- **Exemple.** Donada la trajectòria en coordenades cartesianes

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2) \text{ metres,} \quad (53)$$

trobeu en cada instant:

- La celeritat v .
- L'acceleració tangencial i normal.
- El radi de curvatura.
- L'espai recorregut entre $t = 0$ i $t = 2\pi$.

Solució:

$$\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 2t) \text{ m/s,} \quad v(t) = \sqrt{1 + 4t^2} \text{ m/s} \quad (54)$$

$$\vec{a}(t) = (-\cos t, -\sin t, 2) \text{ m/s}^2, \quad a(t) = \sqrt{5} \text{ m/s}^2 \quad (55)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \text{ m/s}^2 \quad (56)$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{\frac{5 + 4t^2}{1 + 4t^2}} \text{ m/s}^2 \quad (57)$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(1 + 4t^2) \sqrt{1 + 4t^2}}{\sqrt{5 + 4t^2}} \text{ metres} \quad (58)$$

Per a trobar l'espai recorregut, integrem la celeritat fent el canvi $2t = \sinh u$

$$e = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{1 + 4t^2} = \frac{\sinh(2 \sinh^{-1} 4\pi)}{8} + \frac{\sinh^{-1} 4\pi}{4} = 40.41 \text{ metres} \quad (59)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Trajectòria i espai recorregut
- 3 Velocitat
- 4 Acceleració
- 5 Moviment circular
- 6 Triedre de Frenet
- 7 Transformacions de Galileu

- **Principi de relativitat de Galileu:** Les lleis físiques són les mateixes en sistemes de referència que es mouen relativament entre ells amb moviment rectilini uniforme. Això ens defineix una classe de sistemes de referència anomenats **sistemes de referència inercials**, S_I .

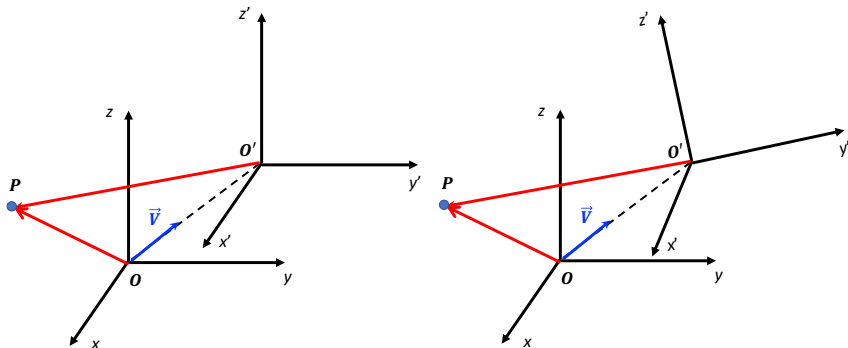


Figura: Dos sistemes de referència inercials. El sistema S'_I , centrat en O' es mou amb velocitat \vec{V} respecte del sistema S_I centrat en O . En l'esquema de la dreta, el sistema S'_I està rotat respecte de S_I .



- **Transformacions de Galileu:** Canvi de coordenades entre dos sistemes inercials S_I i S'_I amb orígens iguals en $t = 0$. (S'_I es mou amb velocitat \vec{V} respecte de S_I sense canviar la seua orientació):

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \quad (60)$$

on \vec{r} és el vector de posició \overrightarrow{OP} vist des de S_I i \vec{r}' és el vector de posició $\overrightarrow{O'P}$ "vist des de" S'_I (que és diferent de \overrightarrow{OP} "posat en" S'_I).

- Si inicialment S_I i S'_I tenen eixos paral·lels, tindrem la següent transformació de coordenades:

$$\begin{aligned} x' &= x - V_x t, \\ y' &= y - V_y t, \\ z' &= z - V_z t, \end{aligned} \quad (61)$$



Si inicialment els eixos de S'_I estan girats, llavors cal aplicar una rotació passiva a la transformació anterior, és a dir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{passiu} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x - V_x t \\ y - V_y t \\ z - V_z t \end{pmatrix}, \quad (62)$$

on \mathbf{R} és la matriu canvi de base, amb els vectors base posats en fila. Noteu que \mathbf{R} correspon, en aquesta notació, a la matriu de rotació, les files són precisament les components de la base girada respecte a la base inicial.



Mecànica I:

3. Dinàmica del punt

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



- Definició. Tenen el seu origen en la matèria elemental i són les últimes responsables de totes les forces de la Naturalesa.
- Interacció gravitatòria: Llarg abast, efectes macroscòpics. No s'ha detectat a nivell elemental. (Molt feble).
- Interacció feble: Curt abast, només efectes microscòpics. Responsable de la transmutació beta dels nuclis.
- Interacció electromagnètica: Llarg abast. Efectes macroscòpics i microscòpics. Es barreja amb la interacció feble a nivell microscòpic.
- Interacció forta: Curt abast. Només es detecta a nivell elemental (Transmutació alfa nuclear i transmutació hadrònica).



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques**
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



- Força de Coulomb: força de la càrrega q_2 sobre q_1

$$\vec{F}_{1(2)} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1)$$

on

$$\begin{aligned} \vec{r}_{12} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \\ \hat{r}_{12} &= \vec{r}_{12}/r_{12}. \end{aligned}$$

A més

$$\begin{aligned} k &= 1/(4\pi\epsilon_0) = 10^{-7} c^2 = 8.988 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \\ &= 2.307 \times 10^{-28} \text{ N m}^2 e^{-2}, \end{aligned}$$

sent ϵ_0 la permitivitat elèctrica del buit i e la càrrega de l'electró

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

C és la unitat de càrrega macroscòpica (Coulomb).



- Força Gravitatòria: Força de la càrrega gravitatòria m_2 sobre m_1

$$\vec{F}_{1(2)} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}. \quad (2)$$

Aquesta força és sempre atractiva perquè $m_1 m_2 > 0$.

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (3)$$

Compareu les forces elèctrica i gravitatòria per a un protó ($m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$)^(†).

$$^{(†)} \frac{Gm_p^2}{ke^2} \simeq 8 \times 10^{-37} \ll 1!$$



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció**
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



Les Forces de fricció impedeixen o esmorteixen els moviments.

- Moviment sobre una superfície:

$$|\vec{F}| \leq \mu_e |\vec{N}|, \quad (4)$$

$\vec{N} \equiv$ normal a la superfície,

$\mu_e \equiv$ coeficient estàtic.

- Moviment en un fluid viscos:

$$\vec{F} = -b\vec{v}, \quad (\text{Força d'arrossegament}) \quad (5)$$

$b = 6\pi a\eta$ (coeficient d'arrossegament per a una esfera de radi a)

$\eta \equiv$ coeficient de viscositat del fluid

En caiguda lliure cal considerar, a més, l'empenta cap amunt. El moviment del cos se suposa que no produeix turbulències en el fluid (règim laminar per a velocitats petites).



- Moviment en un gas (a majors velocitats que al punt anterior, però encara subsòniques):

$$\vec{F} = -cv^2\vec{\tau}, \quad (\text{Força d'arrosegament}) \quad (6)$$

on

$$c = \frac{1}{2}C_a S \rho$$

$C_a \equiv$ coeficient aerodinàmic (depèn de la geometria del cos),

$S \equiv$ secció transversal,

$\rho \equiv$ densitat del gas.

	disc	esfera	avió
C_a	1.2	0.4	0.06

Taula 1: Valors típics del coeficient aerodinàmic en diversos cossos.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton**
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



- **Primera llei:** Tot cos roman en repòs o en moviment uniforme llevat que actue una força \vec{F} sobre el mateix.
- **Segona llei:** La variació de la quantitat de moviment per unitat de temps d'un objecte és igual a la resultant de la força que actua sobre aquest objecte.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (7)$$

$m \equiv$ massa inercial

$m\vec{v} \equiv$ quantitat de moviment

- **Tercera llei:** Quan dos cossos exerceixen forces entre si, aquestes són d'intensitats iguals i sentits oposats.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (8)$$

La tercera llei no es compleix quan la interacció entre les partícules és electro-magnètica, perquè el camp electromagnètic es porta part del moment.



Reflexions sobre les lleis de Newton (Thornton & Marrion):

- La 1a llei no té sentit sense el **concepte de força**, una *paraula* que apareix en les tres lleis. De fet, quedant sola, **la 1a Llei transmet un significat exacte només per a la força zero**; és a dir, que un cos que quede en repòs o en moviment uniforme (és a dir, sense accelerar, rectilini) no està subjecte a cap força. Un cos que es mou d'aquesta manera s'anomena **cos lliure** (o partícula lliure).

En assenyalar la falta de contingut en la 1a llei de Newton, Eddington va observar que la llei pot expressar-se així:

Cada partícula continua en el seu estat de repòs o moviment uniforme en línia recta, excepte en la mesura que no siga així.

- La 2a llei proporciona una definició explícita: **la força es relaciona amb la taxa de canvi del moment**. Però té un inconvenient, perquè **cal definir amb cura qué s'entèn per massa**.

⇒ Tant la 1a com la 2a llei poden ser considerades com **definicions**.

- La 3a llei sí que és una llei, **però no una llei general de la naturalesa**. La llei s'aplica quan la força exercida per un objecte (punt) sobre un altre objecte (punt) es dirigeix al llarg de la línia que connecta ambos objectes.

Aquestes forces s'anomenen **forces centrals** (definició § 9 i aprofundirem en elles en el tema 5); la 3a llei s'aplica tant si una força central és atractiva o repulsiva.



Exemples de forces centrals:

- Forces gravitacionals i electrostàtiques. Les lleis de Newton es poden utilitzar en problemes relacionats amb aquest tipus de forces.
- De vegades, les forces elàstiques (que en realitat són manifestacions macroscòpiques de forces electrostàtiques microscòpiques) són centrals.
- Els objectes de dos punts connectats per una molla recta o una corda elàstica estan subjectes a forces que compleixen la 3a Llei.

Qualsevol força que depèn de les velocitats dels cossos en interacció és no central, i és possible que la 3a Llei no s'aplique. Les forces dependents de la velocitat són característiques de les interaccions que es propaguen amb velocitat finita.

Exemples:

- força entre càrregues elèctriques en moviment (la força es propaga amb la velocitat de la llum);
- força gravitatòria entre cossos mòbils, però l'efecte és petit i difícil de detectar. L'únic efecte observable és la precessió del periheli dels planetes interiors (si hi ha temps ho veurem al tema 5).



Per demostrar la importància de la 3a Llei de Newton, la podem reescriure de la manera següent, que incorpora la definició adequada de massa:

Si dos cossos constitueixen un sistema aïllat ideal, les acceleracions d'aquests cossos sempre estan en direccions oposades i la relació de les magnituds de les acceleracions és constant. Aquesta relació constant és la relació inversa de les masses dels cossos.

- **La 3a Llei permet deduir també el principi de conservació de moment.**

Efectivament, manipulant la 3a Llei (Eq. 8):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \implies \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0} \implies \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constant} \quad (9)$$

- **Sistema de referència inercial:** És aquell en què es verifiquen les lleis de Newton.
- Equivalència de la càrrega gravitatòria n i la massa inercial m : En caiguda lliure des d'una altura h s'obté que

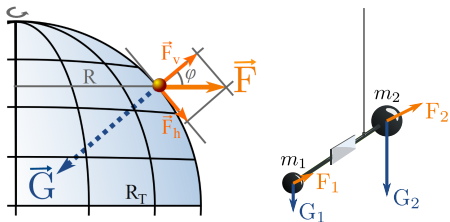
$$v = \sqrt{2ghn/m} \quad (10)$$

Independent del cos! [experiment de Galileo], amb el que n/m és una constant universal, la qual cosa ens permet fer la identificació $n = m$.



- També es podria comprovar amb un oscil·lador simple en presència de gravetat, [experiment de Newton] $F = ng - kx$, comparant el punt d'equilibri ($F = 0$), $x_{eq} = ng/k$, amb el període del moviment oscil·latori $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$\text{Constant} = \frac{x_{eq}}{T^2} = \frac{gn}{4\pi^2 m} \quad (11)$$



- La comprovació més precisa es realitza amb una balança de torsió (Fig. 1; experiència de Eötvös, amb 12 xifres significatives!). Considerant l'acceleració centrífuga de la massa inercial, causada per la rotació de la Terra, s'obté que

$$\vec{F} = ng\hat{r} + m\vec{a}_{cent} \quad (12)$$

Figura 1: (Esquerra) Esquema de forces gravitatòria i centrífuga sobre la superfície de la Terra d'una massa en la balança de Eötvös. ϕ és la latitud del punt sobre la superfície terrestre on es fa l'experiment. (Dreta) Si la relació entre F_1 i F_2 difereix de la relació entre G_1 i G_2 (cosa que succeiria si les masses inercial i gravitatòria no foren iguals), la barra giraria. El mirall s'utilitza per mesurar la (absència de) rotació. Font: Wikipedia.

Per dos cossos diferents amb la mateixa càrrega gravitatòria n , la balança de torsió giraria amb masses inercials diferents, i no ho fa.



- **Principi d'equivalència.** Un sistema de referència S lligat a un objecte que cau lliurement en un camp gravitatori (és a dir, amb acceleració $a = g$ a la Terra) és equivalent a un verdader sistema de referència inercial S_I sense gravetat. Els experiments que es realitzen en S , donaran resultats idèntics als que s'obtidrien en un S_I sense gravetat.
 - **Forma alternativa del principi d'equivalència:** les masses inercial i gravitatòria del mateix cos són iguals (Thornton & Marrison §2.2).
 - El principi d'equivalència és d'importància vital en la teoria de la Relativitat General.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració**
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



- Per a una partícula de massa m en una dimensió tenim

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, v, t) \quad (13)$$

Resoldre el cas general en el que la força depèn de la posició, la velocitat i el temps sol ser complicat. Per això considerem els següents casos més senzills en els que la força només depèn d'alguna d'aquestes magnituds. Els casos es resoldran per integracions successives.

- 1 $F = F(x)$. Tenim de la llei de Newton que $F(x) = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$, amb el que

$$m \int v dv = \int F(x) dx \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \int F(x) dx + K_1}, \quad (14)$$

i tenint en compte que $v(t) = dx/dt$, aïllem dt i tornem a integrar

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F(x) dx + K_1}} + K_2. \quad (15)$$

D'aquest resultat podem obtenir la trajectòria $x(t)$.



- 2 $F = F(v)$. Ara $F(v) = m \frac{dv}{dt}$. Podem aïllar dt de l'equació de Newton i integrar

$$t = m \int \frac{dv}{F(v)} + K_1. \quad (16)$$

Si aïllem $v(t)$ i integrem respecte al temps obtindrem directament la trajectòria $x(t)$.

- 3 $F = F(t)$. Ací una primera integració de $F(t) = m \frac{dv}{dt}$ resol $v(t)$:

$$mv = \int F(t)dt + K_1, \quad (17)$$

i tornant a integrar tenim la trajectòria

$$mx(t) = \int \left[\int F(t)dt + K_1 \right] dt + K_2 \quad (18)$$

Les constants d'integració es determinen a partir de les condicions inicials $x(t=0)$ i $v(t=0)$, o de dues condicions en qualsevol altre instant.



- 4 Mètode numèric per $F(x, v, t)$. Amb condicions inicials x_0 i v_0 en $t = t_0$, l'acceleració inicial serà

$$a_0 = \frac{1}{m} F(x_0, v_0, t_0) \quad (19)$$

Deprés d'un temps Δt (la solució és més precisa si Δt és prou petit), tindrem

$$x(t_0 + \Delta t) = \underbrace{x(t_0)}_{x_0} + \underbrace{\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0}}_{v_0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \implies x_1 = x_0 + v_0 \Delta t$$

$$v(t_0 + \Delta t) = \underbrace{v(t_0)}_{v_0} + \underbrace{\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t_0}}_{a_0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \implies v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t$$

i, per tant,

$$a_1 = \frac{1}{m} F(x_1, v_1, t_1) \quad (20)$$

i així successivament fins $t_n = t_0 + n\Delta t$.

Cal notar, però, que aquest mètode d'integració numèrica és només de primer ordre en Δt i, per tant, poc precís. Es poden dissenyar algoritmes de major ordre per guanyar en precisió.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples**
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.

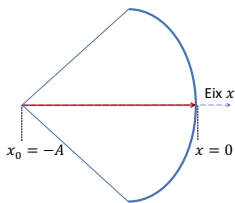


Figura 2: Arc (1D)

- Força durant el temps en que la corda de l'arc està en contacte amb la fletxa (1 dimensió; amb l'eix x cap a la dreta; condicions inicials $v_0 = 0$, $x_0 = -A < 0$.)

$$F = -kx \quad (21)$$

- Integral primera ($F = F(x)$); tipus 1 en la Sec. 5)

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C_1 \quad (C_1 = kA^2/2). \quad (22)$$

- Integral segona

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \quad (23)$$

per tant

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{1}{A} \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/A)^2}} + C_2 = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \frac{x}{A} + C_2 \quad (24)$$

amb $C_2 = (\pi/2)\sqrt{m/k}$.

- La trajectòria és, doncs

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (25)$$

La fletxa abandona l'arc quan $x(t = t_f) = 0$. Això passa transcorregut un temps $t_f = (\pi/2) \sqrt{m/k}$. La velocitat de sortida de la fletxa serà $\dot{x}(t_f) = A \sqrt{k/m}$.

Des de'l punt de sortida de la fletxa, la trajectòria serà rectilínia i uniforme.



- Força durant el temps després d'eixir de l'avió (1 dimensió). Noteu que hi ha dues forces oposades, la de la gravetat i la de viscositat friccional (per tant, $F = F(v)$)

$$F = -mg + cv^2 \quad (26)$$

(l'eix x cap amunt i la gravetat cap avall). La constant de fregament c està relacionada, com hem vist, amb l'aerodinàmica del cos i amb la densitat de l'aire.

- Velocitat límit: En començar el moviment només actua la gravetat. La velocitat augmenta fins que es cancel·len les forces, $F = 0$. Llavors, arribem a la velocitat límit

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{c}}. \quad (27)$$

Per a una massa de 70 kg i un coeficient de fregament de 0.24 obtenim $v_l \simeq 54 \text{ m s}^{-1}$ ($\simeq 193 \text{ km h}^{-1}$).

- Equació de moviment: La 2a llei de Newton és, en aquest cas,

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + cv^2 = -mg \left(\frac{v_l^2 - v^2}{v_l^2} \right)$$

on hem fet servir que $c = mg/v_l^2$. Reagrupant variables, obtenim

$$\frac{dv}{v_l^2 - v^2} = \frac{dv}{2v_l} \left(\frac{1}{v_l + v} + \frac{1}{v_l - v} \right) = -\frac{gdt}{v_l^2} \quad (28)$$

- Solució:

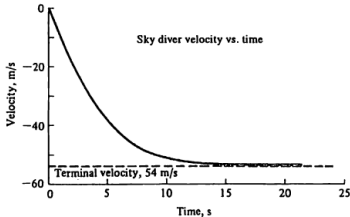


Figura 3: Velocitat d'un paracaigudista en funció del temps per a una velocitat límit $v_l = 54 \text{ m s}^{-1}$. **Figura 1-2 de Olsson & Barger (1995).**

- Per a la velocitat de caiguda s'obté, amb velocitat inicial nul·la,

$$v(t) = -v_l \frac{1 - e^{-2gt/v_l}}{1 + e^{-2gt/v_l}}$$

Noteu que la velocitat límit $v = -v_l$ s'aconsegueix asimptòticament per a $t \gg \tau \equiv v_l/2g (\simeq 2.7 \text{ s})$. El signe menys és consistent amb l'elecció de l'eix x . Per $t = \tau$ s'arriba al 46% de la velocitat límit. Per $t = 4\tau$ s'arriba al 96% de la velocitat límit.

- Amb l'origen en la superfície de la Terra i l'eix x cap amunt, per a una altura h inicial obtenim la distància recorreguda

$$\int_h^x dx = -v_l \int_0^t \left(1 - \frac{2e^{-2gt/v_l}}{1 + e^{-2gt/v_l}} \right) dt$$

$$h - x = v_l \left(t - \frac{v_l}{g} \ln \frac{2}{1 + e^{-2gt/v_l}} \right) \quad (29)$$

- Per $v_l \simeq 54 \text{ ms}^{-1}$ i $t = 4\tau = 2v_l/g (\simeq 11 \text{ s})$, aleshores $h - x(4\tau) \simeq 400 \text{ m}$. Aquesta és la distància que ha de recórrer el paracaigudista per arribar, pràcticament, a la velocitat límit.
- La distància que queda fins a terra és $x(t)$. Aquesta distància ha de ser tal que el paracaigudista pugui aconseguir la seua velocitat límit. En una competició, atès h caldrà calcular el temps màxim que el paracaigudista pot volar amb el paracaigudes tancat i així arribar a terra el més ràpid possible.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia**
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.

Hi ha **tres lleis importants de conservació de la mecànica: energia, moment i moment angular**. Les tres lleis es poden derivar de la teoria newtoniana. Tanmateix, el seu rang de validesa és molt més ampli, estenent-se fins i tot al domini de les partícules elementals relativistes, encara que canvien de forma lleugerament. En les seues ramificacions a totes les branques de la ciència, aquestes lleis de conservació tenen conseqüències excepcionalment àmplies. En aquesta secció veurem la conservació de l'energia.

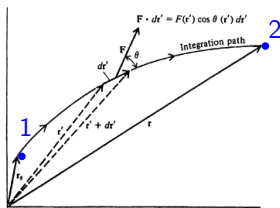


FIGURE 2-11. Geometrical interpretation of the line integral $\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}'$, where r' is the integration variable and r_1, r_2 are the limits of integration. The projection angle θ generally varies along the path.

Figura 4: Treball d'una força.
Figura 2-11; Olsson & Barger (1995).

- Treball dinàmic d'un camp de forces $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ al llarg de la trajectòria $\vec{r}(t)$:

$$W_{din}(1 \rightarrow 2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot d\vec{r}(t) \quad (30)$$

- Energia cinètica (dinàmica): Considerem el següent desenvolupament, en el que utilitzem la 2a llei de Newton

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = d(m\vec{v}) \cdot \vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (31)$$



- Definim l'energia cinètica T

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (32)$$

aleshores

$$W_{din}(1 \rightarrow 2) = T_2 - T_1. \quad (33)$$

L'equació (33) es coneix com **teorema Treball-Energia**, segons el qual el treball fet per la força actuant sobre m és igual al canvi d'energia cinètica.

- Treball virtual contra el camp de forces $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$, amb el temps congelat en t_0 , al llarg d'un camí Γ :

$$W_{virt}^{contra}(\Gamma, t_0) = - \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}(\alpha), t_0) \cdot d\vec{r}(\alpha) \quad (34)$$

sent α un paràmetre que descriu el camí Γ .



- Energia potencial: Siga $\vec{F}(\vec{r}, t)$ un camp conservatiu ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ per a cada t). Podem definir un camp $V(\vec{r}, t)$ tal que $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}, t)$. Llavors,

$$W_{virt}^{contra}(2 \rightarrow 1, t_0) = - \int_2^1 \vec{F}(\vec{r}(\alpha), t_0) \cdot d\vec{r}(\alpha) = V_1(t_0) - V_2(t_0) \quad (35)$$

independent del camí triat en l'instant t_0 .

- Conservació de l'energia total: En una trajectòria dinàmica definim l'energia total del sistema

$$E(\vec{r}, \vec{v}; t) = T(v) + V(\vec{r}, t). \quad (36)$$

Si l'energia potencial V no depèn explícitament del temps,

$$W_{virt}^{contra}(2 \rightarrow 1) = - \int_2^1 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = W_{din}(1 \rightarrow 2), \quad (37)$$

és a dir

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \quad (38)$$



d'on es dedueix la conservació de l'energia total

$$E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = \text{constant} \quad (39)$$

Una altra manera d'arribar a aquest resultat és diferenciant l'energia respecte al temps

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (40)$$

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt \quad (41)$$

$$dE = \left(\vec{F} + \vec{\nabla}V \right) \cdot d\vec{r} + \frac{\partial V}{\partial t} dt. \quad (42)$$

Veiem, doncs, que si V no depèn explícitament del temps i la força és conservativa ($\vec{F} = -\vec{\nabla}V$), l'energia total es conserva.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular**
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.

Moment i moment angular I

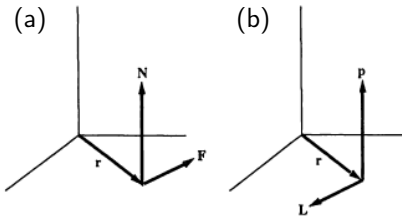


Figura 5: Diagrama il·lustrant les relacions (a) \vec{r} , \vec{F} i \vec{N} i (b) \vec{r} , \vec{p} i \vec{L} .

Figura 5-1 de Olsson & Barger (1995).

- Moment lineal o moment:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (43)$$

Conservació del moment: Si $F_i = 0$
($i = x, y, \text{ o } z$) llavors

$$p_i = \text{constant} \quad (44)$$

és a dir es conserva la component corresponent del moment lineal.

- Moment d'una força (respecte de l'origen O):

$$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (45)$$

- Moment angular (respecte de l'origen O):

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} \quad (46)$$



- Equació del moment angular:^(†)

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (47)$$

Conservació del moment angular: Si $N_i = 0$ ($i = x, y \text{ o } z$), llavors

$$L_i = \text{constant} \quad (48)$$

és a dir, es conserva la component corresponent del moment angular.

^(†) Demostració:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - m\vec{v} \times \vec{v} \rightarrow 0 \\ &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \end{aligned}$$



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals**
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.



(†) En la definició (49) el *centre* s'ha pres en $r = 0$, però podria haver-se pres en qualsevol altre punt \vec{r}_0 . Les expressions es modificarien perquè en lloc de la dependència amb r tinguérem la dependència en $|\vec{r} - \vec{r}_0|$.

- Definició: En sentit estricte es defineix força central com^(†)

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} \quad (49)$$

amb $\hat{r} = \vec{r}/r$.

Si $f(r) > 0 \rightarrow$ força repulsiva.

Si $f(r) < 0 \rightarrow$ força atractiva.

- Propietat: Tota força central és conservativa. En efecte, prenent el rotacional en esfèriques, $\hat{u}_r = \hat{r}$, s'obté

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\hat{u}_\theta & r \sin \theta \hat{u}_\phi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \phi \\ f(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (50)$$

Com que la força és conservativa, podem definir una energia potencial de la qual derivar-la.



- Energia potencial: El teorema de Stokes ens garanteix la independència de camí. O equivalentment, existeix una funció escalar $V(\vec{r})$ tal que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad (51)$$

Ara, d'una banda, de la definició de gradient ($d\Phi = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot d\vec{r}$)

$$\int^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = -V(\vec{r}). \quad (52)$$

D'altra banda

$$\int^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \int^{\vec{r}} f(r')\hat{r}' \cdot d\vec{r}' \stackrel{(\dagger)}{=} \int^{\vec{r}} f(r')dr' \quad (53)$$

per tant, $V(\vec{r})$ només depèn de r (e.d. del mòdul de \vec{r}).

- **Exemple:** Per $\vec{F}(\vec{r}) = a\hat{r}/r^2$ (que és com depèn de la distància tant la força gravitatòria com la Coulombiana),

$$V(r) = - \int^r adr/r^2 = a/r + \text{const.} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} (\dagger) \frac{d((r')^2)}{2} &= \frac{d(\vec{r}' \cdot \vec{r}')}{2} \\ &= \vec{r}' \cdot d\vec{r}' \end{aligned}$$



- Conservació del moment angular: Per a una partícula de massa m sotmesa a una força central $f(r)\hat{r}$ s'obté

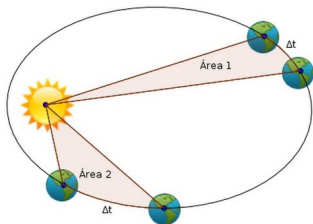
$$\vec{N} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = \vec{0} \quad (55)$$

per la qual cosa

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = \vec{0} \quad (56)$$

i, per tant

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{const.} \quad (57)$$



- Conseqüència 1: El moviment té lloc en el pla $\vec{r} \times \vec{v}$ que passa per l'origen de forces.
- Conseqüència 2: Per a una força central la *velocitat areolar* és constant

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const.} \quad (58)$$

Figura 6: Velocitat areolar.



Continguts

- 1 Interaccions fonamentals
- 2 Forces macroscòpiques
- 3 Forces de fricció
- 4 Lleis de Newton
- 5 Resolució per integració
- 6 Exemples
- 7 Treball i Energia
- 8 Moment i moment angular
- 9 Forces Centrals
- 10 Potencial unidimensional. Petites oscil·lacions.**

- Siga una partícula de massa m en un camp de forces $F(x)$. Totes les forces $F(x)$ en una dimensió són conservatives, ja que entre dos punts només hi ha un camí. Siga $V(x)$ la corresponent energia potencial.

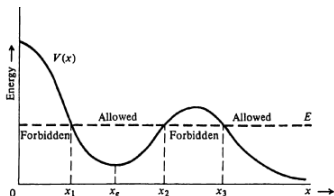


Figura 7: Diagrama il·lustrant les regions prohibides per al moviment d'una partícula amb energia E i energia potencial $V(x)$. x_e denota un punt d'equilibri estable. Els punts x_1 , x_2 i x_3 són punts de retorn. Figura 2-4 de Olsson & Barger (1995).

- Energia total:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \quad (59)$$

Rang de velocitats: Donada E s'obté

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2[E - V(x)]}{m}}. \quad (60)$$

- Rang de moviment: Per tot x tal que

$$V(x) \leq E \quad (61)$$

d'una altra manera la velocitat seria imaginària.



- Punts de retorn: x_R tal que

$$V(x_R) = E \quad (62)$$

és a dir, en x_R s'anul·la la velocitat i canvia de signe.

- Punts d'equilibri: x_e tal que

$$F = - \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x_e} \equiv V'(x_e) = 0 \quad (63)$$

L'energia potencial té un màxim o mínim local. L'equilibri és estable / inestable segons

$$\left. \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right|_{x_e} \equiv V''(x_e) \gtrless 0. \quad (64)$$



- Petites oscil·lacions al voltant d'un punt x_e d'equilibri estable:
Desenvolupament de l'energia potencial

$$V(x) = V(x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2 + \dots, \quad (65)$$

i la seua derivada prop d'un punt d'equilibri estable és, aproximadament:

$$\frac{dV(x)}{dx} \simeq V''(x_e)(x - x_e), \quad (66)$$

- Equació de moviment:

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \quad (67)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_e) \quad (68)$$

$$k \equiv V''(x_e) > 0.$$

- Solució harmònica al voltant de x_e

$$x(t) = x_e + A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta \right). \quad (69)$$

Mecànica I:

4. Sistemes de partícules

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Sistema de N partícules
- 2 Simetries i lleis de conservació
- 3 Teorema del Virial
- 4 Sistema de dos cossos
- 5 Sistema de massa variable



Continguts

- 1 Sistema de N partícules
- 2 Simetries i lleis de conservació
- 3 Teorema del Virial
- 4 Sistema de dos cossos
- 5 Sistema de massa variable



- Taylor, “Classical Mechanics” (2006), Cap.1 (§ Multiparticle Systems)
- Thornton & Marion, “Classical Dynamics of Particles and Systems” (2004), Cap.9 (Dynamics of a System of Particles)

Sistemes de N partícules I

- Forces del sistema.

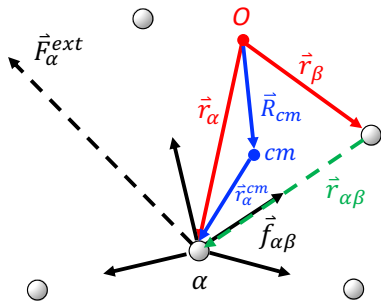


Figura 1: Un sistema de cinc partícules marcades per α o $\beta = 1, 2, \dots, 5$. La partícula α està subjecta a quatre forces internes (s'anota la interacció de les partícules α i β , $\vec{f}_{\alpha\beta}$). Ademés, la partícula α pot estar subjecta a una força externa neta, \vec{F}_{α}^{ext} (figura adaptada de Fig.1.7 del llibre de Taylor).

- Força externa sobre la partícula $\alpha = 1, 2, \dots, N$:

$$\vec{F}_{\alpha}^{ext}$$

- Força interna de β sobre α :

$$\vec{f}_{\alpha\beta} \text{ tal que } \vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha}$$

(principi d'acció-reacció, 3ra llei de Newton)

- Força interna central:

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = f(r_{\alpha\beta}) \hat{r}_{\alpha\beta}$$

on

$$\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}$$

$$r_{\alpha\beta} = |\vec{r}_{\alpha\beta}|$$

$$\hat{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha\beta} / |\vec{r}_{\alpha\beta}|$$

- Força total sobre α :

$$\vec{F}_{\alpha} = \vec{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{f}_{\alpha\beta}$$



- Força total interna del sistema (tercera llei de Newton):

$$\sum_{\alpha, \beta (\beta \neq \alpha)} \vec{f}_{\alpha\beta} = \vec{0}$$

- Força total del sistema:

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \equiv \vec{F}^{ext} \quad (1)$$

La força total sobre el sistema és la suma de les forces externes sobre cada partícula.

- Centre de masses i coordenades relatives.
 - Coordenades del centre de masses:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha},$$

on

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \equiv \text{massa total}$$



Sistemes de N partícules III

- Coordenades relatives al centre de masses:

$$\vec{r}_\alpha^{cm} = \vec{r}_\alpha - \vec{R}_{cm}$$

Es compleix que

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{cm} = \sum_{\alpha} \left(m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} - m_{\alpha} \vec{R}^{cm} \right) = M \vec{R}_{cm} - M \vec{R}_{cm} = \vec{0}, \quad (2)$$

Noteu que si derivem respecte del temps el resultat (2),

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} = \vec{0}, \quad (3)$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} = \vec{0}. \quad (4)$$

- Moment total del sistema:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = M \dot{\vec{R}}_{cm} \quad (5)$$

El moment total del sistema és equivalent al de la massa total concentrada en el *cm* .



Sistemes de N partícules IV

- Moviment del centre de masses. Derivant respecte al temps i aplicant la segona llei de Newton ($\dot{\vec{P}} = \vec{F}$), tenint en compte (1)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\ddot{\vec{R}}_{cm} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\ddot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = \vec{F}^{ext}$$

és a dir, l'equació de moviment per a \vec{P} només depend de forces externes

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

Per a $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$, llavors

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

Si no hi ha forces exteriors es conserva el moment total \vec{P} .

- Moment angular total (la posició de totes les partícules, \vec{r}_α està mesurada des del mateix origen, O)

Biblio: Taylor (2006), §3.5

$$\vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{l}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \quad (6)$$

- Descomposició del moment angular (fem servir (2) i (3))

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_{\alpha} \left(\vec{r}_{\alpha}^{cm} + \vec{R}_{cm} \right) \times m_{\alpha} \left(\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} + \dot{\vec{R}}_{cm} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{cm} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} + \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{cm} \right) \times \dot{\vec{R}}_{cm} + \\ &\quad + \vec{R}_{cm} \times \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} \right) + \vec{R}_{cm} \times \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) \dot{\vec{R}}_{cm} \\ &= \vec{L}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{P} \end{aligned}$$

0; Eq. (2)

0; Eq. (3)

Per tant,

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{cm} + \vec{R}_{cm} \times \vec{P} \quad (7)$$

El moment angular total del sistema respecte de l'origen O d'un sistema de referència inercial, es pot descompondre com el moment angular total del sistema respecte del centre de masses més el moment angular de tota la massa M concentrada en el centre de masses movent-se amb \vec{R}_{cm} .



- Moviment del moment angular: Derivant el moment angular (Eq. (6)), s'obté

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{p}}_{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \left(\vec{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \vec{f}_{\alpha\beta} \right) \\
 &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext} + \sum_{\alpha, \beta(>\alpha)} \vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

$(\dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \vec{0})$

En l'últim sumatori s'ha fet el següent desenvolupament:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha, \beta \neq \alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{f}_{\alpha\beta} &= \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{f}_{13} + \vec{r}_3 \times \vec{f}_{31} + \dots \\
 &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{f}_{13} + \dots \\
 &= \vec{r}_{12} \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_{13} \times \vec{f}_{13} + \dots \\
 &= \sum_{\alpha, \beta > \alpha} \vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{8}$$

noteu que hem utilitzat la segona llei de Newton vàlida per a sistemes inercials.



Sistemes de N partícules VII

- Per a forces internes centrals tindrem que $\vec{r}_{\alpha\beta} \parallel \vec{f}_{\alpha\beta}$ (Fig. 2), per tant, $\vec{r}_{\alpha\beta} \times \vec{f}_{\alpha\beta} = 0$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext} + \vec{0} = \vec{N}_O^{ext} \quad (9)$$

En resum (per a forces internes centrals)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^{ext}, \quad (10)$$

on \vec{N}_O^{ext} és el moment exercit per forces externes (par, torque o esforç de torsió). L'equació de moviment per a \vec{L}_O , en un sistema inercial, només depend dels moments de les forces externes.

Si no hi ha moments de forces externes, $\vec{N}_O^{ext} = \vec{0}$, el moment angular total \vec{L}_O es conserva.



Sistemes de N partícules VIII

- Moviment del moment angular respecte al centre de masses: Si derivem respecte al temps en la descomposició del moment angular (7), tenim

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} \times \vec{P} + \vec{R}_{cm} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \\
 &= \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} + \vec{R}_{cm} \times \vec{F}^{ext} \\
 &= \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} + \vec{R}_{cm} \times \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext}
 \end{aligned}
 \quad \vec{0}; \vec{P} \parallel \dot{\vec{R}}_{cm} \text{ (Eq. 5)}$$

Però, usant Eq. (9)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{ext}$$

Igualant els dos resultats arribem al següent resultat "sorprenent"

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}_{cm}) \times \vec{F}_{\alpha}^{ext} = \vec{N}_{cm}^{ext} \quad (11)$$

És a dir, l'equació de moviment del moment angular, des del centre de masses només depèn dels moments de forces externes, encara que el sistema de referència en el *cm* no siga inercial.

■ Energia cinètica total:

Biblio: Taylor (2006), §4.10

$$T_O = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

■ Descomposició de l'energia cinètica

$$T_O = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left(\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} + \dot{\vec{R}}_{cm} \right) \cdot \left(\dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} + \dot{\vec{R}}_{cm} \right)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (v_{\alpha}^{cm})^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm} \right) \dot{\vec{R}}_{cm},$$

$\vec{0}$; Eq. (3)

on hem fet els canvis $\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{R}}_{cm}$ i $\vec{v}_{\alpha}^{cm} = \dot{\vec{r}}_{\alpha}^{cm}$. Per tant,

$$T_O = T_{cm} + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

És a dir, l'energia cinètica total respecte d'un sistema de referència inercial, es pot descompondre com l'energia cinètica total respecte d'un sistema amb origen en el centre de masses més l'energia cinètica de tota la massa M , concentrada al centre de masses, movent-se amb $\dot{\vec{R}}_{cm}$.



■ Energia potencial total i energia total

- Per a forces externes conservatives i forces internes centrals:

$$\vec{F}_\alpha^{ext} = -\vec{\nabla}_\alpha V_\alpha(\vec{r}_\alpha),$$

$$\vec{f}_{\alpha\beta} = -\frac{dV_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{dr_{\alpha\beta}} \hat{r}_{\alpha\beta}.$$

- Suposem que la presència d'altres forces (tant internes com externes) no canvia la força entre les partícules α i β .
- $\vec{\nabla}_\alpha \equiv$ diferenciació respecte a les coordenades de la partícula α .

Diferenciant l'energia cinètica i tenint en compte l'Eq. (1) i (8) arribem a

$$\begin{aligned} dT_O &= \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot d\vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} dt = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha \\ &= \sum_\alpha \underbrace{\vec{F}_\alpha^{ext} \cdot d\vec{r}_\alpha}_{\text{Treball sobre } \alpha \text{ efectuat per força externa}} + \sum_{\alpha, \beta > \alpha} \underbrace{\vec{f}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{r}_{\alpha\beta}}_{\text{Treball sobre } \alpha \text{ efectuat per } \beta} \quad (= \text{Treball total}) \\ &= -\sum_\alpha dV_\alpha - \sum_{\alpha, \beta > \alpha} \frac{dV_{\alpha\beta}}{dr_{\alpha\beta}} dr_{\alpha\beta} \end{aligned}$$



Definint

$$V = \sum_{\alpha} V_{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta > \alpha} V_{\alpha\beta}$$

obtindrem que $dT_O + dV = 0$, és a dir que

l'energia total del sistema, E , es conserva

$$E = T_O + V = \text{constant.} \quad (12)$$



Continguts

- 1 Sistema de N partícules
- 2 Simetries i lleis de conservació
- 3 Teorema del Virial
- 4 Sistema de dos cossos
- 5 Sistema de massa variable



- Homogeneïtat del temps (sistema aïllat)

L'homogeneïtat del temps significa que l'energia potencial no depèn (explícitament) del temps ($\partial V / \partial t = 0$),

$$0 = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t + \varepsilon) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = \frac{\partial V}{\partial t} \varepsilon.$$

D'una banda tenim el següent desenvolupament de l'energia potencial

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial t},$$

i també (utilitzant la definició de treball dinàmic ($W_{din} = T_2 - T_1$))

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \dots \\ & = -\vec{F}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 - \dots = -\frac{dT}{dt}, \end{aligned}$$

per tant,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Si V no depèn explícitament del temps (homogeneïtat del temps) l'energia total es conserva.



■ Homogeneïtat de l'espai (sistema aïllat)

D'una banda, per a un desplaçament segons l'eix OZ , l'homogeneïtat de l'espai vol dir que

$$\begin{aligned} 0 &= V(\vec{r}_1 + \varepsilon \vec{k}, \vec{r}_2 + \varepsilon \vec{k}, \dots, t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial z_1} \varepsilon + \frac{\partial V}{\partial z_2} \varepsilon + \dots \Rightarrow \sum_{\alpha} \frac{\partial V}{\partial z_{\alpha}} = 0 \end{aligned}$$

d'altra banda

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} + \frac{\partial V}{\partial z_2} + \dots = -F_{1z} - F_{2z} - \dots = -F_z = -\frac{dP_z}{dt}$$

per la qual cosa

$$F_z = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dP_z}{dt} = 0. \quad (14)$$

Si V és invariant sota una translació espacial segons l'eix z , P_z es conserva.

Podríem fer el mateix per a cada component de \vec{P} (i obtenir resultats anàlegs).

Per a dues partícules aïllades, l'homogeneïtat de l'espai ens porta a la tercera llei de Newton



Simetries i lleis de conservació III

■ Isotropia de l'espai (sistema aïllat)

Siga la rotació (activa) \mathcal{R}_z d'angle $\epsilon \ll 1$ (arbitrària) al voltant de l'eix OZ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \mathcal{R}_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon & 0 \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \epsilon y \\ y + \epsilon x \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per a una rotació al voltant de l'eix OZ , la isotropia de l'espai significa que

$$\begin{aligned} 0 &= V(\mathcal{R}_z \vec{r}_1, \mathcal{R}_z \vec{r}_2, \dots, t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) \\ &= \left. \frac{\partial V}{\partial x_1} \right|_{x'_1=x_1} (x'_1 - x_1) + \left. \frac{\partial V}{\partial y_1} \right|_{y'_1=y_1} (y'_1 - y_1) + \dots = \frac{\partial V}{\partial x_1} (-\epsilon y_1) + \frac{\partial V}{\partial y_1} (\epsilon x_1) + \dots \\ &= (F_{1x} y_1 - F_{1y} x_1) \epsilon + \dots = -(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1)_z \epsilon + \dots = -(N_{1z} + N_{2z} + \dots) \epsilon \end{aligned}$$

per la qual cosa

$$N_{1z} + N_{2z} + \dots = \frac{dL_z}{dt} = 0$$

Si l'espai és isòtrop voltant de l'eix OZ llavors no hi ha moment total de forces, $N_z = 0$, i L_z es conserva.

El mateix per a les altres components.



Continguts

- 1 Sistema de N partícules
- 2 Simetries i lleis de conservació
- 3 Teorema del Virial**
- 4 Sistema de dos cossos
- 5 Sistema de massa variable



Teorema del Virial

- Funció G :

$$G = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}$$

diferenciant respecte a t

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\dot{\vec{p}}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} + \vec{p}_{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} + 2T \quad (15)$$

on T és l'energia cinètica.

- Enunciat: *Per a moviments periòdics d'un sistema de partícules amb període τ o moviments acotats, i donat que τ siga suficientement gran, es compleix que*

Teorema del Virial:

$$\underbrace{\left\langle \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle}_{\text{virial (Clausius)}} + 2 \langle T \rangle = 0, \quad (16)$$

on $\langle \dots \rangle$ és el valor mitjà en un període τ .



- Demostració: En les condicions de l'enunciat:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dG(t)}{dt} dt = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] \rightarrow 0,$$

on en el darrer pas considerem que $\tau \rightarrow \infty$ o $\tau = nT$ (T = període de G).

- Cas particular: Potencial central

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{r} = -r \frac{dV}{dr} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle r \frac{dV}{dr} \right\rangle = 2 \langle T \rangle.$$

Per al potencial de Kepler

$$V = -\frac{k}{r} \quad \Longrightarrow \quad \langle V \rangle + 2 \langle T \rangle = 0 \quad (17)$$



Teorema del Virial

- Gas perfecte en un volum V amb pressió P en la superfície, llavors,
 $d\vec{F} = -P\vec{n}ds$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} &\equiv -\frac{P}{2} \oint_S \vec{n} \cdot \vec{r} ds = (\text{T. Gauss}) \\ &= -\frac{P}{2} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) dv = -\frac{3}{2} PV \end{aligned}$$

per tant,

$$\text{Teorema del Virial per a gasos perfectes: } \langle T \rangle = \frac{3}{2} PV \quad (18)$$

Segons el teorema d'equipartició, l'energia cinètica promedi de cada àtom en un gas ideal és $3k\zeta/2$ ($\zeta = \text{temperatura}$). L'energia cinètica promedi total

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} Nk\zeta,$$

$N = \text{nombre d'àtoms/molècules,}$

$k = \text{constant de Boltzman}$

llavors

$$\text{Llei de Boyle: } PV = Nk\zeta$$



Continguts

- 1 Sistema de N partícules
- 2 Simetries i lleis de conservació
- 3 Teorema del Virial
- 4 Sistema de dos cossos
- 5 Sistema de massa variable



- Centre de masses i coordenades relatives. Siguen dos cossos de masses m_1 i m_2 , amb coordenades \vec{r}_1 i \vec{r}_2 , respectivament. Definim: Coordenades del centre de masses:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Coordenades relatives (des de 2 cap a 1):

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Anàlogament, podem definir la velocitat del centre de masses \vec{V}_{cm} i la velocitat relativa \vec{v} .

- Relacions inverses:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R}_{cm} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} & \vec{r}_2 &= \vec{R}_{cm} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \\ &= \vec{R}_{cm} + \vec{r}_1^{cm}. & &= \vec{R}_{cm} + \vec{r}_2^{cm}. \end{aligned}$$

Anàlogament, obtenim relacions per a \vec{v}_1 i \vec{v}_2 a partir de la velocitat del centre de masses \vec{V}_{cm} i de la velocitat relativa \vec{v} .



Sistema de dos cossos II

- Massa total:

$$M = m_1 + m_2$$

- Massa reduïda:

$$\mu = m_1 m_2 / M$$

- Descomposició de l'energia cinètica

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2 \quad (19)$$

Definint

$$T_{rel} := \frac{1}{2} \mu v^2, \quad T_M := \frac{1}{2} M V_{cm}^2, \quad (20)$$

tenim

$$T = T_{rel} + T_M$$

T_{rel} és l'energia cinètica vista des del cm , $T_{rel} = T_{cm}$, mentre que, T_M , és l'energia cinètica de tota la massa M movent-se amb el centre de masses.



■ Descomposició del moment angular

Biblio: Thornton & Marion (2004), §9.4

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= m_1 (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) \\ &= \mu (\vec{r} \times \vec{v}) + M (\vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm})\end{aligned}\quad (21)$$

Definim,

$$\vec{L}_{rel} := \mu (\vec{r} \times \vec{v}), \quad (22)$$

$$\vec{L}_M := M (\vec{R}_{cm} \times \vec{V}_{cm}) = \vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm} \quad (23)$$

on \vec{P}_{cm} és el moment lineal del sistema respecte del centre de masses. Usant aquestes definicions en (21) arribem a un resultat semblant a l'obtingut amb l'energia cinètica (Eq. (19))

$$\vec{L} = \vec{L}_{rel} + \vec{L}_M \quad (24)$$

Noteu que, $\vec{L}_{rel} = \vec{L}_{cm}$, mentre que \vec{L}_M és el moment angular de tota la massa M movent-se amb el centre de masses.



- Forces internes centrals i energia potencial. Biblio: Taylor (2006), §4.9, §8.2
Suposem que no hi ha forces externes i que hi ha homogeneïtat i isotropia espacial. L'energia potencial serà de la forma $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$,

$$\begin{aligned}\vec{f}_1^{int} &= -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \\ &= \vec{\nabla}_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{f}_2^{int},\end{aligned}$$

on el subíndex de $\vec{\nabla}$ indica derivada respecte a la posició de la partícula 1 o 2, és a dir:

$$\vec{\nabla}_\alpha = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (25)$$

- Equacions de moviment (sense forces externes):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{f}_1^{int} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{f}_2^{int} \end{aligned} \right\}$$

passant a coordenades relatives obtenim

$$M \ddot{\vec{R}}_{cm} = \vec{0} \quad (26)$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (\text{fem (31)-(30)})$$

$$= -\vec{\nabla} V(r) \quad (27)$$

noteu que

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_1^{int} + \vec{f}_2^{int} \quad (28)$$

$$= \vec{f}_1^{int} - \vec{f}_1^{int} = \vec{0} \quad (29)$$

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}) = m_1 \vec{\nabla}_1 V \quad (30)$$

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{r}}_2 + \ddot{\vec{r}}) = -m_2 \vec{\nabla}_1 V \quad (31)$$

A la darrera equació, el potencial només depèn del mòdul de la coordenada relativa, donada la isotropia espacial d'un sistema aïllat. (Noteu que, com $x = x_1 - x_2 \Rightarrow \partial/\partial x_1 = \partial/\partial x$)

Arribem, doncs a les següents conclusions:

- El centre de masses es mou amb moviment uniforme (no hi ha forces externes).
- El moviment relatiu equival al d'una partícula amb la massa reduïda μ en un potencial central $V(r)$ amb origen de forces en la partícula 2.



- Lleis de conservació. Per al moviment (relatiu) d'una partícula amb massa reduïda μ en un potencial central $V(r)$, es conserva, doncs, el moment angular

$$\vec{l} = \vec{L}_{rel} = \mu (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (\dagger)$$

$$\begin{aligned} (\dagger) \frac{d\vec{l}}{dt} &= \mu (\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}) \\ &= \vec{r} \times \vec{f}_{12} = 0 \quad (\vec{r} = \vec{r}_{12} || \vec{f}_{12}) \end{aligned}$$

A més com V no depèn del temps també es conserva l'energia relativa

$$E = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 + V(r)$$

En coordenades polars $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = 0$ (\equiv moviment en el pla equatorial; $\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$; $v_z = 0$), per a $\vec{r} = r\hat{u}_r$ tenim:

1) Conservació de moment angular relatiu $\vec{l} = \mu (\vec{r} \times \vec{v}) = (\mu r^2 \dot{\theta}) \hat{k}$:

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = const \quad (32)$$

El sentit del moment angular \vec{l} , en aquest cas segons $\pm \hat{k}$, també es conserva.



2) Conservació de l'energia relativa. Energia relativa en coordenades polars

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) \quad (33)$$

Com $V(r)$ no depèn explícitament del temps, es conserva l'energia

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{const} \quad (34)$$

on hem fet servir (32) per escriure $\dot{\theta} = l/\mu r^2$

- Aquestes lleis de conservació es poden obtenir directament integrant una vegada les equacions del moviment relatiu en coordenades polars. En efecte, en el pla $z = 0$ resulta

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta$$



Les equacions del moviment relatiu seran

$$\mu \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) = -\frac{dV}{dr} \quad (35)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (36)$$

Multiplicant per r l'equació (36) s'obté que

$$\frac{d}{dt} \left(r^2\dot{\theta} \right) = 0$$

D'ací la conservació del moment angular relatiu $l = \mu r^2\dot{\theta}$. Substituint, ara, $\dot{\theta} = l/\mu r^2$ a l'equació (35) i multiplicant-la per \dot{r} obtenim que

$$\frac{d \left(\mu \dot{r}^2 / 2 + l^2 / 2\mu r^2 \right)}{dt} \stackrel{(\dagger)}{=} -\frac{dV}{dt} \implies \frac{d \left(\mu \dot{r}^2 / 2 + \overbrace{l^2 / 2\mu r^2 + V(r)}^{=E \text{ (33)}} \right)}{dt} = 0$$

$(\dagger) \dot{r} \frac{dV}{dr} = \frac{dV}{dt}$

D'ací la conservació de l'energia relativa.



Continguts

- 1 Sistema de N partícules
- 2 Simetries i lleis de conservació
- 3 Teorema del Virial
- 4 Sistema de dos cossos
- 5 Sistema de massa variable

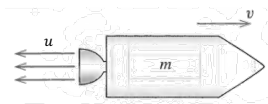


Figura 2: Un coet de massa m viatja cap a la dreta amb velocitat v i expulsa combustible pel motor a velocitat u relativa al coet. (figura adaptada de Fig. 3.2 del llibre de Taylor).

- Considerem un sistema aïllat amb massa inicial m_0 i velocitat v_0 , que en $t = 0$ comença a perdre massa, que expulsa amb velocitat constant u , relativa al seu sistema en repòs, a raó de $\dot{m} \equiv dm/dt < 0$ (pèrdua de massa). Suposem que en l'instant t la massa restant és $m(t)$ amb velocitat $v(t)$. El moment lineal P del sistema aïllat "massa restant" just abans d'expulsar dm (instant t)

$$P(t) = m(t)v(t)$$

i després d'expulsar dm (després de un instant dt) amb velocitat relativa a terra $v(t) - u$

$$\begin{aligned}
 P(t + dt) &= (m(t) + dm)(v(t) + dv) - dm(v(t) - u) \\
 &= m(t)v(t) + m(t)dv + dmdv + udm \\
 &\simeq m(t)v(t) + m(t)dv + udm \quad (\text{menyspreem } dmdv)
 \end{aligned}$$

on $dm < 0$. Si no hi ha forces externes, el moment lineal es conserva:

$$P(t) = P(t + dt),$$

i arribem a l'equació

$$m(t)dv + udm(t) = 0 \quad \implies m(t)\dot{v} = -\dot{m}u$$

Si actuen forces externes sobre el coet

$$P(t + dt) - P(t) = F^{\text{ext}} dt$$

i l'equació resultant és

$$m(t)\dot{v} = -\dot{m}u + F^{\text{ext}}$$

Integrant aquesta equació, obtenim la velocitat de la part del sistema que perd massa,

$$v(t) = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)} \quad (37)$$

- **Exemple 1: El coet de dues fases.** Un coet de dues fases consta de la càpsula de massa m més dos contenidors amb combustible. Partint del repòs, el primer contenidor comença a expulsar gasos, a causa de la combustió, amb velocitat constant u respecte de la càpsula. Quan s'acaba el combustible d'aquesta fase, es desprèn el contenidor i comença a actuar la segona fase. Sabent que la massa de la càpsula més el segon contenidor (inclòs combustible) és de nm , que la massa total del coet és, inicialment, de Nm i que, per a cada contenidor, es té la relació

$$r = \frac{\text{massa contenidor sense gasos}}{\text{massa contenidor amb gasos}}$$

obteniu en funció de n , N , r i u

- La velocitat del coet en finalitzar la primera fase.
- La velocitat del coet en finalitzar la segona fase.
- La velocitat del coet si només tingués una fase formada pels dos contenidors, o el que és el mateix, si el coet no es desprèn del primer contenidor.

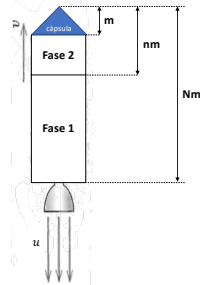


Figura 3: Esquema del problema del coet de dues fases.

- d) La relació entre n i N perquè la velocitat després de la segona fase siga la màxima possible. Comproveu que, en aquest cas, la velocitat al final de la segona fase és el doble que la velocitat al final de la primera fase.
- e) Trobeu el valor de r fent els càlculs de l'apartat d) per $mN = 1000 T$, $u = 7000 \text{ km h}^{-1}$, tenint en compte que la massa del combustible és de $900 T$ i que la massa de la càpsula és menyspreable enfront de la dels contenidors plens de combustible (típicament $m \sim 10 T$).

■ Solució.

a) En la primera fase tenim

- 1 Massa de la primera fase amb gasos: $mN - mn$
- 2 Massa de la primera fase sense gasos: $r(mN - mn)$
- 3 Massa de la càpsula més la segona fase amb els seus gasos: mn
- 4 Massa de la segona fase amb gasos: $mn - m$
- 5 Massa de la segona fase sense gasos: $r(mn - m)$



$$m_{1inicial} = mN$$

$$m_{1final} = mn + (mN - mn)r$$

$$v_{1inicial} = 0$$

Per tant, usant (37)

$$v_{1final} = u \ln \frac{N}{n + rN - rn}$$

b) En la segona fase tenim

$$m_{2inicial} = nm$$

$$m_{2final} = m + (mn - m)r$$

$$v_{2inicial} = v_{1final}$$

Per tant,

$$v_{2final} = u \ln \frac{nN}{(n + rN - rn)(1 + rn - r)}$$

c) Si el coet només tinguera una fase, llavors

$$m_{inicial} = mN$$

$$m_{final} = m + m(N - 1)r$$

$$v_{inicial} = 0$$

Per tant

$$v_{final} = u \ln \frac{N}{1 + rN - r}$$

Fixeu-vos que per $n = N$, $v_{final} = v_{2final}$. Efectivament, si $n = N$ només hi ha una fase.

d) Hem de igualar a zero la derivada de v_{2final} respecte a n . És a dir

$$0 = \frac{d}{dn} \{ \ln N + \ln n - \ln(n + rN - rn) - \ln(1 + rn - r) \}$$

d'on

$$\frac{1}{n} - \frac{1-r}{n+rN-rn} - \frac{r}{1+rn-r} = 0$$

Reagrupant fraccions i igualant el numerador a zero, s'obté la condició

$$n = \sqrt{N}$$

És immediat comprovar que amb aquesta condició

$$v_{2final} = 2v_{1final} = 2u \ln \frac{\sqrt{N}}{1 + r\sqrt{N} - r} \quad (38)$$

e) Hem de trobar la relació r . Noteu que la definició de r es dona per a cada contenidor, és a dir, per a cadascuna de les fases (i es diu que r és la mateixa per a les dues fases):

$$\text{fase 1: } r = \frac{Nm - nm - c_1}{Nm - nm} = 1 - \frac{c_1}{Nm - nm}, \quad (39)$$

$$\text{fase 2: } r = \frac{nm - m - c_2}{nm - m} = 1 - \frac{c_2}{nm - m}, \quad (40)$$

on c_1 i c_2 són les masses dels gasos en cadascuna de les fases i , per tant, la massa total de combustible és:

$$c = c_1 + c_2 \quad (41)$$



Igualant (39) i (40), i tenint en compte que la massa de la càpsula, m , és menyspreable enfront de la de les fases ($m \ll nm$; $m \ll Nm$), podem calcular c_1 i c_2 :

$$c_1 = \frac{N-n}{N-1}c \simeq \frac{N-n}{N}c, \quad (42)$$

$$c_2 = \left(1 - \frac{N-n}{N-1}\right)c \simeq \frac{n}{N}c. \quad (43)$$

Ara fem servir que per al cas òptim de l'apartat d), es compleix que $n = \sqrt{N}$ i calculem el valor de r (per exemple, substituint (42) a (39)):

$$r = 1 - \frac{c}{Nm - m} \simeq 1 - \frac{c}{Nm} \quad (44)$$

Amb les dades de l'enunciat ($Nm = 1000 \text{ T}$; $m \simeq 10 \text{ T} \implies N \simeq 100$) substituïm en (44):

$$r \simeq 1 - \frac{900}{1000} = 0.1. \quad (45)$$

Emprant, novament, les dades de l'enunciat ($u = 7000 \text{ km h}^{-1}$) s'arriba a (noteu que, en aquest cas $r\sqrt{N} = 0.1\sqrt{100} = 1$ no és molt més gran que 1 i no podem fer servir el resultat aproximat), substituint per al cas $n = \sqrt{N} \gg 1$ en (38)

$$v_{2final} = 2v_{1final} = 2u \ln \frac{\sqrt{N}}{1 + r\sqrt{N} - r} \simeq 21\,749 \text{ km h}^{-1} \simeq 6 \text{ km s}^{-1}.$$

Valor que podem comparar amb la velocitat de escapament de la Terra (11.2 km s^{-1}).

Fixeu-vos que, en el cas òptim $n = \sqrt{N}$, mentre la massa de la càpsula siga menyspreable enfront de la dels contenidors (noteu que l'aproximació $\frac{\sqrt{N}}{1+r\sqrt{N}-r} \simeq 1/r$ només es pot fer si $r\sqrt{N} \gg 1!$), l'important és que hagen dues fases, ja que se segueix complint que

$$v_{2final} = 2v_{1final} \simeq -2u \ln r,$$

mentre que per a una sola fase

$$v_{final} = u \ln \frac{N}{1 + rN - r} \simeq -u \ln r$$

El problema de la cinta transportadora I

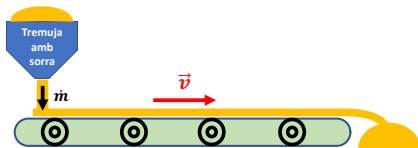


Figura 4: Esquema d'una cinta transportadora de sorra. La sorra, inicialment en repòs, cau verticalment des de la tremuja i té, quan impacta sobre la cinta, velocitat horitzontal nul·la.

- Una part del sistema (la cinta transportadora) va incrementant la seua massa a raó de $dm/dt > 0$ (p.e. suposem que descarreguem sorra des d'una tremuja i que la sorra estava inicialment en repòs dins de la tremuja) mantenint constant la seua velocitat $v = \text{const.}$, l'altra part del sistema, per on es perd la massa, es manté amb moment nul. La variació del moment de la cinta serà deguda a una força externa F^{ext} , per tant

$$F^{ext} = \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt}v$$

La potència necessària per a mantindre amb velocitat constant la cinta (treball per unitat de temps) és

$$\frac{dW}{dt} = F^{ext} \frac{dx}{dt} = F^{ext}v = \frac{dm}{dt}v^2 \quad (46)$$



El problema de la cinta transportadora II

És interessant comparar (46) amb el canvi de l'energia cinètica T del sistema

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 = \frac{1}{2} \frac{dW}{dt}$$

Es perd la meitat de la potència a causa de l'energia dissipada pel fregament amb la cinta transportadora!!

- En general, per a una part del sistema que canvia la massa i la velocitat, i està sotmès a una força externa \vec{F}^{ext} , s'ha de

$$\vec{F}^{ext} \cdot \vec{P} = \frac{d(mT)}{dt}$$

Aplicat a la cinta transportadora quan no hi ha força externa (per tant, $\frac{d(mT)}{dt} = 0 \Rightarrow mT = \text{constant}$), aquesta guanya massa però perd energia cinètica a causa del fregament amb la cinta en dipositar la massa.

Demostració:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{ext} \cdot \vec{P} &= \frac{dm}{dt} \vec{v} \cdot m\vec{v} = m \frac{dm}{dt} v^2 \\ &= m \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \frac{dm}{dt} \\ &= m \frac{dT}{dt} + T \frac{dm}{dt} = \frac{d(mT)}{dt} \end{aligned}$$

Mecànica I:

5. Teoria del potencial. Moviment en camps centrals. Problema de Kepler.

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



- Thorton & Marion, “Classical Dynamics of Particles and Systems” (2004), Caps.5 i 8



- Força gravitatòria de m_i sobre m :

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

G = Constant de gravitació

(Recordeu que la força de Coulomb és anàloga, substituint la constant $-G$ per la constant elèctrica en el buit i les masses per càrregues elèctriques). Aquesta força com a funció de \vec{r} **no** és central respecte de l'origen de coordenades, encara que **sí** és conservativa (és central respecte de l'origen de forces en m_i)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_G(\vec{r}) = \vec{0}$$

Potencial gravitatori d'una distribució de masses II

- Energia potencial de m deguda a la força gravitatòria de m_i : Tenint en compte que, per ser \vec{F}_G conservatiu,

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V_G(\vec{r})$$

sent

$$V_G(\vec{r}) = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

on hem pres l'origen de l'energia potencial (potencial nul) en $\vec{r} \rightarrow \infty$.

- Camp gravitatori generat per una massa m_i : És la força sobre la unitat de massa (e.d. és una acceleració).

$$\vec{C}_G(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G(\vec{r})}{m} = -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- Camp gravitatori generat per un conjunt de masses m_i ($i = 1, \dots, N$):

$$\vec{C}_G(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- Camp gravitatori generat per una distribució de massa, $\rho(\vec{r}')$:

$$\vec{C}_G(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (1)$$

- Potencial gravitatori generat per una massa m_i : És l'energia potencial V_G per unitat de massa

$$\Phi_G(\vec{r}) = \frac{V_G(\vec{r})}{m} = -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

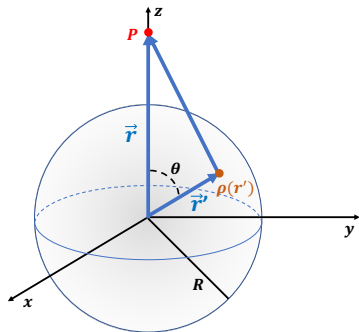
El potencial gravitatori té dimensions de *força per unitat de massa* \times *distància* (o, equivalentment d'*energia per unitat de massa*). Es compleix que

$$\vec{C}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_G(\vec{r})$$

Potencial gravitatori d'una distribució de masses IV

- Potencial gravitatori d'un sistema de masses $\{m_i\}$: Com les forces se sumen i l'operador gradient és lineal, tenim

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



- Potencial d'una distribució de massa $\rho(\vec{r})$

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

- Potencial d'una distribució esfèrica de massa, $\rho(r')$, amb radi R . En coordenades esfèriques per a \vec{r}' , amb origen en el centre de la distribució de massa i la massa unitat situada en l'eix z , tenim

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2}$$

Figura 1: Distribució esfèrica de massa amb $\rho = \rho(r')$.

Integrant la part angular de $d^3\vec{r}' = r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi$ obtenim

$$\begin{aligned}\Phi_G(r) &= -2\pi G \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' \times \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos\theta + r'^2}} \\ &= -2\pi G \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' \times \left[\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 - 2rr' \cos\theta + r'^2} \right]_0^\pi \\ &= -2\pi G \int_0^R \rho(r') \frac{r'}{r} dr' \times [(r + r') - |r - r'|]\end{aligned}$$

Finalment, obtenim

$$\Phi_G(r) = -2\pi G \int_0^R \rho(r') dr' \begin{cases} 2r'^2/r, & r' \leq r \\ 2r', & r' > r \end{cases} \quad (3)$$

$$= -G \int_0^M dm' \begin{cases} 1/r, & r' \leq r \\ 1/r', & r' > r \end{cases} \quad (4)$$

on

$$dm' = 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

dm' = massa d'una capa esfèrica de radi r' .

Potencial gravitatori d'una distribució de masses VI

- Potencial d'una capa esfèrica de massa dm'

$$d\Phi_G(r, r') = -Gdm' \begin{cases} 1/r, & r' \leq r \quad (\text{exterior de la capa}) \\ 1/r', & r' \geq r \quad (\text{interior de la capa}) \end{cases}$$

Conseqüències:

1. El potencial a l'exterior d'una capa esfèrica és **com si la massa estigués en el centre** $r' = 0$.
2. El potencial a l'interior d'una capa esfèrica és constant (indep. de r).
3. El camp a l'interior d'una capa esfèrica és nul.

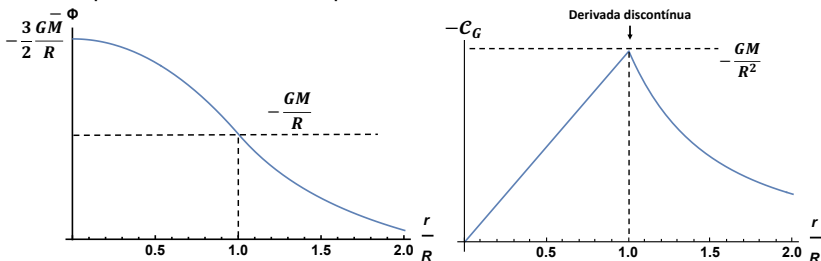


Figura 2: Distribució uniforme esfèrica de massa; dreta: potencial; esquerra: camp.

- Potencial d'una distribució esfèrica **uniforme** de radi R i massa $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

$$\Phi_G(r) \stackrel{(\dagger)}{=} -GM \begin{cases} 1/r, & r \geq R \\ 3/(2R) - r^2/(2R^3), & r \leq R \end{cases}$$

1. Hi ha continuïtat del potencial per $r = R$.
2. El potencial a l'exterior de la distribució esfèrica de masses és **com si tota la massa estigués en el centre**.

(†) Noteu que en (3) hem que fer:

$$r \leq R : \Phi_G(r) = -4\pi G\rho \int_0^r \frac{r'^2}{r} dr' - 4\pi G\rho \int_r^R r' dr'$$

$$r \geq R : \Phi_G(r) = -4\pi G\rho \int_0^R \frac{r'^2}{r} dr'$$



- Camp gravitatori d'una distribució esfèrica **uniforme** de radi R i de massa $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Prenent (menys) el gradient del potencial s'obté

$$\vec{c}_G(\vec{r}) = -GM \begin{cases} \hat{r}/r^2, & r \geq R \\ (r^3/R^3)\hat{r}/r^2, & r \leq R \end{cases}$$

1. Hi ha continuïtat del camp a $r = R$.
2. El camp a l'exterior de la distribució esfèrica de masses és **com si tota la massa estigués en el centre**.
3. El camp a l'interior de la distribució esfèrica a una distància $r < R$ és degut només a la massa en $r' < r$.



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres

Teorema de Gauss I

- Enunciat: Siga $\vec{C}_G(\vec{r})$ generat per una distribució de massa M_V distribuïda espacialment amb densitat $\rho(\vec{r}')$. Siga S una superfície tancada que envolta un volum V , llavors el flux del camp gravitatori compleix

$$\iint_S \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' = -4\pi G M_V \quad (5)$$

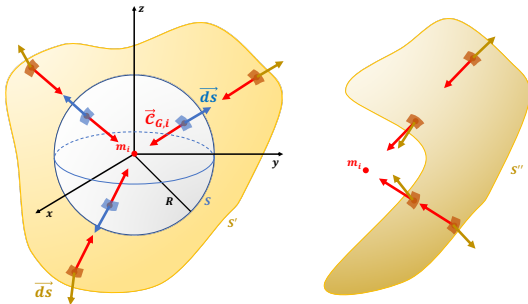
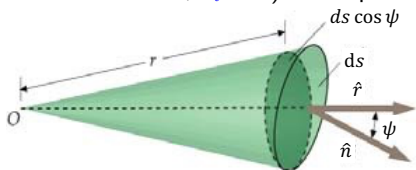


Figura 3: Esquerra: Massa puntual, m_i envoltada per una superfície esfèrica (S) i una superfície arbitrària (S'). El flux de camp gravitatori que travessa ambdues superfícies és el mateix. Dreta: Massa puntual, m_i fora de la superfície tancada S'' . El flux de camp gravit. que travessa S'' és 0.

Teorema de Gauss II

- Demostració: Per a una massa puntual m_i (situada a l'origen de coordenades, $\vec{r}_i = 0$) es té que



$$\begin{aligned}
 \vec{C}_{G,i} \cdot d\vec{s} &= -G \frac{m_i}{r^2} (\hat{r} \cdot d\vec{s}) \\
 &= -G \frac{m_i}{r^2} (r^2 d\Omega) \\
 &= -G m_i d\Omega \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$d\Omega = \frac{ds \cos \psi}{r^2} = \frac{ds \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{d\vec{s} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

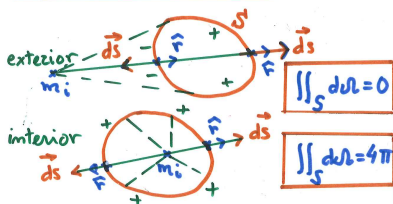
on $d\Omega$ és l'angle sòlid de l'element de superfície vist des de la massa puntual, i ψ és l'angle que formen \hat{r} i $d\vec{s}$. Noteu que si la superfície S és esfèrica, $\psi = 0$. Però,

$$\iint_S d\Omega = 0 \quad , \text{ si } m_i \text{ fora de } S \quad (7)$$

$$= 4\pi \quad , \text{ si } m_i \text{ dins de } S \quad (8)$$

segons que la massa estiga fora o dins de la superfície tancada S . D'ací que calga integrar només les masses tancades per S .

ANGULO SÓLIDO DE S CERRADA





Teorema de Gauss III

Noteu que el flux que travessa la superfície S és el mateix que el que travessa la superfície arbitrària tancada S' (Fig. 3). Per tant, si la massa puntual està envoltada per una superfície tancada, es compleix (combinant (6) i (8))

$$\iint_S \vec{C}_{G,i} \cdot d\vec{s} = -4\pi G m_i. \quad (9)$$

És evident que el resultat (9) pot estendre's a qualsevol conjunt de partícules tancat dins de S :

$$\iint_S \sum_i \vec{C}_{G,i} \cdot d\vec{s} = -4\pi G \sum_i m_i, \quad (10)$$

o, introduint $\vec{C}_G := \sum_i \vec{C}_{G,i}$ (camp gravitatori total en cada punt) i $M = \sum_i m_i$ (massa total)

$$\iint_S \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = -4\pi G M. \quad (11)$$

Generalitzar el resultat obtingut per a un conjunt discret de partícules al cas continu és trivial.



■ Demostració (cas continu). Resultats previs:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \partial_x \left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \right) \hat{i} + \partial_y (\dots) \hat{j} + \partial_z (\dots) \hat{k} \\ &= \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \hat{i} + \frac{y - y'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \hat{j} + \frac{z - z'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \hat{k} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{si } r > r'.\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') + (\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - 3(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} = 0 \quad \text{si } r > r'.\end{aligned}\quad (13)$$

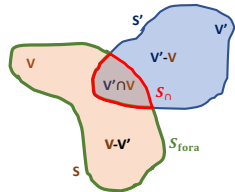
Suposem que V' és el volum que conté la distribució de massa que crea el camp gravitatori. Comprovem que *fora* d'aquest volum $\vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G &= \vec{\nabla} \cdot \left(-G \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \right) \\ &= -G \iiint_{V'} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' \stackrel{0; (13)}{=} 0 \quad \text{si } r > r'.\end{aligned}\quad (14)$$

Teorema de Gauss V

Utilitzem la definició de camp gravitatori creat per una distribució contínua de massa (Eq. 1) i descomposarem el volum V' (on està continguda la massa) com

$$V' = (V' \cap V) \cup (V' - V) \quad (V = (V \cap V') \cup (V - V')):$$



$$\begin{aligned} \iint_S \vec{C}_G \cdot d\vec{s} &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G dV = \iiint_{V \cap V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G dV + \iiint_{V - V'} \vec{\nabla} \cdot \vec{C}_G dV \\ &= \iint_{S_n} \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = \iint_{S_n} \left(-G \iiint_{V' \cap V} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \right) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{intercanviem integrals} \\ \text{de volum i superfície} \end{array} \right] = -G \iiint_{V \cap V'} \left(\underbrace{\iint_{S_n} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{d\Omega(\vec{r}')} \right) \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

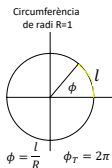
$$= -G \iiint_{V \cap V'} \left(\iint_{S_n} d\Omega(\vec{r}') \right) \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$= -4\pi GM_V.$$

(15)

■ NOTES:

- Per a una circumferència de radi R , l'arc dl , vist des del centre amb angle $d\phi$, és $dl = R d\phi$. L'angle és, doncs, $d\phi = dl/R$. L'angle total de la circumferència val 2π (vist des d'un punt interior a la circumferència).
- Per a una superfície esfèrica de radi R , l'element de superfície ds , vist des del centre és $ds = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Com hem vist abans, l'angle sòlid és $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = ds/R^2$. L'angle sòlid total de la superfície esfèrica és de 4π (vist des d'un punt interior a la superfície).



- Forma diferencial del teorema de Gauss: Del teorema de Gauss (5) i del teorema de la divergència tenim

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{C}}_G(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r})$$

En funció de Φ_G , com $\vec{\mathcal{C}}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi_G(\vec{r})$, l'equació anterior esdevé en

$$\nabla^2\Phi_G(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (16)$$

Equació de Poisson del potencial gravitatori generat per $\rho(\vec{r})$.



- Camp d'una distribució esfèrica de massa $\rho(r')$ centrada a l'origen. Siga $\vec{C}_G(\vec{r}) = g(r)\hat{r}$ i S_r una superfície esfèrica centrada a l'origen de radi r . D'una banda

$$\iint_{S_r} \vec{C}_G \cdot d\vec{s} = \iint_{S_r} g(r)r^2 d\Omega = 4\pi r^2 g(r) \quad (17)$$

D'altra banda, tenint en compte el teorema de Gauss (5), de la relació (17) arribem a

$$g(r) = -\frac{G}{r^2} \iiint_{V_r} \rho(r') d^3\vec{r}'$$

Obtenim així el camp $g(r)$ d'una distribució esfèrica de massa a una distància r , on V_r és el volum de l'esfera de radi r tancada per S_r . El camp és equivalent al d'una massa puntual de valor igual a la massa total tancada per S_r .



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



Desenvolupaments multipolars. Les mareas I

- Desenvolupament de la font extensa de potencial: Recordem el potencial degut a una distribució de massa és (Eq.(2))

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Considerem l'origen de coordenades a la zona de la distribució de masses i suposem que aquesta zona és petita comparada amb la distància al punt d'influència ($r' \ll r$),

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3) \Rightarrow \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8r} \left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 \overset{O(r'^4)}{\text{}} \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5}. \end{aligned}$$



- Termes multipolars del potencial. Podem escriure

$$\Phi_G(\vec{r}) \approx \Phi_0(\vec{r}) + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) \quad (18)$$

on els **termes multipolars del potencial** són

$$\Phi_0(\vec{r}) = -\frac{G}{r} \iiint_V \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$\Phi_1(\vec{r}) = -\frac{G}{r^3} \iiint_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$\Phi_2(\vec{r}) = -\frac{G}{2r^5} \iiint_V \left[3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 \right] \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

Desenvolupaments multipolars. Les mares III

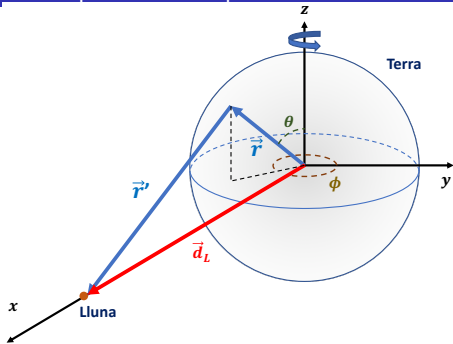


Figura 4: Esquema de la influència de la Lluna sobre les mares terrestres.

- Mares. Desenvoluparem la zona d'influència a la Terra del camp gravitatori creat per la Lluna, com a font puntual. Considerem l'origen de coordenades al centre de la Terra i que la mida de la Terra és petita comparada amb la distància a la Lluna, situada en l'eix OX . El potencial lunar, amb massa de la lluna puntual o amb simetria esfèrica, en un punt \vec{r} de la Terra (Fig. 4), serà

$$\Phi(\vec{r}) = -GM_L \frac{1}{r'} = -GM_L \frac{1}{|\vec{d}_L - \vec{r}|}$$

$$r \ll d_L \implies \approx -GM_L \left[\frac{1}{d_L} + \frac{\vec{d}_L \cdot \vec{r}}{d_L^3} + \frac{3(\vec{d}_L \cdot \vec{r})^2 - d_L^2 r^2}{2d_L^5} \right]$$



- Termes multipolars del potencial. Podem escriure

$$\Phi(\vec{r}) \approx \Phi_0 + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) \quad (19)$$

on els **termes multipolars del potencial** són

(Noteu que $\vec{d}_L \cdot \vec{r} = d_L r \sin \theta \cos \phi$)

$$\Phi_0 = -G \frac{M_L}{d_L}$$

$$\Phi_1(\vec{r}) = -G \frac{M_L}{d_L^2} x = -G \frac{M_L}{d_L^2} r \sin \theta \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{r}) &= -G \frac{M_L}{2d_L^3} (3x^2 - r^2) \\ &= -G \frac{M_L}{2d_L^3} r^2 (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \end{aligned}$$



- Termes multipolars del camp gravitatori, $\vec{C} = -\vec{\nabla}\Phi$, de la Lluna sobre la Terra:

El primer terme del desenvolupament s'anul·la (és independent de r)

$$\vec{C}_0 = \vec{0}.$$

El segon terme dipolar

$$\vec{C}_1(\vec{r}) = G \frac{M_L}{d_L^2} \hat{i}$$

és constant en tota l'esfera terrestre i origina el moviment planetari, com si la Terra fóra puntual. El terme quadrupolar

$$\vec{C}_2(\vec{r}) = G \frac{M_L}{d_L^3} (3x\hat{i} - \vec{r})$$

origina les mares a la superfície de la Terra.

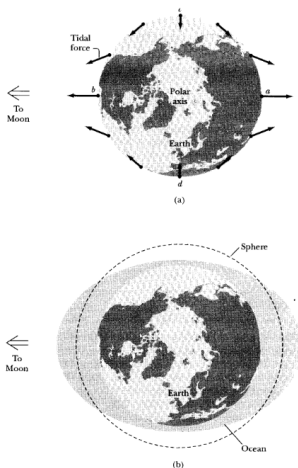


FIGURE 5-11 (a) The tidal forces are shown at various places on Earth's surface including the points a , b , c , and d of Figure 5-10. (b) An exaggerated view of Earth's ocean tides.

- Moviment de les mares: La Terra gira sobre un eix aproximadament perpendicular a l'eix Terra-Lluna, per exemple l'eix OZ , amb l'Equador en el pla XY . En les zones de l'Equador amb $\vec{r} = \pm R_T \hat{i}$, $x = \pm R_T$, el camp

$$\vec{c}_2 = \pm G \left(\frac{2M_L R_T}{d_L^3} \right) \hat{i}$$

es dirigeix cap a fora de la Terra, mentre que per $\vec{r} = \pm R_T \hat{j}$, $x = 0$, el camp

$$\vec{c}_2 = \mp G \left(\frac{M_L R_T}{d_L^3} \right) \hat{j}$$

es dirigeix cap a dins. Per tant, es produeixen 2 plenamars i 2 baixamars diaris en cada zona de l'Equador. En els altres paral·lels el camp va canviant progressivament fins arribar als pols, $\vec{r} = \pm R_T \hat{k}$ on sempre actua cap a dins.



Desenvolupaments multipolars. Les mareas VII

- Intensitat de les mareas. En l'equilibri, el canvi de potencial lunar causat per $\Phi_2(\vec{r})$ s'ha de compensar amb el canvi de potencial terrestre causat per l'altura h de l'aigua:

$$\Phi_2(\vec{r}) + gh = cte$$

amb $r = R_T$ i

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

ens porta a

$$h = \frac{M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) + cte$$

A l'Ecuador ($\theta = \pi/2$),

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{2M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} + \frac{M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} = \frac{3M_L R_T^4}{2M_T d_L^3} \sim 1 \text{ metre!!}$$

El sorprenent de l'estimació és que, tot i les quantitats astronòmiques, s'obté un ordre de magnitud en metres. També caldria afegir l'efecte del Sol, que és de la mateixa magnitud.

(Dades: $R_L = 1738$ km, $R_T = 6378$ km, $R_S = 695000$ km, $M_L/M_T = 1/81$, $M_S/M_T = 333000$, $d_{TL} = 384400$ km, $d_{TS} = 150 \times 10^6$ km)



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central**
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



- Considerem una partícula de massa m sotmesa a una força central

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

amb $\hat{r} = \vec{r}/r$. Com tota força central és conservativa, es té que

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} = -\frac{dV(r)}{dr}\hat{u}_r \quad (20)$$

on $V(r)$ és l'energia potencial de la partícula de massa m en el camp central. A més, com ja hem vist, la conservació del moment angular exigeix que el moviment es desenvolupi en un pla que passa per l'origen de forces.

- Coordenades polars (r, θ) :
Considerarem el moviment en el pla XY tal que

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



Definim de forma usual la referència local $\hat{u}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$,
 $\hat{u}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$, de manera que

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta$$

- Equacions de moviment (Newton): Igualant els coeficients de \hat{u}_r i \hat{u}_θ als corresponents de la força (Eq. (20))

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -dV(r)/dr \quad (21)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (22)$$



- Lleis de conservació (integrals primeres):

Conservació de moment angular (demostrat al tema anterior): La segona equació (22) es pot reescriure, multiplicant per mr , com

$$mr \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) = d \left(mr^2\dot{\theta} \right) / dt = 0$$

d'on

$$l = mr^2\dot{\theta} = cte$$

- Conservació de l'energia (demostrat al tema anterior): Multiplicant per \dot{r} la primera equació de Newton (21) i tenint en compte que $\dot{r}dV(r)/dr = dV/dt$, obtenim

$$\dot{r} \left(m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} \right) + \frac{dV(r)}{dt} = 0$$

D'altra banda, l'energia cinètica T val

$$T = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$



de manera que, per a l'energia total $E = T + V$, s'ha de

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \\ &= \dot{r} \left(m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} \right) + \frac{dV(r)}{dt} \\ &= 0\end{aligned}$$

és a dir,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = cte$$

- Descomposició de l'energia: Definint l'energia cinètica radial T_{rad} com

$$T_{rad} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

i el potencial efectiu V_{efec} com

$$V_{efec}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

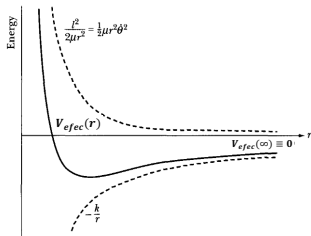


FIGURE 8-5 The effective potential for gravitational attraction $V(r)$ is composed of the real potential $-k/r$ term and the centrifugal potential energy $l^2/2\mu r^2$.

Figura 5: Potencial efectiu del camp gravitatori (adaptada de la Fig. 8.5 del llibre de Thornton & Marrion).

Podem descompondre E i T de la següent manera

$$E = T + V = T_{rad} + V_{efec}(r) \quad (23)$$

$$T = T_{rad} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (24)$$

El terme $l^2/2mr^2$ s'anomena **barrera centrífuga**.



- Equació de moviment radial. En termes del potencial efectiu, l'equació del moviment radial es pot escriure com

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{dV(r)}{dr} \\ &= \frac{l^2}{mr^3} - \frac{dV(r)}{dr} \\ &= -\frac{dV_{efec}(r)}{dr} \end{aligned}$$

que és, per a r , com l'equació de Newton en una dimensió, però ara només està permès $r > 0$ (recordem el tema 3, petites oscil·lacions).

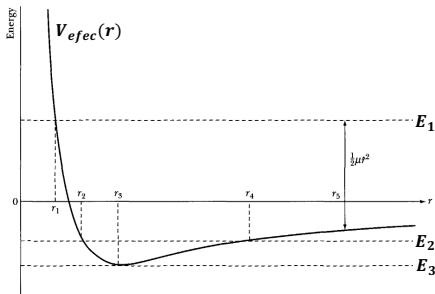


Figura 6: Quan $E = E_1$, el moviment de la partícula no està fitat. Si $E = E_2$, la partícula es mou amb $r_2 \leq r \leq r_4$. Per a $E = E_3$ la partícula descriu un moviment circular amb $r = r_3$. Figura adaptada de la Fig. 8.6 del llibre de Thornton & Marrion.

- Rang del moviment radial: Com que $T_{rad} > 0$, r ha de satisfer que

$$V_{efec}(r) \leq E.$$

En la Fig. 6 els rangs del moviment per a les energies E_1 , E_2 i E_3 són $r \geq r_1$, $r_2 \leq r \leq r_4$ i $r = r_3$, respectivament.

- Punts de retorn: $r_R / \dot{r} = 0$, per tant

$$V_{efec}(r_R) = E.$$

Els punts de retorn també s'anomenen punts apsidals (**pericentre**, el més proper i **apocentre**, el més llunyà). Si l'apocentre està a l'infinit el moviment no està acotat. En la Fig. 6, els punts de retorn per a una partícula amb $E = E_2$ són $r_R = r_2$ (pericentre) i $r_R = r_4$ (apocentre).



- Moviment circular estable: Quan E és igual a un mínim del potencial efectiu llavors el radi del moviment r_C és constant (només hi ha un punt apsidal).

$$\frac{dV_{efec}(r)}{dr} = 0 \implies r = r_C$$

$$\left. \frac{d^2V_{efec}(r)}{dr^2} \right|_{r_C} > 0 \implies r_C \text{ estable.}$$

En la Fig. 6, per a $E = E_3$, $r_C = r_3$.

Exercici: Considereu la família de potencials centrals de la forma

$$V(r) = Cr^a.$$

- 1 Obteniu les condicions sobre C i a perquè hi haja una orbita circular estable. Quin és el radi d'aquesta òrbita?
- 2 Analitzeu els casos particulars $a = -2, -1, 0, 1, 2$ i obteniu els r corresponents.



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central**
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



- Equació integral de les òrbites: Volem obtenir $r(\theta)$. En la definició de l'energia E (Eq. (23)), utilitzem que $\dot{r} = \dot{\theta} (dr/d\theta) = (l/mr^2) (dr/d\theta)$ amb la qual cosa

$$E = \frac{l^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + V_{efec}(r).$$

Aïllant $dr/d\theta$ arribem a

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r^2}{l} \sqrt{2m(E - V_{efec})}.$$

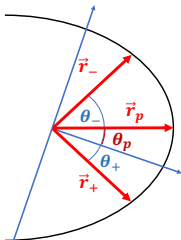
Noteu que l és constant i, per tant, $\dot{\theta}$ no pot canviar de signe. Conseqüentment, $\theta(t)$ és una funció monòtona en el temps (o creix o decreix).

El signe \pm cal tenir-ho en compte en fer la integració. Si iniciem el recorregut de l'òrbita en r_0 amb angle θ_0 i recorrem l'òrbita (amb angles creixents) cap a l'apocentre, tenim l'**equació integral de les òrbites**

$$\theta = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{l \, dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}}. \quad (25)$$

El signe negatiu de l'arrel quadrada correspondria al recorregut de l'òrbita amb angles θ creixents cap al pericentre.

- Simetria de les òrbites: Les òrbites són simètriques respecte dels **eixos** que passen per punts apsidals. En efecte, per a radis $r_{\pm} > r_p$ posteriors i anteriors a un pericentre, amb angles $\theta_- < \theta_p < \theta_+$, tindrem



$$\theta_+ = \theta_p + \int_{r_p}^{r_+} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}}$$

del pericentre cap a r_+

$$\theta_p = \theta_- - \int_{r_-}^{r_p} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}}$$

de r_- cap al pericentre

Per tant, demanant que les distàncies angulars $\theta_+ - \theta_p$ i $\theta_p - \theta_-$ siguin iguals

$$\theta_+ - \theta_p = \theta_p - \theta_-$$

arribem a

$$0 = \int_{r_p}^{r_+} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}} + \int_{r_-}^{r_p} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}}$$

Per tant,

$$r_+ = r_-$$

és a dir, les òrbites són simètriques abans i després d'un pericentre. El mateix succeeix per a un apocentre.

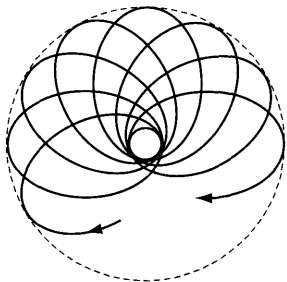


Figura 7: Una òrbita que no es tanca sobre si mateixa en un nombre finit de voltes s'anomena *oberta*. Figura 8.4 del llibre de Thornton & Marrion.

- Si el moviment d'una partícula en el potencial $V(r)$ és periòdic, l'òrbita es tanca (òrbita tancada); és a dir, després d'un nombre finit d'excursions entre els límits radials r_p (radi del pericentre), i r_a (radi del apocentre) el moviment es repeteix exactament. Però si l'òrbita no es tanca sobre si mateixa després d'un nombre finit d'oscil·lacions, es diu que l'òrbita és oberta (Fig. 7).



De l'equació (25), podem calcular el canvi en θ que resulta d'un trànsit complet de r de r_p a r_a i de tornada a r_p . Com que el moviment és simètric en el temps, aquest canvi angular és el doble del que resultaria del pas de r_p a r_a ; així

$$\Delta\theta \equiv 2(\theta(r_a) - \theta(r_p)) = 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}}. \quad (26)$$

- Per a una òrbita acotada la condició d'òrbita tancada és, doncs

$$2[\theta(r_a) - \theta(r_p)] b = 2\pi a,$$

on

$b \in \mathbb{N}$ = nombre de "pseudoperíodes",

$a \in \mathbb{N}$ = nombre de voltes,

és a dir, que la condició de que l'òrbita siga tancada requerix que $\Delta\theta$ siga una fracció racional de 2π ($\Delta\theta = 2\pi(a/b)$). En aquestes condicions, després de b períodes, el radi-vector de la partícula haurà fet a revolucions completes i haurà tornat a la seua posició original.

Si $a = 1$ i $\theta(t)$ és monòtona creixent llavors l'òrbita tancada és simple.



Teorema de Bertrand: Les úniques forces centrals per a les quals totes les òrbites fitades són tancades corresponen al potencial de l'oscil·lador, $V = kr^2/2$, i al potencial de Kepler / Coulomb, $V = -k/r$, tots dos amb $k > 0$.

Es pot trobar una demostració del Teorema de Bertrand en Johnson, Porter Wear. *Classical Mechanics With Applications* (2010)

- Equació diferencial de les òrbites $r(\theta)$. En l'equació radial

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{dV(r)}{dr}$$

tenim, d'una banda, que

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) \\ &= \frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \\ &= -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2(1/r)}{d^2\theta} \end{aligned}$$



i fent el canvi de variables

$$\begin{aligned}w &= 1/r, \\dw &= -dr/r^2,\end{aligned}$$

s'obté l'equació radial

$$-\frac{l^2 w^2}{m} \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \frac{l^2 w^3}{m} = w^2 \frac{dV(1/w)}{dw}.$$

Finalment obtenim

l'equació diferencial de l'òrbita

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{m}{l^2} \frac{dV(1/w)}{dw}. \quad (27)$$

Noteu que l'equació diferencial de l'òrbita es pot reescriure com

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{m}{l^2 w^2} F(1/w), \quad (28)$$

que és particularment útil si el que volem es calcular la força $F(r)$ que origina una òrbita $r(\theta)$ coneguda (p.e., cal incloure, termes en la força $\propto r^{-4}$ -deguts a efectes relativistes- per explicar l'avançament del periheli de Mercuri).



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler**
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



Potencial de Kepler I

- El problema de Kepler és el que es planteja per a calcular el moviment de dues masses puntuals amb interacció gravitatòria donada per l'energia potencial

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

on $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ i

$$k = Gm_1m_2 > 0$$

G és la constant de gravitació universal.

- Equacions de moviment. Utilitzant coordenades relatives i del centre de masses, la segona llei de Newton és, com hem vist (Tema 4),

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\vec{R}}_{cm} &= \vec{0} \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= -\vec{\nabla}V(r) = -k\hat{r}/r^2 \end{aligned} \right\}$$

on $\mu = m_1m_2/M$ és la massa reduïda i $M = m_1 + m_2$ és la massa total del sistema de dos cossos. La primera equació ens dona el moviment del centre de masses i la segona el moviment relatiu de la massa 2 respecte de la massa 1.



Potencial de Kepler II

- Com en potencials centrals, el moviment relatiu, amb massa reduïda μ , es pot expressar en coordenades polars (r, θ) :

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 &= -dV(r)/dr = -k/r^2 \\ r \ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

- Lleis de conservació. Les integrals primeres de les equacions de moviment, com en un potencial central, ens porten a les lleis de conservació

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

(conservació de moment angular relatiu)

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = \text{const.}$$

(conservació de l'energia total relativa)



Potencial de Kepler III

- Potencial efectiu:

$$V_{efec}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}.$$

- Radi de l'òrbita circular (donat l):

$$r_{cir} = l^2/k\mu.$$

- Energia de l'òrbita circular:

$$T_{cir} = \frac{l^2}{2\mu r_{cir}^2} = \frac{k^2\mu}{2l^2},$$

$$V_{cir} = -\frac{k}{r_{cir}} = -\frac{k^2\mu}{l^2},$$

$$E_{cir} = T_{cir} + V_{cir} = -\frac{k^2\mu}{2l^2}.$$



Noteu que no hi ha energia cinètica radial. A més,

$$2T_{cir} + V_{cir} = 0$$

(teorema del virial).

- Radis apsidals (pericentre i apocentre): (Donats l i E) $E = V_{efec} \implies$

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} - E = 0$$

d'on

$$\frac{1}{r_{p/a}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}} = \frac{1}{r_{cir}} \pm \sqrt{\frac{1}{r_{cir}^2} + \frac{2\mu E}{l^2}} \quad (29)$$

Per $E > 0$ no existeix apocentre (moviment radial no acotat).



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler**
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



- Equació diferencial de les òrbites (Eq. (28)) amb $V = -k/r = -kw$:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{\mu}{l^2} \frac{dV(1/w)}{dw} = \frac{\mu k}{l^2}, \quad (30)$$

on $w(\theta) = 1/r(\theta)$.

- Solució general:

$$w(\theta) = B \cos(\theta + \phi) + \frac{\mu k}{l^2}$$

on $B > 0$ i ϕ són constants d'integració. També podem arribar al resultat a partir de l'equació integral de les òrbites.

L'equació (30) és com la de l'oscil·lador amb terme constant:

$$\ddot{x} + (k/m)x = \mu_d g;$$

m =massa subjecta a la molla; k =constant de la molla; μ_d =coef. de fregament dinàmic.

- Constants d'integració: En el pericentre, w pren el seu valor més gran, és a dir

$$\theta_p + \phi = 0 \implies \frac{1}{r_p} = B + \frac{\mu k}{l^2}$$

per tant, usant el resultat obtingut per al radi del pericentre (29),

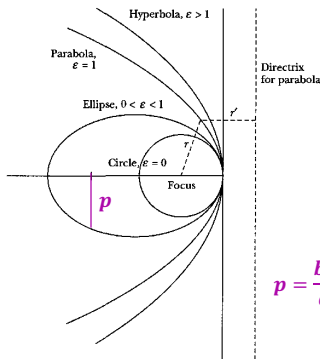
$$B = \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}.$$

Si triem el pericentre com a punt inicial amb $\theta_p = 0$, obtenim: $\phi = 0$.
Resumint, l'equació de les òrbites és

$$\frac{1}{r} = C + B \cos \theta, \quad (31)$$

$$C = \frac{\mu k}{l^2}, \quad (32)$$

$$B = \sqrt{C^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}. \quad (33)$$



Equació d'una secció cònica

$$\frac{p}{r(\theta)} = 1 + \varepsilon \cos \theta$$

$$\varepsilon = \frac{r}{r'} = \text{excentricitat}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) = \text{semilactus rectum}$$

Figura 8: Diverses òrbites associades a seccions còniques distintes (adaptada de la Fig. 8.8 del llibre de Thornton & Marrion).

Per interpretar la sol·lució, hem de considerar que l'equació d'una secció cònica amb un focus en l'origen té la forma

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad (34)$$

sent ε l'excentricitat i p el semi-latus rectum (Fig. 8).

Les seccions còniques se formen per la intersecció d'un pla i un con.

Concretament, una secció cònica està formada pel lloc geomètric dels punts (en un pla), on la raó de la distància des d'un punt fix (el focus) a una línia fixa (la directriu) és constant (precisament, eixa raó constant és l'excentricitat; Fig. 8). Podem reescriure l'equació (31) com

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad (35)$$

$$p = \frac{1}{C} = \frac{l^2}{\mu k}, \quad (36)$$

$$\varepsilon = \frac{B}{C} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}. \quad (37)$$

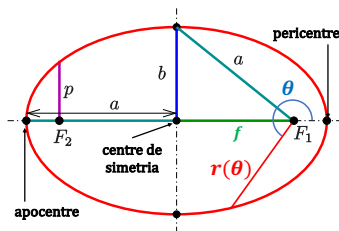
- Òrbita circular $\varepsilon = 0 \implies B = 0, C > 0$ ($E < 0, k > 0$):

$$1/r_{cir} = C$$

$$r_{cir} = l^2/(\mu k)$$

$$E_{cir} = -\mu k^2/(2l^2)$$

Forma polar de l'el·lipse relativa al focus



$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

a = semieix major

b = semieix menor

f = distància focal

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \text{excentricitat}$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2) = \text{semilactus rectum}$$

Figura 9: El·lipse en coordenades polars relatives al focus F_1 .



- Òrbita el·líptica $0 < \varepsilon < 1 \implies C > B > 0$ ($E < 0$, $k > 0$).

- Pericentre: ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)

$$r_p = \frac{1}{C+B}, \quad (\theta = 0)$$

$$x_p = r_p, \quad y_p = 0$$

- Apocentre: ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$)

$$r_a = \frac{1}{C-B}, \quad (\theta = \pm\pi)$$

$$x_a = -r_a, \quad y_a = 0$$

- Semieix major (semidistància del pericentre a l'apocentre)

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{C}{C^2 - B^2} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} > 0$$



Òrbites de Kepler VII

- Posició del centre de simetria x_{cen} respecte de l'origen de forces (anomenat **focus**)

$$\begin{aligned} x_{cen} &= \frac{x_p + x_a}{2} = \frac{r_p - r_a}{2} \\ &= \frac{B}{B^2 - C^2} = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1} < 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Noteu que el centre es troba a l'esquerra del focus, a causa de l'elecció del pericentre a $\theta = 0$.

- Distància focal: Distància del centre de simetria al focus

$$f = |x_{cen}| = \frac{B}{C^2 - B^2} > 0$$

- Excentricitat:

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{B}{C} < 1$$



Òrbites de Kepler VIII

- Òrbita parabòlica: $\varepsilon = 1 \implies C = B > 0$, $E = 0$, $k > 0$ amb origen en el focus (Fig. 8).

- Pericentre

$$r_p = \frac{1}{2B}, \quad (\theta = 0)$$

$$x_p = r_p, \quad y_p = 0$$

- Apocentre

$$r_a \rightarrow +\infty, \quad (\theta = \pm\pi, \text{asíntota})$$

$$x_a = -\infty, \quad (y_a = \pm\infty)$$

Noteu que els punts apsidals han d'estar sobre la paràbola, i $y_a = 0$ (valor que s'obténdria per continuïtat del cas el·líptic en el límit $\varepsilon \rightarrow 1$) no hi està!

- Excentricitat

$$\varepsilon = 1$$



- Òrbita hiperbòlica. **Branca esquerra:** $\varepsilon > 1 \implies B > C > 0, E > 0, k > 0,$ (força atractiva!) amb origen en el focus (Fig. 8).

- Pericentre

$$r_p^{esq} = \frac{1}{C+B}, \quad (\theta = 0)$$

$$x_p^{esq} = r_p^{esq}, \quad y_p = 0$$

- Apocentre: $\cos \theta = -C/B = -1/\varepsilon < 0,$ (cap a l'esquerra):

$$r_a^{esq} \rightarrow +\infty, \quad \left(\cos \theta = -\frac{C}{B}, \text{asíptota} \right)$$

$$x_a^{esc} = -\infty, \quad (y_a^{esc} = \pm\infty)$$

- Òrbita hiperbòlica. **Branca dreta.** La branca dreta de la hipèrbola correspon a un potencial de Kepler repulsiu $V_{rep}(r) = +k/r$. La solució per a l'òrbita és, en aquest cas

$$\frac{1}{r} = -C + B \cos \theta$$

amb origen en el focus. Ara, necessàriament s'ha de $B > C > 0$, $E > 0$:

- Pericentre:

$$r_p^{dre} = \frac{1}{-C + B}, \quad (\theta = 0)$$

$$x_p^{dre} = r_p^{dre}, \quad y_p^{dre} = 0$$

- Apocentre: $\cos \theta = C/B = 1/\varepsilon > 0$, (cap a la dreta)

$$r_a^{dre} \rightarrow +\infty, \quad \left(\cos \theta = \frac{C}{B}, \text{ asíptota} \right)$$

$$x_a^{dre} = +\infty, \quad y_a = \pm\infty$$

■ Òrbita hiperbòlica. **Ambdues branques**

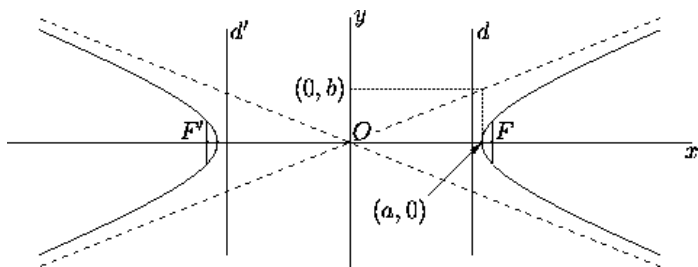


Figura 10: Hipèrbola amb semieix *transvers* (o major) a i semieix conjugat (o menor) b . Ací $b/a = 0.4$. Noteu que si $\varepsilon \rightarrow 1^+$, $a \rightarrow 0$, però b tendeix a ser el que hem definit com semieix menor de la el·lipse, per això s'utilitza la notació *transvers/conjugat* en lloc de major/menor. Font:

<http://www.geom.uiuc.edu/docs/reference/CRC-formulas/node27.html>

- Semieix "transvers": Semidistància entre pericentres de ambdues branques

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{x_p^{dre} - x_p^{esq}}{2} = \frac{r_p^{dre} - r_p^{esq}}{2} \\
 &= \frac{C}{B^2 - C^2} = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} > 0.
 \end{aligned}$$

- Posició del centre de simetria x_{cen} respecte de l'origen de forces

$$\begin{aligned}
 x_{cen} &= \frac{x_p^{dre} + x_p^{esq}}{2} = \frac{r_p^{dre} + r_p^{esq}}{2} \\
 &= \frac{B}{B^2 - C^2} = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} > 0
 \end{aligned} \tag{39}$$

Fixeu-vos que en aquest cas el centre es troba a la dreta del focus, però formalment, l'expressió de $x_{cen} = B/(B^2 - C^2)$ donada per (39) és la mateixa que en el cas el·líptic (Eq.(38)).

- Distància focal: Distància del centre de simetria al focus (origen de forces)

$$f = |x_{cen}| = \frac{B}{B^2 - C^2} > 0.$$



- Excentricitat:

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{B}{C} > 1.$$

- Equació de les òrbites en coordenades cartesianes: Si a l'equació en coordenades polars (Eq. (31)), tenim en compte que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

arribem a

$$\frac{(x - x_{cen})^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que és l'equació usual de la cònica amb centre desplaçat (el signe negatiu és per considerar el cas de la B.D. de la hipèrbola), on

$$x_{cen} = \frac{B}{B^2 - C^2} = \frac{l^2}{2\mu E} \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}$$



$$a^2 = \left(\frac{C}{B^2 - C^2} \right)^2 = \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \quad \Leftarrow \text{depèn de } E, \text{ no de } l!$$

$$b^2 = a^2 - f^2 = \frac{1}{C^2 - B^2} = -\frac{l^2}{2\mu E} \quad \Leftarrow \text{depèn de } E \text{ i de } l!$$

Noteu que $f^2 = x_{cen}^2$ i que $b^2 \geq 0$ segons la cònica siga una el·lipse o una hipèrbola.

Demostració: L'equació de l'òrbita ($\frac{1}{r} = \pm C + B \cos \theta$) es pot escriure com

$$Cr = 1 - Bx$$

elevant al quadrat tenim

$$C^2 (x^2 + y^2) = 1 - 2Bx + B^2 x^2.$$

Ordenant termes

$$(C^2 - B^2) x^2 + 2Bx + C^2 y^2 = 1.$$



Dividint per $C^2 - B^2$ i completant el quadrat en x

$$\left(x + \frac{B}{C^2 - B^2}\right)^2 - \left(\frac{B}{C^2 - B^2}\right)^2 + \frac{C^2}{C^2 - B^2}y^2 = \frac{1}{C^2 - B^2},$$

$$(x - x_{cen})^2 + \frac{C^2}{C^2 - B^2}y^2 = \left(\frac{C}{C^2 - B^2}\right)^2.$$

D'aquí s'arriba directament al resultat.



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



Lleis de Kepler I

- Primera llei: Els planetes es mouen en òrbites el·líptiques en les quals el Sol ocupa un dels focus.
- Segona llei: Les àrees agranades pel radi vector (relatiu al focus, el qual es mou en un sistema de referència inercial) en temps iguals són iguals. Això equival a dir que la velocitat areolar és constant (força central) -ja ho havíem vist al tema 3 -:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} = \text{constant.} \quad (40)$$

- Tercera llei: El quadrat del període de l'òrbita és proporcional al cub del semieix major.

En efecte, d'una banda, en un període τ , integrant l'equació (40)

$$A = l \frac{\tau}{2\mu}. \quad (41)$$

D'altra banda, l'àrea d'una el·lipse val

$$A = \pi ab \quad (42)$$



amb

$$a = \frac{C}{C^2 - B^2} = -\frac{k}{2E} > 0, \quad E < 0$$

$$b = \sqrt{-\frac{l^2}{2\mu E}} = \sqrt{\frac{al^2}{k\mu}}$$

per tant, igualant les equacions (41) i (42)

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k} a^3$$

En el sistema solar (M_{\odot} = massa solar)

$$k = GmM_{\odot}$$

$$\mu = mM_{\odot} / (m + M_{\odot})$$

així que el període de translació al voltant del Sol pot calcular-se de:

***Tercera llei de Kepler aplicada al sistema solar***

$$\tau_{trans}^2 = \frac{4\pi^2}{G(m + M_{\odot})} a^3 \quad (43)$$

Per a $m \ll M_{\odot}$ la relació τ_{trans}^2/a^3 és aproximadament independent del planeta.



Continguts

- 1 Potencial gravitatori d'una distribució de masses
- 2 Teorema de Gauss
- 3 Desenvolupaments multipolars. Les marees
- 4 Moviment en un potencial central
- 5 Òrbites en un potencial central
- 6 Potencial de Kepler
- 7 Òrbites de Kepler
- 8 Lleis de Kepler
- 9 Satèl·lits terrestres



- Considerem que la Terra és una distribució de massa esfèrica amb el que, pel teorema de Gauss, podem considerar-la com una massa puntual en el centre de l'esfera.
- Període d'un satèl·lit de massa $m_{sat} \ll M_t$ en òrbites circulars: Per a òrbites circulars tenim

$$\begin{aligned}\tau_t &= \frac{2\pi}{\sqrt{GM_t}} (R_t + h)^{3/2} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{R_t}{g}} \left(1 + \frac{h}{R_t}\right)^{3/2}\end{aligned}$$

amb $g = GM_t/R_t^2$. Per a poca altura, $h \ll R_t$, s'obté

$$\tau_t(\text{poca altura}) \simeq 2\pi \sqrt{\frac{R_t}{g}} \sim 1.4 \text{ hores}$$



- Velocitat d'un satèl·lit en òrbites circulars de poca altura: Per òrbites circulars

$$v_{sat} = \frac{2\pi (R_t + h)}{\tau_t}$$

Per poca altura, $h \ll R_t$,

$$v_{sat}(\text{poca altura}) \simeq \sqrt{gR_t} \sim 7.9 \text{ km/s}$$

Exercici. Calculeu l'altura i velocitat d'un satèl·lit geoestacionari (òrbita circular, $\tau = 24$ hores).

- Velocitat d'escapament d'un satèl·lit artificial. És la velocitat des de la Terra, corresponent a una òrbita parabòlica ($E = 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{2} v_{esc}^2 + V(R_t) \\ &= \frac{m}{2} v_{esc}^2 - mgR_t \end{aligned}$$

Posant valors numèrics

$$v_{esc} = \sqrt{2gR_t} \sim 11.2 \text{ km/s}$$

Mecànica I:

6. Col·lisions i Dispersió

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford



- Thorton & Marion, "Classical Dynamics of Particles and Systems" (2004), §9.6
- Olsson & Barger, "Classical Mechanics", §4.3.

Una col·lisió és **elàstica** si no es produeix cap canvi en l'energia interna de les partícules; per tant, la conservació d'energia es pot aplicar sense tenir en compte l'energia interna. Observeu que es pot generar calor quan dos cossos mecànics xoquen **inelàsticament**. La calor és només una manifestació de l'agitació de les partícules constituents del cos i per tant es pot considerar una part de l'energia interna.



- Plantejament del problema. Considerem el procés de col·lisió $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ amb masses $m_{1,2}$.

- Conservació del moment total (sense forces externes):

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}.$$

- Conservació de l'energia cinètica (**condició elàstica**):

$$T = T_1^{in} + T_2^{in} = T_1^{fin} + T_2^{fin}.$$

- Resolució de la col·lisió: Coneixent \vec{P} i T de l'estat inicial i una mesura de l'estat final cal determinar els moments \vec{p}_1^{fin} i \vec{p}_2^{fin} en el pla final de col·lisió (3 equacions amb 3 incògnites). Noteu que, en absència de forces externes, el moment angular relatiu es conserva i, per tant, el moviment es desenvolupa en un pla.

Alternativament, també podríem plantejar-nos fer més mesures de l'estat final per determinar l'estat inicial.

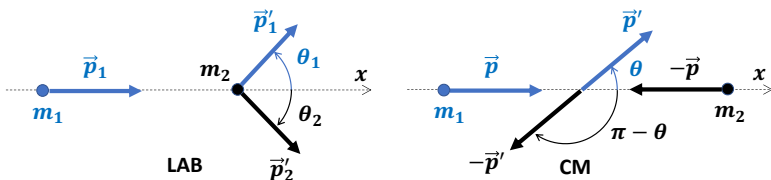


Figura 1: Esquema d'una col·lisió elàstica vista des dels sistemes LAB i CM. Alineem l'eix x perquè el problema es reduïska a dues dimensions en un pla.

- Sistema Laboratori (LAB). Definició:

$$\vec{p}_2^{in} := \vec{0}.$$

Escrivim $\vec{p}_1^{in} := \vec{p}_1$, $\vec{p}_{1,2}^{fin} := \vec{p}'_{1,2}$, llavors

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \\ \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} &= \frac{\vec{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'_2{}^2}{2m_2}.\end{aligned}$$



Col·lisions elàstiques III

Es defineixen els angles de col·lisió $\theta_{1,2}$ de les partícules finals pel que fa a la direcció incident de la col·lisió. Noteu que les components y del moment en el sistema LAB després de la col·lisió són iguals i de signe contrari,

$$p'_{1,y} = -p'_{2,y}, \quad (1)$$

perquè inicialment no hi ha moment en aquesta direcció.

- Sistema Centre de Masses (CM). Definició:

$$\vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{0}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^{in} &= -\vec{p}_2^{in} = \vec{p} \\ \vec{p}_1^{fin} &= -\vec{p}_2^{fin} = \vec{p}' \end{aligned}$$

De la conservació de l'energia cinètica tenim

$$\frac{\vec{p}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}'^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'^2}{2m_2}$$



així, doncs

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'|, \text{ o també, } p = p' \quad (2)$$

Com que no canvien les masses de les partícules que col·lionen, també les velocitats abans i després de la col·lisió són iguals ($v = v'$). Només cal determinar (mesurar) l'angle de col·lisió θ i el problema queda resolt.

- Pas de LAB a CM: Cal fer una transformació galileana ("boost") en la direcció de \vec{p}_1 (o \vec{v}_1) amb velocitat $\vec{v}_0 \parallel \vec{v}_1$ tal que el moment total es faci $\vec{0}$:

$$\vec{p}_1 - (m_1 + m_2)\vec{v}_0 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1. \quad (3)$$

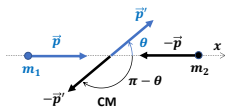
Ara podem escriure els moments dels estats inicials en CM en funció dels corresponents en LAB com

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_1 - m_1\vec{v}_0 = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \\ -\vec{p} &= \vec{p}_2 - m_2\vec{v}_0 = -m_2\vec{v}_0 \quad (m_2 \text{ inicialment en repòs en el sistema LAB!}) \end{aligned}$$

Per tant,

$$p \stackrel{(2)}{=} p' = m_2 v_0 \stackrel{(3)}{=} \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1. \quad (4)$$

També podem escriure les relacions entre els estats finals explícitament

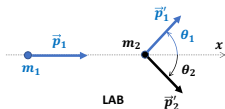


LAB = CM

$$p'_{1x} = p'_x + m_1 v_0 \quad (5)$$

$$p'_{1y} = p'_y \quad (\text{un boost en } x \text{ no canvia les components } y) \quad (6)$$

- Relació entre els angles d'eixida en el sistema CM (θ) i LAB (θ_1) (estats finals): Triem l'eix X com la direcció incident de la col·lisió en el pla XY



$$\tan \theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_{1x}} \stackrel{(6)}{=} \frac{p'_y}{p'_x + m_1 v_0} \stackrel{(4)}{=} \frac{p'_y}{p'_x + m_1 p' / m_2}$$



Dividint numerador i denominador per p' arribem a

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2} \quad (7)$$

- Angle màxim en LAB, θ_1^{\max} . Derivant l'expressió anterior respecte a θ i igualant a zero s'obté que

$$\left. \frac{d \tan \theta_1}{d\theta} \right|_{\theta_1=\theta_1^{\max}} = 0 \implies \cos \theta = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Només existirà el valor de θ_1^{\max} si $m_2 < m_1$, amb el que

$$\begin{aligned} \tan \theta_1^{\max} &= \frac{\sqrt{1 - (m_2/m_1)^2}}{-m_2/m_1 + m_1/m_2} = \frac{\sqrt{1 - (m_2/m_1)^2}}{m_1/m_2 [1 - (m_2/m_1)^2]} && \text{per tant} \\ &= \frac{m_2/m_1}{\sqrt{1 - (m_2/m_1)^2}} = \frac{\sin \theta_1^{\max}}{\cos \theta_1^{\max}} && \sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \end{aligned}$$

El fet que hi haja un angle màxim es pot interpretar físicament com que si $m_2 < m_1$, la partícula 1 no pot rebotar.

Col·lisions elàstiques VII

- Lloc geomètric de \vec{p}'_1 (LAB). En CM el mòdul del moment final de qualsevol de les partícules és

$$p'^2 = p'_x{}^2 + p'_y{}^2$$

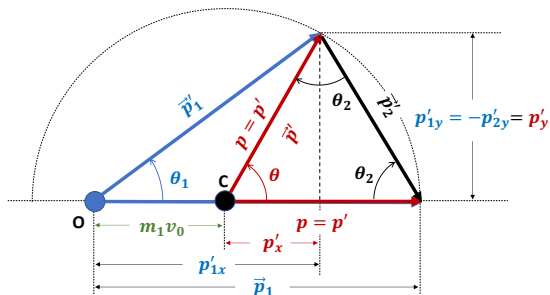


Figura 2: Esquema d'una col·lisió elàstica vista dels sistemes LAB i CM.

Substituint per valors en LAB, obtenim la circumferència de radi R i centre C desplaçat en el pla (p'_{1x}, p'_{1y})

$$R^2 = (p'_{1x} - C)^2 + p'_{1y}{}^2$$

on

$$R = p' = p = m_2 v_0$$

$$C = m_1 v_0$$

Col·lisions elàstiques VIII

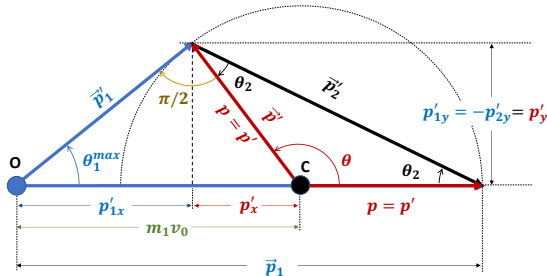


Figura 3: Angle màxim en una col·lisió elàstica vista des dels sistemes LAB i CM.

Noteu que $C < R$, o el que és el mateix, $m_1 < m_2$, indica que l'origen de moments \vec{p}'_1 (O en la Fig. 2) està dins de la circumferència i, per tant, $\theta_1 \in [0, \pi]$. Per contra, si $C > R$, o el que és el mateix, $m_1 > m_2$, indica que l'origen de moments \vec{p}'_1 està fora de la circumferència (Fig. 3) i per tant, $\theta_1 \in [0, \theta_1^{\max}]$. Geomètricament, s'obté, en aquest cas, que $\sin \theta_1^{\max} = m_2/m_1$.

- Resolució de col·lisions en LAB (conegut l'estat inicial). Depenent de la dada de l'estat final, utilitzarem dues de les següents expressions

$$(1) \quad T = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

$$(2) \quad p_1'^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2')^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2p_1p_2' \cos \theta_2$$

$$(3) \quad p_2'^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_1')^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \theta_1$$

$$(4) \quad p_1^2 = (\vec{p}_1' + \vec{p}_2')^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

- Diferents casos:

- Dada: p_1' . De (1) s'obté p_2' . De (2) s'obté θ_2 . De (3) s'obté θ_1 .
- Dada: p_2' . De (1) s'obté p_1' . De (2) s'obté θ_2 . De (3) s'obté θ_1 .
- Dada: θ_1 . De (1) i (3) s'obtenen p_1' i p_2' . De (2) s'obté θ_2 .
- Dada: θ_2 . De (1) i (2) s'obtenen p_1' i p_2' . De (3) s'obté θ_1 .
- Dada: $\theta_1 + \theta_2$. De (1) i (4) s'obtenen p_1' i p_2' . De (2) i (3) s'obtenen θ_2 i θ_1 .



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford



- Considerem el procés de col·lisió inelàstic $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$ amb masses $m_{1,2}$. Les equacions de conservació sense intercanvi de massa (i sense forces externes) són

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}$$

$$T = T_1^{in} + T_2^{in} = T_1^{fin} + T_2^{fin} + Q$$

on Q és l'energia dissipada. Se segueix conservant el moment, però no l'energia cinètica!

- Propietats:
 - Interpretació de Q : És l'energia dissipada en la col·lisió (deformació, calor).
 - Propietat de l'energia dissipada Q : És independent del sistema de referència on es descriu la col·lisió.
 - Classificació (processos inelàstics): exotèrmics ($Q > 0$) | endotèrmics ($Q < 0$).
 - Relació amb el centre de masses. Amb la mateixa notació que en els processos elàstics arribem a^(†)

$$p^2 = p'^2 + 2\mu Q$$

on $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \equiv$ massa reduïda.

^(†) en CM:

$$\frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2} + Q$$

$$\frac{p^2}{2\mu} = \frac{p'^2}{2\mu} + Q$$



Col·lisions inelàstiques II

- Relacions entre el LAB i el CM.

$$p = m_2 v_0 = \mu v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1$$

$$\vec{v}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

v_1 és la velocitat de la partícula 1 en LAB. Però ara $p \neq p'$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{p m_1}{p' m_2}} \implies \sin \theta_1^{\max} = \frac{p' m_2}{p m_1}$$

- Lloc geomètric de \vec{p}'_1 . Com en el cas elàstic arribem a

$$R^2 = (p'_{1x} - C)^2 + p'^2_{1y}$$

on

$$R = p' = \sqrt{p^2 - 2\mu Q} \neq p$$

$$C = m_1 v_0 \quad (\text{igual que en el cas elàstic})$$



- Coeficient de restitució: és el quocient entre la celeritat relativa de l'estat final respecte l'inicial

$$e = \frac{u_{fin}(\text{celeritat relativa final})}{u_{in}(\text{celeritat relativa inicial})} = \frac{|\vec{v}_2^{fin} - \vec{v}_1^{fin}|}{|\vec{v}_2^{in} - \vec{v}_1^{in}|}.$$

Com que les velocitats en el sistema LAB i CM estan connectades amb una transformació de Galieu, podem escriure

$$e = \frac{|\vec{v}_2^{fin} - \vec{v}_0 - (\vec{v}_1^{fin} - \vec{v}_0)|}{|\vec{v}_2^{in} - \vec{v}_0 - (\vec{v}_1^{in} - \vec{v}_0)|} \quad (8)$$

$$= \frac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}, \quad (9)$$

per tant, en el sistema CM s'ha de ($\vec{p} = m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$; $\vec{p}' = m_1\vec{v}_1' = -m_2\vec{v}_2'$)

$$e = \frac{|-\vec{p}'/m_2 - \vec{p}'/m_1|}{|-\vec{p}/m_2 - \vec{p}/m_1|} = \frac{p'}{p}$$



Col·lisions inelàstiques IV

■ Propietats:

- Els valors de u_{in}/fin són independents del sistema de referència i, per tant, ho és el coeficient de restitució e (evident).
- Relació de e amb l'energia de dissipació:

$$Q = T^{in} - T^{fin} = \frac{1}{2}\mu u_{in}^2 (1 - e^2)$$

Dem: Mostreu prèviament que, en general,^(†)

$$P^2 + m_1 m_2 u_{in/fin}^2 = 2(m_1 + m_2)T^{in/fin}$$

on \vec{P} és el moment total. Llavors

$$Q = T^{in} - T^{fin} = \frac{1}{2}\mu (u_{in}^2 - u_{fin}^2)$$

També es pot demostrar la relació anterior calculant Q directament al centre de masses

$$Q = T^{in} - T^{fin} = \frac{1}{2\mu} (p^2 - p'^2)$$

i mostrant que $p^2 = \mu^2 u_{in}^2$ i $p'^2 = \mu^2 u_{fin}^2$.^(††)

(†) Ho verifiquem per a un dels dos casos (l'altre és anàleg)

$$\begin{aligned} P^2 + m_1 m_2 u_{in}^2 &= 2(m_1 + m_2)T^{in} \\ p_1^2 + m_1 m_2 (-\vec{v}_1^{in})^2 &= \cancel{2}(m_1 + m_2) \frac{p_1^2}{\cancel{2}m_1} \\ p_1^2 + \frac{m_2}{m_1} p_1^2 &= (m_1 + m_2) \frac{p_1^2}{m_1} \end{aligned}$$

(††)

$$\begin{aligned} u_{in} &= |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \left| -\frac{\vec{p}}{m_2} - \frac{\vec{p}}{m_1} \right| = \frac{p}{\mu} \\ u_{fin} &= |\vec{v}_2' - \vec{v}_1'| = \left| -\frac{\vec{p}'}{m_2} - \frac{\vec{p}'}{m_1} \right| = \frac{p'}{\mu} \end{aligned}$$



■ Classificació de col·lisions segons e

$e = 1 \implies$ col·lisió elàstica

$e = 0 \implies$ col·lisió completament inelàstica

$0 \leq e < 1 \implies$ col·lisió exotèrmica

$e > 1 \implies$ col·lisió endotèrmica

- Considerem el procés de col·lisió $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ amb $m_1 + m_2 = m_3 + m_4$ (un canvi en la massa total només té explicació en el marc relativista). Les equacions de conservació amb intercanvi de massa ($\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$) són ara

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{\text{in}} + \vec{p}_2^{\text{in}} = \vec{p}_3^{\text{fin}} + \vec{p}_4^{\text{fin}}$$

$$T = T_1^{\text{in}} + T_2^{\text{in}} = T_3^{\text{fin}} + T_4^{\text{fin}} + Q$$

Com en el cas sense intercanvi de massa, Q és l'energia dissipada en el procés. Ara, al centre de masses es té ^(†)

$$p^2 = \frac{m_1 m_2}{m_3 m_4} p'^2 + 2\mu_{12} Q$$

sent μ_{12} la massa reduïda de l'estat inicial.

^(†) en CM:

$$\frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_1} = \frac{p'^2}{2m_3} + \frac{p'^2}{2m_4} + Q$$

$$\frac{p^2}{2\mu_{12}} = \frac{p'^2}{2\mu_{34}} + Q$$

$$p^2 = p'^2 \frac{m_1 m_2}{m_3 m_4} + 2\mu_{12} Q$$



- **Exemple:** Col·lisió totalment inelàstica. Considerem el procés de col·lisió $1 + 2 \rightarrow 3$ en el sistema laboratori, amb $m_1 + m_2 = m_3$. Tenim las equacions

$$p_1 = p_3; p_2 = 0$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_3} + Q$$

L'energia dissipada és, per tant

$$Q = \left(1 - \frac{m_1}{m_3}\right) T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1$$

Per $m_1 = m_2 = m$, s'obté $Q = T_1/2$, és a dir, la meitat de l'energia inicial es dissipa!!

Podem comparar el resultat anterior amb l'obtingut per a la cinta transportadora. Identificant $m_1 = M_{cinta} \gg dm = m_2$, obtenim $dQ \simeq v^2 dm/2$, el que coincideix amb el treball que es perdia per fregament.



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford

Secció eficaç I

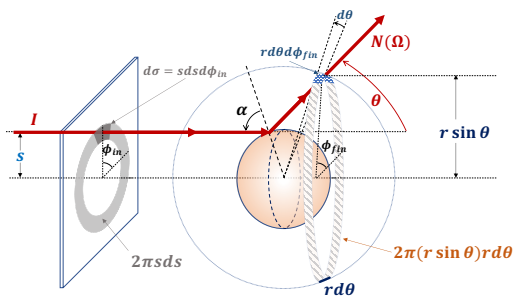


Figura 4: Dispersió; secció eficaç.

- Experiment de dispersió. Preparem un feix incident homogeni tal que I partícules, per unitat de superfície i temps, travessen una superfície (imaginària) perpendicular al feix, i es dirigeixen a una zona de dispersió (blanc). Mesurem en cada direcció de dispersió (θ, ϕ_{fin}) el nombre de partícules dispersades, $N(\Omega)$, per unitat de temps i angle sòlid.

- Paràmetre d'impacte s . És la distància des del projectil inicial fins a l'eix paral·lel al seu recorregut que passa pel centre de dispersió (eix de la dispersió). En el procés de dispersió, podem establir una relació $s(\theta, \phi_{fin})$ entre el paràmetre d'impacte s de la partícula incident i la direcció (θ, ϕ_{fin}) en la qual és dispersada.



Secció eficaç II

- Secció eficaç diferencial: Considerem una secció diferencial $d\sigma$ en el pla perpendicular al feix incident

$$d\sigma = s ds d\phi_{in}$$

corresponent als paràmetres d'impacte entre $(s, s + ds)$ i $(\phi_{in}, \phi_{in} + d\phi_{in})$. Siga $d\Omega$ el diferencial d'angle sòlid

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi_{fin}$$

entre $(\theta, \theta + d\theta)$ i $(\phi_{fin}, \phi_{fin} + d\phi_{fin})$ en el que són dispersades les partícules que travessen $d\sigma$. Tenim, per tant, que:

$$I d\sigma = N(\Omega) d\Omega$$

Suposem que hi ha simetria de revolució al voltant de l'eix de col·lisió, e.d. $\phi_{in} = \phi_{fin} = \phi$. La secció eficaç diferencial per unitat d'angle sòlid $d\sigma/d\Omega$ és, llavors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\frac{N(\Omega)}{I}}_{\text{experimental}} = \underbrace{\frac{s}{\sin \theta} \left| \frac{ds}{d\theta} \right|}_{\text{teòrica}} > 0 \quad (10)$$



La primera igualtat reflecteix la mesura experimental de la secció eficaç. La segona igualtat correspon a l'expressió teòrica. El mòdul es pren perquè, en el procés de dispersió, el paràmetre d'impacte $s(\theta)$ decreix amb l'angle i la secció eficaç diferencial ha de ser positiva.

Per calcular la secció eficaç integrada, per a tot ϕ , en un interval $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ és convenient utilitzar que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\cos\theta} > 0 \quad (11)$$

amb el que, sent $d\Omega = (-d\cos\theta)d\phi$

$$\sigma(\theta_1, \theta_2) = -\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds^2 = \pi [s^2(\theta_1) - s^2(\theta_2)]$$

- Secció eficaç a LAB. Si el centre de dispersió retrocedeix amb la dispersió (massa finita del blanc), la relació $s(\theta, \phi)$ obtinguda amb blanc fix, per a un potencial central, segueix sent vàlida per al sistema CM, però no per al LAB; tingueu en compte que en CM, l'angle θ és el mateix que el del moviment relatiu (dos cossos) vist des del blanc. Aquest, al seu torn, és equivalent al del camp central canviant (m per μ).

Secció eficaç IV

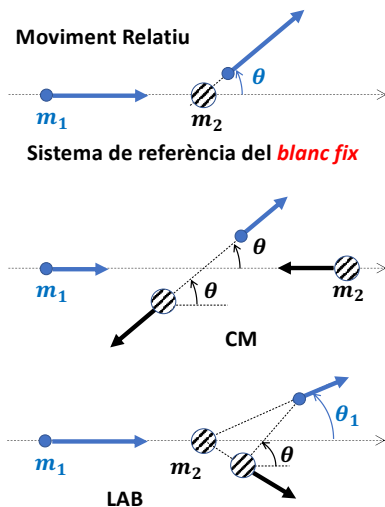


Figura 5: Col·lisió vista des dels sistemes fix al blanc (dalt), CM (medi) i LAB (baix).

Per passar a LAB considerem que el nombre de partícules dispersades en $d\Omega_1$ i $d\Omega$ és el mateix

$$N(\Omega_1) |d\Omega_1| = N(\Omega) |d\Omega|$$

De la relació (Eq. (7))

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2} \quad (12)$$

elevem al quadrat per obtenir

$$\frac{1 - \cos^2 \theta_1}{\cos^2 \theta_1} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{(\cos \theta + \rho)^2}$$

amb $\rho = m_1/m_2$. D'ací arribem a

$$\cos \theta_1 = \frac{\cos \theta + \rho}{\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta}}$$



Secció eficaç V

d'on,

$$\left| \frac{d\Omega_1}{d\Omega} \right| = \left| \frac{d \cos \theta_1}{d \cos \theta} \right| = \frac{1 + \rho \cos \theta}{(1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta)^{3/2}}$$

amb el que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = \frac{(1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta)^{3/2}}{1 + \rho \cos \theta} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- Relació explícita entre θ i θ_1 . La relació que passa del CM al LAB, es pot expressar com (demonstreu)

$$\rho \sin \theta_1 = \sin(\theta - \theta_1)$$

Partint de (7)

$$\begin{aligned} (\cos \theta + \rho) \sin \theta_1 &= \sin \theta \cos \theta_1 \\ \rho \sin \theta_1 &= \sin \theta \cos \theta_1 - \cos \theta \sin \theta_1 \\ &= \sin(\theta - \theta_1) \end{aligned}$$

d'on aïllem θ

$$\theta = \sin^{-1}(\rho \sin \theta_1) + \theta_1$$



D'ací obtenim (demostru)

$$\sin \theta = \rho \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta_1} \cos \theta_1 - \rho \sin \theta_1 \sin \theta_1$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1) + \theta_1) \\ &= \sin(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1)) \cos \theta_1 \\ &\quad + \cos(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1)) \sin \theta_1 \\ &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ &\quad + \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}(\rho \sin \theta_1))} \sin \theta_1 \\ &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ &\quad + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Amb aquestes relacions podem completar les expressions de la secció eficaç al LAB. Des del punt de vista teòric, les seccions eficaçes es calculen al CM. Per comparar amb les mesures de l'experiment fetes al LAB, cal passar les fórmules al LAB.



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford

Dispersió per una esfera dura I

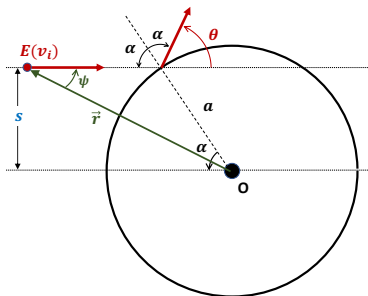


Figura 6: Dispersió per una esfera dura.

■ Potencial d'una esfera dura

$$V(r) = \infty \quad \text{per a } 0 \leq r \leq a$$

$$= 0 \quad \text{per a } r > a$$

correspon a una esfera impenetrable de massa infinita (no hi ha retrocés) i radi a . Aquest potencial de dispersió té simetria esfèrica.

 ■ Paràmetre d'impacte s . És la distància del projectil inicial a l'eix paral·lel al seu recorregut que passa pel centre de l'esfera (centre del potencial).

- Angle de dispersió θ : És l'angle que, pel que fa a la direcció incident, es desvia el projectil després de col·lidir amb l'esfera. Es té la següent relació entre s i els angles de dispersió, θ , i d'incidència, α :

$$s = a \sin \alpha = a \cos \frac{\theta}{2}, \quad (13)$$

on hem fet servir que $2\alpha + \theta = \pi$ (Fig. 6), perquè l'angle d'incidència i de reflexió són iguals.



Dispersió per una esfera dura II

Clarament el paràmetre d'impacte no depèn de ϕ en aquest cas. Hi ha simetria rotacional de la dispersió al voltant de l'eix d'incidència.

- Relació entre el paràmetre d'impacte i l'energia del projectil (amb moment angular l donat) - ψ := angle entre la posició del projectil respecte del centre l'esfera i la seua velocitat-

$$l = m|\vec{r} \times \vec{v}_{in}| = mrv_{in} \sin \psi = msv_{in} \quad (14)$$

$$l^2 = m^2 v_{in}^2 s^2 = (2mE) s^2 \quad (15)$$

Condicció d'impacte amb l fixat: $s < a \implies E > E_0 := l^2/2ma^2$.

- Secció eficaç diferencial d'una esfera dura. Utilitzant l'equació (13) en l'expressió de $d\sigma/d\Omega$ (11) obtenim

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d \cos \theta} = \frac{a^2}{2} \frac{d(1 + \cos \theta)/2}{d \cos \theta} = \frac{a^2}{4} \quad (16) \quad \therefore \text{La secció eficaç diferencial és constant per a qualsevol direcció de dispersió.}$$

- Secció eficaç total σ d'una esfera dura. Cal integrar per a tot angle sòlid (16)

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{a^2}{4} \int d\Omega = \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi -d \cos \theta = \pi a^2$$



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford

Dispersió per un potencial central I

Figura del llibre
Lecciones de Física de
M. Ortega Girón

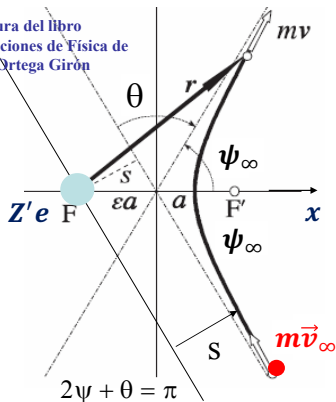


Figura 7: Dispersió per un potencial central.

- Paràmetre d'impacte: volem obtenir una relació entre s , E i θ

$$s = s(E, \theta)$$

per una òrbita oberta en un potencial central.

- Procediment: Prenem l'origen d'energia potencial en $r = \infty$, e.d., $V(r = \infty) = 0$. Llavors, com en el cas de l'esfera dura

$$l = mv_{\infty}s = s\sqrt{2mE}.$$

De l'equació integral d'una òrbita oberta $r(\psi)$ obtenim (fent $r = \infty$) l'angle asimptòtic $\psi_{asi} = \psi_{\infty}(s, E)$ com

$$\psi_{asi} = \int_{r_p}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{efec})}}$$

on el pericentre correspon a $\psi = 0$. D'aquesta relació podem extraure $\psi_{asi}(s, E)$.



L'angle de dispersió s'obté de la relació

$$2\psi_{asi}(s, E) \pm \theta = \pi \quad (17)$$

segons que la dispersió siga repulsiva o atractiva, respectivament.

- Cas Coulombià: Considerem la dispersió repulsiva d'una càrrega elèctrica Ze (i massa m) per un nucli pesat de càrrega $Z'e$ ($M = \infty$, e.d., estàtic). El potencial és doncs $V(r) = +k/r$ amb $k = ZZ'e^2 > 0$. L'equació de l'òrbita

$$\frac{1}{r} = -C + B \cos \psi$$

$$C = \frac{km}{l^2} = \frac{ZZ'e^2m}{l^2} \quad B = \sqrt{C^2 + \frac{2mE}{l^2}}$$

L'excentricitat ε de la hipèrbola val

$$\varepsilon = \frac{B}{C} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{(2Es)^2}{k^2}} > 1. \quad (18)$$



Dispersió per un potencial central III

On hem fet servir que $l^2 = 2mEs^2$. Tenim, llavors, (branca repulsiva)

$$\frac{1}{r} = C(-1 + \varepsilon \cos \psi).$$

Per $r = \infty$ s'obté
$$\cos \psi_{asi} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{C}{B}.$$

Per tant, per a l'angle de dispersió θ , emprant (17), tenim

$$\cos \psi_{asi} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2}.$$

Conseqüentment,

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta/2} \xrightarrow{(18)} \frac{(2Es)^2}{k^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta/2} - 1 = \cot^2 \frac{\theta}{2}.$$

Aïllant el paràmetre d'impacte s s'obté, finalment

$$s = \frac{k}{2E} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (19)$$

Per a la dispersió atractiva s'obté el mateix resultat.



Continguts

- 1 Col·lisions elàstiques
- 2 Col·lisions inelàstiques
- 3 El problema de la dispersió
 - Secció eficaç
- 4 Dispersió per una esfera dura
- 5 Dispersió per un potencial central
- 6 Fórmula de Rutherford



Fórmula de Rutherford I

- Secció eficaç diferencial per al potencial Coulombià: Emprant (19)

$$\frac{ds^2}{d\cos\theta} = \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \frac{d}{d\cos\theta} \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right) = \left(\frac{k}{2E}\right)^2 \frac{2}{(1-\cos\theta)^2}$$

En termes de l'angle meitat $\theta/2$ amb $k = ZZ'e^2$ obtenim, finalment

$$\text{Fórmula de Rutherford: } \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruth}} = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2} \quad (20)$$

- Observacions:

- Aquesta fórmula serveix per nuclis sense retrocés o amb retrocés però fent els càlculs en CM (en aquest cas l'energia es refereix a l'energia relativa a CM).
- La fórmula va ser obtinguda per Rutherford per a la dispersió de partícules α per nuclis atòmics. Geiger i Marsden van realitzar experiències amb partícules α sobre làmines d'or. Les desviacions de la fórmula a grans valors de θ (petits s) permeten acotar el radi nuclear ($< 3 \times 10^{-12}$ cm).
- Per $\theta = 0$ la fórmula de Rutherford presenta una singularitat. Això indica que estem davant d'una interacció de llarg abast. "Per observar totes les partícules dispersades en la direcció cap a davant hem d'exposar una secció eficaç infinita".

Mecànica I:

7. Sistemes no inercials

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre
- 5 Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.
- 6 Pèndol de Foucault

- Biblio: Thornton & Marrison "Classical dynamics of particles and systems", cap. 10
- Olsson & Barger, "Classical Mechanics", cap. 7

- Per descriure, p.e., el moviment d'una partícula a la superfície de la Terra o a prop d'ella, és temptador fer-ho escollint un sistema de coordenades fixe respecte a la Terra.
- Però la Terra experimenta un moviment complicat, compost per moltes rotacions diferents (=acceleracions) respecte d'un marc de referència inercial identificat amb les estrelles *fixes*. El sistema de coordenades de la Terra és, per tant, un marc de referència no inercial.
- Molts efectes importants resulten de la naturalesa no inercial del sistema de coordenades terrestres, tot i que les solucions a molts problemes es poden obtenir amb el grau de precisió desitjat ignorant aquesta distinció.
- En analitzar el moviment dels cossos rígids al capítol següent, també és convenient utilitzar sistemes de referència no inercials i, per tant, aprofitar gran part del desenvolupament que es presenta ací.



Continguts

- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre
- 5 Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.
- 6 Pèndol de Foucault



- 1 Una matriu antisimètrica de dimensió 3, \mathbf{B} (e.d., una matriu que compleix que $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$) és de la forma genèrica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

El conjunt de les matrius antisimètriques de dimensió 3, $A_{3 \times 3}$, forma un espai vectorial de dimensió 3. Per tant, podem construir un isomorfisme $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow A_{3 \times 3}/$ a cada $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ li associa la matriu $\mathbf{A}_{\vec{w}}$:

$$\mathbf{A}_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

que té la següent propietat $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_3 v_2 + w_2 v_3 \\ w_3 v_1 - w_1 v_3 \\ -w_2 v_1 + w_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{w} \times \vec{v})_1 \\ (\vec{w} \times \vec{v})_2 \\ (\vec{w} \times \vec{v})_3 \end{pmatrix},$$

és a dir: $\mathbf{A}_{\vec{w}} \vec{v} = \vec{w} \times \vec{v}$.

- 2 Rotacions còniques: La fórmula de Rodrigues (1840; veure apèndix) ens dona la forma que té una matriu, $\mathbf{R}_{\hat{w},\phi}$ que rota un vector, \vec{a} , per un angle arbitrari, ϕ al voltant d'un eix la direcció del qual està donada pel vector unitari \hat{w} :

$$\mathbf{R}_{\hat{w},\phi} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{w}} \sin \phi + \mathbf{A}_{\hat{w}}^2 (1 - \cos \phi),$$

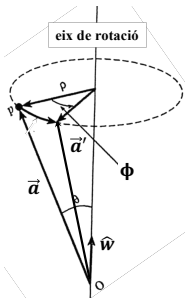
on la matriu $\mathbf{A}_{\hat{w}}$ és com l'escrita en l'eq. (1), però substituint \vec{w} per \hat{w} . Per tant,

$$\vec{a}' = \mathbf{R}_{\hat{w},\phi} \vec{a} = \vec{a} + \sin \phi \hat{w} \times \vec{a} + (1 - \cos \phi) \hat{w} \times (\hat{w} \times \vec{a}) \quad (2)$$

Si l'angle de rotació és infinitesimal ($d\phi$), obtenim (retenint només termes $\mathcal{O}(d\phi)$)

$$\vec{a}' = \vec{a} + d\phi \hat{w} \times \vec{a} \implies d\vec{a} := \vec{a}' - \vec{a} = \hat{w} \times \vec{a} d\phi \quad (3)$$

\therefore podem escriure qualsevol variació infinitesimal $d\vec{a}$ d'un vector arbitrari, \vec{a} , com una rotació diferencial d'angle $d\phi$ al voltant d'un eix amb direcció \hat{w} , la qual serà perpendicular tant a \vec{a} com a l'eix (\hat{w}).





Continguts

- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre
- 5 Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.
- 6 Pèndol de Foucault

Velocitat angular instantània I

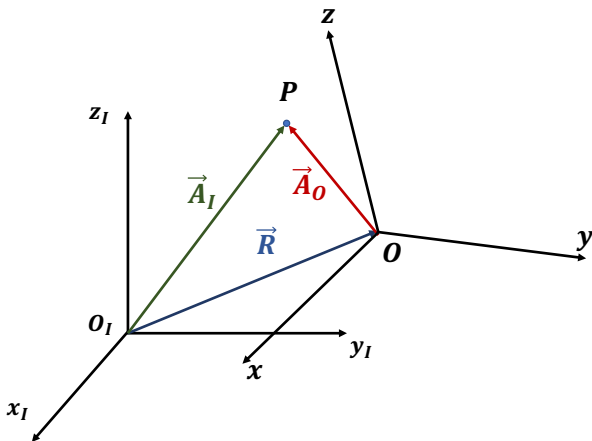


Figura 1: Sistema no inercial, $\{O, x, y, z\}$, movent-se respecte al sistema inercial $\{O_I, x_I, y_I, z_I\}$.

- Siga $S_I = \{O_I, x_I, y_I, z_I\}$ un sistema de referència inercial i $S = \{O, x, y, z\}$ un sistema de referència mòbil, des del qual volem descriure la dinàmica d'un cos no relativista. Tant l'origen O com l'orientació del sistema mòbil canvien amb el temps.

- La posició del sistema S respecte a S_I ve donada per: $\overrightarrow{O_I O} = \vec{R}(t)$



Expressem la variació dels elements de la base (ortonormal) del sistema mòbil (respecte del sistema inercial) en termes de la pròpia referència mòbil

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{i}(t)}{dt} &= a_{11}\hat{i}(t) + a_{12}\hat{j}(t) + a_{13}\hat{k}(t) \\
 \frac{d\hat{j}(t)}{dt} &= a_{21}\hat{i}(t) + a_{22}\hat{j}(t) + a_{23}\hat{k}(t) \\
 \frac{d\hat{k}(t)}{dt} &= a_{31}\hat{i}(t) + a_{32}\hat{j}(t) + a_{33}\hat{k}(t)
 \end{aligned} \tag{4}$$

on $\hat{i}(t)$, $\hat{j}(t)$, $\hat{k}(t)$ són els vectors unitaris de la referència mòbil, que estan variant respecte de la referència inercial. Aquesta variació instantània dels vectors \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} es pot expressar com una rotació de S respecte de S_I , com veurem en el que segueix.

Noteu que $a_{11} = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{i}$, $a_{12} = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$, $a_{13} = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{k}$, etc.



Velocitat angular instantània III

- Diferenciant les condicions $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, etc., s'obté que

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{i} &= 0, \dots \\ \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} &= -\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{i}, \dots\end{aligned}$$

el que ens porta a les següents condicions

$$\begin{aligned}a_{11} = a_{22} = a_{33} &= 0 \\ a_{ij} = -a_{ji}, \quad i, j &= 1, 2, 3\end{aligned} \quad \implies \quad \begin{array}{l} \text{és a dir, la matriu } \{a_{ij}\} \text{ és} \\ \text{antisimètrica (i de traça nul·la).} \end{array}$$

- Es defineix el vector velocitat angular instantània $\vec{w}(t)$ a la base mòbil com

$$\vec{w} = w_1 \hat{i} + w_2 \hat{j} + w_3 \hat{k} := a_{23} \hat{i} + a_{31} \hat{j} + a_{12} \hat{k}$$

d'aquesta forma

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = w_3 \hat{j} - w_2 \hat{k} = \vec{w} \times \hat{i} \quad (5)$$

i el mateix per a $d\hat{j}/dt$, $d\hat{k}/dt$:



$$\frac{d\hat{j}}{dt} = -w_3 \hat{i} + w_1 \hat{k} = \vec{w} \times \hat{j} \quad (6)$$

$$\frac{d\hat{k}}{dt} = w_2 \hat{i} - w_1 \hat{j} = \vec{w} \times \hat{k} \quad (7)$$

Noteu que, abusant de la notació matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{j}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{k}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \times \hat{i} \\ \vec{w} \times \hat{j} \\ \vec{w} \times \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\vec{w}}^T \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} \quad (8)$$

on $\mathbf{A}_{\vec{w}}^T$ és la matriu transposta de $\mathbf{A}_{\vec{w}}$ definida en (1).

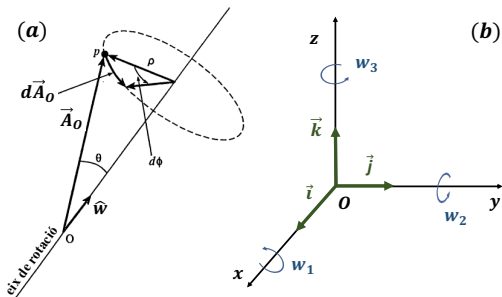
Velocitat angular instantània \vec{w} 

Figura 2: (a) Rotació infinitesimal al voltant d'un eix definit pel vector unitari \hat{w} . En una rotació infinitesimal, genèrica (Eq. 3) $d\vec{A}_O = \hat{w} \times \vec{A}_O d\phi$, per tant, $|d\vec{A}_O| = |\hat{w} \times \vec{A}_O| d\phi$. Com $|\hat{w} \times \vec{A}_O| = A_O \sin \theta = \rho$ obtenim $|d\vec{A}_O| = \rho d\phi$, sent $d\phi$ l'angle infinitesimal de rotació al voltant de l'eix \hat{w} . Noteu que $d\vec{A}_O \perp \vec{A}_O$ i $d\vec{A}_O \perp \hat{w}$. Podem definir el vector velocitat angular com $\vec{w} = \hat{w}w \equiv \hat{w}(t)\dot{\phi}$. Adaptada de la Fig. 6-3 de Olsson & Barger. (b) Les components de la velocitat angular w_i roten el sistema dels eixos $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, de manera que, p.e., w_3 fa rotar \hat{i} cap a la direcció $+\hat{j}$.

- Canvi respecte al sistema inercial d'un vector "fix" en S : Siga $\vec{A}_O(t) = A_{O1}\hat{i} + A_{O2}\hat{j} + A_{O3}\hat{k}$ amb A_{O1}, A_{O2}, A_{O3} constants. Derivant respecte al temps obtenim

$$\frac{d\vec{A}_O}{dt} = \vec{w} \times \vec{A}_O \quad (9)$$

es conclou que $d\vec{A}_O$ és ortogonal al pla descrit per \vec{w} i \vec{A}_O (Fig. 2). A més, dA_O correspon a un arc de circumferència de radi $\rho = A_O \sin \theta$, en el pla perpendicular a \vec{w} , que subtendix un angle $d\phi$



Velocitat angular instantània VI

$$dA_O = (A_O \sin \theta) d\phi$$

sent θ l'angle que formen \vec{A}_O i \vec{w} . Però, d'altra banda (de (9)),

$$dA_O = (A_O \sin \theta) w dt.$$

És a dir, en un determinat instant, \vec{A}_O gira un angle $d\phi$ al voltant de la direcció de \vec{w} a raó de

$$d\phi/dt = w$$

d'ací el nom de velocitat angular instantània w .

Alternativament: comparant (9) i el resultat (3) aplicat a \vec{A}_O tenim

$$(9) : d\vec{A}_O = \vec{w} \times \vec{A}_O dt = \hat{w} \times \vec{A}_O w dt$$

$$(3) : d\vec{A}_O = \hat{w} \times \vec{A}_O d\phi$$

D'on, $w dt = d\phi$ o $w = d\phi/dt$.

NOTA: Desenvolupant per Taylor la matriu de rotació $\mathbf{R}_{\hat{w}, d\phi}$ en la seua forma exponencial, $\mathbf{R}_{\hat{w}, d\phi} = \exp(\mathbf{A}_{\hat{w}} d\phi)$, sent

$$\mathbf{A}_{\hat{w}} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{w}_3 & \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 & 0 & -\hat{w}_1 \\ -\hat{w}_2 & \hat{w}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\mathbf{A}_{\hat{w}} \vec{a} = \hat{w} \times \vec{a}$$

s'ha de

$$\mathbf{R}_{\hat{w}, d\phi} (\vec{A}_O) = \vec{A}_O + \mathbf{A}_{\hat{w}} (\vec{A}_O) d\phi$$

per tant,

$$d\vec{A}_O = \mathbf{A}_{\hat{w}} (\vec{A}_O) d\phi = \left(\frac{\vec{w}}{w} \times \vec{A}_O \right) d\phi$$

D'altra banda

$$d\vec{A}_O = (\vec{w} \times \vec{A}_O) dt$$

d'on es conclou, de nou, que $d\phi = w dt$.



- Canvi d'un vector variable en S : Siga $\vec{A}(t) = A_1(t)\hat{i} + A_2(t)\hat{j} + A_3(t)\hat{k}$ amb $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ variant amb el temps t , llavors

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

on

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta t} := \frac{dA_1}{dt}\hat{i} + \frac{dA_2}{dt}\hat{j} + \frac{dA_3}{dt}\hat{k}$$

és a dir, $\delta\vec{A}/\delta t$ representa el canvi de \vec{A} "vist" des del sistema mòbil.



Continguts

- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis**
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre
- 5 Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.
- 6 Pèndol de Foucault



Teorema de Coriolis I

- Siga un punt P que es mou en l'espai amb vector de posició \vec{r}_I respecte del sistema inercial i \vec{r} respecte del sistema mòbil. Es té, doncs, que

$$\vec{r}_I(t) = \vec{r}(t) + \vec{R}(t)$$

- Derivant respecte al temps tenim

$$\vec{v}_I(t) = \vec{v}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

on \vec{v}_I és la velocitat respecte al sistema inercial i $\vec{v} = \delta\vec{r}/\delta t$ és la velocitat "vista" des del sistema mòbil.

- Tornant a derivar tenim (noteu que

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\delta}{\delta t}(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}_I = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \quad (10)$$

sent $\vec{a} = \delta^2\vec{r}/\delta t^2$ l'acceleració vista des del sistema no inercial. Aquest resultat es coneix com teorema de Coriolis.



- Noteu que:

$$\vec{a}_I = \text{acceleració inercial}$$

$$\vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2}, \text{ acceleració no inercial}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t}, \text{ acceleració angular}$$

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \text{acceleració d'arrossegament o translacional}$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v} = \text{acceleració de Coriolis}$$

L'acceleració de Coriolis només es posa de manifest si el punt P es mou respecte de sistema mòbil!



Teorema de Coriolis III

- Segona llei de Newton des d'un sistema no inercial (mòbil). Considerem un camp de forces extern, \vec{F} , llavors, per a un punt material de massa m tindrem en el sistema mòbil que

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}_{efec}$$

on el terme de la dreta és la força efectiva

$$\vec{F}_{efec} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$$

- Apareixen les següents forces "fictícies" en el sistema de referència mòbil

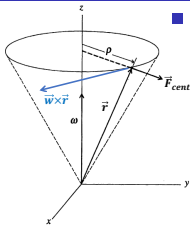
$$\vec{F}_{centr} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \text{força centrífuga} \quad (11)$$

$$\vec{F}_{azimu} = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \text{força azimuthal} \quad (12)$$

$$\vec{F}_{arros} = -m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \text{força d'arrossegament o translacional} \quad (13)$$

$$\vec{F}_{Coriol} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v} = \text{força de Coriolis} \quad (14)$$

Teorema de Coriolis IV



- La força centrífuga (11) és deguda al moviment de rotació del sistema de coordenades. Com $\vec{w} \cdot \vec{F}_{centr} = 0$, \vec{F}_{centr} és perpendicular a l'eix de rotació \hat{w} . Podem veure que la força centrífuga està dirigida en la direcció radial cap a fora (en la Fig. 2a reemplacem $\vec{A}_O \rightarrow \vec{r}$) ja que

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{F}_{centr} &= -m\vec{r} \cdot \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = -m\vec{r} \cdot ((\vec{w} \cdot \vec{r})\vec{w} - w^2\vec{r}) \\ &= -m((\vec{w} \cdot \vec{r})^2 - w^2r^2) = mw^2r^2 \sin^2\theta = mw^2\rho^2 > 0. \end{aligned}$$

- La força azimuthal apareix, només, si la velocitat angular canvia en el temps. És perpendicular a \vec{r} . Si w canvia de magnitud però no de direcció, \vec{F}_{azimu} actua mantenint la velocitat de rotació de la partícula.
- La força de Coriolis (14) apareix si la partícula es mou respect al sistema mòbil. Com $\vec{w} \cdot \vec{F}_{Coriol} = \vec{v} \cdot \vec{F}_{Coriol} = 0$, \vec{F}_{Coriol} és perpendicular a \vec{w} i \vec{v} . Aquesta força s'ha de tenir en compte en els càlculs de trajectòries balístiques de llarga distància o en la descripció de fenòmens atmosfèrics de gran escala (també en la trajectòria de paracaigudistes o en el càlcul de la vertical en edificis alts!).
- La força translacional o d'arrossegament es deu a l'acceleració de l'origen del sistema mòbil relativa al sistema inercial. Si \vec{R} gira amb velocitat angular $\vec{\Omega}$ i és constant en O llavors

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{R} \implies \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$



Continguts

- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre**
- 5 Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.
- 6 Pèndol de Foucault

Moviment en la Superfície Terrestre I

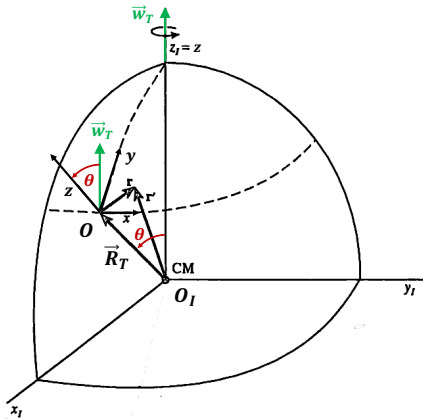


Figura 3: Sistema de referència inercial S_I amb origen al centre de la Terra, i sistema de referència no inercial fixat a la superfície terrestre (en O). Adaptada de la Fig. 7-6 de Olsson & Barger.

- Triem el sistema inercial fix S_I amb origen O_I al centre de la Terra i el sistema mòbil S amb origen O en un punt de la superfície terrestre, girant amb ella. Triem els eixos mòbils tal que Ox apunta cap a l'Est, Oy cap al Nord i Oz cap amunt (passant pel centre de la Terra, suposada esfèrica). Tant $\vec{R}_T(t) = \vec{O_I O}$ com el sistema de referència mòbil giren amb la velocitat angular de rotació terrestre \vec{w}_T , al voltant de l'eix Nord-Sud, amb magnitud (constant)

$$w_T \simeq \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 0.73 \times 10^{-4} \text{ rad/s.}$$

Moviment en la Superfície Terrestre II

- Considerant la gravetat g a la superfície i altres forces externes \vec{F}' , la segona llei de Newton per a una massa m és

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' - mg\hat{k} - 2m\vec{\omega}_T \times \vec{v} \\ - m\vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \vec{r}) - m\vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \vec{R}_T)$$

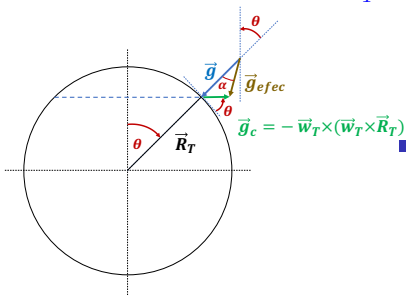


Figura 4: Acceleració gravitatòria efectiva \vec{g}_{efec} . La magnitud de l'acceleració centrífuga (\vec{g}_c) s'ha exagerat per claredat.

per a $r \ll R_T$, podem menysprear la força centrífuga del teorema de Coriolis enfront de la força (centrífuga) d'arrossegament.

- Definim la **gravetat efectiva** com

$$\vec{g}_{efec} = -g\hat{k} - \vec{\omega}_T \times (\vec{\omega}_T \times \vec{R}_T)$$

amb el que

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' + m\vec{g}_{efec} - 2m\vec{\omega}_T \times \vec{v}$$

A part de les forces externes i la gravetat efectiva ens queda, doncs, la força de Coriolis.



- La correcció que introdueix el terme centrífug en la gravetat efectiva és petita. Comparant-la amb g tenim

$$w_T^2 R_T / g \sim 0.003 \quad (15)$$

és a dir, una correcció del voltant d'un tres per mil. Més en concret, definint la colatitud θ des del pol nord com

$$\theta = \pi/2 - \text{lat N} = \pi/2 + \text{lat S}$$

tenim que

$$\vec{R}_T = R_T \hat{k} \quad (16)$$

$$\vec{w}_T = w_T (\sin \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}) \quad (17)$$



Moviment en la Superfície Terrestre IV

i, per tant, podem calcular l'acceleració centrífuga vista des del sistema sobre la superfície terrestre, \vec{a}_{cen} , com

$$\begin{aligned}\vec{a}_{cen} &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_T) = \omega_T^2 \vec{R}_T - \vec{\omega}_T \cdot \vec{R}_T \vec{\omega}_T \\ &= -\omega_T^2 R_T \sin \theta (\cos \theta \hat{j} - \sin \theta \hat{k}) \\ a_{cen} &= \omega_T^2 R_T \sin \theta \simeq 0.03 \sin \theta,\end{aligned}$$

el que ens porta, finalment a

$$\vec{g}_{efec} = -g\hat{k} + \vec{a}_{cen}$$

Usant aquesta expressió de la gravetat efectiva, es pot obtenir que^(†)

$$g_{efec} \simeq g - \omega_T^2 R_T \sin^2 \theta$$

^(†) De (15), és evident que $g \gg \omega_T^2 R_T$

$$\begin{aligned}g_{efec} &= \sqrt{\omega_T^4 R_T^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\omega_T^2 R_T \sin^2 \theta - g)^2} \\ &\simeq \sqrt{g^2 - 2g\omega_T^2 R_T \sin^2 \theta} \\ &\simeq g \left(1 - \omega_T^2 R_T \sin^2 \theta / g\right)\end{aligned}$$

En els pols no hi ha canvi de gravetat, mentre que a l'equador la correcció centrífuga és màxima.



■ Observacions:

- Amb la definició de gravetat efectiva podem canviar lleugerament l'orientació del sistema de referència mòbil de manera que l'eix Oz coincidisca amb la direcció de la gravetat efectiva. Aquesta direcció coincideix amb la d'una plomada, que no es dirigeix cap al centre de la Terra, és a dir, no coincideix exactament amb la perpendicular a la superfície.

$$\vec{g}_{efec} = -g_{efec}\hat{k}$$

- En un punt de colatitud θ la desviació de la plomada respecte de la normal a la superfície de la Terra, subtendeix un angle α donat per (**exercici**)

$$\alpha \simeq \sin \alpha \simeq \frac{|\vec{g} \times \vec{g}_{efec}|}{g^2} = \frac{w_T^2 R_T \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Fixem-nos que ni en els pols ni en l'equador no hi ha desviació de la plomada.



- La velocitat angular terrestre es pot escriure com en (17) i, per tant, la força de Coriolis és

$$\vec{F}_{Coriol} = -2m \vec{\omega}_T \times \vec{v} = 2m \omega_T \left[(v_y \cos \theta - v_z \sin \theta) \hat{i} - v_x \cos \theta \hat{j} + v_x \sin \theta \hat{k} \right]$$

Per a un moviment en la superfície terrestre, tenim les següents desviacions degudes a Coriolis (a l'hemisferi Nord, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, i al Sud, $\pi/2 < \theta \leq \pi$)

Direcció \vec{v}	Hem N	Hem S	Veiem, doncs, que les desviacions són en sentit de les agulles del rellotge a l'hemisferi nord i en sentit contrari a l'hemisferi sud.
Nord ($v_y > 0$)	Est	Oest	
Est ($v_x > 0$)	Sud i dalt	Nord i dalt	
Sud ($v_y < 0$)	Oest	Est	
Oest ($v_x < 0$)	Nord i abaix	Sud i abaix	
Dalt ($v_z > 0$)	Oest	Oest	
Abaix ($v_z < 0$)	Est	Est	



Continguts

- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre
- 5 **Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.**
- 6 Pèndol de Foucault



- Per a la caiguda lliure d'un cos de massa m tenim la següent equació de moviment des del sistema sobre la superfície terrestre

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = -mg_{efec} \hat{k} - 2m\vec{\omega}_T \times \vec{v}$$

amb condicions inicials $\vec{v}(0) = \vec{0}$, $\vec{r}(0) = (0, 0, h)$. En termes de les components vectorials

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_T (\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta) \\ \ddot{y} &= -2\omega_T \dot{x} \cos \theta \\ \ddot{z} &= -g_{efec} + 2\omega_T \dot{x} \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

Hem utilitzat la notació de derivació $\delta x / \delta t \equiv \dot{x}$, etc.

- En aproximació d'ordre zero en ω_T ($\mathcal{O}(\omega_T^0)$), menyspreem la rotació de la Terra ω_T , amb el que tenim

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(0)} &= 0 \\ \ddot{y}^{(0)} &= 0 \\ \ddot{z}^{(0)} &= -g_{efec} \end{aligned} \right\}$$



Integrant des del repòs

$$\dot{x}^{(0)} = 0$$

$$\dot{y}^{(0)} = 0$$

$$\dot{z}^{(0)} = -g_{efec} t$$

- Substituint aquesta solució en els segons membres de les equacions de moviment

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}^{(1)} &= 2w_T g_{efec} t \sin \theta \\ \ddot{y}^{(1)} &= 0 \\ \ddot{z}^{(1)} &= -g_{efec} \end{aligned} \right\}$$

Integrant dues vegades, tenim la solució d'ordre un en w_T ($\mathcal{O}(w_T)$)

$$x^{(1)} = \frac{w_T}{3} g_{efec} t^3 \sin \theta$$

$$y^{(1)} = 0$$

$$z^{(1)} = -\frac{1}{2} g_{efec} t^2 + h$$



on h és l'altura de caiguda.

- El temps de caiguda correspon a $z^{(1)} = 0$, és a dir, $t_{caiguda} = \sqrt{2h/g_{efec}}$, amb el que

$$x_{caiguda} = \frac{2hw_T}{3} \sqrt{\frac{2h}{g_{efec}}} \sin \theta$$

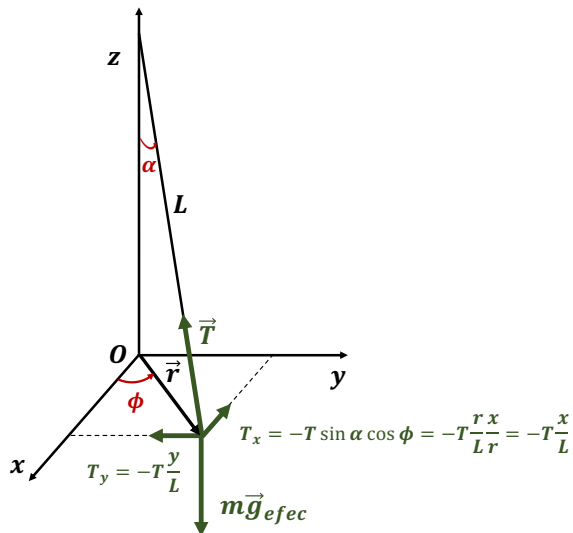
Aquesta és la desviació cap a l'est (tant a l'hemisferi nord com a l'hemisferi sud). Per exemple, per a una altura $h = 1000$ m a l'equador ($\theta = \pi/2$), la desviació és d'aproximadament 70 cm. En els pols no hi ha desviació.

- **Exercici.** En un tir vertical cap amunt, quina és la desviació en caure a terra?



Continguts

- 1 Conceptes matemàtics previs
- 2 Velocitat angular instantània
- 3 Teorema de Coriolis
- 4 Moviment en la Superfície Terrestre
- 5 Caiguda Lliure. Desviació cap a l'Est.
- 6 Pèndol de Foucault



- La força de Coriolis a la superfície de la Terra fa que el pla d'oscil·lació d'un pèndol gire sobre el seu eix d'oscil·lació a causa del moviment de rotació d'aquella (Jean Foucault, 1851). A l'hemisferi Nord, el pèndol gira en el sentit de les agulles del rellotge, mentre que a l'hemisferi sud ho fa en el sentit contrari.

Figura 5: Esquema de forces en el pèndol de Foucault.



- Considerem el moviment de la *llentilla* del pèndol en el pla XY (pla horitzontal). La força que mou el pèndol, menyspreant el moviment en OZ (angles petits = moviments horitzontals $\ll L =$ longitud del pèndol), és

$$\vec{F} \approx -m (g_{efec} \sin \alpha) \hat{r} = -m \frac{g_{efec}}{L} \vec{r}, \quad \text{amb } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}.$$

- Considerant, a més, la força de Coriolis en el pla XY , tenim les següents equacions de moviment acoblades

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2w_T \dot{y} \cos \theta + \frac{g_{efec}}{L} x &= 0, \\ \ddot{y} + 2w_T \dot{x} \cos \theta + \frac{g_{efec}}{L} y &= 0. \end{aligned}$$

Definint la variable complexa $\zeta = x + yi$, obtenim la següent equació diferencial lineal de segon ordre d'una variable complexa

$$\ddot{\zeta} + i (2w_T \cos \theta) \dot{\zeta} + \frac{g_{efec}}{L} \zeta = 0 \quad (18)$$



- La solució del moviment s'obté pels mètodes usuals de resolució d'equacions diferencials, resultant

$$\zeta(t) = Ae^{-i(w_T \cos \theta)t} \cos\left(\sqrt{\frac{g_{efec}}{L}}t + \phi\right)$$

on A i ϕ són constants d'integració. En l'arrel quadrada de l'argument el cosinus s'ha considerat l'aproximació $w_T^2 \ll g_{efec}/L$ (la freqüència de rotació terrestre, w_T , és molt més lenta que la d'oscil·lació del pèndol, $w_0 = \sqrt{g_{efec}/L}$).

Els moviments $x(t)$ i $y(t)$ són les parts real i imaginària de $\zeta(t)$, és a dir

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos[(w_T \cos \theta)t] \cos\left(\sqrt{\frac{g_{efec}}{L}}t + \phi\right) \\ y(t) &= -A \sin[(w_T \cos \theta)t] \cos\left(\sqrt{\frac{g_{efec}}{L}}t + \phi\right) \end{aligned}$$

Obtenim l'equació característica associada a (18):

$$\lambda^2 + 2iw_z\lambda + \frac{g_{efec}}{L} = 0,$$

on $w_z := w_T \cos \theta$. Les solucions són complexes

$$\begin{aligned} \lambda &= -iw_z \pm \sqrt{-w_z^2 - \frac{g_{efec}}{L}} \\ &\approx -i\left(w_z \mp \sqrt{\frac{g_{efec}}{L}}\right). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\zeta(t) = C_1 e^{-iw_z t + i\sqrt{g_{efec}/L}t} + C_2 e^{-iw_z t - i\sqrt{g_{efec}/L}t}$$

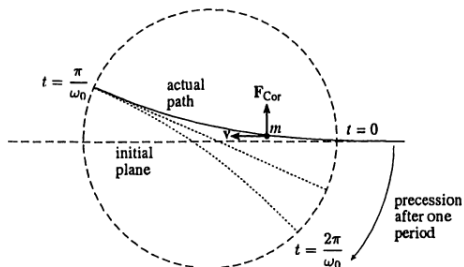


Figura 6: Defleció de la lentilla del pèndol Foucault per la força de Coriolis vista des de dalt. L'angle de precissió està exagerat. Fig. 7-10 de Olsson i Barger.

Aquest és el període del gir del pèndol. A l'equador no hi ha gir, mentre que als pols el període de gir és el de rotació de la Terra.¹

- El període usual d'oscil·lació del pèndol és, doncs, $T = 2\pi\sqrt{L/g_{efec}}$, mentre que l'amplitud en els eixos x i y varia periòdicament amb període

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_T |\cos \theta|}$$

¹Veure: https://www.youtube.com/watch?v=fv_FD51CwUA



Mecànica I:

8. Sòlid Rígid: Cinemàtica i Dinàmica

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024



- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada



- Biblio: Thornton & Marrion "Classical dynamics of particles and systems", cap.11
- Goldstein, "Classical Mechanics", caps.4 i 5



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada

Definició i graus de llibertat I

- Definim un sòlid rígid com un sistema de punts materials (discret o continu) tal que la posició relativa entre ells roman invariable.
- Sistema de referència lligat al sòlid: Siga $S = OXYZ$ un sistema de referència inercial. Definim el sistema de referència $S' = O'X'Y'Z'$, tal que, els punts del sòlid, en el seu moviment, mantenen les seues coordenades fixes en ell. És a dir, aquest sistema de referència es mou amb el sòlid. En un determinat instant t , siguen $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}'(t)$ els vectors de posició d'un punt del sòlid respecte del sistema inercial i del lligat al sòlid, respectivament. Llavors

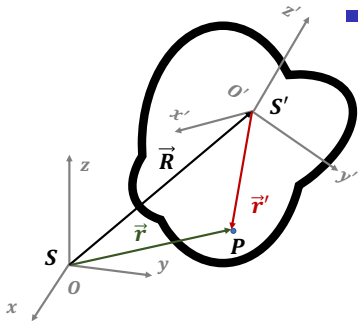


Figura 1: Relació entre dos sistemes de referència S i S' . P és un punt del sòlid rígid.

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

on $\vec{R}(t) = \overrightarrow{OO'}$. Noteu que les components del vector $\vec{r}'(t)$ canvien respecte del sistema inercial.



Definició i graus de llibertat II

- Descomposició del moviment del sòlid (Euler-Chasles): Considerem una rotació $\mathbf{R}(t)$ que ens *gira* l'orientació que el sistema S' tenia a $t = 0$ a l'orientació de S' a t . D'aquesta manera, per a cada punt del sòlid podem escriure

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \mathbf{R}(t) \{\vec{r}'(t = 0)\} \quad (1)$$

És a dir, el moviment del sòlid es pot descompondre com una translació (que no canvia l'orientació) més una rotació. Segons aquesta descomposició, el moviment d'un sòlid rígid té sis graus de llibertat. Tres translacionals i tres rotacionals.

- Recordem les següents propietats d'una matriu de rotació

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

$$\det \mathbf{R} = +1$$

amb $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada



- El canvi dels vectors unitaris del sistema de referència lligat al sòlid $\vec{e}'_i = \{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ el podem expressar com (veure Sec. 7.2, eq. (8))

$$\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} = W'_{ij}\vec{e}'_j(t), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

amb índex j sumat (repetit en el mateix membre de la igualtat), i

$$\mathbf{W}' = \begin{pmatrix} 0 & w'_3 & -w'_2 \\ -w'_3 & 0 & w'_1 \\ w'_2 & -w'_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{w} = (w'_1, w'_2, w'_3)$$

sent \vec{w} la velocitat angular instantània del sistema de referència lligat al sòlid i w'_i les seues components en aquest sistema.

- El caràcter antisimètric de \mathbf{W}' ens permet escriure

$$w'_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W'_{jk}. \quad (4)$$

Rotació i velocitat angular del sòlid II

■ Tenim en compte que: $\vec{e}'_i(t) = \mathbf{R}(t)\vec{e}'_i(0) = R_{ij}(t)\vec{e}_j$ (5)

on R_{ij} són els elements de matriu de \mathbf{R} i *triem* que $\vec{e}'_i(0) = \vec{e}_i$ coincideixen amb els vectors unitaris del sistema de referència inercial en $t = 0$. Fixeu-vos que hem triat la rotació de manera que els vectors base es transformen en columna, per tant, per

$$\vec{r}'(t) = \mathbf{R}(t)\vec{r}'(0) \quad (\text{veure descomposició d'Euler-Chasles (1)}), \quad (6)$$

i per a les components,

$$x'_i(t) = R_{ij}^T(t)x'_j(0). \quad (7)$$

(†) Efectivament, d'una banda (\vec{r}' gira en la base \vec{e}_i)
 $\vec{r}'(t) = x'_i(t)\vec{e}_i$.
 D'altra banda (gira la base mòbil \vec{e}'_i)
 $\vec{r}'(t) = x'_j(0)\vec{e}'_j(t) \stackrel{(5)}{=} x'_j(0)R_{ji}\vec{e}_i(t)$
 Comparant els dos resultats obtenim (7).

Derivant l'equació (5) obtenim

$$\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} = \dot{R}_{ij}(t)\vec{e}_j = \dot{R}_{ij}R_{jk}^T\vec{e}'_k(t) = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)_{ik}\vec{e}'_k(t) \quad (8)$$

amb índexs j, k sumats. Comparant (2) i (8) deduïm la següent relació entre la rotació del sòlid i la seua velocitat angular instantània

$$W'_{ij} = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)_{ij} \quad (9)$$

La condició $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ assegura que $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ siga antisimètrica (provar).

Rotació i velocitat angular del sòlid III

- Propietat fonamental: En el moviment del sòlid, **el vector velocitat angular instantània és independent de l'origen del sistema de coordenades lligat al sòlid**. En efecte, considerem dos sistemes de coordenades lligats al sòlid $S' = O'X'Y'Z'$ i $S'' = O''X''Y''Z''$ (Fig. 2). El vector $\overrightarrow{O'O''}(t)$ és un vector fix tant per a S' com per a S'' . Pel que fa a la derivada temporal des d'ambdós sistemes tindrem

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{O'O''}(t)}{dt} &= \vec{\omega}_{O'} \times \overrightarrow{O'O''}(t) \\ &= \vec{\omega}_{O''} \times \overrightarrow{O'O''}(t) \end{aligned}$$

Per tant,

$$\vec{\omega}_{O'} = \vec{\omega}_{O''} \quad (10)$$

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W}'' \quad (11)$$

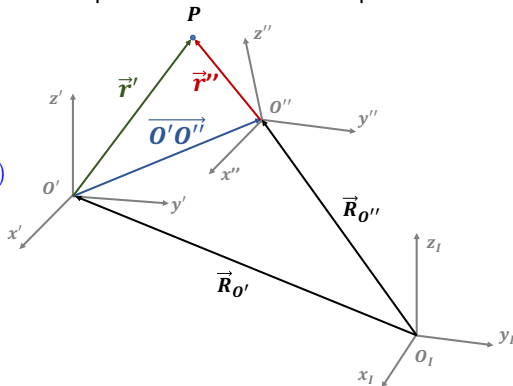


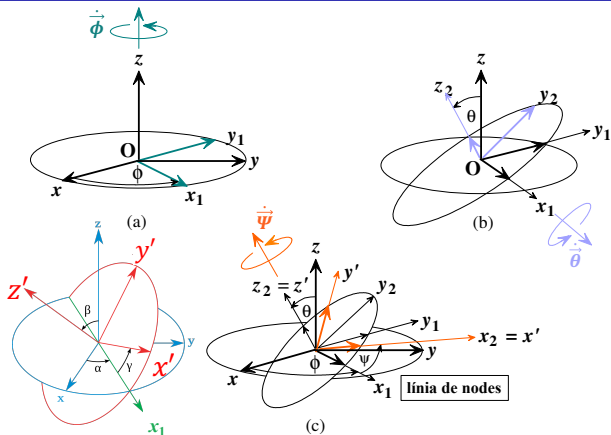
Figura 2: Dos sistemes de referència lligats al sòlid (O' i O'') i un sistema de referència inercial O_I .



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler**
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada

Rotació i angles d'Euler I



- Volem construir una rotació que ens porte de l'orientació del sistema de referència inercial S a la del sistema lligat al sòlid S' . Definim la **línia de nodes** x_1 com la intersecció dels plans xy i $x'y'$. Ara, considerem les següents rotacions amb eixos definits com segueix:

Figura 3: Angles d'Euler.

ϕ, θ, ψ són els angles d'Euler.

	eix	canvi d'eixos	rang	nom
\mathbf{R}_ϕ	z	$xyz \rightarrow x_1y_1z$	$\phi \in [0, 2\pi]$	precessió
\mathbf{R}_θ	x_1	$x_1y_1z \rightarrow x_1y_2z'$	$\theta \in [0, \pi]$	nutació
\mathbf{R}_ψ	z'	$x_1y_2z' \rightarrow x'y'z'$	$\psi \in [0, 2\pi]$	espín



Rotació i angles d'Euler II

Explícitament obtenim:

$$\mathbf{R}_\phi : S(x, y, z) \rightarrow S_1(x_1, y_1, z_1 = z)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\theta : S_1(x_1, y_1, z_1) \rightarrow S_2(x_2 = x_1, y_2, z_2 = z')$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_1 \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\psi : S_2(x_2, y_2, z_2 = z') \rightarrow S'(x', y', z')$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{j}_2 \\ \hat{k}' \end{pmatrix}$$



- La rotació $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) : S \rightarrow S'$ és, llavors

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \quad (12)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi \\ -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi \\ s\phi s\theta & -c\phi s\theta & c\theta \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler**
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada



Velocitat angular i angles d'Euler I

- Expressada matricialment, la relació (9) (recordeu que la velocitat angular és la mateixa en qualsevol sistema de referència lligat al sòlid (10)) és

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi \\ \mathbf{W}'(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}^T(t) &\quad \text{on} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\theta \mathbf{R}_\phi + \mathbf{R}_\psi \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\phi + \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{R}}_\phi \\ \mathbf{R}^T &= \mathbf{R}_\phi^T \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T. \end{aligned} \end{aligned}$$

Recordant que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ arribem a

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\psi^T + \mathbf{R}_\psi \left(\dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T \right) \mathbf{R}_\psi^T + \mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \left(\dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^T \right) \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T$$

- Calculant els tres termes de la dreta s'obté

$$\dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\psi^T = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_\psi \left(\dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T \right) \mathbf{R}_\psi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta} \sin \psi \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi & -\dot{\theta} \cos \psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\psi \mathbf{R}_\theta \left(\dot{\mathbf{R}}_\phi \mathbf{R}_\phi^T \right) \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\psi^T = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi} \cos \theta & -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ -\dot{\phi} \cos \theta & 0 & \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi & -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi & 0 \end{pmatrix}$$



- La matriu completa és:

$$\mathbf{W}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi}c\theta + \dot{\psi} & \dot{\theta}s\psi - \dot{\phi}c\psi s\theta \\ -\dot{\phi}c\theta - \dot{\psi} & 0 & \dot{\theta}c\psi + \dot{\phi}s\theta s\psi \\ \dot{\phi}c\psi s\theta - \dot{\theta}s\psi & -\dot{\theta}c\psi - \dot{\phi}s\theta s\psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Eq. (3)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & w'_3 & -w'_2 \\ -w'_3 & 0 & w'_1 \\ w'_2 & -w'_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- D'aquestes expressions obtenim les components de la velocitat angular instantània del sòlid

$$w'_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (14)$$

$$w'_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (15)$$

$$w'_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (16)$$

que són les components de \vec{w} a la base mòbil lligada al sòlid.



Velocitat angular i angles d'Euler III

- La velocitat angular instantània del sòlid es pot descompondre com a suma de tres velocitats angulars instantànies: la de precessió, la de nutació i la d'espín

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}$$

En efecte, emprant les matrius de rotació associades als angles d'Euler tenim

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{i}_1 = \dot{\theta} (\cos \psi \hat{i}' - \sin \psi \hat{j}')$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{k} = \dot{\phi} (\sin \theta \sin \psi \hat{i}' + \sin \theta \cos \psi \hat{j}' + \cos \theta \hat{k}')$$

$$\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{k}'$$

- A la base inercial tenim

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{i}_1 = \dot{\theta} (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j})$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{k}$$

$$\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{k}' = \dot{\psi} (\sin \theta \sin \phi \hat{i} - \sin \theta \cos \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k})$$



amb el que

$$w_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi$$

$$w_2 = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi$$

$$w_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}$$

són les components de \vec{w} a la base inercial. Noteu que les components del vector velocitat angular canvien de base amb la matriu inversa (transposta) de la emprada per als vectors (veure Eqs. (6) i (7)) $w_i(t) = R_{ij}^T(t)w'_j(t)$. Això és perquè estem fent una rotació passiva del vector (veure Apèndix). Efectivament,

$$\begin{aligned} \vec{w} &= w'_j(t)\vec{e}'_j(t) = w'_j(t)R_{ji}(t)\vec{e}_i \\ &= w_i(t)\vec{e}_i \end{aligned}$$

(comproveu explícitament que $w_i = R_{ij}^T w'_j$).



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.**
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada

- Energia cinètica. Considerem un sòlid discret amb masses m_α i posicions $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}'_\alpha$. L'energia cinètica és llavors

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \right) \cdot \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \right)$$

Desenvolupant els parèntesi s'arriba a

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha}^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}'_{CM} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha}^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}}'_{CM} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\alpha}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\alpha})
 \end{aligned}$$

Si no hi ha moviment de translació, $\dot{\vec{R}} = 0$ només sobreviu l'últim terme, que correspon, doncs, a l'energia cinètica de rotació T_{rot} .



- Energia cinètica de rotació. Per calcular el terme de rotació, fem servir el desenvolupament del producte escalar quàdruple

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

amb el que s'arriba directament a

$$(\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) = (\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}) w'_i w'_j$$

⇒ Per arribar a aquest resultat, també es pot utilitzar la següent expressió matricial del producte vectorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{A}_{\vec{b}} \vec{a} \quad (17)$$

on es defineix la matriu antisimètrica $\mathbf{A}_{\vec{b}}$ amb elements de matriu

$$(\mathbf{A}_{\vec{b}})_{ij} = \varepsilon_{ijk} b_k \quad \text{equivalentment} \quad b_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kmn} (\mathbf{A}_{\vec{b}})_{mn}$$

Utilitzant aquesta expressió matricial tenim

$$\begin{aligned}
 & (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) \cdot (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) \\
 = & (\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}} \vec{w}) \cdot (\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}} \vec{w}) = \vec{w}^T \mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}}^T \mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}} \vec{w} \\
 = & - \left(\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}}^2 \right)_{ij} w'_i w'_j
 \end{aligned}$$

Però

$$\begin{aligned}
 - \left(\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}}^2 \right)_{ij} &= - \left(\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}} \right)_{ik} \left(\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}} \right)_{kj} \\
 &= -\varepsilon_{ikm} r'_{\alpha m} \varepsilon_{kjn} r'_{\alpha n} \\
 &= \vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}
 \end{aligned}$$

on s'ha utilitzat la propietat $\varepsilon_{kim} \varepsilon_{kjn} = \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{jm}$.

L'energia cinètica de rotació del sòlid es pot escriure, doncs, com segueix

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}) w'_i w'_j$$

amb índexs i, j sumats.



- **Tensor d'Inèrcia**, \mathbf{I} , definició: és el que té com elements de matriu, calculats a la base lligada al sòlid,

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j})$$

En notació matricial, l'energia cinètica de rotació és

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I}_{O'} \vec{\omega}$$

on les components de $\vec{\omega}$ s'expressen en la base lligada al sòlid. Noteu que, en funció de la matriu antisimètrica associada a \vec{r}'_{α} , podem escriure

$$\mathbf{I}_{O'} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}}^2. \quad (18)$$

- Per al moment total del sòlid obtenim:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}) = M (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}'_{CM}) \quad (19)$$

- Per al moment angular total del sòlid podem fer un desenvolupament similar al de l'energia cinètica:

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_O &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\vec{R} + \vec{r}'_{\alpha} \right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \right) \\
 &= M \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{R}}'_{CM} + \vec{R}'_{CM} \times \dot{\vec{R}} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha})
 \end{aligned}$$

Tenint en compte el desenvolupament del producte vectorial triple

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

o l'expressió matricial del producte vectorial (17), trobem

$$\begin{aligned}
 \vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) &= -(\vec{w} \times \vec{r}'_{\alpha}) \times \vec{r}'_{\alpha} \\
 &= -\mathbf{A}_{\vec{r}'_{\alpha}}^2 \vec{w}
 \end{aligned}$$

amb el que usant (18)

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= M \left(\vec{R} \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}}'_{CM}) + \vec{R}'_{CM} \times \dot{\vec{R}} \right) + \mathbf{I}_{O'} \vec{\omega} \\ &\stackrel{(19)}{=} \vec{R} \times \vec{P} + M \vec{R}'_{CM} \times \dot{\vec{R}} + \mathbf{I}_{O'} \vec{\omega} \end{aligned} \quad (20)$$

Si fem $\vec{R} = \vec{0}$, podem definir el moment angular de rotació del sòlid com

$$\vec{L}_{rot} = \vec{L}_{O'} = \mathbf{I}_{O'} \vec{\omega}$$

és a dir és el moment angular del sòlid respecte a O' .

■ Tenim els següents casos particulars d'interès:

a) $O' = CM \implies \vec{R}'_{CM} = \vec{0}, \vec{R} = \vec{R}_{CM};$

b) O' fix, $\dot{\vec{R}} = \vec{0}^{(1)};$

c) $O' = CM$ fix.

$$^{(1)} \vec{R}_{CM} = \vec{R} + \vec{R}'_{CM} \rightarrow \dot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\vec{R}}'_{CM}$$



Resumim les expressions per a l'energia cinètica i el moment angular en la següent taula

O'	\vec{P}	\vec{L}_O	T
CM	$M\vec{R}_{CM}$	$\vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \mathbf{I}_{CM}\vec{w}$	$\vec{P}^2/2M + \frac{1}{2}\vec{w}^T \mathbf{I}_{CM}\vec{w}$
fix	$M\vec{R}_{CM}$	$\vec{R}_{O'} \times \vec{P} + \mathbf{I}_{O'}\vec{w}$	$\frac{1}{2}\vec{w}^T \mathbf{I}_{O'}\vec{w}$
$CM\ fix$	$\vec{0}$	$\mathbf{I}_{CM}\vec{w}$	$\frac{1}{2}\vec{w}^T \mathbf{I}_{CM}\vec{w}$

- Noteu: en els 3 casos anteriors, el moment lineal del sòlid és $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}_{CM}$. Quan O' està fix es pot triar $O = O'$ amb el que $\vec{R}_{O'} = \vec{0}$ i, per tant,

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_{O'}\vec{w}$$

que és el moment angular, produït exclusivament per la rotació al voltant de l'origen.



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia**
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada



- Explícitament, els elements de matriu del tensor d'inèrcia I_{ij}

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\bar{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j})$$

els podem escriure com

$$\begin{pmatrix} \sum m_{\alpha} (y'_{\alpha}{}^2 + z'_{\alpha}{}^2) & -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha} & -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} z'_{\alpha} \\ -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} y'_{\alpha} & \sum m_{\alpha} (x'_{\alpha}{}^2 + z'_{\alpha}{}^2) & -\sum m_{\alpha} y'_{\alpha} z'_{\alpha} \\ -\sum m_{\alpha} x'_{\alpha} z'_{\alpha} & -\sum m_{\alpha} y'_{\alpha} z'_{\alpha} & \sum m_{\alpha} (x'_{\alpha}{}^2 + y'_{\alpha}{}^2) \end{pmatrix}$$

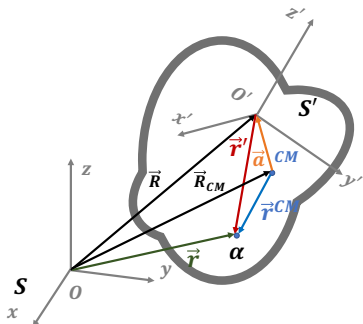
on $x'_{\alpha} = r'_{\alpha 1}$, etc. Veiem que es tracta d'un tensor real simètric i, per tant, diagonalitzable.

- Per a un sòlid continu

$$I_{ij} = \iiint \rho(\bar{r}') (r'^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j) dv'$$

on ρ és la densitat en cada punt del sòlid i dv' és l'element de volum. Hem canviat la notació r'_i per x'_i , $\bar{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$.

- Definim el moment d'inèrcia respecte a l'eix en la direcció del vector unitari \hat{n} com $I_{\hat{n}} := \hat{n}^T \mathbf{I}_O \hat{n}$. Per exemple, $I_{\hat{i}} = I_{11}$, $I_{\hat{j}} = I_{22}$, $I_{\hat{k}} = I_{33}$.



- Teorema dels eixos desplaçats**
 paral·lelament (respecte al CM): Siga un sistema de referència centrat en O' , situat respecte al CM segons $\vec{R} = \vec{R}_{CM} + \vec{a}$, llavors els elements de matriu del tensor d'inèrcia es transformen com segueix

$$I_{ij} = (I_{CM})_{ij} + M (a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

A la demostració només cal considerar en el tensor d'inèrcia que

$$\vec{r}'_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha}^{CM} - \vec{a}$$

i tenir en consideració la propietat

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{CM} = \vec{0} \quad (\text{tema 4})^{(\dagger)}$$

(†) Aquesta propietat fa que els termes creuats siguin tots zero:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{a} \cdot \vec{r}_{\alpha}^{CM} = 0,$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} a_i r_{\alpha j}^{CM} = 0,$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} a_j r_{\alpha i}^{CM} = 0.$$



- **Teorema de Steiner:** Per a un element diagonal del tensor d'inèrcia, per exemple I_{33} , el teorema dels eixos desplaçats s'escriu

$$I_{33} = (I_{CM})_{33} + M(a_1^2 + a_2^2) = I_{CM} + Md^2$$

on d és la distància entre el corresponent eix, en aquest cas \hat{k}' , i l'eix desplaçat que passa pel CM .

- **Eixos principals.** Si diagonalitzem el tensor d'inèrcia, els autovectors determinen els eixos principals. Els autovalors I_1, I_2, I_3 , s'anomenen **moments principals d'inèrcia**.
- Propietat: El valor d'un moment principal d'inèrcia és sempre menor o igual que la suma dels altres dos:

$$I_i \leq I_j + I_k, \quad i \neq j \neq k. \quad (21)$$

Teorema dels eixos perpendiculars: La igualtat es compleix només si el sòlid és pla. En aquest cas el moment principal en la direcció perpendicular al pla és igual a la suma dels altres dos

$$I_3 = I_1 + I_2, \quad \text{sòlid pla; eix 3 perpendicular al pla.} \quad (22)$$



Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia. IV

Aquesta propietat serveix també per als elements diagonals del tensor d'inèrcia en qualsevol sistema d'eixos ($I_{33} = I_{11} + I_{22}$; eix 3 perpendicular al pla).

- Classificació del sòlid:

Baldufa asimètrica: 3 moments principals distints

Baldufa simètrica: 2 moments principals iguals

Baldufa esfèrica: 3 moments principals iguals

Per exemple, un cub és una baldufa esfèrica respecte al sistema lligat al sòlid situat al centre de masses.

- En el sistema d'eixos principals $\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\}$, l'energia cinètica de rotació s'escriu com segueix

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1 w_1'^2 + I_2 w_2'^2 + I_3 w_3'^2)$$

y el moment angular de rotació com

$$\vec{L}_{rot} = I_1 w_1' \hat{i}_P + I_2 w_2' \hat{j}_P + I_3 w_3' \hat{k}_P$$



Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia. V

- En qualsevol punt del sòlid, O' , si la direcció de la velocitat angular és fixa, podem triar $\vec{w} = w'_3 \hat{k}'$. L'energia cinètica de rotació és llavors

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{33} w_3'^2$$

$$I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}'^2$$

on d'_{α} és la distància de la massa m_{α} a l'eix de rotació. El moment angular de rotació serà

$$\vec{L}_{rot} = \mathbf{I}_{O'} \vec{w} = w'_3 \left(I_{13} \hat{i}' + I_{23} \hat{j}' + I_{33} \hat{k}' \right).$$

En un sistema d'eixos principals amb $\hat{k}' = \hat{k}^P$, l'expressió del moment angular (amb $\vec{w} = w_3^P \hat{k}^P$) se simplifica:

$$\vec{L}_{rot} = I_3 w_3^P \hat{k}^P.$$

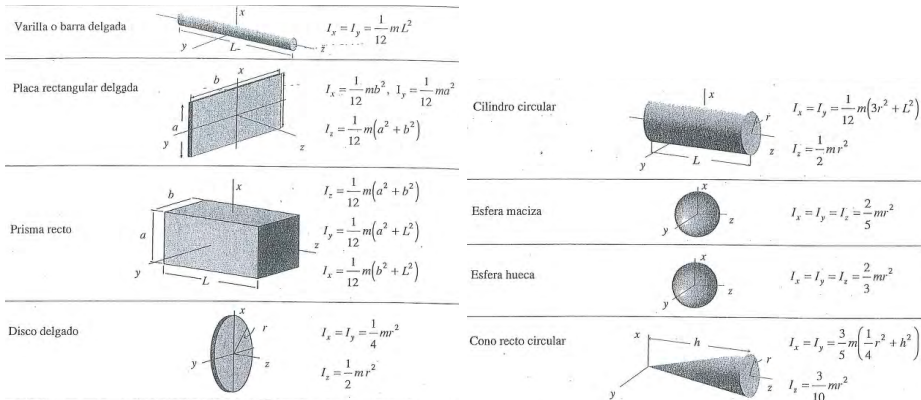


Figura 4: Moments d'inèrcia d'us freqüent. Figura de Rañada (p. 401).



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler**
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada



Equacions d'Euler I

- Dinàmica del sòlid. Volem resoldre el moviment del sòlid en un sistema de forces amb determinades condicions inicials. Hem de plantejar les equacions que ens porten a conèixer el moviment de translació $\vec{R}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ y el de rotació $\mathbf{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$. Com a pas intermedi en el moviment de rotació (primera integració), ens plantejarem l'obtenció de la velocitat angular (Equacions d'Euler)

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\phi}(t)\hat{e}_1 + \dot{\theta}(t)\hat{e}_2 + \dot{\psi}(t)\hat{e}_3$$

- Equacions de moviment. Donada la força total externa \vec{F}^{ext} , tenim les següents equacions de moviment en un sistema inercial

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^{ext}$$

De la primera equació vectorial (3 components) resolem el moviment del CM. Considerem el sistema de referència lligat al sòlid amb origen $O' = \text{fix}$ o CM ($\dot{\vec{R}}_{O'} = \vec{0}$).^(†)



Equacions d'Euler II

(†) Si $O' = \text{fix}$ convé prendre $O = O'$, amb el que $\vec{R}_{O'} = \vec{0}$, i ja tenim resolta tres graus de llibertat.

Usant (20):

$$\vec{L}_O = \vec{R}_{O'} \times \vec{P} + \vec{L}_{O'}$$

amb $\vec{L}_{O'} = \mathbf{I}_{O'} \vec{\omega}$. La segona equació de moviment es pot escriure

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d(\vec{R}_{O'} \times \vec{P})}{dt} + \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} \\ &= \vec{R}_{O'} \times \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{N}_O^{ext} \end{aligned}$$

És a dir,

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{N}_O^{ext} - \vec{R}_{O'} \times \vec{F}^{ext} = \vec{N}_{O'}^{ext} \quad (23)$$

(veiem que, amb $O' = CM$, aquesta equació és vàlida encara que el CM es moga acceleradament, com ja es va demostrar (tema 4), en general, per a un sistema de partícules.) Aquestes sis equacions escalars, ens resolen els sis graus de llibertat del sòlid. Noteu, però, que el moment de la força externa



Equacions d'Euler III

depèn de la posició del sòlid, de manera que la resolució del moviment és, en general, no trivial.

- Equacions d'Euler. Anem a centrar-nos en l'equació de moviment

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{N}_{O'}^{ext}, \quad \text{on} \quad \vec{L}_{O'} = \mathbf{I}_{O'} \vec{\omega}$$

Expressarem aquesta equació en el sistema de referència lligat al sòlid. Recordem que

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \frac{\delta\vec{L}_{O'}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L}_{O'}$$

Utilitzant el sistema d'eixos principals $\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\}$, tenim

$$\begin{aligned} \vec{L}_{O'} &= I_1 \omega_1^P \hat{i}_P + I_2 \omega_2^P \hat{j}_P + I_3 \omega_3^P \hat{k}_P \\ \frac{\delta\vec{L}_{O'}}{\delta t} &= I_1 \dot{\omega}_1^P \hat{i}_P + I_2 \dot{\omega}_2^P \hat{j}_P + I_3 \dot{\omega}_3^P \hat{k}_P \\ \vec{N}_{O'}^{ext} &= N_1^P \hat{i}_P + N_2^P \hat{j}_P + N_3^P \hat{k}_P \end{aligned}$$



Ometrem, a partir d'ara, els índexs P de les components. Les equacions de moviment per \vec{L}_O' són, llavors

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{w}'_1 + (I_3 - I_2) w'_2 w'_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{w}'_2 + (I_1 - I_3) w'_1 w'_3 &= N_2 \\ I_3 \dot{w}'_3 + (I_2 - I_1) w'_1 w'_2 &= N_3 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Aquestes són les equacions d'Euler per a la velocitat angular instantània en el sistema d'eixos principals lligat al sòlid.

- Ja hem comentat la dependència del moment de forces amb l'orientació del sòlid, és a dir amb la rotació $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$, així que la resolució de les equacions d'Euler no és trivial. En el cas de moment de forces nul, $\vec{N} = 0$, la solució s'obté en termes d'integrals el·líptiques.



- Solucions amb $\vec{N} = 0$ i $\vec{w} = \text{constant}$: De les equacions d'Euler, amb $\dot{w}'_i = 0$, s'obtenen les següents igualtats

$$(I_3 - I_2) w'_2 w'_3 = 0$$

$$(I_1 - I_3) w'_1 w'_3 = 0$$

$$(I_2 - I_1) w'_1 w'_2 = 0$$

Per tant, perquè $\vec{w} = \text{constant}$ siga solució cal que \vec{w} siga paral·lel a un eix principal del sòlid. En efecte, analitzem els diferents casos possibles:

- Si I_1, I_2, I_3 són diferents entre si, llavors \vec{w} amb dos components nul·les és solució i, per tant, \vec{w} serà paral·lel a l'eix de la component constant no nul·la.
- Si $I_1 = I_2 \neq I_3$ llavors $w'_3 = 0$ o $w'_1 = w'_2 = 0$. En el primer cas ($w'_3 = 0$) qualsevol eix en el pla 12 és principal. Per tant, qualsevol \vec{w} constant en aquest pla és solució. En el segon cas, w'_3 constant és solució.
- Si $I_1 = I_2 = I_3$ qualsevol eix és principal i qualsevol valor de \vec{w} constant és solució.



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure**
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada



Solucions estables del sòlid lliure I

- Considerem un sòlid asimètric $I_1 < I_2 < I_3$. Hem analitzat que en absència de forces (o moments de forces) hi ha solucions del moviment amb velocitat angular $\vec{w} = \text{constant}$ al voltant dels eixos principals. Demostrarem que les solucions al voltant de \hat{i}_P, \hat{k}_P són estables, mentre que la solució al voltant de \hat{j}_P és inestable (teorema de la raqueta de tennis)
- Considerem una pertorbació de la velocitat angular $\vec{w} = w'_1 \hat{i}_P$ (gir al voltant de \hat{i}_P):

$$\vec{w} = w'_1 \hat{i}_P + \varepsilon_2 \hat{j}_P + \varepsilon_3 \hat{k}_P$$

Les equacions d'Euler en absència de moments són

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{w}'_1 + (I_3 - I_2) \varepsilon_2 \varepsilon_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3) w'_1 \varepsilon_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1) w'_1 \varepsilon_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la primera equació obtenim la solució aproximada $w'_1 \simeq \text{const} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.
Derivant les altres dues equacions tenim

$$\left. \begin{aligned} I_2 \ddot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3) w'_1 \dot{\varepsilon}_3 &= 0 \\ I_3 \ddot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1) w'_1 \dot{\varepsilon}_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$



Substituint en aquestes últimes els valors $\dot{\varepsilon}_{2,3}$ aïllats de les equacions sense derivar, obtenim les equacions de la pertorbació

$$\ddot{\varepsilon}_k + a^2 \varepsilon_k = 0, \quad k = 2, 3$$

on

$$a^2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} w_1'^2 > 0.$$

A causa del signe > 0 les solucions de la pertorbació són de tipus oscil·lador (al voltant de la solució estable). Concretament, s'obté:

$$\varepsilon_2(t) = \frac{A}{\sqrt{I_2(I_2 - I_1)}} \cos(at + \phi) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(t) &= \frac{I_2}{(I_3 - I_1)w_1'} \dot{\varepsilon}_2(t) \\ &= \frac{-A}{\sqrt{I_3(I_3 - I_1)}} \sin(at + \phi) \end{aligned} \quad (26)$$

Per tant, la velocitat angular $\vec{\omega}$ fa una precessió el·líptica al voltant de l'eix estable \hat{i}_P .



- Per a una pertorbació del sòlid girant al voltant de \hat{k}_P :

$$\vec{w} = \varepsilon_1 \hat{i}_P + \varepsilon_2 \hat{j}_P + w'_3 \hat{k}_P$$

obtenim la solució aproximada $w'_3 \simeq \text{const} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Les equacions de la pertorbació són (intercanviu índexs 1 i 3 del cas anterior)

$$\ddot{\varepsilon}_k + b^2 \varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 2$$

on

$$b^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2} w_3'^2 > 0.$$

Una altra vegada, a causa de el signe > 0 , les solucions de la pertorbació són tipus oscil·lador (solució estable). La velocitat angular \vec{w} fa, de nou, una precessió el·líptica al voltant de l'eix estable \vec{k}_P .



- Per a una pertorbació del sòlid girant al voltant de \hat{j}_P :

$$\vec{w} = \varepsilon_1 \hat{i}_P + w'_2 \hat{j}_P + \varepsilon_3 \hat{k}_P$$

obtenim la solució aproximada $w'_2 \simeq \text{const} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Les equacions de la pertorbació són (intercanviu índexs 1 i 2 del primer cas)

$$\ddot{\varepsilon}_k + c^2 \varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 3$$

on

$$c^2 = \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} w_2'^2 < 0$$

Ara, a causa del signe < 0 , les solucions de la pertorbació no són de tipus oscil·lador sinó de tipus exponencial ($\varepsilon_k(t) = A e^{ct} + B e^{-ct}$), de manera que transcorregut un temps $t \sim 1/c$, la pertorbació es fa gran i la solució $w'_2 \simeq \text{const}$ és, per tant, inestable. Quan això passe ja no hi haurà precessió.

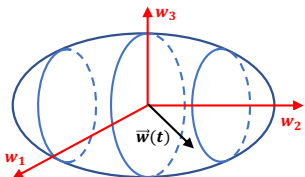


Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure**
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada

Moviment general del sòlid lliure I

- Anem a descriure qualitativament el moviment general del sòlid lliure (sense resoldre explícitament les equacions d'Euler) mitjançant l'anomenada *imatge de Poincaré*, en què s'utilitza un nou concepte lligat al moviment del sòlid que és l'*el·lipsoide d'inèrcia*.
- En el moviment del sòlid lliure, T i \vec{L} són constants de moviment. Com que no hi ha forces externes, podem triar $O = O' = CM$ fix. En el sistema d'eixos principals lligats al sòlid podem escriure



$$\vec{L} = (I_1 w_1', I_2 w_2', I_3 w_3') \quad (27)$$

$$T = \frac{1}{2} (I_1 w_1'^2 + I_2 w_2'^2 + I_3 w_3'^2) \quad (28)$$

$$= \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (29)$$

L'equació (28), respecte a les components de la velocitat angular, és un el·lipsoide de semieixos $\sqrt{2T/I_k}$ (el·lipsoide d'inèrcia). Els punts de la seua superfície constitueixen el lloc geomètric dels possibles valors de \vec{w} . Açò és una primera restricció sobre els possibles valors de \vec{w} .

Noteu que

$$T = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{w}, \quad (30)$$

per tant, la projecció de \vec{w} sobre $\vec{L} = \text{const.}$ és constant. Aquesta és una segona restricció sobre els possibles valors de \vec{w} .

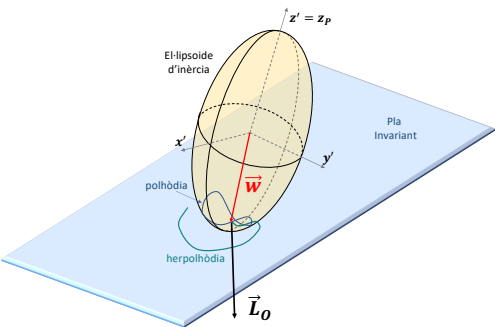


Figura 5: El·lipsoide de Poincaré.

- Corba *polhòdia*. La solució de les equacions d'Euler per \vec{w} , amb determinades condicions inicials, serà una corba concreta sobre la superfície de l'el·lipsoide d'inèrcia: La polhòdia.
- Curva *herpolhòdia*. Observem que el moment angular es pot escriure com el gradient de l'energia cinètica respecte a les components de la velocitat angular

$$\vec{L} = \vec{\nabla}_{\vec{w}} T(w'_k).$$



D'una banda, \vec{L} és perpendicular en cada instant a la superfície de l'el·lipsoide d'inèrcia en el punt corresponent de la polhòdia. D'altra banda $\vec{L} = \text{const.}$ defineix un pla tangent a l'el·lipsoide, que roman fix amb el temps. Per tant, l'el·lipsoide d'inèrcia es mou amb el temps de manera que la polhòdia va contactant el pla tangent. La corba que es va "gravant" en el pla tangent es diu herpolhòdia. El moviment de l'el·lipsoide d'inèrcia en aquest procés de "gravat" és precisament el moviment del sòlid.

Visualització de la construcció de Poincot: <https://demonstrations.wolfram.com/FreePrecessionOfARotatingRigidBody/>



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure**
- 11 Baldufa simètrica pesada



Baldufa simètrica lliure I

- Equacions de moviment: Tenim un sòlid simètric amb $I = I_1 = I_2 \neq I_3$, en absència de moments externs, $\vec{N} = 0$. Les equacions d'Euler són

$$\left. \begin{aligned} I\dot{w}'_1 &= (I - I_3) w'_2 w'_3 \\ I\dot{w}'_2 &= (I_3 - I) w'_1 w'_3 \\ I_3\dot{w}'_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- Solució del moviment. De l'última equació obtenim la solució $w'_3(t) = \text{const.}$. De les dues primeres equacions, definint $\eta = w'_1 + iw'_2$, obtenim l'equació

$$\dot{\eta} - i\Omega\eta = 0$$

amb

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I} w'_3 \quad (31)$$

La solució és

$$\eta(t) = Ce^{i\Omega t}$$

amb $C = Ae^{i\delta}$ complex, el que correspon a les solucions oscil·latòries

$$\left. \begin{aligned} w'_1(t) &= A \cos(\Omega t + \delta) \\ w'_2(t) &= A \sin(\Omega t + \delta) \end{aligned} \right\} \implies \vec{w}'^2 = w_3'^2 + A^2 = \text{const.} \quad (32)$$

Baldufa simètrica lliure II

Per tant, la velocitat angular $\vec{\omega}$ realitza un moviment de precessió al voltant de l'eix mòbil \hat{k}_P amb mòdul constant (**con polhodi**).

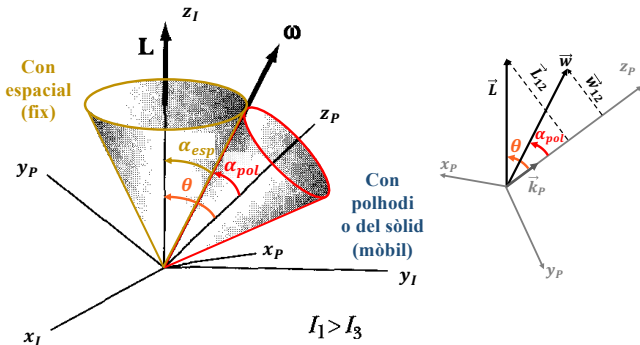


Figura 6: El moment angular \vec{L} el prenem al llarg de l'eix z_I fix. La velocitat angular descriu el con del sòlid a mesura que precessa al voltant de l'eix z_P i i traça el con espacial quan precessa al voltant de l'eix z_I del sistema fixat en l'espai. *Cal no confondre aquesta precessió amb el moviment de precessió al voltant de l'eix z_I que es defineix amb els angles d'Euler!* Podem imaginar el con del cos girant al voltant del con espacial.



Baldufa simètrica lliure III

- Per comprendre el moviment del sòlid, o el dels eixos lligats a ell, recordem que per al moviment lliure $\vec{L} = \text{const.}$. A més, podem escriure

$$\vec{L} = I(w'_1 \hat{i}_P + w'_2 \hat{j}_P) + I_3 w'_3 \hat{k}_P = \begin{cases} \vec{L}_{12} + I_3 w'_3 \hat{k}_P \\ I\vec{w} + (I_3 - I) w'_3 \hat{k}_P, \end{cases} \quad (33)$$

on hem introduït la notació $\vec{w} = \vec{w}_{12} + w'_3 \hat{k}_P$, amb $\vec{w}_{12} = w'_1 \hat{i}_P + w'_2 \hat{j}_P$, i $\vec{L}_{12} = I\vec{w}_{12}$. De (33) deduïm que, \vec{L} , \vec{w} i \hat{k}_P estan en un mateix pla, que gira al voltant de \vec{L} , mantenint fixes les seues posicions relatives en el pla. El con fix que descriu \vec{w} al voltant de \vec{L} es diu **con espacial**.

- El moviment del sòlid s'obté "rodant" sense lliscar el con polhodi sobre el con espacial. L'angle del con polhodi està donat per (Fig. 6 dreta)

$$\tan \alpha_{pol} = |\vec{w}_{12}|/w'_3 = A/w'_3.$$

L'angle de l'eix de la baldufa respecte de l'eix fix $\vec{L} = \text{cte}$ està donat per

$$\tan \theta = \frac{|\vec{L}_{12}|}{L_3} = \frac{I A}{I_3 w'_3} = \text{const.} \quad (34)$$

L'angle del con espacial és $\alpha_{esp} = |\theta - \alpha_{pol}|$.

Baldufa simètrica lliure IV

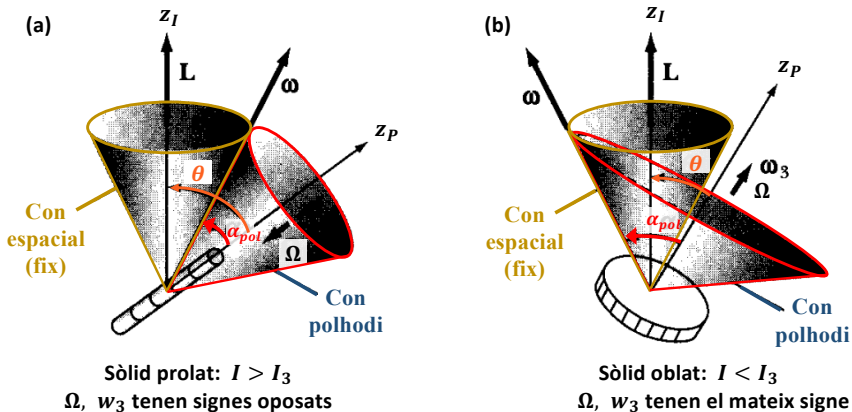


Figura 7: (a) Sòlid prolata: el con polhodi gira (precesa) al voltant de la superfície exterior del con espacial ($\theta > \alpha_{pol}$). (b) Sòlid oblat: el con polhodi gira per dins de la superfície del con espacial ($\theta < \alpha_{pol}$). Adaptació de Fig.11-14 de Thorton & Marrion.



- Partint de (33), podem escriure la següent descomposició de \vec{w}

$$\vec{w} = \frac{\vec{L}}{I} - \frac{(I_3 - I)}{I} w'_3 \hat{k}_P .$$

Emprant la relació (31) i introduint el vector unitari en la direcció de $\vec{L} = L\vec{u}_L$, arribem a

$$\vec{w} = \frac{L}{I} \vec{u}_L - \Omega \hat{k}_P \quad \text{equivalentment} \quad \vec{w} = \frac{\vec{L}_{12}}{I} + \left(\frac{L_3}{I} - \Omega \right) \hat{k}_P \quad (35)$$

Veiem, per tant, que el moviment de la baldufa consta d'una rotació al voltant de \vec{L} (precessió de tots els eixos mòbils) amb freqüència L/I i una rotació al voltant de l'eix principal z_P de la baldufa amb freqüència

$$-\Omega = (I - I_3) w'_3 / I . \quad (36)$$

$\Omega > 0$ ($\Omega < 0$) si $I < I_3$ ($I > I_3$), és a dir si el sòlid és *oblat* (*prolat*).



Baldufa simètrica lliure VI

- Moviment de la baldufa lliure en funció dels angles d'Euler (amb $\vec{u}_L = \hat{k}$). Noteu que l'angle $\theta = \widehat{z_I z_P}$ és directament el segon dels angles d'Euler. Usant (34), $\tan \theta = \text{const.} \Rightarrow \dot{\theta} = 0$. Emprant les relacions (14)–(16) amb $\dot{\theta} = 0$, i definint $w_{12} := |\vec{w}_{12}| (= A = \text{const.})$, obtenim

$$w'_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \quad (37)$$

$$w'_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad (38)$$

$$w'_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (39)$$

$$w_{12} = \sqrt{w_1'^2 + w_2'^2} = \dot{\phi} \sin \theta. \quad (40)$$

Recordeu que hem deixat d'escriure l'índex P per referir-nos a les quantitats mesurades en el sistema d'eixos principals lligat al sòlid; en particular, utilitzem w'_i en comptes de w_i^P per anomenar les components de \vec{w} .

De la figura 6 s'obté que $\sin \theta = L_{12}/L$ (i $\cos \theta = L_3/L$), sent $L_{12} := |\vec{L}_{12}|$. Com que $w_{12} = L_{12}/I$, de (40) obtenim

$$\frac{L_{12}}{I} = \dot{\phi} \frac{L_{12}}{L} \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{L}{I} = \text{const.}}, \quad (41)$$

$$w'_3 \stackrel{(35)}{=} \frac{L_3}{I} - \Omega \stackrel{(39)}{=} \dot{\phi} \frac{L_3}{L} + \dot{\psi} \Rightarrow \frac{L_3}{I} - \Omega \stackrel{(41)}{=} \frac{L}{I} \frac{L_3}{L} + \dot{\psi} \Rightarrow \boxed{\dot{\psi} = -\Omega} \quad (42)$$



En definitiva, arribem a: $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = -\Omega$, i $\dot{\phi} = \frac{L}{I}$. (43)

Nota: Si no hi ha precessió al voltant de \vec{k}_P , tenim que $A = 0$ i/o $\theta = 0$ en la solució del moviment o, equivalentment, $w'_1 = w'_2 = 0$. Per tant, $\vec{L} = I_3 w'_3 \vec{k}_P$ ($L_3 = L$) i $\vec{\omega} = w'_3 \vec{k}_P$. És a dir, en termes d'angles d'Euler, la rotació de la baldufa al voltant del seu eix de simetria es correspon amb la suma de l'espín i la precessió, $\dot{\psi} + \dot{\phi} = w'_3$.

- La Terra, es pot aproximar com un sòlid simètric oblat ($I_3 > I$), en el que $I/(I_3 - I) \simeq 300$. Com que el període de rotació terrestre és $2\pi/w_3^T \simeq 1$ dia, el període de rotació de la velocitat angular terrestre al voltant de l'eix de rotació (precessió) serà ($\Omega_T = w_3^T (I_3 - I)/I$; Eq. (31)),

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega_T} = \frac{I}{I_3 - I} \frac{2\pi}{w_3^T} \simeq 300 \text{ dies.}$$

Aquesta rotació de $\vec{\omega}^T$ s'anomena **precessió de Chandler** (exp.: 433 dies, la discrepància es deu a ser la Terra un sòlid *elàstic*, no exactament rígid).



Continguts

- 1 Definició i graus de llibertat
- 2 Rotació i velocitat angular del sòlid
- 3 Rotació i angles d'Euler
- 4 Velocitat angular i angles d'Euler
- 5 Energia cinètica i moment angular: Tensor d'inèrcia.
- 6 Estudi del Tensor d'inèrcia
- 7 Equacions d'Euler
- 8 Solucions estables del sòlid lliure
- 9 Moviment general del sòlid lliure
- 10 Baldufa simètrica lliure
- 11 Baldufa simètrica pesada

Baldufa simètrica pesada I

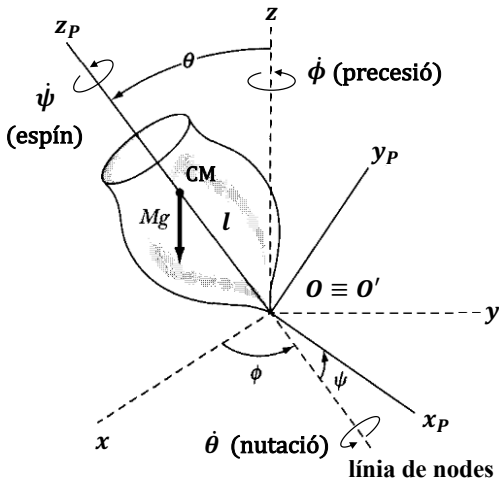


Figura 8: Esquema d'una baldufa simètrica pesada. Adaptació de Thornton & Marion Fig. 11-15.

- Considerem una baldufa en rotació sota l'acció del camp gravitatori, mantenint un punt fix $O = O'$ (el vèrtex de la baldufa). La força total externa sobre la baldufa, amb l'eix \hat{k} cap amunt (Fig. 8), serà

$$\vec{F}^{ext} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} g \hat{k} = -Mg \hat{k}.$$

L'energia potencial de la baldufa és

$$V = g \sum_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} = Mgl \cos \theta$$

on

M : massa total,

l : distància des de O al CM

θ : angle entre els eixos \hat{k} i \hat{k}_P .

- La baldufa simètrica, per definició, verifica que $I_1 = I_2 = I$. A més, com la força de la gravetat és uniforme en la direcció \hat{k} , el moment total de les forces externes és

$$\vec{N}^{ext} = \left(-\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) \times g \hat{k} = -Mgl \left(\hat{k}_P \times \hat{k} \right).$$

$M\vec{R}_{CM} = Ml\hat{k}_P$

Per tant, \vec{N}^{ext} té la direcció de la línia de nodes ja que és perpendicular a \hat{k} i \hat{k}_P . Conseqüentment, la component N_z^{ext} en el sistema inercial és nul·la, de manera que L_z és una constant del moviment. A partir de $\vec{L}_{O'} = (Iw'_1, Iw'_2, I_3w'_3)$ en el sistema lligat al sòlid, podem obtenir L_O del sistema inercial utilitzant la matriu transposta d'angles d'Euler (13), e.d. $\vec{L}_O = \mathbf{R}^T(\phi, \theta, \psi)\vec{L}_{O'}$, d'on la component L_z resulta:

$$\begin{aligned} L_z &= Iw'_1 \sin \theta \sin \psi + Iw'_2 \sin \theta \cos \psi + I_3w'_3 \cos \theta \\ &= I \sin \theta (w'_1 \sin \psi + w'_2 \cos \psi) + I_3w'_3 \cos \theta. \end{aligned}$$

Ara substituïm les expressions de w'_1 i w'_2 per (14) i (15), respectivament. S'obté

$$L_z = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 w'_3 \cos \theta = \text{const.}$$

Definint les constants de moviment a i b com

$$a = \frac{I_3 w'_3}{I}, \quad b = \frac{L_z}{I}. \quad (44)$$

Obtenim

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}. \quad (45)$$

- L_3 és la segona constant del moviment,

$$L_3 = I_3 w'_3 = \text{const.} \quad (46)$$

L_3 es conserva perquè $I_1 = I_2 = I$, en eixe cas, la darrera equació d'Euler (24) esdevé $I_3 \dot{w}'_3 = N_3^{\text{ext}}$. En general, $N_z^{\text{ext}} = 0$ no garanteix la conservació de L_3 ja que el sistema lligat no és inercial. Però en aquest cas, estem prenent que $O = O'$ i, per tant, $\vec{R}_{O'} = \vec{0}$, fent que de l'equació (23), $\vec{N}_O^{\text{ext}} = \vec{N}_{O'}^{\text{ext}}$. Així que, en aquest cas, $N_z^{\text{ext}} = 0 \rightarrow N_3^{\text{ext}} = 0$.



- La tercera constant de moviment és l'energia total del sistema

$$E = T + V$$

L'energia cinètica de rotació amb $O' = O$ fix és

$$\begin{aligned} T &= \frac{I}{2}(w_1'^2 + w_2'^2) + \frac{I_3}{2}w_3'^2 \\ &= \frac{I}{2} \left((\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 \right) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \\ &= \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

En aquesta expressió, podem eliminar la variable $\dot{\phi}$ utilitzant la relació obtinguda de la conservació de L_z (45). Finalment, cal una altra llei de conservació per eliminar $\dot{\psi}$. Aquesta relació s'obté de la tercera equació d'Euler (recordem que $L_3 = \text{const.}$; Eq. (46))

$$L_3 = I_3 w_3' = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{const.} \quad (47)$$



Amb tot això, la conservació de l'energia es pot escriure finalment com

$$E - \frac{I_3}{2} \omega_3'^2 = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta. \quad (48)$$

Per analitzar les solucions, definim una nova variable u

$$\begin{aligned} -1 &\leq u = \cos \theta \leq +1 \\ \dot{u} &= -\dot{\theta} \sin \theta, \end{aligned} \quad (49)$$

i unes noves constants

$$\begin{aligned} E' &= E - \frac{I_3}{2} \omega_3'^2 \\ \alpha &= 2E'/I \\ \beta &= 2Mgl/I \end{aligned}$$

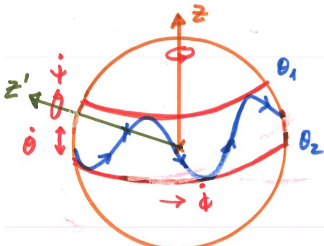
L'equació de moviment esdevé en

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \equiv f(u) \geq 0 \quad (50)$$

Aquesta equació diferencial resol el moviment de nutació $\theta(t)$, però en termes d'integrals el·líptiques, que són difícils d'interpretar. En la baldufa simètrica pesada hi ha un moment de forces originades per la gravetat i la força de reacció en el vèrtex, així que el moment angular \vec{L} no és constant (encara que $L_z = \text{const.}$) i, per tant, esperem que θ canvie en el temps.

Tanmateix, podem intentar analitzar les solucions partint de la relació (50). Tenim que $f(u)$ és una funció cúbica que satisfà les condicions següents

- 1 $f(u \rightarrow \pm\infty) \sim \beta u^3 \gtrless 0$
- 2 $f(u \rightarrow \pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$
- 3 $\exists f(u) \geq 0$ per a $u \in [u_1, u_2] \subset [-1, +1]$ (condició física de existència de solucions).



Amb aquestes condicions, el moviment estarà fitat en $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Analitzant $b - a \cos \theta$ podem saber si hi ha canvi de signe en la precessió $\dot{\phi}$ per a algun valor de θ .



- Finalment, a partir de $\theta(t)$ podem integrar $\dot{\phi}(t)$ utilitzant (45), amb el que s'obté la precessió $\phi(t)$. Per obtenir $\dot{\psi}$, utilitzem que, de (44), s'obté $L_3 = I_3 \omega'_3 = Ia$, i ara gistem (46) per escriure

$$L_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = Ia \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{Ia}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta. \quad (51)$$

Integrant (51) s'obté el moviment de spin $\psi(t)$.

- Si prescindim de la gravetat i considerem $O = CM$, substituint la solució del moviment lliure (43), $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = -\Omega$, $\dot{\phi} = L/I$, en (51) ens porta a $\cos \theta = I_3 \omega'_3 / L$. Aquest valor de $\cos \theta$ satisfà l'equació diferencial de θ (comproveu).

Mecànica I: Apèndix: Vectors i Rotacions

Miguel Ángel Aloy Torás

Departament d'Astronomia i Astrofísica

miguel.a.aloy@uv.es

Curs 2023-2024

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



- Sistema de referència ortogonal a dretes: $OXYZ$
- Coordenades cartesianes $\{x, y, z\}$ d'un punt $P(x, y, z)$ són les projeccions als eixos coordenats OX , OY , OZ respectivament.
- Base de vectors

$$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \equiv \{\hat{e}_i; i = 1, 2, 3\} \quad (1)$$

Són vectors d'origen O i de longitud unitat al llarg dels eixos coordenats.

- Vector lliure

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} = (v_x, v_y, v_z) \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i = v_i \hat{e}_i \quad (\text{índexs repetits}) \quad (3)$$

Es pot transportar paral·lelament a l'origen de manera que v_x, v_y, v_z són les projeccions sobre els eixos de coordenades.

■ Mòdul d'un vector

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (4)$$

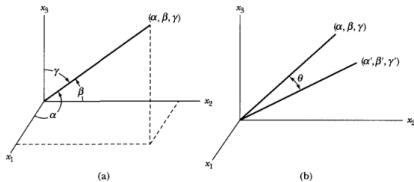


FIGURE 14 (a) A line segment is defined by angles (α, β, γ) from the coordinate axes. (b) Another line segment is added that is defined by angles $(\alpha', \beta', \gamma')$.

- **Cosinus directors.** Són els cosinus dels angles que forma \vec{v} amb els eixos (Fig. 1)

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}, \quad (5)$$

$$\vec{v} = (v \cos \alpha, v \cos \beta, v \cos \gamma) \quad (6)$$

Es té la propietat

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (7)$$

Figura 1: De Thorton & Marrion (2004)



■ Operacions $\left[\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \right]$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \quad (8)$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \quad (9)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



- Es defineix el producte escalar entre dos vectors \vec{a} i \vec{b} com

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i \quad (10)$$

El producte escalar és commutatiu i distributiu

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (11)$$

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \mu (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (12)$$

- D'altra banda, el teorema del cosinus (demostrar geomètricament!) ens diu

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \quad (13)$$

Tenint en compte el desenvolupament

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (14)$$



obtenim la següent definició alternativa del producte escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad (15)$$

sent θ l'angle que formen \vec{a} i \vec{b} . Com a conseqüència s'obté que si el producte escalar de dos vectors és nul llavors aquests són perpendiculars entre si (obviament, cal que cap dels dos vectors siga nul).

Per als vectors base es compleix

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (16)$$

sent δ_{ij} l'anomenada delta de Kronecker.

Per a un vector \vec{a} els cosinus directors seran

$$\cos \alpha_i = \hat{e}_i \cdot \vec{a}/a \quad (17)$$



Producte escalar i vectorial III

- Relació trigonomètrica de l'angle θ amb els cosinus directors de \vec{a} i \vec{b} . De la definició de producte escalar, obtenim la següent relació per a l'angle entre dos vectors

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \quad (18)$$

- Es defineix el producte vectorial entre dos vectors \vec{a} i \vec{b} com

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (19)$$

Utilitzant el tensor totalment antisimètrica de Levi-Civita ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$) podem escriure

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{suma per a } j, k) \quad (20)$$

El producte vectorial és anticommutatiu. Per als vectors base tenim

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (21)$$



En efecte, de la seua definició

$$(\hat{e}_i)_p = \delta_{ip}, \quad (\hat{e}_j)_q = \delta_{jq} \quad (22)$$

llavors

$$(\hat{e}_i \times \hat{e}_j)_m = \epsilon_{mpq} \delta_{ip} \delta_{jq} = \epsilon_{mij} = \epsilon_{kij} \delta_{km} \quad (23)$$

$$= \epsilon_{ijk} (\hat{e}_k)_m = (\epsilon_{ijk} \hat{e}_k)_m \quad (24)$$

és a dir,

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = 0, \quad i = j \quad (25)$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k, \quad (i \neq j \neq k \text{ cíclics}) \quad (26)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials**
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



■ Producte mixt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (27)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (28)$$

$$= \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (29)$$

■ Producte vectorial triple

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \quad (30)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (31)$$

■ Producte escalar quàdruple

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (32)$$



- Exercici: Per demostrar les identitats, tant del producte vectorial triple com la del producte escalar quàdruple, cal fer ús de la següent propietat el tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad (33)$$

Aquesta darrera identitat és clara, ja que, per a cada valor del subíndex i , els subíndexs j, k així com els m, n han de ser diferents a i i diferents entre si perquè el terme corresponent en el sumatori de i no s'anul·le.

- Propietats del producte vectorial. Siga $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Llavors

- 1 \vec{c} és perpendicular \vec{a} i \vec{b}

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \quad (34)$$

- 2 El mòdul de \vec{c} és el producte dels mòduls de \vec{a} i \vec{b} pel sinus de l'angle entre ells

$$c^2 = (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2b^2 \sin^2 \theta \quad (35)$$



- 3 El sentit de \vec{c} és a dretes des de \vec{a} cap a \vec{b} pel camí més curt ($\sin \theta > 0$). Per comprovar això últim, podem considerar el cas particular en què \vec{a} està alineat amb l'eix OX (per tant, $\vec{a} = a\hat{i}$) i \vec{b} contingut en el pla (x, y) , és a dir, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$. Aquesta situació sempre és possible amb simplement rotar adequadament el sistema de referència. En eixe cas:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a\hat{i} \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = ab_y\hat{k}. \quad (36)$$

Com que $a > 0$, la component de \hat{k} té el signe de b_y (orientació a dretes). De forma més general, podem provar que la projecció de \vec{b} sobre $\vec{c} \times \vec{a}$ és positiva. En efecte

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = [(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}] \cdot \vec{b} \quad (37)$$

$$= [(\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{a}] \cdot \vec{b} \quad (38)$$

$$= a^2b^2 - a^2b^2 \cos^2 \theta > 0 \quad (39)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions**
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



- Matriu de Rotació: Siguen dos sistemes de referència ortogonals $OXYZ$ i $OX'Y'Z'$ amb la mateixa orientació, diguem a dretes, i vectors base $\{\hat{e}_i\}$ i $\{\hat{e}'_i\}$, és a dir

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij} \quad (40)$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k, \quad (i, j, k \text{ cíclics}) \quad (41)$$

$$\hat{e}'_i \times \hat{e}'_j = \hat{e}'_k. \quad (i, j, k \text{ cíclics}) \quad (42)$$

Es defineix la matriu de rotació \mathbf{R} a l'aplicació que transforma una base ortonormal en una altra, $\hat{e}'_i = \mathbf{R}\hat{e}_i$, conservant l'orientació. Explícitament, siga

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \quad (43)$$

llavors, en funció dels elements de matriu R_{ij} , **definim**

$$\hat{e}'_i = R_{ij}\hat{e}_j, \quad \text{suma per a } j \quad (44)$$



tindrem

$$(\hat{e}'_i)_k = R_{ij}(\hat{e}_j)_k, \quad \text{suma per a } j \quad (45)$$

$$= R_{ij}\delta_{jk} = R_{ik}. \quad (46)$$

Per tant,

$$\hat{e}'_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3}) \quad (47)$$

$$(48)$$

i usant l'expressió (17)¹, tenim

$$\cos \alpha_j = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i = (\hat{e}_j)_k R_{km} (\hat{e}_i)_m = \delta_{kj} R_{km} \delta_{mi} = R_{ji} \quad (49)$$

- Les components de \hat{e}'_i en $OXYZ$ són les files de \mathbf{R} .
- Els elements de matriu R_{ij} són els cosinus directors de \hat{e}'_j respecte del sistema $OXYZ$.



Matrius de rotacions III

- Matriu de transformació entre bases: Amb abús de llenguatge matricial, observant la relació anterior $\hat{e}'_i = R_{ij}\hat{e}_j$, podem establir la següent igualtat entre vectors base

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

- Propietats de les matrius de rotació: D'una banda, de la ortonormalitat de $\{\hat{e}'_i\}$, obtenim

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = R_{ik}R_{jk}^T = \delta_{ij} \implies \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad (51)$$

D'altra banda, com es conserva l'orientació, del producte mixt obtenim (Eq. 29)

$$\hat{e}'_1 \cdot (\hat{e}'_2 \times \hat{e}'_3) = +1 \implies \det \mathbf{R} = +1 \quad (52)$$

És a dir, una matriu de rotació és aquella en que la inversa és la seva trasposta amb determinant unitat.



Matrius de rotacions IV

- Rotació activa. Siga \vec{a}' el resultat de “girar” \vec{a} fent una rotació \mathbf{R} (rotació activa), $\vec{a}' = \mathbf{R}\vec{a}$, i siguen a'_i i a_i , les seues respectives components a la base $\{\vec{e}_i\}$ abans i després de fer la rotació, respectivament. D'una banda

$$\vec{a}' = a'_i \hat{e}_i, \quad (53)$$

d'altra banda

$$\vec{a}' = \mathbf{R}\vec{a} = \mathbf{R}(a_j \hat{e}_j) = a_j \mathbf{R}\hat{e}_j = a_j \hat{e}'_j = a_j R_{ji} \hat{e}_i \quad (54)$$

Comparant

$$a'_i = a_j R_{ji} = R_{ij}^T a_j \quad (55)$$

Explícitament

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (56)$$



Les components de a'_i es transformen amb la matriu transposta, considerant com hem definit la rotació. Les components de \vec{a}' a la base girada (amb la mateixa rotació \mathbf{R}) $\{\hat{e}'_i\}$ seran les mateixes que les de \vec{a} a la base inicial. En efecte,

$$\vec{a}' = (R_{ij}^T a_j) \hat{e}_i = a_j R_{ji} \hat{e}_i = a_j \hat{e}'_j \quad (57)$$

- Rotació passiva. Es defineixen les components a_i^{pas} d'un vector $\vec{a} = a_j \hat{e}_j$, com les seues components en la base girada (rotació passiva). Invertint la relació $\hat{e}'_i = R_{ij} \hat{e}_j$ tenim $\hat{e}_i = R_{ij}^T \hat{e}'_j$ (la matriu inversa és la transposta). Per tant,

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i = a_i R_{ij}^T \hat{e}'_j \quad (58)$$

d'on

$$a_j^{pas} = a_i R_{ij}^T = R_{ji} a_i \quad (59)$$



En notació matricial tindrem

$$\begin{pmatrix} a_1^{pas} \\ a_2^{pas} \\ a_3^{pas} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

En aquest cas, doncs, les components passives s'obtenen amb la mateixa matriu de transformació que la dels vectors base (Eq. (50)).

¹Noteu que $|\hat{e}_i'| = 1$ per ser la base ortonormal.



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions**
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



- Conservació del producte escalar

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = a'_i b'_i = R_{im}^T R_{in}^T a_m b_n = R_{mi}^T R_{in} a_m b_n = \delta_{mn} a_m b_n = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (61)$$

Alternativament, podriem haver fet la demostració en matrius:

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (\vec{a}^T \mathbf{R}^T)(\mathbf{R}\vec{b}) = \vec{a}^T \mathbf{I}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (62)$$

En particular, es conserva el mòdul d'un vector

$$(\vec{a}')^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad (63)$$

- Conservació de l'angle. Donats dos vectors \vec{a} i \vec{b} la quantitat escalar

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} \quad (64)$$

és invariant sota rotacions. És a dir les rotacions conserven l'angle entre dos vectors.



- Transformació del producte vectorial: El producte vectorial es transforma com un vector sota rotacions. És a dir, si $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, aleshores $\mathbf{R}\vec{c} = \mathbf{R}\vec{a} \times \mathbf{R}\vec{b}$. Demostració:

$$\mathbf{R}\vec{a} \times \mathbf{R}\vec{b} = \mathbf{R}(a_i \hat{e}_i) \times \mathbf{R}(b_j \hat{e}_j) \quad (65)$$

$$= (a_i \hat{e}'_i) \times (b_j \hat{e}'_j) \quad (66)$$

$$= \epsilon_{kij} a_i b_j \hat{e}'_k = (\vec{a} \times \vec{b})_k \mathbf{R}\hat{e}_k \quad (67)$$

$$= \mathbf{R}\left((\vec{a} \times \vec{b})_k \hat{e}_k\right) = \mathbf{R}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{c.v.d.} \quad (68)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors**
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



- Es defineix la reflexió espacial \mathbf{P} a l'operació que canvia el sentit dels eixos del sistema de referència $OXYZ \rightarrow OX_P Y_P Z_P$. És a dir, donada la base

$$\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\} = \{\hat{e}_i^P; i = 1, 2, 3\} \quad (69)$$

en el sistema reflectit, s'ha de complir

$$\{\hat{i}_P, \hat{j}_P, \hat{k}_P\} = \{-\hat{i}, -\hat{j}, -\hat{k}\} \quad (70)$$

L'operació \mathbf{P} canvia a més l'orientació del sistema de referència.

- La matriu canvi de base és doncs

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (71)$$



Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors II

- Anomenem **vector** \vec{a} , pròpiament dit, al que canvia de signe les seues components segons \mathbf{P}

$$\vec{a}^P = (\mathbf{P}\vec{a}) = -\vec{a}. \quad (72)$$

- Anomenem **pseudovector** si el vector no canvia les seues components. Per exemple, el producte vectorial de dos vectors \vec{a} i \vec{b} és un pseudovector

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}^P \times \vec{b}^P. \quad (73)$$

- Anomenem **escalar** al qual no canvia el seu valor sota rotacions i tampoc sota reflexió espacial. Anomenarem **pseudoescalar** si no canvia el seu valor sota rotacions però canvia de signe sota reflexió espacial.
 - Són vectors, la posició \vec{r} , velocitat \vec{v} , acceleració \vec{a} , força \vec{F}, \dots
 - Són pseudovectors els productes vectorials de dos vectors, productes vectorials de dos pseudovectors,...
 - Són escalars els productes escalars de vectors o pseudovectors.
 - Són pseudoescalars els productes escalars d'un vector per un pseudovector,...



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)**
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)**
 - **Descripció**
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació

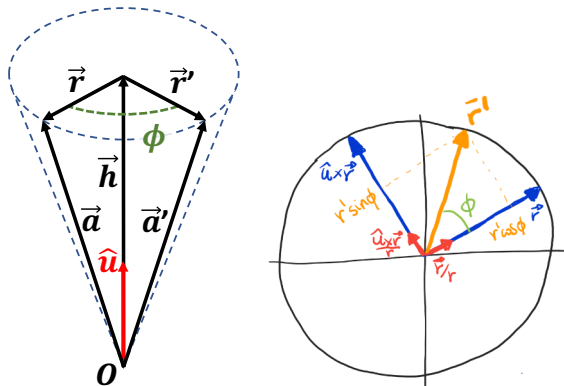


Figura 2: Esquerra: Esquema d'una rotació cònica d'angle ϕ . Dreta: Base ortonormal $\{\vec{r}/r, \hat{u} \times \vec{r}/r\}$ sobre la base del con.



Descripció II

Siga un con amb vèrtex O , alçada $h = |\vec{h}|$, radi de la base $r = |\vec{r}|$ i eix definit pel vector unitari $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$, amb origen O i sentit cap a la base del con. Siga el vector \vec{a} una aresta del con amb origen O i afix a la base del con, tal que

$$\vec{a} = \vec{h} + \vec{r}$$

on \vec{h} és el vector amb origen O i afix al centre de la base del con i \vec{r} és el radi vector que va del centre de la base fins \vec{a} .

Una rotació $\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}$ d'angle ϕ al voltant de \hat{u} transforma \vec{a} en \vec{a}' tal que

$$\vec{a}' = \vec{h} + \vec{r}'$$

sent \vec{r}' el radi que forma un angle ϕ amb \vec{r} .



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)**
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica**
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



Relació vectorial de la rotació cònica I

Considerem la base de vectors ortonormals \vec{r}/r i $\hat{u} \times \vec{r}/r$, tots dos a la base del con. Expressem \vec{r}' en funció d'aquesta base

$$\vec{r}' = (r' \cos \phi) \frac{\vec{r}}{r} + (r' \sin \phi) \frac{\hat{u} \times \vec{r}}{r}$$

i com $r = r'$, s'obté

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \phi + \hat{u} \times \vec{r} \sin \phi$$

El vector \vec{h} el podem escriure en funció de \hat{u} i \vec{a} com

$$\vec{h} = (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u}$$

amb el que

$$\vec{r} = \vec{a} - (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u}$$



Relació vectorial de la rotació cònica II

i, per tant

$$\begin{aligned}
 \vec{a}' &= (\vec{a} - \vec{r}) + \vec{r}' \\
 &= (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u} + \vec{r} \cos \phi + \hat{u} \times \vec{r} \sin \phi \\
 &= (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u} + [\vec{a} - (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u}] \cos \phi + \\
 &\quad \hat{u} \times [\vec{a} - (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u}] \sin \phi
 \end{aligned}$$

Finalment, com $\hat{u} \times \hat{u} = 0$, obtenim

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos \phi + (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u} (1 - \cos \phi) + \hat{u} \times \vec{a} \sin \phi \quad (74)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - **Matriu antisimètrica associada al producte vectorial**
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació



Matriu antisimètrica associada al producte vectorial I

- Escrivim explícitament el següent producte vectorial $\hat{u} \times \vec{a}$

$$\begin{aligned}\hat{u} \times \vec{a} &= (u_2 a_3 - u_3 a_2) \vec{i} + \\ &\quad (u_3 a_1 - u_1 a_3) \vec{j} + \\ &\quad (u_1 a_2 - u_2 a_1) \vec{k}\end{aligned}$$

Aquest resultat es pot expressar matricialment com segueix

$$\begin{pmatrix} (\hat{u} \times \vec{a})_1 \\ (\hat{u} \times \vec{a})_2 \\ (\hat{u} \times \vec{a})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Definim la següent matriu antisimètrica associada al vector unitari \hat{u}

$$\mathbf{A}_{\hat{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a} = \hat{u} \times \vec{a} \tag{75}$$



Matriu antisimètrica associada al producte vectorial II

Calculem $\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a} &= \mathbf{A}_{\hat{u}} (\mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a}) \\ &= \hat{u} \times (\hat{u} \times \vec{a}) \\ &= (\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u} - \vec{a}\end{aligned}$$

d'on

$$(\hat{u} \cdot \vec{a}) \hat{u} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2) \vec{a} \quad (76)$$



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)**
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació**
 - Forma exponencial de la rotació



Parametrització matricial de la rotació I

- Volem obtenir una matriu $\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}$ tal que

$$\vec{a}' = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} \vec{a}$$

Considerant la parametrització vectorial de la rotació (eqs. (74)) i les expressions anteriors del producte vectorial (eq. (75)) i escalar (eq.(76)), obtenim la forma matricial matricial

Fòrmula de Rotació de Rodrigues

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}} \sin \phi + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 (1 - \cos \phi)$$



Parametrització matricial de la rotació II

on

$$\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 = \begin{pmatrix} -1 + u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & -1 + u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & -1 + u_3^2 \end{pmatrix}$$

de manera que les components de \vec{a} , per a una rotació activa són,

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi}^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Determinació d'angle girat per una rotació. Coneixent l'eix de rotació, és directe obtenir l'angle a partir de l'expressió matricial

$$\text{Tr } \mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = 1 + 2 \cos \phi$$



Parametrització matricial de la rotació III

- L'eix de rotació l'obtindrem partint de que la direcció determinada per \hat{u} es deixa invariant sota la rotació:

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi}\hat{u} = \hat{u} \implies (\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} - \mathbf{I})\hat{u} = \vec{0}$$

Cal que $\det(\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} - \mathbf{I}) = 0$ per a que el sistema siga compatible indeterminat amb solució no trivial.



Continguts

- 1 Definicions
- 2 Producte escalar i vectorial
- 3 Identitats vectorials
- 4 Matrius de rotacions
- 5 Propietats sota rotacions
- 6 Reflexió espacial: pseudoescalars i pseudovectors
- 7 Rotació eix-àngle (rotació cònica)**
 - Descripció
 - Relació vectorial de la rotació cònica
 - Matriu antisimètrica associada al producte vectorial
 - Parametrització matricial de la rotació
 - Forma exponencial de la rotació**



Forma exponencial de la rotació I

- Calculem les potències successives de $\mathbf{A}_{\hat{u}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\hat{u}}^3 \vec{a} &= \mathbf{A}_{\hat{u}} (\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a}) \\ &= -\hat{u} \times \vec{a} = -\mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a}\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{\hat{u}}^4 \vec{a} = -\mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \vec{a}$$

$$\mathbf{A}_{\hat{u}}^5 \vec{a} = \mathbf{A}_{\hat{u}} \vec{a}, \dots$$

- Utilitzem ara, els desenvolupaments de Taylor de $\sin \phi$ i $\cos \phi$ en l'expressió de la rotació

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\hat{u}, \phi} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}} \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \dots \right) \\ &\quad + \mathbf{A}_{\hat{u}}^2 \left(\frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_{\hat{u}} \phi + \frac{(\mathbf{A}_{\hat{u}} \phi)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}_{\hat{u}} \phi)^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

Aquest desenvolupament ens porta a la següent expressió



Fòrmula exponencial de la Rotació

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi} = \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}\phi)$$

- Noteu que amb la fòrmula exponencial, és fàcil demostrar que:

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi+\phi'} = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi}\mathbf{R}_{\hat{u},\phi'}$$

Demostració :

$$\mathbf{R}_{\hat{u},\phi+\phi'} = \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}(\phi + \phi')) = \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}\phi) \exp(\mathbf{A}_{\hat{u}}\phi') = \mathbf{R}_{\hat{u},\phi}\mathbf{R}_{\hat{u},\phi'}$$